Subject:
Year: Month: Date: ۱

ریاضیات مهندسی پیشرفته
دکتر هادی خوش شاد

فهرست مطالب:
- جبر خطی
- دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی
- توابع خاص
- معادلات دیفرانسیل پاره‌ای
- حساب تغییرات
- مقدمه‌ای بر آمار مهندسی
- بهینه‌سازی

مراجع:

G. strang, Linear Algebra and it's Applications.
D. G. Zill, M. R. Cullen, Advanced engineering mathematics.
E. Kreyszig, Advanced engineering mathematics.
N. H. Asmar, partial differential equations and boundary value problems.
Edward De Bono → روش های تفکر

نحوه ارزیابی:
میان ترم 8 نمره (دوشنبه 22, 8, 91)
پایان ترم ۱۰ نمره
تمرین 2 نمره

Ftp: // ftpmech. iust. ac. ir user: mechiust pass: —

Subject:
Year. Month. Date.

مراجع حساب تغییرات:

Calculus Of Variations, with application to physics & engineering
R. Weinstock
The calculus of variations, Brüc Van Brünt
Calculus of Variations, I. M. Gelfand, S.V. Fomin.

مراجع بهینه سازی:

Engineering Optimization Theory and practice, S. Rao, John Willey & Sons Inc.
Numerical optimization techniques for engineering design, G. N. Vander plaats,
McGraw-Hill.

مراجع طراحی آزمایش‌ها:

statistical design and analysis of experiments with applications
to engineering, R. L. Mason, R. F. Gunst, J. L. Hess, Willey

PAPCO

Subject
Date ۲

جبر خطی: کمیت ها:

vectors → direction , magnitude.
scalars → magnitude.
Tensors

بردارها:

Geometric Vectors : بردارهای هندسی

↳ vectors in 2D and 3D → vector space $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

نرم بردار : $\|\vec{a}\| = \left[a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right]^{\frac{1}{2}}$ "Norm"

ایجاد یک بردار یکه در راستای یک بردار خاص: $\hat{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

بردارهای n بعدی:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\|\vec{x}\| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{x} = \vec{y} \longleftrightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3,\ \dots,\ x_n = y_n$$

null (zero) vector in $\mathbb{R}^n$ = $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$

PAPCO

Subject
Date

if x, y, z are n-vectors and α, β are scalars:

$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ $\quad$ $\vec{x} + 0 = 0 + \vec{x} = \vec{x}$

$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ $\quad$ $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ $\quad$ $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$

"Vector space" فضای برداری :

مجموعه برداری : $V = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots\}$

یک فضای برداری روی عملیات جمع و ضرب عدد بسته است.
مجموعه‌ای از بردارها هستند که اگر جمع شوند و یا در یک عدد ضرب شوند، یک بردار دیگر در آن مجموعه بردار را بدست می‌دهند.

if $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \subset V$ & α is scalar

then: $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \subset V$, $(\alpha\vec{u}_1) \subset V$ (closure Axiom) اصل بسته بودن

کوچکترین فضای برداری : $\vec{0}$

زیر فضا (Subspace) : فضای برداری

if $W \subset V \rightarrow W$ is a subspace of V if:

1. $(\vec{x} + \vec{y})$ is in W if $\vec{x}, \vec{y}$ are in W
2. $\alpha\vec{x}$ is in W if $\vec{x}$ is in W & α is a scalar.

کوچکترین زیر فضای هر فضای برداری : $\vec{0}$
بزرگترین زیر فضای هر فضای برداری : خودش

:

PAPCO

استقلال خطی : "Linear Independance"

$$S = \{ \vec{x}_1 , \vec{x}_2 , \dots , \vec{x}_m \}$$

S مستقل خطی است اگر :

$$C_1 \vec{x}_1 + C_2 \vec{x}_2 + \dots + C_m \vec{x}_m = 0 \longrightarrow C_i = 0$$

* یک مجموعه بردار مستقل خطی، یک فضای برداری نیست.

پوشش یک فضای برداری : به فضای برداری

$$W = \{ \vec{x}_1 , \vec{x}_2 , \dots , \vec{x}_m \} \subset V$$

W را یک زیر مجموعه تراکم (spacing set) می‌گوییم، اگر هر بردار دلخواه در فضای برداری V را بتوان به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای زیر مجموعه W بیان کرد.

مانند $(\hat{k} , \hat{j} , \hat{i})$ برای $\mathbb{R}^3$.

پایه یک فضای برداری : (Basis of a vector Space)

$$W = \{ \vec{x}_1 , \vec{x}_2 , \dots , \vec{x}_m \} \subset \mathbb{R}^n$$

W یک پایه برای فضای برداری $\mathbb{R}^n$ است اگر :

1. بردارهای مجموعه W مستقل خطی باشند.
2. بردارهای مجموعه W فضای برداری $\mathbb{R}^n$ را پوشش دهند.

مانند $(\hat{k} , \hat{j} , \hat{i})$ برای $\mathbb{R}^3$.

تعداد بردارهایی که در پایه یک فضای برداری وجود دارند $\longrightarrow$ بعد فضای برداری Dimension

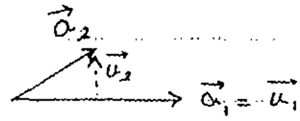
برای یک فضای برداری می‌توان تعداد متناوبی پایه فضای برداری داشت.

Subject
Date

فرایند متعامد سازی گرام - اشمیت :

$\vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \vec{a}_3$: مستقل خطی و غیرمتعامد

$\vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \vec{u}_3$: متعامد



فرض : $\vec{u}_1 = \vec{a}_1$

تصویر a_2 بر روی a_1 یا همان u_1

$$\vec{u}_2 = \vec{a}_2 - \frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{a}_2)}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1$$

$$\vec{u}_3 = \vec{a}_3 - \frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{a}_3)}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1 - \frac{(\vec{u}_2 \cdot \vec{a}_3)}{\|\vec{u}_2\|^2}\vec{u}_2$$

بردارهای u_1 و u_2 و u_3، بردارهای متعامد هستند. در واقع از سه بردار غیرمتعامد سه بردار متعامد ساختیم.

orthogonal Vectors : $\vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \vec{u}_3$

orthonormal Vectors : $\hat{u}_i = \dfrac{\vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|}$

ماتریس ها و دستگاه معادلات خطی :

$$A_{p*q} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p1} & & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}$$

↳ entry or element

Square Matrix : $A_{p*q} \longrightarrow p = q$

Main Diagonal : a_{jj} قطر اصلی

Diagonal Matrix : $a_{ij} = 0 , \; i \neq j$

Subject
Date ۴

Lower Triangular Matrix : $a_{ij} = 0$ if $i < j$

Upper Triangular Matrix : $a_{ij} = 0$ if $j < i$

$A_{p \times n} \times B_{n \times q} = C_{p \times q}$ $\quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Transpose : A, A^T $\quad a_{ij}^T = a_{ji}$

$(A^T)^T = A \qquad (A + B)^T = A^T + B^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

Symmetric Matrix :

$A = A^T \longleftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$

Skew - Symmetric Matrix : $A = -A^T$

Identity (unit) Matrix : $AI = IA = A$

orthogonal Matrix : $AA^T = A^TA = I$, $A^T = A^{-1}$

یک دستگاه معادلات خطی :
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$A\vec{x} = \vec{b}$

ماتریس ضرایب

unknown Vector

↳ Constant Vector

PAPCO

ماتریس افزوده:

$$(A, b) = [A \vdots b]$$

عملیات سطری مقدماتی:

1) $\{ i \to j \,,\, j \to i \}$

2) $\{ \alpha i \to i \}$

3) $\{ \beta i + j \to j \}$

ماتریس پلکانی: (Echelon form Matrix)

I. اولین درایه غیرصفر در هر سطر (pivot) یک باشد.

II. هر سطری که تمام درایه‌هایش صفر هستند، باید در انتهای ماتریس قرار بگیرد.

III. هر دو سطری را که در نظر بگیریم، اولین درایه غیرصفر سطر دوم سمت راست اولین درایه غیرصفر سطر اول باشد.

$$\xrightarrow{\text{مثلاً}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس پلکانی کاهش یافته سطری: Row Reduced Echelon Form Matrix

I , II , III : ✓

IV. در هر ستونی pivot وجود دارد، به غیر از pivot باقی درایه‌ها صفر هستند.

مرتبه، فضاهای سطری، ستونی یک ماتریس:

Rank   Row space   Column space

مرتبه ماتریس: تعداد سطرها یا ستون‌ها مستقل خطی آن ماتریس است.

برای تعیین مرتبه ماتریس A ، آن را به یک ماتریس پله‌ای تبدیل می‌کنیم : $A_{m\times n}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} r \text{ سطر غیر صفر} \\ m-r \text{ سطر صفر} \end{array}\right\} \rightarrow$ r : مرتبه سطری ماتریس A

r سطر غیر صفر از ماتریس A ← فضای سطری ماتریس خواهد بود.

← همین تعریف برای ستون نیز صادق است. (ماتریس را ترانهاده کرده و عملیات تکرار می‌شود.)

$$\mathrm{Rank}(A) = \mathrm{Rank}(A^T)$$

تمرین:

مرتبه ماتریس ؟

پایه فضای برداری A ؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات خطی:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$\mathrm{rank}(A) \neq \mathrm{rank}(A, b) \longrightarrow$ دستگاه معادلات جواب ندارد. (دستگاه معادلات ناسازگار)

$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A, b) = r \,,\; r = n \longrightarrow$ جواب منحصر به فرد

$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A, b) = r \,,\; \underset{\text{تعداد مجهولات}}{r < n} \longrightarrow$ بی‌نهایت جواب

} دستگاه معادلات سازگار

معکوس یک ماتریس:

$$A^{-1} = B \,,\; B^{-1} = A \quad \text{iff} \quad AB = BA = I$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \,,\; (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \,,\; (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \,,\; (A^{-1})^m = (A^m)^{-1}$$

Subject
Date

روش بدست آوردن معکوس :

$$(A, I) \xrightarrow{ERO} (I, A^{-1})$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} a & c & 1 & 0 \\ b & d & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{مقدماتی}]{\text{عملیات سطری}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' & d' \end{array}\right].$$

قانون کرامر :

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad \text{if } \det(A) \neq 0, \quad A_{n\times n}$$

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & & b_n & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مشتق یک ماتریس :

ماتریس $A_{m\times n}$ که $a_{ij}(t)$ توابع مشتق پذیر از t، درایه‌های آن ماتریس باشند، مفروض است :

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{d(a_{ij})}{dt}$$

$$\frac{d^n A(t)}{dt^n} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d^{n-1}A(t)}{dt^{n-1}}\right]$$

$$\frac{d}{dt}(A(t) + B(t)) = \frac{d}{dt}A(t) + \frac{d}{dt}B(t)$$

$$\frac{d}{dt}(A^{-1}(t)) = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$$

Subject:
Year. Month. Date. (۹)

"The Eigenvalue Problems" :مسائل مقادیر ویژه

$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \longrightarrow \vec{x}$: بردار ویژه ، λ : مقدار ویژه

(A: ماتریس ، λ: عدد)

$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ ، یک دستگاه معادلات خطی همگن ←

($\vec{x} \neq \vec{0}$)

بی‌نهایت جواب برای $\vec{x}$ داریم، پس:

If Rank $(A - \lambda I) < n$ ⟵ بی‌نهایت جواب خواهیم داشت.

← $\det(A - \lambda I) = 0$ معادله مشخصه

مقادیر ویژه ⟵ n جواب ←

$A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$: و سپس بردارهای ویژه بدست می‌آیند

تعدد جبری : تعداد مقدار ویژه تکراری λ_i

تعدد هندسی : تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی بدست آمده از λ_i

تعدد جبری ≥ تعدد هندسی

قضیه : اگر مجموعه مقادیر ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ شامل $m \leq n$ عدد متمایز $\lambda_m, \dots, \lambda_2, \lambda_1$ بوده و تعدد جبری هر کدام برابر r_i باشد، داریم:

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = n$$

قضیه : بردارهای ویژه $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ مربوط به m مقدار ویژه متمایز $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ماتریس $A_{n\times n}$ مستقل خطی هستند.

اثبات: $c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_m\vec{x}_m = 0 \quad (\mathrm{I})$

$c_1 A\vec{x}_1 + c_2 A\vec{x}_2 + \dots + c_m A\vec{x}_m = 0 \quad (\mathrm{II})$

$A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$: $c_1\lambda_1\vec{x}_1 + c_2\lambda_2\vec{x}_2 + \dots + c_m\lambda_m\vec{x}_m = 0 \quad (\mathrm{III})$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$(\mathrm{III}) - (\mathrm{I})\times\lambda_1 : \quad C_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2 + \dots + C_m(\lambda_m-\lambda_1)\vec{x}_m = 0$$
$$\vec{x}_i \neq 0, \quad (\lambda_i-\lambda_1)\neq 0, \quad c_i = 0$$

مثال:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=0 \longrightarrow -(\lambda-11)(\lambda-8)^2=0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 11 \\ \lambda_2 = 8 \\ \lambda_3 = 8 \end{cases}$$

$$(A-\lambda_i I)\vec{x}_i = 0$$

$$\lambda_1 = 11 \longrightarrow (A-11I\,|\,0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \qquad \vec{x}_1 = (x_1, x_2, \dots$$

$$\xrightarrow[\text{ERO: عملیات سطری مقدماتی}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ 0 = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

بردار ویژه برای این مقدار λ پیدا می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 8 \longrightarrow (A-8I\,|\,0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{ERO}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \longrightarrow$$ بینهایت بردار ویژه می‌توان یافت.

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای یک ماتریس قطری، مقادیر ویژه همان درایه‌های قطر اصلی ماتریس خواهند بود.

$$B=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{cases}\lambda_1=-2\rightarrow\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\\ \lambda_2=5\rightarrow\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\\ \lambda_3=5\rightarrow\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\end{cases}$$

مجموع درایه‌های روی قطر = Trace

$$\xrightarrow{\text{نکته}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\mathrm{Tr}(A)\longrightarrow\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

قضیه: برای یک ماتریس حقیقی و متقارن $A_{n\times n}$ داریم:

I. مقادیر ویژه A حقیقی است.

II. بردارهای ویژه ماتریس A مربوط به مقادیر ویژه متمایز، دو به دو متعامد هستند.

قضیه کیلی همیلتون: هر ماتریس $A_{n\times n}$ در معادله مشخصه خود صدق می‌کند.

$$\xrightarrow{\text{کاربرد}}P_n(\lambda)=0\longrightarrow P_n(A)=0$$

محاسبه ماتریس A^P:

مثلاً $A=\begin{bmatrix}-2&4\\-1&3\end{bmatrix}$, $A^3=?$

معادله مشخصه: $\lambda^2-\lambda-2=0\longrightarrow A^2-A-2I=0\longrightarrow A^2=A+2I$

$(\lambda^3-\lambda^2-2\lambda=0)\quad\rightarrow A^3=(A+2I)+2A=3A+2I$

در حالت کلی برای همین ماتریس: $A^P=\alpha_1A+\alpha_0I$

$$\lambda^P=\alpha_1\lambda+\alpha_0\longrightarrow\alpha_0,\alpha_1\Rightarrow\begin{cases}(-1)^P=\alpha_1(-1)+\alpha_0\\(2)^P=\alpha_1(2)+\alpha_0\end{cases}$$

محاسبه ماتریس A^{-1}:

برای همان مثال بالا: $\lambda^2-\lambda-2=0\longrightarrow A^2-A-2I=0\quad(I)$

$(I)\times A^{-1}:\quad A-I-2A^{-1}=0\qquad A^{-1}=\frac{1}{2}(A-I)$

Subject:
Year: Month: Date:

تمرین: اثبات کنید ماتریس پلکانی کاهش یافته سطری یک ماتریس منحصر به فرد است.

اثبات کنید row rank = column rank

قطری سازی ماتریس ها:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

λ_i: مقادیر ویژه ماتریس

بردارهای ویژه $\longrightarrow$ $\vec{x}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{x}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$

$$D^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m \end{bmatrix}$$

$\det(D) = \lambda_1 . \lambda_2 \dots \lambda_m$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1/\lambda_n \end{bmatrix}$$

قضیه: ماتریس $A_{n\times n}$ که دارای n مقدار ویژه نه الزاماً متمایز $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ و n بردار ویژه مستقل خطی $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ است، داریم:

$$P^{-1} A P = D \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \lambda_n \end{bmatrix}$$

$P_{n\times n} = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]$ منحصر به فرد نیست

$\downarrow$

ماتریس قطری ساز (ماتریس بردار ویژه)

برخی خواص ناشی از قضیه:

I. یک ماتریس $A_{n\times n}$ را می‌توان به صورت قطری درآورد، اگر دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد.

II. یک ماتریس متقارن را همیشه می‌توان قطری کرد.

III. ماتریس قطری ساز منحصر به فرد نیست.

کاربرد قطری کردن ماتریس: $A\ v \longrightarrow A^m\ P$

$$P^{-1}AP = D \longrightarrow A = PDP^{-1} \longrightarrow A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$

$$\longrightarrow A^m = PD^mP^{-1}$$

قضیه: اگر ماتریس $A_{n\times n}$ دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد، ماتریس A می‌تواند قطری شود.
(شرط لازم و کافی برای قطری شوندگی یک ماتریس)

* برای تعدد جبری بزرگتر از یک ⟵ برای اینکه بتوانیم ماتریس را قطری کنیم باید ⟵ تعدد هندسی = تعدد جبری

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = 0 \longrightarrow$ مقادیر ویژه ماتریس A : $\lambda_1 = 0$ ، $\lambda_2 = -4$ ، $\lambda_3 = 3$

$$\lambda_1 = 0 \longrightarrow (A - 0I)\vec{x}_1 = \vec{0} \qquad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -4 \longrightarrow (A + 4I)\vec{x}_2 = \vec{0} \qquad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \longrightarrow (A - 3I)\vec{x}_3 = \vec{0} \qquad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

راه اول : $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ -13 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad D = P^{-1}AP \longrightarrow D = \checkmark$

راه دوم : بدون محاسبه $\longrightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

مثال : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ببینیم که آیا می‌توانیم ماتریس را قطری کنیم یا خیر $\quad \det(A - \lambda I) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -1 \ , \ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$\lambda_1 = -1 \longrightarrow (A + I)\vec{x}_1 = \vec{0} \longrightarrow \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1 \longrightarrow (A - I)\vec{x}_2 = \vec{0} \longrightarrow (A - I \mid 0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{ERO} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow x_1 = x_2$

با فرض : $x_1 = 1 \longrightarrow x_2 = 1 \ , \ x_3 = 0 \longrightarrow \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

با فرض : $x_1 = 0 \longrightarrow x_2 = 0 \ , \ x_3 = 1 \longrightarrow \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$P = [\vec{x}_1 , \vec{x}_2 , \vec{x}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

قضیه: اگر ماتریس $A_{n\times n}$ متقارن باشد، بردارهای ویژه مربوط به مقادیر ویژه متمایز، متعامد هستند.
ماتریس قطری‌ساز P متعامد است. $P^{-1} = P^{T}$

مثال: یک ماتریس قطری‌ساز متعامد و یکه برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ بیابید.
orthonormal

که ماتریس متقارن است، اما مقادیر ویژه متمایز نیستند.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \lambda_1 = -6 \,,\; \lambda_2 = \lambda_3 = 3$$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

← عمود نیستند ← باید عمود کنیم.

با استفاده از قضیهٔ گرام اشمیت:

$$P_1 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P_3 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)\,x_1(t) + a_{12}(t)\,x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)\,x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)\,x_1(t) + a_{22}(t)\,x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)\,x_n(t) + f_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)\,x_1(t) + a_{n2}(t)\,x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)\,x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

$a_{ij}(t)$: ضرایب متغیر $f_i(t)$: ترم‌های ناهمگن

نرم ماتریسی : $\vec{X}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \vec{X}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} \qquad A(t) = \begin{bmatrix} a_{ij}(t) \end{bmatrix}$$

مثال : با استفاده از روش حذفی

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + 4 - t^2 \\ x_2' = -x_1 + 2x_2 + 1 \end{cases}$$

مشتق از معادله اول : $x_1'' = 2x_1' - x_2' - 2t \xrightarrow[\text{از معادله (۲)}]{\text{جایگذاری } x_2'} x_1'' = 2x_1' + x_1 - 2x_2 - 1 - 2t$

جایگذاری x_2 از معادله اول : $x_1'' - 4x_1' + 3x_1 = 2t^2 - 2t - 9$

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{t} - \frac{53}{27} + \frac{10}{9}t + \frac{2}{3}t^2 \\ x_2(t) = -c_1e^{3t} + c_2e^{t} - \frac{28}{27} + \frac{8}{9}t + \frac{1}{3}t^2 \end{cases}$$

تمرین : ماتریس قطری ساز متعامد P را برای ماتریس‌های زیر بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

روش ماتریسی حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی خطی :

$$\vec{X}'(t) = A(t)\,\vec{X}(t) + \vec{b}(t)$$

حل دستگاه با استفاده از روش قطری سازی :

$$\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) + \vec{b}(t) \qquad (I)$$

A: یک ماتریس $n\times n$
ماتریس ضرایب ثابت
دارای n بردار ویژه مستقل خطی است .

دیگر معادلات به هم وابسته (کوپل) نیستند . $\longleftarrow$ $\vec{u}' = D\vec{u} + \vec{h}$

D: یک ماتریس قطری

تغییر متغیر : $\vec{X} = p\vec{u}$

$$(I) \longrightarrow p\vec{u}' = Ap\vec{u} + \vec{b}(t)$$

$$p^{-1}\times \longrightarrow \vec{u}' = \underbrace{p^{-1}Ap}_{D}\,\vec{u} + p^{-1}\vec{b}(t)$$

$$\longrightarrow \vec{u}' = D\vec{u} + p^{-1}\vec{b}(t)$$

* یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را می‌توان با استفاده از روش قطری سازی حل کرد، اگر ماتریس A دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد.

مثال :

$$\begin{cases} x_1'(t) + 2x_1 + 4x_2 = 2t - 1 \\ x_2'(t) + x_1 - x_2 = \sin t \end{cases}$$

$$\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{b} \qquad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2t-1 \\ \sin t \end{bmatrix}$$

⋮

Subject
Date

$$\det(A-\lambda I)=0 \longrightarrow \lambda_1=2\ ,\ \lambda_2=-3$$

$$\lambda_1=2 \longrightarrow (A-2I)\vec{x}_1=0 \longrightarrow \vec{x}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-3 \longrightarrow (A+3I)\vec{x}_2=0 \longrightarrow \vec{x}_2=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}-1 & 4\\1 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow P^{-1}=\begin{bmatrix}-1/5 & 4/5\\1/5 & 1/5\end{bmatrix}$$

$$D=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}$$

$$\vec{u}\,'=D\vec{u}+P^{-1}\vec{b}$$

$$P^{-1}\vec{b}=\begin{bmatrix}4/5\sin t-2/5\,t+1/5\\1/5\sin t+2/5\,t-1/5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}u_1'\\u_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}+P^{-1}b$$

$$\begin{cases}u_1'=2u_1+4/5\sin t-2/5\,t+1/5\\u_2'=-3u_2+1/5\sin t+2/5\,t-1/5\end{cases}$$

$$y'+p(x)y=q(x)$$
$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$$

$$u_1(t)=c_1e^{2t}-\frac{4}{25}\cos t-\frac{8}{25}\sin t+\frac{1}{5}t$$

$$u_2(t)=c_2e^{-3t}-\frac{1}{50}\cos t+\frac{3}{50}\sin t+\frac{2}{15}t-\frac{1}{9}$$

Subject
Date

$$\vec{X}(t) = P\vec{u} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = -c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{-3t} + \frac{14}{25}\sin t + \frac{2}{25}\cos t + \frac{1}{3}t - \frac{4}{9}$$

$$x_2(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} - \frac{13}{50}\sin t - \frac{9}{50}\cos t + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}$$

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی خطی همگن با استفاده از ماتریس ها:

$$\vec{X}' = A\vec{X} \quad , \quad \vec{X}(0) = \vec{C}$$

اگر بردار $\vec{X}$ را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\vec{X}(t) = e^{tA}\,\vec{C}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d(e^{tA})}{dt}\,\vec{C} = A e^{tA}\,\vec{C} = A\vec{x}(t) \longrightarrow \vec{X}' = A\vec{X} \quad \checkmark$$

$$e^{tA} = I_n + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots$$

$$e^{tA} = P\left[I_n + tD + \frac{t^2}{2!}D^2 + \frac{t^3}{3!}D^3 + \cdots\right]P^{-1}$$

$$A = PDP^{-1} \longrightarrow A^m = PD^mP^{-1}$$

$$e^{tA} = P \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^j t^j}{j!} & & & 0 \\ & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^j t^j}{j!} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^j t^j}{j!} \end{bmatrix} P^{-1}$$

Subject
Date

$$e^{tA} = P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & \ddots & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}P^{-1}$$

مثال:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1 + 6x_2 \\ x_2'(t) = -2x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1 ,\ \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 1 \longrightarrow \vec{X}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} ,\quad \lambda_2 = 2 \longrightarrow \vec{X}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ,\quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

جواب دستگاه: $\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C}$

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{t}-3e^{2t} & -6e^{t}+6e^{2t} \\ 2e^{t}-2e^{2t} & -3e^{t}+4e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\overline{X}(t) = e^{tA} C = \begin{bmatrix} 4e^{t}-3e^{2t} & -6e^{t}+6e^{2t} \\ 2e^{t}-2e^{2t} & -3e^{t}+4e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{x}_1(t) = (4c_1 - 6c_2)e^{t} + (6c_2 - 3c_1)e^{2t} \\ \vec{x}_2(t) = (2c_1 - 3c_2)e^{t} + (4c_2 - 2c_1)e^{2t} \end{cases}$$

مثال:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -3x_1 - 4x_2 \\ x_2'(t) = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -1+2i \qquad \lambda_2 = -1-2i$$

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{X}_2 = \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1+i & -1-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} -i/2 & 1/2 - i/2 \\ i/2 & 1/2 + i/2 \end{bmatrix}$$

جواب دستگاه $\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{c}$

$$e^{tA} = P \begin{bmatrix} e^{(-1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-2i)t} \end{bmatrix} P^{-1}$$

Subject
Date

روش تغییر پارامتر:

$$\vec{X}' = A\vec{X} + b(t)$$

$$\vec{X}' = A\vec{X} \longrightarrow \vec{X}_c = \checkmark$$

$$\vec{X} = \underbrace{\vec{X}_c}_{\text{جواب عمومی}} + \vec{X}_p$$

جواب خصوصی:

$$\vec{X}_p = e^{tA} \underbrace{\vec{u}(t)}_{\text{مجهول}}$$

$$\vec{X}_p' = Ae^{tA}\vec{u}(t) + e^{tA}\vec{u}'(t)$$

جایگذاری در معادله:

$$Ae^{tA}\vec{u}(t) + e^{tA}\vec{u}'(t) = Ae^{tA}\vec{u}(t) + \vec{b}(t)$$

$$e^{tA}\vec{u}'(t) = \vec{b}(t)$$

$$\vec{u}'(t) = e^{-tA} b(t)$$

$$\downarrow$$

$$\vec{u}(t) = \checkmark$$

$$\downarrow$$

$$\vec{X}_p = \checkmark$$

مثال:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1 + 6x_2 + t \\ x_2'(t) = -2x_1 + 5x_2 - 1 \end{cases}$$

$$\vec{X}_c = \checkmark \qquad \vec{X}_p = ?$$

$$\vec{X}_p = e^{tA}\vec{u}(t)$$

$$\vec{u}'(t) = e^{-tA}\vec{b}(t)$$

$$\downarrow$$

$$e^{-tA} = P\begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

Subject
Date

$$\vec{b}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}'(t) = e^{-tA}\,\vec{b}(t) = \begin{bmatrix} 2(3+2t)e^{-t} - 3(2+t)e^{-2t} \\ (3+2t)e^{-t} - 2(2+t)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} -2(5+2t)e^{-t} + \frac{3}{2}(\frac{5}{2}+t)e^{-2t} \\ -(5+2t)e^{-t} + (\frac{5}{2}+t)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}_p = e^{tA}\,\vec{u}(t) \longrightarrow \vec{X}_p = \begin{bmatrix} -\frac{25}{4} - \frac{5}{2}t \\ -\frac{5}{2} - t \end{bmatrix}$$

$$\vec{X} = \vec{X}_c + \vec{X}_p$$

تمرین :

$$\begin{cases} x_1' = -10x_1 - 18x_2 + t \\ x_2' = 6x_1 + 11x_2 + ac \end{cases}$$ روش ماتریس نمایی

$$\begin{cases} x_1' = 10x_1 + 18x_2 + \sin t \\ x_2' = -6x_1 - 11x_2 + t \end{cases}$$ روش قطری سازی

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 - e^t \\ x_2' = -2x_1 - x_2 - 3 \end{cases}$$ روش [illegible]

PaPCO

Subject
Date

توابع خاص: (special functions)

تعریف: تابع حقیقی $f(x)$ را در نقطهٔ $x = x_0$ تحلیلی نامند، اگر آن را بتوان بصورت یک سری تیلور از $(x - x_0)$ با شعاع همگرایی $R > 0$ بیان کرد.

قضیه: اگر در معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$، توابع p و q و r در $x = x_0$ تحلیلی باشند، هر جواب معادله مذکور نیز در $x = x_0$ تحلیلی بوده و آن را می‌توان توسط سری تیلور از $(x - x_0)$ با شعاع همگرایی $R > 0$ بیان کرد.

(در $h(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ توابع h, p, q, r در $x = x_0$ تحلیلی باشند و $h(x_0) \neq 0$، قضیه فوق برقرار است.)

$$y' + p(x)y = r(x) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \qquad (I)$$

فرض کنیم توابع $p(x)$ و $r(x)$ در $x = x_0$ تحلیلی باشند.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} y^{(n)}(x_0)$$

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)\,y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \cdots$$

حال باید ... ، $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0)$ را بیابیم:

$$(I): \quad y'(x_0) = r(x_0) - p(x_0)\,\overset{y_0}{y(x_0)}$$

$$y''(x_0) = r'(x_0) - p'(x_0)\,y_0 - p(x_0)\left[r(x_0) - p(x_0)\,y_0\right]$$

$$\vdots$$

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

فرض کنیم $a(x)$ و $b(x)$ و $c(x)$ چند جمله‌ای بوده و $a(x_0) \neq 0$ باشد.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Subject
Date

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

مثال: $y'' + y = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$(n = s+2)$: $\sum_{s=0}^{\infty} (s+2)(s+1)a_{s+2} x^s + \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s = 0$

برای اینکه رابطه فوق برای هر x برقرار باشد، باید ضرایب x برابر صفر باشند:

مجموع ضرایب x^s : $(s+2)(s+1)a_{s+2} + a_s = 0$

$$a_{s+2} = \frac{-a_s}{(s+2)(s+1)} \quad , \quad s = 0, 1, \dots$$

$a_2 = \frac{-a_0}{2}$ $\quad a_4 = \frac{-a_2}{4 * 3} = \frac{a_0}{4!}$

$a_3 = -\frac{a_1}{3!}$ $\quad , \dots$

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

معادله لژاندر: $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$

(Legender's Eq.) $\alpha > 0$ پارامتر حقیقی

↓

جواب معادله لژاندر

↓

توابع لژاندر (توابع خاص)

Subject
Date

ضرایب معادله لژاندر حول مبدأ تحلیلی هستند.
ضریب y'' یعنی $(1-x^2)$ در $-1<x<1$ مخالف صفر است.

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ضریب x^0 : $2a_2+\alpha(\alpha+1)a_0=0 \longrightarrow a_2=\dfrac{-\alpha(\alpha+1)}{2}a_0$

ضریب x^1 : $6a_3-2a_1+\alpha(\alpha+1)a_1=0 \longrightarrow a_3=\dfrac{2-\alpha(\alpha+1)}{6}a_1$

ضریب x^n : $a_{n+2}=-\dfrac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n \quad n\geq 2$

جواب : $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\downarrow$$

$$y(x)=a_0 y_1(x)+a_1 y_2(x)$$

$$\begin{cases} y_1(x)=1-\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2+\cdots \\ y_2(x)=x-\dfrac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3+\cdots \end{cases}$$

PAPCO

Subject
Date

برای معادله لژاندر، اگر پارامتر α یک عدد صحیح غیرمنفی باشد، $y_1(x)$ یا $y_2(x)$ یک چندجمله‌ای از مرتبه α می‌شود.

اگر α فرد باشد: $y_2(x)$ یک چندجمله‌ای از مرتبه α است. ($y_1(x)$ یک سری می‌باشد.)
اگر α زوج باشد: $y_1(x)$ یک چندجمله‌ای از مرتبه α است. ($y_2(x)$ یک سری می‌باشد.)

$\downarrow$

چندجمله‌ای های لژاندر $P_n(x)$

$\alpha = 0 \longrightarrow y_1(x) = 1$

$\alpha = 1 \longrightarrow y_2(x) = x$

$\alpha = 2 \longrightarrow y_1(x) = 1 - 3x^2$

$\vdots$

اگر α یک عدد صحیح غیرمنفی باشد، چندجمله‌ای بدست آمده ضربدر یک عدد ثابت را چندجمله‌ای لژاندر از درجه n می‌نامند. $P_n(x)$ (ضریب بگونه‌ای انتخاب می‌شود که ضریب بزرگترین توان x مثبت بوده و $P_n(1) = 1$ شود.)

$P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = x \quad ,$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad , \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad , \quad \ldots$

$$P_{2n}(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(4n-2r)!}{2^{2n} r!\,(2n-r)!\,(2n-2r)!} x^{2n-2r}$$

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(4n-2r+2)!}{2^{2n+1} r!\,(2n-r+1)!\,(2n-2r+1)!} x^{2n-2r+1}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)\,x\,P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$

Subject
Date

معادله چبیشف (chebyshev eq.)

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha y = 0$$

جواب تحلیلی : $-1 < x < +1$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$a_2 = -\frac{\alpha}{2!} a_0 \quad , \quad a_3 = \frac{(1-\alpha)}{3!} a_1 \quad , \quad \dots \quad a_{n+2} = \frac{(n^2-\alpha)}{(n+1)(n+2)} a_n \quad n=2$$

$$y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$$

$$y_0(x) = \left[1 - \frac{\alpha}{2!} x^2 - \frac{\alpha(2^2-\alpha)}{4!} x^4 - \dots\right]$$

$$y_1(x) = \left[x + \frac{(1-\alpha)}{3!} x^3 + \frac{(1-\alpha)(3^2-\alpha)}{5!} x^5 + \dots\right]$$

$\alpha = m^2$: $m = 0, 1, 2, \dots$
- اگر m زوج باشد $\longrightarrow$ $y_0(x)$ چندجمله‌ای زوج از مرتبه m
- اگر m فرد باشد $\longrightarrow$ $y_1(x)$ چندجمله‌ای فرد از مرتبه m

$\alpha = 0$; $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$

* علامت ضریب بزرگترین توان x باید مثبت باشد و همچنین این ضریب و سایر ضرایب باید صحیح باشند.

مثلاً : $\alpha = 9$: $y(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ -3}}{\beta}\left(x - \frac{4}{3}x^3\right)$

$$T_{n+1}(x) - 2x T_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$

نقاط منفرد در معادلات دیفرانسیل خطی :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

$$y'' + \underbrace{\frac{b(x)}{a(x)}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{c(x)}{a(x)}}_{q(x)} y = 0$$

اگر $p(x)$ و $q(x)$ در نقطهٔ x_0 تحلیلی باشند :

x_0 : نقطهٔ معمولی (regular point)

اگر حداقل یکی از $p(x)$ یا $q(x)$ در نقطهٔ x_0 تحلیلی نباشد :

x_0 : نقطهٔ منفرد (singular point)

اگر $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2 q(x)$ در نقطهٔ x_0 تحلیلی باشند :

x_0 : نقطهٔ منفرد منظم (regular singular point)

اگر حداقل یکی از توابع $(x-x_0)p(x)$ یا $(x-x_0)^2 q(x)$ در نقطهٔ x_0 تحلیلی نباشد :

x_0 : نقطهٔ منفرد نامنظم (iregular singular point)

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

x_0 : یک نقطهٔ منفرد منظم :

$$y(x) = (x-x_0)^c \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$ شرط : $a_0 \neq 0$

مثال :

$$x^2 y'' + x b(x) y' + c(x) y = 0$$

$$y'' + \underbrace{\frac{b(x)}{x}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{c(x)}{x^2}}_{q(x)} y = 0 \qquad (*)$$

$x=0$: یک نقطهٔ منفرد منظم .

Subject
Date

$x=0$ نقطهٔ منفرد منظم $\longrightarrow y(x) = x^c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

بعد از قرار دادن جواب فوق در معادله (*) ،
ضریب کوچکترین توان x ، (x^{c-2}) :

$$[c(c-1) + p_0 c + q_0] \overset{\neq 0}{a_0} = 0$$

$$c(c-1) + p_0 c + q_0 = 0$$ indicial eq. معادلهٔ شاخص

$$p_0 = \lim_{x \to 0} (x p(x))$$

$$q_0 = \lim_{x \to 0} (x^2 q(x))$$

c_1 ، c_2 ریشه های معادله شاخص :

* اگر $c_1 \neq c_2$ ، $c_1 - c_2$ عدد صحیح نباشد :

$$y_1(x) = x^{c_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad y_2(x) = x^{c_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

* اگر c ریشه مضاعف باشد.

$$y_1(x) = x^c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad y_2(x) = y_1 \ln x + x^c \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

* اگر دو ریشه متمایز c_1, c_2 ، $c_1 - c_2$ عدد صحیح باشد.

$$y_1(x) = x^{c_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad y_2 = k y_1 \ln x + x^{c_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

تابع گاما : (Gamma function)

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt \quad , \quad x > 0$$

:

PAPCO

Subject
Date

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad , \quad x>0$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad , \quad \Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

تابع بسل نوع اول $J_n(x)$: (Bessel function)

معادله بسل : $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)\,y = 0$ $\qquad$ $\nu \geq 0$ عدد حقیقی

و یا :

اگر در معادلهٔ بالا λu را جایگذاری کرده نسبت به u x عوض کنیم. $\qquad x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - \nu^2)\,y = 0$

$x=0$: یک نقطهٔ منفرد منظم

$$C(C-1) + P_0 C + q_0 = 0$$

$$P_0 = \lim_{x\to 0}(x\,p(x)) = 1 \quad , \quad q_0 = \lim_{x\to 0}(x^2 q(x)) = -\nu^2$$

معادله مشخصه : $C^2 - \nu^2 = 0$ $\qquad \begin{cases} C_1 = \nu \\ C_2 = -\nu \end{cases}$

$$y(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+C}$$

$$a_{2m} = \frac{-(-1)^m}{2^{2m+\nu} + m! + \Gamma(m+1+\nu)}$$

و $a_{2m-1} = 0$

Subject
Date

از جواب معادله بسل ، تابع بسل بدست می آید :

تابع بسل نوع اول از مرتبه ν : $x \geq 0$,
$$J_\nu = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m!\, \Gamma(m+1+\nu)}$$

اگر ν یک عدد صحیح نباشد : $J_{-\nu}(x)$

$$J_{-\nu} = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m!\, \Gamma(m-\nu+1)}$$

جواب عمومی معادله بسل اگر ν عدد صحیح نباشد .

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \quad , \quad \text{برای } x \neq 0$$

اگر ν عدد صحیح باشد :
$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

برخی روابط مربوط به تابع بسل :

$$\left[x^\nu J_\nu(x)\right]' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2 J_\nu'(x)$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

اگر ν عدد صحیح باشد:

یکی از جواب ها $J_\nu(x)$

جواب دیگر مستقل خطی $Y_\nu(x)$ (تابع بسل نوع دوم)

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left[J_\nu(x)\cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)\right]$$

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$$

توضیح: جواب عمومی معادله بسل برای هر مقدار ν، $(x > 0)$ بصورت زیر است:

$$y(x) = c_1 \underbrace{J_\nu(x)}_{\text{تابع بسل نوع اول}} + c_2 \underbrace{Y_\nu(x)}_{\text{تابع بسل نوع دوم}}$$

تغییر متغیر: $x \to ix$

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0$$: معادله بسل اصلاح شده از مرتبه ν

"Bessel's modified eq of order ν"

$J_\nu(ix)$, $Y_\nu(ix)$ $\longrightarrow$ به دلیل وجود i مناسب نیستند.

$$i^2x^2\frac{d^2y}{d(ix)^2} + ix\frac{dy}{d(ix)} - (i^2x^2 + \nu^2)y = 0$$

$I_\nu(x)$: تابع بسل اصلاح شده نوع اول از مرتبه ν , $K_\nu(x)$: تابع بسل اصلاح شده نوع دوم از مرتبه ν

$$I_\nu = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu}\, m!\, \Gamma(m+1+\nu)}$$

Subject
Date.

برای ν غیرصحیح :
$$y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x)$$

برای هر ν :
$$y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x)$$

$$K_\nu(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi}\right)$$

مسائل اشتورم ـ لیوویل : "Sturm – Liouville problem"

initial value problems
Boundary value problems

مثال B.V.P :
$$y''(x) + p(x)y'(x) + (Q(x) + \lambda R(x))y(x) = 0 \qquad a < x < b$$

جواب بدیهی : $y(x) = 0$

دنبال λ ای هستیم که به ما جواب غیرصفر بدهد، شرایط مرزی را نیز ارضا کند

در طرفین معادله را در $p(x) = e^{\int p(x)dx}$ ضرب می‌کنیم :

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y'(x)\right] + p(x)\left[Q(x) + \lambda R(x)\right]y(x) = 0$$

$$p(x)Q(x) = q(x) \qquad , \qquad p(x)R(x) = r(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y'(x)\right] + \left[q(x) + \lambda r(x)\right]y(x) = 0$$

PaPCO

Subject

Date

اگر توابع $p(x)$ ، $q(x)$ ، $r(x)$ ، $p'(x)$ در بازه $a \leq x \leq b$ پیوسته بوده و $p(x) > 0$ و $r(x) > 0$ باشد، به معادله فوق، معادله اشترم ـ لیوویل می‌گوییم:

معادله لژاندر: $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$

معادله فوق، یک معادله اشترم ـ لیوویل می‌باشد. (یک حالت خاص) :

$p(x) = 1 - x^2$

$q(x) = 0$

$\lambda = \alpha(\alpha+1)$

$r(x) = 1$

معادله بسل: $x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - \nu^2)y = 0$

معادله فوق نیز یک حالت خاص از معادله اشترم ـ لیوویل می‌باشد.

$p(x) = x$

$q(x) = -\dfrac{\nu^2}{x}$

$r(x) = x$

$\lambda = k^2$

معادله چبیشف نیز یک حالت خاص از معادله اشترم ـ لیوویل می‌باشد:

$p(x) = \sqrt{1-x^2}$, $q(x) = 0$, $\lambda = \alpha$, $r(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

شرایط مرزی همگن

$$\begin{cases} A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0 \\ B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

مسائل اشترم ـ لیوویل:

- منظم Regular
- دوره‌ای periodic
- منفرد Singular

PAPCO

Subject
Date

مسائل دوره‌ای اشتورم - لیوویل:

$p(a) = p(b)$

$y(a) = y(b)$

$y'(a) = y'(b)$

مسائل منفرد اشتورم - لیوویل:

یکی از نقاط مرزی $x = a$ یا $x = b$ نقطه منفرد است. یعنی $p(a) = 0$ یا $p(b) = 0$.

مسائل منظم اشتورم - لیوویل:

اگر هیچ یک از دو حالت فوق نباشد.

در مسائل اشتورم - لیوویل به هر مقدار از λ که به ازای آن جواب غیرصفر برای معادله بتوان پیدا کرد، یک مقدار ویژه (eigen value) برای مسأله و به جواب غیرصفر $y(x)$ یک تابع ویژه (eigenfunction) برای مسأله گویند.

مثال:

$y'' + \lambda y = 0 \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

$y(0) = 0 \quad , \quad y'(\pi) = 0$

سه حالت برای λ در نظر می‌گیریم: $\lambda = 0 \;,\; \lambda < 0 \;,\; \lambda > 0$

$\lambda = 0 : \quad y(x) = c_1 x + c_2$

$y(0) = 0 \longrightarrow c_2 = 0$

$y'(\pi) = 0 \longrightarrow c_1 = 0$

$\lambda = 0$ یک مقدار ویژه نمی‌باشد.

PAPCO

$$\lambda < 0 \longrightarrow \lambda = -\mu^2 : \quad y(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$$

$$y(0) = 0 \longrightarrow C_1 + C_2 = 0$$

$$y'(\pi) = 0 \longrightarrow C_1 \mu e^{\mu\pi} - C_2 \mu e^{-\mu\pi} = 0$$

$$\longrightarrow C_1 \mu e^{\mu\pi} + C_1 \mu e^{-\mu\pi} = 0$$

$$C_1 \mu \cosh(\mu\pi) = 0 \xrightarrow{\cosh(\mu\pi) \neq 0} C_1 = 0$$

$$\longrightarrow C_2 = 0$$

مسأله مقادیر ویژه منفی ندارد.

$$\lambda > 0 \longrightarrow \lambda = \mu^2 : \quad y(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$$

$$y(0) = 0 \longrightarrow C_1 = 0$$

$$y'(\pi) = 0 \longrightarrow C_2 \mu \cos(\mu\pi) = 0$$

$$\xrightarrow{C_2 \neq 0} \cos(\mu\pi) = 0 \longrightarrow \mu = \frac{(2n+1)}{2}$$

مقادیر ویژه مسأله: $\lambda_n = \dfrac{(2n+1)^2}{4}$

توابع ویژه: $y_n = \sin\left(\dfrac{2n+1}{2} x\right)$

مثال: مقادیر و توابع ویژه معادله بسل

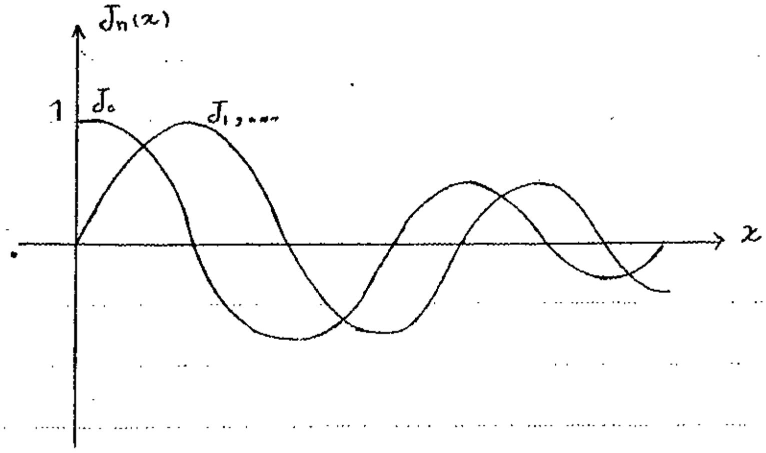
$$x^2 y'' + x y' + (k^2 x^2 - n^2) y = 0 \qquad 0 \leq x \leq a$$

جواب در بازه $0 \leq x \leq a$ محدود باشد و $y(a) = 0$ باشد.

$$\frac{d}{dx}\left[x \frac{dy}{dx}\right] + \left(k^2 x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0$$ ← اشتورم ـ لیوویل هستند

$$y(x) = C_1 J_n(kx) + C_2 Y_n(kx)$$

Subject
Date

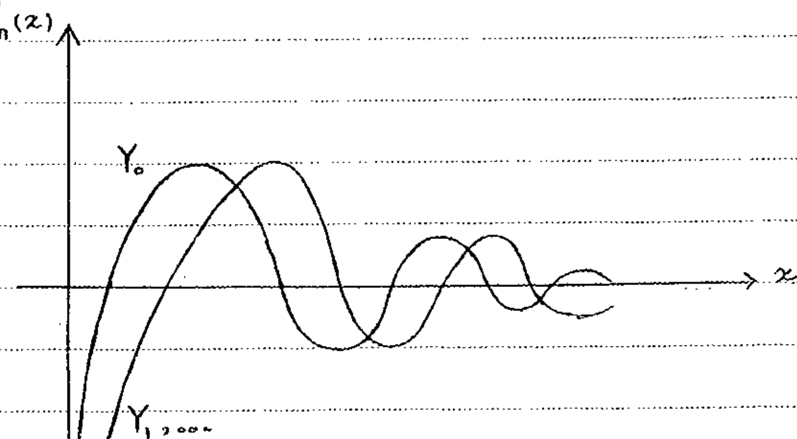


برای x های کوچک :

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu$$

برای x های بزرگ :

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$



$$\lim_{x \to 0} Y_\nu(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \infty} Y_\nu(x) = 0$$

Papco

Subject
Date

$\longrightarrow$ برای محدود شدن جواب : $C_2 = 0$

$$y(x) = C_1 J_n(kx)$$

$$y(a) = 0 \longrightarrow C_1 J_n(\underbrace{ka}) = 0$$

$J_n(x)$ صفرهای تابع $j_{n,r}$ $(r = 1, 2, \dots)$

$$ka = j_{n,r} \longrightarrow k_n = \frac{1}{a} j_{n,r} \quad , \quad \lambda_n = k_n^2$$

مقادیر ویژه $\longrightarrow \lambda_n = \frac{1}{a^2} j_{n,r}^2$

توابع ویژه $\longrightarrow y_n(x) = J_n\left(\frac{j_{n,r}}{a} x\right)$

مجموعه توابع متعامد و متعامد یکه :

مجموعه‌ای از توابع $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ که در بازه $a \leq x \leq b$ تعریف می‌شوند را توابع متعامد نسبت به تابع وزنی $r(x)$ (که $r(x) \geq 0$) گویند، اگر :

$$\int_a^b r(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \quad ; \quad m \neq n$$

نرم تابع $\varphi_n(x)$ "norm" :

$$\|\varphi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b r(x)\varphi_n^2(x)\,dx}$$

اگر توابع را بصورت یکه دربیاوریم : $\hat{\varphi}_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\|\varphi_i(x)\|}$ داریم :

$$\int_a^b r(x)\hat{\varphi}_m(x)\hat{\varphi}_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

orthonormal functions توابع متعامد یکه

Subject
Date

مثال: $\{1, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$ $\quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

$r(x)=1$

آیا مجموعه توابع متعامد هستند یا خیر؟

$$\int_{-\pi}^{\pi} y_m(x)\, y_n(x)\, dx = ?$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin mx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx)\, dx = 0 \quad (n \neq m)$$

$\leftarrow$ مجموعه توابع متعامد هستند.

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi \longrightarrow \text{تابع نرمال} : \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\, dx = \pi \longrightarrow \text{تابع نرمال} : \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}$$

قضیه: فرض کنید توابع ویژه یک مسأله اشتورم لیوویل در بازه $a \leqslant x \leqslant b$ با تابع وزنی $r(x)$ را با $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ و مقادیر ویژه آن را با $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ نشان دهیم. φ_m و φ_n توابع ویژه مربوط به مقادیر ویژه متمایز λ_m و λ_n $(\lambda_n \neq \lambda_m)$ نسبت به $r(x)$ متعامد هستند. یعنی:

$$\int_a^b r(x)\, \varphi_m(x)\, \varphi_n(x)\, dx = 0$$

قضیه: تمام مقادیر ویژه یک مسأله اشتورم لیوویل حقیقی هستند.

معادله لژاندر:
$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$$
$r(x)=1$

تعامد چندجمله‌ای‌های لژاندر:
$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

Subject
Date

معادله بسل :
$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - n^2)y = 0 \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$
$$r(x) = x$$

$$y_n(x) = J_n\left(\frac{\alpha_{n,r}}{a}x\right)$$

تعامد توابع بسل
$$\int_0^a x J_n\left(\frac{\alpha_{n,r}}{a}x\right) J_n\left(\frac{\alpha_{n,s}}{a}x\right) dx = 0 \qquad (r \neq s)$$
هم مرتبه مربوط به صفرهای مختلف تابع بسل

بسط توابع ویژه : "Eigenfunction expansions"

مجموعه توابع ویژه $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ ، بازه $a \leqslant x \leqslant b$

تابع وزنی $r(x)$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi_m(x) \quad \text{بازه } a \leqslant x \leqslant b$$

$$\int_a^b r(x)\varphi_n(x) f(x)\,dx = \int_a^b r(x)\varphi_n(x)\sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi_m(x)\,dx$$

$$\int_a^b r(x)\varphi_n(x) f(x)\,dx = a_n \underbrace{\int_a^b r(x)(\varphi_n(x))^2\,dx}_{\|\varphi_n(x)\|}$$

چون : $\int_a^b r(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad m \neq n$

$$a_n = \frac{\int_a^b r(x)\varphi_n(x) f(x)\,dx}{\|\varphi_n(x)\|^2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Subject
Date

بسط سری فوریه : $\{1, \sin nx, \cos nx\}$ در بازه $-\pi \leq x \leq \pi$

$r(x) = 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \quad m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0 \quad m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \quad m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 . \sin mx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 . \cos mx \, dx = 0$$

پس مجموعه توابع فوق متعامد هستند.

چندجمله‌ای‌های لژاندر:

$-1 \leq x \leq 1 \quad \{ \overset{1}{\uparrow}{P_0(x)}, \overset{x}{\uparrow}{P_1(x)}, \ldots \} \quad r(x) = 1$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) \, dx = 0 \, , \, m \neq n$$

$$\| P_n(x) \|^2 = \frac{2}{2n+1}$$

با استفاده از چندجمله‌ای لژاندر می‌توان تابع مد نظر را بسط داد.
در بازه $-1 \leq x \leq 1$

توابع بسل :

$0 \leq x \leq a \quad \left[J_n \left(\frac{j_{n,m}}{a} x \right) \right] \quad r(x) = x$

$$\int_0^a x J_n \left(\frac{j_{n,r}}{a} x \right) J_n \left(\frac{j_{n,s}}{a} x \right) dx = 0 \quad r \neq s$$

$$\| J_n \left(\frac{j_{n,r}}{a} x \right) \|^2 = \frac{1}{2} a^2 \left[J_{n+1} (j_{n,r}) \right]^2 \quad r = 1, 2, \ldots$$

با استفاده از توابع بسل می‌توان تابع مورد نظر را در بازه $0 \leq x \leq a$ بسط داد.

PAPCO

Subject
Date

چندجمله‌ای های چبیشف: $\{T_0(x), T_1(x), \dots\}$ $\quad -1 \leq x \leq 1$

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\, T_n(x)}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

$$\|T_0(x)\|^2 = \pi \quad , \quad \|T_n(x)\|^2 = \tfrac{1}{2}\pi \quad n = 1, 2, \dots$$

با استفاده از چندجمله‌ای های چبیشف می‌توان تابع مورد نظر را در بازهٔ $-1 \leq x \leq 1$ بسط داد

بسط سری فوریه:

$$y(-\pi) = y(\pi) = 0 \quad , \quad y'' + \lambda y = 0$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

بسط فوریه - لژاندر:

چندجمله‌ای های $P_n(x)$, $-1 \leq x \leq 1$, $r(x) = 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = a_0 + a_1 P_1(x) + \dots$$

PAPCO

Subject
Date

$$a_n = \left[\frac{2n+1}{2}\right] \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

بسط فوریه - بسل:

تابع بسل J_n (ط.ب n مثبت) ، در بازه $0 \leqslant x \leqslant a$

$r(x) = x$

$$0 \leqslant x \leqslant a \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_n\left(\frac{j_{n,n}}{a} x\right)$$

$$a_n = \left(\frac{2}{a^2}\right) \frac{\int_0^a J_n\left(\frac{j_{n,n}}{a} x\right) f(x)\, x\, dx}{\left(J_{n+1}(j_{n,n})\right)^2}$$

بسط فوریه - چبیشف:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \qquad r(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x)$$

$$a_n = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}{\| T_n(x) \|^2}$$

تعریف: اگر توابع $f_1(x), f_2(x), \dots$ در نرم به تابع $f(x)$ همگرا باشند آنگاه:

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n(x) - f(x) \| = 0$$

مجموع n جمله اول از بسط تابع ویژه: $f_n(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m \varphi_m(x)$

PAPCO

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b r(x) \left[f_n(x) - f(x) \right]^2 dx \right) = 0$$

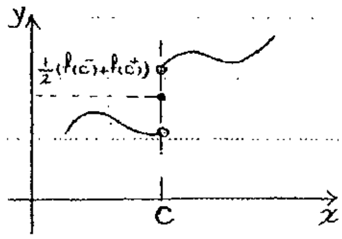
$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b r(x) \left[\sum_{m=0}^{n} a_m \varphi_m(x) - f(x) \right]^2 dx = 0 \longrightarrow$$ برای این مجموعه توابع، توابع کامل گویند.

توابع کامل:

مجموعه‌ی توابع متعامد را کامل می‌گویند، اگر هر تابع پیوسته‌ای در بازه‌ی $a \leqslant x \leqslant b$ را بتوان با استفاده از آن مجموعه توابع بسط داد.

قضیه: اگر $f(x)$ ، $f'(x)$ در بازه‌ی $a \leqslant x \leqslant b$ تنها در تعداد محدودی از نقاط ناپیوسته باشند، آنگاه بسط توابع ویژه‌ی ما در نقاط پیوستگی $f(x)$ داخل بازه به $f(x)$ و در هر نقطه‌ی ناپیوستگی c به مقدار $\frac{1}{2}\left[f(c^-)+f(c^+)\right]$ در نرم همگرا می‌باشد.

$$\int_a^b r(x) \left[\sum_{m=0}^{n} a_m \varphi_m(x) - f(x) \right]^2 dx$$



$$= \underbrace{\int_a^b r(x) \left[\sum_{m=0}^{n} a_m \varphi_m(x) \right]^2}_{(I)} - 2 \sum_{m=0}^{n} a_m \underbrace{\int_a^b r(x) f(x) \varphi_m(x) dx}_{(II)}$$

$$+ \underbrace{\int_a^b r(x) \left[f(x) \right]^2 dx}_{(III)} = \underbrace{\sum_{m=0}^{n} a_m^2}_{(I)} - \underbrace{2 \sum_{m=0}^{n} a_m^2}_{(II)} + \underbrace{\| f(x) \|^2}_{(III)}$$

$$= \| f(x) \|^2 - \sum_{m=0}^{n} a_m^2$$

و بنابراین داریم:

$$\int_a^b r(x) \left[\sum_{m=0}^{n} a_m \varphi_m(x) - f(x) \right]^2 dx = \| f(x) \|^2 - \sum_{m=0}^{n} a_m^2 \qquad (r(x) \geqslant 0)$$

نامساوی بسل (Bessel's inequality):

$$\sum_{m=0}^{n} a_m^2 \leqslant \| f(x) \|^2 \longrightarrow$$ حد بالا

Subject
Date

طبق تعریف همگرایی به نرم:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m^2 = \|f(x)\|^2 \longrightarrow$$ رابطهٔ پارسوال

* رابطهٔ پارسوال برای مجموعه‌ی توابع کامل متعامد برقرار است.

- سری فوریه ← همگرایی آن حالت خاصی از قضیهٔ ذکر شده است.

توابع با دورهٔ تناوب دلخواه: $p = 2l$

$$-l \leqslant x \leqslant l \;:\; f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx \;,\; a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x\,dx \;,\; b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

بسط سری فوریه سینوسی، کسینوسی:

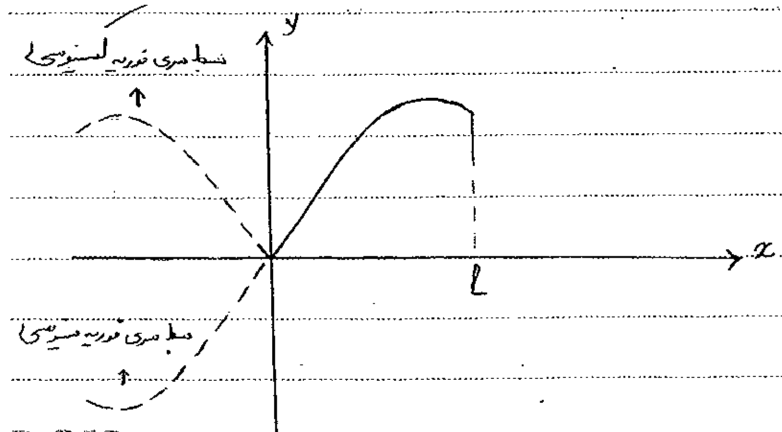
تابع $f(x)$ زوج با دوره تناوب $2l$ ← بسط سری فوریه کسینوسی

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x\right)$$

تابع $f(x)$ فرد با دوره تناوب $2l$ ← بسط سری فوریه سینوسی

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin \frac{n\pi}{l} x\right)$$

بسط‌های نیم دامنه:



Subject
Date

سری فوریه کلی :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$e^{it} = \cos t + i\sin t \qquad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$e^{-it} = \cos t - i\sin t \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} , \quad C_0 = a_0$$

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{inx} + k_n e^{-inx})$$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$k_n = C_{-n}$$

$$k_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} , \qquad C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

برای دوره تناوب $2l$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi}{l}x}$$

$$C_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi}{l}x} dx , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Subject
Date

معادلات دیفرانسیل پاره ای : (PDE's)

فرم کلی معادله دیفرانسیل پاره ای خطی مرتبه 2 با دو متغیر مستقل :

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

u: متغیر وابسته ، x و y : پارامترهای مستقل

A, B, C, D, E, F, G توابعی از x , y

معادله را خطی گویند، زیرا ترکیب خطی از تابع و مشتقات آن است.

$G = 0$ ← معادله دیفرانسیل همگن

$G \neq 0$ ← معادله دیفرانسیل ناهمگن

قضیه (اصل برهم نهی) :

اگر u_1 و u_2 جواب های یک معادله دیفرانسیل پاره ای خطی و همگن باشند، آن گاه هر ترکیب خطی از آن ها نیز یک جواب معادله است.

معادلات دیفرانسیل پاره ای در مختصات مستطیلی :

ـ معادله موج یک بعدی

$$0 < x < L \quad , \quad t > 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$B.C : \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

$$I.C : \quad u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x)$$

PAPCO

Subject
Date

"seperation of variables" "روش جداسازی متغیرها"

$u(x,t) = X(x)\,T(t)$

با جایگزین کردن عبارت فوق در معادله:

$X\ddot{T} = c^2X''T \xrightarrow{\div c^2XT} \dfrac{\ddot{T}}{c^2T} = \dfrac{X''}{X} = \underset{\text{ثابت جداسازی}}{k}$

$X'' - kX = 0$

$\ddot{T} - kc^2T = 0$

$u(0,t) = X(0)\,T(t) = 0$

$u(L,t) = X(L)\,T(t) = 0$

$X(0)$ یا $X(L) \neq 0 \longrightarrow T(t) = 0$ غ ق ق

$X(0) = X(L) = 0$ در نتیجه:

$X'' - kX = 0$

$X(0) = X(L) = 0$

اگر $k>0$: $k = \mu^2 \quad (\mu>0)$

$X'' - \mu^2X = 0 \longrightarrow X(x) = c_1e^{\mu x} + c_2e^{-\mu x} \xrightarrow{B.C} X(x) = 0$

اگر $k = 0$:

$X(x) = c_1x + c_2 \xrightarrow{B.C.} X(x) = 0$

PAPCO

Subject
Date

اگر $k < 0$: $k = -\mu^2 \quad (\mu > 0)$

$X'' + \mu^2 X = 0 \longrightarrow X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} X(0) = 0 \longrightarrow C_1 = 0 \\ X(L) = 0 \longrightarrow C_2 \sin \mu L = 0 \longrightarrow \sin \mu L = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow \mu_n = \dfrac{n\pi}{L} \quad , n = 1, 2, \dots$

$X_n = \sin \dfrac{n\pi}{L} x \quad , n = 1, 2, \dots$

$k = -\mu^2 = -\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2$

$\ddot{T} + \left(c \dfrac{n\pi}{L}\right)^2 T = 0$

$T_n = b_n \cos \lambda_n t + b_n^* \sin \lambda_n t$

$\lambda_n = c \dfrac{n\pi}{L} \quad , n = 1, 2, \dots$

$u_n(x, t) = X_n T_n = \sin \dfrac{n\pi x}{L} (b_n \cos \lambda_n t + b_n^* \sin \lambda_n t)$

$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{n\pi x}{L} (b_n \cos \lambda_n t + b_n^* \sin \lambda_n t)$

Subject
Date

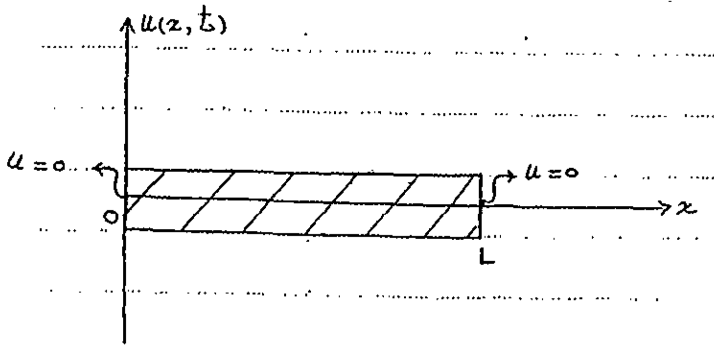
$$I.C: \quad u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$I.C: \quad u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \lambda_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$b_n^* = \frac{2}{Cn\pi}\int_0^{L} g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x\, dx \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

مثال:



u: توزیع درجه حرارت

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L \quad , \quad t > 0$$

$$B.C.: \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

$$I.C.: \quad u(x,0) = f(x)$$

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \longrightarrow \begin{cases} \dot{T} - kc^2 T = 0 \\ X'' - kX = 0 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \longrightarrow X(0) = X(L) = 0$$

Subject

Date

$$K = -\mu^2 \longrightarrow \mu_n = \frac{n\pi}{L} \quad , \quad X_n = \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\dot{T} + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 T = 0$$

$$T_n(t) = b_n e^{-\lambda_n^2 t} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\lambda_n = c\,\frac{n\pi}{L}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

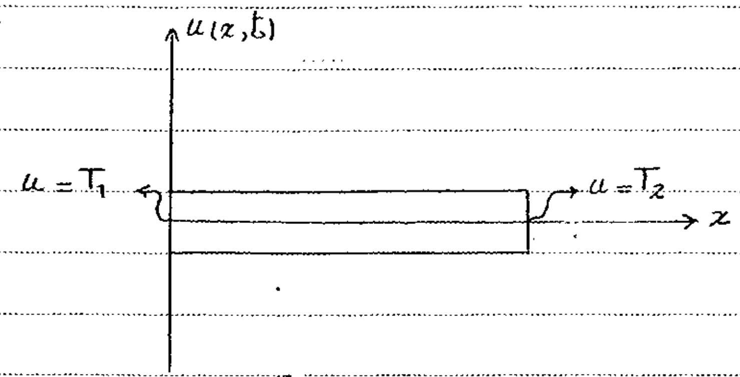
[illegible]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L \quad , \quad t > 0$$

B.C.: $u(0,t) = T_1 \quad , \quad u(L,t) = T_2$

I.C.: $u(x,0) = f(x)$

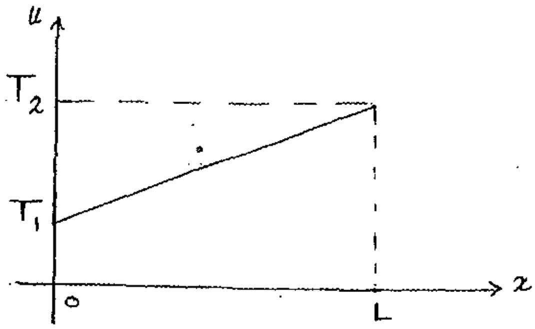
$$u(0,t) = X(0)\,T(t) = T_1 \quad \times$$



PAPCO

Subject
Date

steady : $\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \longrightarrow$ u خطی نسبت به x : در زمان بی‌نهایت



$$u(x,t) = u_2(x,t) + u_1(x)$$

$$u_1(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

جایگذاری u در معادله:

$$(u_2)_t + \overset{\text{صفر}}{\cancel{(u_1)_t}} = c^2 \left[(u_2)_{xx} + \overset{\text{صفر}}{\cancel{(u_1)_{xx}}} \right]$$

$$B.C: \quad u(0,t) = u_2(0,t) + \overset{T_1}{\cancel{u_1(0)}} = T_1$$

$$u(L,t) = u_2(L,t) + \overset{T_2}{\cancel{u_1(L)}} = T_2$$

$$I.C: \quad u(x,0) = u_2(x,0) + u_1(x) = f(x)$$

$$(u_2)_t = c^2 (u_2)_{xx}$$

$$B.C: \quad u_2(0,t) = u_2(L,t) = 0$$

$$I.C: \quad u_2(x,0) = f(x) - \left[\frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \right]$$

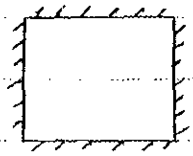
⋮

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - \left(\frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \right) \right] \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$u(x,t) = u_1(x) + u_2(x,t)$$

مثال: ورق مستطیل تحت تحریک اولیه قرار میگیرد.



b

a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0$$

B.C. : $u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0$

$u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0$

I.C. : $u(x,y,0) = f(x,y)$

$u_t(x,y,0) = g(x,y)$

$$u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$$

$$XY\ddot{T} = c^2 (X''YT + XY''T) \xrightarrow{\div c^2 XYT} \frac{\ddot{T}}{c^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -k^2$$

$$\longrightarrow \frac{\ddot{T}}{c^2 T} = -k^2, \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -k^2$$

Subject
Date

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - k^2 = -\mu^2$$

$$X'' + \mu^2 X = 0$$

$$Y'' + \nu^2 Y = 0 \longrightarrow \nu^2 = k^2 - \mu^2$$

$$X'' + \mu^2 X = 0 \quad , \quad X(0) = X(a) = 0$$

$$Y'' + \nu^2 Y = 0 \quad , \quad Y(0) = Y(b) = 0$$

$$\ddot{T} + c^2 k^2 T = 0 \quad , \quad k^2 = \nu^2 + \mu^2$$

$$X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x \qquad \text{I}$$

$$Y(y) = d_1 \cos \nu y + d_2 \sin \nu y \qquad \text{II}$$

$$T(t) = e_1 \cos ckt + e_2 \sin ckt \qquad \text{III}$$

$$, \quad k^2 = \nu^2 + \mu^2$$

$$\text{I}: \quad c_1 = 0 \quad , \quad c_2 \sin \mu a = 0 \longrightarrow \mu_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$X_m(x) = \sin \frac{m\pi}{a} x$$

$$\text{II}: \quad d_1 = 0 \quad ; \quad d_2 \sin \nu b = 0 \longrightarrow \nu_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$Y_n(y) = \sin \frac{n\pi}{b} y$$

Subject
Date

III : $T_{mn}(t) = B_{mn}\cos\lambda_{mn} t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn} t$

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$$

$$u_{mn}(x,y,t) = \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \cdot (B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)$$

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x,y,t)$$

I.C : $u(x,y,0) = f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y$

$$B_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy$$

I.C : $u_t(x,y,0) = g(x,y)$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B^*_{mn}\lambda_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$B^*_{mn} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a g(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

تمرین :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

B.C. : $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

I.C. : $u(x,0) = \sin x$

: $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$

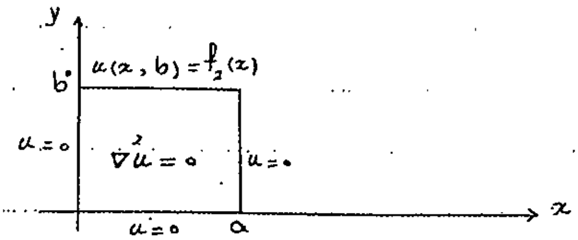
PAPCO

Subject
Date

معادله لاپلاس :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

"شبیه‌سازی انتقال حرارت پایدار در صفحه"



شرایط مرزی + معادله لاپلاس = مسأله دیریکله

$u(x,y) = X(x)Y(y)$

$$\begin{cases} X'' + kX = 0 \\ Y'' - kY = 0 \end{cases}, \quad X(0) = X(a) = 0$$

$k = \mu^2$

$X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x \xrightarrow{B.C.} C_1 = 0, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{a}, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x$

$Y(y) = A_n \cosh \mu_n y + B_n \sinh \mu_n y \xrightarrow{B.C.} y(0) = 0 \longrightarrow A_n = 0$

$\longrightarrow Y_n(y) = B_n \sinh \mu_n y$

$u_n(x,y) = X_n(x) \cdot Y_n(y)$

$u_n(x,y) = B_n \sinh \mu_n y \sin \frac{n\pi}{a} x$

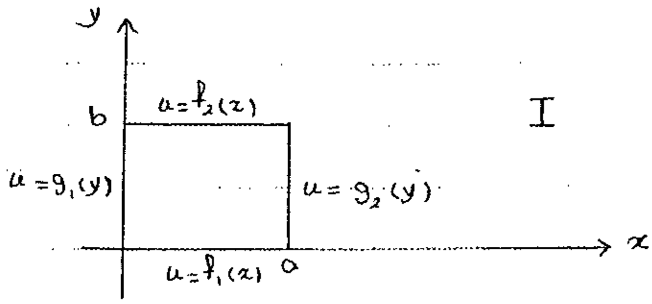
$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \mu_n y \sin \frac{n\pi}{a} x$

شرایط مرزی : $u(x,b) = f_2(x) \longrightarrow f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \mu_n b \sin \frac{n\pi}{a} x$

$$B_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f_2(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Subject
Date

مسئله کلی در منطقه :

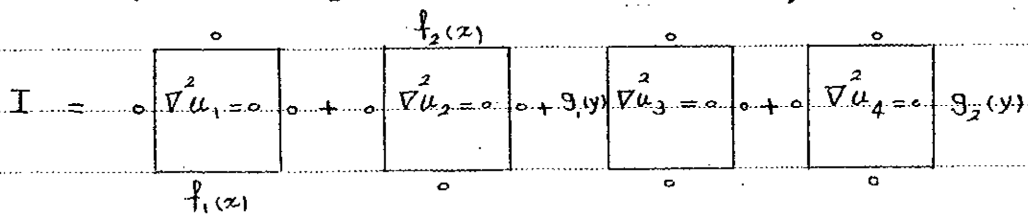


I

ما این مدل نمی‌توانیم معادله را با روش جداسازی حل کنیم؛ چرا که شرایط مرزی معادله، همگن (صفر) نیست.

جواب نهایی معادله : $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) + u_3(x,y) + u_4(x,y)$

* هر یک از این توابع در معادله لاپلاس صدق می‌کنند و هر کدام دارای شرایط مرزی همگن هستند. در واقع حالت کلی مسئله در منطقه برابر چهار مسئله جابی (شرایط مرزی همگن) در منطقه همانند حالت قبل می‌باشد.



اثبات : ۱) باید مجموع چهار جواب در معادلهٔ لاپلاس صدق کند. چون تک تک جواب‌ها در معادله لاپلاس صدق می‌کنند، پس این شرط برآورده می‌شود.

۲) باید چهار جواب شرایط مرزی حالت کلی را پوشش دهند.

$x=0$ در : $u_1=0 \;,\; u_2=0 \;,\; u_3=g_1(y) \;,\; u_4=0 \longrightarrow u_1+u_2+u_3+u_4=g$

تمرین : u_1 و u_3 و u_4 را بدست آورید.

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}x \,.\, \sinh\frac{n\pi}{a}(b-y) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{a}x \,.\, \sinh\frac{n\pi}{a}y + \vdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\frac{n\pi}{b}(a-x) \,.\, \sin\frac{n\pi}{b}y + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\frac{n\pi}{b}x \,.\, \sin\frac{n\pi}{b}y$$

PAPCO

Subject
Date

روش جداسازی متغیرها (separation of variables):

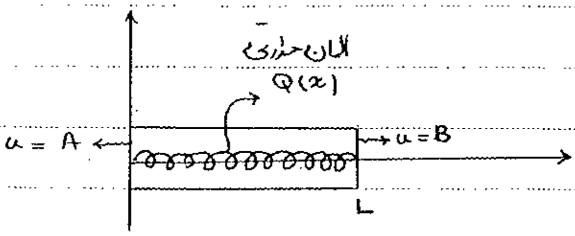
روش جداسازی متغیرها بطور مستقیم فقط برای مسائلی قابل استفاده است که:

- معادله دیفرانسیل پاره ای (با n متغیر مستقل) خطی و همگن باشد.
- برای n-1 متغیر، شرایط مرزی خطی و همگن باشد.

$$u_t = k u_{xx} + Q(x)$$

B.C. : $u(0,t) = A$, $u(L,t) = B$

I.C. : $u(x,0) = f(x)$



نه برای x همگن است، نه برای t! معادلهٔ دیفرانسیل نیز همگن نیست.

در واقع هیچ کدام از دو شرط روش جداسازی برقرار نیست.

اما اگر تابع $u(x,t)$ را بصورت زیر در نظر بگیریم، می‌توانیم آن را با روش جداسازی حل کنیم:

$$u(x,t) = v(x,t) + u_E(x)$$

به عنوان مثال، در حالت خاص زیر:

برای سادگی، فرض $Q(x) = k$

$$v_t + \cancel{(u_E)_t} = k\left(v_{xx} + (u_E)_{xx}\right) + k$$

صفر

$$\text{B.C.}: \begin{cases} u(0,t) = v(0,t) + u_E(0) = A \\ u(L,t) = v(L,t) + u_E(L) = B \end{cases}$$

I.C. : $u(x,0) = v(x,0) + u_E(x) = f(x)$

Subject
Date

$$\text{I}\begin{cases} k\,(u_E)_{xx} = -k \\ u_E(0) = A \quad , \quad u_E(L) = B \end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases} v_t = k\,v_{xx} \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 \\ v(x,0) = f(x) - u_E(x) \end{cases} \longrightarrow$$

معادله دیفرانسیل خطی و همگن شد.
شرایط مرزی خطی و همگن شد.

$$\text{II} \longrightarrow v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{L}(x)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x) - u_E(x)\right] \sin\frac{n\pi}{L} x\,dx$$

$$\text{I} \longrightarrow u_E = -\frac{x^2}{2} + \alpha_1 x + \alpha_2 \qquad \alpha_2 = A \quad , \quad \alpha_1 = \frac{B-A}{L} + \frac{L}{2}$$

$$\longrightarrow u(x,t) = v(x,t) + u_E(x)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t) \longrightarrow \text{غیرخطی ناهمگن} \\ \text{B.C.}: \; u(0,t) = A(t) \quad , \quad u(L,t) = B(t) \\ \text{I.C.}: \; u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

شرایط مرزی ناهمگن متغیر با زمان

$r(x,t)$ را گونه‌ای تعیین می‌شود که شرایط مرزی ناهمگن مسأله را ارضا کند.

$r(0,t) = A(t)$

$r(L,t) = B(t)$

Subject
Date

$$u(x,t) = v(x,t) + r(x,t)$$

تابع $r(x,t)$ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$r(x,t) = A(t) + \frac{x}{L}(B(t) - A(t))$$

$$\text{B.C.} \begin{cases} u(0,t) = v(0,t) + r(0,t) = A(t) \longrightarrow v(0,t) = 0 \\ u(L,t) = v(L,t) + r(L,t) = B(t) \longrightarrow v(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{I.C.} \quad u(x,0) = v(x,0) + r(x,0) = f(x) \longrightarrow v(x,0) = f(x) - r(x,0) = g(x)$$

$$u_t = k u_{xx} + Q(x,t)$$

$$v_t + r_t = k(v_{xx} + r_{xx}) + Q(x,t)$$

$$\begin{cases} v_t = k v_{xx} + \underbrace{\left[Q(x,t) - r_t + k r_{xx}\right]}_{\bar{Q}(x,t)} \\ v(0,t) = 0 \\ v(L,t) = 0 \\ v(x,0) = g(x) = f(x) - r(x,0) \end{cases} \quad (\text{I})$$

معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن، شرایط مرزی همگن.

روش بسط توابع ویژه (Eigenfunction Exponsion M.)

مسئلهٔ همگن معادلهٔ I :

$$\begin{cases} w_t = k w_{xx} \\ w(0,t) = w(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + \lambda^2 \varphi = 0 \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{II}} \begin{cases} \lambda_n = \frac{n\pi}{L} & \text{مقادیر ویژه} \\ \varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x & \text{توابع ویژه} \end{cases}$$

تابع وزنی $r(x) = 1$

PAPCO

Subject
Date

جواب مسأله I را می‌توانیم بصورت زیر بنویسیم:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,\varphi_n(x) \qquad (\mathrm{III})$$

چون $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ ، شرایط مرزی مسأله I به طور خودکار ارضا می‌شود.
شرط اولیه:

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\,\varphi_n(x) = g(x)$$

$a_n(0)$ ضرایب بسط توابع ویژه تابع $g(x)$ است.

$$a_n(0) = \frac{\int_0^L g(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int_0^L \varphi_n^2(x)\,dx}$$

حال برای یافتن $a_n(t)$:

$$v_t = k v_{xx} + \bar{Q}(x,t)$$

$$\frac{\partial \mathrm{III}}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d a_n(t)}{dt}\varphi_n(x)$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{III}}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2} \overset{\mathrm{II}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\lambda_n^2\varphi_n(x)$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d a_n(t)}{dt}\varphi_n(x) = -k\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\lambda_n^2\varphi_n(x) + \bar{Q}(x,t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{d a_n(t)}{dt} + \lambda_n^2 k\, a_n(t)\right]}_{\text{ضرایب بسط توابع ویژه}} \varphi_n(x) = \bar{Q}(x,t) \qquad (*)$$

$$\frac{d a_n(t)}{dt} + \lambda_n^2 k\, a_n(t) = \frac{\int_0^L \bar{Q}(x,t)\varphi_n(x)\,dx}{\int_0^L \varphi_n^2(x)\,dx} = \bar{q}_n(t)$$

$$\xrightarrow{(*)} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{q}_n(t)\,\varphi_n(x) = \bar{Q}(x,t)$$

Subject
Date

$$e^{\lambda_n^2 k t}\left(\frac{da_n(t)}{dt}+\lambda_n^2 k\, a_n(t)\right)=e^{\lambda_n^2 k t}\,\bar{q}_n(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(a_n(t)\, e^{\lambda_n^2 k t}\right)=e^{\lambda_n^2 k t}\,\bar{q}_n(t)$$

$$a_n(t)\, e^{\lambda_n^2 k t}-a_n(0)=\int_0^t \bar{q}_n(\tau)\, e^{\lambda_n^2 k \tau}\, d\tau$$

$$a_n(t)=a_n(0)\, e^{-\lambda_n^2 k t}+e^{-\lambda_n^2 k t}\int_0^t \bar{q}_n(\tau)\, e^{\lambda_n^2 k \tau}\, d\tau$$

$v(x,t)=\checkmark$

$u(x,t)=v(x,t)+r(x,t)=\checkmark$

مثال:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin 3x\, e^{-t} & 0\leqslant x\leqslant \pi \;,\; t>0 \\ \text{B.C.} \quad u(0,t)=0 \;,\; u(\pi,t)=1 \\ \text{I.C.} \quad u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

$u(x,t)=v(x,t)+r(x,t) \qquad r(x,t)=\dfrac{x}{\pi}$

$$\begin{cases} v_t=v_{xx}+\sin 3x\, e^{-t} \\ \text{B.C.} : \; v(0,t)=v(\pi,t)=0 \\ \text{I.C.} : \; v(x,0)=f(x)-\dfrac{x}{\pi} \end{cases}$$

توابع ویژه $\quad \varphi_n(x)=\sin nx$

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin nx$$

Subject
Date

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{da_n(t)}{dt}+n^2a_n\right)\sin nx=\sin 3x\, e^{-t}$$

$$\frac{da_n(t)}{dt}+n^2a_n=\begin{cases}0, & n\neq 3\\ e^{-t}, & n=3\end{cases}$$

$$a_n(t)=\begin{cases}a_n(0)\,e^{-n^2t}, & n\neq 3\\[2ex] \frac{1}{8}e^{-t}+\left[a_3(0)-\frac{1}{8}\right]e^{-9t}, & n=3\end{cases}$$

I.C. : $v(x,0)=f(x)-\frac{x}{\pi}$

$$f(x)-\frac{x}{\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(0)\sin nx$$

$$a_n(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x)-\frac{x}{\pi}\right]\sin nx\,dx$$

تمرین :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+Q(x,t)$$

B.C. : $u(0,t)=A(t)\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$

I.C. : $u(x,0)=f(x)$

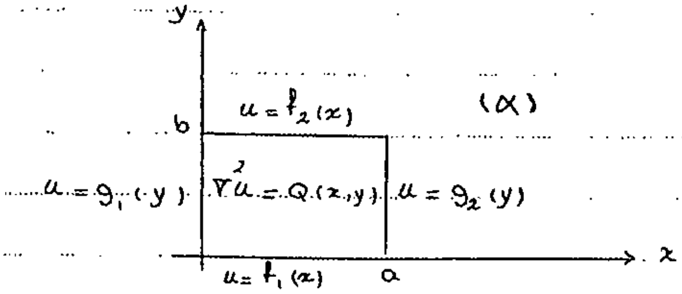
Subject
Date

مثال:

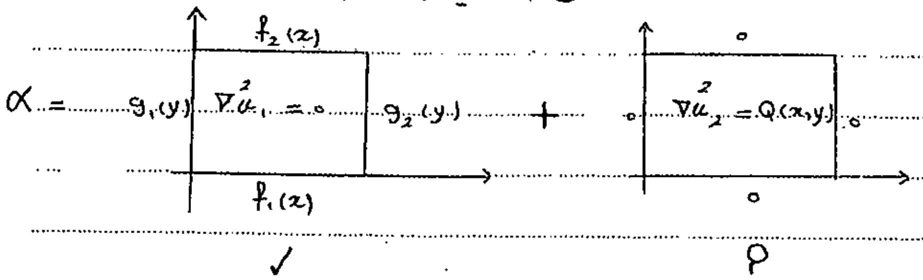
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Q(x,y) \qquad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{array}$$

B.C. $\quad u(x,0) = f_1(x) \quad , \quad u(x,b) = f_2(x)$

$\quad u(0,y) = g_1(y) \quad , \quad u(a,y) = g_2(y)$



معادله ناهمگن + شرایط مرزی ناهمگن
- ۱_ معادله همگن + شرایط مرزی ناهمگن u_1
- ۲_ معادله ناهمگن + شرایط مرزی همگن u_2



اثبات: هم باید شرایط مرزی را ارضا کند، هم معادله را ✓ $\quad u = u_1 + u_2 \longrightarrow$

?: روش اول (توابع ویژه یک بعدی)

$\nabla^2 u_2 = Q(x,y)$

نیم همگن : $\nabla^2 u_2 = 0$

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

Subject
Date

جایگذاری در معادله:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{d^2 b_n(y)}{dy^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 b_n(y)\right]\sin\frac{n\pi x}{a}=Q(x,y)$$

$$\frac{d^2 b_n(y)}{dy^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 b_n(y)=\underbrace{\frac{2}{a}\int_0^a Q(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx}_{q_n(y)}$$

$$Q(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n(y)\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$B.C.:\ u_x(a,y)=u_x(0,y)=0$ ✓ [illegible]

$B.C.:\ u_y(x,b)=u_y(x,0)=0$ [illegible]

$$u_y(x,b)=0 \rightarrow b_n(b)=0 \qquad u_y(x,0)=0 \rightarrow b_n(0)=0$$

روش دوم (توابع ویژه دو بعدی):

توضیح کلی در مورد توابع ویژه: تابع ویژه برای یک عملگر (اپراتور) خطی تعریف می‌شود:

تابع f را یک تابع ویژه عملگر خطی $\tilde{L}$ می‌گویند اگر: ← تابع ویژه

$$\underset{\text{عملگر خطی}}{\tilde{L}}\,f=\underset{\text{مقدار ویژه (اسکالر)}}{\lambda}\,f$$

عملگر $\tilde{L}$ را یک عملگر خطی می‌نامند اگر برای هر دو تابع f و g و اسکالر t داشته باشیم:

$$\tilde{L}(f+g)=\tilde{L}f+\tilde{L}g$$

$$\tilde{L}(tf)=t\,\tilde{L}(f)$$

معادله اشترم لیوویل:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right]+\left[q(x)+\lambda r(x)\right]y(x)=0$$

$$\tilde{L}y=\frac{1}{r(x)}\left(-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)\,y\right)$$

Subject
Date

$$\longrightarrow \quad \tilde{L} y = \lambda y$$

$$\nabla^2 u_2 = Q \longrightarrow \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = Q(x, y)$$

یک اپراتور خطی

$$\nabla^2 \varphi = -\lambda \varphi \qquad \varphi = XY$$

$$\varphi(a, y) = \varphi(0, y) = 0$$

$$\varphi(x, b) = \varphi(x, 0) = 0$$

$$X''Y + XY'' = -\lambda XY$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda \longrightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda - \frac{Y''}{Y} = k = -\mu_n^2$$

$$X'' + \mu^2 X = 0 \longrightarrow X(x) = \cancel{A_1}^{\,0} \cos \mu x + B_1 \sin \mu x$$

$$\sin \mu a = 0 \longrightarrow \mu_n = \frac{n\pi}{a}, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x$$

$$Y'' + \underbrace{(\mu_n^2 - \lambda)}_{\omega^2} Y = 0$$

$$Y(y) = \cancel{A_2}^{\,0} \cos \omega y + B_2 \sin \omega y$$

$$\sin \omega b = 0 \longrightarrow \omega_m = \frac{m\pi}{b}, \quad Y_m(y) = \sin \frac{m\pi}{b} y$$

توابع ویژه اپراتور لاپلاس :

$$\varphi_{mn}(x, y) = \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_{mn} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

PAPCO

Subject
Date

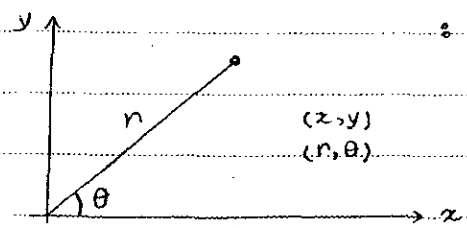
جایگذاری جواب در معادله دیفرانسیل :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} -E_{mn}\underbrace{\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]}_{\lambda_{mn}}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}=Q(x,y)$$

بسط سری فوریه دوگانه سینوسی تابع $Q(x,y)$:

$$E_{mn}=\frac{-4}{ab\,\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a Q(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b}\,dx\,dy$$

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در مختصات قطبی (استوانه‌ای) :



$$\begin{cases} x=r\cos\theta & r^2=x^2+y^2 \quad \mathrm{I} \\ y=r\sin\theta & \theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \mathrm{II} \end{cases}$$

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x}:\ 2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x \longrightarrow \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r-x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\frac{y^2}{r^3}$$

$$\mathrm{II}:\ \frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{2y}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2xy}{r^4}$$

Subject
Date

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad , \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{r^4}$$

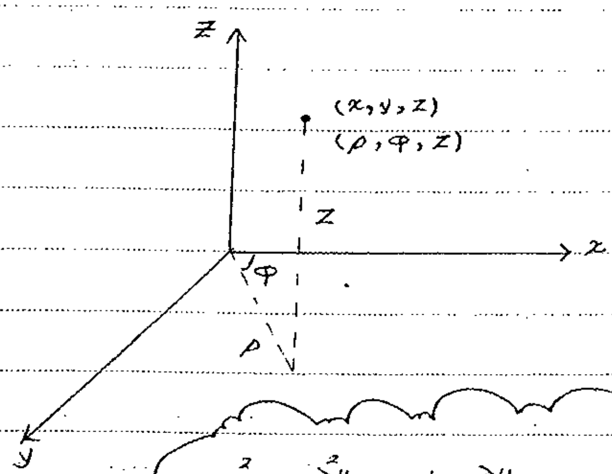
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$ معادله لاپلاس در مختصات قطبی

معادله لاپلاس در مختصات استوانه ای :

$x = \rho \cos\varphi$

$y = \rho \sin\varphi \longrightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$z = z$



$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Subject
Date

مسئله: ارتعاش یک ورق دایره‌ای :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \nabla^2 u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)$$

$\downarrow$ تقارن

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad u = u(r,t)$$

$$0 \leqslant r \leqslant a \quad , \quad t > 0$$

B.C. : $u(a,t) = 0$

I.C. : $u(r,0) = f(r)$

$\frac{\partial u}{\partial t}(r,0) = g(r)$

معادله دیفرانسیل همگن + شرایط مرزی همگن

روش جداسازی :

$$u(r,t) = R(r)\,.\,T(t)$$

$$R\ddot{T} = C^2\left(R''T + \frac{1}{r}R'T\right) \xrightarrow{\div C^2RT}$$

$$\frac{\ddot{T}}{C^2T} = \frac{1}{R}\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right) = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} rR'' + R' + \lambda^2 rR = 0 \\ \text{B.C. : } u(a,t) = 0 \longrightarrow R(a) = 0 \end{cases}$$

معادله بسل مرتبه صفر

,

$$\ddot{T} + C^2\lambda^2 T = 0$$

PAPCO

Subject

Date

چون در نقطه $r=0$ ، $Y_0 \longrightarrow \infty$

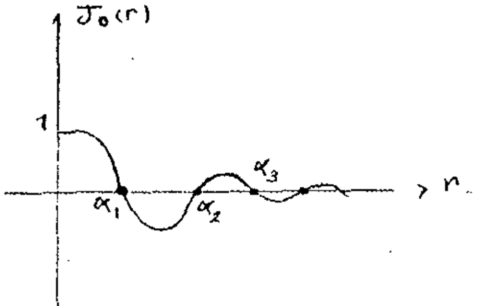
$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + \cancel{C_2} Y_0(\lambda r)$$

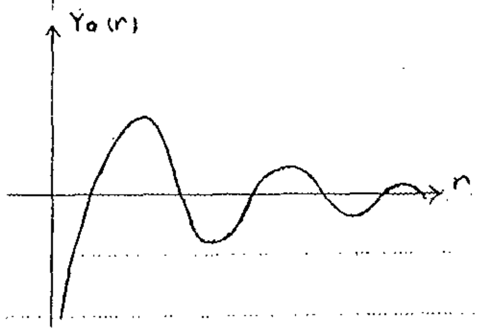
$$R(r) = J_0(\lambda r)$$

$$B.C. \quad R(a) = 0$$

$$J_0(\lambda a) = 0 \longrightarrow \lambda_n = \frac{\alpha_n}{a} \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$R(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n}{a} r\right)$$





$$\ddot{T} + c^2 \lambda_n^2 T = 0$$

$$T(t) = A_n \cos(c\lambda_n t) + B_n \sin(c\lambda_n t)$$

$$u_n(r,t) = J_0\left(\frac{\alpha_n}{a} r\right)\left[A_n \cos(c\lambda_n t) + B_n \sin(c\lambda_n t)\right]$$

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\alpha_n}{a} r\right)\left[A_n \cos(c\lambda_n t) + B_n \sin(c\lambda_n t)\right]$$

ضرایب بسط فوریه ـ بسل تابع $f(r)$

$$I.C. \quad u(r,0) = f(r) \longrightarrow f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r)$$

$$A_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^a f(r) J_0(\lambda_n r)\, r\, dr$$

$$I.C.: \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,0) = g(r)$$

ضرایب بسط فوریه ـ بسل تابع $g(r)$

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c\lambda_n B_n J_0(\lambda_n r)$$

$$B_n = \frac{2}{c a^2 \lambda_n J_1^2(\alpha_n)} \int_0^a g(r) J_0(\lambda_n r)\, r\, dr$$

PAPCO

Subject
Date

مسأله حالت کلی :

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u \qquad 0 \leq r \leq a \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ t > 0$$

$$u_{tt} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)$$

B.C. : $u(a, \theta, t) = 0$

I.C. : $u(r, \theta, 0) = f(r, \theta)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = g(r, \theta)$$

روش جداسازی :

$$u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$$

$$R\Theta\ddot{T} = c^2\left(R''\Theta T + \frac{1}{r}R'\Theta T + \frac{1}{r^2}R\Theta'' T\right)$$

$$\frac{\ddot{T}}{c^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} \ddot{T} + c^2\lambda^2 T = 0 \\ \dfrac{R''}{R} + \dfrac{1}{r}\dfrac{R'}{R} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda^2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{r^2 R''}{R} + \frac{rR'}{R} + \lambda^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu^2 \qquad \text{I}$$

شرایط تناوب

$$\begin{cases} u(r, \theta, t) = u(r, \theta + 2\pi, t) \\ \dfrac{\partial u(r, \theta, t)}{\partial \theta} = \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta + 2\pi, t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \\ \dfrac{d\Theta(\theta)}{d\theta} = \dfrac{d\Theta(\theta + 2\pi)}{d\theta} \end{cases}$$

Subject
Date

$$\mathrm{I} \rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \mu^2 \Theta = 0 \\ r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - \mu^2) R = 0 \end{cases}$$

$B.C.: \quad u(a, \theta, t) = 0 \longrightarrow R(a) = 0$

شرایط تناوب $\begin{cases} \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases}$

حل معادله مربوط به Θ :

اگر $\mu = 0 \longrightarrow \Theta(\theta) = A_0$ به دلیل شرایط تناوب (ضریب $\theta = 0$)

اگر $\mu \neq 0 \longrightarrow \Theta(\theta) = C_1 \cos\mu\theta + C_2 \sin\mu\theta$

$\mu = m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$

$\Theta(\theta) = A_m \cos(m\theta) + B_m \sin(m\theta)$

حل معادله مربوط به R : $r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - m^2) R = 0$ معادله بسل از مرتبه m

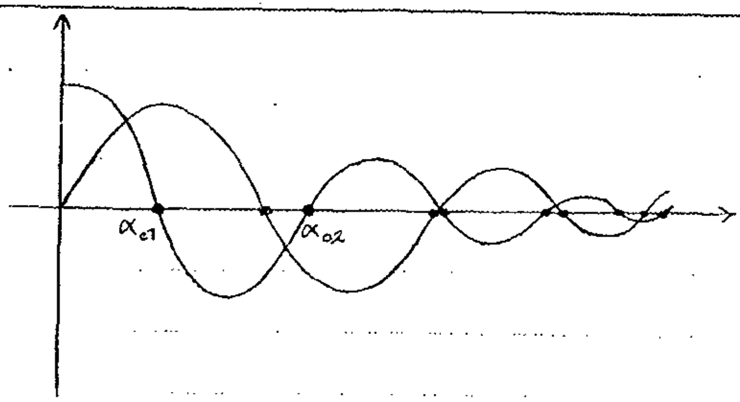
صفر

$R(r) = C_1 J_m(\lambda r) + \cancel{C_2} Y_m(\lambda r)$

$R(r) = C_1 J_m(\lambda r)$

$B.C.: \quad R(a) = 0 \longrightarrow J_m(\lambda a) = 0$

Subject
Date



α_{mn} : n امین ریشه تابع بسل نوع اول از مرتبه m ام.

$$\lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}$$

$$R_{mn}(r) = J_m(\lambda_{mn} r)$$

$$\ddot{T} + c^2 \lambda_{mn}^2 T = 0$$

$$T(t) = A_{mn} \cos(c\lambda_{mn} t) + B_{mn} \sin(c\lambda_{mn} t)$$

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_m \cos(m\theta) + B_n \sin(m\theta)\right]$$

$$\left[J_m(\lambda_{mn} r)\right]\left[A_{mn} \cos(c\lambda_{mn} t) + B_{mn} \sin(c\lambda_{mn} t)\right]$$

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) \left[a_{mn} \cos(m\theta) + b_{mn} \sin(m\theta)\right] \cos(c\lambda_{mn} t)$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) \left[a^*_{mn} \cos(m\theta) + b^*_{mn} \sin(m\theta)\right] \sin(c\lambda_{mn} t)$$

Subject
Date

I.C. : $u(r,\theta,0) = f(r,\theta)$

$$f(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r)\left[a_{mn}\cos(m\theta) + b_{mn}\sin(m\theta)\right]$$

$$f(r,\theta) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} J_0(\lambda_{0n} r)}_{a_0(r)} + \sum_{m=1}^{\infty}\Big\{\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} J_m(\lambda_{mn} r)}_{a_m(r)}\cos(m\theta)$$
$$+ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} J_m(\lambda_{mn} r)}_{b_m(r)}\sin(m\theta)\Big\}$$

$$f(r,\theta) = a_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m(r)\cos(m\theta) + b_m(r)\sin(m\theta)\right]$$

$$a_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\,d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} J_0(\lambda_{0n} r)$$

$$a_m(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\cos m\theta\, d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} J_m(\lambda_{mn} r)$$

$$b_m(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\sin m\theta\, d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} J_m(\lambda_{mn} r)$$

a_{mn}
b_{mn}

ضرایب بسط فوریه بسل

$$a_{0n} = \frac{2}{2\pi a^2 J_1^2(\alpha_{0n})}\int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta) J_0(\lambda_{0n} r)\, r\, d\theta\, dr$$

$$a_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 (J_{m+1}(\alpha_{mn}))^2}\int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\cos m\theta\, J_m(\lambda_{mn} r)\, r\, d\theta\, dr$$

Subject
Date

$$b_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 (J_{m+1}(\alpha_{mn}))^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r,\theta) \sin m\theta \, J_m(\lambda_{mn} r) \, r \, d\theta \, dr$$

$$\text{I.C.}: \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = g(r,\theta)$$

$$g(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c\lambda_{mn} J_m(\lambda_{mn} r) \left[a^*_{mn} \cos(m\theta) + b^*_{mn} \sin(m\theta) \right]$$

به طریق مشابه :

$$a^*_{0n} = \frac{2}{2\pi c \lambda_{mn} a^2 (J_1(\alpha_{0n}))^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} g(r,\theta) J_0(\lambda_{0n} r) \, r \, d\theta \, dr$$

$$a^*_{mn} = \frac{2}{\pi c \lambda_{mn} a^2 (J_{m+1}(\alpha_{mn}))^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} g(r,\theta) \cos m\theta \, J_m(\lambda_{mn} r) \, r \, d\theta \, dr$$

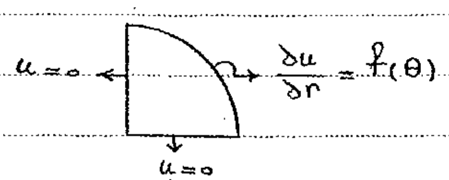
$$b^*_{mn} = \frac{2}{\pi c \lambda_{mn} a^2 (J_{m+1}(\alpha_{mn}))^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} g(r,\theta) \sin m\theta \, J_m(\lambda_{mn} r) \, r \, d\theta \, dr$$

$$\lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}$$

تمرین : معادله لاپلاس را درون یک ربع دایره به شعاع 1 و شرایط مرزی زیر حل کنید.

$0 \leq \theta \leq \pi/2$

$0 \leq r \leq 1$:



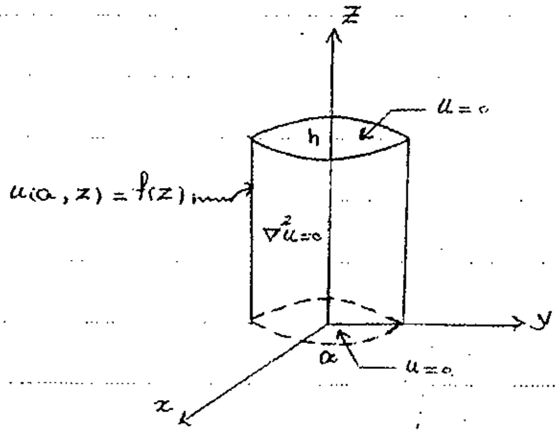
Subject
Date

معادله لاپلاس داخل استوانه با تقارن شعاعی :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$$

$$\text{B.C.}\begin{cases} u(\rho, 0) = u(\rho, h) = 0 \\ u(a, z) = f(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant \rho \leqslant a \\ 0 \leqslant z \leqslant h \end{cases}$$



$$u = R(\rho)\, Z(z)$$

$$R''Z + \frac{1}{\rho}R'Z + RZ'' = 0 \longrightarrow \frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho}\frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z} = 0 \longrightarrow \frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho}\frac{R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = \lambda^2$$

$$-Z'' = \lambda^2 Z \longrightarrow Z'' + \lambda^2 Z = 0$$

$$\longrightarrow Z(z) = A\cos\lambda z + B\sin\lambda z$$

$$Z(0) = 0 \longrightarrow A = 0$$

$$Z(h) = 0 \longrightarrow B\sin\lambda h = 0 \longrightarrow \lambda h = n\pi \longrightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{h}$$

$$\longrightarrow Z_n = \sin\frac{n\pi}{h} z \; ,$$

$$* \rho^2 R \longrightarrow \rho^2 R'' + \rho R' - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \rho^2 R = 0 \xrightarrow[\text{اصلاح شده}]{\text{معادله بسل}} R = C_n I_0(\lambda_n \rho) + D_n K_0(\lambda_n \rho)$$

$$\xrightarrow{\text{جواب محدود باشد}} D_n = 0 \longrightarrow R_n(\rho) = C_n I_0(\lambda_n \rho) \longrightarrow u = \sum_{n=1}^{\infty} R_n Z_n$$

$$u(a, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\lambda_n z\, I_0(\lambda_n a) = f(z)$$

PAPCO

Subject
Date

$$C_n I_0(\lambda_n a) = \frac{2}{h}\int_0^h f(z)\sin\lambda_n z\,dz$$

$$C_n = \frac{2}{I_0(\lambda_n a)h}\int_0^h f(z)\sin\frac{n\pi}{h}z\,dz$$

معادله هلمهولتز: $\nabla^2\varphi(r,\theta) = -k\varphi(r,\theta)$

$B.C.:\ \varphi(a,\theta)=0 \qquad 0\leq r\leq a\ ,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi$

$\varphi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$

$\Theta'' + m^2\Theta = 0 \qquad m=0,1,\dots \qquad (I)$

$r^2R'' + rR' + (kr^2 - m^2)R = 0 \qquad (II)$

I جواب : $\cos m\theta\ ,\ \sin m\theta$

II جواب : $J_m(\lambda_{mn} r)$

α_{mn} امین صفر تابع بسل نوع اول از مرتبه m ام

مقادیر ویژه: $\lambda_{mn} = \left(\frac{\alpha_{mn}}{a}\right) \quad , \quad k = \lambda_{mn}^2$

توابع ویژه:

$\varphi_{mn}(r,\theta) = \sin m\theta \cdot J_m(\lambda_{mn} r)$

$\varphi_{mn}(r,\theta) = \cos m\theta \cdot J_m(\lambda_{mn} r)$

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r)(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)$$

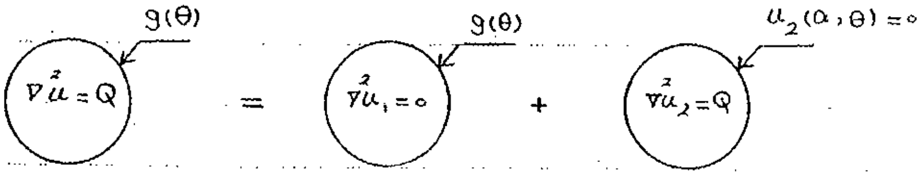
PAPCO

Subject
Date

معادله پواسون در مختصات قطبی :

$$\nabla^2 u = Q(r,\theta) \qquad 0 \leq r \leq a \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$B.C. : \; u(a,\theta) = g(\theta)$$



$$u = u_1 + u_2$$

$$\nabla^2 u_2 = Q(r,\theta) \qquad 0 \leq r \leq a \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$B.C. : \; u_2(a,\theta) = 0$$

$$\nabla^2 \varphi = -k\varphi$$

$$u_2(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r)\,(A_{mn}\cos m\theta + B_{mn}\sin m\theta)$$

جایگذاری u_2 در معادله دیفرانسیل :

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_{mn}^2\, J_m(\lambda_{mn} r)\,(A_{mn}\cos m\theta + B_{mn}\sin m\theta) = Q(r,\theta)$$

$$A_{0n} = \frac{-1}{\pi a^2 \lambda_{0n}^2 J_1^2(\alpha_{0n})}\int_0^a\int_0^{2\pi} Q(r,\theta)\, J_0(\lambda_{0n} r)\, r\, d\theta\, dr$$

$$A_{mn} = \frac{-2}{\pi a^2 \lambda_{mn}^2 J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a\int_0^{2\pi} Q(r,\theta)\cos m\theta\, J_m(\lambda_{mn} r)\, r\, d\theta\, dr$$

$$B_{mn} = \frac{-2}{\pi a^2 \lambda_{mn}^2 J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a\int_0^{2\pi} Q(r,\theta)\sin m\theta\, J_m(\lambda_{mn} r)\, r\, d\theta\, dr$$

Subject
Date

حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای با استفاده از تبدیل فوریه : (fourier transform method)

قضیه : اگر تابع f در هر بازه محدود بصورت تکه‌ای مشتق‌پذیر بوده ، $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<\infty$ باشد ، آنگاه داریم :

بیان انتگرال فوریه تابع $f(x)$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

$\omega\geq 0$ و $-\infty<x<+\infty$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left[\cos\omega t\cdot\cos\omega x+\sin\omega t\cdot\sin\omega x\right]dt\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)\,dt\,d\omega \qquad \left[\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{i\omega(x-t)}\,dt\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\omega(x-t)}\,dt\,d\omega$$

$\omega\to-\omega$ ، $$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{i\omega(x-t)}\,dt\,d\omega$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega x}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt}_{F(\omega)}\,d\omega$$

تبدیل فوریه $-\infty<\omega<+\infty$

$$\mathbb{F}(f(x))(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

تبدیل معکوس فوریه

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega x}F(\omega)\,d\omega$$

Subject

Date

قضیه: تبدیل فوریه یک عملگر (اپراتور) خطی است:

مقدار اسکالر

$$\mathbb{F}(af + bg) = a\,\mathbb{F}(f) + b\,\mathbb{F}(g)$$

تابع

برخی خواص تبدیل فوریه:

$$\begin{cases} \mathbb{F}(g(x)) = G(\omega) \\ \mathbb{F}(h(x)) = H(\omega) \end{cases}$$

$$\mathbb{F}(g'(x)) = i\omega\, G(\omega)$$

$$\mathbb{F}(g^{(n)}(x)) = (i\omega)^n G(\omega)$$

کانولوشن دو تابع: $h * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)\, g(t)\, dt$

$$\mathbb{F}(h * g) = H \cdot G$$

$$\mathbb{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$$

$$\mathbb{F}(g(x-a)) = e^{-ia\omega} G(\omega)$$

$$\mathbb{F}(e^{iax} g(x)) = G(\omega - a)$$

روش تبدیل فوریه:

x: متغیر کلیدی

$\mathbb{F}(u(x,t))(\omega) = U(\omega, t)$ " t را ثابت فرض می‌کنیم "

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega a}\, dx$$

$$\mathbb{F}\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} u(x,t)\right) = \frac{d^n}{dt^n} U(\omega, t)$$

PAPCO

Subject
Date

$$\mathbb{F}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} u(x,t)\right) = (i\omega)^n U(\omega,t)$$

مثال:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < +\infty \quad , \quad t > 0$$

I.C. $\quad u(x,0) = f(x)$

$\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$

از تبدیل فوریه بگیریم:

$$\frac{d^2}{dt^2} U(\omega,t) = c^2 (i\omega)^2 U(\omega,t)$$

I.C. $\quad U(\omega,0) = F(\omega) \qquad F(\omega) = \mathbb{F}(f(x))$

$\quad \frac{d}{dt} U(\omega,0) = G(\omega) \qquad G(\omega) = \mathbb{F}(g(x))$

$$U(\omega,t) = A(\omega)\cos(c\omega t) + B(\omega)\sin(c\omega t)$$

$$U(\omega,0) = F(\omega) \longrightarrow A(\omega) = F(\omega)$$

$$\frac{d}{dt} U(\omega,0) = G(\omega) \longrightarrow B(\omega) = \frac{G(\omega)}{c\omega}$$

$$u(x,t) = \mathbb{F}^{-1}(U(\omega,t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(F(\omega)\cos c\omega t + \frac{G(\omega)}{c\omega}\sin c\omega t\right)e^{i\omega x}\,d\omega$$

مثال:

$$u_{tt} = u_{xxxx} \qquad -\infty < x < +\infty \qquad t > 0$$

I.C. $\quad u(x,0) = f(x)$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt^2} U(\omega,t) = (i\omega)^4 U(\omega,t)$$

I.C.: $\quad U(\omega,0) = F(\omega)$

PAPCO

$$U(\omega,t) = A(\omega)\,e^{\omega^2 t} + B(\omega)\,e^{-\omega^2 t} \qquad (\omega^2>0)$$

$A(\omega)=0$ برای اینکه جواب را محدود کنیم (در t بی‌نهایت، U بی‌نهایت نشود.) :

$$U(\omega,t) = F(\omega)\,e^{-\omega^2 t}$$

$$\longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\,e^{-\omega^2 t}\,e^{i\omega x}\,d\omega$$

مثال:

$$t u_x + u_t = 0 \qquad -\infty<x<\infty \;,\; t>0$$

$$I.C.:\; u(x,0) = f(x)$$

$$t(i\omega)\,U(\omega,t) + \frac{d}{dt}U(\omega,t) = 0$$

$$I.C.:\; U(\omega,0) = F(\omega)$$

$$U(\omega,t) = \underbrace{\cancel{A(\omega)}}_{F(\omega)}\,e^{-i\frac{t^2\omega}{2}}$$

$$u(x,t) = f\left(x-\frac{t^2}{2}\right)$$

مثال:

$$U_t = c^2 u_{xx} \qquad -\infty<x<+\infty \qquad t>0$$

$$I.C.:\; u(x,0) = f(x)$$

$$\longrightarrow U(\omega,t) = F(\omega)\,e^{-c^2\omega^2 t} \qquad (I)$$

تبدیل فوریه معکوس : (روش 1)

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\,e^{-c^2\omega^2 t}\,e^{i\omega x}\,d\omega$$

Subject
Date

(روش 2)

$$\mathbb{F}(h * g) = H.G$$

$$\rightarrow \mathbb{F}^{-1}(H.G) = h * g$$

$$\mathbb{F}^{-1}\left(e^{-c^2\omega^2 t}\right) = \frac{1}{c\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4c^2t}\right) \qquad \left(\alpha = \frac{1}{4c^2t}\right)$$

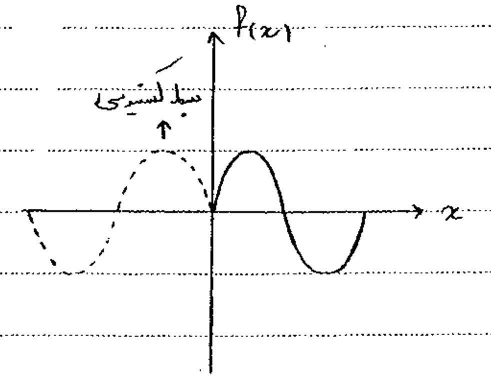
$\leftarrow$ رابطه (I) با استفاده از قضیه فوق به صورت زیر در می آید:

$$u(x,t) = \frac{1}{c\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2t}} * f(x)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{1}{c\sqrt{2t}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4c^2t}} ds$$

تا به حال $-\infty < x < +\infty$ بود، اما اگر دامنه x نیم بینهایت بود، به صورت زیر عمل می کنیم.

تبدیلات فوریه سینوسی و کسینوسی:



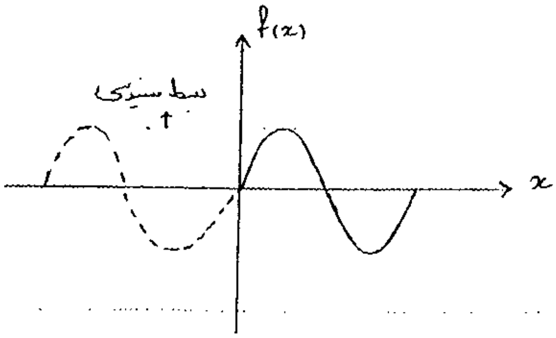
$$\underset{\text{زوج}}{f(x)} = \int_0^{\infty} \left(A(\omega)\cos\omega x + \underset{\text{صفر}}{\cancel{B(\omega)}}\sin\omega x\right) d\omega$$

بیان انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x)$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left(A(\omega)\cos\omega x\right) d\omega \qquad x>0$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t \, dt$$

PAPCO



بیان انتگرال فوریه سینوسی تابع $f(x)$

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega x \, d\omega \qquad x > 0$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt$$

$$\mathbb{F}_c(f(x))(\omega) = F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt \qquad (\omega \geq 0)$$

$$\mathbb{F}_s(f(x))(\omega) = F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt \qquad (\omega \geq 0)$$

تبدیل فوریه معکوس کسینوسی: $x > 0$

$$\mathbb{F}_c^{-1}(F_c(\omega))(x) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega x \, d\omega \qquad x > 0$$

تبدیل فوریه معکوس سینوسی: $x > 0$

$$\mathbb{F}_s^{-1}(F_s(\omega))(x) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega x \, d\omega \qquad x > 0$$

برخی خواص:

نرده‌ای

$$\mathbb{F}_c(af + bg) = a\mathbb{F}_c(f) + b\,\mathbb{F}_c(g)$$

تابع

$$\mathbb{F}_s(af + bg) = a\mathbb{F}_s(f) + b\,\mathbb{F}_s(g)$$

تبدیلات مشتق:

$$\mathbb{F}_c(f') = \omega\,\mathbb{F}_s(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) \qquad \left[\lim_{x \to \infty} f(x) = 0\right] + \left[\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0\right]$$

$$\mathbb{F}_s(f') = -\omega\,\mathbb{F}_c(f)$$

Subject
Date

$$\mathbb{F}_c(f'') = -\omega^2 \mathbb{F}_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f'(0)$$
$$\mathbb{F}_s(f'') = -\omega^2 \mathbb{F}_s(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega f(0)$$

مشتق تبدیلات:

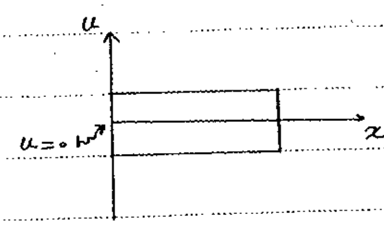
$$\mathbb{F}_c(x f(x)) = \frac{d}{d\omega}\, \mathbb{F}_s(f(x))$$
$$\mathbb{F}_s(x f(x)) = -\frac{d}{d\omega}\, \mathbb{F}_c(f(x))$$

مثال:

$u_t = c^2 u_{xx}$ $\qquad x \geq 0 \quad t > 0$

I.C.: $u(x,0) = f(x)$

B.C.: $u(0,t) = 0$



چون مقدار خود تابع را در نقطهٔ صفر داریم ← تبدیل فوریه سینوسی

$$\mathbb{F}_s(u_t) = c^2 \mathbb{F}_s(u_{xx})$$
$$\frac{d}{dt} U_s(\omega,t) = c^2\left(-\omega^2 U_s(\omega,t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega \underbrace{\cancel{u(0,t)}}_{\text{صفر}}\right)$$

$$\frac{d}{dt} U_s(\omega,t) = -c^2\omega^2 U_s(\omega,t)$$
I.C. $U_s(\omega,0) = F_s(\omega)$

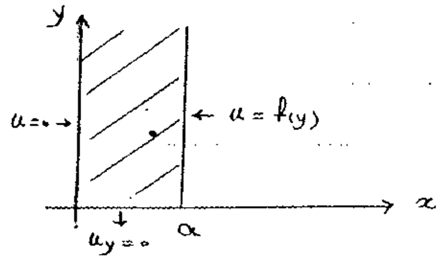
$$\rightarrow U_s(\omega,t) = F_s(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t}$$

$$\rightarrow u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t} \sin \omega x \, d\omega$$

مسائل دو بعدی :

مثال ، مسأله لاپلاس در یک نوار نیم بینهایت :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 0<x<a \ , \ y>0$$



$$B.C. \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \\ u(0,y) = 0 \\ u(a,y) = f(y) \end{cases}$$

تبدیل فوریه کسینوسی نسبت به y : (چون u_y را داریم ← کسینوسی)

$$\mathbb{F}_c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} U_c(x,\omega) - \omega^2 U_c(x,\omega) = 0$$

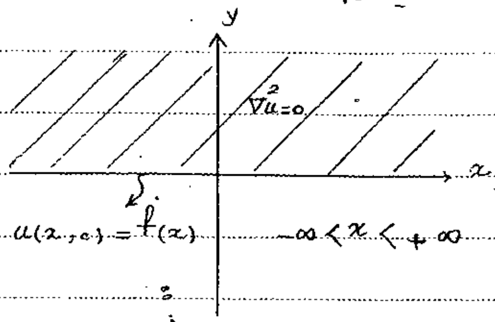
$$U_c(0,\omega) = 0 \quad , \quad U_c(a,\omega) = F_c(\omega)$$

$$\longrightarrow U_c(x,\omega) = \frac{F_c(\omega)}{\sinh \omega a} \sinh \omega x$$

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U_c(x,\omega) \cos \omega y \, d\omega$$

مثال ، معادله لاپلاس در یک نیم صفحه :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$



$$I.C. : u(x,0) = f(x)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \qquad -\infty < x < +\infty$$

Subject
Date

$$\lim_{y \to \infty} u(x, y) = 0$$

$$(i\omega)^2 U(\omega, y) + \frac{d^2}{dy^2} U(\omega, y) = 0$$

$$U(\omega, y) = a(\omega) e^{\omega y} + b(\omega) e^{-\omega y}$$

$$\lim_{y \to +\infty} u(x, y) = 0 \longrightarrow \lim_{y \to +\infty} U(\omega, y) = 0 \qquad -\infty < \omega < +\infty$$

$$U(\omega, y) = \begin{cases} a(\omega) e^{\omega y} & \omega < 0 \\ b(\omega) e^{-\omega y} & \omega > 0 \end{cases}$$

$$U(\omega, y) = c(\omega) e^{-|\omega| y}$$

$$u(x, 0) = f(x) \longrightarrow U(\omega, 0) = F(\omega) \qquad F(\omega) = \mathbb{F}(f(x))$$

$$c(\omega) = F(\omega)$$

$$U(\omega, y) = F(\omega) e^{-|\omega| y}$$

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-|\omega| y} . e^{i\omega x} \, d\omega$$

$$g(x, y) = \mathbb{F}^{-1}(e^{-|\omega| y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} e^{-|\omega| y} \, d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x - t, y) \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{2y}{(x-t)^2 + y^2} \, dt$$

Subject

Date

تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای :

تعریف : $L(f(t))(s) = F(s) = \int^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$

حالت کلی‌تر و معمول‌تر تبدیل لاپلاس است نسبت به بازه $-\infty$ تا $+\infty$. چرا که معمولاً نسبت به تغییر زمان تبدیل لاپلاس می‌گیریم که از 0 تا $+\infty$ تغییر می‌کند.

قضیه : تبدیل لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس عملگرهای خطی هستند.

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

اسکالر ، تابع

$$L^{-1}(\alpha f + \beta g) = \alpha L^{-1}(f) + \beta L^{-1}(g)$$

قضیه : اگر $f(t)$ و $f'(t)$ در بازه $[0, +\infty)$ پیوسته تکه‌ای بوده و از مرتبه نمائی باشد، آنگاه داریم :

$$L(f(t)) = F(s)$$

$$L(f') = sF(s) - f(0)$$

$\vdots$

$$L(f^{(n)}) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

مرتبه نمائی : $\begin{cases} \exists\, a, M \;,\; |f(t)| \leq M e^{at} \\ \exists\, a_1, M_1 \;,\; |f'(t)| \leq M_1 e^{a_1 t} \end{cases}$

قضیه : اگر $f(t)$ تابع پیوسته تکه‌ای بوده و از مرتبه نمائی باشد، داریم :

$$L(tf(t))(s) = -\frac{d}{ds} F(s)$$

$$L(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Subject
Date

قضیه انتقال در محور s: اگر f تابع پیوسته تکه‌ای و از مرتبه نمایی باشد، و α نیز یک عدد حقیقی باشد، داریم:

$$L(e^{\alpha t}f(t)) = F(s-\alpha)$$

تابع پله واحد:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & t\geq a \end{cases}$$

$$u(t-a)f(t-a) = \begin{cases} 0 & t<a \\ f(t-a) & t\geq a \end{cases}$$

قضیه انتقال در محور t:

$$L(u(t-a)f(t-a)) = e^{-as}F(s)$$

کانولوشن:

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

$$L(f*g) = L(f)L(g)$$

کاربرد تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای:
تبدیل لاپلاس تابع $u(x,t)$ نسبت به زمان:

$$L(u(x,t)) = U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-st}dt$$

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = sU(x,s) - u(x,0)$$

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = s^2U(x,s) - s\,u(x,0) - \frac{\partial}{\partial t}u(x,0)$$

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{d}{dx}U(x,s)$$

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{d^2}{dx^2}U(x,s)$$

PAPCO

Subject
Date

مثال:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(t) \qquad x>0 \ , \ t>0$$

$$B.C.: \ u(0,t) = 0$$

$$I.C.: \ u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

$$S^2 U(x,S) - S\,\cancel{u(x,0)}^{\text{صفر}} - \frac{\partial}{\partial t}\cancel{u(x,0)}^{\text{صفر}} = c^2 \frac{d^2}{dx^2} U(x,S) + F(S)$$

$$-c^2 \frac{d^2}{dx^2} U(x,S) + S^2 U(x,S) = F(S)$$

$$U(x,S) = A(S)\, e^{-\frac{S}{c}x} + \cancel{B(S)}^{\text{صفر}}\, e^{\frac{S}{c}x} + \frac{F(S)}{S^2}$$

(برای محدود شدن جواب)

$$B.C.: \ u(0,t) = 0 \longrightarrow U(0,S) = 0 \qquad x>0 \ , \ S>0$$

$$A(S) = -\frac{F(S)}{S^2}$$

$$U(x,S) = F(S)\, \frac{1 - e^{-\frac{S}{c}x}}{S^2}$$

$$u(x,t) = f(t) * \underbrace{L^{-1}\left(\frac{1 - e^{-\frac{S}{c}x}}{S^2}\right)}_{t - (t - \frac{x}{c}).u(t - \frac{x}{c})}$$

$$u(x,t) = \int_0^t f(t-\tau)\left\{\tau - (\tau - \frac{x}{c})\, u(\tau - \frac{x}{c})\right\} d\tau$$

PAPCO

Subject
Date

تبدیل هانکل در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای : (Hankel transform)

تبدیل هانکل مرتبه ν ($\nu \geq 0$) :

$$H_\nu(f)(s) = \int_0^\infty f(x)\, J_\nu(sx)\, x\, dx$$

تابع بسل نوع اول از مرتبه ν

تبدیل هانکل یک تبدیل خود معکوس است :

$$H_\nu(H_\nu f) = f$$

برخی خواص :

$$-sH_0(f) = H_1(f')$$

$$H_0\left(f' + \frac{1}{x} f\right) = sH_1(f)$$

$$H_0\left(f'' + \frac{1}{x} f'\right) = -s^2 H_0(f)$$

مثال :

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + u_{zz} = 0 \qquad (r>0 \ , \ z>0)$$

$$B.C. : \quad -c^2 u_z(r,0) = \begin{cases} K & 0<r<R \\ 0 & r>R \end{cases}$$

اعمال تبدیل هانکل از مرتبه صفر :

$$H_0(u(r,z)) = U(s,z)$$

$$-s^2 U(s,z) + \frac{d^2}{dz^2} U(s,z) = 0$$

$$U(s,z) = A(s) e^{-sz} + \cancel{B(s)} e^{sz}$$

0 (برای محدود شدن جواب در ∞)

$$B.C. : \quad -c^2 U_z(s,0) = H_0(kU(R-r))$$

PaPCO

Subject
Date

از جدول : $H_0(u(a-x)) = \frac{a}{s} J_1(as)$, $a>0$

برخی خواص :

B.C. : $-c^2 U_z(s,0) = k\frac{R}{s} J_1(Rs)$

$\rightarrow -c^2 A(s)(-s) = k\frac{R}{s} J_1(Rs)$

$\rightarrow A(s) = k\frac{R}{c^2 s^2} J_1(Rs)$

$U(s,z) = k\frac{R}{c^2 s^2} J_1(Rs) e^{-sz}$

$u(r,z) = \frac{kR}{c^2}\int_0^\infty \frac{e^{-sz}}{s^2} J_1(Rs) J_0(rs)\, s\,ds$

* تمامی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای که تاکنون بررسی شد ← خطی بودند.

روش‌های تحلیلی حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای :

روش جداسازی متغیرها (seperation of variables)

روش بسط توابع ویژه (Eigenfunction expansion method)

روش تبدیل فوریه (Fourier transform method)

روش تبدیل لاپلاس (Laplas transform method)

روش تبدیل هانکل (Hankel transform method)

PAPCO

Subject
Date

روش های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل پاره ای

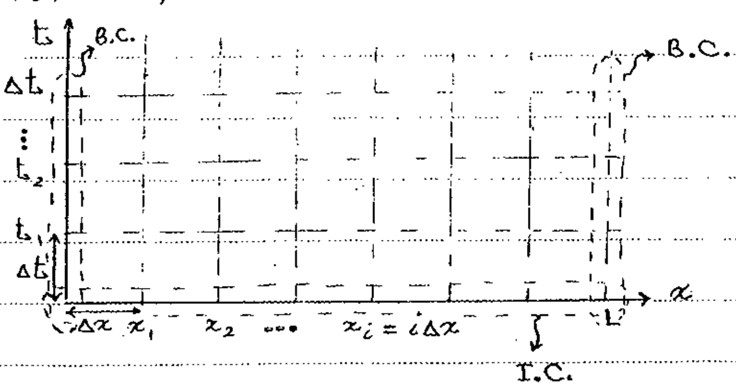
روش تفاضل محدود (Finite difference method)

مثال:

$$u_t = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L \ , \quad t > 0$$

B.C. : $u(0, t) = 0 \ , \quad u(L, t) = 0$

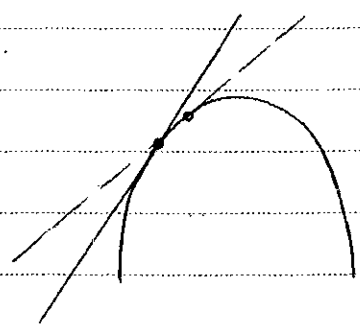
I.C. : $u(x, 0) = f(x)$



$$\Delta x = \frac{L}{n}$$

u ← در فواصل مکان مشخص ، در فواصل زمان مشخص

$$u_{ij} = u(i\Delta x, j\Delta t)$$



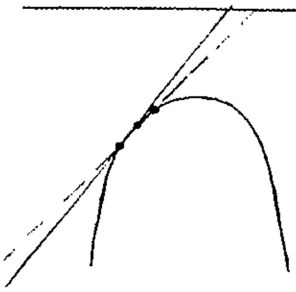
$$u'(x) \cong \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$ forward differenc

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(x, t+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$$

$$u_t(x, t) \cong \frac{u(x, t+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$$

$$u_t(i\Delta x, j\Delta t) \cong \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta t}$$ تفاضل پیشرو مشتق اول

PapCO



$$u'(x) \cong \frac{u(x+\frac{\Delta x}{2}) - u(x-\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$ Centeral difference

$$u''(x) \cong \frac{u'(x+\frac{\Delta x}{2}) - u'(x-\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

$$u''(x) \cong \frac{\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - \frac{u(x)-u(x-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$u''(x) \cong \frac{u(x+\Delta x) - 2u(x) + u(x-\Delta x)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - 2u(x) + u(x-\Delta x)}{\Delta x^2}$$

$$u_{xx}(i\Delta x, j\Delta t) \cong \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$ تقریب میانی مشتق دوم

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta t} = \frac{c^2}{\Delta x^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j})$$

$$u_{i,j+1} - u_{ij} = \underbrace{\frac{c^2 \Delta t}{\Delta x^2}}_{S}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j})$$

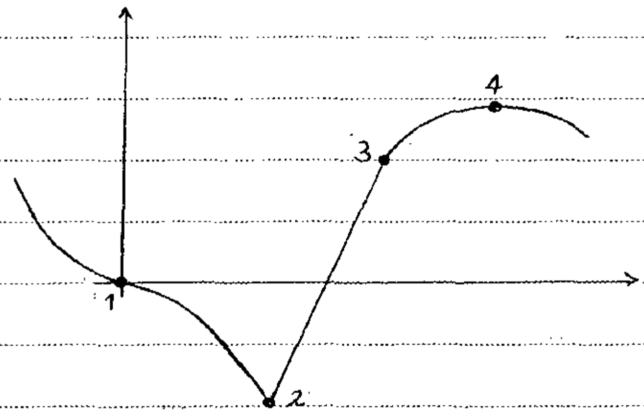
$$u_{i,j+1} = (1-2S)u_{ij} + S(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$$

Subject
Date

حساب تغییرات (Calculus of variations)

Newton : 1671
Laibnitz : 1684
Bernoulli
Euler

توابع با یک یا چند متغیر:
تابع $f(x)$ در بازه I یک ماکزیمم مطلق دارد، اگر $f(x) \geqslant f(x_0)$
تابع $f(x)$ در یک بازه محلی یک ماکزیمم نسبی دارد، اگر $f(x) \geqslant f(x_0)$
مینیمم و مینیمم نسبی: $f(x) \geqslant f(x_0)$
منظور ما از ماکسیمم و مینیمم، ماکزیمم و مینیمم نسبی است.
قضیه: برای اینکه نقطه x_0 یک min یا max برای تابع $f(x)$ در بازه I باشد، لازم است که $f'(x_0)$ صفر شود یا وجود نداشته باشد.



به عنوان شرط کلی، اگر داشته باشیم:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$
$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

که $f^{(n)}(x_0)$ در بازه مورد نظر پیوسته است:

PAPCO

اگر n زوج باشد و $f^{(n)}(x_0) > 0$ آنگاه x_0 ، min است.
اگر n زوج باشد و $f^{(n)}(x_0) < 0$ آنگاه x_0 ، max است.
اگر n فرد باشد، آنگاه x_0 نه max است، نه min.

اگر f تابعی از n متغیر مستقل باشد، $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

قضیه (شرط لازم): برای اینکه تابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(p)$ در نقطه p داخل بازه I یک min یا max داشته باشد، لازم است مشتقات جزئی $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ همگی صفر باشند و یا برخی وجود نداشته باشند.

(شرط کافی): اگر یک تابع دو متغیری $f(x,y)$ را در نظر بگیریم:

قضیه: فرض کنید $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ و $f_{xy}^2(a,b) - f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) = D$ که $f(x,y)$ مشتقات دوم پاره‌ای پیوسته در بازه I داشته و (a,b) نقطه‌ای در نقاط I باشد:

هشین تابع f : $\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = D$

اگر $D<0$ و $f_{xx}(a,b)<0$ ، آنگاه تابع f در نقطه (a,b) ، max است.
اگر $D<0$ و $f_{xx}(a,b)>0$ ، آنگاه تابع f در نقطه (a,b) ، min است.
اگر $D>0$ ، آنگاه f در نقطه (a,b) ، max و min نمی‌باشد.
اگر $D=0$ ، آنگاه هیچ نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

Subject
Date

مثال: $f(x,y)=x^2-y^2$ ، نقطه $(0,0)$:

$f_x = 2x = 0 \longrightarrow x=0$

$f_y = -2y = 0 \longrightarrow y=0$

$D = f_{xy}^2(0,0) - f_{xx}(0,0)\,f_{yy}(0,0) = 4 > 0$

← نقطه $(0,0)$ نه max است، نه min ← نقطه زین اسبی

یافتن max , min مقید:

مثال: نقطه‌ای را بر روی بیضی $5x^2-6xy+5y^2=8$ بیابید که کمترین فاصله تا مبدأ را داشته باشد.

$L = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$

$\text{Min}: \; f(x,y) = x^2+y^2$

$\text{subject to}: \; g(x,y) = 5x^2-6xy+5y^2 = 8$

$$df = \underset{\downarrow\atop 2x}{f_x}\,dx + \underset{\downarrow\atop 2y}{f_y}\,dy = 0$$

$$df = 2x\,dx + 2y\,dy = 0 \quad (\mathrm{I})$$

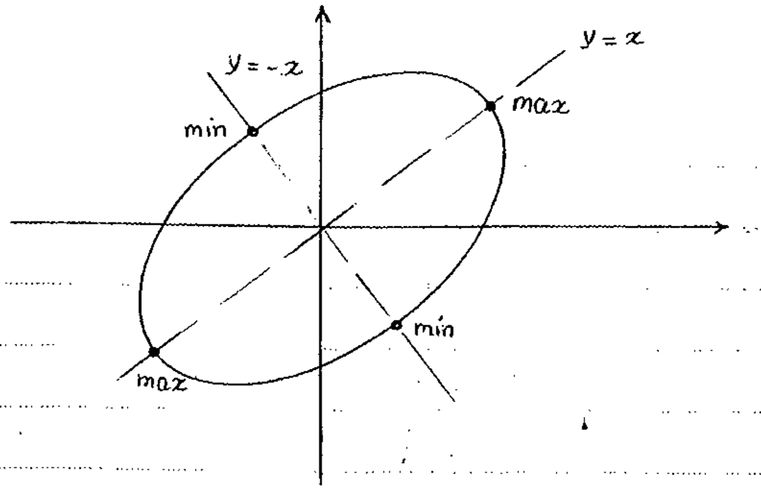
$$dg = (10x-6y)\,dx + (10y-6x)\,dy = 0$$

$$dy = \frac{10x-6y}{6x-10y}\,dx \quad (\mathrm{II})$$

$$\mathrm{II} \to \mathrm{I}: \quad df = \underbrace{\left[2x + 2y\left(\frac{10x-6y}{6x-10y}\right)\right]}_{=0} dx = 0$$

Subject
Date

$$2x + 2y\left(\frac{10x - 6y}{6x - 10y}\right) = 0 \qquad y = \pm x$$



روش ضرایب لاگرانژ:

فرض: Max (یا Min) : $F(r, w, x, y)$

$$\begin{cases} \text{Max (یا Min)} : F(r, w, x, y) \\ \text{s.t.} : \quad g(r, w, x, y) = a \\ \qquad\quad h(r, w, x, y) = b \end{cases}$$

$$F^* = F - \lambda_1 g - \lambda_2 h$$

$$dF^* = 0 \longrightarrow dF - \lambda_1 dg - \lambda_2 dh = 0$$

dF: $r + F_w dw + F_x dx + F_y dy$

dg: $g_r dr + g_w dw + g_x dx + g_y dy$

dh: $h_r dr + h_w dw + h_x dx + h_y dy$

$$\begin{aligned} dF^* = &(F_r - \lambda_1 g_r - \lambda_2 h_r)\,dr + \\ &(F_w - \lambda_1 g_w - \lambda_2 h_w)\,dw + \\ &(F_x - \lambda_1 g_x - \lambda_2 h_x)\,dx + \\ &(F_y - \lambda_1 g_y - \lambda_2 h_y)\,dy = 0 \end{aligned}$$

Subject
Date

$$
\begin{cases}
F_r - \lambda_1 g_r - \lambda_2 h_r = 0 \\
F_w - \lambda_1 g_w - \lambda_2 h_w = 0 \\
F_x - \lambda_1 g_x - \lambda_2 h_x = 0 \\
F_y - \lambda_1 F_y - \lambda_2 h_y = 0 \\
g(r, w, x, y) = \alpha \\
h(r, w, x, y) = b
\end{cases}
$$

مجهولات $\lambda_1, \lambda_2, r, w, x, y$

← شش معادله ، شش مجهول .

مثال:

$$\text{Min}: F(x,y) = x^2 + y^2$$

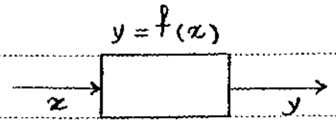
$$\text{s.t.}: g(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$$

$$F^* = F - \lambda g = x^2 + y^2 - \lambda(5x^2 - 6xy + 5y^2)$$

$$F^*_x = 0 \longrightarrow 2x - \lambda(10x - 6y) = 0$$

$$F^*_y = 0 \longrightarrow 2y - \lambda(10y - 6x) = 0 \quad \rightarrow y = \pm x$$

$$g(x,y) = 8 \longrightarrow 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$$



تابعک (Functional) : تبدیلی که توابع را به اعداد حقیقی تبدیل می‌کند .

برای مثال : نقاط P , Q :

$$P = (a, y(a)) \quad , \quad Q = (b, y(b))$$

معادله طول منحنی بین P, Q : $L = \int_a^b \sqrt{(1 + [y'(x)]^2)}\,dx$

حساب تغییرات: شاخه‌ای از ریاضیات است که به یافتن اکسترمم‌های فانکشنال‌ها می‌پردازد.

$$I(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))\,dx \qquad (\alpha)$$

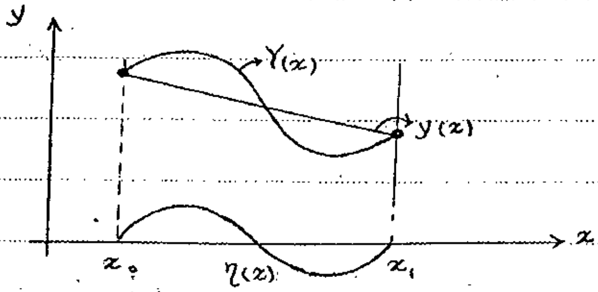
B.C. $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$

داریم $C_{[x_0,x_1]} = \{ y(x) \mid y:[x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ ، دوبار مشتق‌پذیر است و y در بازه $[x_0, x_1]\}$

فرض کنیم فانکشنال به صورت کلی (α) در دامنه $C_{[x_0,x_1]}$ تعریف می‌شود، و $y(x)$ ای وجود دارد که شرایط مرزی $y(x_0)=y_0$ و $y(x_1)=y_1$ را ارضا می‌کند و منجر به اکسترمم فانکشنال می‌شود. یک تابع به صورت زیر تعریف می‌کنیم که $\eta(x)$ یک تابع دلخواه از x است که دوبار مشتق‌پذیر است و شرایط مرزی همگن را ارضا می‌کند: $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$$

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0 \longrightarrow Y(x_0) = y(x_0) = y_0 \qquad Y(x_1) = y(x_1) = y_1$$



فانکشنال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, Y, Y')\,dx$$

"variational problem"

و : $Y'(x) = y'(x) + \varepsilon\eta'(x)$

PAPCO

2

Subject
Date

فانکشنال جدید برحسب ε است و برای حالتی که $\varepsilon = 0$ باشد، برابر با فانکشنال اصلی است.
فانکشنال زمانی اکسترمم خواهد داشت که:

$$\frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \Big(\frac{\partial f}{\partial Y} \underbrace{\frac{dY}{d\varepsilon}}_{\eta(x)} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \underbrace{\frac{dY'}{d\varepsilon}}_{\eta'(x)} \Big) dx$$

$$\frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \Big(\frac{\partial f}{\partial Y} \eta(x) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial Y'} \eta'(x) \Big) dx}_{\beta} \quad (I)$$

$$\beta = \int_{x_0}^{x_1} \Big(\frac{\partial f}{\partial Y'} \eta'(x) \Big) dx = \overbrace{\cancel{\frac{\partial f}{\partial Y'} \eta(x)\bigg|_{x_0}^{x_1}}}^{\text{صفر}} - \int_{x_0}^{x_1} \Big(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial Y'} \Big) \eta(x)\, dx \quad (II$$

$$II \rightarrow I \qquad \frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \Big(\frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial Y'} \Big) \eta(x)\, dx$$

فانکشنال اصلی وقتی بدست می‌آید که $\varepsilon = 0$ ، پس داریم:

$$\frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \Big(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \Big) \eta(x)\, dx = 0$$

قضیه: اگر انتگرال $\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) F(x)\, dx$ را در نظر بگیریم که تابع $F(x)$ در بازه $[x_0, x_1]$ پیوسته و تابع $\eta(x)$ در این بازه بطور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، داشته باشیم $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$ و اگر برای تمام $\eta(x)$ ها داشته باشیم $\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) F(x)\, dx = 0$ آنگاه در بازه $[x_0, x_1]$: $F(x)=0$

اثبات: برهان خلف: $F(\xi) \neq 0$, $[x_0, x_1]$ در بازه $x = \xi$
مثلاً $F(\xi) > 0$

در نتیجه یک بازه در مجاورت (ξ): $\xi - h < \xi < \xi + h$: $F(x) > 0$

$$\longrightarrow \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) F(x)\, dx > 0$$

Subject
Date

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0$$ معادلهٔ اویلر ـ لاگرانژ

قضیه: اگر $y(x)$ تابعی در مجموعه توابع $C_{[x_0, x_1]}$ باشد که انتگرال $I=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))\,dx$ را اکستریمم کند، آنگاه لازم است معادله دیفرانسیل اویلر ـ لاگرانژ برقرار باشد. (شرط لازم)

آزمون لژاندر (Legendre test):

$$I(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_1} f(x, Y, Y')\,dx$$

$$I(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y+\varepsilon\eta(x), y'+\varepsilon\eta'(x))\,dx$$

قضیه تیلور: اگر تابع f، n بار مشتق پذیر باشد، داریم:

$$f(x_0+\delta x)=f(x_0)+f'(x_0)(\delta x)+\frac{f''(x_0)}{2!}\delta x^2+\dots$$

اگر تابع $f(x, y)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد، داریم:

$$f(x_0+\delta x, y_0+\delta y)=f(x_0, y_0)+\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\delta x+\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\delta y$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}\delta x^2+2\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\delta x\,\delta y+\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}\delta y^2\right]+\dots$$

$$\longrightarrow f(x, y(x)+\varepsilon\eta(x), y'(x)+\varepsilon\eta'(x))=$$

ترم خطا

$$f(x, y, y')+\varepsilon\left(\eta(x)\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y}+\eta'(x)\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'}\right)+O(\varepsilon^2)$$

$$\delta I_1=\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\left(\eta(x)\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y}+\eta'(x)\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'}\right)dx$$

$$I(\varepsilon)=I(0)+\underbrace{\delta I_1}_{\text{first variation}}+O(\varepsilon^2)$$

تغییر اول

PAPCO

Subject

Date

$$I(\varepsilon) = I(0) + \delta I_1 + \underbrace{\delta I_2}_{\text{second variation}} + O(\varepsilon^3)$$ در بسط تیلور تا یک ترم جلو میرویم :

تغییر دوم second variation

$$\delta I_2 = \frac{\varepsilon^2}{2!} \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta^2(x) \frac{\partial^2 f(x,y,y')}{\partial y^2} + 2\eta(x)\eta'(x) \frac{\partial^2 f(x,y,y')}{\partial y \partial y'} + \eta'^2(x) \frac{\partial^2 f(x,y,y')}{\partial y'^2} \right) dx$$

آزمون لژاندر : با انتخاب آزاد تابع کلی $\eta(x)$ اگر :

- معادلهٔ اویلر - لاگرانژ برقرار باشد.
- $\delta I_1 = 0$
- $\delta I_2 \neq 0$

آنگاه در بازهٔ $[x_0, x_1]$ تابعک $I(y)$ دارای یک اکستریم است.

- اگر $\delta I_2 < 0$ ، اکستریم max است.
- اگر $\delta I_2 > 0$ ، اکستریم min است.

معادلهٔ دیفرانسیل اویلر - لاگرانژ :

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad (*)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y''$$

معادله اویلر - لاگرانژ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0$$ فرم بسط یافته معادله اویلر - لاگرانژ

Subject
Date

چند حالت خاص معادله اویلر لاگرانژ :

ـ ضریب مشتق دوم y (y'') صفر باشد : $f(x,y,y')=p(x,y)+q(x,y)y' \longleftarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}y'-\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}}^{\text{صفر}}y''=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial y}y' \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y'}=\frac{\partial q}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y'}=q \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}=\frac{\partial q}{\partial y}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$$

تابع $u(x,y)$:

$$du=p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy=f(x,y,y')\,dx$$

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1}f(x,y,y')\,dx=\int_{x_0}^{x_1}du=u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0)$$

ـ حالتی که تابع f صریحاً شامل x نباشد : معادله بلترامی (Beltrami eq).

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f=C_1$$

ـ حالتی که تابع f صریحاً شامل y نباشد : از (*) :

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial y}}^{\text{صفر}}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y'}=C_2$$

PAPCO

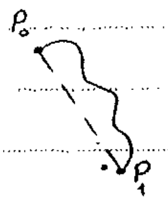
Subject
Date

چند مثال از کاربرد بحث حساب تغییرات :

مثال 1) کوتاهترین منحنی واصل دو نقطه :

$P_0 = (x_0 , y_0)$

$P_1 = (x_1 , y_1)$



طول منحنی واصل دو نقطه : $\displaystyle\int_{P_0}^{P_1} ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx$

$$B.C. : \quad y(x_0) = y_0 \quad , \quad y(x_1) = y_1$$

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx = \text{extremum}$$

$$B.C. : \quad y(x_0) = y_0 \quad , \quad y(x_1) = y_1$$

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial f}{\partial y}}}_{\text{صفر}} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'}}}_{\text{صفر}} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}}}_{\text{صفر}} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = 0 \longrightarrow y'' = 0 \longrightarrow y = C_1 x + C_2$$

$$B.C. : \quad y(x_0) = y_0 \quad , \quad y(x_1) = y_1$$

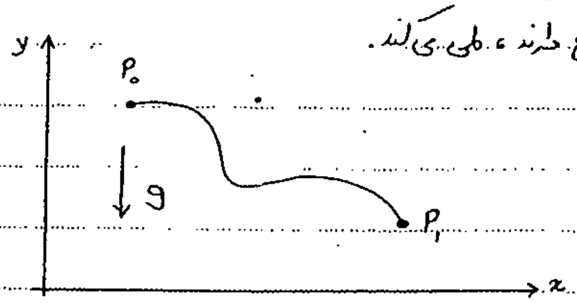
$$C_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad , \quad C_2 = y_0 - C_1 x_0$$

⋮

Subject
Date

مثال 2) مسئله براچیستوکرون (Brachistochrone)
↓
کوتاهترین زمان

هدف: یافتن کوتاهترین مسیر به لحاظ زمانی که یک ذره متحرک در یک صفحه عمودی تنها در اثر ثقل از نقطه‌ای به نقطه دیگر که با هم اختلاف ارتفاع دارند، طی می‌کند.



زمان طی شده توسط مهره برای رسیدن از نقطه P_0 به نقطه P_1 $= \int_{P_0}^{P_1} \frac{ds}{V}$ ← طول المان مسیر ، ← سرعت لحظه‌ای

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$E_p = mgy$: انرژی پتانسیل مهره در هر نقطه (x, y)

$E_k = \frac{1}{2}mv^2$: انرژی جنبشی مهره در هر نقطه (x, y)

$$E_p + E_k = \text{ثابت} = mgy_0 \longrightarrow V = \sqrt{2g(y_0 - y)}$$

$$\text{زمان} : \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2(y_0-y)g}}\,dx$$ فانکشنال

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}}\,dx = extremum$$

B.C. : $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$

PAPCO

Subject
Date

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C_0$$

$$y'\left(\frac{y'}{\sqrt{2g(y_0-y)(1+y'^2)}}\right) - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}} = C_0$$

$$\frac{y'^2\sqrt{y_0-y} - \sqrt{1+y'^2}\sqrt{(y_0-y)(1+y'^2)}}{\sqrt{(y_0-y)(1+y'^2)}\ \sqrt{y_0-y}} = C_1$$

$$\frac{-\sqrt{y_0-y}}{\sqrt{(y_0-y)(1+y'^2)}\ \sqrt{y_0-y}} = C_1$$

$$\left.\begin{array}{l} y'^2 = \dfrac{1-C_1^2(y_0-y)}{C_1^2(y_0-y)} \\ y' = \dfrac{dy}{dx} \end{array}\right] \quad dx = \frac{\sqrt{y_0-y}}{\sqrt{2C_2-(y_0-y)}}\,dy \qquad C_2 = \frac{1}{2C_1^2}$$

$$x = \int \frac{\sqrt{y_0-y}}{\sqrt{2C_2-(y_0-y)}}\,dy$$

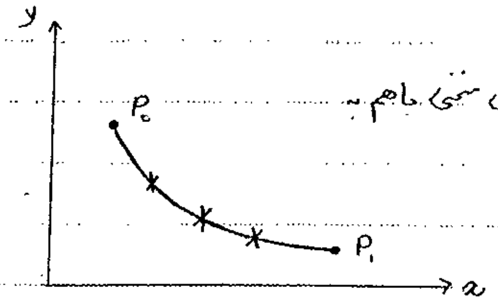
$$y_0 - y = 2C_2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \qquad \cos t = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2}$$

$$x = 2C_2\int \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = C_2(t - \sin t) + C_3$$

$$\left[\begin{array}{l} x = C_2(t-\sin t) + C_3 \\ y = y_0 - C_2(1-\cos t) \end{array}\right. \qquad \text{cycloid} \quad \text{منحنی}$$

PAPCO

Subject
Date



ویژگی منحنی: هر دو نقطه دلخواه روی منحنی با هم به نقطه P_1 می‌رسند.

مثال 3) مسیر حرکت پرتابه در هوا در اثر جاذبه.

با استفاده از اصل Maupentuis:

اصل Maupentuis: اگر یک ذره تحت تاثیر میدان جاذبه قرار داشته باشد در مسیری حرکت می‌کند که انرژی جنبشی حداقل باشد.

$$I = 2\int E_k\,dt = \text{extremum}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v\,dt = ds$$

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$I = m\int v\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad \underset{\text{سرعت لحظه‌ای}}{v^2} = \underset{\text{سرعت اولیه}}{u^2} - 2gy$$

$$I = m\int \sqrt{u^2-2gy}\,\sqrt{1+y'^2}\,dx = \text{extremum}$$

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = C_0$$

Subject
Date .

$$\frac{2y'^2\sqrt{u^2-2gy}}{2\sqrt{1+y'^2}}-\sqrt{u^2-2gy}\sqrt{1+y'^2}=C_0$$

$$\frac{y'^2\sqrt{u^2-2gy}-\sqrt{u^2-2gy}\,(1+y'^2)}{\sqrt{1+y'^2}}=C_0$$

$$\frac{\sqrt{u^2-2gy}}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$$ [illegible]

[illegible]:

$$y=\frac{u^2-C_1^2}{2g}-\frac{g}{2C_1}(x-C_2)^2$$ سهمی

(C_1, C_2) ✓

مسائل حساب تغییرات با شرط باز:

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')\,dx$$

B.C. $y(x_0)=y_0$

$\eta(x_0)=0$

$$\left.\frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$$

$$\left.\frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x)+\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\right)dx=0$$

$$\left.\frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\left.\frac{\partial f}{\partial y'}\right|_{x=x_1}\eta(x_1)+\int_{x_0}^{x_1}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\right)dx=0$$

Subject
Date

از آنجا که $\eta(x)$ در شرط مرزی x_1 لزوماً صفر نیست، پس باید:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0 \\ \left[\dfrac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} = 0 \right] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

مسائل حساب تغییرات مقید:
روش ضرایب لاگرانژ:

$$\begin{cases} I(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx = \text{extremum} \\ y(x_0) = y_0 \quad , \quad y(x_1) = y_1 \\ J(y) = \int_{x_0}^{x_1} g(x, y, y')\,dx = \text{ثابت} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ این قید نیز به مسأله اضافه شد.

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon_1 \eta_1(x) + \varepsilon_2 \eta_2(x)$$

$$\eta_1(x_0) = \eta_1(x_1) = \eta_2(x_0) = \eta_2(x_1) = 0$$

$$I(Y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, Y, Y')\,dx$$

$$J(Y) = \int_{x_0}^{x_1} g(x, Y, Y')\,dx$$

Subject
Date

$$M(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = I(Y) + \lambda J(Y) = \int_{x_0}^{x_1} h(x, Y, Y')\, dx$$

$$h(x, y, y') = f(x, y, y') + \lambda g(x, y, y')$$

$$\left.\frac{\partial M}{\partial \varepsilon_i}\right|_{\varepsilon_i = 0,\ i=1,2} = 0$$

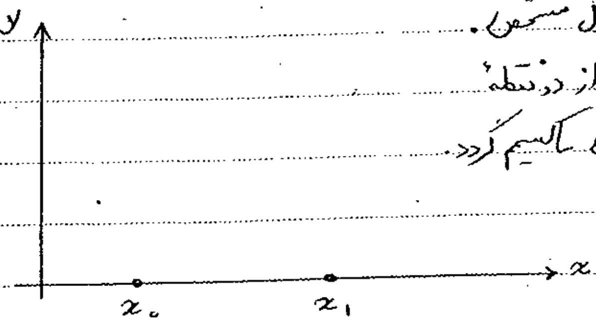
$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon_i} = \int_{x_0}^{x_1} \Big(\frac{\partial h}{\partial Y} \underbrace{\eta_i}_{\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_i}} + \frac{\partial h}{\partial Y'} \underbrace{\eta_i'}_{\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_i}} \Big)\, dx$$

$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon_i} = \int_{x_0}^{x_1} \Big(\frac{\partial h}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial h}{\partial Y'} \Big) \eta_i\, dx$$

در نتیجه :

معادله اویلر-لاگرانژ برای مسئله حساب تغییرات : $\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial h}{\partial y'} = 0$

مثال : حداکثر مساحت زیر منحنی با طول مشخص .
یافتن منحنی با طول ثابت L و گذرنده از دو نقطه
P_0 و P_1 بطوری که مساحت زیر منحنی ماکسیمم گردد.



$$\begin{cases} I(y) = \int_{x_0}^{x_1} y\, dx = \text{extremum} \\ y(x_0) = y(x_1) = 0 \\ J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = L \end{cases}$$

PAPCO

Subject
Date

$$h(x, y, y') = y(x) + \lambda\sqrt{1+y'^2}$$

$$M(y) = \int_{x_0}^{x_1} h(x, y, y')\, dx$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial h}{\partial y'} = 0$$

$$\rightarrow 1 - \lambda \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \longrightarrow \int \lambda\, d\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \int dx$$

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x - c_1$$

$$\rightarrow dy = \pm \frac{x - c_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x-c_1)^2}}\, dx$$

$$y = \pm\sqrt{\lambda^2 - (x-c_1)^2} + c_2$$

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2$$

← معادلهٔ دایره به مختصات مرکز $\begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}$ ، شعاع λ .

c_1 , c_2 , λ مجهول ← دو شرط مرزی و یک معادله قید (روش عددی).

$$c_1 = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad c_2 = 0, \quad \lambda = \frac{L}{\pi}$$

Subject
Date

روش های تقریبی حل مسائل حساب تغییرات:

روش اویلر:

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_n} f(x, y, y')\, dx = \text{extremum}$$

B.C. : $y(x_0) = y_0$, $y(x_n) = y_n$

بازهٔ تغییرات x ، $[x_0 , x_n]$ را به n قسمت تقسیم می کنیم:

$x_i = x_0 + hi$, $i = 1, 2, \dots, n$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

$$I(y_i) = \int_{x_0}^{x_n} f(x_i, y_i, y_i')\, dx$$

$$h \sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_0 + ih, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right) = \text{extremum}$$

مجهولات y_i

$$\frac{\delta I}{\delta y_i} = 0$$

مثال:

$$I(y) = \int_0^1 (2xy + y^2 + y'^2)\, dx = \text{extremum}$$

B.C. : $y(0) = y(1) = 0$

$$h = \frac{1-0}{5} = 0.2 \quad , \quad x_i = 0 + 0.2i$$

$$I(y_i) = 0.2 \sum_{i=1}^{4} \left[0.4 i y_i + y_i^2 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{0.2}\right)^2\right]$$

Subject
Date

$$\frac{\partial I}{\partial y_i} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial I}{\partial y_1} &= 0 \\ \frac{\partial I}{\partial y_2} &= 0 \\ \frac{\partial I}{\partial y_3} &= 0 \\ \frac{\partial I}{\partial y_4} &= 0 \end{aligned}\right] \text{4 معادله , 4 مجهول}$$

$\leftarrow$ y_1 , y_2 , y_3 , y_4 بدست می‌آیند.

y_0 , y_5 نیز از شرایط مرزی بدست می‌آیند.

فانکشنال با چنین تابع :

$$I(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\,dx$$

$$= \text{extremum}$$

$$B.C.: \; y_i(x_0) = y_{i,0} \quad , \quad y_i(x_1) = y_{i,1}$$

$$Y_i(x) = y_i(x) + \varepsilon_i \eta_i(x) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\eta_i(x_0) = \eta_i(x_1) = 0$$

$$I(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, \dots, y_i + \varepsilon_i \eta_i + \dots, y_i' + \varepsilon \eta_i' + \dots)\,dx$$

Subject
Date

$$\frac{\partial I(\varepsilon_i)}{\partial \varepsilon_i} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} dx = 0$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial Y_i} \underbrace{\frac{\partial Y_i}{\partial \varepsilon_i}}_{\eta_i} + \frac{\partial f}{\partial Y_i'} \underbrace{\frac{\partial Y_i'}{\partial \varepsilon_i}}_{\eta_i'} \right) dx = 0$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) dx = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, \underset{\text{تعداد توابع}}{n}$$

مسائل حساب تغییرات بصورت پارامتریک:

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx = \text{extremum}$$

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t)$$

$$I(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} f\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \dot{x}\, dt$$

$$I(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt$$

دو تابع ← در نتیجه دو معادله

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$

معادلات اویلر - لاگرانژ

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0$$

PAPCO

Subject

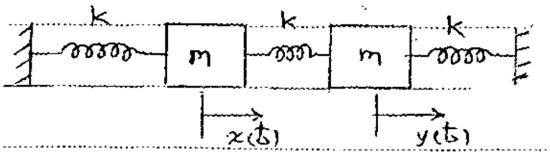
Date

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

$$I(x, y, z) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\, dt$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial f}{\partial \dot{z}} = 0 \end{cases}$$

مثال: با استفاده از مبحث حساب تغییرات، معادلهٔ حرکت مجموعه جرم و فنر زیر را بدست آورید.



راهنمایی: باید فانکشنال زیر مینیمم شود: (براساس اصل همیلتون)

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (\underbrace{T}_{\text{انرژی جنبشی کل}} - \underbrace{V}_{\text{انرژی پتانسیل کل}})\, dt$$

انرژی جنبشی: $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2$

انرژی پتانسیل: $V = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} k(y - x)^2 + \frac{1}{2} ky^2$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - k(x^2 - xy + y^2)\right] dt = \min$$

Subject
Date

$$\overbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}^{-2kx+ky} - \frac{d}{dt}\overbrace{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}}^{m\dot{x}} = 0$$

$$\overbrace{\frac{\partial F}{\partial y}}^{-2ky+kx} - \frac{d}{dt}\overbrace{\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}}^{m\dot{y}} = 0 \longrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + 2kx - ky = 0 \\ m\ddot{y} + 2ky - kx = 0 \end{cases}$$

فانکشنال با دو متغیر مستقل:

$$I(Z) = \int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, z_x, z_y)\,dx\,dy = \text{extremum}$$

$$Z(x, y) = z(x, y) + \varepsilon\eta(x, y)$$

$$I(\varepsilon) = \int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, Z, Z_x, Z_y)\,dx\,dy$$

$$\left.\frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\,dx\,dy\right|_{\varepsilon=0} = \int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\eta + \frac{\partial f}{\partial z_x}\eta_x + \frac{\partial f}{\partial z_y}\eta_y\right.$$

$$= 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z_y} = 0$$ معادله دیفرانسیل اویلر لاگرانژ

فانکشنال با سه متغیر مستقل:

$$\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u_z} = 0$$

تابع مورد نظر: $u(x, y, z)$

Subject
Date

مشتقات مرتبه بالاتر :

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y', \dots, y^{(m)})\, dx = 0$$

$$B.C.: \quad y(x_0) = y_0 \quad , \quad y(x_1) = y_1$$

$$\vdots$$

$$y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)} \quad , \quad y^{(m-1)}(x_1) = y_1^{(m-1)}$$

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x) \qquad \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$$

$$I(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, Y, Y', \dots, Y^{(m)})\, dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\, dx \bigg|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' + \frac{\partial f}{\partial y''} \eta'' + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} \eta^{(m)} \right) dx = 0$$

$$\longrightarrow \int_{x_0}^{x_1} \eta \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y^2} - \dots + (-1)^m \frac{d^{(m)}}{dx^{(m)}}\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} \right) dx = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} = 0$$

← معادله اویلر - پواسون

← از مرتبه $2m$ ← $2m$ شرایط مرزی

Subject
Date

مثال :

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 - y''^2)\, dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{d^4}{dx^4} y - y = 0$$

مشتقات مرتبه بالا، چنین تابع :

$$I(y_1, \dots, y_p) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, \dots, y_p, y_p', \dots, y_p^{(m_p)})\, dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_1'} + \dots + (-1)^{m_1}\frac{d^{(m_1)}}{dx^{(m_1)}}\frac{\partial f}{\partial y_1^{(m_1)}} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_p} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_p'} + \dots + (-1)^{m_p}\frac{d^{(m_p)}}{dx^{(m_p)}}\frac{\partial f}{\partial y_p^{(m_p)}} = 0$$

با حل این دستگاه معادلات $y_1, \dots, y_p$ محاسبه می‌شوند، فانکشنال مینیمم می‌شود.

مسائل معکوس (Inverse problems)

PAPCO

Subject
Date

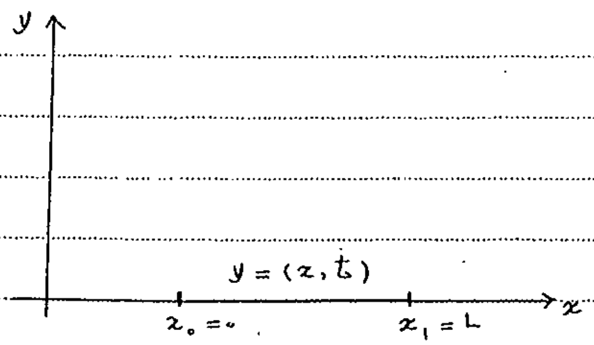
اصل هملتون برای سیستم های مکانیکی :

برای یک سیستم Conservative (پایستار) حرکت بین دو نقطه بر اساس مسئله حساب تغییرات زیر بیان می گردد :

$$\int_{t_0}^{t_1} (\underbrace{E_k}_{\text{انرژی جنبشی}} - \underbrace{E_p}_{\text{انرژی پتانسیل}})\, dt = \text{extremum}$$

$L = E_k - E_p$ تابع لاگرانژ

مثال : ارتعاشات یک سیم الاستیک :



B.C. : $y(x_0, t) = 0$

$y(x_1, t) = 0$

انرژی جنبشی : $E_k = \frac{1}{2}\int_0^{l} \underbrace{\rho}_{\text{جرم واحد طول سیم}} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx$

انرژی پتانسیل : $E_p = \frac{1}{2}\, F\, \underbrace{\Delta l}_{\text{ازدیاد طول سیم}}$

$$\Delta L = \int_0^{L} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx - L$$

Subject

Date

با فرض ارتعاشات کوچک : $\sqrt{1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2} \cong 1+\frac{1}{2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2$

$$E_p = \frac{F}{2}\int_0^L (\frac{\partial y}{\partial x})^2 dx$$

بر اساس اصل همیلتون : $I(y) = \int_{t_0}^{t_1} (E_k - E_p)\, dt$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^L [\rho(\frac{\partial y}{\partial t})^2 - F(\frac{\partial y}{\partial x})^2]\, dx\, dt$$

$$\doteq extremum$$

← معادله دیفرانسیل اویلر - پوآسون :

$$\frac{1}{2}(-2Fy_x) = -Fy_{xx}$$

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial y}} - \frac{\partial}{\partial x}\cancel{\frac{\partial f}{\partial y_x}} - \frac{\partial}{\partial t}\cancel{\frac{\partial f}{\partial y_t}} = 0$$

$$\frac{1}{2}(2\rho y_t) = \rho y_{tt}$$

$$F y_{xx} = \rho y_{tt}$$

مثال : منحنی $y = y(x)$ را بین دو نقطه ثابت (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) را به نحوی بیابید که در صورت دوران بدور محور x ها ، کوچکترین مساحت را ایجاد کند . فرض کنید برای $x_1 \leq x \leq x_2$ ، $y(x) \geq 0$ است .

$dA = 2\pi y ds$

$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\, dx$

$I = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\, dx = extremum$

B.C. : $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$

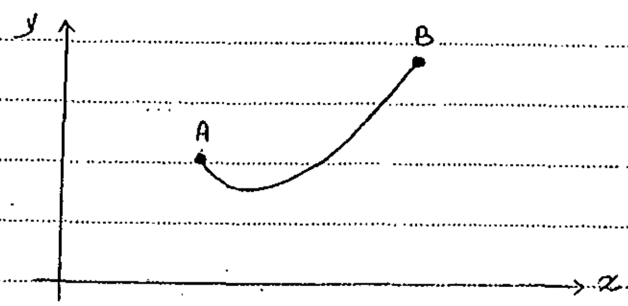
$$y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = c$$

$$\underbrace{\qquad}_{\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}}$$

$$y\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - y\sqrt{1+y'^2} = c$$

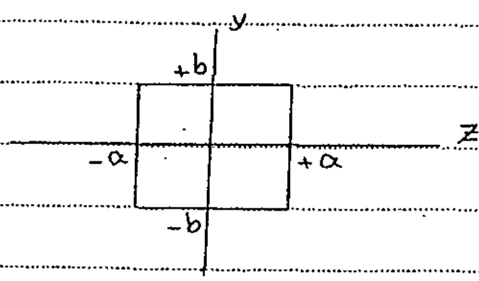
$$\longrightarrow dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{y^2-c^2}} \longrightarrow x = c\cosh^{-1}\left(\frac{y}{c}\right) + c_1$$

$$y(x) = c\cosh\left(\frac{x-c_1}{c}\right)$$



مثال : خمش یک تیر بر اثر وزن خودش .

یک تیر الاستیک با طول l و سطح مقطع A را در نظر بگیرید. تیر در یک انتها کاملاً بسته شده و انتهای دیگر آن آزاد است.



سطح مقطع تیر : $2a \times 2b$

Subject

Date

_ انرژی کرنش

_ کار انجام شده بر اثر نیروی خارجی

$$E_s = \frac{1}{2}\int_V \sigma \varepsilon \, dV \quad , \quad \sigma = E\varepsilon \longrightarrow E_s = \frac{1}{2} E \int_V \varepsilon^2 \, dA \, dx$$

$$E_s = \frac{E}{2}\int_0^l \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} \varepsilon^2 \, dz\, dy\, dx \qquad \varepsilon = \frac{y}{r}$$

$y \rightarrow$ فاصله از سطح خنثی

$r \rightarrow$ شعاع انحنا

$$E_s = \frac{E}{2}\iiint \frac{y^2}{r^2} \, dz\, dy\, dx$$

$$E_s = \frac{E}{2}\int_0^l \frac{4ab^3}{3}\frac{1}{r^2}\, dx$$

$$I = \frac{4ab^3}{3}$$

$$\Rightarrow E_s = \frac{EI}{2}\int_0^l \frac{1}{r^2}\, dx$$

کل کار انجام شده توسط نیروی خارجی : $W = \int_0^l y \cdot w \cdot dx$

$y \rightarrow$ خیز تیر ، $w \rightarrow$ وزن واحد طول

$$I(y) = \int_V E_p \, dV = \text{extremum}$$

$$I(y) = \int_0^l \left(\frac{EI}{2}\frac{1}{r^2} - yw\right) dx = \text{extremum} \qquad r^2 = \frac{1}{y''^2}$$

$$I(y) = \int_0^l \left(\frac{EI}{2} y''^2 - yw\right) dx = \text{extremum}$$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{-w} - \frac{d}{dx}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}}_{\text{صفر}} + \frac{d^2}{dx^2}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y''}}_{EIy''} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{w}{EI}$$

PAPCO

Subject
Date

$$\longrightarrow \quad y(x) = \frac{W}{24EI}\left(x^4 + 4C_1x^3 + 12C_2x^2 + 24C_3x + C_4\right)$$

$y(0) = 0 \longrightarrow C_4 = 0$

$y'(0) = 0 \longrightarrow C_3 = 0$

$y''(l) = 0 \longrightarrow C_2 = \frac{l^2}{2}$ ممان در انتها صفر :

$y'''(l) = 0 \longrightarrow C_1 = -l$ نیروی برشی در انتها صفر :

$$y(x) = \frac{W}{24EI}\left(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2\right)$$

$$\longrightarrow \quad y(l) = \frac{Wl^4}{8EI}$$

شکل کلی الاستیسیته :

$$\vec{\sigma} = D\vec{\varepsilon}$$

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{zy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

بردار موقعیت : $\vec{r}(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

بردار تغییر مکان : $\vec{u}(x, y, z) = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$

Subject
Date

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

انرژی کرنشی $E_s = \frac{1}{2}\int_v [\sigma_x \; \sigma_y \; \sigma_z \; \tau_{zy} \; \tau_{xz} \; \tau_{xy}] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{zy} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} dv$

$$E_s = \frac{1}{2}\int_v \vec{\sigma}^T \vec{\varepsilon} \, dv$$

کار نیروی خارجی $W = \int_v [u \; v \; w] \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} dv$

$$W = \int_v \vec{u}^T \vec{f} \, dv \qquad E_p = E_s - W$$

بردار نیرو : $\vec{f} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$

$$\dot{\vec{u}} = \dot{u}\hat{i} + \dot{v}\hat{j} + \dot{w}\hat{k} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}$$

انرژی جنبشی : $E_k = \frac{1}{2}\rho\int_v \dot{\vec{u}}^T \dot{\vec{u}} \, dv$

Subject
Date

اصل همیلتون : $I(\vec{u}(x,y,z)) = \int_{v} (E_k - E_p)\, dv = extremum$

$\vec{u} \longrightarrow \vec{\varepsilon} \longrightarrow \vec{\sigma}$

بهینه سازی (Optimization) :

اتخاذ بهترین تصمیم (تصمیم بهینه) بر اساس منابع، امکانات موجود

تصمیم گیری ـ برنامه ریزی

بهینه سازی بدون قید :

تابع هدف (Objective function)

max

min

متغیرها : $x_1 , x_2 , \dots , x_n$

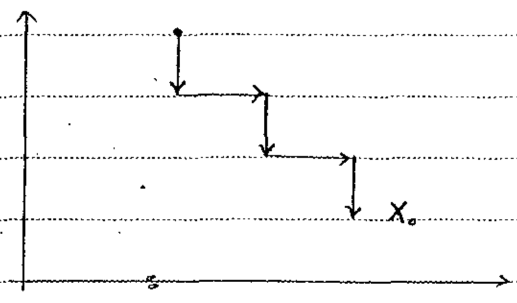
قیود مسأله (ممکن است متغیرها نتوانند آزادانه تغییر کنند)

فرض کنید $f(\vec{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ تابع هدف است.

اگر نقطهٔ $\vec{X} = \vec{X}_0$ اکسترمم تابع هدف باشد.

شرط لازم $\vec{\nabla} f(\vec{X}_0) = 0$

روش های تکراری مرحله ای



Subject

Date

روش سریعترین کاهش یا روش گرادیان: "steepest descent or gradient method"

فرض کنید تابع f دارای یک min در نقطهٔ $\vec{X}_0$ باشد. از یک نقطه مانند $\vec{X}$ شروع کرده ، درخلاف جهت گرادیان تابع f ($-\vec{\nabla} f(\vec{X})$) حرکت کرده ، نقطهٔ دیگری را به نحوی پیدا می‌کنیم که تابع f در آن راستا کمترین مقدار را داشته باشد. این مرحله تکرار می‌شود.

← مقدار پارامتر t را طوری بدست می‌آوریم که تابع $g(t) = f(\vec{Z}(t))$ ، min باشد.

$$\vec{Z}(t) = \vec{X} - t\,\vec{\nabla} f(\vec{X})$$

مثال: مینیمم تابع $f(\vec{X}) = x_1^2 + 3x_2^2$ را با روش سریعترین کاهش بیابید.

$$\vec{\nabla} f(\vec{X}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{Z}(t) = \vec{X} - t\,\vec{\nabla} f(\vec{X}) = \begin{bmatrix} (1-2t)x_1 \\ (1-6t)x_2 \end{bmatrix}$$

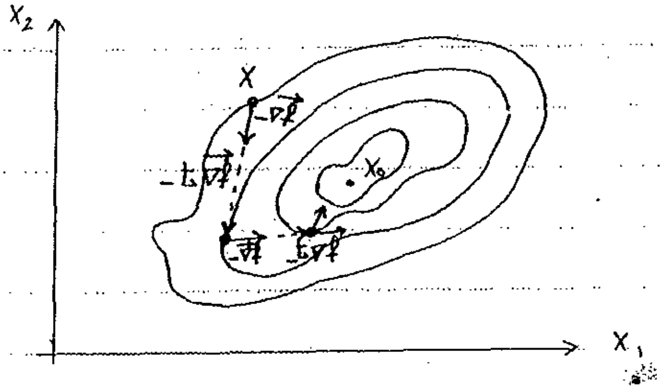
$$g(t) = f(\vec{Z}(t)) = [(1-2t)x_1]^2 + 3\,[(1-6t)x_2]^2$$

$$g'(t) = 0 \longrightarrow -4(1-2t)x_1^2 - 36(1-6t)x_2^2 = 0$$

$$t = \frac{x_1^2 + 9x_2^2}{2x_1^2 + 54x_2^2}$$

$\vec{X}$	t	$\vec{Z}(t)$
(3 , 6)	0.21	(3.48 , −0.77)
(3.48 , −0.77)	0.31	(1.33 , 0.66)
(1.33 , 0.66)	0.21	(0.77 , −0.17)

Subject
Date



بهینه سازی خطی:

مثال: در یک کارگاه پیچ سازی دو نوع پیچ B_1 و B_2 تولید می‌شود که سود حاصل از فروش هر کدام به ترتیب 40 و 88 تومان است. برای ساخت این دو پیچ می‌توان از دو ماشین تراش M_1 و M_2 استفاده کرد. با استفاده از ماشین M_1 زمان ساخت پیچ‌های B_1 و B_2 به ترتیب 2 و 8 دقیقه است. با استفاده از ماشین M_2 زمان ساخت پیچ‌های B_1 و B_2 به ترتیب 5 و 2 دقیقه است. برای سود بیشینه، تعداد پیچ‌های تولیدی B_1 و B_2 در یک ساعت را بیابید.

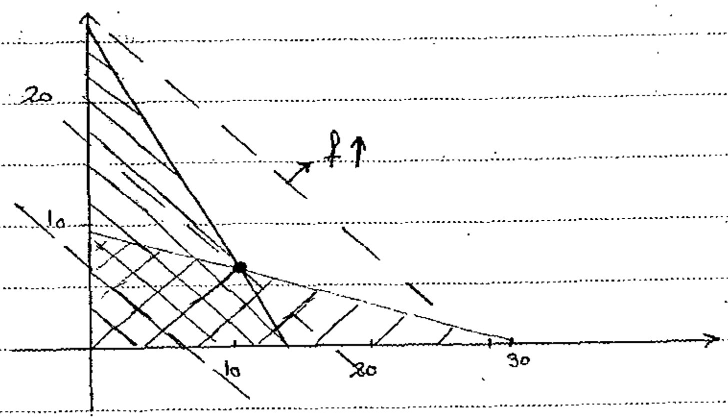
$\text{Max}: \quad f = 40x_1 + 88x_2$

$\text{s.t.}: \quad 2x_1 + 8x_2 \leq 60$

$5x_1 + 2x_2 \leq 60$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



$\rightarrow x_1 = 10 \quad , \quad x_2 = 5$

$f_{max} = 480$ تومان

Subject

Date

روش ساده (Simplex method): باید معادله (نه نامعادله) داشته باشیم.

$$\text{Max}: f = 40x_1 + 88x_2$$

$$\text{s.t.}: 2x_1 + 8x_2 + x_3 = 60$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_4 = 60 \qquad x_3, x_4 : \text{slack variables}$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{Max}: f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.}: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

b_j ها مثبت هستند.

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$

جواب عملی: (feasible solution): چندتایی $(x_1, \dots, x_n)$ که تمام قیود مساله را ارضا کند.

جواب بهینه (optimal solution): جواب عملی که بیشترین مقدار f را نتیجه دهد.

جواب عملی پایه: (Basic feasible solution): جواب عملی که در آن مقادیر حداقل $n-m$ متغیر صفر باشد.

قضیه: جواب بهینه یک مساله بهینه سازی خطی، یک جواب عملی پایه نیز باشد.

$$\text{Max}: f - 40x_1 - 88x_2 = 0$$

$$\text{s.t.}: 2x_1 + 8x_2 + x_3 = 60$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_4 = 60$$

$$x_i \geq 0$$

Subject
Date

ماتریس افزوده را بدست می آوریم:

$$T_0 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} f & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \end{array}$$

$$T_0 = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -40 & -88 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right] \quad (f,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ b)$$

متغیرهای پایه: (basic variable): متغیرهایی که ستون های آنها فقط یک درایه غیر صفر دارند: (x_3 , x_4)

متغیرهای غیر پایه: (x_1 , x_2) از ماتریس افزوده:

$$x_1 = x_2 = 0 \longrightarrow x_3 = \frac{60}{1} = 60 \quad , \quad x_4 = \frac{60}{1} = 60 \longrightarrow f = 0$$

ابتدا درایه لولا (pivot) را مشخص می کنیم. بدین صورت که:

* ستون درایه لولا: اولین ستون با درایه منفی در سطر اول ← [ستون 2]
* سطر درایه لولا: ابتدا درایه های سمت راست قیود را بر درایه های متناظر ستون درایه لولا تقسیم می کنیم. کوچکترین عدد سطر درایه لولا را مشخص می کند

$$\left[\frac{60}{2} = 30 \ , \ \frac{60}{5} = 12 \right] \longrightarrow$$ فقط برای معادلات قیود

درایه لولا: $\underline{\underline{5}}$ ←

با عملیات سطری مقدماتی درایه های بالا و پایین درایه pivot را صفر می کنیم

$R_1 + 8R_3 \longrightarrow R_1$

$R_2 - 0.4R_3 \longrightarrow R_2$

$$\begin{array}{cccccc} f & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array}$$

$$T_1 = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -72 & 0 & 8 & 480 \\ 0 & 0 & 7.2 & 1 & -0.4 & 36 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right]$$

PAPCO

z

Subject
Date

متغیرهای پایه: $(x_1 \; , \; x_3)$:

$x_2 = x_4 = 0 \quad , \quad x_3 = \frac{36}{1} = 36 \quad , \quad x_1 = \frac{60}{5} = 12 \longrightarrow f = 480$

این مراحل را تا جایی ادامه می‌دهیم تا نتوانیم درایه pivot را بدست آوریم. در این صورت جواب بهینه حاصل خواهد شد.

مشکلات روش ساده: در جازدن / در شروع

مثال: کارخانه‌ای دو نوع فولاد I_1 و I_2 را با استفاده از سه نوع مادهٔ خام تولید می‌کند. حداکثر سود روزانه کارخانه را بیابید. (درجازدن)

ماده خام	مقدار مادهٔ خام مورد نیاز در یک تن I_1	I_2	ماده خام در دسترس در روز (تن)
R_1	2	1	16
R_2	1	1	8
R_3	0	1	3.5
سود خالص در تن	150$	300$	

x_1 و x_2: تولید فولادهای I_1 و I_2 در روز باشند.

Max: $Z = 150x_1 + 300x_2$

S.t.:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 3.5 \end{cases} \quad , \; x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2)$$

RAPCO

Subject
Date

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ x_2 + x_5 = 3.5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \\ T_0 = \end{array} \begin{array}{ccccccc} Z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \end{array}$$

$$T_0 = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & -150 & -300 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3.5 \end{array}\right]$$

متغیرهای غیر پایه : x_1 , x_2 متغیرهای پایه : x_3 , x_4 , x_5

$x_1 = x_2 = 0 \longrightarrow x_3 = 16 \quad x_4 = 8 \quad x_5 = 3.5 \longrightarrow Z = 0$

ستون لولا : ستون 2

سطر لولا : سطر 2

$$\xrightarrow{\text{عملیات سطری مقدماتی}} T_1 = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & -225 & 75 & 0 & 0 & 1200 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1/2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3.5 \end{array}\right]$$

T_1 : متغیرهای پایه : x_1 , x_4 , x_5 متغیرهای غیرپایه : x_2 , x_3

$x_2 = x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = \frac{16}{2} = 8 \quad , \quad x_4 = 0 \quad , \quad x_5 = 3.5 \longrightarrow Z = 1200$

یک یا چند متغیر پایه = صفر ← مشکل دژنرسی

ستون لولا : ستون 3

سطر لولا : سطر 3

$$T_2 = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & -150 & 450 & 0 & 1200 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3.5 \end{array}\right]$$

Subject
Date

متغیرهای پایه : x_1 , x_2 , x_5 و متغیرهای غیرپایه : x_4 , x_3

$x_3 = x_4 = 0 \longrightarrow x_1 = \frac{16}{2} = 8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3.5 \longrightarrow Z = 1200$

به بیشترین نداشتیم. برای آنکه پیشروی داشته باشیم، سطر pivot را دومین سطر از نظر کوچک بودن عدد انتخاب می‌کنیم.

ستون لولا : ستون 4

سطر لولا : سطر 4

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 150 & 150 & 1725 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1.75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3.5 \end{bmatrix}$$

متغیرهای پایه : x_1 , x_2 , x_3 و متغیرهای غیرپایه : x_4 , x_5

$x_4 = x_5 = 0 \longrightarrow x_1 = 4.5$, $x_2 = 3.5$, $x_3 = 3.5 \longrightarrow Z = 1792$

به مسأله حل شد.

مثال : (در شروع)

$$\text{Max}: Z = 2x_1 + x_2$$

s.t.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geqslant 1 \\ x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

اگر متغیر منفی داشتیم، آن را در معادلات با $-x$ نشان می‌دهیم تا خود x مثبت باشد.

اگر یک متغیر بتواند هر مقداری (مثبت، منفی، صفر) را اختیار کند، آن را بصورت مثلاً $x_2 - x_3$ در نظر می‌گیریم که x_2 , x_3 مثبت هستند. یعنی یک متغیر اضافه می‌شود.

PAPCO

Subject
Date

$$\begin{cases} Z - 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 4 \\ x_i \geqslant 0 \rightarrow (i = 1, 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$

$$T_0 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

متغیرهای پایه : x_3, x_4, x_5 متغیرهای غیرپایه : x_1, x_2

$$x_1 = x_2 = 0 \longrightarrow \underbrace{x_3 = -1}_{\text{جواب در محدوده مجاز نیست.}}, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 4$$

حل معادله دوم برحسب x_3 :

$$x_3 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 1 + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{متغیر مصنوعی}}}{x_6}$$

Artificial Variable

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{یک عدد خیلی بزرگ}}}{-M}x_6 \qquad x_6 = x_3 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 1$$

$$\hat{Z} = Z - Mx_6$$

$$\hat{Z} = (2 + M)x_1 + (1 - \frac{1}{2}M)x_2 - Mx_3 - M$$

Subject

Date

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \hat{z} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \end{array} \\
T_0 = \begin{bmatrix}
1 & -2-M & -1+\frac{1}{2}M & M & 0 & 0 & 0 & -M \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

ستون لولا: ستون 2

سطر لولا: سطر 2

$$
T_1 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 3/2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

متغیرهای پایه: x_1 , x_4 , x_5 , x_6 متغیرهای غیرپایه: x_3 , x_2

$x_2 = x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = 1 \,,\; x_4 = 1 \,,\; x_5 = 3 \,,\; x_4 = 0$

سطر و ستون متغیر مصنوعی را حذف می‌کنیم.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\
T_2 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 3/2 & 1 & 0 & 1 & 3
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Subject
Date

ستون لولا : ستون 3
سطر لولا : سطر 4

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 0 & 4/3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 & 1 & 1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$x_3 = x_5 = 0 \longrightarrow x_1 = 2 \ , \ x_2 = 2 \ , \ x_4 = 2$

ستون لولا : ستون 4
سطر لولا : سطر 3

$x_4 = x_5 = 0 \ , \ x_1 = 3 \ , \ x_2 = 1 \ , \ x_3 = 3/2$

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 3/2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 & 1 & 1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & -3/4 & 3/4 & 3/2 \end{bmatrix}$$

← نمی‌توانیم ستون pivot را پیدا کنیم ← پس مسأله حل شده است.

PAPCO

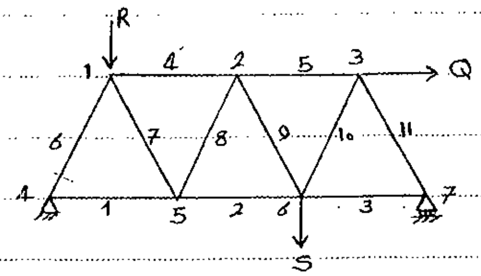
Subject
Date

برنامه ریزی غیرخطی : (Nonlinear programming)

۱) توابع هدف ، قید ، خطی نباشند.

۲) توابع ضمنی باشند ، نتوان آنها را بصورت صریح نوشت .

مثال : طراحی یک خرپا بطوری که وزن خرپا کمینه شود و جابجایی های عمودی و افقی تمام گره ها کمتر از δ باشد.



اندازه های اضلاع : l

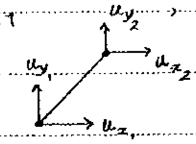
اندازه های زوایا : 60°

داده های مسأله :

ρ : چگالی E : مدول الاستیسیته l : طول اعضاء S و R و Q : نیروهای خارجی

متغیرهای طراحی : سطح مقطع های اعضاء : $x_1 , x_2 , \dots , x_{11}$

$$[K]_{4*4} \ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{برای هر المان} \\ u_{x_1} , u_{x_2} , u_{y_1} , u_{y_2}}}{\vec{u}_{4*1}} = \vec{P}_{4*1} \quad , \quad \delta = \frac{Pl}{AE}$$



$$\text{Min} : f(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{11} \rho x_i l_i \qquad \text{مجموع جرم اعضاء}$$

$$\text{s.t.} : g_i(\vec{X}) = |u_i(\vec{X})| - \delta \leqslant 0$$

$$x_i \geqslant 0$$

PAPCO

Subject
Date

روش اصلی که در اغلب روشهای بر پایه برنامه ریزی غیرخطی دنبال می شود ، به قرار زیر است :

1. شروع از یک نقطهٔ اولیه $\vec{X}_1$

2. تعیین یک جهت مناسب $\vec{S}_i$ به سمت جواب بهینه

3. تعیین میزان پیشروی مناسب (λ_i^*) در جهت تعیین شده در مرحله قبل

4. تعیین تقریب جدید برای جواب بهینه $\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \lambda_i^* \vec{S}_i$

5. بررسی اینکه آیا جواب $\vec{X}_{i+1}$ جواب بهینه است ؟

6. بله ← اتمام بهینه سازی خیر ← برو به 2

$f(\vec{X}_{i+1})$

$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \lambda \vec{S}$

↓

$\text{Min}: f(\vec{X}_{i+1}) = f(\vec{X}_i + \lambda \vec{S}) \longrightarrow \lambda$: یک متغیر

← روش های بهینه سازی یک بعدی

Interpolation method :

$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = 0 \longrightarrow \lambda = ✓$ اما همه جا عملی نیست .

روش نیوتن : آزمون همگرایی $\|f'(\lambda_{i+1})\| \leq \varepsilon$

شرط لازم برای مینیمم شدن $f(\lambda) \longleftarrow f'(\lambda) = 0$

$\lambda_{i+1} = \lambda_i - \frac{f'(\lambda_i)}{f''(\lambda_i)} \longrightarrow$ از تقریب مرتبهٔ 2 بسط تیلور تابع f حول λ_i

$f'(\lambda_i) = \frac{f(\lambda_i + \Delta\lambda) - f(\lambda_i - \Delta\lambda)}{2\Delta\lambda}$

PAPCO

Subject
Date

$$f''(\lambda_i) = \frac{f(\lambda_i + \Delta\lambda) - 2f(\lambda_i) + f(\lambda_i - \Delta\lambda)}{\Delta\lambda^2}$$

روش شبه نیوتن

$$\longrightarrow \lambda_{i+1} = \lambda_i - \frac{\Delta\lambda\,[f(\lambda_i + \Delta\lambda) - f(\lambda_i - \Delta\lambda)]}{2\,[f(\lambda_i + \Delta\lambda) - 2f(\lambda_i) + f(\lambda_i - \Delta\lambda)]}$$

$$|f'(\lambda_{i+1})| = \left| \frac{f(\lambda_{i+1} + \Delta\lambda) - f(\lambda_{i+1} - \Delta\lambda)}{2\Delta\lambda} \right| \leqslant \varepsilon$$

روش های تعیین جهت پیشروی :

ـ روش سریعترین کاهش : $\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i - \lambda_i^* \vec{\nabla} f_i \longrightarrow \vec{S}_i = -\vec{\nabla} f_i$

(روش گرادیان)

جهت افزایش سرعت همگرایی روش گرادیان :

روش گرادیان مزدوج :

1) شروع از یک نقطهٔ دلخواه $\vec{X}_i$

2) اولین جهت جستجو $\vec{S}_1 = -\vec{\nabla} f(\vec{X}_1) = -\vec{\nabla} f_1$

3) $\vec{X}_2 = \vec{X}_1 + \lambda_1^* \vec{S}_1$

4) $i = 2, 3, \ldots$ $\quad \vec{S}_i = -\vec{\nabla} f_i + \dfrac{|\vec{\nabla} f_i|^2}{|\vec{\nabla} f_{i-1}|^2} \vec{S}_{i-1}$

5) $\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \lambda_i^* \vec{S}_i$

6) تکرار تا رسیدن به جواب.

PAPCO

Subject
Date

مثال:

$$\text{Min}: f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

نقطهٔ شروع $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 4x_1 + 2x_2 \\ -1 + 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{S}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f(\vec{X}_1 + \lambda_1 \vec{S}_1) = f(-\lambda_1, +\lambda_1) = \lambda_1^2 - 2\lambda_1$$

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = 0 \longrightarrow \lambda_i^* = 1$$

$$\vec{X}_2 = \vec{X}_1 + \lambda_1^* \vec{S}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f_2 = \nabla f(\vec{X}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{S}_2 = -\nabla f_2 + \frac{|\nabla f_2|^2}{|\nabla f_1|^2} \vec{S}_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$f(\vec{X}_2 + \lambda_2 \vec{S}_2) = 4\lambda_2^2 - 2\lambda_2 - 1$$

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = 0 \longrightarrow \lambda_2^* = \frac{1}{4}$$

$$\vec{X}_3 = \vec{X}_2 + \lambda_2^* \vec{S}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1.5 \end{bmatrix} \qquad \vec{S}_3 = 0 \longrightarrow$$ به جواب رسیدیم

PAPCO

Subject
Date

طراحی آزمایشات : (Design of expriments)

آزمایشات به دفعات تکرار می‌شوند.   سطوح به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند.

آمار   احتمال

مثلاً 5 عامل که روی خروجی تأثیر می‌گذارند:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \rightarrow F$$

برای مطالعه تأثیر یک عامل روی خروجی:

1) تغییر یک متغیر در آن واحد   one-variable At a time

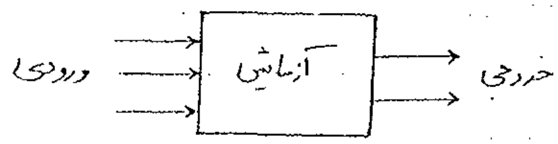
یک متغیر را تغییر می‌دهیم درحالی که بقیه را ثابت نگه می‌داریم.

که هزینه‌بر، غیرمؤثر و غیرقابل اعتماد. (چراکه متغیرهای دیگر نیز روی تأثیر یک پارامتر در خروجی اثرگذار می‌باشند.)

مثال:

عامل‌ها	خروجی
α_1	F
α_2	
α_3	

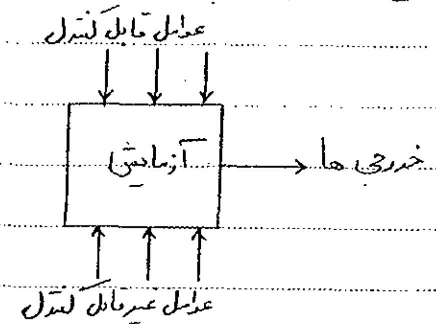
اگر α_2 , α_3 را ثابت نگه داریم و α_1 را تغییر دهیم، اگر α_1 تأثیر ناچیزی را نشان دهد، نمی‌توان نتیجه گرفت که α_1 تأثیری در خروجی F ندارد چراکه با تغییر α_2 , α_3، تأثیر α_1 می‌تواند زیاد شود.



در ورودی می‌توان هر پارامتر تأثیرگذار بر خروجی را در نظر گرفت.

در طراحی آزمایشها:

تغییر تعمدی عوامل ← مشاهده تأثیر عوامل بر خروجی ← مشاهده یک پدیده



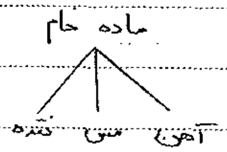
← موجب اختلالات در آزمایش می‌شود

عوامل:
- قابل کنترل
- غیرقابل کنترل

عوامل غیرقابل کنترل که قابل تغییر نیستند. بنابراین عوامل قابل کنترل را باید بصورت بهینه تصحیح کنیم.

عوامل:
- کمی (درجه حرارت، ...) (پیوسته)
- کیفی (نوع ماده خام، ...) (گسسته)

سطح عامل: مقادیر یا گزینه‌هایی است که حین آزمایش برای آن عامل مورد نظر قرار می‌گیرد.
مثلاً



← سطح عامل = 3

هر ترکیبی از سطوح عوامل ورودی:
- اجرا : run
- امتحان : trial

Subject
Date

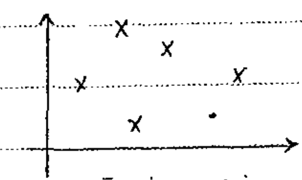
برای از بین بردن تعصب:
1) تصادفی کردن
2) تکرار
3) بلوک بندی

درجات آزادی:
تعداد مقایسه‌های مستقل که در یک مجموعه از نتایج آزمایشی می‌توان انجام داد.
درجات آزادی یک عامل: تعداد سطوح آن عامل منهای یک.
مثلاً: h متغیر $\rightarrow$ h_1 , h_2 $\rightarrow$ DOF = 1

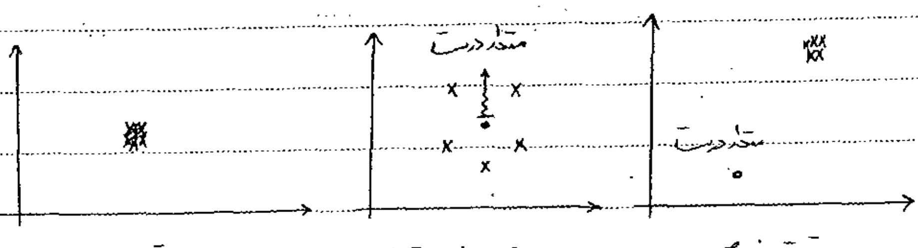
عامل 1	عامل 2	خروجی F
low	low	F_1
High	High	F_2

$\rightarrow$ می‌توان با داشتن F_1 و F_2 تأثیر هر پارامتر را مطالعه کرد.

در اندازه‌گیری:
- Accuracy صحت
- precision دقت



غیرصحیح - غیردقیق



دقیق و صحیح — صحیح غیردقیق — دقیق غیرصحیح

↓

خطرناک