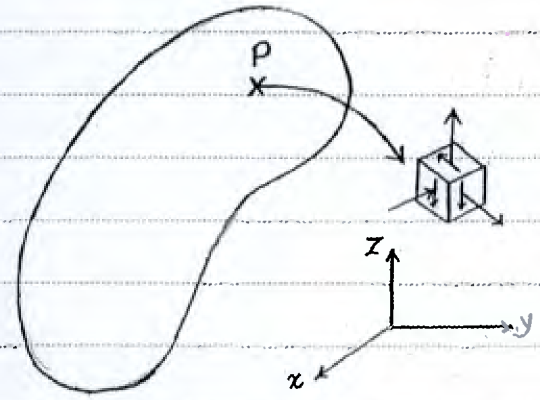
Subject:
Year. Month. Date. ( )

تئوری الاستیسیته
دکتر محمود مهرداد شکریه

Strength of materials
Mechanics of materials
Mechanics of Deformable solids



باید چهار اصل ارضا شود.

I. III.
II. IV.

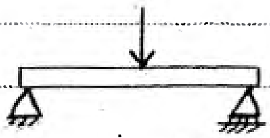
"Exact solution"
closed Form solution

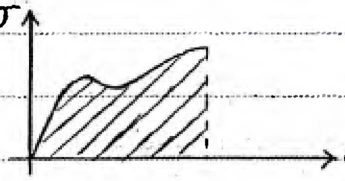
Elasticity in Engin, E. E. Sechler 1952
A Treatise on the math. Theory of Elasticity, A.E.H. Love, 1944
Math. Theory of Elasticity, Sokolinkoff, I. S, 1946.
Theory of Elasticity S. Timoshenko & J. N. Goodier, 1951.
Aircraft structures for Eng. student, T. H. G. Megson, 1990.
Aircraft structures D. J. Peery & J. I. Azar, 1982.
Elasticity J.R Barber

Subject:
Year. Month. Date ( )

I. Theory of Elasticity

II. Energy Method → FEM





$W = E$

زیابی:

Homework

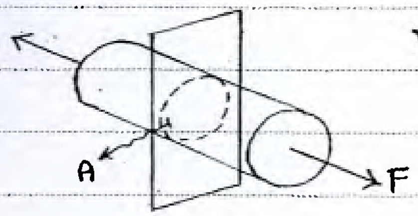
Quiz

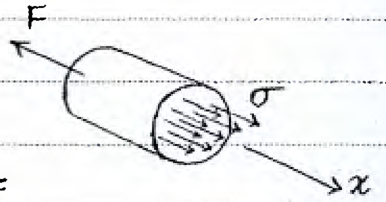
Projects

Mid Term exam

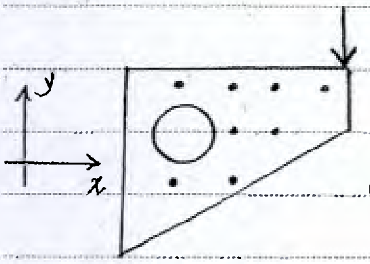
Final exam

I. Equilibrium Equations

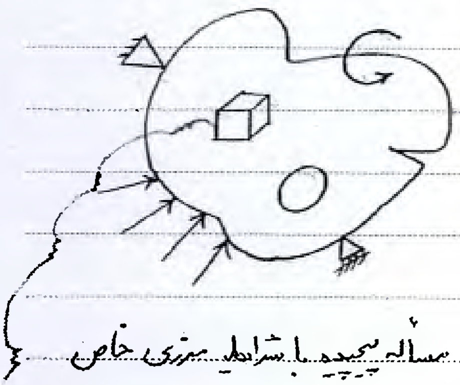




$\Sigma F_x = 0 \qquad F = \sigma A \qquad \sigma = \frac{F}{A}$

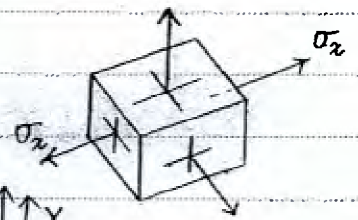


$\sigma_x = f_1(x, y) \qquad \sigma_y = f_2(x, y) \qquad \tau_{xy} = f_3(x, y)$



مسأله پیچیده با شرایط مرزی خاص

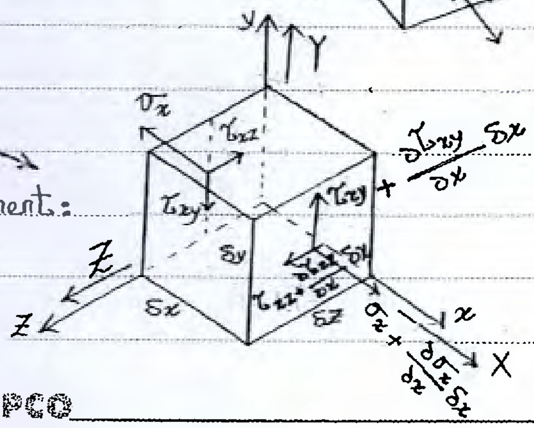
point :



تنش‌ها در طرفین یک نقطه برابر هستند

3D

element :



X , Y , Z : body force/Volume

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + Z = 0$$

تمرین 1: تئوری های تنش و کرنش صفحه ای نادرست هستند، (چرا که تنش و کرنش ناچیزی در بعد سوم وجود ندارد) Timoshenko ← در کدام کتاب؟ و چرا؟

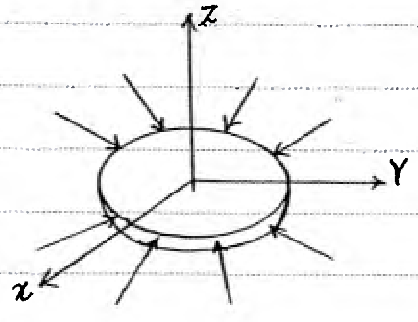
2_D plane_stress

$\sigma_x = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} \approx 0$!

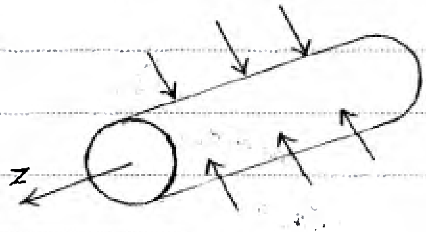
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + Y = 0$$

معادله تعادل لازم است، ولی کافی نیست

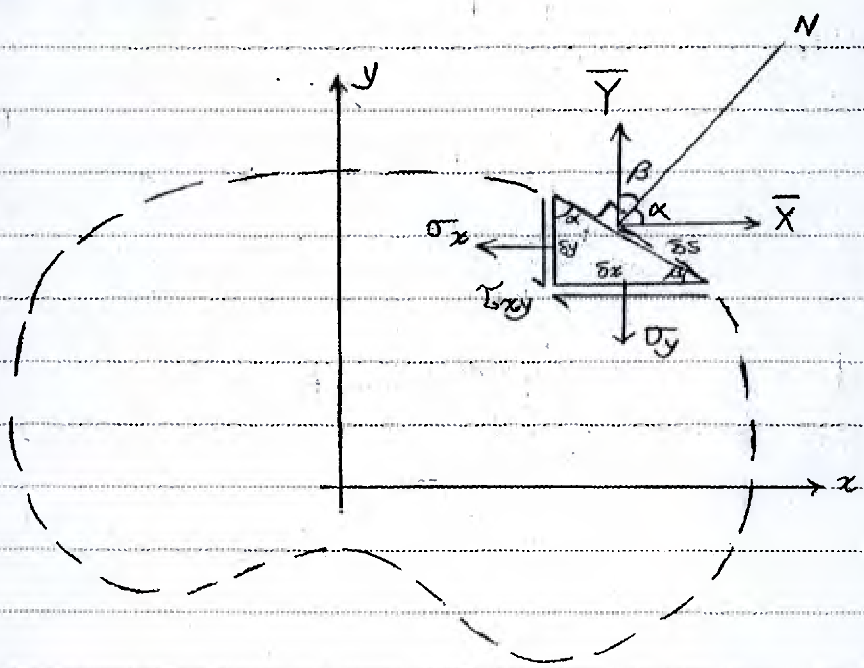


plane stress



plane strain

II. Boundary Conditions

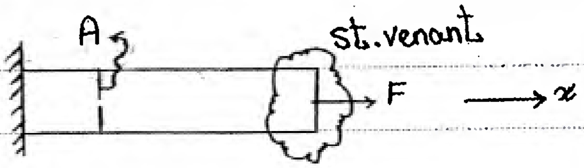


$\cos\beta , \cos\alpha = \dfrac{-dx}{ds} , \dfrac{dy}{ds} = m , l$ $\quad\quad$ $\bar{X} , \bar{Y}$: $\dfrac{\text{surface force}}{\text{Area}}$

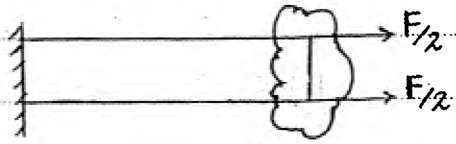
$$\text{2-D} \begin{cases} \bar{X} = \sigma_x l + \tau_{yx} m \\ \bar{Y} = \sigma_y m + \tau_{xy} l \end{cases}$$

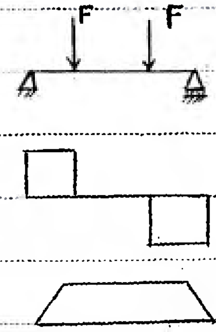
l و m و n ، کسینوس زوایایی هستند که بردار
نرمال بر سطح در هر نقطه روی سطح با محورهای ترتیب
x , y , z می‌سازد.

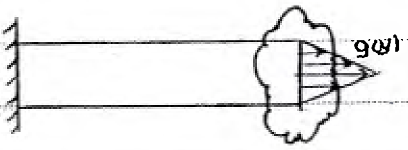
$$\text{3-D} \begin{cases} \bar{X} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ \bar{Y} = \sigma_y m + \tau_{xy} l + \tau_{zy} n \\ \bar{Z} = \sigma_z n + \tau_{yz} m + \tau_{zx} l \end{cases}$$



$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$



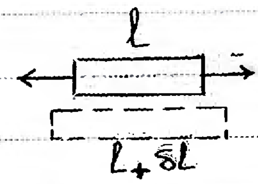




$\int g(y)dy = F$

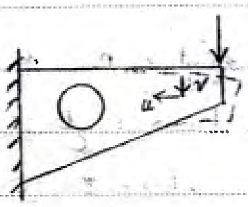
در Far field همه حالات فوق، تنش‌های یکسانی دارند، ولی در نزدیکی شرایط مرزی متفاوت هستند.

III. Compatibility Equations.



$$\varepsilon = \frac{\delta l}{l}$$

u , v , w



در آزمایشگاه کرنش مهندسی اندازه گیری می‌شود.

2-D u , v

$\varepsilon_x , \varepsilon_y , \gamma_{xy}$

Eng. shear strain : $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$

$\downarrow$ Tensorial shear strain

u , v , w

$\varepsilon_x , \varepsilon_y , \varepsilon_z , \gamma_{xy} , \gamma_{xz} , \gamma_{yz}$

← سه معادلهٔ دیگر برای بدست آوردن ۶ مجهول تنش نیاز است.

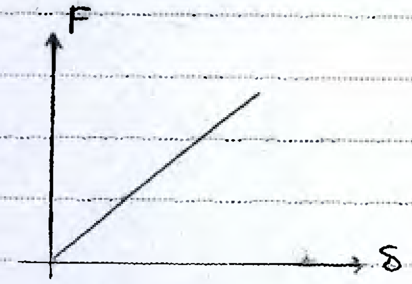
Assumption : small Displacement

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

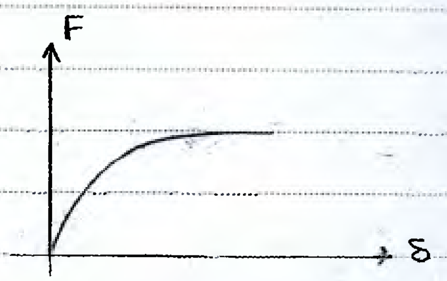
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

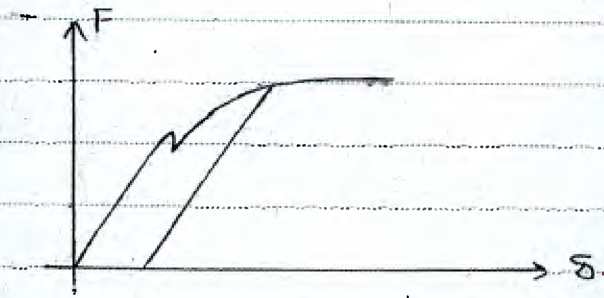
در تغییر شکل های بزرگ History مهم است و روابط غیرخطی است.



Linear elastic



Non-Linear elastic



Non-Linear plastic

2-D: $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$: Compatibility Equation

تمرین ۲: مشتق گیری های فوق به چه علت است، برای چه از آنها استفاده می کنیم؟ چرا معادلات سازگار شده در حوزه هستند

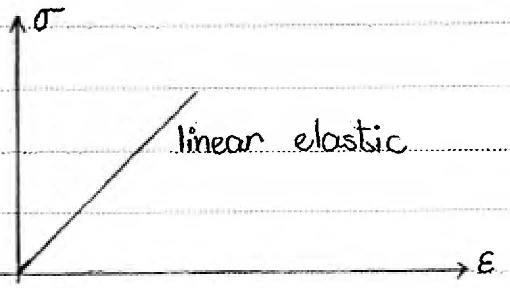
3-D:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x}\right)$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

IV. stress - strain Relationship (material model)



$\sigma = \frac{F}{A}$

$\varepsilon = \checkmark$

stiffness سختی $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

$\nu = \left|\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right|$

Subject
Date

E (مدول یانگ) فقط برای حالت تک بعدی است. امّا در حالت سه بعدی ماتریس سختی وجود دارد که با اصل سوپرپوزیشن (فقط برای حالت های Linear elastic صحیح است.) بدست می آید.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

↳ shear stiffness

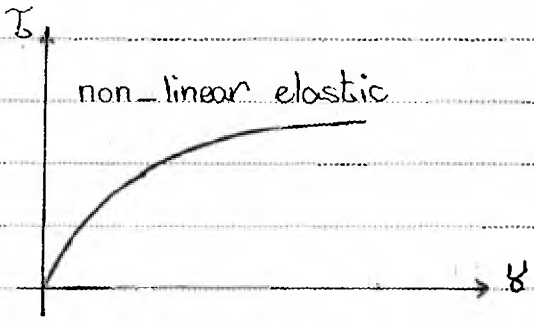
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

↳ Compliance matrix

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

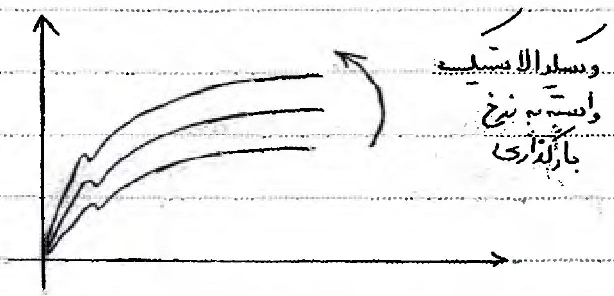
Subject
Date

linear elastic —
- Isotropic E, ν, σ_y
- Transversly isotropic
- orthotropic
- Monoclinic
- Triclinic



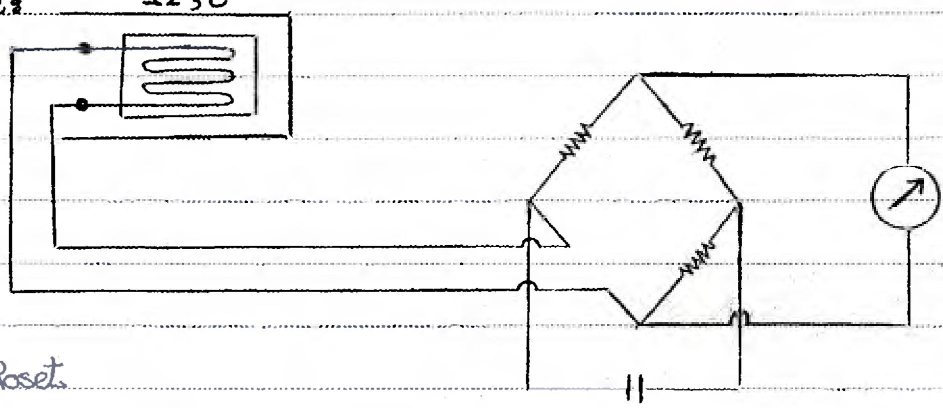
تمرین ۳: material models را نام ببرید، رفتار آنها را بگویید.

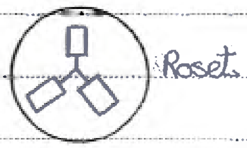
hypoelastic, Hyperelastic, visco elastic, Linear visco elastic
non_Lineaer viscoelastic, creep



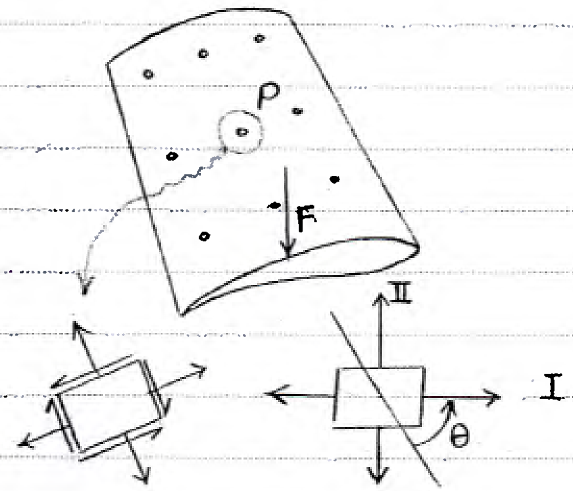
چهار معادله I ، II ، III ، IV ، Constitutive equations یا Fundamental equations می باشند.

strain gages: Ω , ε



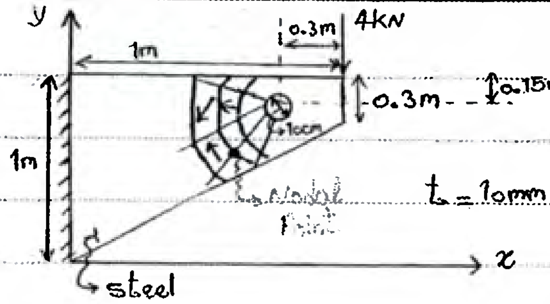


با افزایش طول سیم ها، مقاومت تغییر می کند و کرنش اندازه گیری می شود.



برای بدست آوردن تنش های اصلی،
سه مجهول داریم σ_1 ، σ_2 ، θ . بنابراین
باید در نقطه مورد نظر از یک Roset
استفاده کنیم.

Subject
Date

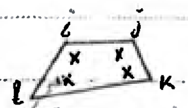


تمرین ۲: مسأله زیر را با کمک از نرم افزارهای المان محدود حل کنید.

جهت بحرانی را با معیار تنش ماکزیمم برای المان بحرانی بیابید. همچنین بیابید Foil می‌کند یا نه ?

$E = 2e11\,pa$, $\nu = 0.3$

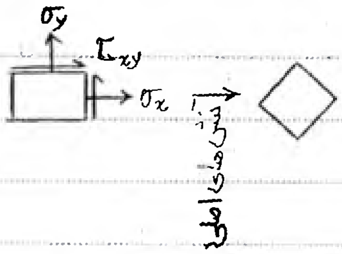
2D - plane stress , shell



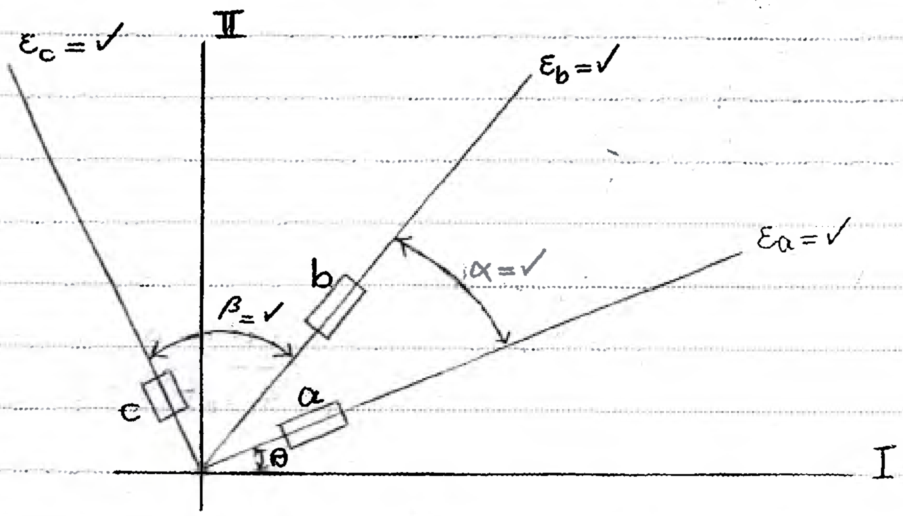
→ دقیق‌ترین اطلاعات

هر nodal point با میانگین‌گیری از 16 Gause point تنش بدست می‌آید.

i , σ_x , σ_y , τ_{xy}



جهت اصلی جهتی است که ترک عمود بر آن رخ می‌دهد (←).



ε_a , ε_b , ε_c , α , $\beta = \checkmark$ known

ε_I , ε_{II} , σ_I , σ_{II} , θ = ?

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\varepsilon_a = \varepsilon_I \cos^2\theta + \varepsilon_{II} \sin^2\theta$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_I \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + \varepsilon_{II} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)$$

$$\varepsilon_a = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \cos 2\theta$$

similarly:

$$\varepsilon_b = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \cos 2(\theta + \alpha)$$

$$\varepsilon_c = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \cos 2(\theta + \alpha + \beta)$$

$$\varepsilon_I,\ \varepsilon_{II},\ \theta = \checkmark$$

$$\sigma_I = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_I + \nu \varepsilon_{II})$$

$$\sigma_{II} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{II} + \nu \varepsilon_I)$$

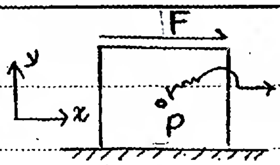
special case: $\alpha = \beta = 45^\circ$

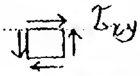
$$\varepsilon_I = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}$$

$$\varepsilon_{II} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}$$

$$\theta = \tfrac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )





تمرین ۵: نحوه خواندن کرنش برشی

$\gamma_{xy} = ?$

کتاب: Experimental stress Analysis, Dally & Reighly

تمرین ۶: یک صفحه را جلوی ترانس بست برش کنیم. استحکام برشی ، G ← از روش اندازه‌گیری.

2.D problems in Elasticity : σ_x , σ_y , τ_{xy} , ε_x , ε_y , γ_{xy}

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \end{aligned}\right] \text{Equilib Eq.'s} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned}\right] \sigma - \varepsilon \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \qquad \text{Compatibility Eq.} \qquad (3)$$

PAPCO

$$(2) \longrightarrow (3): \quad 2(1+\nu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (4)$$

با مشتق گیری از (1):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial X}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial Y}{\partial y} \end{aligned}\right] \xrightarrow{(5)} 2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Compatibility Eq. for plane stress cond's.

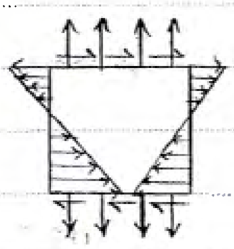
For plane strain cond's: تمرین ۷: برای حالت plane strain ثابت کنید:

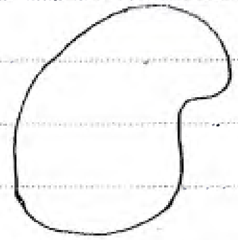
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{-1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

نکته جالب: در شرایط تنش نسبت به حالت plane stress چیست؟

Stress function (Airy stress Function):

2.D plane strain:





$$\varphi \begin{cases} \sigma_x(x,y) \\ \sigma_y(x,y) \\ \tau_{xy}(x,y) \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مقطعه با هر شرایط خاص دارای یک تابع خاص است که اگر نسبت به آن مشتق گرفته شود، تنش ها را می دهد و شرایط مرزی کاملاً ارضا می شود. (حل دقیق در مرز و domain)

Equilib. Eq.'s
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Compotibility Eq.
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \qquad (2)$$

$\phi(x, y)$:
$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = \dfrac{-\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \qquad (3)$$

تابع φ معادله 1 را ارضا می کند

(3) → (2)
$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

$$\nabla^4 \phi = 0$$ → تابع φ باید حتماً این شرط را ارضا کند.

→ ϕ must be Biharmonic

Subject:
Year. Month. Date. ( )

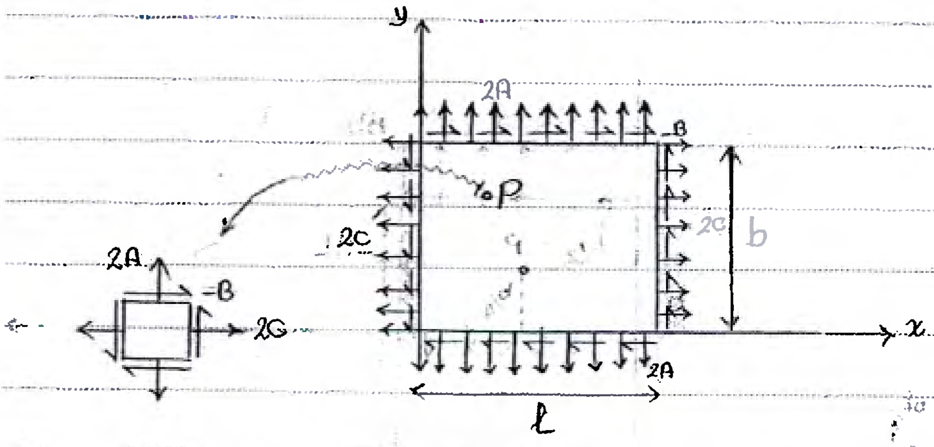
مثال:
$$\phi = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

$$\nabla^4 \varphi = 0 \quad \checkmark$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2C$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2A$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -B$$



مثال:
$$\varphi = \frac{Ax^3}{6} + B\frac{x^2 y}{2} + C\frac{xy^2}{2} + D\frac{y^3}{6}$$

$$\nabla^4 \varphi = 0 \quad \checkmark$$

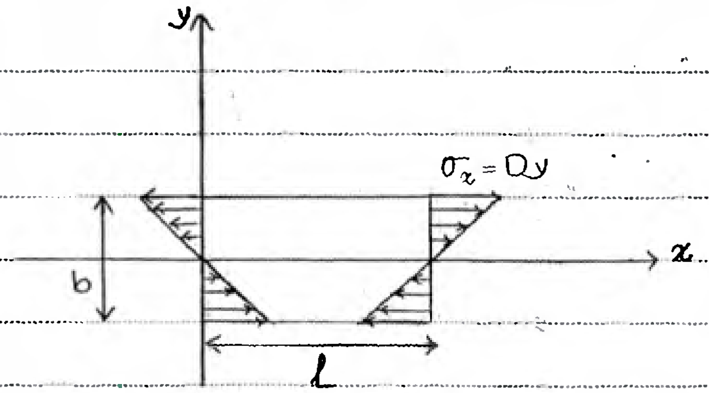
$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = Cx + Dy$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -Bx - Cy$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = Ax + By$$

PAPCO

$A = B = C = 0 \qquad D \neq 0$



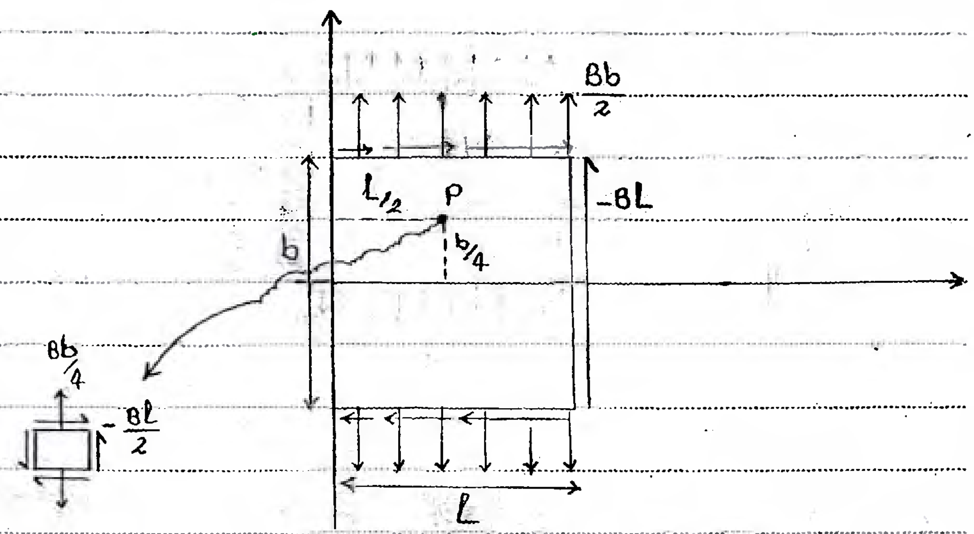
$\sigma_x = Dy$

$\sigma_y = 0$

$\tau_{xy} = 0$

$\hookrightarrow$ pure bending

$A = C = D = 0 \qquad B \neq 0$



$\sigma_x = 0$

$\sigma_y = By$

$\tau_{xy} = -Bx$

stress Base formulation

$\varphi \rightarrow \nabla^4 \varphi = 0 \rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \checkmark \\ \sigma_y = \checkmark \\ \tau_{xy} = \checkmark \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \checkmark \\ \varepsilon_y = \checkmark \\ \varepsilon_{xy} = \checkmark \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \vdots \end{cases} \rightarrow u, v =$

displacement Base formulation : در Finite element مسیر برعکس طی می‌شود

$\{x\} = [K]^{-1}\{F\}$

$$\varphi(x,y)=\frac{Ax^4}{12}+\frac{Bx^3y}{6}+\frac{Cx^2y^2}{2}+\frac{Dxy^3}{6}+\frac{Ey^4}{12}$$

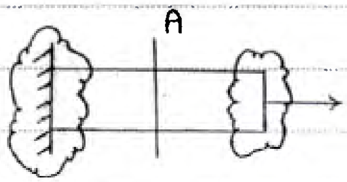
$$\nabla^4\varphi=0 \qquad \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}=2A \quad , \quad \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=2E \quad , \quad \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}=2C$$

$$2A+2E+4C=0 \qquad E=-(2C+A) \quad \text{condition}$$

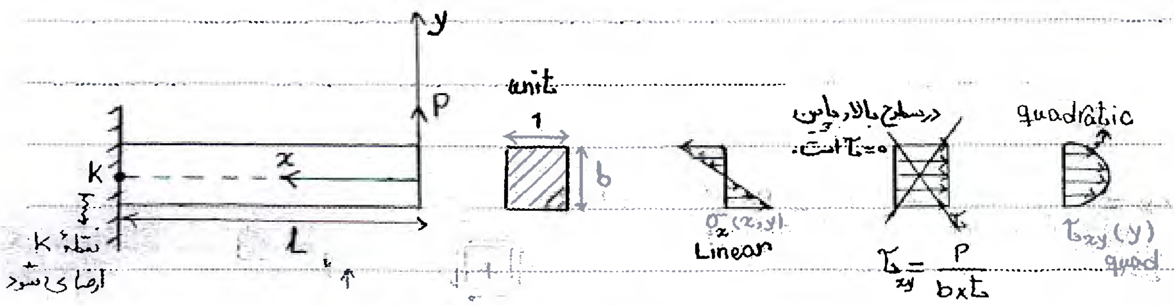
تمرین: محاسبه σ_x ، σ_y و τ_{xy} برای مثال فوق.

Semi-inverse method:

ممکن است حل exact نباشد.

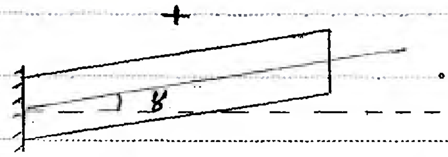


← داخل domain حل دقیق دارد ولی در Boundary خیر.



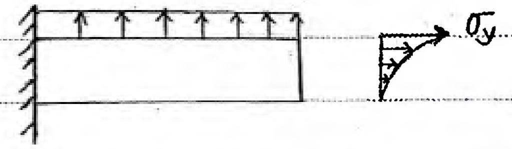
Bending جابجایی ناشی از:

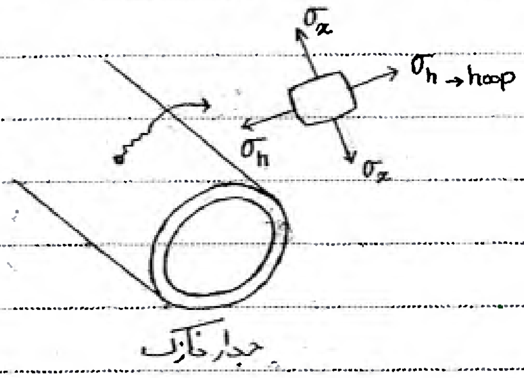
+

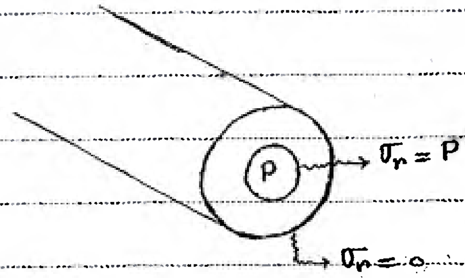


جابجایی ناشی از برش.

$$\left[\begin{array}{l}\sigma_x=\frac{My}{I}\\ \\ \sigma_y=0\end{array}\right.$$







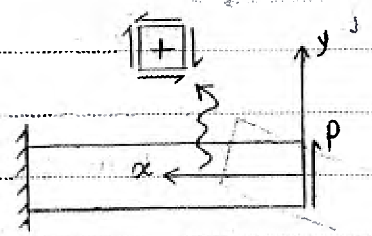
$$\varphi = Axy + \frac{Bxy^3}{6}$$

$$\nabla^4 \varphi = 0$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = Bxy$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

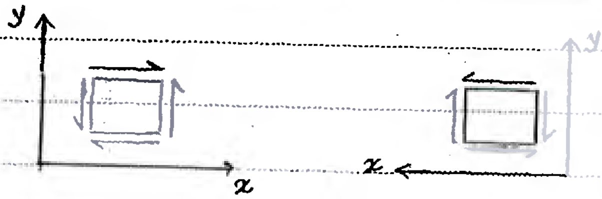
$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -A - B\frac{y^2}{2}$$



$$A, B = ?$$

$$\tau_{xy}\Big|_{\substack{top \\ buttom}} = 0 \quad \& \quad \int \tau \, dA = -P$$

$$\tau_{xy}\Big|_{y=\pm b/2} = 0 = A - \frac{B\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} \longrightarrow A = \frac{-Bb^2}{8} \quad \text{(II)}$$



تنش برشی مثبت   تنش برشی مثبت

$$\int_{-b/2}^{+b/2} \tau_{xy} * \underbrace{dA}_{1 * dy} = -P \qquad \text{(III)}$$

$$(\text{I}, \text{II}) \longrightarrow \text{III} : \int_{-b/2}^{+b/2} \left(\frac{Bb^2}{8} - \frac{By^2}{2} \right) dy = -P$$

$$B = \frac{-12P}{b^3}$$

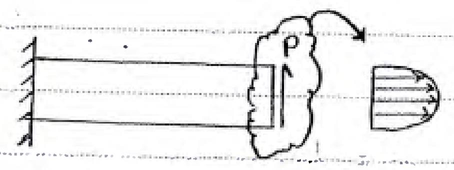
$$\sigma_x = \frac{-12Pxy}{b^3} = \frac{-Pxy}{I}$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{-12P}{8b^3}\left(b^2 - 4y^2\right) = \frac{-P}{8I}\left(b^2 - 4y^2\right)$$

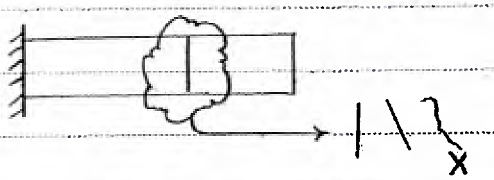
حل فوق exact است، یعنی:

1. توزیع P به عنوان تنش برشی در تمام نقاط (و در نتیجه مرز) quadratic باشد.



2. Boundary Condition سمت چپ تیر را نرمیش کنیم. (زیرا در این شرایط مرزی Fix ، σ_y خواهیم داشت.)

3. سطح مقطع صاف باقی می‌ماند. (اعوجاج distorsion نخواهد داشت.)



$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\sigma_x}{E} = -\dfrac{Pxy}{EI} \\[2ex] \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{-\nu\sigma_x}{E} = \dfrac{\nu Pxy}{EI} \\[2ex] \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} = \dfrac{-P}{8IG}(b^2 - 4y^2) \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{-Px^2y}{2EI} + f_1(y) \\[2ex] v = \dfrac{\nu Pxy^2}{2EI} + f_2(x) \end{cases} \qquad (\mathrm{II})$$

$$\frac{-Px^2}{2EI} + \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} + \frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = -\frac{P}{8IG}(b^2 - 4y^2)$$

$$\begin{cases} F_1(x) = -\dfrac{Px^2}{2EI} + \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x} = C \\[2ex] F_2(y) = \dfrac{\nu Py^2}{2EI} - \dfrac{Py^2}{2GI} + \dfrac{\partial f_1(y)}{\partial y} = D \end{cases}$$

$$F_1(x) + F_2(y) = \frac{-Pb^2}{8IG} = cte \longrightarrow C + D = -\frac{Pb^2}{8IG}$$

$$f_2(x) = \frac{Px^3}{6EI} + Cx + F$$

$$f_1(y) = \frac{Py^3}{6IG} - \frac{\nu P y^3}{6EI} + Dy + H$$

$$\begin{cases} u = -\dfrac{Px^2y}{2EI} - \dfrac{\nu P y^3}{6EI} + \dfrac{Py^3}{6IG} + Dy + H \\ v = \dfrac{\nu Pxy^2}{2EI} + \dfrac{Px^3}{6EI} + Cx + F \end{cases}$$

شرایط مرزی $k\Big|_{\substack{x=l \\ y=0}} \longrightarrow u = 0 \ , \ v = 0$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = l \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u = 0 \longrightarrow H = 0 \\ v = 0 \longrightarrow F = -\dfrac{Pl^3}{6EI} - Cl \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_k = 0 \longrightarrow x = l \ , \ y = 0$$

$$C = \frac{-Pl^2}{2EI} \longrightarrow F = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\longrightarrow D = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pb^2}{8EI}$$

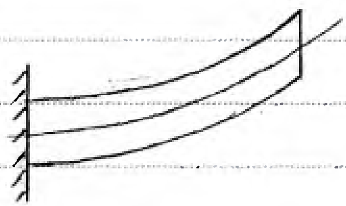
$$(*)\quad \begin{cases} u = \dfrac{-Px^2y}{2EI} - \dfrac{\nu P y^3}{6EI} + \dfrac{Py^3}{6IG} + \left(\dfrac{Pl^2}{2EI} - \dfrac{Pb^2}{6GI}\right) \\[2ex] v = \dfrac{\nu P x y^2}{2EI} + \dfrac{Px^3}{6EI} - \dfrac{Pl^2 x}{2EI} + \dfrac{Pl^3}{3EI} \end{cases}$$

Neutral Axis: $y=0$

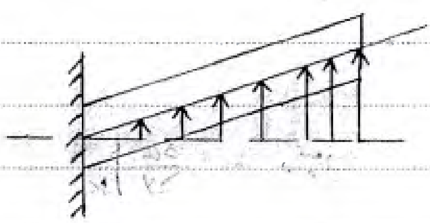
$$v\big|_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}$$

ما فرض کردیم که در نقطهٔ k: $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ است. امّا چون بار را بصورت برشی در نظر گرفتیم، این فرض نادرست است! پس باید اثر برش را نیز در نظر بگیریم. در تیرهای بلند برش نسبت ≈ Bending قابل اغماض است.

تیر بلند: $\frac{L}{W} > 20$



+

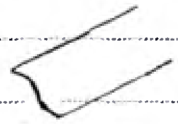


از رابطهٔ سوم تبدیل (I):

$$y=0 \longrightarrow \gamma_{xy} = \frac{-Pb^2}{8GI} = cte$$

$$\longrightarrow v\Big|_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2 x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pb^2}{8GI}(l-x)$$

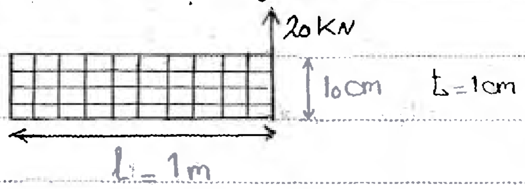
معادله (*) شرایط مرزی را ارضا نمی‌کند! به جز در نقطه K.



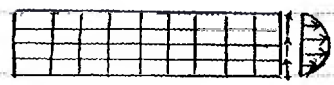
← صفحات عرضی دچار اعوجاج شده‌اند!

تمرین ۹: مسأله فوق را با Finite elements مقایسه کنید. 2_D plane stress و
3_D solid Element و Beam.

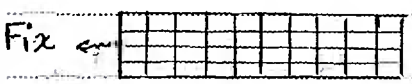
۱) جابجایی متمرکز.



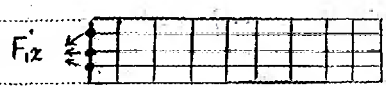
۲) جابجایی گسترده به صورت quadratic.

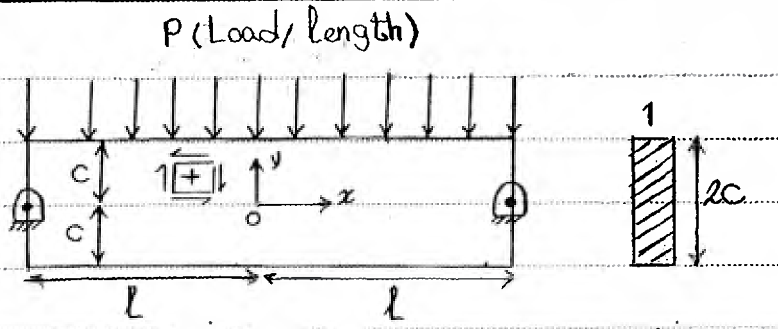


σ_x ، σ_y و τ_{xy} را بررسی کنید.



اگر به ill Condition برخوردیم،
در جا از گره‌های مجاور را در بعضی جاها
محدود می‌کنیم.





Airy stress Condition :

$@\ y = +c \ : \quad \sigma_y = -p \qquad \sigma_{xy} = 0 \qquad (\mathrm{I})$

$@\ y = -c \ : \quad \sigma_y = 0 \qquad \sigma_{xy} = 0 \qquad (\mathrm{II})$

$@\ x = \pm l \ : \quad \int_{-c}^{+c} \sigma_x \cdot 1 \cdot dy = 0 \qquad (\mathrm{III})$ در سطح خارجی :

به دلیل اینکه Bending ، σ_x ایجاد می‌کند، می‌توانیم انتگرال‌ها را بنویسیم، گرچه در انتهای $x = \pm l$

$\sigma_x = 0$ است. $\quad \int_{-c}^{+c} \sigma_x \cdot y \cdot 1 \cdot dy = 0 \qquad (\mathrm{IV})$

$@\ x = l \ : \quad \int_{-c}^{+c} \sigma_{xy}\, dy = pl \qquad (\mathrm{V})$

$@\ x = -l \ : \quad \int_{-c}^{+c} \sigma_{xy}\, dy = -pl \qquad (\mathrm{VI})$

$$\sigma_x(x, y) = \sigma_x(-x, y) \qquad (\mathrm{VII})$$

$\sigma_x = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \xrightarrow{\text{(III) از شرایط مرزی}} \varphi$ must be odd in terms of y

$$\varphi = (a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots) + y(b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \dots)$$
$$+ y^3 (c_0 + c_1 x^2 + c_2 x^4 + \dots) + \dots$$

Subject
Date

شرط $\nabla^4 \varphi = 0$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -(2b_1 x + 4b_2 x^3 + \dots) - 3y^2(2C_1 x + 4C_1 x^3 + \dots) + \dots$$

$$\sigma_{xy}\Big|_{@y=\pm C} = 0 \qquad x(2b_1 - 2C_1 * 3C^2) + x^3(4b_2 + 4C_2 * 3C^2) + \dots = 0$$
(for all x)

← باید ضرایب عبارت های فوق صفر شود.

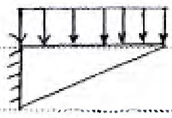
$$\longrightarrow b_1 = -3C^2 C_1$$

Timoshenko :

$$\varphi = \frac{P}{40C^3}\left[(5l^2 - 2C^2)y^3 + y^5 x^2(10C^3 + 15yC^2 - 5y^3)\right]$$

$\nabla^4 \varphi = 0$

تمرین ۱۰: چند مسأله حل شده با φ های مختلف بنویسید.



* اصل جمع آثار فقط در سیستم های خطی برقرار است.

برای یک مسأله می توان توابع φ مختلف داشت. تفاوت این توابع در Boundary می باشد، ولی در domain حل تقریباً یکی است.

Barber :

$$\varphi = \frac{P}{40C^3}\left[5x^2y^3 - y^5 - 15C^2x^2y - 5l^2y^3 + 2C^2y^3 - 10l^3x^2\right]$$

$\nabla^4 \varphi = 0$

PAPCO

Subject
Date

$$\sigma_x = \frac{-P(l^2 - x^2)}{2} \; \frac{y}{2\left(\frac{c^2}{3}\right)} - \frac{Py}{20c}\left(10\frac{y^2}{c^2} - 6\right)$$

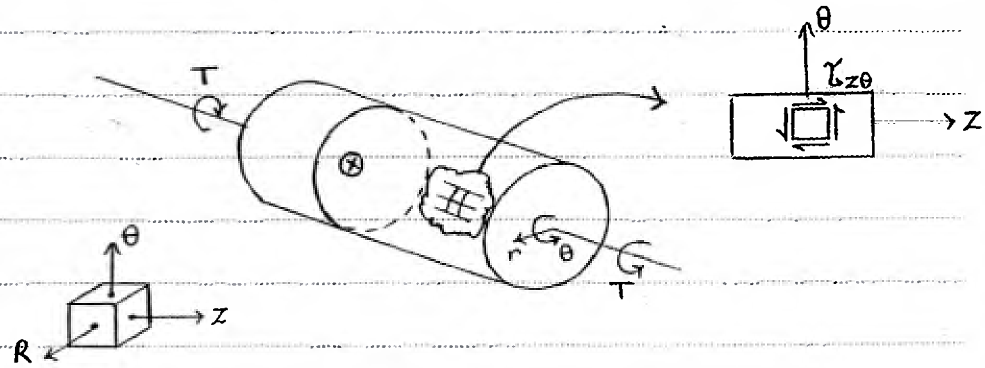
$$= \underbrace{\frac{-My}{I}}_{\text{simple beam theory}} - \frac{Py}{2c}\left(\frac{y^2}{c^2} - \frac{3}{5}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{-P}{2} - \frac{Py}{4c}\left(3 - \frac{y^2}{c^2}\right) \qquad \text{simple beam theory}: \; \sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{3Px}{4c}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \equiv \text{Beam theory}: \; \tau_{xy} = \frac{3V}{2A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \rightarrow$$

تمرین!!: در 2 بعدی polar معادلات بدست آمده را جستجو کرده و بیاورید و یک مسأله polar
بصورت Airy حل کنید.

کتاب Den Hartog : Torsion

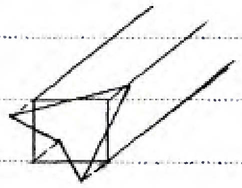


با هر سطح مقطعی : $\cancel{\sigma_r}^{\,0}, \; \cancel{\sigma_z}^{\,0}, \; \cancel{\sigma_\theta}^{\,0}, \; \cancel{\tau_{r\theta}}^{\,0}, \; \underset{\neq 0}{\tau_{z\theta}}, \; \cancel{\tau_{rz}}^{\,0}$

P4PCO

مقاطع دایره‌ای بعد از پیچش دایره‌ای باقی می‌مانند ← اعوجاج نداریم

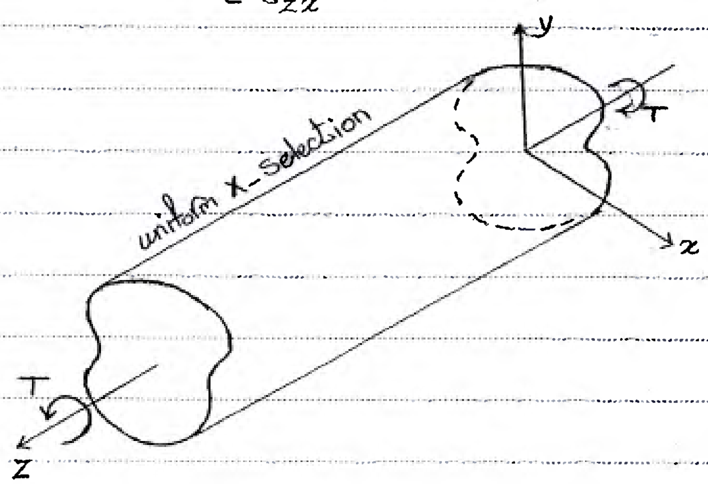
ولی در مقاطع غیر دایره‌ای اعوجاج خواهیم داشت.



$\varepsilon_z = 0$ است، در اینها یک Rigid Body Motion خواهیم داشت.

اعوجاج: warping

$$\tau_{z\theta} \xrightarrow{\text{در مختصات کارتزین}} \begin{cases} \tau_{zy} \\ \tau_{zx} \end{cases}$$ ؛ در اصل یک تنش برشی داریم



τ_{zx} , $\tau_{zy} = ✓$ $\quad \tau_{xy} = 0$

I. Prandtl method (stress Based)

II. st. venant method (Displacement Based)

III. Membrane Analogy method.

Subject
Date

I. Prandtl Method

Equilib. Eq'ns :
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad \tau_{xz} \neq f(z)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \qquad \tau_{yz} \neq f(z)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$$

پرانتل تابع φ را بصورت زیر پیشنهاد کرد :

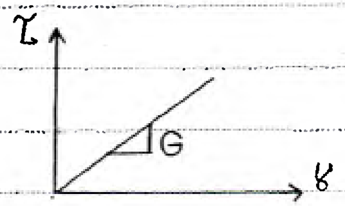
$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\tau_{zy} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = +\tau_{zx}} \longrightarrow \text{Equilib. Eq'ns} \checkmark$$

Compatibility : 1.21 ⟶ 1.26

← چهار معادله خود به خود ارضا می‌شوند ، فقط 1.24 و 1.25 باقی می‌ماند.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right) = 0 \qquad 1.24$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right) = 0 \qquad 1.25$$



P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)=0 \qquad \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\varphi=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)=0 \qquad \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\varphi=0$$

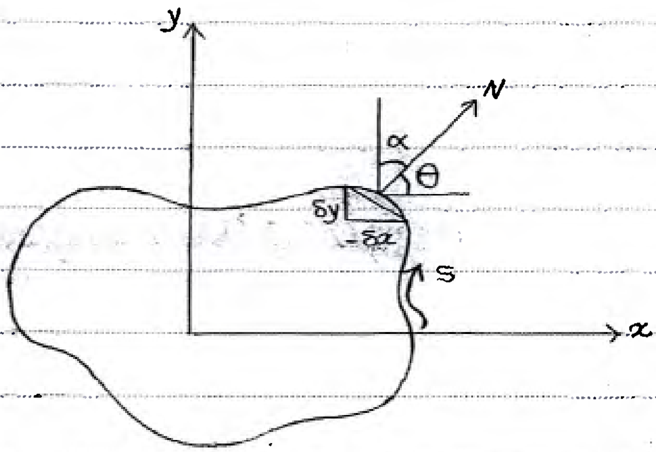
$\rightarrow$ $\nabla^2\varphi$ = cte @ any section

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=F$$

Boundary coditions:

φ : Prandtl function:

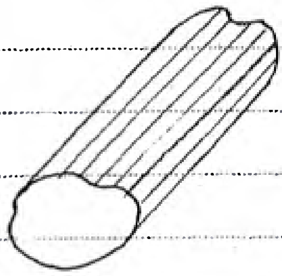
$$\bar{X} = \cancel{\sigma_x l} + \cancel{\tau_{yx} m} + \tau_{zx} n$$
$$\bar{Y} = \cancel{\sigma_y m} + \cancel{\tau_{yx} l} + \tau_{yz} n$$
$$\cancel{\bar{Z}} = \cancel{\sigma_z n} + \tau_{zy} m + \tau_{zx} l$$



PaPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

External surface:



$\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$

$n = 0$

$0 = 0 * l + 0 * m + \tau_{zx} * 0$ ✓

$0 = 0 * m + 0 * l + \tau_{yz} * 0$ ✓

$0 = 0 * n + \underset{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\tau_{zy}} m + \underset{-\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\tau_{zx}} l \longrightarrow \tau_{zy} m + \tau_{zx} l = 0$

$\cos(N \hat{,} x) = \cos\theta = l = \frac{dy}{ds}$

$\cos(N \hat{,} y) = \cos\alpha = \sin\theta = m = -\frac{dx}{ds}$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = 0 \qquad \frac{d\varphi}{ds} = 0 \longrightarrow \varphi = cte$ on the boundary

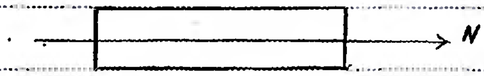
که بهترین معادله برای φ ، معادلهٔ خود Boundary (منحنی) است.

تمرین ۱۲: چرا بصورت traditional ، φ را روی Boundary برابر صفر می‌گیرند. اگر غیر صفر بگیریم چه اتفاقی می‌افتد؟

PAPCO

Subject
Date

Both Ends:



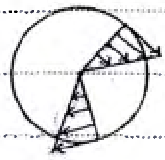
$l = m = 0 \quad , \quad n = 1 = \cos 0$

$$\bar{X} = 0 + 0 + \tau_{zx}$$
$$\bar{Y} = 0 + 0 + \tau_{yz}$$
$$\bar{Z} = 0 + 0 + 0$$

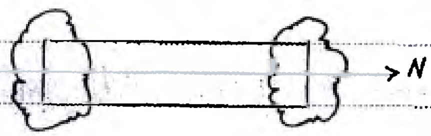
$\longrightarrow \bar{X} = \tau_{zx} \quad , \quad \bar{Y} = \tau_{yz} \quad , \quad \bar{Z} = 0$

توزیع surface force های $\bar{X}$, $\bar{Y}$ باید عیناً مشابه توزیع تنش های برشی τ_{zx} , τ_{yz} باشد.

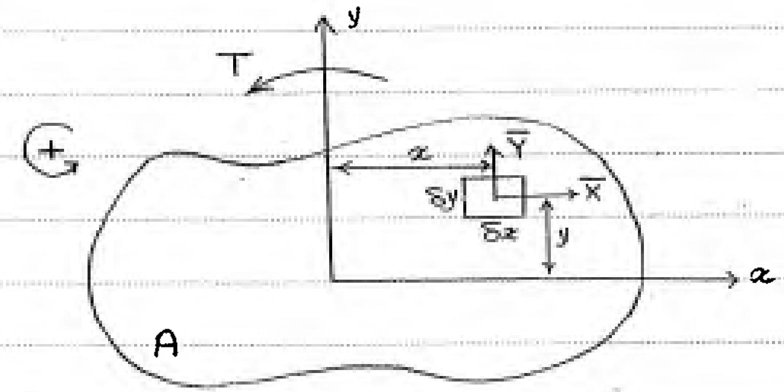
← اما ارضاء شرط فوق عملاً امکان پذیر نمی باشد.



پس در دو انتها جواب دقیق نخواهیم داشت.
(End Effect)



Subject
Date



$$S_x = \iint \bar{X}\,dx\,dy = \iint \tau_{xz}\,dx\,dy = \int dx \int \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy = \oint dx\,\varphi = 0$$

$$S_y = \iint \bar{Y}\,dx\,dy = \iint \tau_{yz}\,dx\,dy = \int dy \int -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx = \oint dy\,\varphi = 0$$

بار برشی نهایی صفر است و $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ ایجاد ممان می کنند.

تمرین ۱۳: چرا انتگرال دوگانه را بصورت یک انتگرال بسته نوشتیم؟

$$T = \iint (\tau_{zy}\,x - \tau_{zx}\,y)\,dx\,dy = -\iint \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,x\,dx\,dy - \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,y\,dx\,dy$$

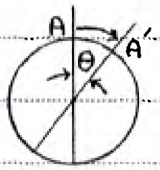
$$= 2\iint \varphi\,dx\,dy$$

تمرین ۱۴: حاصل انتگرال پیچش را $\left(2\iint \varphi\,dx\,dy\right)$ اثبات کنید.

برای حل دقیق φ باید تمامی شرایط مرزی را داشته باشیم.

PAPCO

Subject
Date



خطوط شعاعی، صاف باقی می‌مانند.

θ : twist angle

← اگر در ناحیه پلاستیک بودیم، failure از پیرامون بیرونی شروع می‌شود.

$\tau_{xz} , \tau_{yz} \neq 0$

$\varepsilon_x , \varepsilon_y , \varepsilon_z , \gamma_{xy} = 0$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}$$

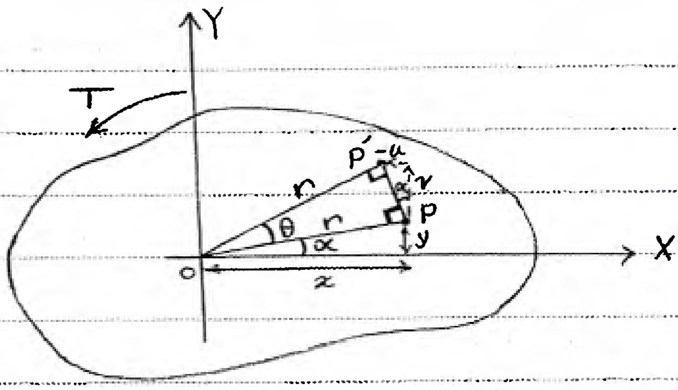
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

یعنی سطح دچار تغییرات نمی‌شود: (سطح تخت)

1) Rigid body Rotation
2) warping

Subject
Date



$$u = -r\theta \sin\alpha = -\theta y$$

$$v = r\theta \cos\alpha = \theta x$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

چون هر cross-section نسبت
یک Rigid body می‌چرخد، θ فقط
تابعی از z می‌باشد.

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{zx}}{G} + \frac{d\theta}{dz} y \quad \leftarrow \frac{\partial}{\partial y}$$

the rate of twist $= \frac{d\theta}{dz}$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{zy}}{G} - \frac{d\theta}{dz} x \quad \leftarrow \frac{\partial}{\partial x}$$

با مشتق گیری و کم کردن دو رابطه:

$$\longrightarrow 0 = \frac{1}{G}\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x}\right) + 2\frac{d\theta}{dz}$$

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad \tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\frac{d\theta}{dz} = cte = F$$

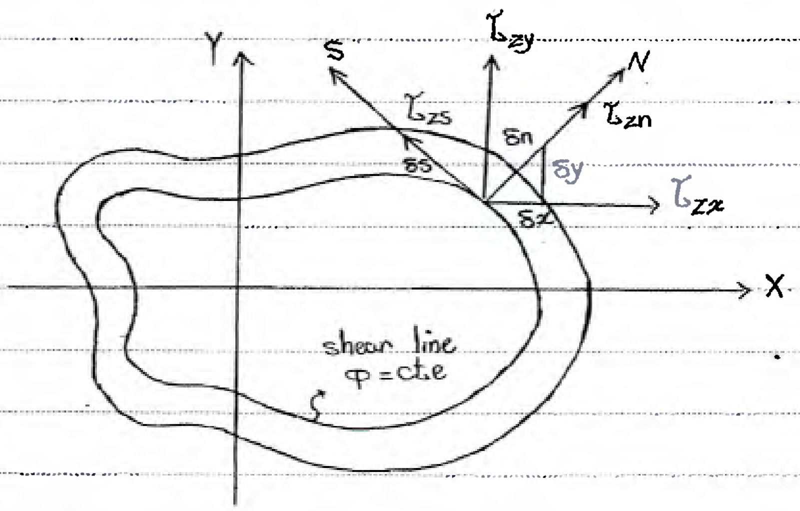
EI : flexural Rigidity

Mech. of Mat. : $T = GJ \frac{d\theta}{dz}$

GJ : Torsional Rigidity

$T = 2 \iint \varphi \, dx dy$

$GJ = \frac{T}{\frac{d\theta}{dz}} = \frac{T}{\frac{\nabla^2 \varphi}{-2G}} = \frac{-4G}{\nabla^2 \varphi} \iint \varphi \, dx dy$ J : polar second moment of area



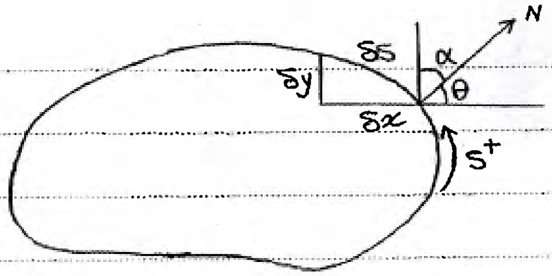
$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \qquad \varphi = cte$

τ_{zn} : normal shear stress

τ_{zs} : tangential shear stress

Subject

Date



$$\cos\alpha = m = -\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dn} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\tau_{zy}$$

$$\cos\theta = l = \frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dn} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \tau_{zx}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0 = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m = 0 \rightarrow$$ shear lines = خطوط φ ثابت

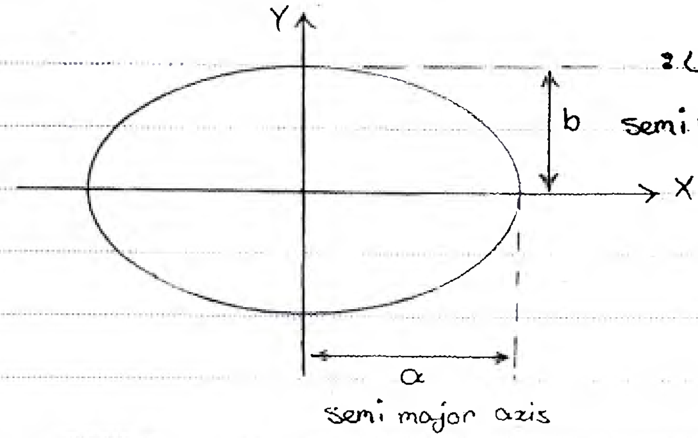
$$\tau_{zn} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m = 0$$

$$\tau_{zs} = \tau_{zy} l - \tau_{zx} m$$

$$\tau_{zs} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dn} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dn} = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

Subject
Date

مثال: یک cross section بیضوی:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ معادلهٔ منحنی

$$\varphi(x,y) = C\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

ضریبی که برای ایجاد ترتیب مسأله
اضافه شده (برای تأثیر E , G و ...)
(physical behavior)

we have: $-2G\dfrac{d\theta}{dz} = \nabla^2\varphi = F = cte$

$$2C\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) = -2G\frac{d\theta}{dz}$$

$$C = -G\frac{d\theta}{dz}\left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)$$

$$\varphi(x,y) = -G\frac{d\theta}{dz}\left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

$$T = 2\iint\varphi\,dx\,dy = -2G\frac{d\theta}{dz}\left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)\Big[\frac{1}{a^2}\underbrace{\iint x^2dx\,dy}_{I_{yy}}+\frac{1}{b^2}\underbrace{\iint y^2dx\,dy}_{I_{xx}}$$

$$-\underbrace{\iint dx\,dy}_{A}\Big]$$

Subject
Date

$$T = G \frac{d\theta}{dz} \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

we had : $T = GJ \frac{d\theta}{dz}$ $J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$

$$\begin{cases} \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{zy} = \frac{2T}{\pi a^3 b} x \\ \tau_{zx} = \frac{-2T}{\pi a b^3} y \end{cases}$$

توزیع خطی

$w(x, y) = ?$ warping

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{zx}}{G} + \frac{d\theta}{dz} y \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{zy}}{G} - \frac{d\theta}{dz} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{2Ty}{\pi a b^3 G} + \frac{T}{G} \frac{(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} y \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2Tx}{\pi a^3 b G} - \frac{T}{G} \frac{(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} x \end{cases}$$

Subject

Date

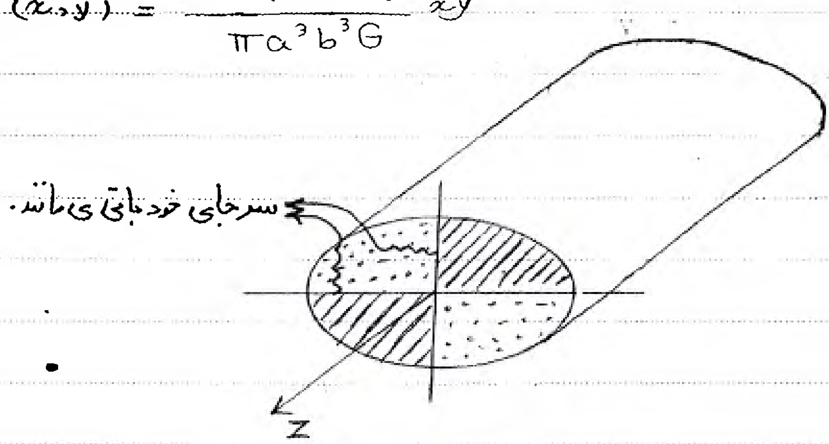
$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x} = \dfrac{T}{\pi a^3 b^3 G}(b^2 - a^2) y \\[2ex] \dfrac{\partial W}{\partial y} = \dfrac{T}{\pi a^3 b^3 G}(b^2 - a^2) x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega(x, y) = \dfrac{T(b^2 - a^2)}{\pi a^3 b^3 G} xy + f_1(y) \\[2ex] \omega(x, y) = \dfrac{T(b^2 - a^2)}{\pi a^3 b^3 G} xy + f_2(x) \end{cases}$$

از مساوی قرار دادن در رابطهٔ فوق :

$$f_1(y) = f_2(x) = 0$$

$$\omega(x, y) = \frac{T(b^2 - a^2)}{\pi a^3 b^3 G} xy$$



تمرین ۱۵ : مسئله فوق را حل کنید .

$a = 10\,cm$, $b = 3\,cm$, $l = 1\,m$, $G = 70\,GPa$, $T = 50\,kN.m$

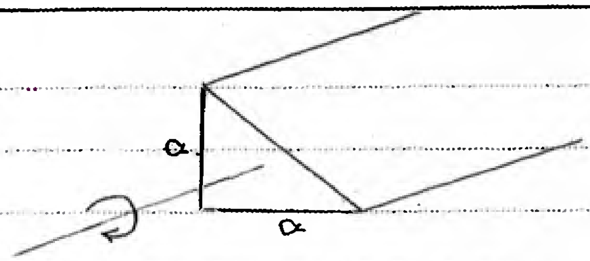
3D_Solid Boundary Condition منشم

تمرین ۱۶ : معادلهٔ φ برای دایره را بدست آورید.

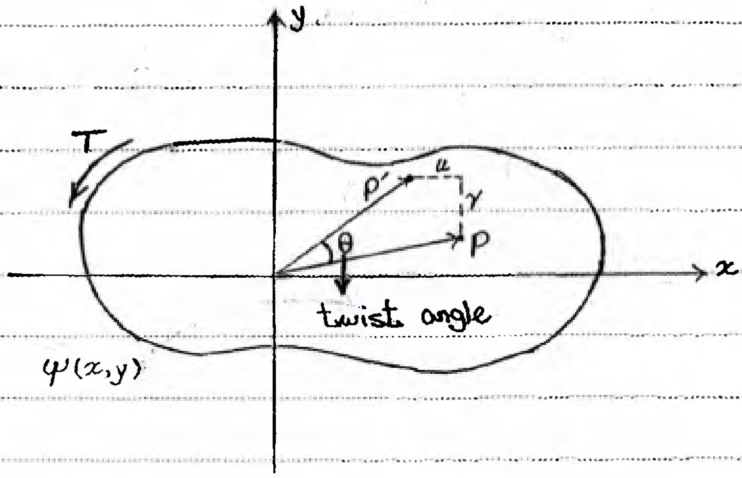
Subject

Date

تمرین ۱۷: حل مسأله زیر را بیابید.



II. St. Venant Method:



$u = -\theta y \quad , \quad v = \theta x$

$$w(x,y) = \frac{d\theta}{dz}\,\psi(x,y)$$

↳ St. Venant warping function

$\varepsilon_x , \varepsilon_y , \varepsilon_z , \gamma_{xy} = 0$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{d\theta}{dz}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{d\theta}{dz}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right)$$

Subject
Date

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{zx} = \theta \gamma_{zx} = G \frac{d\theta}{dz} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right)$$

$$\tau_{zy} = G \gamma_{zy} = G \frac{d\theta}{dz} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)$$

stress – strain

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{GJ} = cte$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \cancel{X} = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \cancel{Y} = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \cancel{Z} = 0$$

Equilib. Eq.'s

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi(x, y) = 0}$$

must

PAPCO

Subject
Date

B.C.'s $\quad n = 0 \leftarrow \cos 90 = 0$

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n$$
$$\bar{Y} = \sigma_y m + \tau_{yx} l + \tau_{yz} n$$
$$\bar{Z} = \sigma_z n + \tau_{zy} m + \tau_{zx} l$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) m + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right) l = 0}$$

برای ارضا شرایط مرزی:
exterior

$$T = \iint (\tau_{yz}\, x - \tau_{zx}\, y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{G\, d\theta}{dz} \iint \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) x - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right) y \right] dx\, dy$$

we had: $T = GJ \dfrac{d\theta}{dz}$

$$\boxed{J = \iint \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) x - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right) y \right] dx\, dy}$$

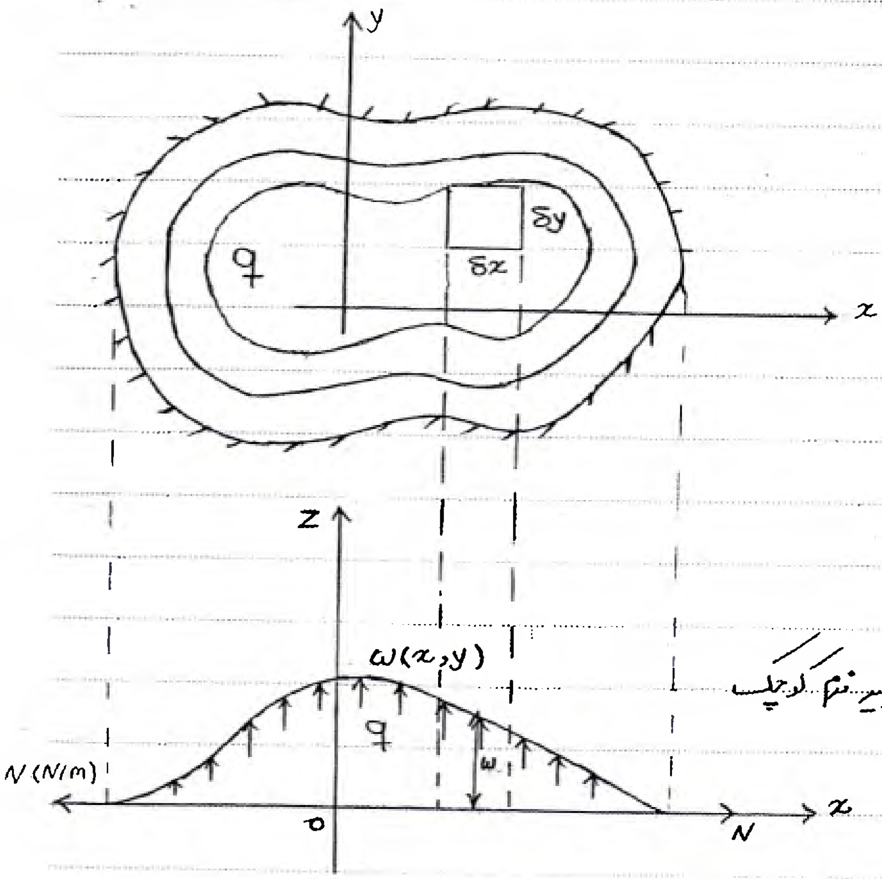
← تابع ψ با J (Second moments of area) باید رابطه داشته باشد.

تمرین ۱۸: یک مسئله حل شده بیاورید که ψ را بدهد طوری که J را بتوان بدست آورد، و شرایط مرزی و دیگر شرایط را ارضا کند.

PAPCO

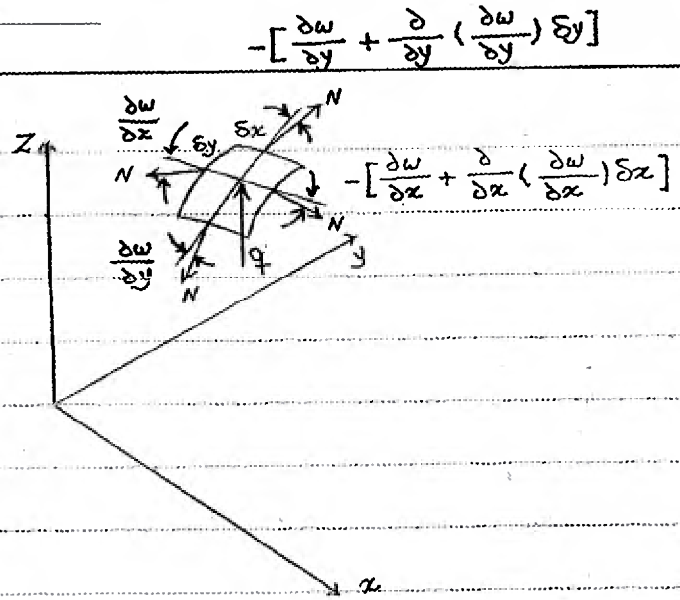
Subject
Date

III) Membrane Anology : (Prandtl)



تغییر شکل کوچک

Nonlinearity $\xrightarrow{\text{ناشی از}}$
- damage
- plasticity
- Contact
- Elasticity
- body deformation
- material properties
- , ...



زوایا تا حدی کوچک هستند که سینوس آنها با خودشان تقریباً برابر هستند

$\sum F_z = 0$

$$N\delta y \frac{\partial w}{\partial x} + N\delta y \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta x\right]$$

$$-N\delta x \frac{\partial w}{\partial y} + N\delta x \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\delta y\right] + q\,\delta x\,\delta y = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w(x,y) = -\frac{q}{N} = cte$$

$\nabla^2 w = cte$ $\qquad\qquad$ $\nabla^2 \varphi = cte$

$\varphi_{@\,boundary} = 0$ $\qquad\qquad$ $w_{@\,boundary} = 0$

$$w(x,y) \equiv \varphi(x,y)$$

اگر $\frac{q}{N} = F = 2G\frac{d\theta}{dz} \longrightarrow$ دو مسأله دقیقاً تبدیل به یک مسأله ای شوند.
(حتی ضرایب هم برابر خواهند بود.)

Subject
Date

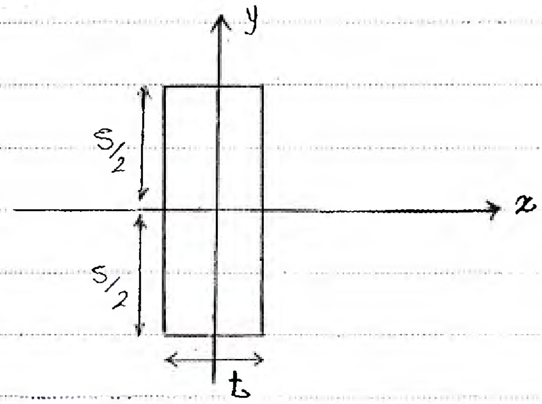
Isodisp lines $\equiv$ iso φ lines (shear lines)

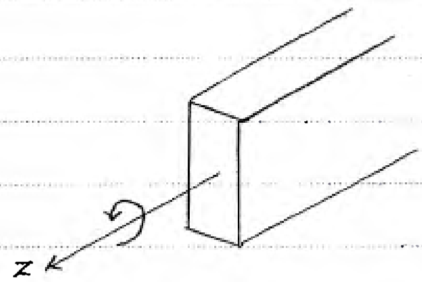
$$Vol = \iint_{Vol} w(x,y)\,dx\,dy$$

$$T = 2\iint \varphi\,dx\,dy$$

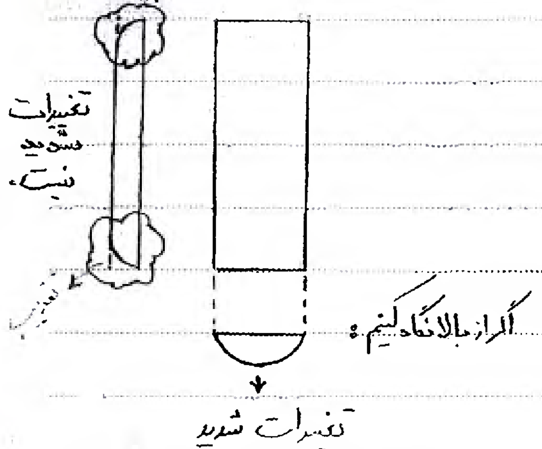
$$T = 2\,Vol$$

حل تقریبی است گاهی اوقات Boundary condition را ارضا نمی‌کند.





Narrow Rectangular strip



$$\varphi(x,y) \equiv w(x,y)$$

$$S \gg t$$

$$\nabla^2\varphi = cte = F = -2G\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}}}_{\text{صفر}} = -2G\frac{d\theta}{dt}$$

expect near the ends

زیرا: $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$

تقریباً در همه جا به جز در گوشه‌ها

Subject
Date

$$\varphi = -G\frac{d\theta}{dz}x^2 + Bx + C$$

B.C's : @ $x = \pm\frac{t}{2} \longrightarrow \varphi = 0$

اما در $y = \pm\frac{s}{2}$ ، $\varphi \neq 0$ ← تقریب مسأله

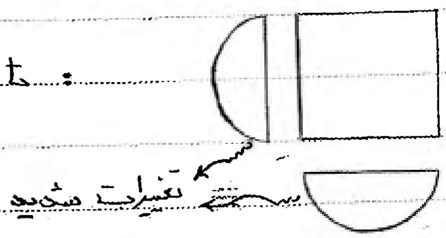
$$\varphi(x,y) = -G\frac{d\theta}{dz}\left[x^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2\right] \qquad \varphi\big|_{@\, y=\pm\frac{s}{2}} \neq 0 \,!$$

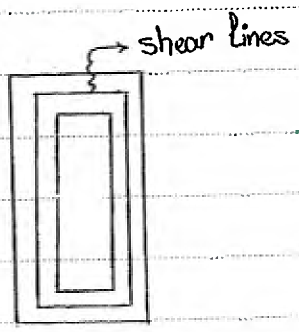
$$\tau_{zy} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2Gx\frac{d\theta}{dz}$$ → تابعی از y نیست ← یعنی در لبهٔ بالا و پایین هم تنش داریم که درست نیست!

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$ → در همه جای مسأله درست به جز نزدیکی Boundary

$$\hat{\tau}_{zy} = \pm Gt\frac{d\theta}{dz} \quad \text{on the edges}$$ ($\hat{\ } \rightarrow$ max)

if $s = t$:





PAPCO

Subject
Date

$$J = \frac{1}{G} \frac{-4G}{\nabla^2 \varphi} \iint \varphi \, dz\,dy$$

$$J = \frac{st^3}{3} \longrightarrow$$ به دلیلِ ناچیز فرض کردن ضخامت، خطا در J وجود دارد.

$$\left[\begin{array}{l} T = GJ \dfrac{d\theta}{dz} \\ \hat{\tau}_{zy} = \pm Gt \dfrac{d\theta}{dz} \end{array}\right. \longrightarrow \hat{\tau}_{zy} = \pm \frac{3T}{st^2}$$

we had : $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\overset{\text{صفر}}{\tau_{zx}}}{G} + \dfrac{d\theta}{dz} y$

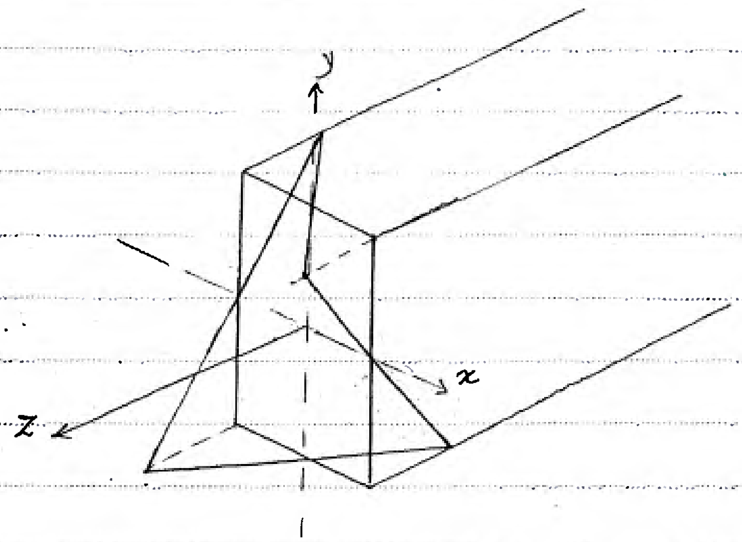
warping

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{d\theta}{dz} y$$

$$\longrightarrow w(x, y) = xy \frac{d\theta}{dz} + \overset{\text{صفر}}{\cancel{cte}}$$

چون سطح مقطع

از دو طرف متقارن است. پیچش در $x = y = 0$ ، $w = 0$ است.



PAPCO

تمرین ۱۹: با المان مجدد مسأله قبل را در نظر بگیرید.

$T = 10\ kN.m$ $\qquad$ $t = 1\ cm$

$\ell = 1\ m$ $\qquad$ $G = 70\ GPa$

$s = 10\ cm$

Energy Method in Structural Analysis:

"exact" and "approximated" problems.

"Determined" and "indeterminate" problems.

"Total Complementary Energy"

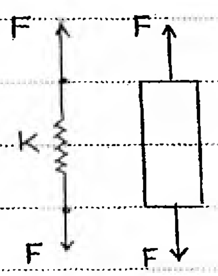
"Total potential Energy"

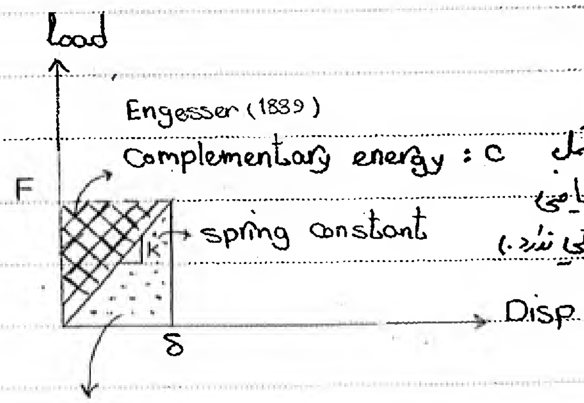
Virtual work, virtual displacement, Virtual force.

methods:

- unit load method
- principle of superposition (linear systems)
- reciprocal theorem · بت و بتی

global Behavior:



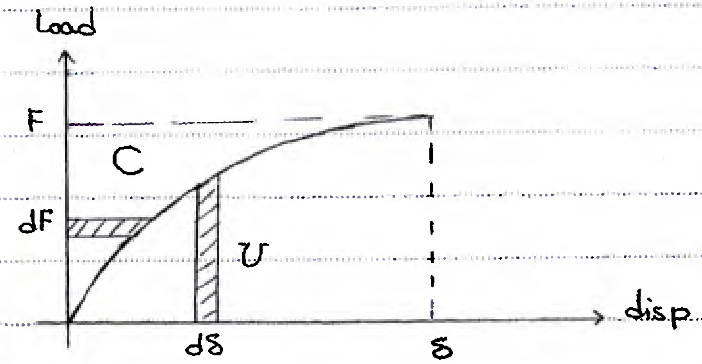


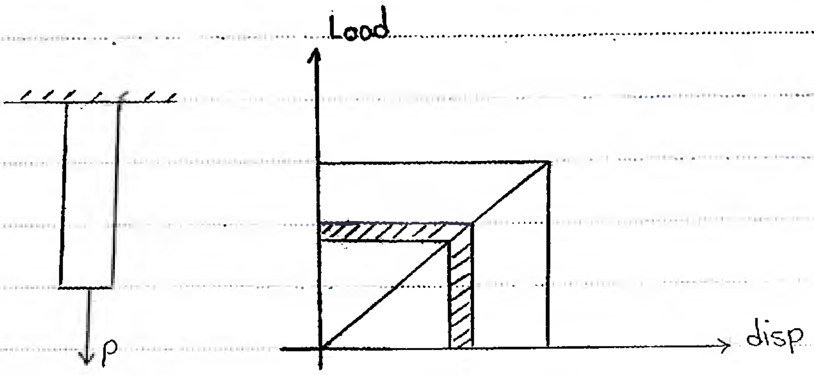
ی مکمل
دم ریاضی
مفیزیکی ندارد.

$U + C = F\delta$ $\qquad$ $\text{Energy} = U = \frac{1}{2} F\delta$

Subject
Date

در سیستم های خطی همیشه : $U = C$

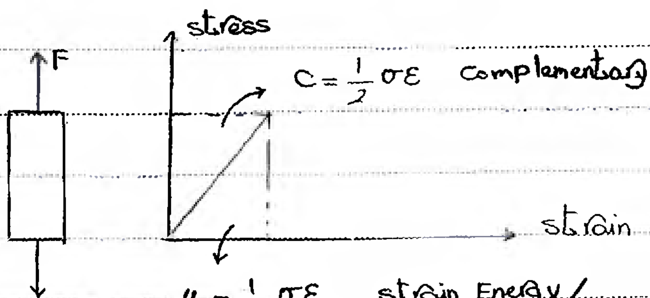




$U = \int p\,dy \rightarrow \frac{dU}{dy} = p$ $C = \int y\,dp \rightarrow \frac{dC}{dp} = y$

ما عملاً جابجایی را نمی دانیم . ← c کاربردی تر است .

Local Behavior :



$C = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ complementary strain energy / volume

$u = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ strain Energy / volume $u + C = \sigma\varepsilon$

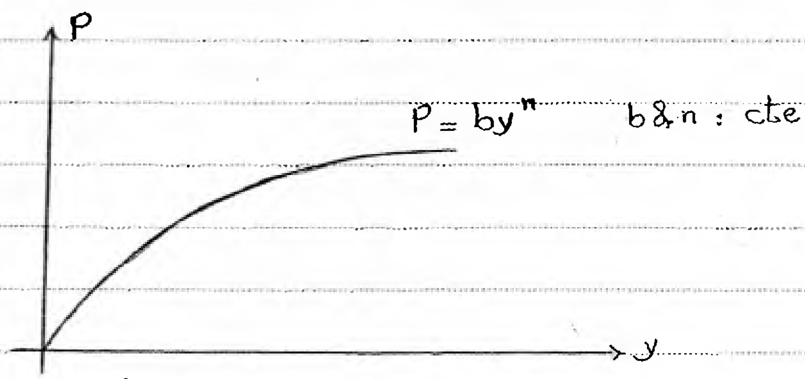
← تبادل کار و انرژی در هر نقطه از جسم ← با انتگرال گیری روی حجم، کار داده شده به جسم محاسبه می گردد.

$$C = c * \text{Volume}$$

$$U = u * \text{Volume}$$

* یکی از مشکلات روش انرژی این است که اگر جابجایی در نقطه ای را بخواهیم، باید لزوماً در آن نقطه مشتق بگیریم.

سیستم غیرخطی:



$$p = by^n : \qquad \frac{p}{b} = y^n \longrightarrow y = \left(\frac{p}{b}\right)^{1/n}$$

$$dp = nby^{n-1}dy \longrightarrow dy = \frac{dp}{nby^{n-1}}$$

$$U = \int p\,dy = \int p\,\frac{dp}{nby^{n-1}} = \frac{1}{n}\int \left(\frac{p}{b}\right)^{1/n} dp$$

$$C = \int y\,dp = \int y\,(nby^{n-1})\,dy = n\int by^n\,dy$$

$$\frac{dU}{dy} = P \qquad \frac{dV}{dP} = \frac{1}{n}\left(\frac{P}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}y$$

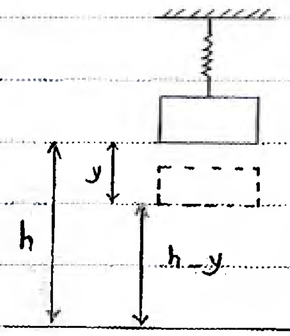
$$\frac{dC}{dP} = y \qquad \frac{dC}{dy} = bny^{n} = nP$$

سیستم خطی : $n = 1$: $\begin{cases} \dfrac{du}{dy} = \dfrac{dC}{dy} = P \\ \dfrac{dU}{dP} = \dfrac{dC}{dP} = y \end{cases}$ "قضیهٔ اول کاستیلیانو"

Total Potential Energy :

int : U = energy

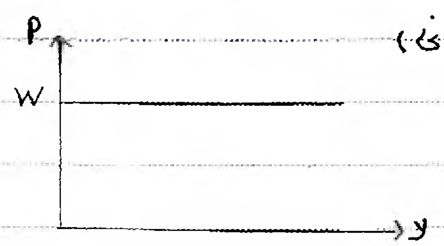
ext : V = total energy



I) تراز اول انرژی $Mgh = V$: Potential Energy : فنر در نقطهٔ خنثی

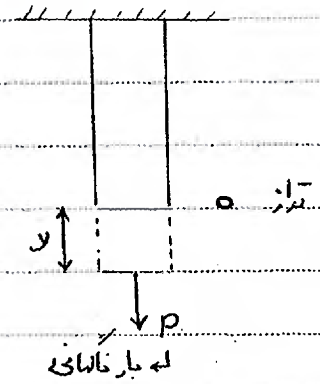
II) پتانسیل در نقطهٔ حاضر $V = Mgh - Mgy = Mg(h-y)$: بعد از آزاد کردن جسم

تراز دوم انرژی



به محض آزاد کردن جسم ، بار وارد می شود : (بار ناگهانی)

Subject
Date



$V = 0 - Py = -Py$

چون ما کار را هزینه کرده‌ایم

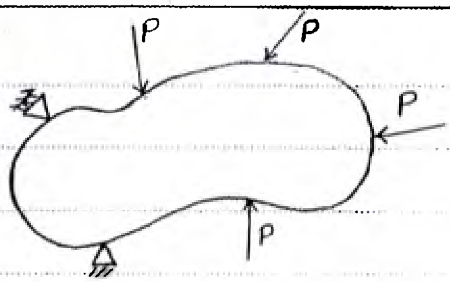
Total Potential Energy : $T.P.E = U + V$

$$= \underbrace{\int_0^y P\,dy}_{\substack{\text{internal Behavior} \\ \text{تابع ثابت ماده}}} - \underbrace{P.y}_{\text{external Load}}$$

T.P.E برابر صفر است. (همواره)

در $\int_0^y P\,dy$ ، نمی‌توان P را از انتگرال بیرون آورد. چرا که این انتگرال وابسته به رفتار ماده است. اما نهایتاً حاصل انتگرال برابر Py خواهد شد.

چون P بصورت ناگهانی وارد شده است، بجای $\frac{1}{2}Py$ (درصورتی که P بصورت تدریجی وارد می‌شد (خطی)) عبارت Py حاصل شده است.



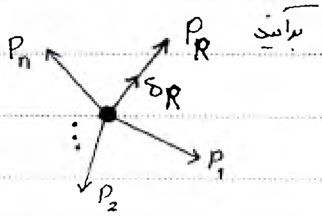
* برای هر بار، جابجایی در راستای خودش را باید ضرب کنیم.

$$V = \sum_{r=0}^{n} V_r = \sum_{r=1}^{n} (-P_r \cdot \Delta_r)$$

$$T.P.E = U + V = U + \sum_{r=1}^{n} (-P_r \Delta_r)$$

Principle of virtual work:

اگر جسم تحت دوران نباشد (بارها امتدادشان از یک نقطه رد شود)، می‌توانیم کل جسم را بصورت یک نقطه در نظر بگیریم.



$P_R = 0$ static Equilib.

δ_R = Virtual displacement

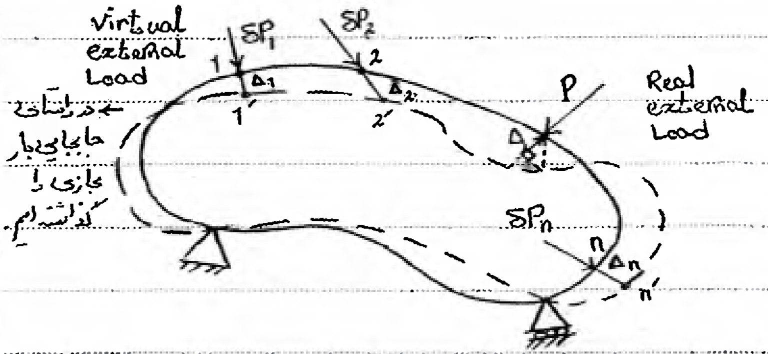
مؤلفه‌های جابجایی مجازی δ_R در راستاهای مختلف : $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$

$$P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + \ldots + P_n\delta_n = P_R\delta_R = 0$$

$$\sum_{r=1}^{n} P_r\,\delta_r = 0$$ principle of virtual work (displacement)

Subject
Date

← اگر $\sum P_r \delta_n$ برابر صفر باشد، سیستم در تعادل استاتیکی خواهد بود.



$\Delta_1 , \Delta_2 , \dots , \Delta_n$: Real displacement

Virtual work : $\Delta_1 \delta P_1 + \Delta_2 \delta P_2 + \dots + \Delta_n \delta P_n = \sum_{r=1}^{n} \Delta_r \delta P_r = 0$

$$\boxed{\sum_{r=1}^{n} \Delta_r \delta P_r = 0}$$ principle of virtual work (Load)

$W = P\Delta + \delta W \qquad \delta W = 0$

Principle of the stationary value of the T.P.E.

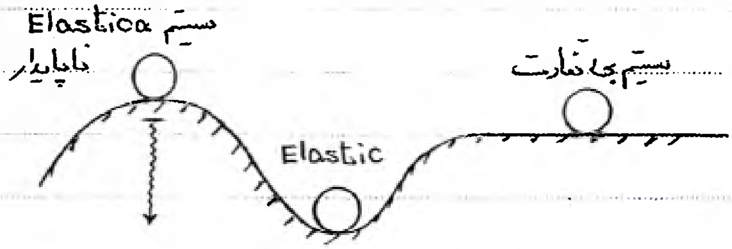
Real loads : $P_1 , P_2 , \dots , P_n$, Real disp : $\Delta_1 , \Delta_2 , \dots , \Delta_n$

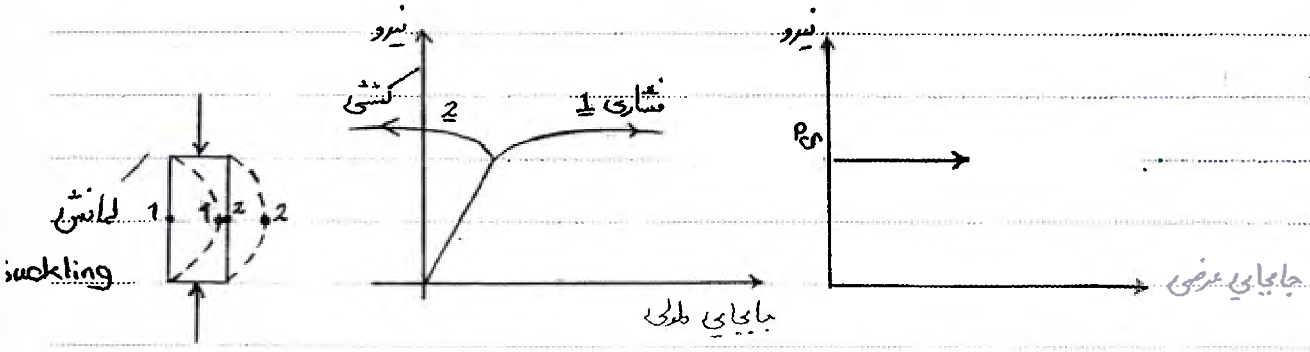
Virtual diplacements : $\delta\Delta_1 , \delta\Delta_2 , \dots , \delta\Delta_n$

Virtual work : $\sum_{r=1}^{n} P_r \delta\Delta_n$ cause $\delta U \rightarrow$ مجازی

$$T.P.E = -\delta U + \sum_{r=1}^{n} P_r \delta\Delta_n = -\delta U + \sum_{r=1}^{n} \delta(P_n \Delta_n) = -\delta U + \delta \underbrace{\sum_{r=1}^{n} P_n \Delta_n}_{-V}$$

$\rightarrow$ $T.P.E = \delta(U + V) = 0$ $\quad\quad\quad$ $\delta(T.P.E) = 0$





Real loads: $P_1, P_2, \ldots, P_n$ $\quad$ Real displacement: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$

Virtual loads: $\delta P_1, \delta P_2, \ldots, \delta P_n$

$$-\delta\int y\,dp + \sum_{r=1}^{n} \Delta_r\,\delta P_r = 0$$

int $\searrow$ $\quad$ $\swarrow$ ext

imaginery

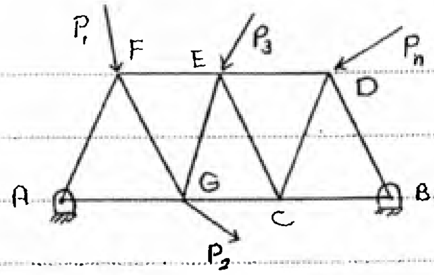
$\rightarrow$ $\delta(C_i + C_e) = 0$ $\quad\quad\quad$ $\delta(T.C.P.E) = 0$

total complementary potential energy

۱۵

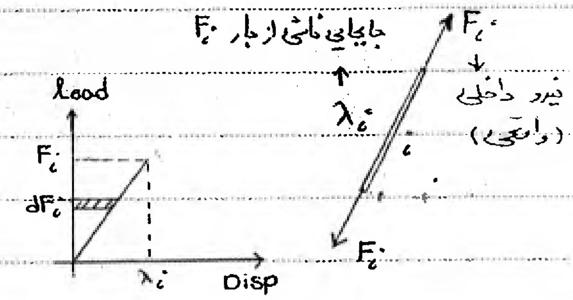
مثال : Truss

با هر شرایط دلخواه



Δ_1 : جابجایی در راستای P_1 ، Δ_2 : جابجایی در راستای P_2 ، ...

$$T.C.P.E = \underline{\underline{C}} = C_i + C_e$$



در Two force member ها ، نیرو فقط در راستای طولی است.
چنین میله‌هایی نمی‌توانند مختلف باشند (چون داریم تکه تکه بررسی می‌کنیم.)

$$T.C.P.E = C = C_i + C_e = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \int_0^{F_i} \lambda_i \, dF_i}_{C_i} - \underbrace{\sum_{r=1}^{n} \Delta_r P_r}_{C_e}$$

مثلاً برای نقطهٔ G :

$$\frac{\partial C}{\partial P_2} = 0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial P_2} - \Delta_2 = 0$$

internal force

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial P_2}$$

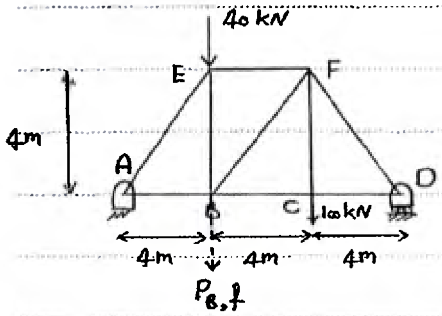
* برای محاسبهٔ جابجایی نقطهٔ C در یک راستا ، یک بار مجازی در آن راستا روی C در نظر می‌گیریم.
اگر $\Delta_2 > 0$ ، جهت جابجایی و بار یکی است ، و اگر $\Delta < 0$ جهت بار و جابجایی خلاف هم است.

Subject
Date

linear system : $\lambda_i = \dfrac{F_i L_i}{E_i A_i}$

nonlinear system : $F_i = b(\lambda_i)^c$

$$\longrightarrow \Delta_2 = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{F_i}{b}\right)^{1/c} \frac{\partial F_i}{\partial P_2}$$



مثال : $E = 200{,}000\ N/mm^2$ Linear Elastic

$A = 1800\ mm^2$

$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$

جابجائی عمودی نقطه B :

real internal load due to real external load

int. imaginery Load due to ext. imaginery Load

$$\Delta = \sum_{i=1}^{k} \frac{F_i L_i}{A_i E_i} \frac{\partial F_i}{\partial P_{,f}}$$

ext. imaginery Load

$$\Delta = \frac{1}{AE} \sum F_i L_i \frac{\partial F_{i,f}}{\partial P_{B,f}}$$

member	L(mm)	F_i(N)	$F_{i,f}$	$\dfrac{\partial F_{i,f}}{\partial P_{B,f}}$	$FL\dfrac{\partial F_{i,f}}{\partial P_{B,f}} \times 10$
AE	$4000\sqrt{2}$	$-60000\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}\,\dfrac{P_{B,f}}{3}$	$-2\sqrt{2}/3$	$320\sqrt{2}$
EF	4000	-60000	$-2\,\dfrac{P_{B,f}}{3}$	$-2/3$	160
FD	$4000\sqrt{2}$	$-80000\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}\,\dfrac{P_{B,f}}{3}$	$-\sqrt{2}/3$	$640\sqrt{2}/3$
DC	4000	80000	$\dfrac{P_{B,f}}{3}$	$1/3$	$320/3$

Subject

Date

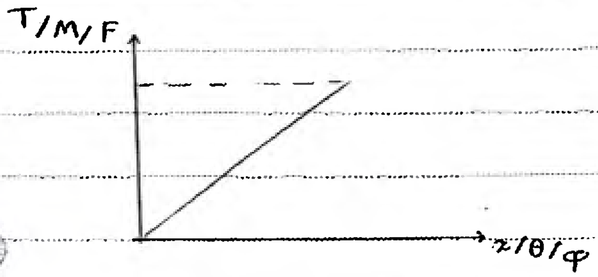
CB	4000	80000	$\frac{P_{B,t}}{3}$	$1/3$	$320/3$
BA	4000	60000	$2\frac{P_{B,t}}{3}$	$2/3$	$480/3$
EB	4000	20000	$2\frac{P_{B,t}}{3}$	$2/3$	$160/3$
FB	$4000\sqrt{2}$	$-20000\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\frac{P_{B,t}}{3}$	$\sqrt{2}/3$	$-160\sqrt{2}/3$
FC	4000	100000	0	0	0

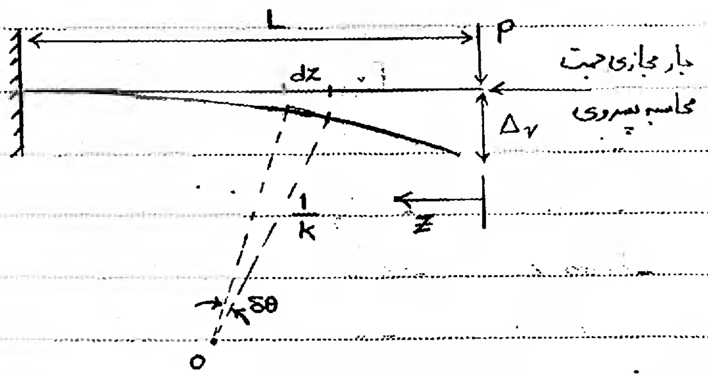
$\sum = 1268$

$\longrightarrow \Delta_B = \frac{1}{AE}\sum = 3.52\ mm > 0 \longrightarrow$ جابجایی در راستای بار فرض شده است.

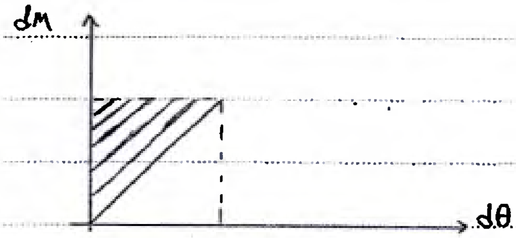
می‌توانیم بجای $P_{B,t}$ ، unite load وارد کنیم که در این صورت ستون چهارم جدول حذف می‌شود.

$$\Delta = \frac{1}{AE}\sum F_i\, L_i\, F_{i,1}$$





Subject
Date

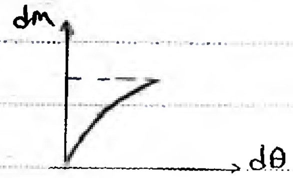


$$\underbrace{\underbrace{\int_l \int_\theta d\theta \, dM}_{\text{برای المان } dz}}_{\text{برای کل تیر}}$$

$$T.C.P.E = \int_l \int_0^M d\theta \, dM - P\Delta_r$$

$$\frac{\partial (T.C.P.E)}{\partial P} = 0 = \int_l d\theta \frac{dM}{dP} - \Delta_r$$

$$\Delta_r = \int_l d\theta \frac{dM}{dP}$$ linear or nonLinear



from fig: $\delta\theta = k\,dz$ (Linear)

from Beam Theory (Linear): $\frac{1}{k} = \frac{EI}{M} \longrightarrow d\theta = \frac{M}{\underbrace{EI}_{\text{Flexural Rigidity}}} dz$

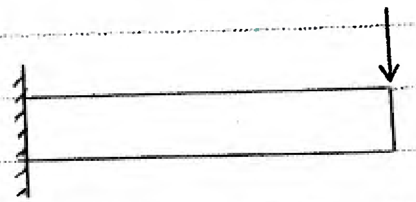
Subject

Date

$$M(z) = Pz \qquad \frac{dM}{dP} = z$$

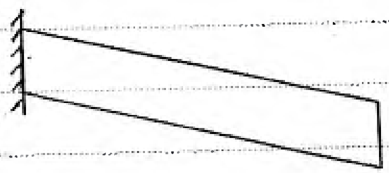
$$\Delta_v = \int_0^l \frac{M}{EI}\,dz * z = \int_0^l \frac{Pz^2}{EI}\,dz = \frac{Pl^3}{3EI}$$

ایراد روش: point wise



=

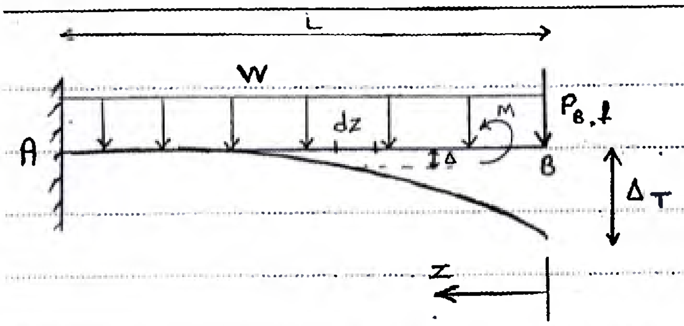
+



در مثال قبل، چون تیر را بلند فرض کردیم، از انرژی ناشی از برش در مقابل انرژی خمش صرف‌نظر کردیم.

تمرین 20: کامپلیمنتاری انرژی ناشی از برش برای یک تیر کوتاه را حساب کنید.

Subject
Date



$$T.C.P.E = \int_l \int_0^M d\theta\, dM - \Delta_T P_{B,f} - \int_0^l \Delta_* w\, dz$$

$$\frac{\partial (T.C.P.E)}{\partial P_{B,f}} = \int_0^l d\theta \frac{dM}{dP_{B,f}} - \Delta_T = 0$$

as before:

$$d\theta = \frac{M}{EI} dz$$

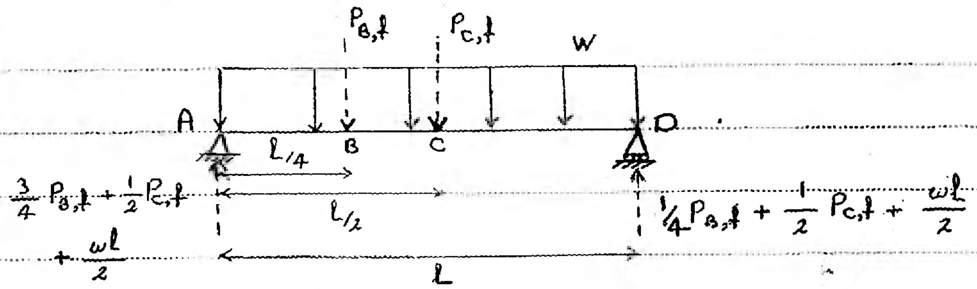
$$M(z) = P_{B,f}\, z + \frac{wz^2}{2} \qquad \frac{\partial M}{\partial P_{B,f}} = z$$

$$\Delta_T = \int_0^L d\theta \overbrace{\frac{dM}{dP_{B,f}}}^{z}$$

$$\Delta_T = \int_0^l \frac{wz^3}{2EI} dz = \frac{wl^4}{8EI}$$

Subject
Date

مثال : تير الاستيك



$$T.C.P.E = \int_L \int_0^M d\theta\, dM - P_{B,f}\,\Delta_B - P_{c,f}\,\Delta_C - \int \Delta * W\, dz \qquad (i)$$

$$\frac{\partial(T.C.P.E)}{\partial P_{B,f}} = \int_L d\theta \frac{dM}{dP_{B,f}} - \Delta_B = 0 \qquad (ii)$$

$$\frac{\partial(T.C.P.E)}{\partial P_{c,f}} = \int_L d\theta \frac{dM}{dP_{c,f}} - \Delta_C = 0 \qquad (iii)$$

$$\Delta_B = \frac{1}{EI}\int M \frac{\partial M}{\partial P_{B,f}} \cdot dz$$

$$\Delta_C = \frac{1}{EI}\int M \frac{\partial M}{\partial P_{c,f}} \cdot dz$$

from A to B : $M(z) = \left(\frac{3}{4}P_{B,f} + \frac{1}{2}P_{c,f} + \frac{wL}{2}\right)z - \frac{wz^2}{2}$

$$\frac{\partial M}{\partial P_{B,f}} = \frac{3}{4}z \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial P_{c,f}} = \frac{1}{2}z \qquad 0 < z < l/4$$

from B to C : $M(z) = \left(\frac{3}{4}P_{B,f} + \frac{1}{2}P_{c,f} + \frac{wL}{2}\right)z - \frac{wz^2}{2} - P_{B,f}(z - l/4)$

$$\frac{\partial M}{\partial P_{B,f}} = \frac{1}{4}(l - z) \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial P_{c,f}} = \frac{1}{2}z \qquad l/4 < z < l/2$$

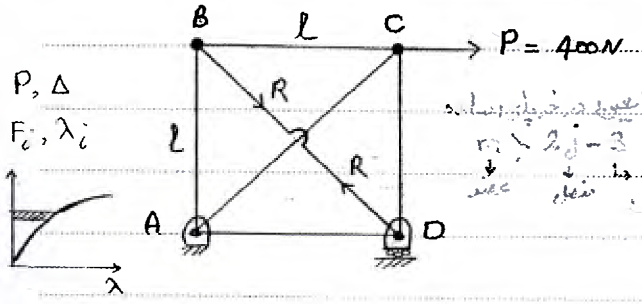
PaPCO

Subject
Date

from C to D : $M(z) = \left(\frac{1}{4}P_{B,f} + \frac{1}{2}P_{C,f} + \frac{wL}{2}\right)(L-z) - \frac{w(L-z)^2}{2}$

$$\frac{\partial M}{\partial P_{B,f}} = \frac{1}{4}(L-z) \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial P_{C,f}} = \frac{1}{2}(L-z) \qquad L/2 < z < L$$

$$\Delta_B = \frac{119\, w L^4}{24576\, EI} \qquad \Delta_C = \frac{5 w L^4}{384\, EI}$$



سیستم‌های نامعین :

می‌توانیم بی‌نهایت مقدار برای R در نظر بگیریم و مسأله را حل کنیم. ولی فقط در یک حالت در مینیمم پتانسیل انرژی هستیم. (پس بی‌نهایت جواب داریم که فقط یکی درست است.)

سیستم نامعین در خارج ساده

$m > 2j - 3$

عضو — مفصل — نیروی ها تکیه گاهی

Single Redundant System. (Discontinous)

تعداد تکیه‌ها

$$T.C.P.E = \sum_{i=1}^{K} \int_0^{F_i} \lambda_i \, dF_i - P\Delta$$

R در واقع نیروی داخلی است و نقطه نیز داخلی است.

آنچه باید عضوها نیروهای خارجی نقطه فرض کنیم.

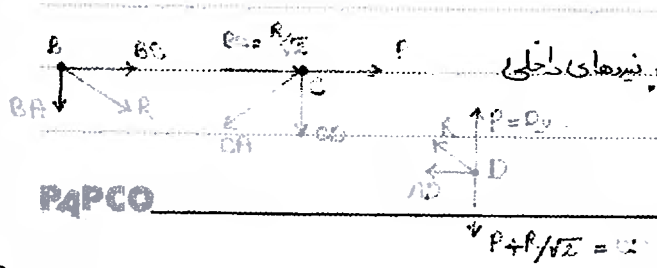
(در واقع R ناشی از اعمال P است)

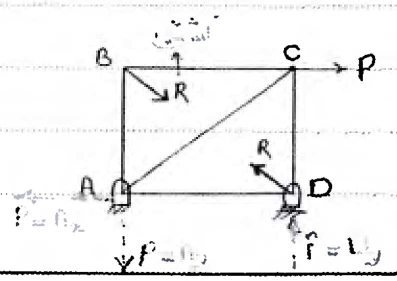
$$\frac{\partial (T.C.P.E)}{\partial R} = 0 = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial R} = 0$$

for Linear systems : $\lambda_i = \frac{F_i L_i}{E_i A_i}$ $\quad E, A = cte$

$$\frac{1}{AE} \sum_{i=1}^{K} F_i L_i \frac{\partial F_i}{\partial R} = 0$$

برای محاسبهٔ نیروهای داخلی :





Subject
Date

$$\sum_{i=1}^{k} F_i \cdot l_i \frac{\partial F_i}{\partial R} = 0$$

member	Length	F_i	$\frac{\partial F_i}{\partial R}$	$F_i l_i \frac{\partial F_i}{\partial R}$
AB	L	$-R/\sqrt{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$RL/2$
BC	L	$-R/\sqrt{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$RL/2$
CD	L	$-(P+R/\sqrt{2})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$l(P+\frac{R}{\sqrt{2}})\sqrt{2}$
DA	L	$-R/\sqrt{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$RL/2$
AC	$\sqrt{2}L$	$\sqrt{2}P+R$	1	$l(2P+\sqrt{2}R)$
BD	$\sqrt{2}L$	R	1	$\sqrt{2}RL$

$$\sum_{i=1}^{k} = 4.83RL + 2.707PL = 0$$

$$R = -0.56P$$

نیروی خارجی ما   له نیروی داخلی

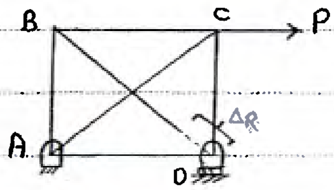
جهت محاسبه جابجایی در مفصلی که بار روی آن نیست (مثلاً B)، یک بار مجازی روی آن در جهت مورد نیاز (مثلاً افقی) می‌گذاریم و نیروهای داخلی (و در نتیجه R را) برای این بار مجازی بدست می‌آوریم و از آنجا $\frac{\partial F_i}{\partial P_{f}}$ را حساب می‌کنیم. (بارهای خارجی را در نظر نمی‌گیریم.) با داشتن نیروهای داخلی F_i از جدول فوق و همچنین $\frac{\partial F_i}{\partial P_{f}}$ به روش گفته شده، با قرار دادن مقادیر در فرمول، جابجایی را حساب می‌کنیم.

Lack of fit:

مثلاً یک قطعه کوچکتر و یا بزرگتر از حد مناسبش برده است و به زور آن را سرجای خود جای زدیم و یا در اثر تغییر دما، انبساط یا انقباض در یک عضو به وجود آمده است.

Subject
Date

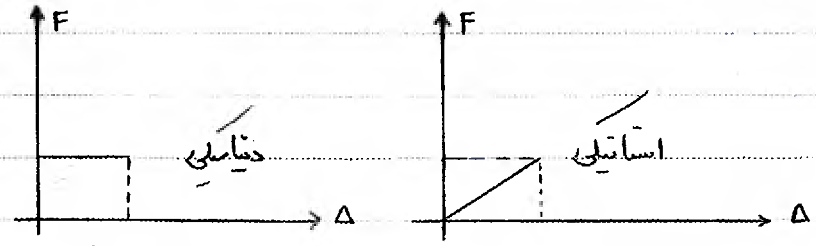
مثال:



BD is short

$$C = \sum_{i=1}^{k} \int_{0}^{F_i} \lambda_i \, dF_i - P\Delta - R\Delta_R$$

$$\frac{\partial C}{\partial R} = 0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial R} - \Delta_R = 0$$



$$W_{SL} = \frac{1}{2} \sigma_d \varepsilon$$

$$\sigma_d = 2\sigma_S$$

$$\Delta_R = \frac{1}{AE} \sum F_i l_i \frac{\partial F_i}{\partial R}$$

تمرین ۲۱: با درست کردن جدول، اثبات کنید برای این حالت: $R = -0.56P + \frac{AE}{4.83l} \Delta_R$

تمرین ۲۲: برای حالتی که BD به اندازه Δ_R بزرگ باشد، مقدار R را بدست آورید.

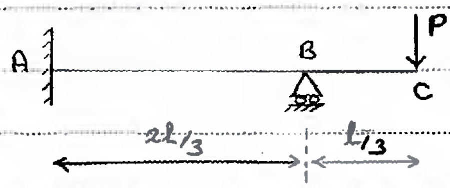
Subject

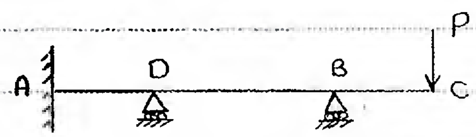
Date

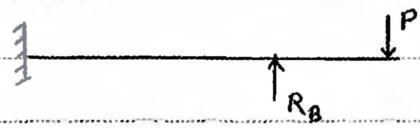
$R_1 , R_2 , \ldots$ اگر تعداد نامعینی زیاد باشد

$$\frac{\partial (T.C.P.E)}{\partial R_j} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial R_j} = 0$$

$\vdots$







$\Delta_B = 0$

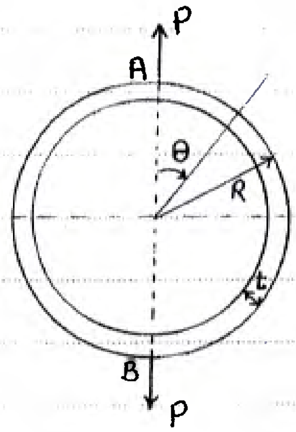
$$T.C.P.E = \int_{Length} \int_0^M d\theta\, dM - P\Delta_C - R_B \Delta_B$$

$$\frac{\partial (T.C.P.E)}{\partial R_B} = \int d\theta \frac{dM}{dR_B} - \overset{\text{صفر}}{\cancel{\Delta_B}} = 0 \quad \text{knowing } \Delta_B = 0$$

$$\frac{\partial (T.C.P.E)}{\partial R_D}$$ اگر در D هم نامعینی بود.

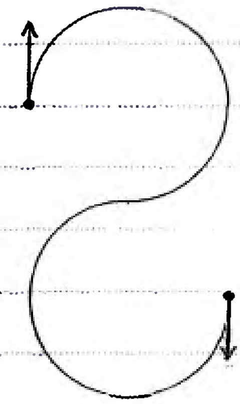
$\vdots$ اگر نامعینی بیشتر بود.

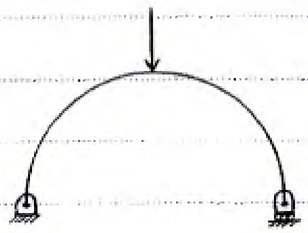
Brace structure :

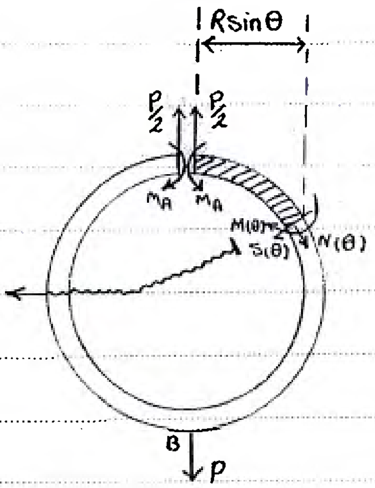


$R \gg t$

شعاع بزرگ
ضخامت کم







اگر در این مقطع برش بزنیم، M و N و S خواهیم داشت
ولی اگر شعاع بزرگ و ضخامت کم باشد، می‌توان
از S و N در برابر M صرف نظر کرد.

چون شکل متقارن است و بار بصورت
افقی نداریم:

at A :

$M_A = ✓$

Normal force $N_A = 0$

shear force $S_A = 0$

Subject
Date

$$T.C.P.E = \int_{ring} \int_0^M d\theta \, dM - P\Delta$$

$M_A \longrightarrow$ Redundant

$$\frac{\partial (T.C.P.E)}{\partial M_A} = 0 = \int_{ring} d\theta \frac{\partial M}{\partial M_A} = 0$$

Mechanics of material : $R d\theta = ds \longrightarrow d\theta = \frac{ds}{R} = \frac{M}{EI} ds$

$$2 \int_0^{\pi R} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_A} ds = 0$$

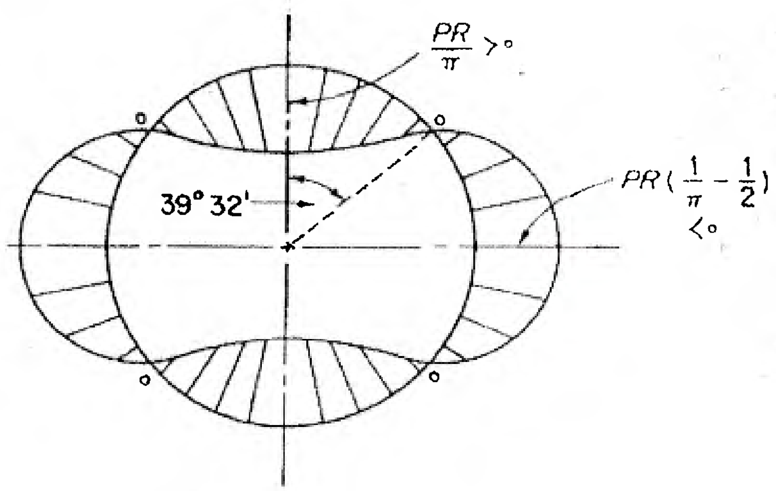
معادله تعادل : $M(\theta) = M_A - \frac{P}{2} R\sin\theta$, $\frac{\partial M}{\partial M_A} = 1$, $ds = R d\theta$

$$\int_0^{\pi} (M_A - \frac{P}{2} R\sin\theta) R d\theta = 0$$

$$(M_A \theta + \frac{P}{2} R\cos\theta) \Big|_0^{\pi} = 0 \longrightarrow M_A = \frac{PR}{\pi}$$

$$\longrightarrow M(\theta) = \frac{PR}{\pi} - \frac{P}{2} R\sin\theta$$

توزیع لنگر خمشی :

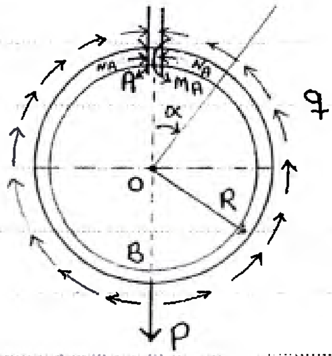


PAPCO

Subject

Date

مثال:



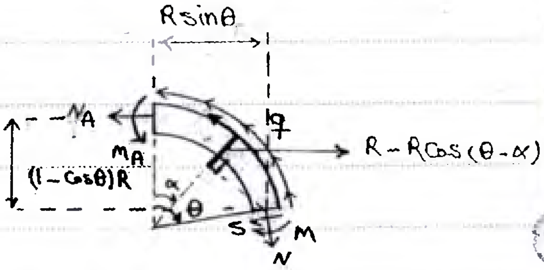
$$q = \frac{P}{\pi R}\sin\alpha$$

در مسائلی که تکیه‌گاه نداریم و دو نیروی خارجی از نظر استاتیکی یکدیگر را خنثی می‌کنند، فقط اثر یک نیرو را در کار در نظر می‌گیریم. $(P\Delta)$ و $(2P\Delta)$ نادرست است. چرا که در واقع جابجایی بار هر بار $\Delta/2$ است. (و جابجایی یک بار نسبت به بار دیگر Δ است.)

static Equilibrium : ✓

به دلیل تقارن در A : $S_A = 0$

$$C = \int_{ring}\int_0^M d\theta\, dM - \underset{(P\Delta)}{\underline{work}} \qquad (i)$$



$$\frac{\partial C}{\partial M_A} = 0 = \int_{ring} d\theta \frac{\partial M}{\partial M_A} = 0 \qquad (ii)$$

$$\frac{\partial C}{\partial N_A} = 0 = \int_{ring} d\theta \frac{\partial M}{\partial N_A} = 0 \qquad (iii)$$

$$M = M_A + N_A R(1 - \cos\theta) + \overbrace{\frac{PR}{\pi}\left(1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\theta\sin\theta\right)}^{\int_0^\theta \frac{P}{\pi R}\sin\alpha\,(R - R\cos(\theta-\alpha))R\,d\alpha}$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_A} = 1 \qquad \frac{\partial M}{\partial N_A} = R(1-\cos\theta)$$

با فرض بزرگ بودن R از N و S در برابر M صرف‌نظر می‌کنیم.

Subject
Date

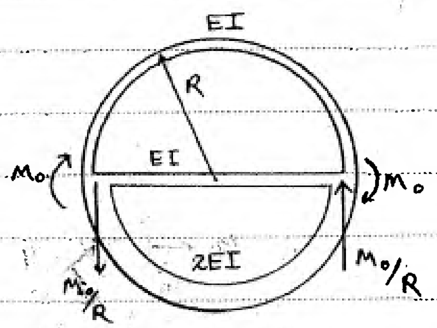
(ii) , (iii) : $2\int_0^{\pi} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_A} R\,d\theta = 2\int_0^{\pi} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial N_A} R\,d\theta = 0$ (vi)

$$\begin{cases} -\frac{PR}{2\pi} = M_A + N_A R \\ \frac{-7PR}{8\pi} = M_A + \frac{3}{2} N_A R \end{cases}$$

$$M_A = \frac{PR}{4\pi} \quad , \quad N_A = \frac{-3P}{4\pi}$$

$$M(\theta) = \frac{PR}{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2}\cos\theta - \theta\sin\theta\right)$$

مثال :



← فقط انرژی ناشی از Bending را
در نظر می گیریم

P4PCO

Subject
Date

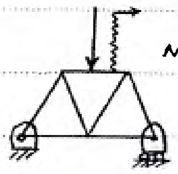
← بارهای داخلی مجازی

$$\frac{\partial F_i}{\partial P_{,f}} = \frac{\partial F_{,1}}{\partial 1} = F_{,1}$$

از بار مجازی

← بارهای داخلی حقیقی

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, F_{,1} \qquad \lambda_i = \frac{F_i \cdot L_i}{E_i \, A_i}$$



هم Bending
هم Normal load
تیر اعضا فقط Normal load

$$\Delta_{B,M} = \int \frac{M_0 M_1}{EI} \, dz^{S}$$ جابجایی ناشی از : Bending

M_0 : Bending moment at any section due to actual load.

M_1 : Bending moment at any section due to unite load.

EI : Flexural Rigidity

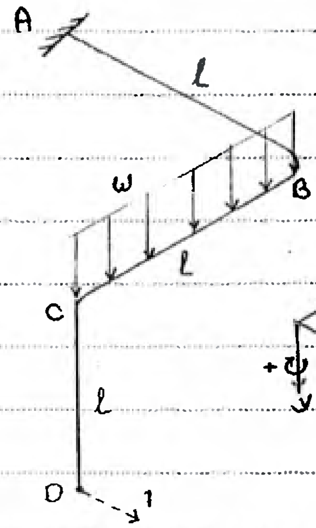
$$\Delta_{c,T} = \int \frac{T_0 \, T_1}{GJ} \, dz^{S}$$ جابجایی ناشی از : Torsion

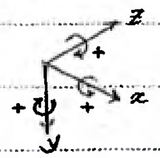
T_0 : internal Torque at any section due to actual external torque.

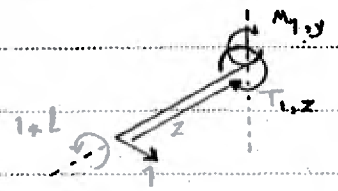
T_1 : internal Torque at any section due to external unite torque.

GJ : Torsional Rigidity

Subject
Date



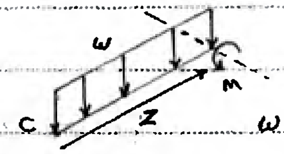




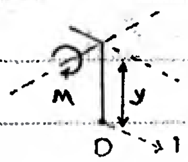
$-1 \times z + M_{1,y} = 0$

$M_{1,y} = z$

$T_{1,z} = l$



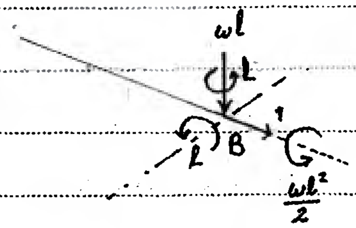
$\omega \times \frac{z^2}{2} + M_{0,x} = 0$



$-1 \times y + M_{1,z} = 0$

$M_{1,z} = y$

$\Delta_{D,x} = ?$



$$\Delta_x = \int_{length} \frac{M_0 M_1}{EI} ds + \int_{length} \frac{T_0 T_1}{GJ} ds$$

Members	M_0 (real) (x)	(y)	(z)	M_1 (unit) (x)	(y)	(z)	T_0 (real) (x)	(y)	(z)	T_1 (unit) (x)	(y)	(z)
CD	0	0	0	0	0	y	0	0	0	0	0	0
CB	$-\frac{\omega z^2}{2}$	0	0	0	z	0	0	0	0	0	0	l
BA	0	0	$-\omega l x$	0	l	l	$-\frac{\omega l^2}{2}$	0	0	0	0	0

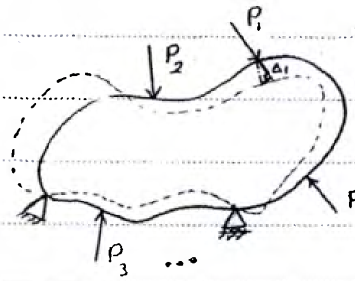
$$\Delta_{B,x} = \int_0^l \frac{\omega l^2 x}{EI} dx = -\frac{\omega l^4}{2EI}$$

۲۳

تمرین: $\Delta_{D,y}$, $\Delta_{D,z}$ را بیابید.

اصل برهم نهی ← فقط در سیستم های (Linear) ..

The Reciprocal Theorem : تئوری رفت و برگشتی

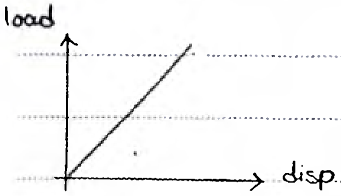


$\Delta_1 = \alpha_{11} P_1$

influence (Flexibility coefficients) ضریب نرمی

if P_1 = unit Load = 1

$\alpha_{11} = \Delta_1$



این خاصیت در سیستم های خطی صادق است.

تأثیرات بارهای P_1 و P_2 و ... و P_n در نقطه 1 :

$$\Delta_1 = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 + \alpha_{13} P_3 + \dots + \alpha_{1n} P_n$$

$$\Delta_2 = \alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2 + \alpha_{23} P_3 + \dots + \alpha_{2n} P_n$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = \alpha_{n1} P_1 + \alpha_{n2} P_2 + \alpha_{n3} P_3 + \dots + \alpha_{nn} P_n$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

$\{\Delta\} = [A]\{P\}$ → خاصیت سیستم های الاستیک خطی

ماتریس influence

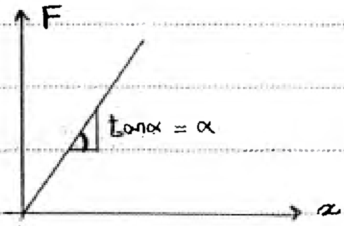
ماتریس سختی عکس ماتریس نرمی است.

Subject

Date

می‌خواهیم ثابت کنیم ماتریس A متقارن است. یعنی $a_{ij} = a_{ji}$

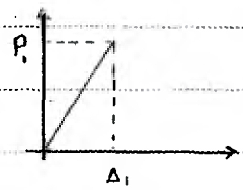
برای دو نقطه 1 و 2 اثبات می‌کنیم. فرض می‌کنیم که بار در نقطه 1 (یعنی P_1) بصورت monotonic وارد می‌شود. یعنی:



در سیستم‌های خطی الاستیک نه مسیر اعمال بار و نه ترتیب (توالی) اعمال بار مهم است. (حالت ثانویه شکل و حالت اولیه مهم است.) در نتیجه:

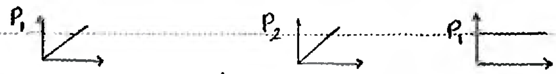
First P_1 then P_2 , P_1 : monotonic

به نقطه 1 وارد می‌شود. به نقطه 2 وارد می‌شود.



$$u_1 = \frac{1}{2} P_1 \Delta_1 = \frac{1}{2} P_1 (a_{11} P_1)$$

وقتی P_1 به مقدار ماکزیمم خود رسید، P_2 را بصورت monotonic وارد می‌کنیم. (P_2 به نقطه 2 وارد می‌شود.)



$$u_1 = \frac{1}{2} P_1 (a_{11} P_1) + \frac{1}{2} P_2 (a_{22} P_2) + P_1 (a_{12} P_2)$$

ناشی از اعمال بار P_1 — ناشی از اعمال بار P_2 — اثر اعمال بار P_2، در نقطه 1 بصورت انرژی تکیه گاه

First P_2 then P_1

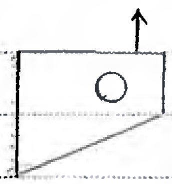
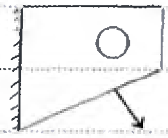
$$u_2 = \frac{1}{2} P_2 (a_{22} P_2) + \frac{1}{2} P_1 (a_{11} P_1) + P_2 (a_{21} P_1)$$

So , $u_1 = u_2$: $a_{12} = a_{21}$ $\rightarrow$ یعنی جابجایی نقطه 1 در اثر اعمال بار در نقطه 2، برابر است با جابجایی در نقطه 2 در اثر اعمال بار در نقطه 1.

این اثبات برای هر دو نقطه می‌تواند انجام شود.

PAPCO

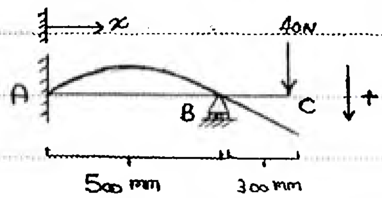
Subject
Date

مثلاً در  ماتریس stiffness هرچه باشد در  نیز همان

است (در سیستم های خطی) یعنی فرقی نمی کند که بار را کجا وارد کنیم. (اما در سیستم های الاستیک غیرخطی، اینگونه نیست.)

ماتریس های A و K وابسته به بارگذاری نیستند و به ذات سازه و boundary condition وابسته هستند.

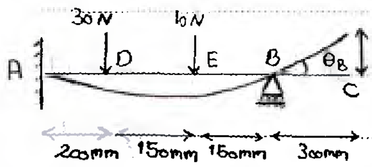
خاصیتی که ثابت شد، برای Bending moment و torsion هم صادق است. یعنی تأثیرات Bending یا torsion وارد بر یک نقطه بر روی نقطه ای دیگر، همانند تأثیر همان torsion یا Bending وارد بر نقطه دوم در نقطه اول است.



مثال: (Linear elastic)

فرض کنید توزیع جابجایی در راستای تیر، اینطور بدست آمده باشد:

Distance (mm)	0	100	200	300	400	500	600	700	800
Deflection (mm)	0	-0.3	-1.4	-2.5	-1.9	0	2.3	4.8	10.6



حال در بارگذاری مقابل θ_B را بیابید.

C and D : 40N @ C , $\delta_D = -1.4$ mm

$\longrightarrow$ 40N @ D , $\delta_C = -1.4$ mm

چون سیستم خطی است $\longrightarrow$ 30 N @ D , $\delta_C = \frac{30}{40}(-1.4) = -1.05$ mm

E and C : 40N @ C , $\delta_E = -2.2$ mm

40N @ E , $\delta_C = -2.2$ mm

10N @ E , $\delta_C = \frac{10}{40}(-2.2) = -0.6$ mm

Subject

Date

30 N @ D and 10 N @ E ; $\delta_C = -1.05 + (-0.6) = -1.65$ mm

$$\theta_B = \tan^{-1}\frac{1.65}{300} = 0.19^\circ$$

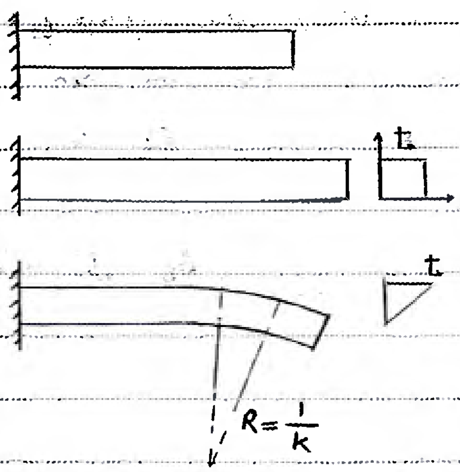
تمرین : جابجایی نقطهٔ F ، درست بین E و D در شکل دوم چقدر است؟

* باید در نقطهٔ F یک Unit Load بگذاریم :

$$\frac{F}{C} = \frac{F}{D}\,\frac{D}{C}$$

$$\frac{F}{D} = \frac{F}{C}\,\frac{C}{D}$$

* خاصیت استفاده شده در مسأله فوق، فقط در مورد سیستم‌های خطی صادق است.



اگر در سیستم معادل، حرارت یکنواختی اعمال شود که کل تیر دچار افزایش دمای یکسانی شود، خواهیم داشت :

اما اگر دمای سطح بالا را افزایش داده ولی دمای سطح پایین را ثابت نگه داریم؟

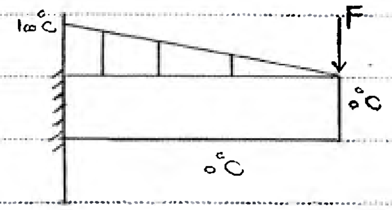
PAPCO

Subject

Date

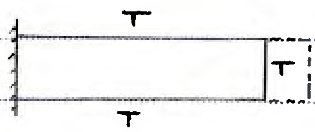
Temprеture :

Thermal strain / Thermal stress



کرنش ناشی از دما و تنش مکانیکی جداگانه بدست می‌آیند، با هم جمع می‌شوند. (چون سیستم خطی است.)

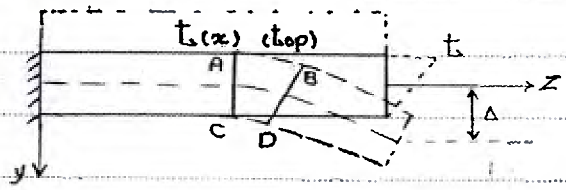
تمرین 24 : Thermo_coupled Elasticity چیست، چرا در آن نمی‌شود اثرات مکانیکی و حرارتی را با هم جمع کرد.



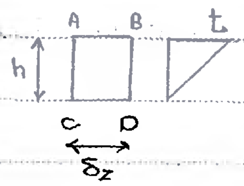
→ فقط کرنش داریم، تنش نداریم.

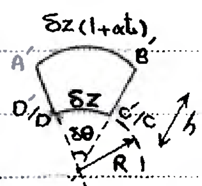
ولی در ناحیهٔ St.venant تنش هم داریم.

قانون هوک نیز برقرار نمی‌باشد.



فرض می‌شود ضخامت تیر کم باشد. (زیرا تغییرات دما را خطی فرض کردیم.)





$$\frac{R}{\delta z} = \frac{R+h}{\delta z(1+\alpha t)} \longrightarrow R = \frac{h}{\alpha t}$$

PAPCO

Subject
Date

$$\delta\theta = \frac{\delta z}{R}$$

$$\longrightarrow \delta\theta = \frac{\delta z * \alpha t_0}{h}$$

$$C = \int_L \int_0^M d\theta \, dM - P_{,1} \, \Delta_T \qquad P = 1 \text{ unit}$$

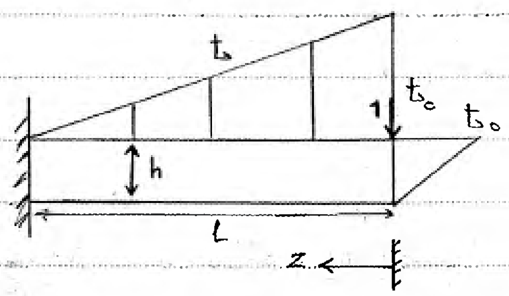
$$\frac{\partial C}{\partial 1} = 0 = \int_L d\theta \frac{dM_1}{d1} - \frac{\partial (1 \cdot \Delta_T)}{\partial 1}$$

$$\int_L M_1 d\theta - \Delta_T = 0 \longrightarrow \Delta_T = \int_L M_1 \frac{\alpha t_{(z)}}{h} dz$$

اگر بار مکانیکی هم داشته باشیم:

$$\Delta = \int \Big(\underbrace{\frac{M_1 M_0}{EI}}_{\text{mechanical load}} + \frac{M_1 \alpha t_0}{h} \Big) dz$$

تمرین 25: با المان محدود تحلیل کنید:



$$t_{(z)} = \frac{t_0}{L}(L - z) \qquad t_{(y)} \; ?!$$

← $t_{(y)}$ را در نظر نگرفتیم ← تقریب ها

$$\Delta_T = ?$$

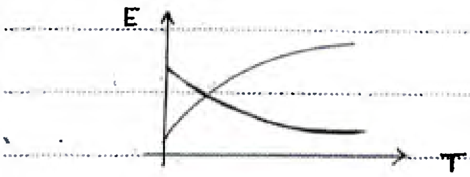
$$M_1 = 1 * z$$

$$\Delta_T = \int_L z * \frac{\alpha}{h} \frac{t_0 (L - z)}{L} dz = \frac{\alpha t_0 L^2}{6h}$$

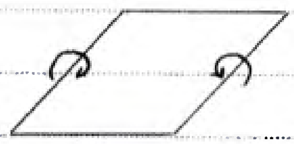
PAPCO

Subject
Date

همهٔ مواد با افزایش دما خواص مکانیکی شان افت می کند. برای مثال کامپوزیت کربن/کربن با افزایش دما خواص مکانیکی اش (مثلاً مدول الاستیسیته) افزایش می یابد. (ماتریس و متول بوده که سوزانده شده است.)

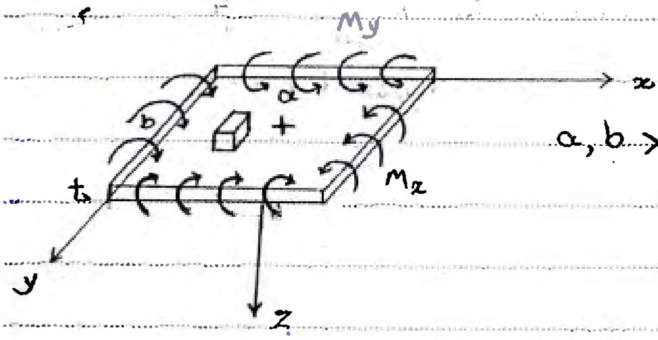


Bending of Plates:



shell، Bending را تحمل می کند ← متفاوت با plate.

ضخامت نسبت به ابعاد خیلی کم است



$a, b \gg t$

$M_x , M_y \quad \left(\frac{N.m}{m} = N\right)$ bending moment per unite length

Subject
Date

فرض های simple beam Theory :

۱) صفحه‌ها بعد از Bending دچار اعوجاج نمی‌شوند. (صفحه می‌مانند) (صفحات عرضی)

۲) بعد از تغییر شکل نیز صفحه بر تار خنثی عمود است. $\alpha = 0$ (صفحات عرضی)

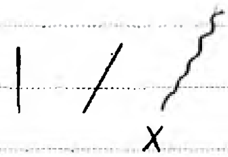
3) $R \gg t, h$ شعاع انحنا

4) $\sigma_x \neq 0$

5) $E_T = E_C$

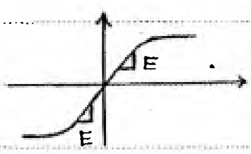
6) $l \gg t, w$

Assumptions: فرضیات :

1. transverse planes remains planes. 

2. transverse planes remains prependicular to N.P. 
صفحه خنثی
Neutral Plane

3. $\sigma_x , \sigma_y \neq 0$

4. $E_T = E_C$ 

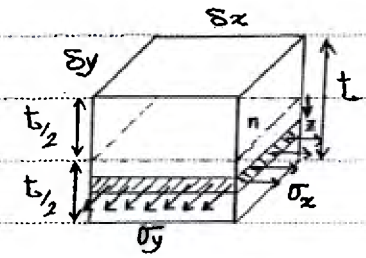
5. $\rho_x , \rho_y \gg t , a , b$

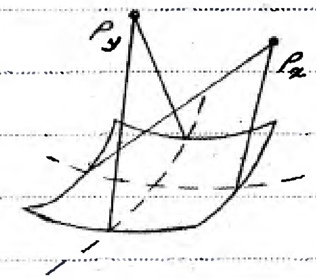
6. w , θ : deflection and slope are small.

7. $Q = 0$: pure bending

Subject
Date

یک المان از صفحه





$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{z}{\rho_y}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\dfrac{1}{\rho_x} + \dfrac{\nu}{\rho_y}\right) \\ \sigma_y = \dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\dfrac{1}{\rho_y} + \dfrac{\nu}{\rho_x}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_x \cdot \delta y = \displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot z \, \delta y \, dz \\ M_y \cdot \delta x = \displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \cdot z \, \delta x \, dz \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_x = \displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} \dfrac{Ez^2}{1-\nu^2}\left(\dfrac{1}{\rho_x} + \dfrac{\nu}{\rho_y}\right) dz \\ M_y = \displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} \dfrac{Ez^2}{1-\nu^2}\left(\dfrac{1}{\rho_y} + \dfrac{\nu}{\rho_x}\right) dz \end{cases}$$

Subject

Date

$$D = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{Ez^2}{1-\nu^2}\,dz = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$ Flexural Rigidity

$$\begin{cases} M_x = D\left(\dfrac{1}{\rho_x} + \dfrac{\nu}{\rho_y}\right) \\ M_y = D\left(\dfrac{1}{\rho_y} + \dfrac{\nu}{\rho_x}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho_x} = \dfrac{-\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \\ \dfrac{1}{\rho_y} = \dfrac{-\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_x = -D\left(\dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}\right) \\ M_y = -D\left(\dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}\right) \end{cases}$$

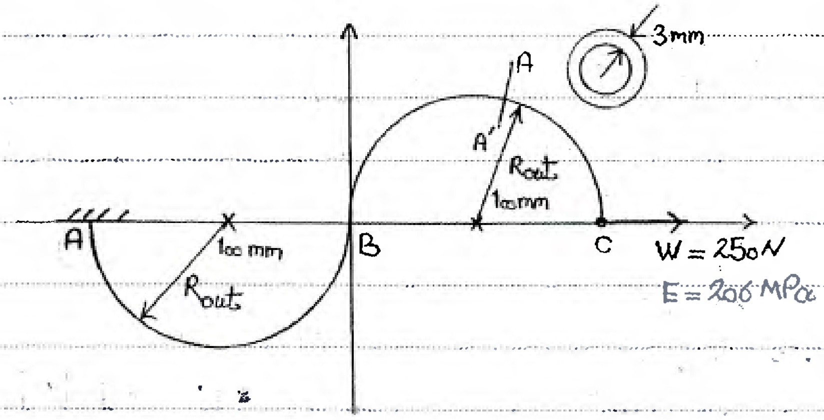
M_x or $M_y = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} = -\nu \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = -\nu \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \end{cases}$$

Subject
Date

if $M_x = M_y = M$: $\frac{1}{\rho_x} = \frac{1}{\rho_y} = \frac{1}{\rho} \longrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{D(1+\nu)}$

شعاع کره ایجاد شده ناشی از گشتاور خمش



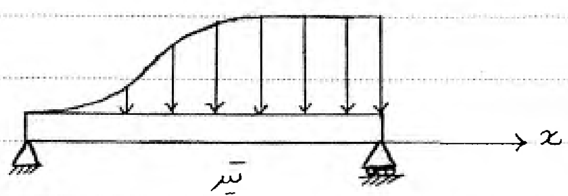
تمرین 26 : $\Delta_{h,c} = ?$

* اگر در شکل تقارن دیدیم، بازهٔ استدلال را تقویت می‌کنیم.

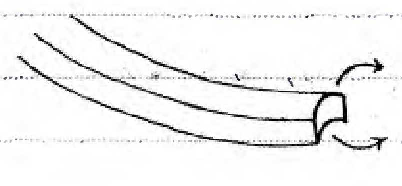
$$\begin{cases} M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \end{cases}$$

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$$

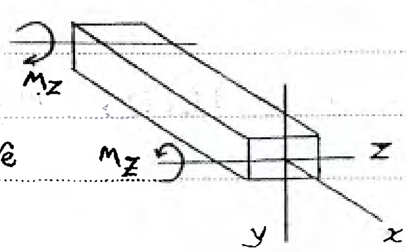
تشابه با: تیر



$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -M_z$$



قبلاً با این curvature ها کاری نداشتیم!

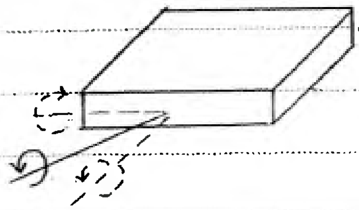


PaPCO

3

Subject
Date

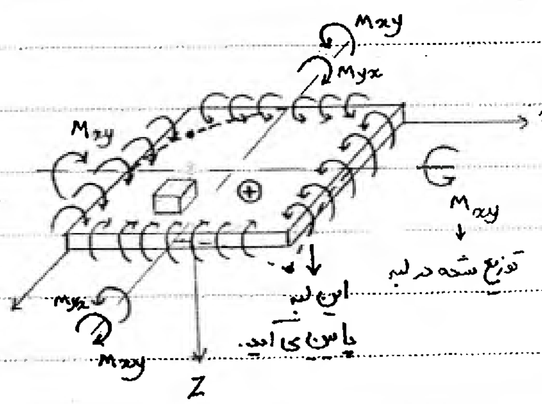
اما در plate ها، Torsion نیز داریم: ← یک τ_{xy} ایجاد می‌شود.
(جریان برش)



با Bending را ایجاد نمی‌کنیم، بلکه Bending در اثر بارگذاری induced می‌شود.

τ_{zx} و τ_{zy} داریم ← اما کرنش آنها را صفر در نظر می‌گیریم تا عمود بودن بر هم نخورد. (عمود بودن صفحه بر N.P بعد از اعمال بارگذاری)

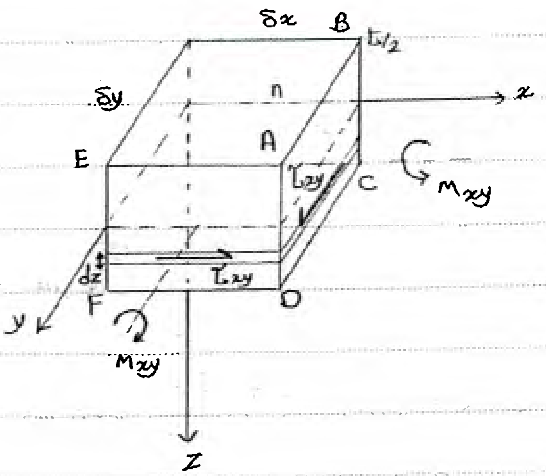
$M_{xy} = ?$



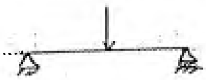
$M_{xy} = -M_{yx}$

M_{xy} : [N.m/m] [N]

M_{xy} و M_{yx} جاهم ها پیدایی است و در واقع نتیجه از بارگذاری هستند و مقدارشان دست ما نیست. (از بیرون اعمال نشده‌اند)



از shear صرف‌نظر کردیم، Bending را صرفت pure فرض کردیم!



هم shear،
هم Bending

for face ABCD: $M_{xy} \cdot \cancel{\delta y} = -\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \cancel{\delta y} \, dz \cdot z$

PaPCO

Subject

Date

for face AEFD : $M_{xy} \cdot \cancel{\delta x} = -\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \cdot \cancel{\delta x}\, dz \cdot z$

$$M_{xy} = -\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy}\, z\, dz = -G \int_{-t/2}^{t/2} \gamma_{xy}\, z\, dz \qquad (*)$$

Engineering inplane shear strain : $\gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \qquad (**)$

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x} = \frac{z}{\dfrac{-1}{\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)}} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z$$

$$\longrightarrow u = \int \varepsilon_x\, dx = -\frac{\partial w}{\partial x} z$$

w تابعی از z نیست، فقط تابعی از x و y است.

similarly : $v = -\dfrac{\partial w}{\partial y} z$

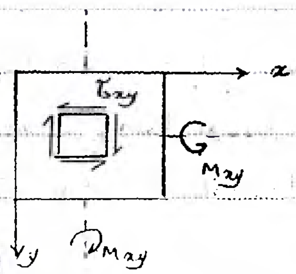
$$\xrightarrow{(**)} \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\xrightarrow{(*)} M_{xy} = G \int_{-t/2}^{t/2} 2z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dz = G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-t/2}^{t/2} 2z^2 dz = \frac{Gt^3}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\longrightarrow M_{xy} = D \cdot (1-\nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

M_x , M_y , M_{xy} : plate معادلات 7 , 8 , 14



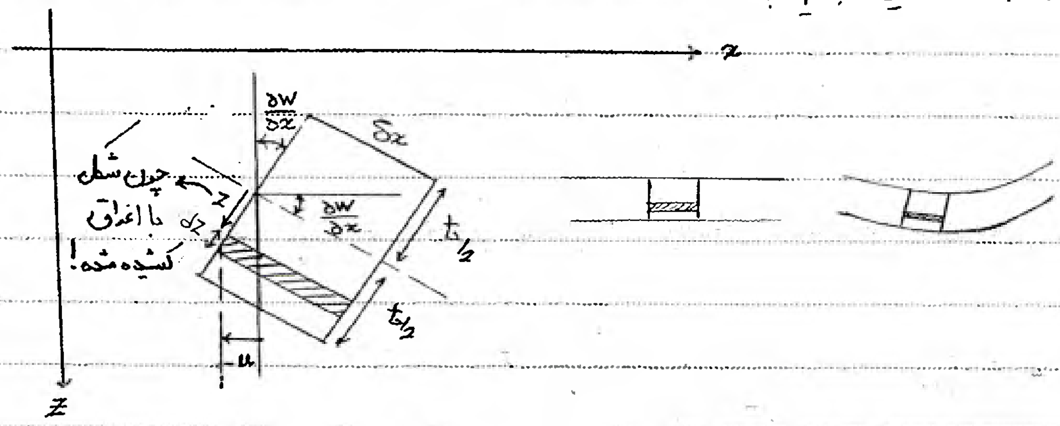
سطح بالای صفحه :

بنابراین پیچش τ مشکلی برای عمود بودن صفحات بر صفحه خنثی ایجاد نمی کند.

Subject

Date

اگر بصورت زاویه‌ای بخواهیم بررسی کنیم:



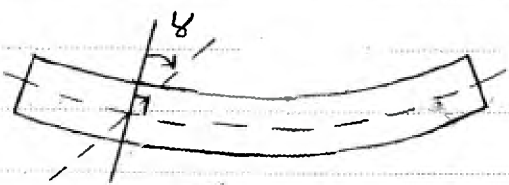
from fig: $u = -\dfrac{\partial w}{\partial x} z$

Similarly: $v = -\dfrac{\partial w}{\partial y} z$ $\longrightarrow$ $\gamma_{xy} = -2z \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ $\longrightarrow$ M_{xy} به مشابه قبل بدست می‌آید.

$$\begin{cases} M_x = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\[2ex] M_y = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\[2ex] M_{xy} = +D(1-\nu) \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

← فقط باید w را بدست آوریم!

w فقط تابع x و y است و تابع z نیست. $W(x, y)$



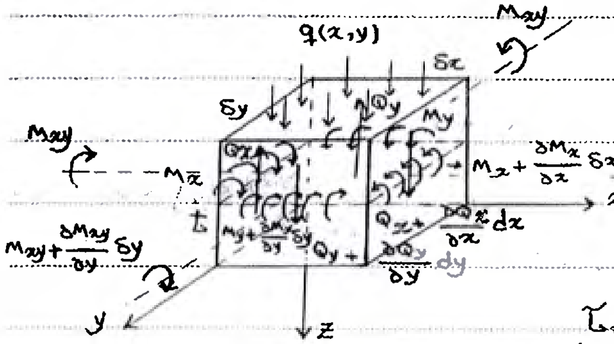
در Beam theory ، τ_{xy} را برابر صفر در نظر گرفتیم (بعد از تغییر شکل نیز زاویه 90° می‌ماند) حال آنکه این فرض نادرست است چرا که برش صفر نیست و زاویه γ بوجود می‌آید، اما برای ساده‌سازی در تیرهای بلند صرف نظر می‌کنیم. ولی در تیرهای کوتاه باید برش را نیز در نظر بگیریم. ← تیر تیموشنکو!

Subject
Date

در simple plate با وجود اینکه $\tau_{yz}, \tau_{xz} \neq 0$ است، اما اگر $t \ll a,b$ باشد، تنش
می‌گیریم و ($\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$) که تنش خارجی است، اما برای ساده‌سازی این تنش را می‌گیریم.

$\sigma_x , \sigma_y , \tau_{xy} , \tau_{zy} , \tau_{xz}$ $\qquad \sigma_z = 0$

$\varepsilon_x , \varepsilon_y , \gamma_{xy}$ $\qquad \gamma_{xz} , \gamma_{yz} , \varepsilon_z = 0$



Q_x , Q_y : vertical shear force per unit length.

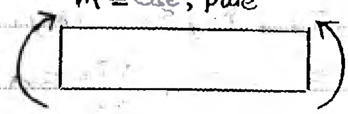
$M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta x$

فشار: $q \; [\frac{N}{m^2}]$

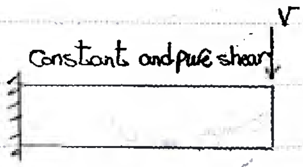
$Q [N/m]$

$\underbrace{\tau_{xz} , \tau_{zy}}_{\text{خطا!}} = \text{Const} \neq f(x), f(y)$

simple Beam theory شکل

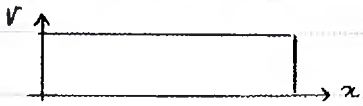


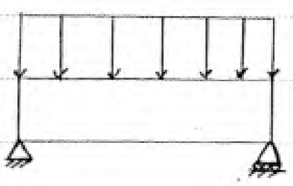
$\sigma_x = \frac{My}{I}$



$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It}$ $\qquad Q = \int y dA$

گشتاور اول سطح
نسبت به محور خنثی





در تیر زیر درست است که cte, pure bending نیست، ولی ما
آن را بصورت cte, Pure bending حل می‌کنیم ← خطا
↓
ولی قابل قبول

PAPCO

Subject
Date

we had:
$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z\, dz$$

similarly: $Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz}\, dz$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y\, z\, dz$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz}\, dz$$

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy}\, z\, dz$$

Equlibrium of Forces:

$$+\downarrow \sum F_z = 0 \longrightarrow (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}\delta x)\delta y - Q_x \delta y + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\delta y)\delta x - Q_y \delta x + q\,\delta x \delta y = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (*)$$

$$\sum M_x = 0 \longrightarrow -M_{xy}\delta y + (M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\delta x)\delta y + M_y \delta x - (M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y}\delta y)\delta x + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\delta y)\delta x \delta y - Q_x \frac{\delta y^2}{2} + (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}\delta x)\frac{\delta y^2}{2} + q\,\delta x \frac{(\delta y)^2}{2} = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \qquad Q_y = \checkmark \qquad \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \checkmark$$

similarly:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0 \qquad Q_x = \checkmark \qquad \frac{\partial Q_x}{\partial x} = \checkmark$$

$$\xrightarrow{(*)} \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x,y)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D}$$

Subject

Date

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\frac{q(x,y)}{D}$$

$$(\nabla^2)^2 w=\frac{q}{D}$$

$$\longrightarrow \boxed{\nabla^4 W(x,y)=\frac{q(x,y)}{D}}$$ معادله برای صفحه با بارگذاری عرضی با هر شرایط مرزی

$$W(x,y)=\,? \longrightarrow B.C.=\,?$$

با داشتن q و B.C. ، می‌توانیم W را بدست آورد، سپس M_x ، M_y ، M_{xy} را بدست آورد و نهایتاً تنش‌ها را بدست می‌آوریم.

$$\begin{array}{l} q=\checkmark \\ B.C.'s=\checkmark \end{array} \longrightarrow w(x,y)=\checkmark \longrightarrow M_x, M_y, M_{xy} \longrightarrow \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$$

$$Q_x=\frac{\partial M_x}{\partial x}-\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=-D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$Q_y=\frac{\partial M_y}{\partial y}-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=-D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$\longrightarrow$ اگر Q_x , Q_y را بدست آوریم. $\longrightarrow \tau_{xz}, \tau_{zy}=\checkmark$

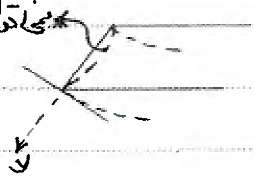
"Exact Solution" $\nabla^4 W(x,y)=\dfrac{q(x,y)}{D}$ under B.C's:

– The simply supported Edge:

@ $x=0$

$$W\Big|_{x=0}=0$$

نمی‌تواند رخ دهد



Subject
Date

$$, M_x \Big|_{x=0} = 0 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\Big|_{@x=0} = 0$$

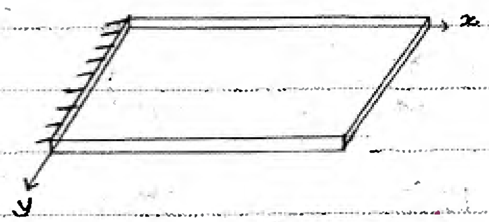
$$\ddot{\omega}: \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{x=0} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{x=0} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{@x=0} = 0$$

$$w\Big|_{@x=0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{@x=0} = 0$$

– Built in Edge (fixed Edge) :

$@ x = 0$



firmly clamped

$$w\Big|_{@x=0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{@x=0} = 0$$

Papco

Free Edge:

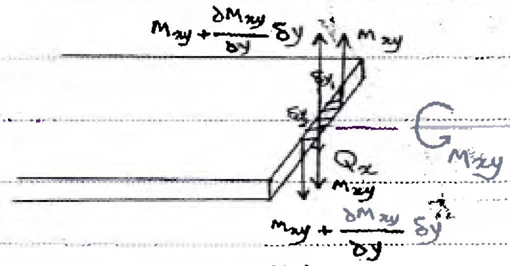
$@x=0$

$$M_x\Big|_{@x=0}=0 \qquad M_{xy}\Big|_{@x=0}=0 \qquad Q_x\Big|_{@x=0}=0$$

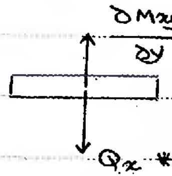
تمرین: اثبات کنید که در رابطه $Q_x\big|_{@x=0}$ و $M_{xy}\big|_{@x=0}=0$ در واقع
یک معادله هستند. کیرشف ← و Thomson & Tait
درواقع این دو معادله بصورت زیر ترکیب می‌شوند:

$$Q_x-\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=0$$

Thomson & Tiat:



در سطح مشترک دو المان δy_2 و δy_1:



$$\longrightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\cancel{\delta y}-Q_x\cancel{\delta y}=0 \qquad \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0$$

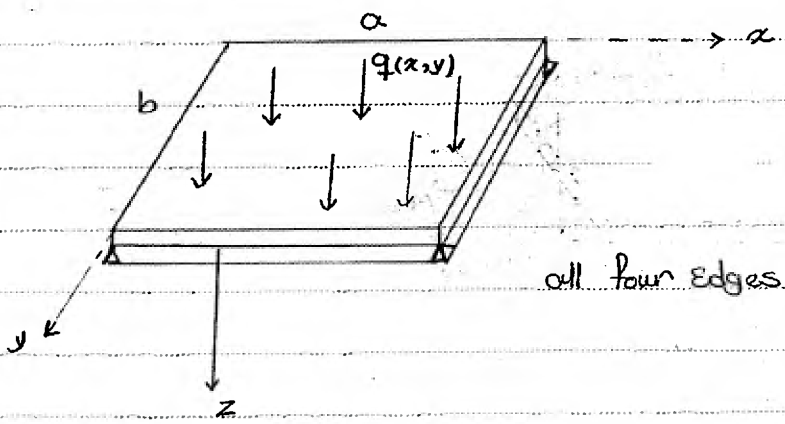
$$M_x\Big|_{@x=0}=0 \quad , \quad Q_x-\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\Big|_{@x=0}=0$$

Subject
Date

$$\begin{cases} Q_x = -D \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_{xy} = D(1-\nu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$$\left(\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)\right|_{@x=0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\Big|_{@x=0} = 0 \quad \leftarrow \quad M_x\Big|_{@x=0} = 0$$



all four Edges are simply supportie

Navier (1820) :

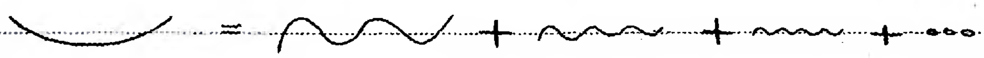
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D}$$

$$w\Big|_{@x=0,a} = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{@x=0,a} = 0$$

$$w\Big|_{@y=0,b} = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{@y=0,b} = 0$$

Subject
Date

$$W(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$ satisfies all B.C.'s



$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin\frac{m'\pi x}{a} \sin\frac{n'\pi y}{b}\, dx\, dy$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^b a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{m'\pi x}{a} \sin\frac{n'\pi y}{b}\, dx\, dy$$

Since
$$\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{m'\pi x}{a}\, dx = 0 \quad m \neq m'$$
$$= a/2 \quad m = m'$$

$$\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{n'\pi y}{b}\, dy = 0 \quad n \neq n'$$
$$= b/2 \quad n = n'$$

$$a_{m'n'} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin\frac{m'\pi x}{a} \sin\frac{n'\pi y}{b}\, dx\, dy$$

$$\nabla^4 w(x,y) = \frac{q(x,y)}{D}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] - \frac{a_{mn}}{D} \right\} *$$

$$\sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} = 0$$

PaPCO

Subject
Date

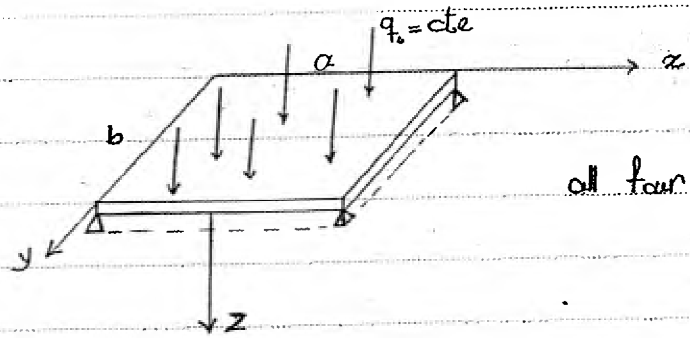
$$A_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4+2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right]-\frac{a_{mn}}{D}=0$$

$$\longrightarrow A_{mn}=\frac{1}{\pi^4 D}\;\frac{a_{mn}}{\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]^2}$$

$$w(x,y)=\frac{1}{\pi^4 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\longrightarrow M_x,\ M_y,\ M_{xy},\ Q_x,\ Q_y,\ \sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_{xy},\ \tau_{zx},\ \tau_z$$

Example:



all four edges are simply supp

$q(x,y) = q_0 = cte$

$w(x,y) =$

$$a_{mn}=\frac{4q_0}{ab}\int_0^a\int_0^b \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy=\frac{16q_0}{\pi^2 mn}$$ when m & n are

$\longrightarrow$ when m or n are even $\longrightarrow a_{mn}=0$

$$w(x,y)=\frac{16q_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

PAPCO

Subject
Date

due to symmetry:

$$\hat{W}\Big|_{\substack{@\,x=a/2\\ y=b/2}} = \frac{16}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]^2}$$

$m = 1, 3, 5, 7$

$n = 1, 3, 5, 7$

$a=b \quad , \quad \nu = 0.3 \qquad D = \dfrac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

$$\hat{W}\Big|_{\substack{@\,x=\frac{a}{2}\\ y=\frac{b}{2}}} = 0.0443\, q_0 \frac{a^4}{Et^3}$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)$$

$$\longrightarrow \quad M_x = \frac{16 q_0}{\pi^4}\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\frac{m^2}{a^2}+\nu\frac{n^2}{b^2}}{mn\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$M_y = \frac{16 q_0}{\pi^4}\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\nu\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}{mn\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

for $a=b \longrightarrow \hat{M}_x = \hat{M}_y = 0.0479\, q_0\, a^2 \qquad @\, x=\frac{a}{2} \;,\; y=\frac{b}{2}$

PAPCO

Subject
Date

$$\sigma_x = \frac{EZ}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{\rho_x} + \frac{\nu}{\rho_y}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{EZ}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{\rho_y} + \frac{\nu}{\rho_x}\right)$$

$$M_x = D\left(\frac{1}{\rho_x} + \frac{\nu}{\rho_y}\right)$$

$$M_y = D\left(\frac{1}{\rho_y} + \frac{\nu}{\rho_x}\right)$$

$\longrightarrow$ دو راستا با هم کوپل شده‌اند. در صورتی که در بررسی تیر اینگونه نبود.

$$\longrightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{12 M_x Z}{t^3} \qquad \sigma_y = \frac{12 M_y Z}{t^3}}$$

$\longrightarrow$ در راستای ضخامت تغییرات σ_x و σ_y خطی هستند و در midplane برابر صفر است.

$$@\ z = \pm \frac{t}{2} \quad \begin{cases} \hat{\sigma}_x = \dfrac{6M_x}{t^2} \\ \hat{\sigma}_y = \dfrac{6M_y}{t^2} \end{cases}$$

بیشترین مقدار تنش‌ها در جایی است که بیشترین Bending moments را داشته باشیم، در دورترین فاصله از سطح خنثی.

$$\text{if } a = b \longrightarrow \hat{M}_x = \hat{M}_y = 0.0479\, q_0\, a^2$$

$$\longrightarrow \hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_y = 0.287\, q_0 \frac{a^2}{t^2}$$

ماکزیمم تنش‌ها در $z = \pm \frac{t}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, $x = \frac{a}{2}$

تمرین: مقایسه با نتایج المان محدود. 27

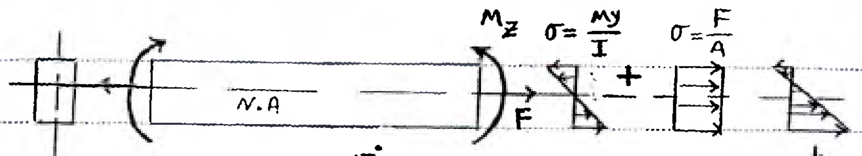
نتایج برای صفحات با طول بی‌نهایت بدست آمده است.

$a = b = 1m$, $t = 1m$ $\nu = 0.3$

$E = 200\,GPa$, $q_0 = 20 \frac{kN}{m^2}$

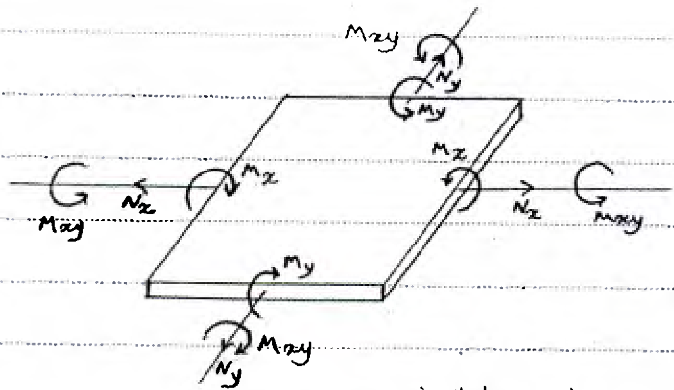
Subject

Date



Linear elastic رفتار

در واقع سطح خنثی به بالاتر شیفت شد.



N_y و N_x : بار خارجی

حضور بارهای N_y و N_x باید در بار q اعمال شود.

در نتیجه معادلات زیر باید اصلاح شوند:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \qquad \times$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \qquad \checkmark \rightarrow$$ چون وابسته به q نیست.

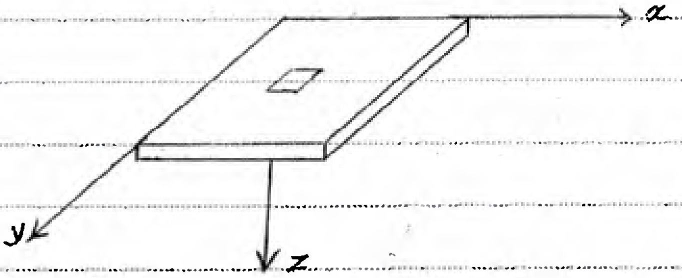
$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0 \qquad \checkmark \rightarrow$$ چون وابسته به q نیست.

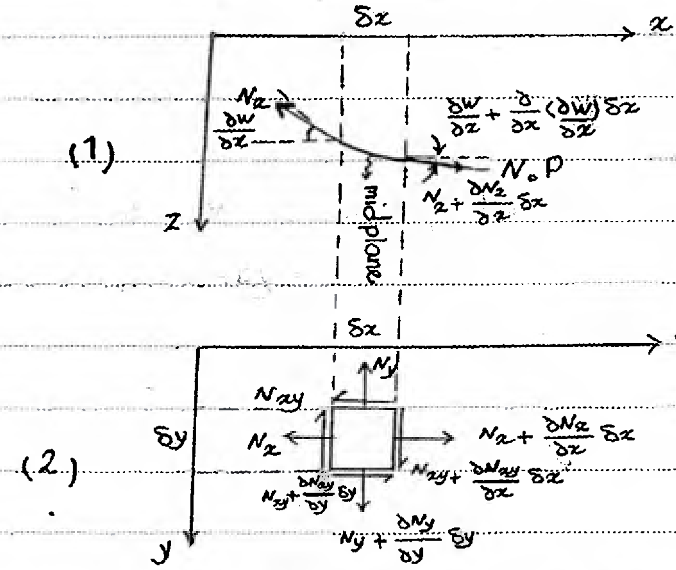
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q/D \qquad \times$$

Subject

Date

Combined Bending and in-plane load:





N_x, N_y, N_{xy} (N/m)

$N_{xy} = N_{yx}$

$\sum F_x = 0$

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}\delta x\right)\delta y \overbrace{\cos\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta x\right)}^{\simeq 1}$$

$$- N_x \delta y \underbrace{\cos\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}_{\simeq 1} + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\delta y\right)\delta x$$

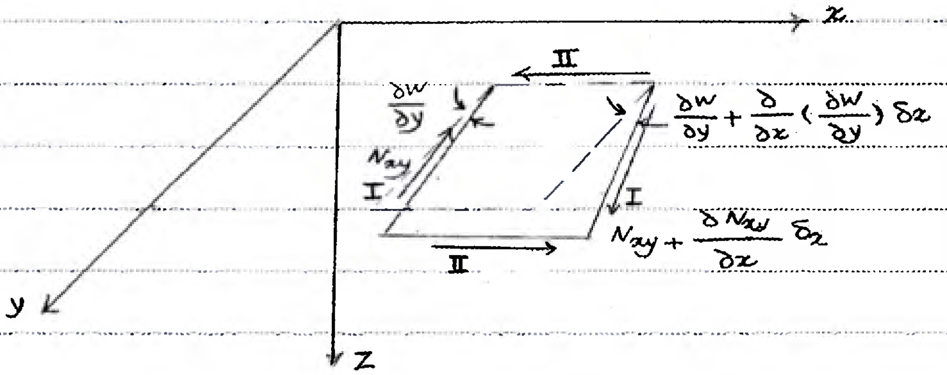
$$- N_{xy}\,\delta x = 0$$

Subject
Date

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0$$

similarly :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=0$$



(3)

$$\sum F_z^{I}=(N_{xy}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\delta x)\,\delta y\,\sin(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\delta x)-N_{xy}\,\delta y\,\sin(\frac{\partial w}{\partial y})$$

$$=(N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y})\delta x\,\delta y \qquad I.1$$

$$\sum F_z^{II}=N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\delta x\,\delta y+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\delta x\,\delta y \qquad I.2$$

from Fig (1) :

$$\sum F_z^{III}=(N_x+\frac{\partial N_x}{\partial x}\delta x)\,\delta y\,\sin(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta x)-N_x\,\delta y\,\sin\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$=N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta x\,\delta y+\frac{\partial N_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\delta x\,\delta y$$

PAPCO

Subject ______
Date

$$\sum F_z^{IV} = N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,\delta x\,\delta y + \frac{\partial N_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\,\delta x\,\delta y$$

$$\longrightarrow \sum F_z^{I} + \sum F_z^{II} + \sum F_z^{III} + \sum F_z^{IV}$$

$$= N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\delta x\,\delta y + \frac{\partial N_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\,\delta x\,\delta y + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,\delta x\,\delta y$$

$$+ \frac{\partial N_y}{\partial y}\,\frac{\partial w}{\partial y}\,\delta x\,\delta y + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}\,\delta x\,\delta y + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,\delta x\,\delta y$$

$$+ \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\,\frac{\partial w}{\partial x}\,\delta x\,\delta y$$

$: \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} =$

$$\longrightarrow \sum F_z^{I,II,III,IV} = \underbrace{\left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)}_{\text{additional Pressure}}\delta x\,\delta y$$

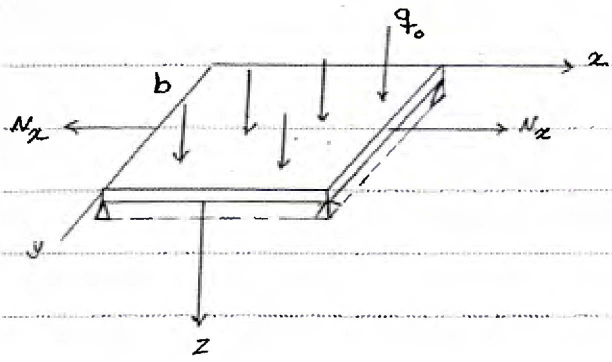
$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + \text{additional pressure} = 0$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial^2 x\,\partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q + \text{additional Pressure}}{D}$$

Subject

Date

مثال:



$N_y = N_{xy} = 0$

we had, $q(x,y) = \dfrac{16 q_0}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \dfrac{1}{mn} \sin\dfrac{m\pi x}{a} \sin\dfrac{n\pi y}{b}$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial^2 x\, \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{N_x}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{16 q_0}{\pi^2 D} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad (I)$$

$$\text{B.C.,} \begin{cases} w = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 & @\ x = 0, a \\ w = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 & @\ y = 0, b \end{cases}$$

exact solution

$$W(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad (*)$$

با جایگذاری (*) در (I) خواهیم داشت:

$$A_{mn} = \frac{16 q_0}{\pi^6 D\, mn \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 + \frac{N_x m^2}{\pi^2 D a^2}\right]} \quad \text{for } m \,\&\, n \text{ odd}$$

$A_{mn} = 0$ for m & n even

$$W(x,y) = \frac{16 q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn\left[\underbrace{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}_{I} + \underbrace{\frac{N_x m^2}{\pi^2 D a^2}}_{II}\right]} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

if $I = -II \rightarrow$ buckling

Subject
Date

Bending of a thin plate having a small initial curvature :

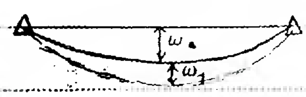
$W_0 \ (x, y) \longrightarrow$ before loading

$W_1 \ (x, y) \longleftarrow \quad q(x, y) \ , \ N_x \ , \ N_y \ , \ N_{xy}$

$W_0 + W_1$ $\qquad\qquad \nabla^4 W = \dfrac{q + \text{additional Pressure}}{D}$

$\longleftarrow$ در سمت چپ معادله با W_1 کار داریم، از حالت unloaded یا بدون بارگذاری)

اما در سمت راست معادله هم با W_0 و هم با W_1 کار داریم



در واقع bending moments در plate از حالت w_0 به $w_0 + w_1$ می‌برد.

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left[q + N_x \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x \partial y} \right] \qquad (34)$$

برای plate بدون انحنا داشتیم:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \qquad (33)$$

$$\left[(34) - (33) \right] = N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \longrightarrow$$

همانند یک بار خارجی عمل می‌کند.

PAPCO

Subject
Date

Example :

$N_x \neq 0 \quad , \quad N_y \, , \, N_{xy} = 0$ ([illegible])

$$w_0(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$w_1(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

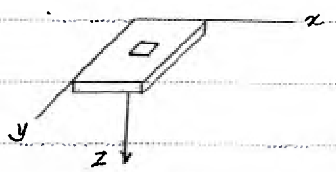
با جاگذاری در معادله (34) :

where : $$B_{mn} = \frac{-A_{mn} N_x}{\frac{\pi^2 D}{a^2}\left[m + \frac{n^2 a^2}{m b^2}\right]^2 + N_x}$$

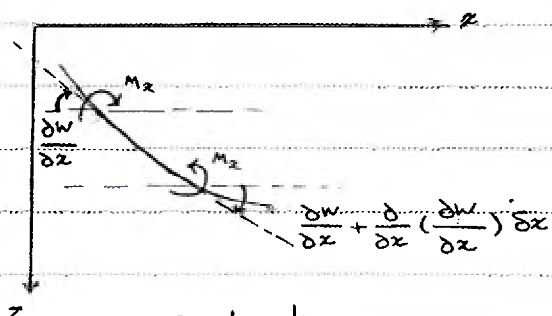
$N_x < 0 \uparrow \longrightarrow w_1 \uparrow \longrightarrow w_1 \to \infty$: Buckling

N_x بارفشاری
افزایش یابد.

Energy Method :



$M_x \, , \, M_y \, , \, M_{xy}$

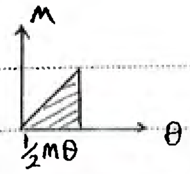


pure bending

$$\delta\theta = -\left\{\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta x\right] - \frac{\partial w}{\partial x}\right\} = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta x\right]$$

Subject
Date

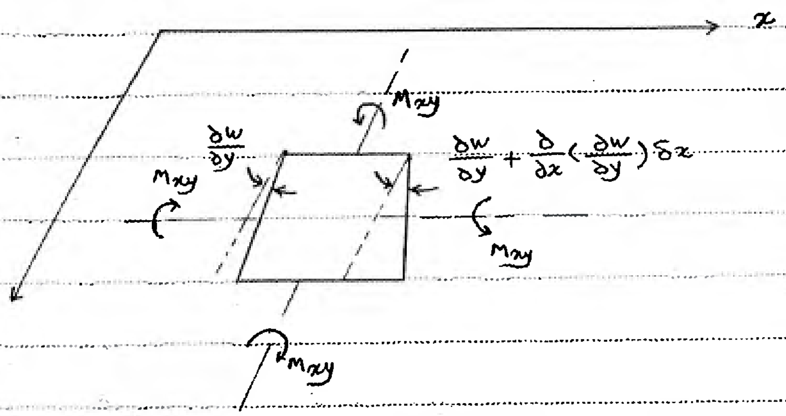
$x \uparrow$ $\theta \downarrow$



Bending Energy due to M_x for the element $= \left(\frac{1}{2}\right)(M_x \,\delta y)\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\delta x\right)$ (i)

smilarly:

Bending Energy due to M_y for the element $= \left(\frac{1}{2}\right)(M_y \,\delta x)\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,\delta y\right)$ (ii)



$$\delta\theta = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\,\delta x$$

strain Energy due to twisting : $\frac{1}{2}(M_{xy}\,\delta y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\,\delta x\right)$ (iii)

strain Energy due to twisting : $\frac{1}{2}(M_{xy}\,\delta x)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\,\delta y\right)$ (iv)

Subject

Date

total potential Energy for Element : (i) + (ii) + (iii) + (iv)
(M_x , M_y , M_{xy})

$$= \frac{1}{2}\left(-M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\delta x \delta y$$

we had :
$$\begin{cases} M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$$u = \frac{D}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\}\delta x \delta y$$

$$\underset{M_x, M_y, M_{xy}}{\underset{\downarrow}{U}} = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} * \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\}\delta x \delta y$$

total strain Energy of the rectangular plate $a \times b$ from bending and twisting

$$\delta V = -w\, q\, \delta x\, \delta y$$

$$V = -\int_0^a\int_0^b w(x,y)\, q(x,y)\, dx\, dy$$ $\longrightarrow$ the potential energy of the total load on the plate

pure bending only $\longrightarrow M_{xy} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$

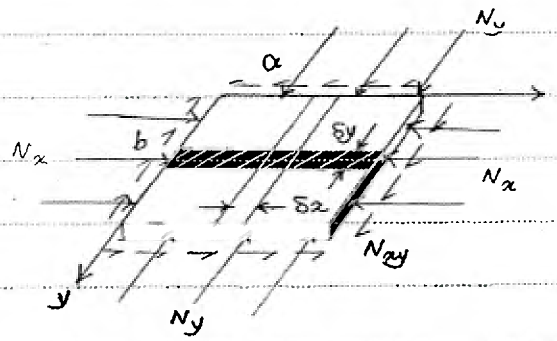
$$\hookrightarrow U = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] dx\, dy$$

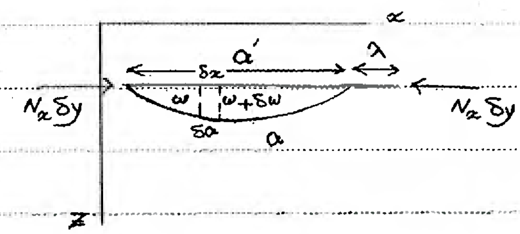
PAPCO

Subject

Date

Potential Energy due to in-plane load:





$\delta V = -N_x \, \delta y \, \lambda$ N ها از ابتدا بوده اند، پس $\frac{1}{2}$ نمی گذاریم!

from fig: $\delta a = (\delta x^2 + \delta w^2)^{\frac{1}{2}} \cong \delta x \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$ $\quad \frac{\partial w}{\partial x}$ is small

$$a = \int_0^{a'} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] dx = a' + \int_0^{a'} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$\lambda = a - a' = \int_0^{a'} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx = \int_0^{a} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$\lambda = \int_0^{a} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \qquad (41)$$

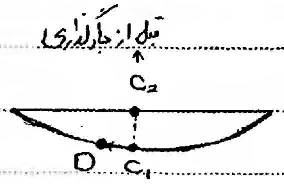
$N_x \longrightarrow V_x = -\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dy \quad (42) \longrightarrow$ The potential Energy o the N_x

similarly:

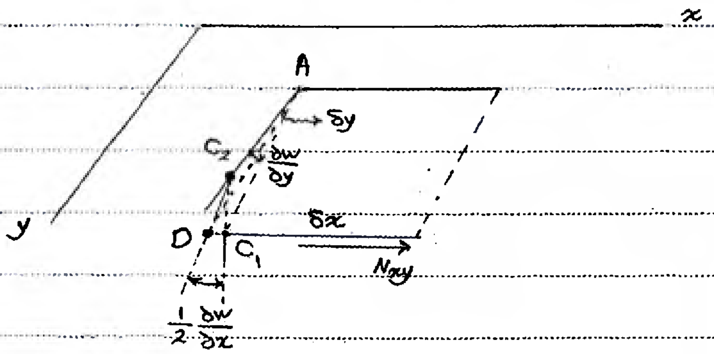
$N_y \longrightarrow V_y = -\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dx\,dy \quad (43) \longrightarrow$ The potential Energy the N_y

ما پتانسیل ناشی از N ها را حساب نمی کنیم، بلکه پتانسیل ناشی از N ها در حضور بار q (bending) را حساب می کنیم.

با این پتانسیل کاری نداریم.
(به دلیل تقارنی که دارد.)



حالا پتانسیل ناشی از جابجایی برشی
در راستای افقی را حساب می‌کنیم.



$$C_1D = \underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}\,\delta y}_{C_1C_2}\ \underbrace{\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial w}{\partial x}\right)}_{\text{angle}}$$

$$\delta V_{xy}^{I} = -\cancel{\frac{1}{2}}\,(N_{xy}\,\delta x)\,C_1D = -(N_{xy}\,\delta x)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\,\delta y\right)\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

چون هنگام اعمال q و Nها روی سیستم جدید

$$= -\frac{1}{2}\,N_{xy}\,\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}\,\delta x\,\delta y$$

$$\delta V_{xy}^{II} = -\frac{1}{2}\,N_{xy}\,\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}\,\delta x\,\delta y$$

$$\delta V_{xy} = \delta V_{xy}^{I} + \delta V_{xy}^{II} = -N_{xy}\,\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}\,\delta x\,\delta y$$

Subject
Date

$$V_{xy} = -\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b 2N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\,dx\,dy \quad (44)$$ the potential Energy of the N_{xy}

$$V_{N_x, N_y, N_{xy}} = -\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \left[N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]dx\,d$$ (

↳ the potential Energy of N_x, N_y, N_{xy}

Exact, approximated Solution.

a, b q_0, $N_x, N_y, N_{xy} = 0$, four Edges are simply suppo

known: $w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$

$$T.P.E = U + V = \int_0^a\int_0^b \left\{\frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial\right.\right.\right.$$

$$- wq_0\Big\}dx\,dy \quad (46)$$

$w \longrightarrow 46$: $$U + V = \int_0^a\int_0^b\Big[\frac{D}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2\Big[\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2$$

$$-2(1+\nu)\frac{m^2n^2\pi^4}{a^2b^2}\left(\sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{m\pi y}{b} - \cos^2\frac{m\pi x}{a}\cos^2\frac{n\pi y}{b}\right)\Big]$$

$$- q_0\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\Big]\,dx\,dy$$

$$U + V = \frac{D}{2}\sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} A_{mn}^2\frac{\pi^4 ab}{4}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2$$

$$- q_0\sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} A_{mn}\frac{4ab}{\pi^2 mn}$$

$$\frac{\partial (U+V)}{\partial A_{mn}} = 0 = \frac{D}{2} * 2A_{mn} \frac{\pi^4 ab}{4} \left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 - q_0 \frac{4ab}{\pi^2 mn}$$

$$A_{mn} = \frac{16 q_0}{\pi^6 D mn \left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]^2}$$

$$\rightarrow W = \frac{16 q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]^2}$$

که دقیقاً همانند جواب قبل شد.

approximated solution :

R _ R Rayleigh _ Ritz

$$w(x,y) = A_1 f_1(x,y) + A_2 f_2(x,y) + A_3 f_3(x,y)$$

satisfies B.C.'s unknown

$$T.P.E = U + V$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (U+V)}{\partial A_1} = 0 \\ \dfrac{\partial (U+V)}{\partial A_2} = 0 \\ \dfrac{\partial (U+V)}{\partial A_3} = 0 \end{cases}$$

a, b, q_0

simply supported B.C. $\longrightarrow$ $W(x,y) = A_{11} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$

satisfies B.C's ✓

$a = b$

Subject

Date

$$\hat{W}\Big|_{@\, x=y=\frac{a}{2}} = 0.00433\, q_0 \frac{a^4}{Et^3}$$

از حل exact تحلیلی :

(برای چهار جملهٔ اول)

$$T.P.E = U+V = \int_0^a \int_0^b \Big[\frac{DA_{11}^2}{2} \Big\{ \frac{\pi^4}{(a^2b^2)^2}(a^2+b^2)^2 \sin^2\frac{\pi x}{a} \sin^2\frac{\pi y}{b}$$

$$- 2(1-\nu)\Big[\frac{\pi^4}{a^2b^2} \sin^2\frac{\pi x}{a} \sin^2\frac{\pi y}{b} - \frac{\pi^4}{a^2b^2} \cos^2\frac{\pi x}{a} \cos^2\frac{\pi y}{b}$$

$$- q_0 A_{11} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \Big] dx\, dy$$

$$U+V = \frac{DA_{11}^2}{2} \frac{\pi^4}{4a^3b^3}(a^2+b^2)^2 - q_0 A_{11} \frac{4ab}{\pi^2}$$

$$\frac{\partial(U+V)}{\partial A_{11}} = 0 = \frac{DA_{11}\pi^4}{4a^3b^3}(a^2+b^2)^2 - q_0 \frac{4ab}{\pi^2} \qquad A_{11} = \frac{16 q_0 a^4 b^4}{\pi^6 D (a^2+b^2)^2}$$

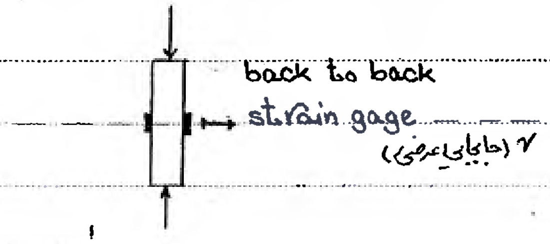
$$\omega(x,y) = \frac{16\, q_0 a^4 b^4}{\pi^6 D (a^2+b^2)^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$$

$$\begin{cases} a=b \\ \nu=0.3 \end{cases} \qquad \hat{W}\Big|_{x=y=\frac{a}{2}} = 0.00455\, q_0 \frac{a^4}{Et^3} \qquad 4.5\%\ \text{error}$$

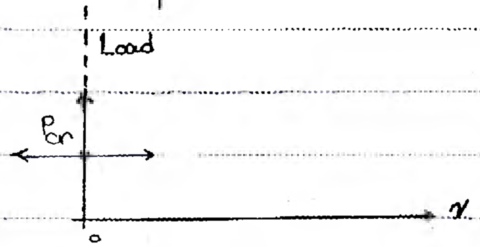
Subject
Date

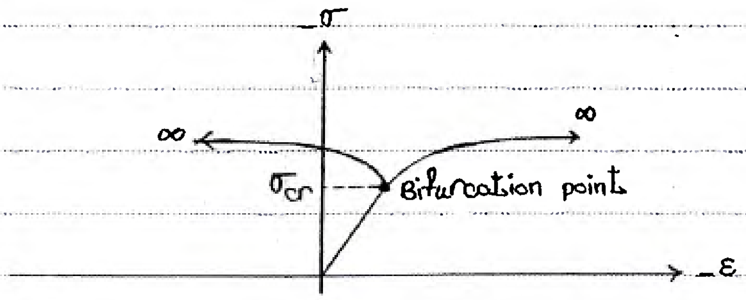
Buckling :

Instability :
ناپایداری

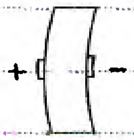


$P \rightarrow P_{cr}$

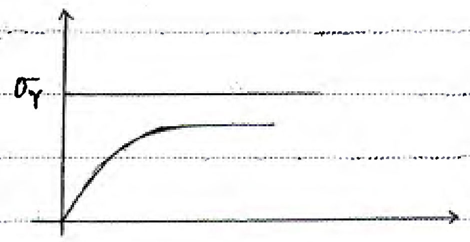




Elastica :   slenderness   طول نسبت به قطر مقطع زیاد است.



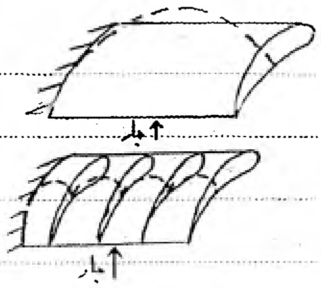
Buckling در فشار و برش رخ می‌دهد



$\sigma_Y > \sigma_{cr}$

Subject
Date

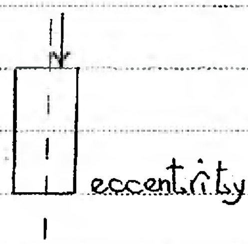
Buckling
- Primary: طول سازه و طول موج در یک order هستند.
- Secondary: طول موج در طول سازه order نیست.

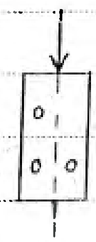


علل بروز Buckling:

1) یا قطعه off center بارگذاری شده است.

2) یا dislocation های موجود در قطعه تقارن سمت چپ و راست قطعه را بهم می‌زند.

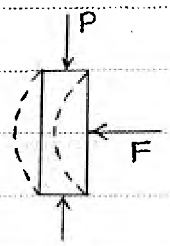




ESDU → Engineering science data unit.

P : a →

مقدار بار P از صفر به تدریج افزایش می‌یابد.



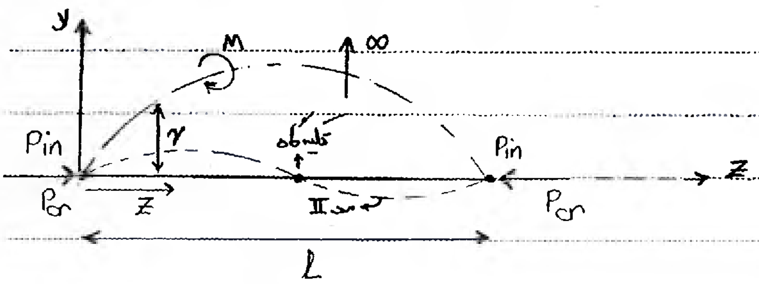
اگر $P < P_{cr}$ باشد، اگر بار F را وارد کنیم، قطعه دچار تغییر شکل عرضی می‌شود و بعد از برداشتن بار F، دوباره به سرجای خود باز می‌گردد. $\gamma \to 0$

اما اگر $P \to P_{cr}$، اگر بار F را هم برداریم، باز قطعه به سرجای خود باز نمی‌گردد. $\gamma \to \infty$

نمی‌توان $P > P_{cr}$ داشت، زیرا دیگر سازه ای باقی نمی‌ماند.

← برای بدست آوردن مدهای دیگر، باید از تکیه‌گاه استفاده کنیم. (برای مهار مدهای قبل)

Subject
Date



$$EI \frac{d^2 v(z)}{dz^2} = -M(z)$$

$$EI \frac{d^2 v(z)}{dz^2} = -P_{cr}\, v \qquad (1)$$

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} + \frac{P_{cr}}{EI} v(z) = 0 \qquad (2)$$

wellknown Solution: $v(z) = A\cos \mu z + B \sin \mu z$

where: $\mu^2 = \dfrac{P_{cr}}{EI}$ $A, B = cte$

B.C.'s:

$z = 0 \longrightarrow v = 0 \longrightarrow A = 0$

$z = l \longrightarrow v = 0 \longrightarrow B \sin \mu l = 0$

$$\begin{cases} \text{either } B = 0 \quad \times \qquad B \neq 0 \\ \text{or } \sin \mu l = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow \sin \mu l = 0 \longrightarrow \mu l = n\pi \quad n = 1, 2, \dots$

$\mu^2 l^2 = n^2 \pi^2 \longrightarrow \dfrac{P_{cr}}{EI} l^2 = n^2 \pi^2$

Subject
Date

$$\longrightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{\ell^2}}$$

$$v(z) = B\sin\mu z$$

برای اینکه σ_{cr} به σ_y نرسد، جای مناسب تکیه‌گاه برای قطعه بگذاریم ← دور تا دور قطعه را مهار کنیم.

← چون مناسب نیست که دور تا دور قطعه را مهار کنیم، از مقاطع کرجلیز استفاده می‌کنیم تا Buckling رخ ندهد. (در آزمایش‌ها)

$$n=1 \longrightarrow \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\ell^2\left(\frac{A}{I}\right)} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\ell}{r}\right)^2}$$

$$n=1: \quad \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\underbrace{\ell_e^2}_{\text{effective length}}}} \qquad \boxed{\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\ell_e}{r}\right)^2}}$$

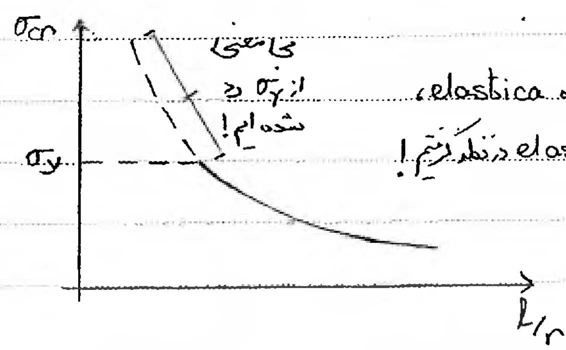
r: شعاع ژیراسیون سطح مقطع — radius of gyration, $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$

Buckling به سمتی رخ می‌دهد که مقطع ضعیف‌تر است.

Edges	ℓ_e/ℓ	B.C's
Both pined	1	$v=0$ @ $z=0,\ell$
Both fixed	0.5	$v=0$ @ $z=0,\ell$, $\frac{dv}{dt}=0$ @ $z=0,\ell$
one end fixed, one end free	2	$v=0$, $\frac{dv}{dt}=0$ @ $z=0$
one end fixed, one end pined	0.6998	$\frac{dv}{dt}=0$ @ $z=0$, $v=0$ @ $z=0,\ell$

تمرین 28: جدول فوق چگونه حاصل شده است؟

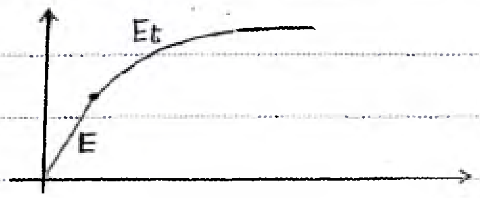
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\ell_e/r\right)^2}$$

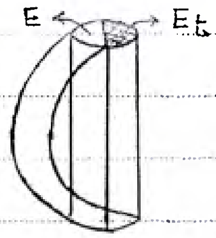


چون برای یک پدیده elastica، یک فرمول elastic در نظر گرفتیم!

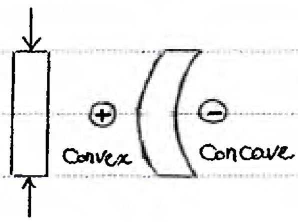
Subject
Date

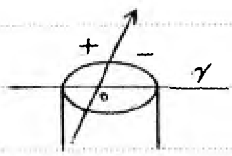
RMT → تئوری مدول کاهش یافته و TMT برای اصلاح ترسل :

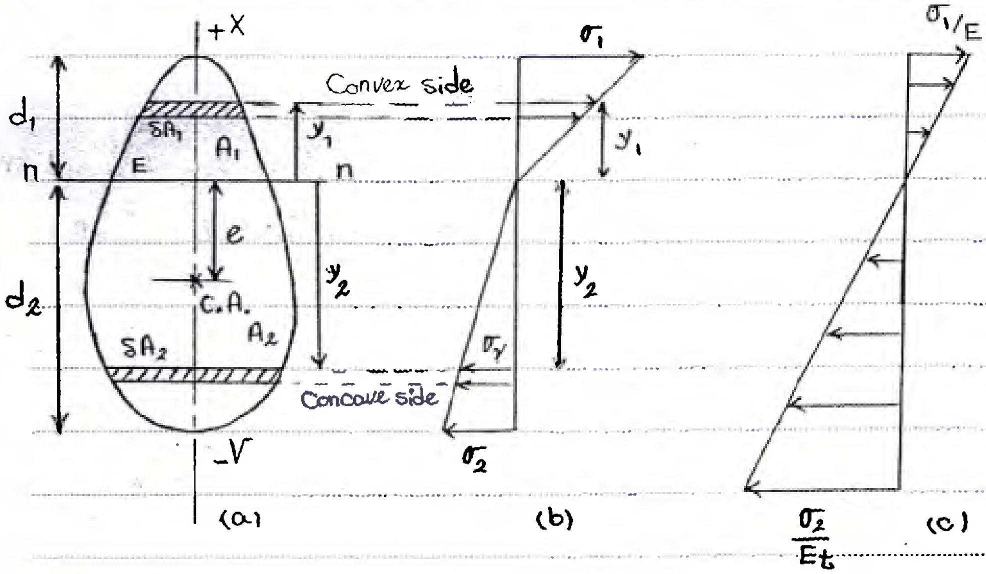




Reduced Modulus Theorem (RMT)
tangent Modulus Theorem (TMT)







Subject
Date

چون نیروی محوری ثابت می‌ماند:

$$\int_0^{d_1} \sigma_x \, dA = \int_0^{d_2} \sigma_r \, dA$$

$$\int_0^{d_1} \sigma_x (y_1 + e) \, dA + \int_0^{d_2} \sigma_r (y_2 - e) \, dA = -p v \quad (10)$$

Fig (b) : $\sigma_x = \dfrac{\sigma_1}{d_1} y_1 \qquad \sigma_r = \dfrac{\sigma_2}{d_2} y_2$

Mechanics of Materials :

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{d\theta}{dz} = \frac{\sigma_1}{E d_1} = \frac{\sigma_2}{E_t d_2} \quad (12)$$

(9) , (11) , (12) $\longrightarrow$ $\displaystyle\int_0^{d_1} \sigma_x \, dA - \int_0^{d_2} \sigma_r \, dA = 0$

$$\int_0^{d_1} \frac{\sigma_1}{d_1} y_1 \, dA - \int_0^{d_2} \frac{\sigma_2}{d_2} y_2 \, dA = 0$$

$$\frac{\sigma_1}{d_1} = E \frac{d^2 v}{dz^2} \quad , \quad \frac{\sigma_2}{d_2} = E_t \frac{d^2 v}{dz^2}$$

$$E \frac{d^2 v}{dz^2} \int_0^{d_1} y_1 \, dA - E_t \frac{d^2 v}{dz^2} \int_0^{d_2} y_2 \, dA = 0 \quad (13)$$

(10) , (11) , (12) :

$$\frac{d^2 v}{dz^2} \left(E \int_0^{d_1} y_1^2 \, dz + E_t \int_0^{d_2} y_2^2 \, dA \right) + e \frac{d^2 v}{dz^2} \left(E \int_0^{d_1} y_1 \, dA - E_t \int_0^{d_1} y_2 \, dA \right)$$

$$= -p v \quad (14)$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} (E I_1 + E_t I_2) = -p v = E_r I \qquad E_r = \frac{E I_1 + E_t I_2}{I}$$

PAPCO

Subject
Date

$E_r < E$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} E_r I = -pv$$

$$E_r I \frac{d^2 v(z)}{dz^2} + p v(z) = 0$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_r I}{l_e^2} \quad \text{RMT}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{l_e^2} \quad \text{TMT}$$

$\longrightarrow$ باز هم خوب جواب نمی دهد

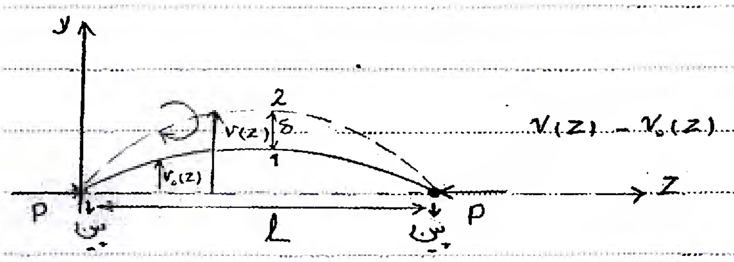
روش های بهتر :

Rankine

straight line

Johnson's parabolic formulae

Effect of initial imperfection :



$$\frac{EI\, d^2 (v - v_0)}{dz^2} = -P v(z) \longrightarrow \frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 v = \frac{d^2 v_0}{dz^2} \qquad \lambda = \frac{P}{EI} \qquad (23)$$

assume : $$v_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi z}{l} \qquad (24)$$

(24) $\longrightarrow$ (23) : $$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} + \lambda^2 v(z) = \frac{-\pi^2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n \sin \frac{n\pi z}{l}$$

PAPCO

Subject
Date

general solution: $v(z) = B\cos\lambda z + D\sin\lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 A_n}{n^2 - \alpha} \sin\frac{n\pi z}{l}$

$B, D = cte's \qquad , \qquad \alpha = \frac{\lambda^2 l^2}{\pi^2}$

B.C.'s: $@\ z=0 \quad v=0 \longrightarrow B=0$

$@\ z=l \quad v=0 \qquad\qquad \lambda l = n\pi$

$\longrightarrow D\sin\lambda l = 0 \xrightarrow{D\neq 0} \sin\lambda l = 0 \xrightarrow{\lambda^2 = \frac{P}{EI}} P_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}$

$\hookrightarrow D=0 \;:\; v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 A_n}{n^2 - \alpha} \sin\frac{n\pi z}{l}$

علی رغم اینکه در سیستم imperfection وجود داشت، P_{cr} همان مقدار محاسبه شده توسط اویلر محاسبه
شد، در نتیجه imperfection روی بار بحرانی کمانش تأثیری ندارد.

$$\alpha = \frac{\lambda^2 l^2}{\pi^2} = \frac{P l^2}{\pi^2 EI} = \frac{P}{\frac{\pi^2 EI}{l^2}} = \frac{P}{P_{cr}}$$

$$v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 A_n}{n^2 - \alpha} \sin\frac{n\pi z}{l}$$

$\longrightarrow P \rightarrow P_{cr} \longrightarrow (\alpha \rightarrow 1) \longrightarrow (v \rightarrow \infty)$

$n=1 \quad , \quad v(z) = \frac{A_1}{1-\alpha} \sin\frac{\pi z}{l}$

$$v\Big|_{z=l/2} = v_{max}$$

$$\hat{v} = \frac{A_1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$$

if $P=0 \longrightarrow \hat{v}_0 = \frac{A_1}{1} \longrightarrow \hat{v}_0 = A_1$

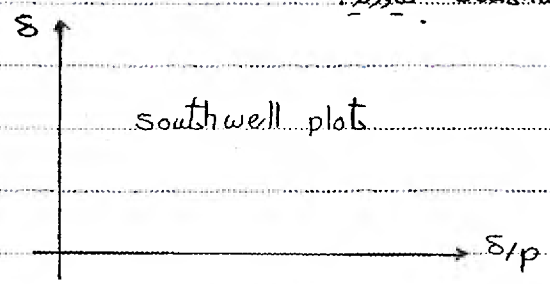
Subject
Date

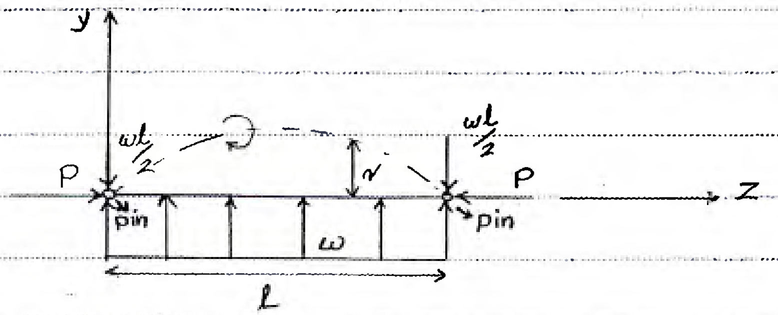
$$\hat{\delta} = \hat{v} - \hat{v}_0 = \hat{v} - A_1 \xrightarrow{\hat{v} = \hat{\delta} + A_1} \hat{\delta} = \frac{A_1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} - A_1$$

$$\hat{\delta} = P_{cr} \frac{\hat{\delta}}{P} - \hat{v}_0$$

29

تمرین : یک نمودار southwell plot بیاورید.





Elastic problems : $M, Q, \sigma, \gamma = f(\text{Load})$

جابجایی

Elastica problems : $M, Q, \sigma, \gamma = f(v, \text{Load})$

$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} = -M(z) \quad : \text{Elastic}$$

$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} = -Pv \quad : \text{Elastica}$$

$$M = Pv + \frac{\omega l z}{2} - \frac{\omega z^2}{2} = -EI \frac{d^2 v}{dz^2}$$

PAPCO

Subject
Date

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{P}{EI} v = \frac{w}{2EI}(z^2 - lz)$$

General Solution : $v(z) = A\cos\lambda z + B\sin\lambda z + \frac{w}{2P}\left(z^2 - lz - \frac{2}{\lambda^2}\right)$

$A , B = cte$, $\lambda^2 = \frac{P}{EI}$

B.C's : $z = 0 , l \longrightarrow v = 0$ $\quad A = \frac{w}{\lambda^2 P}$, $B = \frac{w}{\lambda^2 P \sin\lambda l}(1 - \cos\lambda l$

$$\longrightarrow v = \frac{w}{\lambda^2 P}\left[\cos\lambda z + \left(\frac{1-\cos\lambda l}{\sin\lambda l}\right)\sin\lambda z\right] + \frac{w}{2P}\left(z^2 - lz - \frac{2}{\lambda^2}\right)$$

$$v_{max}\Big|_{@ z = l/2} = \frac{w}{\lambda^2 P}\left(\sec\frac{\lambda l}{2} - 1\right) - \frac{w l^2}{8P} \quad (31)$$

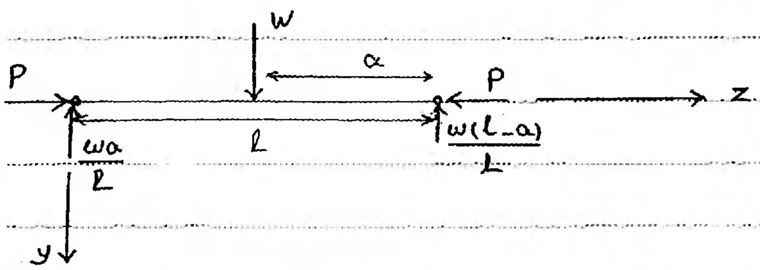
$$M_{max}\Big|_{@ z = l/2} = -P v_{max} - \frac{w l^2}{8} = \frac{w}{\lambda^2}\left(1 - \sec\frac{\lambda l}{2}\right)$$

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI} \longrightarrow M_{max} = \frac{EIw}{P}\left(1 - \sec\frac{\sqrt{\frac{P}{EI}}\, l}{2}\right)$$

if: $P \to P_{cr}$: $M_{max} \to \infty \Rightarrow \sec\frac{\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}\, l}{2} \to \infty \Rightarrow \frac{\sqrt{P_{cr}/EI}\, l}{2} = \frac{\pi}{2}$

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \longrightarrow$ بازم در بار کمانشی بحرانی تغییری ایجاد نشد.

Subject
Date



$$\begin{cases} z \leq l-a : & EI \dfrac{d^2 v}{dz^2} = -M = -Pv - \dfrac{w a z}{l} \\ z \geq l-a : & EI \dfrac{d^2 v}{dz^2} = -M = -Pv - \dfrac{w'}{l}(l-a)(l-z) \end{cases}$$

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI}$$

General solution :

$$\begin{cases} v = A\cos\lambda z + B\sin\lambda z - \dfrac{wa}{Pl} z & z \leq l-a \\ v = C\cos\lambda z + D\sin\lambda z - \dfrac{w}{Pl}(l-a)(l-z) & z \geq l-a \end{cases}$$

B.C.'s : $z = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow A = 0$

$z = l \rightarrow v = 0 \rightarrow C = -D\tan\lambda l$

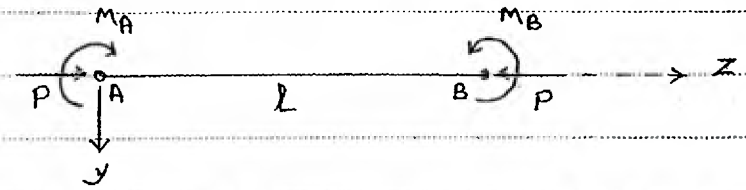
در $z = l-a$ شیب و خیز تیر از دو فرمول باید برابر باشد.

$$v = \frac{W \sin\lambda a}{P\lambda \sin\lambda l} \sin\lambda z - \frac{wa}{Pl} z \qquad z \leq l-a \qquad (38)$$

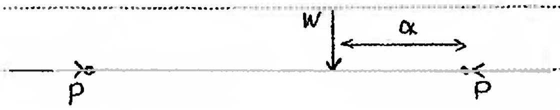
$$v = \frac{W \sin\lambda(l-a)}{P\lambda \sin\lambda l} \sin\lambda(l-z) - \frac{w}{Pl}(l-a)(l-z) \qquad z \geq l-a \qquad (39)$$

Particular Case : $a = L/2 \qquad v_{max} = \dfrac{W}{2P\lambda}\tan\dfrac{\lambda l}{2} - \dfrac{Wl}{4P}$

Subject
Date



شبیه سازی با مسأله قبل :



$W\uparrow \quad , \quad a\downarrow \qquad \underset{a\to 0}{Wa = cte} = M_B$

M_B & P

$\sin\lambda a \xrightarrow{a\to 0} \lambda a$

$Wa = M_B$

$$(38) \longrightarrow \quad v = \frac{M_B}{P}\left(\frac{\sin\lambda z}{\sin\lambda \ell} - \frac{z}{\ell}\right) \quad (40)$$

M_A & $P \qquad a \longrightarrow \ell$

$\sin\lambda(\ell - a) \simeq \lambda(\ell - a)$

$W(\ell - a) = M_A$

$$(39) \longrightarrow \quad v = \frac{M_A}{P}\left(\frac{\sin\lambda(\ell - z)}{\sin\lambda \ell} - \frac{\ell - z}{\ell}\right) \quad (41)$$

با استفاده از اصل سوپرپوزیشن :

$$v = \frac{M_B}{P}\left(\frac{\sin\lambda z}{\sin\lambda z} - \frac{z}{\ell}\right) + \frac{M_A}{P}\left(\frac{\sin\lambda(\ell - z)}{\sin\lambda z} - \frac{\ell - z}{\ell}\right) \quad (42)$$

Subject
Date

$M_A = Pe_A$ $\qquad$ $M_B = Pe_B$

شبیه‌سازی با مسأله قبل :

$$v = e_B\left(\frac{\sin\lambda z}{\sin\lambda l} - \frac{z}{l}\right) + e_A\left(\frac{\sin\lambda(l-z)}{\sin\lambda l} - \frac{l-z}{l}\right)$$

Energy Method :

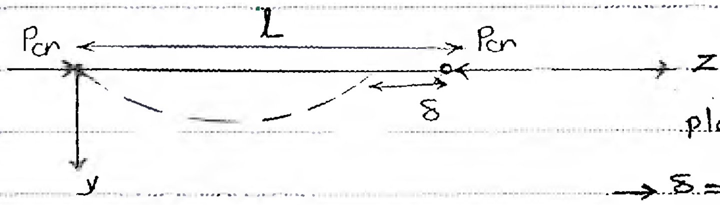


plate $\Rightarrow$: $\lambda = \int_0^a \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx$

$$\rightarrow \delta = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 dz$$

$U = \int \frac{1}{2} M d\theta \xrightarrow{\text{Linear system}} d\theta = \frac{M}{EI} dz$

$$\text{strain Energy} = U = \int \frac{M^2}{2EI} dz \quad (44)$$

$$EI\frac{d^2v}{dz^2} = -M$$

$$\rightarrow U = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)^2 dz \quad (45)$$

potential Energy : $V = -P_{cr}\,\delta = -\frac{P_{cr}}{2}\int_0^l \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 dz \quad (46)$

$$T.P.E = U + V = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)^2 dz - \frac{P_{cr}}{2}\int_0^l \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 dz \quad (48)$$

General form : $T.P.E = U + V = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dz - \frac{P_{cr}}{2}\int_0^l \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 dz \quad (47)$

Subject
Date

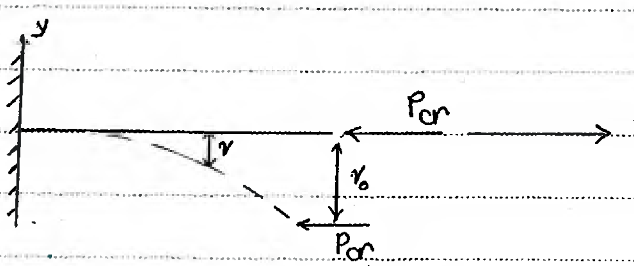
assume : $v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi z}{l}$ satisfies our boundary conditions (49
(pin-ended column) $v = 0 \rightarrow z = 0, l$
$\frac{d^2v}{dz^2} = 0 \rightarrow z = 0, l$

$$(49) \rightarrow (48) \quad U + V = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 A_n^2 - \frac{\pi^2 P_{cr}}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2$$

$$\frac{\partial (U+V)}{\partial A_n} = 0 \longrightarrow \frac{\pi^4 EI n^4 A_n}{2L^3} - \frac{\pi^2 P_{cr} n^2 A_n}{2L} = 0 \longrightarrow P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

که دوباره رابطهٔ اولر ظاهر شد و نتوانستیم A_n را بدست آوریم.

مثال:



$$v = \frac{v_0 z^2}{2l^3}(3l - z) \longrightarrow \text{B.C.'s : } \checkmark$$

@ $z = 0$: $v = 0$

($v = Az^3 + Bz^2 + Cz + D$) (جابجایی را بصورت   @ $z = 0$: $\frac{dv}{dz} = 0$

در نظر گرفته و با اعمال 4 شرط مرزی، ضرایب را بدست می‌آوریم.)   @ $z = l$: $v = v_0$

@ $z = l$: $\frac{d^2v}{dz^2} = 0 = M$

$$M = P_{cr}(v_0 - v)$$

$$U + V = \frac{P_{cr}^2 v_0^2}{2EI} \int_0^l \left(1 - \frac{3z^2}{2l^2} + \frac{z^3}{2l^3}\right)^2 dz - \frac{P_{cr}}{2} \int_0^l \left(\frac{3v_0}{2l^3}\right)^2 z^2 (2l - z)^2 dz$$

$$= \frac{17}{35} \frac{P_{cr}^2 v_0^2 l}{2EI} - \frac{3}{5} P_{cr} \frac{v_0^2}{l}$$

Subject

Date

$$\frac{\partial (U+V)}{\partial v_0} = 0 \longrightarrow P_{cr} = \frac{42EI}{17L^2} = 2.471\frac{EI}{L^2} \quad (I)$$

we had : $P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{4L^2} = 2.467\dfrac{EI}{L^2}$ (II)

(I) , (II) $\longrightarrow$ 0.1 % error

تمرین 30 : مسأله فوق را با نرم افزار المان محدود مدل کنید.

Subject
Date