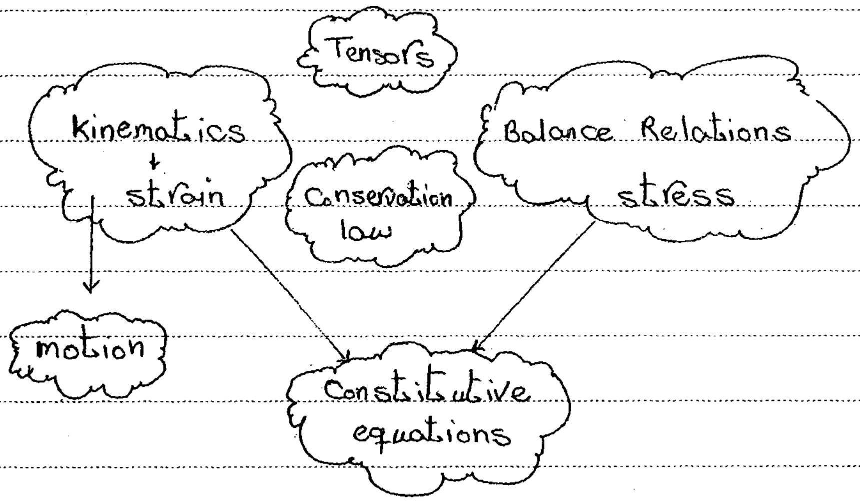
Subject

Date

مکانیک محیط پیوسته

دکتر فتح اله طاهری بهروز



امتحان میان ترم ۹۱,۹,۱۲

International Jurnal of nonlinear mechanics

International Jurnal of solids and structurs

International Jurnal of mechanics and materials in Design

Continuum mechanics and ThermoDynamics

Journal of mechanics and physics of solids

Journal of Engineering mathematics

key words: Finite strain , strain measure

Subject
Date

Indicial Notation :

Einestein's Summation Convection

$$S = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i x_i = a_i x_i \qquad i : \text{dummy index}$$

اگر اندیس زائد i در بازه خاصی تعریف نشده باشد، 1 تا 3 در نظر گرفته می‌شود.

این ساده سازی (حذف $\sum$) فقط در صورتی انجام پذیر است که اندیس تکراری در هر جمله موجود باشد.

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2$$
$$+ a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3$$

اندیس آزاد (Free Index)

$$x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$$
$$x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \longrightarrow x'_i = a_{ij} x_j$$
$$x'_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3$$

اندیس آزاد یا همان تعداد معادلات

تنها یک بار در هر ترم نمایان می‌شود. بوسیله این اندیس، معادلات نوشته می‌شوند.

مثال: $a_i + k_i = c_i \longrightarrow a_1 + k_1 = c_1 \,,\; a_2 + k_2 = c_2 \,,\; a_3 + k_3 = c_3$

$a_i = b_j \quad \times \longrightarrow$ meaningless

$$a_i + b_i c_j d_j = f_i \longrightarrow a_1 + b_1 c_1 d_1 + b_1 c_2 d_2 + b_1 c_3 d_3 = f_1$$
$$\vdots$$

$$T_{ij} = A_{im} A_{jm} \longrightarrow T_{11} = A_{11} A_{11} + A_{12} A_{12} + A_{13} A_{13}$$
$$\vdots$$

در مثال فوق، i اندیس آزاد است.

Subject
Date

Kroncker Delta : δ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \ , \ \delta_{12} = \delta_{23} = \delta_{13} = 0$$

$$\delta_{ii} = 3$$

$$\delta_{im}\, \alpha_m = \alpha_i$$ (باید m=i باشد)

$$\delta_{im}\, T_{mj} = T_{ij}$$

$$\delta_{im}\, \delta_{mj} = \delta_{ij}$$

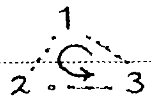
$$\delta_{im}\, \delta_{mn}\, \delta_{nj} = \delta_{ij}$$

$$\underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}_{} = \delta_{ij}$$

ضرب داخلی دو بردار یکه

نماد جایگشت : (permutation symbol)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \overrightarrow{1,2,3} \\ -1 & \overleftarrow{1,2,3} \\ 0 & \text{اندیس تکراری} \end{cases}$$



$$\varepsilon_{123} = 1 \qquad \varepsilon_{321} = -1 \qquad \varepsilon_{112} = 0$$

$$\varepsilon_{231} = 1 \qquad \varepsilon_{132} = -1 \qquad \varepsilon_{122} = 0$$

$$\varepsilon_{312} = 1 \qquad \varepsilon_{213} = -1 \qquad \varepsilon_{313} = 0$$

ضرب خارجی دو بردار : $\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk}\, \hat{e}_k$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj}$$

Subject

Date

$\delta - \varepsilon$ Identity :

$$\varepsilon_{ijm}\,\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\,\delta_{jl} - \delta_{il}\,\delta_{jk}$$

ex) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijn} = \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{nij} = \delta_{kn}\,\delta_{ii} - \delta_{ki}\,\delta_{in} = 3\delta_{kn} - \delta_{kn} = 2\delta_{kn}$

$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = \delta_{ii}\,\delta_{jj} - \delta_{ij}\,\delta_{ji} = \delta_{ii}\,\delta_{jj} - \delta_{ii} = 3*3 - 3 = 6$

substitution :

$a_i = u_{im}\,b_m$

$b_i = V_{im}\,C_m$

$\rightarrow b_m = V_{mn}\,C_n$

$\longrightarrow a_i = u_{im}\,V_{mn}\,C_n$

Multiplication :

$p = a_m b_m \quad , \quad q = C_m d_m \longrightarrow pq = a_m b_m C_n d_n$

Factoring : فاکتورگیری

$T_{ij}\,n_j - \lambda\,n_i = 0$

$n_i = \delta_{ji}\,n_j$

$\longrightarrow T_{ij}\,n_j - \lambda\,\delta_{ji}\,n_j = 0$

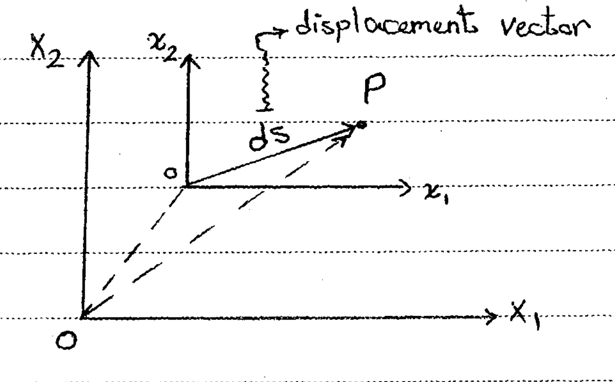
$n_j\,(T_{ij} - \lambda\,\delta_{ji}) = 0$

Contraction : انقباض کردن

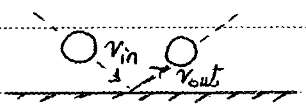
$T_{ij} \longrightarrow T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$ "مثلاً برای پیدا کردن جمع المان های قطر اصلی ماتریس"

PAPCO

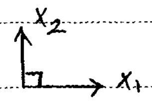
تنها چیزی که ثابت بوده و مستقل از دستگاه‌های مختصات می‌باشد، بردار جابجایی است.



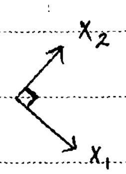
برای ایجاد تغییر جهت و اندازه بردارهای مختلف، می‌توان یک ماتریس مناسب در آن‌ها ضرب کرد.



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}_{out} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{in}$$



$$\{v\}_{out} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{v\}_{in}$$



تانسور و بردار کمیت‌های هندسی هستند و به ناظر و دستگاه مختصات مربوط نمی‌شوند ولی مؤلفه‌هایشان تغییر خواهند کرد. مانند تنش و سرعت

Subject
Date

مثال: $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

$$\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{i1}\delta_{i1} + \delta_{i2}\delta_{i2} + \delta_{i3}\delta_{i3}$$
$$= \delta_{11}\delta_{11} + \delta_{12}\delta_{12} + \delta_{13}\delta_{13} + \delta_{22}\delta_{22} + \delta_{21}\delta_{21} + \delta_{23}\delta_{23}$$
$$+ \delta_{31}\delta_{31} + \delta_{32}\delta_{32} + \delta_{33}\delta_{33} = 3$$

$$\varepsilon_{ijk}A_jA_k = 0 \longrightarrow \varepsilon_{ijk}A_kA_j = \varepsilon_{ikj}A_jA_k = -\varepsilon_{ijk}A_jA_k \longrightarrow 2\varepsilon_{ijk}A_kA_j = 0$$

$$\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0 \quad \begin{cases} \text{if } i \neq j \rightarrow \delta_{ij} = 0 \rightarrow 0 \\ \text{if } i = j \rightarrow \varepsilon_{ijk} = 0 \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = 6$$

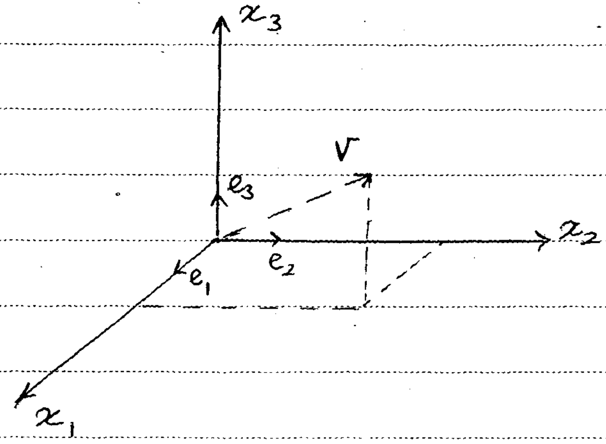
sum on i: $\varepsilon_{1jk}\varepsilon_{k1j} + \varepsilon_{2jk}\varepsilon_{k2j} + \varepsilon_{3jk}\varepsilon_{k3j} = 6$

sum on j: $\varepsilon_{12k}\varepsilon_{k12} + \varepsilon_{13k}\varepsilon_{k13} + \varepsilon_{21k}\varepsilon_{k21} + \varepsilon_{23k}\varepsilon_{k23} + \varepsilon_{31k}\varepsilon_{k31} + \varepsilon_{32k}\varepsilon_{k32} = 6$

Sum on k: $\varepsilon_{123}\varepsilon_{312} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{213} + \varepsilon_{213}\varepsilon_{321} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{123} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{221} + \varepsilon_{321}\varepsilon_{132} = 6$

$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$:جمع بردارها

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$:ضرب داخلی بردارها



$$\begin{cases} V_1 = \vec{V} \cdot \vec{e}_1 \\ V_2 = \vec{V} \cdot \vec{e}_2 \\ V_3 = \vec{V} \cdot \vec{e}_3 \end{cases} \longrightarrow V_i = \vec{V} \cdot \vec{e}_i$$

Subject
Date

$$\vec{V} = V_i \vec{e}_i$$
$$\vec{W} = W_j \vec{e}_j$$
$$\vec{V} \cdot \vec{W} = V_i \vec{e}_i \cdot W_j \vec{e}_j = V_i W_j \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}_{\delta_{ij}}$$

$$\longrightarrow \vec{V} \cdot \vec{W} = V_i W_j \delta_{ij} = V_i W_i = V_1 W_1 + V_2 W_2 + V_3 W_3$$

ضرب خارجی بردارها : $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta$

vector product or outer product "ضرب خارجی یا برداری"

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$
$$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$$
$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

dot product or inner product "ضرب داخلی یا نقطه‌ای"

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$
$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$$
$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

scalar triple product :

حجم متوازی السطوح حاصل از سه بردار : $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$$= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

Vector triple product :

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b})$$

Subject
Date

$$\vec{A} = A_i \vec{e}_i$$
$$\vec{B} = B_j \vec{e}_j$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = A_i \vec{e}_i \times B_j \vec{e}_j$$
$$C_K \vec{e}_K = A_i B_j \varepsilon_{ijK} \vec{e}_K$$
$$C_K = A_i B_j \varepsilon_{ijK}$$

Dyadic Product :

$\underbrace{\vec{a} \otimes \vec{b}}_{\text{ضرب تانسوری یا دیادیک}} = \vec{a}\vec{b}$ تانسور :

خواص ضرب دیادیک :

$$(\alpha \vec{a}) \otimes \vec{b} = \vec{a} \otimes (\alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \otimes \vec{b})$$

$$\vec{a} \otimes (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{a} \otimes \vec{c} \qquad (\vec{a} + \vec{b}) \otimes \vec{c} = \vec{a} \otimes \vec{c} + \vec{b} \otimes \vec{c}$$

$$\vec{a} \otimes \vec{b} \neq \vec{b} \otimes \vec{a}$$

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}) \qquad \vec{a} \cdot (\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$\vec{c} \times (\vec{a}\vec{b}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \vec{b} \qquad (\vec{a}\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\underline{\underline{C}} = \vec{a} \otimes \vec{b} = a_i \vec{e}_i \otimes b_j \vec{e}_j = a_i b_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$
$$= C_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = C_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$$

$\underbrace{(\vec{a} \otimes \vec{b})}_{\text{تانسور}} \cdot \underbrace{\vec{c}}_{\text{بردار}} =$ (اعمال تانسور بر روی بردار $\vec{c}$) ← تغییر جهت بردار $\vec{c}$

$$= \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$\vec{a} \otimes \vec{b} \quad , \quad \vec{r} \otimes \vec{s}$$

اگر این دو تانسور روی هر بردار $\underbrace{\vec{v}}_{\text{دلخواه}}$ اعمال شوند، حاصل دو بردار برابر باشد، این دو با هم یکسان هستند.

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{v} = (\vec{r} \otimes \vec{s}) \cdot \vec{v}$$

اگر بین دو بردار علامت ضرب (.) یا (×) نبود، ضرب دو بردار از نوع دیادیک است.

Subject
Date

تانسور $\rightarrow \quad \underline{\underline{T}} = T_{ij}\, \vec{e}_i \vec{e}_j = T_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$

هر تانسور را روی دو بردار نشان می‌دهیم. ←

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}} \cdot \vec{a} = T_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \cdot a_k \vec{e}_k = T_{ij}\, \vec{e}_i\, (\vec{e}_j \cdot a_k \vec{e}_k)$$
$$= T_{ij}\, a_k\, \vec{e}_i\, \delta_{jk} = T_{ij}\, a_j\, \vec{e}_i$$

$$\underline{\underline{T}} \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}a_1 + T_{12}a_2 + T_{13}a_3 \\ T_{21}a_1 + T_{22}a_2 + T_{23}a_3 \\ T_{31}a_1 + T_{32}a_2 + T_{33}a_3 \end{bmatrix}$$

$$= T_{1j}\, a_j\, \vec{e}_1 + T_{2j}\, a_j\, \vec{e}_2 + T_{3j}\, a_j\, \vec{e}_3$$

$(\vec{a}\vec{b}) \overset{\circ}{\square} (\vec{c}\vec{d}) = (\vec{a} \circ \vec{c})(\vec{b} \,\square\, \vec{d}) \qquad \circ, \square = \cdot$ یا $\times$

مثال:
$\vec{a}\vec{b} : \vec{c}\vec{d} = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d})$ a scalar
$\vec{a}\vec{b} \overset{\times}{\cdot} \vec{c}\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d})$ a vector
$\vec{a}\vec{b} \underset{\times}{\cdot} \vec{c}\vec{d} = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \times \vec{d})$ a vector
$\vec{a}\vec{b} \overset{\times}{\times} \vec{c}\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{c})(\vec{b} \times \vec{d})$ a dyad

تانسور مرتبهٔ 3

$\underline{\underline{A}} = C \cdot \vec{b} \longleftrightarrow A_{ij} = C_{ijk}\, b_k$

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{D}} \longleftrightarrow A_{ij} = B_{ik}\, D_{kj}$

$\vec{a} = C : \underline{\underline{B}} \longleftrightarrow a_i = C_{ijk}\, B_{jk}$: $C_{ijk}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k : B_{lm}\, e_l \otimes e_m = C_{ijk} B_{lm} \delta_{jl} \delta_{km}$
$= C_{ijk}\, B_{jk}\, \vec{e}_i = a_i\, \vec{e}_i$

تانسور مرتبهٔ 3

Subject
Date

تانسور یک تبدیل خطی است که یک بردار را به یک بردار دیگر تبدیل می‌کند.

a dyad between two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is:
an abstract mathematical Constraction denoted $\vec{a} \otimes \vec{b}$, that takes on meaning when it operates on an arbitrary vector $\vec{V}$.

$$[\vec{a} \otimes \vec{b}] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{T}} \cdot \vec{a} = \vec{b} \\ \underline{\underline{T}} = \vec{V} \otimes \vec{W} = V_i W_j e_j e_i \longrightarrow T_{ij} = V_i W_j \end{cases}$$

Subject

Date

Components of a Tensor:

$\underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_i = T_{ji}\, \vec{e}_j$

$(T_{jk}\, \vec{e}_j \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_i = T_{jk}\, \vec{e}_j\, \delta_{ki} = T_{ji}\, \vec{e}_j$

$T_{ij} = \vec{e}_i \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_j$

اثبات : $\underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_i = T_{ji}\, e_j$

با تبدیل $i \to j$: $\underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_j = T_{ij}\, \vec{e}_i \longrightarrow \vec{e}_i \cdot \underset{\uparrow}{\underline{\underline{T}}} \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot (T_{kj}\, \vec{e}_k) = T_{ij}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad T_{km}\, \vec{e}_k \otimes \vec{e}_m$

$\longrightarrow T_{ij} = \vec{e}_i \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_j$

$\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{S}}$

$W_{ij} = \vec{e}_i \cdot (\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{S}})\, \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_j + \vec{e}_i \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \vec{e}_j = T_{ij} + S_{ij}$

ماتریس مشخصه تانسور

$(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{S}}) \cdot \vec{\alpha} = \underline{\underline{T}} \cdot (\underline{\underline{S}} \cdot \vec{\alpha})$

$(T.S)_{ij} = \vec{e}_i \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{S}}) \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot \underline{\underline{T}} \cdot (\underline{\underline{S}} \cdot \vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot \underline{\underline{T}} \cdot (S_{mj}\, \vec{e}_m)$

$= S_{mj}\, \vec{e}_i \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_m = S_{mj}\, T_{im}$

$\longrightarrow (TS)_{ij} = T_{im}\, S_{mj}$

Subject
Date

$(\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{S}}).\vec{\alpha} = \underline{\underline{T}}.(\underline{\underline{S}}.\vec{\alpha})$: product of two tensors

$(\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{T}}).\vec{\alpha} = \underline{\underline{S}}.(\underline{\underline{T}}.\vec{\alpha})$

$$(T.S)_{ij} = \vec{e}_i.(\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{S}}).\vec{e}_j = \vec{e}_i.\underline{\underline{T}}.(\underline{\underline{S}}.\vec{e}_j) = \vec{e}_i.\underline{\underline{T}}.(S_{mj}\vec{e}_m)$$

$$= S_{mj}(e_i.\underline{\underline{T}}.e_m) = S_{mj}T_{im}$$

$$\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{S}} = (T_{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j).(S_{kl}\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l)$$

$$= T_{ij}S_{kl}(\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j.\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l) = T_{ij}S_{jl}\vec{e}_i\vec{e}_l$$

Transpose of a Tensor:

$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$

$\underline{\underline{T}}^T = T_{ji}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j \longrightarrow \underline{\underline{T}}^T = T^T_{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$

$T^T_{ij} = T_{ji}$

$\underline{\underline{T}}^T.\vec{\alpha} = \vec{\alpha}.\underline{\underline{T}}$

$$\vec{\alpha}.\underline{\underline{T}} = \alpha_i\vec{e}_i.(T_{jL}\vec{e}_j\otimes\vec{e}_L) = \alpha_iT_{jL}\underbrace{(\vec{e}_i.(\vec{e}_j\otimes\vec{e}_L))}_{\delta_{ij}e_L} = \alpha_iT_{iL}\vec{e}_L$$

$$\underline{\underline{T}}^T.\vec{\alpha} = T_{ji}.(\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j.\alpha_k\vec{e}_k) = T_{ki}\alpha_k\vec{e}_i$$

Subject
Date

$$\vec{a} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \underline{\underline{T}}^T \cdot \vec{a}$$

$$(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{S}})^T = \underline{\underline{S}}^T \cdot \underline{\underline{T}}^T$$

$\underline{\underline{T}}^T = \underline{\underline{T}}$ if $\underline{\underline{T}}$ is symmetric

Trace of a Tensor:

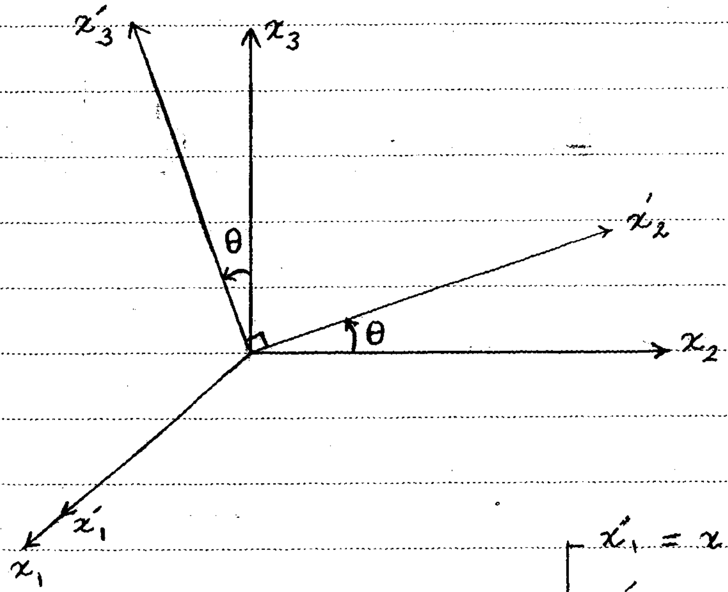
$$tr(\underline{\underline{T}}) = tr(T_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) = T_{ij}\, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = T_{ij}\, \delta_{ij} = T_{ii}$$

$$tr(\vec{a} \otimes \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$tr(\alpha \underline{\underline{T}}) = \alpha\, (tr(\underline{\underline{T}}))$$

$$tr(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{S}}) = tr(\underline{\underline{T}}) + tr(\underline{\underline{S}})$$

principle of Frame Indifference:



$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 \cos\theta + x_3 \sin\theta \\ x'_3 = x_3 \cos\theta - x_2 \sin\theta \end{cases}$$

Subject
Date

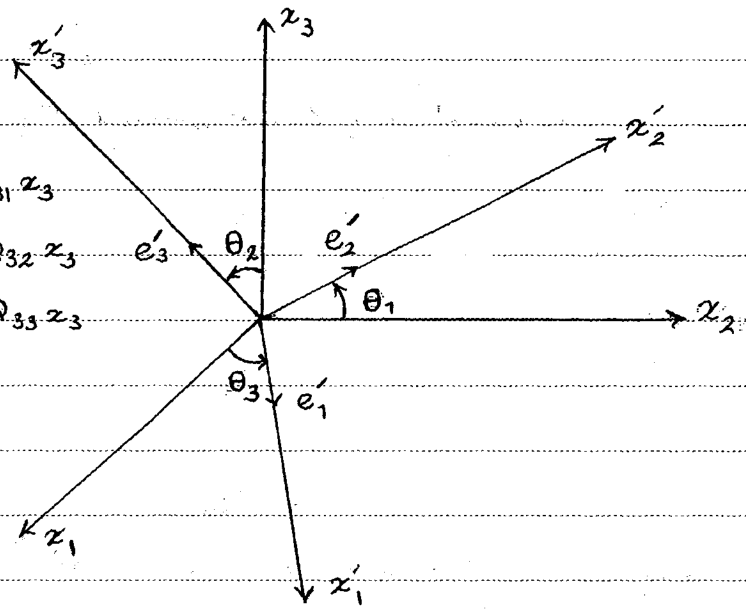
$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$x'_i = Q_{ji}\, x_j$$

$x'_1 = Q_{11}\, x_1 + Q_{21}\, x_2 + Q_{31}\, x_3$

$x'_2 = Q_{12}\, x_1 + Q_{22}\, x_2 + Q_{32}\, x_3$

$x'_3 = Q_{13}\, x_1 + Q_{23}\, x_2 + Q_{33}\, x_3$



$$\vec{e}'_i = \underline{\underline{Q}} \cdot \vec{e}_i = Q_{mi}\, \vec{e}_m$$

$$Q_{11} = \vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_1$$ cos زاویه میان $\hat{e}_1$, $\hat{e}'_1$

همین طور برای دو محور دیگر نیز نوشته می‌شود.

$$Q_{ij} = \cos(\vec{e}_i , \vec{e}'_j)$$

$$\begin{cases} T_{e_1, e_2, e_3} \longrightarrow T_{ij} = \hat{e}_i \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \hat{e}_j \\ T'_{e'_1, e'_2, e'_3} \longrightarrow T'_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \hat{e}'_j \end{cases}$$

$$T'_{ij} = Q_{mi}\,\vec{e}_m \cdot \underline{\underline{T}} \cdot Q_{nj}\,\vec{e}_n = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn}$$

قانون تبدیل تانسورها :

$$\boxed{T'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn}}$$

$$\boxed{T_{ij} = Q_{im}Q_{jn}T'_{mn}}$$

قوانین تبدیل :

$\alpha' = \alpha$ scalar

$a'_i = Q_{mi}\,a_m$ vector

$T'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn}$ 2nd Tensor

$S'_{ijk} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}S_{mnr}$ 3rd Tensor

اگر بخواهیم نشان دهیم که A_{ij} یک تانسور مرتبه 2 یا 3 است، باید قوانین فوق ارضا شوند.

addition rule :

$$T_{ij} + S_{ij} = T_{ij} + S_{ij}$$

اگر مؤلفه های دو تانسور مرتبه 2 را باهم جمع کنیم، تانسور حاصل نیز مرتبه 2 است. همینطور در مورد تانسور مرتبه 3.

$$T'_{ijk} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}T_{mnr}$$

$$S'_{ijk} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}S_{mnr}$$

Subject

Date

$$T'_{ijk} + S'_{ijk} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} T_{mnr} + Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} S_{mnr}$$

$$W'_{mnr} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{kr} (\underbrace{T_{mnr} + S_{mnr}}_{W_{mnr}})$$

$$\longrightarrow W'_{ijk} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} W_{mnr}$$

"Multiplication rule" ضرب مؤلفه‌های دو تانسور

1) $a_i a_j$ تانسور مرتبه 2   2) $a_i a_j b_k$ تانسور مرتبه 3   3) $T_{ij} T_{kl}$ تانسور مرتبه 4

برای اینکه بدانیم تانسور چه مرتبه‌ای خواهیم داشت، باید تانسور را در قانون تبدیل تانسورها چک کنیم.

$$\begin{cases} S_{ij} = a_i a_j \\ S'_{ij} = a'_i a'_j \end{cases} \qquad \text{قانون تبدیل بردار} \begin{cases} a'_i = Q_{mi} \cdot a_i \\ a'_j = Q_{nj} \cdot a_n \end{cases}$$

$$S'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} \cdot \underbrace{a_m a_n}_{S_{mn}}$$

"Quotien Rule" "برای شناسایی تانسورها"

اگر a_i مؤلفه‌های یک بردار دلخواه و T_{ij} مؤلفه‌های یک تانسور دلخواه باشند و رابطه‌ی $a_i = T_{ij} . b_j$ در همه محورهای مختصات صادق باشد، آنگاه b_j یک بردار است.

$$\text{قانون تبدیل} \begin{cases} a_i = Q_{im} a'_m \\ T_{ij} = Q_{im} Q_{jn} T'_{mn} \end{cases} \qquad a_i = T_{ij} . b_j \xrightarrow{\text{جایگذاری}} Q_{im} a'_m = Q_{im} Q_{jn} T'_{mn} b_j$$

اما $\rightarrow a'_i = T'_{ij} b'_j$ or $a'_m = T'_{mn} b'_n$

Subject
Date

$$Q_{im} T'_{mj} b'_j = Q_{im} Q_{jn} T'_{mn} b_j \qquad (* Q_{ik})$$

$$\delta_{km} T'_{mn} b'_n = \delta_{km} Q_{jn} T'_{mn} b_j \qquad = \delta$$

$$T'_{kn} b'_n = Q_{jn} T'_{kn} b_j \longrightarrow T'_{kn} (b'_n - Q_{jn} b_j) = 0$$

$\longrightarrow b'_n = Q_{jn} b_j \longrightarrow$ b یک بردار است.

مثال: اگر رابطهٔ $B_i = T_{ik} A_k$ در کلیه مختصات ها برقرار باشد، و B_i ، A_k مؤلفه‌های بردارهای A و B باشند، در این صورت T_{ik} یک تانسور مرتبه 2 است.

$$B'_i = T'_{ik} A'_k \longrightarrow T'_{ik} A'_k = B'_i = Q_{mi} B_i = Q_{mi} T_{mk} A_k$$

قانون بردار: $A_k = Q_{kl} A'_l$

$$\longrightarrow T'_{il} A'_l = Q_{mi} Q_{kl} T_{mk} A'_l$$

$$A'_l (T'_{il} - Q_{mi} Q_{kl} T_{mk}) = 0$$

$\longrightarrow T'_{il} = Q_{mi} Q_{kl} T_{mk} \longrightarrow$ قانون تبدیل تانسور مرتبهٔ 2

$\longleftarrow$ T'_{ik} یک تانسور مرتبهٔ 2 است.

P4PCO

Subject

Date

تانسورهای متعامد: orthogonal Tensors

تبدیل خطی است که طی آن بردارهای انتقال یافته طول و زاویه‌شان تغییر نمی‌کند

$|\underline{\underline{Q}}\vec{a}| = |\vec{a}|$

$|\underline{\underline{Q}}\vec{b}| = |\vec{b}|$

$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\underline{\underline{Q}}\vec{a}, \underline{\underline{Q}}\vec{b})$

$\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}}^{-1}$

$\underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{Q}} = I$

$Q_{im} Q_{jm} = \delta_{ij} = Q_{mi}Q_{mj}$

$\det \underline{\underline{Q}} = \pm 1$

Symmetric and Antisymmetric (skew_symmetric) Tensor:

$T = T^T \qquad T_{ij} = T_{ji} \qquad$ symmetric

$T = -T^T \qquad T_{ij} = -T_{ji} \qquad$ skew_symmetric

$$\begin{cases} T_{11} = -T_{11} = 0 \\ T_{22} = -T_{22} = 0 \\ T_{33} = -T_{33} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T_{12} = -T_{21} \\ T_{13} = -T_{31} \\ T_{23} = -T_{32} \end{cases}$$

هر تانسور را می‌توانیم به صورت مجموع دو تانسور متقارن و ضد متقارن بنویسیم.

$T = T^S + T^A$

$$T^A = \frac{T - T^T}{2} \qquad T^S = \frac{T + T^T}{2}$$

Subject
Date

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & \frac{T_{12}+T_{21}}{2} & \frac{T_{13}+T_{31}}{2} \\ \frac{T_{12}+T_{21}}{2} & T_{22} & \frac{T_{23}+T_{32}}{2} \\ \frac{T_{13}+T_{13}}{2} & \frac{T_{23}+T_{32}}{2} & T_{33} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{T_{12}-T_{21}}{2} & \frac{T_{13}-T_{31}}{2} \\ \frac{T_{21}-T_{12}}{2} & 0 & \frac{T_{23}-T_{32}}{2} \\ \frac{T_{31}-T_{13}}{2} & \frac{T_{32}-T_{23}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Isotropic Tensor:

تانسورهایی هستند که با تغییر محورهای مختصات (چرخش)، مؤلفه‌هایشان تغییر نمی‌کند.

$$T_{ij} = T'_{ij}$$

Deviatoric Tensor:

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}}\,I}_{\text{ایزوتروپیک}} + \underbrace{\underline{\underline{A}}'}_{\text{انحرافی}}$$

$$\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{A}} - \frac{I_1}{3} I \qquad , \quad I_1 = \mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}}$$

هر تانسور را می‌توانیم به صورت مجموع دو تانسور Isotropic و Deviatoric نوشت.

Eigenvalue & Eigenvectors:

$$\underline{\underline{A}}\,\vec{\varphi} = \lambda \vec{\varphi}$$

$$|A\vec{\varphi} - \lambda\vec{\varphi}| = 0$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

Subject
Date

$$|A_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$$

$$\rightarrow \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

$I_1 = tr\, A$ $\qquad$ $I_2 = \frac{1}{2}\left[(tr\, A)^2 - tr(A^2)\right]$ $\qquad$ $I_3 = \det[A]$

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

چون مقادیر ویژه تانسور A ارتباطی با دستگاه مختصات (یا بردار پایه‌های انتخاب شده) ندارد، پس باید ضرایب معادلهٔ مشخصه در همهٔ دستگاه‌ها یکسان باشد. پس:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= tr\,A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}\right] \text{invariants}$$

Tensors calculus : $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\vec{e_i}$

در این فصل عملگر $\vec{\nabla}$ از سمت چپ در نظر گرفته شده است.

I) gradient : $\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\vec{e_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\vec{e_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\vec{e_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\vec{e_3} = \varphi_{,i}\vec{e_i}$

Subject
Date

مثال: بردار نرمال عمود بر سطح را که از نقطهٔ $P(2,1,0)$ عبور کند، بیابید.

$$\varphi = x_1 x_2 + 2x_3$$

$$\vec{\nabla}\varphi = x_2\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

$$\vec{A} = \frac{\vec{\nabla}\varphi}{|\vec{\nabla}\varphi|} = \frac{x_2\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3}{\sqrt{x_2^2 + x_1^2 + 4}}$$

$$P(2,1,0):\ \vec{A} = \frac{1}{3}(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3)$$

$$\vec{\nabla}\vec{V} = \vec{\nabla}\otimes\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i \otimes V_j\vec{e}_j = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$$(\nabla V)_{ij} = \vec{e}_i \cdot (\vec{\nabla}\vec{V})\cdot\vec{e}_j = \vec{e}_i\cdot\left(\frac{\partial V_K}{\partial x_L}\vec{e}_L \otimes \vec{e}_K\right)\cdot\vec{e}_j = \vec{e}_i\cdot\left(\frac{\partial V_K}{\partial x_L}\right)\vec{e}_L\,\delta_{Kj}$$

$$= \vec{e}_i\cdot\frac{(\partial V_j\,\vec{e}_L)}{\partial x_L} = \frac{\partial V_j}{\partial x_L}\delta_{iL} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = V_{j,i}$$

$$[\nabla V] = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_3} & \frac{\partial V_2}{\partial x_3} & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$\vec{dV} = \vec{V}(r+dr) - \vec{V}(r) = (\vec{\nabla}\vec{V})\cdot\vec{dr}$$

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)_{\text{in } e_j\text{-direction}} = (\vec{\nabla}\vec{V})\cdot\vec{e}_j$$

Subject
Date

II) Divergence : $\vec{\nabla}.\vec{V} = \text{div}\,\vec{V}$

یک میدان برداری

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e_i}.V_j\vec{e_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\underbrace{\vec{e_i}.\vec{e_j}}_{\delta_{ij}} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = V_{i,i} = tr(\vec{\nabla}\vec{V})$$

$$\text{div}\,\underline{\underline{T}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e_i}\,.\,T_{jk}\,\vec{e_j}\otimes\vec{e_k}$$

$$= \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i}\delta_{ij}\,\vec{e_k} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}\vec{e_k}$$

III) curl of a vector Field :

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e_i}\times V_j\vec{e_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\vec{e_i}\times\vec{e_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\vec{e_k}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \vec{e_1}\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right) -$$

$$\vec{e_2}\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right) + \vec{e_3}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)$$

تابع اسکالر F :

$$F'(x', y', z') = F(x, y, z)$$

PaPCO

Subject
Date

مثال: $F(x, y, z) = 25(x^2 - y^2) + z^2$

در مختصات $x'y'z'$:

$x = (4x' - 3y')/5 \qquad y = (3x' - 4y')/5 \qquad z = z'$

$F'(x', y', z') = 7(x'^2 - y'^2) - 48x'y' + z'^2$

در هر نقطه از فضا: $F'(x', y', z') = F(x, y, z)$

IV) Laplacian: $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\vec{e}_j$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\delta_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$$

اسکالر F: $\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = F_{,ii}$

بردار V: $\nabla^2 \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\vec{V}) = \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j}\vec{e}_i = \nabla^2 V_i \vec{e}_i$

$$= \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2}\right)\vec{e}_1 +$$

$$\left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_3^2}\right)\vec{e}_2 +$$

$$\left(\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_3^2}\right)\vec{e}_3$$

V) Divergence or Gauss's Theorem:

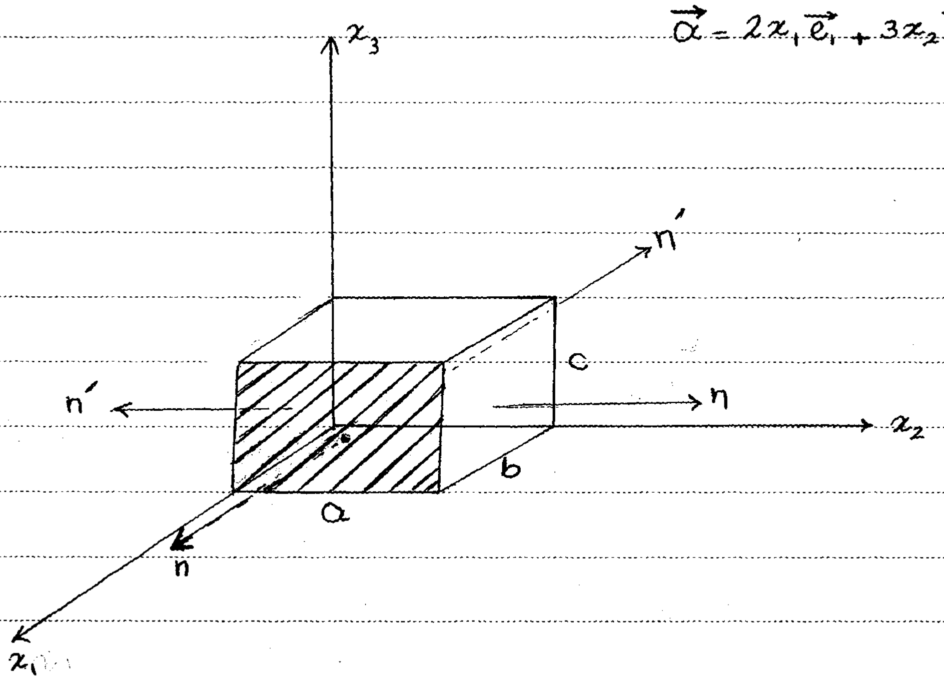
میدان برداری $\vec{a}$ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که این میدان دارای مشتقات نسبی پیوسته در همهٔ نقاط یک ناحیه معین از فضا مثل حجم V که به‌وسیلهٔ سطح جانبی S پوشیده شده است، باشد. در اینصورت:

$$\iiint \operatorname{div} \vec{a}\, dV = \iint \vec{a}\cdot\underset{\text{نرمال بر سطح}}{\underset{\downarrow}{\vec{n}}}\, ds$$

این تعریف برای یک تانسور $\underline{T}$ نیز (به جای $\vec{a}$) درست می‌باشد.

$$\int_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\, dV = \int_S a_i n_i\, ds$$

مثال: $\vec{a} = 2x_1\vec{e}_1 + 3x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$



سطح $1, 1'$ به موازات صفحه x_2x_3:

$\vec{n} = \vec{e}_1 \quad , \quad \vec{n}' = -\vec{e}_1$

$\vec{a}\cdot\vec{n} = 2x_1 = 2b$: برای سطح 1

$\vec{a}\cdot\vec{n}' = -2x_1 = 0$: برای سطح $1'$

Subject
Date

$$\int_{\text{سطح }1} \vec{a}.\vec{n}\,ds + \int_{\text{سطح }1'} \vec{a}.\vec{n'}\,ds = 2b\int ds = 2bac$$

صفحات 2 و ′2 به موازات صفحه x_1x_3 :

$\vec{n} = \vec{e}_2$ $\qquad\qquad$ $\vec{n'} = -\vec{e}_2$

برای سطح 2 : $\vec{a}.\vec{n} = 3x_2 = 3a$

برای سطح ′2 : $\vec{a}.\vec{n'} = -3x_2 = 0$

$$\int_{\text{سطح }2} \vec{a}.\vec{n}\,ds + \int_{\text{سطح }2'} \vec{a}.\vec{n'}\,ds = 3a\int ds = 3abc$$

صفحات 3 و ′3 به موازات صفحه x_1x_2 :

$\vec{n} = \vec{e}_3$ $\qquad\qquad$ $\vec{n'} = -\vec{e}_3$

برای سطح 3 : $\vec{a}.\vec{n} = x_3 = c$

برای سطح ′3 : $\vec{a}.\vec{n'} = -x_3 = 0$

$$\int_{\text{سطح }3} \vec{a}.\vec{n}\,ds + \int_{\text{سطح }3'} \vec{a}.\vec{n'}\,ds = c\int ds = abc$$

$$\int_S \vec{a}.\vec{n}\,ds = 6abc$$

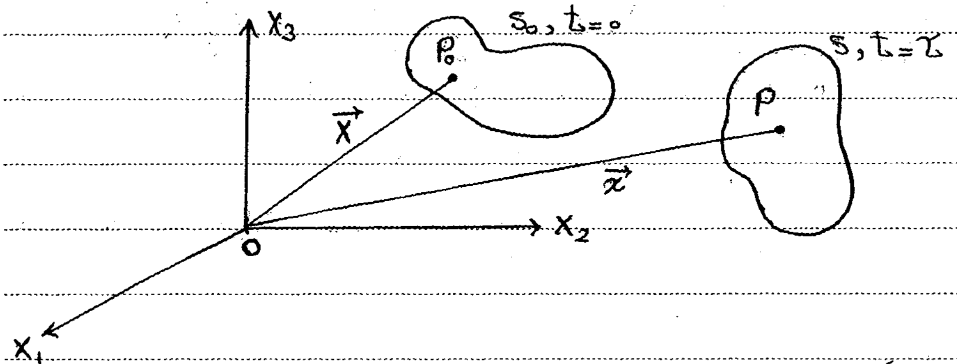
$$\int \operatorname{div} a\,dv = \int 6\,dv = 6abc$$

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial a}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_2} + \frac{\partial a}{\partial x_3} = 2 + 3 + 1 = 6$$

PAPCO

Kinematics of a Continuum : سینماتیک محیط پیوسته :

دستگاه مختصات $X_1X_2X_3$ با مبدأ O را به عنوان دستگاه مختصات مرجع در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم در لحظهٔ زمانی $t_0=0$ یک ناحیهٔ معین از فضا به وسیلهٔ ذرات یک جسم پیوسته اشغال شده باشد. در این صورت بردار وضعیت ذرات را در فضای S_0 و زمان t_0 به وسیلهٔ بردار $\vec{X}$ نشان می‌دهیم.



فرض کنیم این ذرات به گونه‌ای حرکت کنند که در لحظهٔ زمانی $t=\tau$ ناحیهٔ دیگری از فضا مثل S را اشغال کنند. در این صورت ذره‌ای که در لحظهٔ t_0 در فضای S_0 در موقعیت P_0 بوده در فضای جدید S، در $t=\tau$ در موقعیت جدید P قرار می‌گیرد و بردار وضعیت جدید $\vec{x}$ است. با استفاده از بردارهای $\vec{X}$ و $\vec{x}$ می‌توان جنبش جسم پیوسته را مطالعه کرد.

S_0 : Reference Configuration
S : current Configuration

Value ↑ ↑ Function

$$x = x(X, t) \qquad (1)$$

$$x_i = x_i(X_j, t)$$

$$x_1 = x_1(X_1, X_2, X_3, t) , \quad x_2 = x_2(X_1, X_2, X_3, t) , \quad x_3 = x_3(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$X = X(x, t) \qquad (2)$$

$$X_i = X_i(x_j, t)$$

Subject
Date

حالت 1 بیشتر برای جامدات و حالت 2 بیشتر برای سیالات استفاده می‌شود.

حالت 1 : مختصات مادی (X) Material Coordinate ← تمرکز روی خود ذره

حالت 2 : مختصات فضایی (x) Spatial Coordinate ← تمرکز روی یک ناحیهٔ فضا

حالت 1 : Material Description or Lagrangian Description

حالت 2 : Spatial Description or Eulerian Description

در مختصات مادی:

$$\theta = \theta(X_1, X_2, X_3, t)$$
$$v = v(X_1, X_2, X_3, t)$$
$$T = T(X_1, X_2, X_3, t)$$

مثال:

$$\begin{cases} x_1 = X_1(1 + a^2 t^2) \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

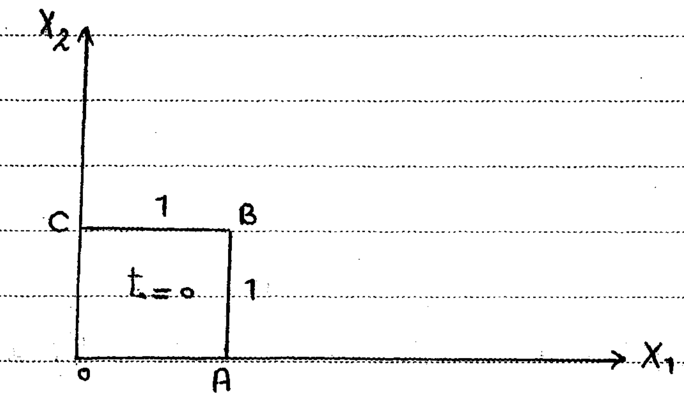
در مختصات فضایی:

$$\theta = \theta(x_1, x_2, x_3, t)$$
$$v = v(x_1, x_2, x_3, t)$$
$$T = T(x_1, x_2, x_3, t)$$

Subject
Date

Ex. Consider the motion $x = X + ktX_2\hat{e}_1$

$x = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$ and $X = X_1\hat{e}_1 + X_2\hat{e}_2 + X_3\hat{e}_3$



$x_1 = X_1 + ktX_2$

$x_2 = X_2$

$x_3 = X_3$

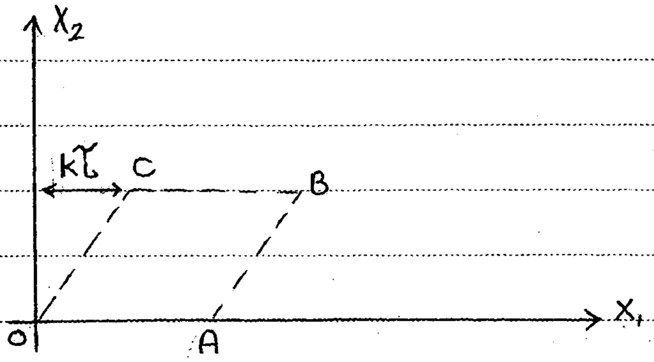
O نقطة $\begin{cases} t = 0 \longrightarrow X_1 = X_2 = X_3 = 0 \\ t = \tau \longrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \end{cases}$

A نقطة $\begin{cases} t = 0 \longrightarrow X_3 = X_2 = 0 \,,\; X_1 = 1 \\ t = \tau \longrightarrow x_1 = 1 \,,\; x_2 = x_3 = 0 \end{cases}$

B نقطة $\begin{cases} t = 0 \longrightarrow X_1 = 1 \,,\; X_2 = 1 \,,\; X_3 = 0 \\ t = \tau \longrightarrow x_1 = 1 + k\tau \,,\; x_2 = 1 \,,\; x_3 = 0 \end{cases}$

C نقطة $\begin{cases} t = 0 \longrightarrow X_1 = X_3 = 0 \,,\; X_2 = 1 \\ t = \tau \longrightarrow x_1 = k\tau \,,\; x_2 = 1 \,,\; x_3 = 0 \end{cases}$

Subject
Date



$\longrightarrow$ برش خالص

شرط آنکه دو مختصات قابل تبدیل به هم باشند:

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \neq 0$$

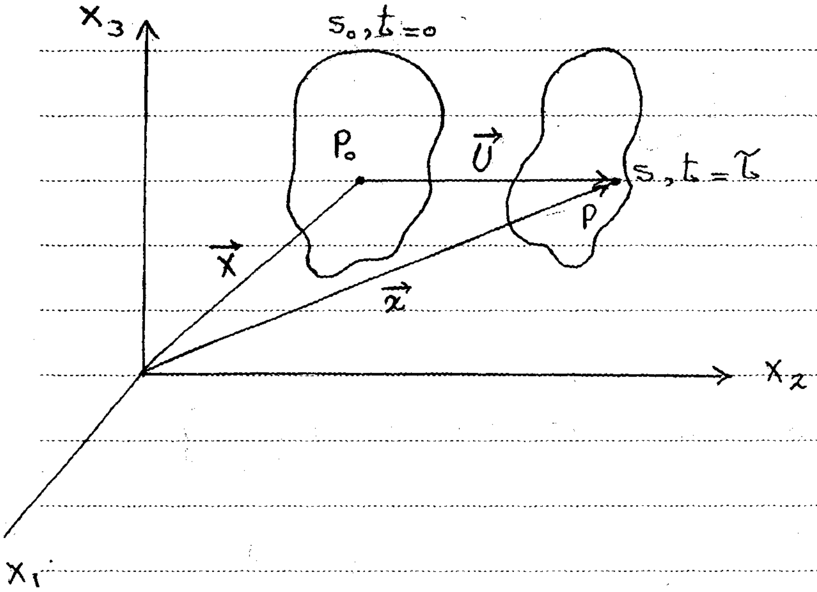
$$x_1 = X_1 t + X_2 t$$
$$x_2 = X_1 t + X_2 t \longrightarrow J = 0$$
$$x_3 = X_3$$

Displacement & velocity:

هر ذره‌ای از ذرات تشکیل دهنده یک جسم در فضای S_0 و در لحظه t_0 دارای بردار موقعیت منحصر به فرد خودش می‌باشد که این بردار با زمان تغییر نکرده و به منزله برچسب ذرات در $t=0$ می‌باشد. ← بردار مادی X_i

تمامی از نقاط که در لحظات زمانی مختلف توسط ذرات مختلفی از جسم اشغال می‌شوند، مختصاتشان با x_i نشان داده می‌شود که به آن بردار فضایی می‌گوییم.

بردار جابجایی ذره با مختصات X در فضای S_0 به فضای S با مختصات x به صورت زیر تبدیل می‌شود.



$$\vec{x}=\vec{X}+\vec{u} \longrightarrow \vec{u}=\vec{x}-\vec{X}, \quad u_i = x_i - X_i$$

برای جنبش در تشریح مادی:

$$u(X,t) = x(X,t) - X$$
$$u_i(X,t) = x_i(X_R,t) - X_i$$
$$u_1 = x_1(X_1, X_2, X_3, t) - X_1$$

Subject
Date

برای جنبش در تشریح فضایی:

$$u(x,t) = x - X(x,t)$$

$$u_i(x,t) = x_i - X_i(x_R,t)$$

$$u_1 = x_1 - X_1(x_1, x_2, x_3, t)$$

سرعت در مختصات مادی:

$$v(X,t)\Big|_{X=cte} = \frac{\partial u(X,t)}{\partial t} = \frac{\partial x(X,t)}{\partial t} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial X}{\partial t}}}_{\text{صفر}}$$

$$v(X,t) = \frac{\partial x(X,t)}{\partial t}$$

$$v_i = \frac{\partial x_i(X_R,t)}{\partial t}$$

Material Derivative: (Time rates of change) $\left[\frac{D}{Dt}\right]$

فرض کنید φ کمیتی است که مقدار آن برحسب زمان و موقعیت در سرتاسر جسم تغییر می‌کند. φ را می‌توان در مختصات مادی و فضایی بیان کرد:

$$\varphi = \varphi(X_R,t) = \varphi(x_i,t)$$

در مختصات مادی: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \dfrac{\partial\varphi(X_R,t)}{\partial t}\Big|_{X_R=cte} \longrightarrow$ سرعت (نرخ φ)

در مختصات فضایی: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \dfrac{\partial\varphi(x_i,t)}{\partial t}\Big|_{x_i=cte} \longrightarrow$ نیست!

خود x نیز تابعی از زمان است.

Subject

Date

مشتق مادی: $\left.\frac{D\varphi}{Dt}\right|_{X_R} = \dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} + \left.\underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}_{\text{تغییرات موضعی}}\right|_{x_i = cte}$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\frac{D\varphi}{Dt} = v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Ex) given the motion of a Continuum to be:

$x_1 = X_1 + kt X_2$

$x_2 = (1 + kt) X_2$

$x_3 = X_3$

if the temperature field is given by the spacial Description:

$\theta = \alpha (x_1 + x_2)$

a) دما در مختصات مادی

b) velocity + rate of change of temperature.

Solution:

a) $\theta = \alpha X_1 + \alpha (1 + 2kt) X_2$

b) $u(X, t) = x(X, t) - X$

$u_1 = x_1 - X_1 = kt X_2$ $\qquad v_1 = \frac{\partial x_1 (X_R, t)}{\partial t} = k X_2$

$u_2 = x_2 - X_2 = kt X_2$ $\qquad v_2 = \frac{\partial x_2 (X_R, t)}{\partial t} = k X_2$ توصیف مادی

$u_3 = 0$ $\qquad v_3 = \frac{\partial x_3 (X_R, t)}{\partial t} = 0$ میدان سرعت

Subject
Date

روش اول : Eulerian : $V_1 = V_2 = k\,\dfrac{x_2}{1+kt} \qquad V_3 = 0 \longrightarrow$ توصیف فضایی میدان سرعت

روش دوم : $u(x,t) = x - X(x,t)$

$u_1 = x_1 - X_1(x,t) = x_1 - (x_1 - kt\,X_2) = kt\,X_2 = \dfrac{kt\,x_2}{1+kt}$

$u_2 = x_2 - X_2(x_2,t) = x_2 - \dfrac{x_2}{1+kt} = \dfrac{kt\,x_2}{1+kt}$

$u_3 = 0$

$$V_2 = V_1 = \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{X=cte} = \cancel{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}^{\text{صفر}} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t} + \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{x=cte}$$

$$V_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\,\cancel{V_2}^{=V_1} + \frac{\partial u_1}{\partial t}$$

$$V_1 = \frac{\dfrac{\partial u_1}{\partial t}}{1-\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}} = \frac{\dfrac{kx_2(1+kt)-k(ktx_2)}{(1+kt)^2}}{1-\dfrac{kt}{1+kt}} = \frac{kx_2 + k^2x_2t - k^2x_2t}{(1+kt)} = \frac{kx_2}{1+kt}$$

مادی : $\dfrac{\partial\theta(X,t)}{\partial t} = 2\alpha k X_2$

فضایی : $\dfrac{D\theta}{Dt} = 2\alpha k\left(\dfrac{x_2}{1+kt}\right) = \dfrac{2\alpha k x_2}{1+kt}$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t} + \left.\cancel{\frac{\partial\theta}{\partial t}}^{\text{صفر}}\right|_{x=cte}$$

$$= V_1\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + V_2\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x_2} = \frac{kx_2}{1+kt}(\alpha+\alpha) = \frac{2\alpha k x_2}{1+kt}$$

Subject
Date

Acceleration of a particle :

$x = x(X, t)$

سرعت ذره : $V = \left.\dfrac{\partial x(X,t)}{\partial t}\right|_{X=cte} = \dfrac{Dx}{Dt}$

شتاب ذره : $a = \left.\dfrac{DV}{Dt}\right|_{X=cte}$

$$\frac{D\varphi}{Dt} = V_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$ اگر : $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, t)$

$a_i = \dfrac{DV_i}{Dt} = V_j \dfrac{\partial V_i}{\partial x_j} + \left.\dfrac{\partial V_i}{\partial t}\right|_{x=cte}$: $V = V(x, t)$

$$a_i = V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_i}{\partial t}$$

$$a_i = \frac{\partial V_i(X, t)}{\partial t}$$

مثلاً برای چگالی : if $\rho = \rho(x, t)$

$$\frac{D\rho}{Dt} = V_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ex) given the velocity field as the following :

$$V_1 = \frac{kx_1}{1+kt}, \quad V_2 = \frac{kx_2}{1+kt}, \quad V_3 = \frac{kx_3}{1+kt}$$

a) find The acceleration field .

b) path line $x = x(X, t)$

Subject
Date

Solution: $V_i = \dfrac{k x_i}{1+kt}$

$$a_i = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{k^2 x_i}{(1+kt)^2} + \frac{k x_j}{1+kt}\,\frac{k}{1+kt}\,\delta_{ij}$$

$$= -\frac{k^2 x_i}{(1+kt)^2} + \frac{k^2 x_i}{(1+kt)^2} = 0$$

b) $V_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial t} = \dfrac{k x_i}{1+kt}$

if $i=1$: $\displaystyle\int_{X_1}^{x_1} \frac{dx_1}{k x_1} = \int_0^{t} \frac{dt}{1+kt}$

$$\frac{1}{k} \ln x_1 \Big|_{X_1}^{x_1} = \frac{1}{k} \ln(1+kt)$$

$$\frac{1}{k}(\ln x_1 - \ln X_1) = \frac{1}{k} \ln(1+kt)$$

$$\frac{1}{k} \ln\left(\frac{x_1}{X_1}\right) = 1/k \ln(1+kt)$$

$$\frac{x_1}{X_1} = 1+kt \longrightarrow x_1 = (1+kt) X_1$$

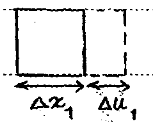
similarly : $i = 2,3 \longrightarrow x_2 = (1+kt) X_2$

$x_3 = (1+kt) X_3$

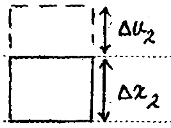
$$V_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} = k X_i$$

Subject
Date

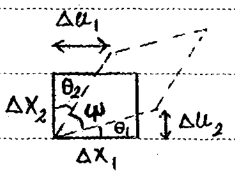
Motion and Deformation:



$$\varepsilon_x \simeq \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}$$

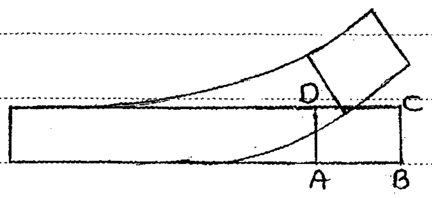


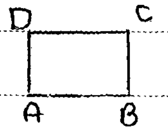
$$\varepsilon_y = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_2}$$

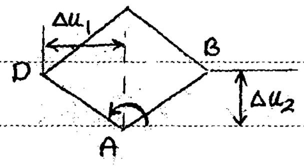


$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \psi = \theta_1 + \theta_2$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x_2} + \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1}\right)$$







برای بدست آوردن کرنش باید ترم‌های Translation و Rotation را کم کنیم.

PAPCO

Finite strain and Deformation:

- در تئوری الاستیسیته کرنش را در مختصات لاگرانژی بدست می‌آوریم. چون مقدار اولیه را داریم.
- معادلات تعادل چون در هر لحظه تغییر می‌کند، در مختصات اویلری نوشته می‌شوند.

Ex) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ — به صورت اندیسی نشان دهید که:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e_i} \qquad A = A_j \vec{e_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e_i} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e_i} \times A_j \vec{e_j} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e_i} \cdot \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \vec{e_k}$$

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 A_j}{\partial x_i^2} \delta_{ik} = 0$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$a = a_i \vec{e_i}, \quad b = b_j \vec{e_j}, \quad c = c_k \vec{e_k}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = a_i \vec{e_i} \times (\underbrace{b_j \vec{e_j} \times c_k \vec{e_k}}_{\varepsilon_{jkl} b_j c_k \vec{e_l}})$$

$$= \varepsilon_{jkl} b_j c_k a_i \underbrace{\varepsilon_{ilm}}_{\varepsilon_{mil}} \vec{e_m}$$

$$(\varepsilon_{ijm}\,\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\,\delta_{jl} - \delta_{il}\,\delta_{jk})$$

$$= (\delta_{jm}\,\delta_{ki} - \delta_{ji}\,\delta_{km})\, b_j\, c_k\, a_i\, \vec{e_m}$$

$$\delta_{jm}\,\delta_{ki}\, b_j\, c_k\, a_i\, \vec{e_m} - \delta_{ji}\,\delta_{km}\, b_j\, c_k\, a_i\, \vec{e_m}$$

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijn} = 2\,\delta_{kn}$$

$$\longrightarrow \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{nij} = \delta_{kn}\,\delta_{ii} - \delta_{ki}\,\delta_{in} = 3\,\delta_{kn} - \delta_{kn} = 2\delta_{kn}$$

vector: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Tensor: $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{T}}$

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \varepsilon_{ijk}\, \vec{e_i} \otimes \vec{e_j} \otimes \vec{e_k}$$

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \cdot \vec{A} = (\varepsilon_{ijk}\, \vec{e_i} \otimes \vec{e_j} \otimes \vec{e_k}) \cdot (A_m \vec{e_m}) = \varepsilon_{ijk}\, \vec{e_i} \otimes \vec{e_j}\, A_k$$

$$c_{ij} = \varepsilon_{ijk}\, A_k \quad , \quad c'_{ij} = \varepsilon'_{ijk}\, A'_k \xrightarrow[\text{یک تانسور مرتبه 3 است.}]{\text{برای اینکه ثابت کنیم } \varepsilon_{ijk}} \varepsilon'_{ijk} = a_{ri}\, a_{sj}\, a_{mk}\, \varepsilon_{rsm}$$

$$c'_{ij} = a_{ir}\, a_{js}\, c_{rs} = a_{ir}\, a_{js}\, \varepsilon_{rsk} A_k = a_{ir}\, a_{js}\, \varepsilon_{rsk}\, a_{kl} A'_l$$

$$\rightarrow \varepsilon'_{ijl} A'_l = a_{ir}\, a_{js}\, a_{kl}\, \varepsilon_{rsk} A'_l \longrightarrow A'_l\,(\varepsilon'_{ijl} - a_{ri}\, a_{sj}\, a_{kl}\, \varepsilon_{rsk}) = 0$$

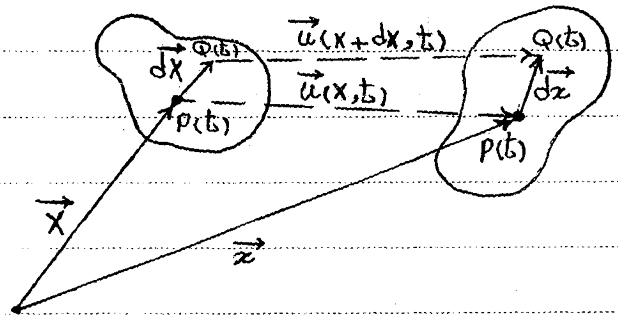
$$\longrightarrow \varepsilon'_{ijl} = a_{ri}\, a_{sj}\, a_{kl}\, \varepsilon_{rsk}$$

← پس ε_{ijk} یک تانسور مرتبهٔ 3 است.

Subject

Date

Finite strain and Deformation:



$\vec{dX}$ vector goes under deformation + Rotation + Translation

$x_i = x_i(X_R, t) \quad (1)$

$X_i = X_i(x_R, t) \quad (2)$

$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(X, t) \quad (3)$ ذره p تحت جابجایی بصورت :

$\vec{x} + \vec{dx} = \vec{X} + \vec{dX} + \vec{u}(X+dX, t) \quad (4)$

$(4)-(3): \quad \vec{dx} = \vec{dX} + \underbrace{\vec{u}(X+dX,t) - \vec{u}(X,t)}_{\vec{\nabla}\vec{u}\cdot\vec{dX}}$

$\longrightarrow \vec{dx} = \vec{dX} + (\vec{\nabla}\vec{u})\cdot\vec{dX}$

در این فصل عملگر $\vec{\nabla}$ از سمت راست در نظر گرفته شده است.

$\vec{\nabla}\vec{u}$: Displacement Gradient   تانسور مرتبه 2

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\Delta u_2}{\Delta X_2} & \frac{\Delta u_2}{\Delta X_3} \\ \frac{\Delta u_3}{\Delta X_1} & \frac{\Delta u_3}{\Delta X_2} & \frac{\Delta u_3}{\Delta X_3} \end{bmatrix}$$

$\vec{dx} = \vec{dX} + (\vec{\nabla}\vec{u})\cdot\vec{dX}$

if $\vec{dx} = \underline{\underline{F}}\cdot\vec{dX}$

$\longrightarrow \boxed{\underline{\underline{F}} = I + \vec{\nabla}\vec{u}}$

$\boxed{F_{iR} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R}}$

$\boxed{\vec{dx} = \underline{\underline{F}}\cdot\vec{dX}}$

در فرم بردارهای جابجایی u می‌توان نوشت:

$$x_i = u_i(X_j, t) + X_i$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_R} = \frac{\partial u_i}{\partial X_R} + \frac{\partial X_i}{\partial X_R}$$

$$F_{iR} = \vec{\nabla}\vec{u} + \delta_{iR}$$ F: Deformation Gradient

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}$$

$$F_{iR} = \alpha_{ij}\,\alpha_{RS}\,F_{RS}$$

F_{iR} تانسور مرتبه 2 است ← اثبات؟

مثال:

$$\vec{x} = Q(t)\cdot\vec{X}$$

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = Q(t)$$

$$\vec{dx}\cdot\vec{dx} = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_i\,dx_j\,\vec{e_i}\cdot\vec{e_j} = dx_i\,dx_j\,\delta_{ij}$$

similarly: $$\vec{dx}\cdot\vec{dx} = [\underbrace{\underline{\underline{F}}\cdot\vec{dX}}_{\alpha}]\cdot[\underbrace{\underline{\underline{F}}}_{T}\underbrace{\vec{dX}}_{b}] = \vec{dX}\cdot(\underline{\underline{F}}^T\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\vec{dX})$$

Hint: $\vec{a}\cdot(\underline{\underline{T}}\cdot\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\underline{\underline{T}}^t\cdot\vec{a})$, $\underline{\underline{T}}^t\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\underline{\underline{T}}$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T\cdot\underline{\underline{F}}$$ C: right Cauchy – Green def. Tensor

$$C_{RS} = F_{iR}\,F_{iS} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R}\,\frac{\partial x_i}{\partial X_S}$$

C تانسور متقارن است.

Subject

Date

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{Q}} = I$$

در دوران صلب وار ، مقدار C برابر I است در حالی که F مقدار دارد ← مزیت C نسبت به F !

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = (I + \vec{\nabla}\vec{u})^T \cdot (I + \vec{\nabla}\vec{u}) = I + \vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^T + \vec{\nabla}\vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}\vec{u}$$

let $\underline{\underline{\gamma}} = \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla}\vec{u} + (\vec{\nabla}\vec{u})^T + (\vec{\nabla}\vec{u})^T \cdot \vec{\nabla}\vec{u}\right]$

$$\underline{\underline{C}} = I + 2\underline{\underline{\gamma}}$$

$\underline{\underline{C}} = I \longrightarrow$ حرکت صلب وار Translation

(جابجایی نه دوران)

$\underline{\underline{\gamma}}$: Lagrangian Finite strain Tensor . حرکت صلب‌وار را نمی‌بیند .

$$\underline{\underline{\gamma}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - I) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - I) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\frac{\partial x_i}{\partial X_S} - \delta_{RS}\right)$$

where $x_i = x_i(X_R, t)$

γ_{ij} برحسب مؤلفه‌های u : $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial X_j}\right)$

$$\underline{\underline{\gamma}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^T + \vec{\nabla}\vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}\vec{u}\right)$$

$$\gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2\right]$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)\right.$$

Subject

Date

Infinitesimal strain :

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial X_R} \right| \ll 1$$

در نتیجه اگر از ترم‌های مرتبه بالاتر ۲ صرف نظر کنیم :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^{T} \right)$$

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \qquad u_i = x_i - X_i$$

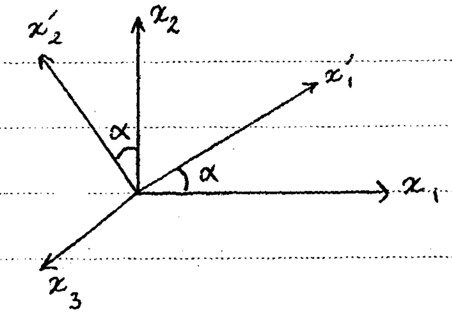
$$\overbrace{\frac{\partial u_i}{\partial X_j}}^{\nabla u} = \overbrace{\frac{\partial x_i}{\partial X_j}}^{F_{ij}} - \overbrace{\frac{\partial X_i}{\partial X_j}}^{\delta_{ij}}$$

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}$$

با جایگذاری $\vec{\nabla}\vec{u}$ در رابطهٔ $\underline{\underline{E}}$:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^{T} \right) - \underline{\underline{I}}$$

Subject
Date



$$Q_{iR} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \underline{\underline{Q}} \qquad \vec{x} = \underline{\underline{Q}} \cdot \vec{X} \longrightarrow \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{Q}} = [Q_{iR}]$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فقط هنگامی که α خیلی کوچک باشد، Rotation در نظر گرفته نمی‌شود ← تقریب.

Subject
Date

a) Diagonal elements of $\underline{\underline{E}}$:

$\vec{dX} = dS\vec{n}$

$\vec{dx} = ds\vec{n}$

$$\vec{dx}\cdot\vec{dx} = \underline{\underline{F}}\cdot\vec{dX}\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\vec{dX} = \vec{dX}\cdot[\underbrace{(\underline{\underline{F}}^T\cdot\underline{\underline{F}})}_{C}]\cdot\vec{dX}$$

$$= \vec{dX}\cdot\underline{\underline{C}}\cdot\vec{dX}$$

$$= \vec{dX}\cdot(I + 2\underline{\underline{E}})\cdot\vec{dX}$$

$$= \vec{dX}\cdot\vec{dX} + 2\vec{dX}\cdot\underline{\underline{E}}\cdot\vec{dX}$$

$$\vec{dx}\cdot\vec{dx} - \vec{dX}\cdot\vec{dX} = 2dS\vec{n}\cdot\underline{\underline{E}}\cdot dS\vec{n}$$

$$ds^2 - dS^2 = 2dS^2(\vec{n}\cdot\underline{\underline{E}}\cdot\vec{n})$$

$$ds^2 - dS^2 = (ds - dS)(ds + dS) \qquad ds \cong dS$$

$$= (ds - dS)\,2dS$$

$$\frac{(ds - dS)\,2dS}{2dS^2} = \vec{n}\cdot\underline{\underline{E}}\cdot\vec{n}$$

$$\varepsilon = \frac{ds - dS}{dS} = \vec{n}\cdot\underline{\underline{E}}\cdot\vec{n}$$

$$\vec{n}\cdot\underline{\underline{E}}\cdot\vec{n} = \vec{e}_K\cdot[E_{ij}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j]\cdot\vec{e}_K = \vec{e}_K\cdot E_{ij}\,\vec{e}_i\,\delta_{jK}$$

$$= \vec{e}_K\cdot E_{iK}\,\vec{e}_i = E_{iK}\,\delta_{Ki} = E_{ii} \quad (\text{No sum on } i)$$

$\downarrow$

Normal strain

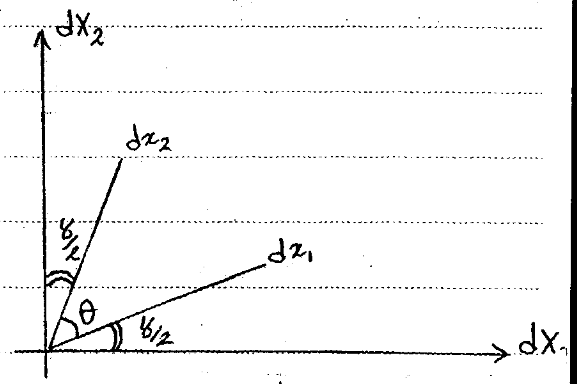
Subject
Date

اگر المان مادی تغییر نیافته در راستای $\vec{e}_1$ باشد : $E_{11} = \vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \vec{e}_1$

b) The off Diagonal elements of E :

$dX^1 = dS^1 \vec{m} \longrightarrow dx^1$

$dX^2 = dS^2 \vec{n} \longrightarrow dx^2$



$\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma$

$\vec{dX}^1 = dS^1 \vec{m} \longrightarrow \vec{dx}^1$ $\qquad \cos\theta = \sin\gamma$

$\vec{dX}^2 = dS^2 \vec{n} \longrightarrow \vec{dx}^2$ $\qquad \gamma << 1 \text{ radian} \longrightarrow \sin\gamma = \gamma$

$\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 = ds^1 ds^2 \cos\theta$

$\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{dX}^1 \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{dX}^2 = \vec{dX}^2 \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$

$\vec{dx}^2 \cdot \vec{dx}^1 = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{dX}^2 \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{dX}^1 = \vec{dX}^1 \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$

$\vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2 = dS^1 \cdot dS^2 \cos 90 = 0$ $\qquad \vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 = \vec{dx}^2 \cdot \vec{dx}^1 : \vec{dX} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{dX}$

$= \vec{dX}^1 \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{dX}$

$\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 = \underline{\underline{F}} \vec{dX}^1 \cdot \underline{\underline{F}} \vec{dX}^2 = \vec{dX}^1 \cdot [\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}] \cdot \vec{dX}^2 = \vec{dX}^1 \cdot [I + 2\underline{\underline{E}}] \cdot \vec{dX}^2$

$= \vec{dX}^1 \cdot \vec{dX}^2 + 2\vec{dX}^1 \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \vec{dX}^2$

$ds^1 ds^2 \cos\theta = 2\vec{dX}^1 \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \vec{dX}^2$

$ds^1 ds^2 \gamma = 2 dS^1 \vec{m} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot dS^2 \vec{n}$ $\qquad \frac{ds^1}{dS^1} \cong 1 \quad , \quad \frac{ds^2}{dS^2} \cong 1$

$\frac{ds^1 ds^2}{dS^1 dS^2} \cdot \gamma = 2\vec{m} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \vec{n}$

$\gamma = 2\vec{m} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \vec{n}$

اگر فرض کنیم المان‌ها قبل از تغییر فرم در راستای $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ باشند:

$\gamma = 2\vec{m} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \vec{n} = 2\vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \vec{e}_2 = 2E_{12} \longrightarrow$ دو برابر کرنش مهندسی

مثال:

$S_{mn} = x_m x_n - x_k x_k \delta_{mn}$

$S_{mn,m} = ?$

$$\frac{\partial S_{mn}}{\partial x_m} = x_n \frac{\partial x_m}{\partial x_m} + x_m \frac{\partial x_n}{\partial x_m} - 2x_k \frac{\partial x_k}{\partial x_m} \delta_{mn}$$

$$= x_n (\delta_{mm}) + x_m \delta_{nm} - 2x_k \delta_{km} \delta_{mn}$$

$$= 3x_n + x_n - 2x_n = 4x_n - 2x_n = 2x_n$$

Ex: Given the displacement Component:

$u_1 = kX_2^2 \quad , \quad u_2 = u_3 = 0 \quad , \quad k = 10^{-4}$ radian

a) $E = ?$

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2kX_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

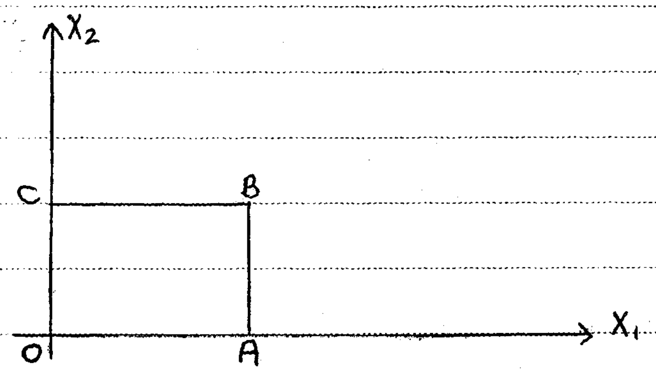
$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^{T}\right] = \begin{bmatrix} 0 & kX_2 & 0 \\ kX_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ـ برای المان های dx^1 , dx^2 که در نقطه C قرار دارند، تغییر نرم مادی را بدست آورید.

$C(0,1,0)$

$\vec{dx}^1 = dX_1 \vec{e}_1$

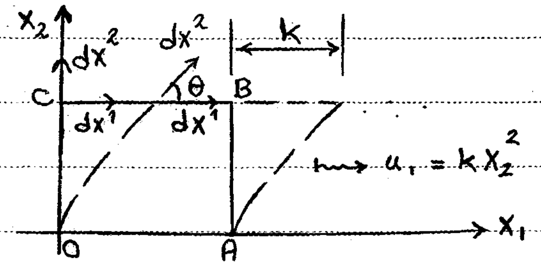
$\vec{dx}^2 = dX_2 \vec{e}_2$



$$\underline{\underline{E}}\,@C = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

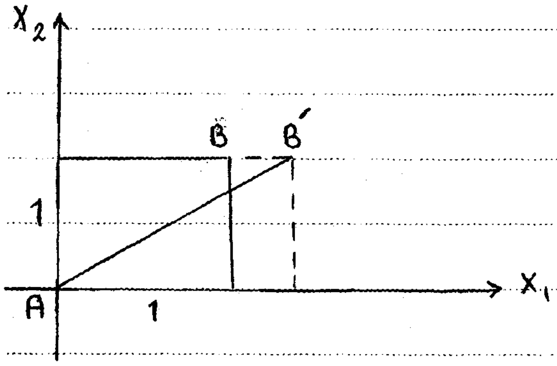
$E_{11} = 0 \quad , \quad E_{12} = k$

$\gamma = 2E_{12} = 2k = 2 * 10^{-4}$ radian



Subject
Date

Ex : $u_1 = kX_1$, $u_2 = u_3 = 0$, $k = 10^{-4}$



$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_{11} = k$ $\qquad E_{nn} = \dfrac{\Delta(AB)}{|AB|}$ $\qquad \Delta(AB) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} k$

$E_{nn} = \vec{n} \cdot \underline{E} \cdot \vec{n}$, $\vec{n} = \dfrac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{|AB|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ $\qquad |AB| = \sqrt{2}$

$$E_{nn} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{k}{2}$$

principal strain :

$$[E]_{n_i} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} \qquad dX_1 , dX_2 , dX_3$$

در جهت‌های اصلی

$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$ $\qquad$ Invariants : لایتغیر ، ناوردا

Subject
Date

$I_1 = E_{11} + E_{22} + E_{33}$

$I_3 = |E_{ij}|$

$$I_2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{13} \\ E_{31} & E_{33} \end{vmatrix}$$

Dilatation : "اتساع" $\rightarrow$ The unit volume change

dS_1 , dS_2 , dS_3

بعد از تغییر فرم
$$\begin{cases} ds_1 = dS_1 (1 + E_1) \\ ds_2 = dS_2 (1 + E_2) \\ ds_3 = dS_3 (1 + E_3) \end{cases}$$

$$\Delta(dV) = ds_1 ds_2 ds_3 - dS_1 dS_2 dS_3$$

$$= \underbrace{dS_1 dS_2 dS_3 (1 + E_1)(1 + E_2)(1 + E_3)}_{\text{حجم نهایی}} - \underbrace{dS_1 dS_2 dS_3}_{\text{حجم اولیه}}$$

$$= \underbrace{dS_1 dS_2 dS_3}_{dV} (E_1 + E_2 + E_3) + (E_i \text{ ترم های از ترتیب بالاتر})$$

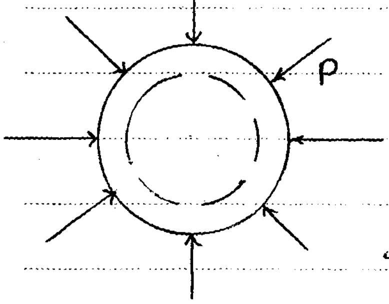
from small Deformation : $e = \dfrac{\Delta(dV)}{dV} = E_1 + E_2 + E_3$

$$e = E_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \vec{u}$$

PAPCO

Subject
Date

$$e = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3}$$



$$\underset{\text{مدول بالک}}{K.L.B} = \frac{P}{\frac{\Delta V}{V}}$$

$K_{steel} = 160\ GPa \qquad E = 210\ GPa$

$$x_i = X_i + u$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

$$\underline{\underline{F}} = I + \vec{\nabla}\vec{u}$$

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \underline{\underline{F}} - I$$

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T) - I}_{E} + \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{F}}^T)$$

1) Translation:

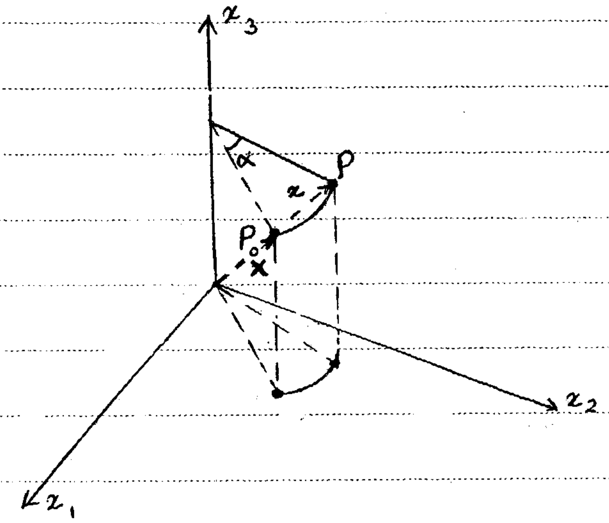
$$x_i = X_i + C_i(t)$$

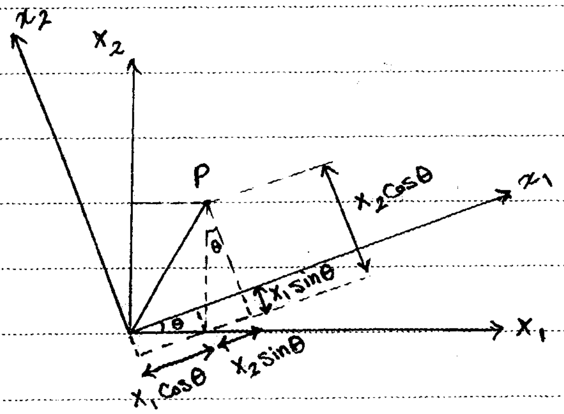
$$F_{iR} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R} + 0 = \delta_{iR} = I \longrightarrow \vec{\nabla}\vec{u} = 0$$

Subject

Date

2) Rotation :





$$x_1 = X_1 \cos\alpha - X_2 \sin\alpha$$

$$x_2 = X_1 \sin\alpha + X_2 \cos\alpha$$

$$x_3 = X_3$$

$$\vec{x} = \underline{\underline{Q}} \cdot \vec{X}$$

$$x_1 = X_1 \cos\theta + X_2 \sin\theta$$

$$x_2 = X_2 \cos\theta - X_1 \sin\theta$$

$$Q_{iR} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

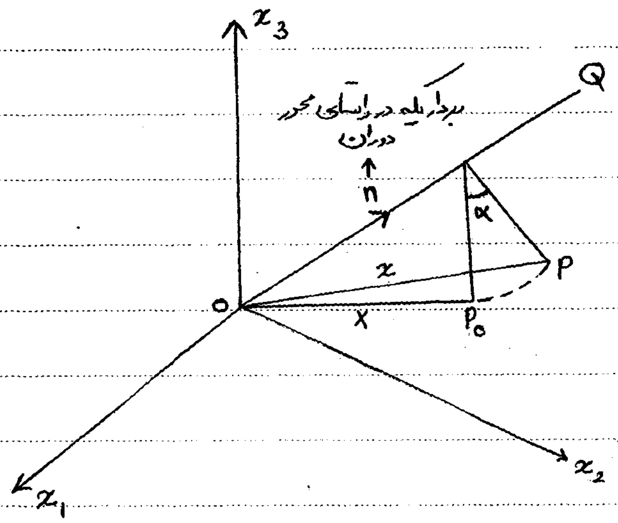
$$F_{iR} = Q_{iR} \qquad \vec{\nabla}\vec{u} = F - I \quad , \quad E = \frac{1}{2}(F + F^T) - I$$

$$E = \begin{bmatrix} \cos\alpha - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E چرخش صلب را به عنوان یک کرنش می‌شناسد.
اما برای $\alpha << 1\ rad$ چون $E \cong [0]$
می‌توان از آن استفاده کرد.

Subject
Date

$\vec{x}_i = Q_{iR}\,\vec{X}_R$ دوران حول محور دلخواه :



$$x_i = X_i \cos\alpha + \overset{\varepsilon}{e}_{ijR}\, n_j X_R \sin\alpha + (1-\cos\alpha) X_R n_R n_i \quad (1)$$

$\frac{1)}{\partial S}$: $Q_{iS} = \delta_{iS}\cos\alpha + e_{ijS}\, n_j \sin\alpha + (1-\cos\alpha)\, n_i n_S$

for small deformation : $\sin\alpha \cong \alpha$, $\cos\alpha \cong 1$

subs. in eq (1) : $x_i = X_i + \varepsilon_{ijR}\, n_j X_R \cdot \alpha$

$$x_i - X_i = u_i = \alpha\, \varepsilon_{ijR}\, n_j X_R \quad (2)$$

$\frac{2)}{\partial X_S}$: $\frac{\partial u_i}{\partial X_S} = \alpha\, \varepsilon_{ijS}\, n_j$

Subject
Date

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha n_3 & \alpha n_2 \\ \alpha n_3 & 0 & -\alpha n_1 \\ -\alpha n_2 & \alpha n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$A_{ij} = -A_{ji}$ ← تانسور ضد متقارن

(Rigid body motion کم کردن)

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T) - I}_{E} + \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{F}}^T)}_{\Omega}$$

E ← کرنش برشی و کرنش کششی

Ω Rotation

هر جنبش بی‌نهایت کوچک از مجموع یک تغییر فرم بی‌نهایت کوچک E و یک دوران بی‌نهایت کوچک Ω تشکیل می‌شود.

$$\vec{\nabla}\vec{u} = F - I = \left[\frac{1}{2}(F + F^T) - I\right] + \frac{1}{2}\left[F - F^T\right]$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix}$$

Subject

Date

$$\underline{\underline{S}} \cdot \vec{V} = S_{ij}\, \vec{e_i} \otimes \vec{e_j} \cdot V_K\, \vec{e_K}$$

$$= S_{ij}\, V_K\, \vec{e_i}\, \delta_{jK}$$

$$\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{W}} = S_{ij}\, \vec{e_i} \otimes \vec{e_j} \cdot W_{KL}\, \vec{e_K} \otimes \vec{e_L} = S_{ij}\, W_{KL}\, \vec{e_i}\, \delta_{jK}\, \vec{e_L}$$

$$= S_{ij}\, W_{KL}\, \delta_{jK}\, \vec{e_i} \otimes \vec{e_L} = S_{ij}\, W_{jL}\, \vec{e_i} \otimes \vec{e_L} \quad : \text{Tensor}$$

$$\underline{\underline{S}} \cdot\cdot \underline{\underline{W}} = S_{ij}\, \vec{e_i} \otimes \vec{e_j} : W_{KL}\, \vec{e_K} \otimes \vec{e_L} = S_{ij}\, W_{KL}\, \delta_{jK}\, \delta_{iL}$$

$$= S_{LK}\, W_{KL} \quad : \text{scaler}$$

$$\varepsilon_{ijK}\, e_i\, e_j\, e_K : A_{mn}\, e_m\, e_n \qquad A_{mn}\, e_m\, e_n : \varepsilon_{ijK}\, e_i\, e_j\, e_K$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^T\right)$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u} - \vec{\nabla}\vec{u}^T\right)$$

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha \ll 1\ \text{Rad} \longrightarrow E \cong [0]$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha \ll 1} \underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Subject

Date

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_R} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha n_3 & \alpha n_2 \\ \alpha n_3 & 0 & -\alpha n_1 \\ -\alpha n_2 & \alpha n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

چون تانسور $\underset{=}{\Omega}$ یک تانسور ضدمتقارن است، فقط 3 مؤلفهٔ مستقل دارد و در نتیجه می‌توان آن را با یک بردار $\vec{\omega}$ جایگزین کرد.

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\,\text{curl}\,\vec{u} \longrightarrow \omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}$$

$$\omega_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\underset{1}{\Omega_{jk}}$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}\left(\cancel{\varepsilon_{123}}\,\Omega_{23} + \overset{-1}{\cancel{\varepsilon_{132}}}\,\overset{-\Omega_{23}}{\cancel{\Omega_{32}}}\right) = -\frac{1}{2}(1+1)\,\Omega_{23} = -\Omega_{23}$$

$$\vec{\omega} = -\Omega_{yz}\,\hat{i} - \Omega_{zx}\,\hat{j} - \Omega_{xy}\,\hat{k}$$

$$\vec{dx} = \vec{dX} + (\vec{\nabla}\vec{u}).\vec{dX} = \vec{dX} + (\underset{=}{E} + \underset{=}{\Omega}).\vec{dX}$$

در محورهای اصلی فقط کشیدگی را نمایندگی می‌کند. اما اگر محورها غیراصلی باشند، علاوه بر قطر اصلی عناصر دیگر نیز غیرصفر خواهند بود. (گرش برشی)
یعنی بخشی از Rotation در ماتریس E ظاهر می‌شود.

Time rate change of a material elements.

یک المان مادی را فرض می‌کنیم که در لحظهٔ t در نقطهٔ x قرار گرفته است. هدف یافتن $(\frac{D}{Dt})dx$ یا نرخ تغییر طول و جهت المان dx است.

$$\vec{x} = \vec{x}(X, t)$$

$$\vec{dx} = \vec{x}(X+dX, t) - \vec{x}(X, t)$$

$$\frac{D}{Dt}\vec{dx} = \frac{D}{Dt}\vec{x}(X+dX, t) - \underbrace{\frac{D}{Dt}\vec{x}(X, t)}_{\vec{V}(x,t) \text{ یا } \vec{V}(X,t)}$$

PAPCO

Subject
Date

$$\frac{D}{Dt}\vec{dx} = \vec{V}(X + dX, t) - \vec{V}(X, t) \qquad \text{material}$$

$$= \vec{V}(x + dx, t) - \vec{V}(x, t) \qquad \text{spatial}$$

$$= (\vec{\nabla}_{i*i}\vec{V}).dX = (\vec{\nabla}_{i*i}\vec{V}).dx$$

$$\vec{\nabla}_{i*i}\vec{V} = \vec{\nabla}\vec{V}$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\vec{dx} = \vec{\nabla}\vec{V}.\vec{dx}}$$

$$\underset{\text{گرادیان سرعت}}{\vec{\nabla}\vec{V}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x_1} & \frac{\partial V_3}{\partial x_2} & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

The rate of Deformation tensor:

در تحلیل‌های بی‌نهایت کوچک که کرنش برحسب گرادیان‌های جابجایی بیان تعریف می‌شود، بردار جابجایی یک خط راست بوده که موقعیت اولیه را به انتهایی وصل می‌کند. در تحلیل‌های الاستیسیته این مسیر در هر صورت خطی فرض می‌شود و شکل اولیه و نهایی المان برای تعریف کرنش کافی بوده و به تاریخچه تغییر فرم وابسته نمی‌باشد. اما در تفسیر تأثیر ویسکوزیته در سیالات و پلاستیسیته در جامدات، تاریخچه بارگذاری و تغییر فرم هم مهم بوده و باید در مطالعه حرکت لحاظ شود. مهم‌ترین تانسور سینماتیک که در تحلیل‌های مربوط به تئوری ویسکوزیته و پلاستیسیته استفاده می‌شود، تانسور نرخ تغییر فرم که همچنین تانسور stretch نیز نامیده می‌شود، و تانسور spin که تانسور Vorticity نیز در سیالات نامیده می‌شود، می‌باشد.

$\vec{\nabla}\vec{V} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}}$ گرادیان سرعت

where $\underline{\underline{D}}$ is symmetric part: $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{V} + \vec{\nabla}\vec{V}^T)$

and $\underline{\underline{W}}$ is antisymmetric part: $\underline{\underline{W}} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{V} - \vec{\nabla}\vec{V}^T)$

قسمت متقارن گرادیان سرعت (D) تانسور نرخ تغییر فرم است.

قسمت نامتقارن گرادیان سرعت (W) تانسور spin است.

PAPCO

Subject
Date

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$[W] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

حالا نشان می‌دهیم که نرخ تغییرات طول dx با تانسور [D] نشان داده می‌شود.

بردار یکه سطح

$$\vec{dx} = ds\,\vec{n} \longrightarrow \vec{dx}\cdot\vec{dx} = ds^2 \longrightarrow 2\vec{dx}\cdot\frac{D}{Dt}\vec{dx} = 2ds\frac{D}{Dt}ds$$

$$\vec{dx}\cdot\frac{D}{Dt}\vec{dx} = \vec{dx}\cdot(\vec{\nabla}\vec{V})\cdot\vec{dx} = \vec{dx}\cdot(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}})\cdot\vec{dx} = \vec{dx}\cdot\underline{\underline{D}}\cdot\vec{dx} + \vec{dx}\cdot\underline{\underline{W}}\cdot\vec{dx}$$

$$\vec{dx}\cdot\underline{\underline{W}}\cdot\vec{dx} = dx\,\vec{e}_i\cdot W_{jk}\,\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\,dx\cdot\vec{e}_i = dx\,\vec{e}_i\cdot W_{jk}\,\delta_{ki}\,dx\,\vec{e}_j = dx\,\vec{e}_i\cdot W_{ji}\,dx\,\vec{e}$$

$$= dx\,W_{ji}\,dx\,\delta_{ij} = 0$$

$$i = j \longrightarrow W_{ji} = 0$$

$$i \neq j \longrightarrow \delta_{ij} = 0$$

Subject
Date

$$\vec{dx} \cdot \frac{D}{Dt} \vec{dx} = \vec{dx} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \vec{dx}$$

از طرفی: $\vec{dx} \cdot \frac{D}{Dt} \vec{dx} = ds \frac{D}{Dt} ds$ $\qquad \vec{dx} = \vec{n} ds$

$$ds \cdot \frac{D}{Dt} ds = \overset{\vec{n}ds}{\vec{dx}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \overset{\vec{n}ds}{\vec{dx}}$$

$$\cancel{ds} \frac{D}{Dt} ds = \cancel{ds}\, \vec{n} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot ds\, \vec{n}$$

$$\frac{1}{ds} \frac{D}{Dt} ds = \vec{n} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \vec{n} = D_{nn} \quad \text{no sum on } n$$

$$\vec{n}_i = \vec{e}_i$$

$$\vec{n} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \vec{n} = \vec{e}_i \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_i \cdot (D_{jk}\, \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_i$$

$$= \vec{e}_i \cdot D_{ji}\, \vec{e}_j = D_{ii}$$

D_{11} : نرخ افزایش طول برای المان در راستای e_1

D_{22} : نرخ افزایش طول برای المان در راستای e_2

D_{33} : نرخ افزایش طول برای المان در راستای e_3

$2D_{12}$: نرخ کاهش زاویه بین دو المان در راستای e_1, e_2

$2D_{13}$: نرخ کاهش زاویه بین دو المان در راستای e_1, e_3

$2D_{23}$: نرخ کاهش زاویه بین دو المان در راستای e_2, e_3

$\downarrow$ rate of shear

PAPCO

The rate of deformation tensor :

$$F_{iR} = \frac{\partial x_i}{\partial X_R} \quad , \quad \vec{\nabla}\vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \qquad \vec{\nabla}\vec{u} = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Omega}}$$

دوران صلب وار

$$\vec{\nabla}\vec{V} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\vec{W}}}$$

$$\vec{W} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{V} \quad \text{spin}$$

spin : جسم حول محور خودش دوران می کند.

rotation : جسم حول محوری غیر محور خودش دوران کند.

$$W_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{DV_k}{Dx_j}$$

$$\frac{D}{Dt}dx = \vec{\nabla}\vec{V}\cdot\vec{dx} = (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}})\cdot\vec{dx}$$

$$\vec{dx} = \vec{dX} + \vec{\nabla}\vec{u}\cdot\vec{dX} = \vec{dX} + (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Omega}})\cdot\vec{dX}$$

Ex : given the velocity field : $V_1 = kx_2$, $V_2 = V_3 = 0$

a) find D and W?

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{V} + \vec{\nabla}\vec{V}^T) \qquad \vec{\nabla}\vec{V} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 0 & k/2 & 0 \\ k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Subject
Date

$$W = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{V} - \vec{\nabla}\vec{V}^{T}\right)$$

$$\longrightarrow W = \begin{bmatrix} 0 & k/2 & 0 \\ -k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) find the rate of extension of the following Material elements:

$$\vec{dx}^1 = ds_1 \vec{e}_1 \quad , \quad \vec{dx}^2 = ds_2 \vec{e}_2 \quad , \quad \vec{dx}^3 = \frac{ds}{\sqrt{5}} (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)$$

$\vec{e}_1$ در راستای $\vec{dx}^1 \longrightarrow D_{11} = 0$

$\vec{e}_2$ در راستای $\vec{dx}^2 \longrightarrow D_{22} = 0$

$\vec{dx}^3$ در راستای بردار نرمال $\vec{n}$ قرار دارد $\longrightarrow \vec{n}.\underline{\underline{D}}.\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k/2 & 0 \\ k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$= \frac{2}{5} k$$

The velocity gradient and spin Tensors:

$$\vec{\nabla}\vec{V}$$
$$\downarrow$$
$$L_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}}$$

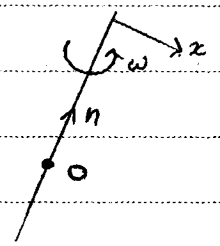
$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) \longrightarrow \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^{T}\right)$$

Subject
Date

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) \longrightarrow \underline{\underline{W}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^T\right)$$

در محاسبه W، فرض تغییر فرم کوچک را نداریم، ولی Ω با فرض تغییر فرم کوچک نوشته می‌شود.

مثال: در یک دوران صلب وار با سرعت زاویه‌ای ω که حول محور دلخواه عبوری از نقطه O می‌باشد، تانسور $\underline{\underline{L}}$ و $\underline{\underline{D}}$ را پیدا کنید.



$$\vec{V} = \omega \vec{n} \times \vec{x}$$

$$V_i = e_{ijk}\, \omega n_j\, x_k$$

$$L = ? \qquad D = ?$$

$$V_i = e_{ijs}\, \omega n_j\, x_s$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_k} = e_{ijs}\, \omega n_j\, \delta_{sk} = e_{ijk}\, \omega n_j$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e_{kjs}\, \omega n_j\, x_s\right) = e_{kji}\, \omega n_j = -e_{ijk}\, \omega n_j$$

$$L_{ik} = \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = e_{ijk}\, \omega n_j$$

$$D_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right) = 0$$

$$L_{ik} = \omega \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

PAPCO

Subject
Date

مقایسه D و $\dot{E}$:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

$$\frac{D}{Dt} E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial X_j} + \frac{\partial V_j}{\partial X_i}\right)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{Dx_i}{Dt}\right) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial (X_i + u_i)}{\partial X_j}\right)$$

$$= \frac{D}{Dt}\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

در تغییر فرم های خیلی کوچک، $\dot{E}$ با D تقریباً برابر است. (مثلاً در الاستیسیته)

مقایسه بین $\dot{F}_{ik}$ و L_{ij} :

نرخ تغییر فرم ← تغییر فرم ←

$$L_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \qquad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

$$\frac{D}{Dt}(F_{iR}) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_R}\right) = \frac{\partial V_i}{\partial X_R} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial X_R} = L_{ij} F_{jR}$$

$$\frac{DF}{Dt} = L \cdot F \longrightarrow L = \frac{DF}{Dt} F^{-1}$$

very small deformation gradient : $F^{-1} \cong I$

$$L \cong \frac{DF}{Dt} \qquad D \cong \frac{D}{Dt} E \qquad W \cong \frac{D}{Dt}\Omega$$

Subject
Date

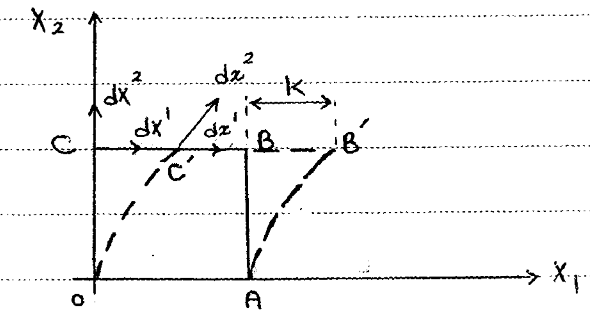
در محاسبه E ، از ترم های غیرخطی صرف نظر شد (فرض تغییر فرم خیلی کوچک) . بنابراین تانسور E دقیق نیست . در حالی که تانسور D که در مختصات اویلری می باشد ، یک تانسور دقیق است .

E ← در مختصات لاگرانژی

D در معادلات ساختاری که در مختصات اویلری باشد ، صدق می کند .

Ex: given the following displacement components:

$u_1 = kX_2^2 \quad , \quad u_2 , u_3 = 0$



a) Find The deformed vectors (dx^1, dx^2) of the material elements:

$\vec{dX}^1 = dX_1 \vec{e}_1 \quad , \quad \vec{dX}^2 = dX_2 \vec{e}_2$ at point C(0, 1)

b) determine the ratio of $\frac{|dx^1|}{|dX^1|} \, , \, \frac{|dx^2|}{|dX^2|}$

$\vec{dx}^1 = \vec{dX}^1 + \vec{\nabla}\vec{u}\,\vec{dX}^1$

$\vec{\nabla}\vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} 0 & 2kX_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad @\,C \longrightarrow \Delta u = \begin{bmatrix} 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

PAPCO

Subject
Date

$$\vec{dx}' = \vec{dX}' + \vec{\nabla}\vec{u}\cdot\vec{dX}' = dX_1\,\vec{e}_1 + [\vec{\nabla}\vec{u}]\begin{bmatrix} dX_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = dX_1\,\vec{e}_1$$

$$\frac{|dx_1|}{|dX_1|} = 1$$

$$\vec{dx}^2 = \vec{dX}^2 + \vec{\nabla}\vec{u}\cdot\vec{dX}^2 = dX_2\,\vec{e}_2 + [\vec{\nabla}\vec{u}]\begin{bmatrix} 0 \\ dX_2 \\ 0 \end{bmatrix} = dX_2\,(2k\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

یادآوری : $\vec{\nabla}\vec{u}\cdot\vec{dX}' = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\,dX_j\,\vec{e}_i$

sum on j Sum on i

$$= \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}dX_1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_2}dX_2 + \frac{\partial u_1}{\partial X_3}dX_3\right)\vec{e}_1$$

$$+ \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}dX_1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}dX_2 + \frac{\partial u_2}{\partial X_3}dX_3\right)\vec{e}_2$$

$$+ \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}dX_1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}dX_2 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3}dX_3\right)\vec{e}_3$$

$$|dx_2| = dX_2\sqrt{4k^2+1}$$

$$\frac{|dx_2|}{dX_2} = \frac{dX_2\sqrt{4k^2+1}}{dX_2} = \sqrt{4k^2+1}$$

Compatibility Conditions for infinitesimal strain Components:

$$u_1,\ u_2,\ u_3 \longrightarrow \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1},\quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2},\quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right),\quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right),\quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)$$

3 معلوم جابجایی ، 6 مجهول کرنش ⟵ معادلات سازگاری

PAPCO

Subject
Date

St. venant's Compatibility equations (1860)

میدان جابجایی → (6 معادله جابجایی-کرنش) → میدان کرنش → (6 معادله ساختاری تنش - کرنش) → میدان تنش

معادلات	مجهولات
6 معادله ساختاری	3 جابجایی
6 معادله جابجایی-کرنش	6 کرنش
3 معادلهٔ تعادل	6 تنش
← 15 معادله	← 15 مجهول

جهت ساده شدن روابط : تابع تنش ایری : Airy stress Function (φ)

تنش → کرنش → جابجایی

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} , \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} , \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right) = \frac{\partial u}{\partial x} \longrightarrow u = \int \varepsilon_{xx} dx \quad (1$$

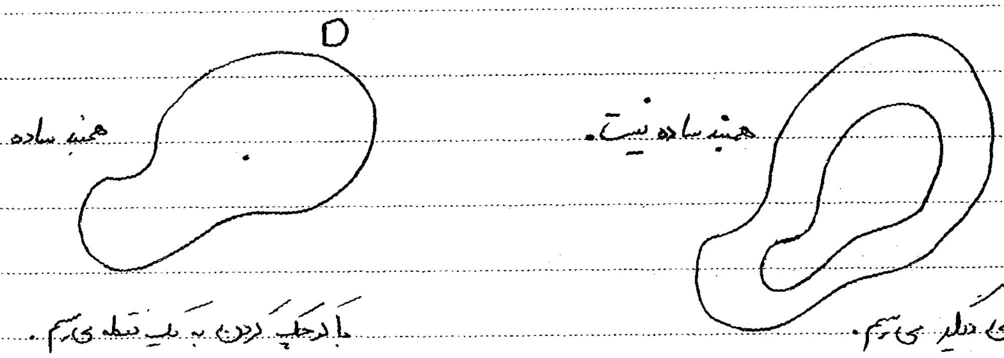
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right) = \frac{\partial v}{\partial y} \longrightarrow v = \int \varepsilon_{yy} dy \quad (2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}}{G} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (3)$$

هیچ تضمینی برای صدق کردن روابط 1 , 2 و 3 نیست!

اگر E_{ij} توابع پیوسته کرنش‌های بی‌نهایت کوچک باشند که در یک فضای همبند ساده مشتقات مرتبه دوم پیوسته داشته باشند، شرط لازم و کافی برای داشتن توابع تک مقداره و پیوسته جابجایی u_1 ، u_2 ، u_3 این است که ۶ معادله سازگاری ارضا شوند.

همبند ساده : simply connected domain :



با کوچک کردن به یک نقطه می‌رسیم.

با کوچک کردن به یک منحنی دیگر می‌رسیم.

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

1 $E_{ii} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2} u_{i,i} + \frac{1}{2} u_{i,i} \longrightarrow$ مشتق دوم kk جزئی

2 $E_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{2} u_{j,k} + \frac{1}{2} u_{k,j} \longrightarrow$ مشتق دوم ii جزئی

3 $E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{j,i} \longrightarrow$ مشتق دوم ik جزئی

4 $E_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2} u_{i,k} + \frac{1}{2} u_{k,i} \longrightarrow$ مشتق دوم ij جزئی

Subject

Date

$\underline{1}\quad E_{ii,jk} = \frac{1}{2} u_{i,ijk} + \frac{1}{2} u_{i,ijk}$

$\underline{2}\quad E_{jk,ii} = \frac{1}{2} u_{j,kii} + \frac{1}{2} u_{k,jii}$

$\underline{3}\quad E_{ij,ik} = \frac{1}{2} u_{i,jik} + \frac{1}{2} u_{j,iik}$

$\underline{4}\quad E_{ik,ij} = \frac{1}{2} u_{i,kij} + \frac{1}{2} u_{k,iij}$

$E_{ii,jk} + E_{jk,ii} - E_{ij,ik} - E_{ik,ij} = 0$

معادلات سازگاری: $E_{ii,jk} + E_{jk,ii} = E_{ij,ik} + E_{ik,ij}$

81 معادله $\longrightarrow$ 6 معادله سازگاری

$i \quad j \quad k$

$X_1 \quad X_2 \quad X_3$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} + \frac{\partial^2 E_{23}}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial X_1 \partial X_3} + \frac{\partial^2 E_{13}}{\partial X_1 \partial X_2}$$

$X_2 \quad X_1 \quad X_3$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_1 \partial X_3} + \frac{\partial^2 E_{13}}{\partial X_2^2} = \frac{\partial^2 E_{21}}{\partial X_2 \partial X_3} + \frac{\partial^2 E_{23}}{\partial X_2 \partial X_1}$$

$X_3 \quad X_1 \quad X_2$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 E_{33}}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial X_3^2} = \frac{\partial^2 E_{31}}{\partial X_3 \partial X_2} + \frac{\partial^2 E_{32}}{\partial X_3 \partial X_1}$$

$X_1 \quad X_2 \quad X_2$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_1^2} = 2 \frac{E_{12}}{\partial X_1 \partial X_2}$$

$X_1 \quad X_3 \quad X_3$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 E_{33}}{\partial X_1^2} = 2 \frac{\partial^2 E_{13}}{\partial X_1 \partial X_3}$$

$X_2 \quad X_3 \quad X_3$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 E_{33}}{\partial X_2^2} = 2 \frac{\partial^2 E_{23}}{\partial X_2 \partial X_3}$$

۶ معادلهٔ فوق از 81 معادلهٔ کلی، معادلات مستقل می‌باشند.

در محاسبات E ، Rotation در نظر گرفته نشده است. بنابراین وقتی u را از E بدست می‌آوریم، u یکتا نخواهد بود. (چرا که u می‌توانسته یک Rotation داشته باشد، که در محاسبهٔ E حذف شده است.) (Rotation های مختلف)

Subject
Date

مثال: آیا مؤلفه های کرنش بدست آمده از میدان جابجایی زیر سازگار هستند یا خیر؟

$u_1 = X_1^3 \quad , \quad u_2 = e^{X_1} \quad , \quad u_3 = \sin X_2$

حل: وقتی از یک میدان u، کرنش ها را بدست می آوریم، کرنش های بدست آمده حتماً سازگار می باشند.

مثال: آیا میدان کرنش زیر یک میدان سازگار می باشد یا خیر؟ اگر بله، میدان جابجایی را حساب کنید. (u)

$$[E] = k \begin{bmatrix} 2X_1 & X_1 + 2X_2 & 0 \\ X_1 + 2X_2 & 2X_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2X_3 \end{bmatrix}$$

← چون معادلات سازگاری دارای مشتقات مرتبه 2 می باشند، پس حتماً سازگار خواهد بود.

$$2X_1 k = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad u_1 = kX_1^2 + f_1(X_2, X_3)$$

$$2X_1 k = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \qquad u_2 = 2kX_1X_2 + f_2(X_1, X_3)$$

$$2X_3 k = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \qquad u_3 = kX_3^2 + f_3(X_2, X_3)$$

$$k(X_1 + 2X_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial X_2} + 2kX_2 + \frac{\partial f_2}{\partial X_1}\right) \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial X_2} + \frac{\partial f_2}{\partial X_1} = 2k(X_1 + X_2)$$

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + 0 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0$$

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + 0 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right) \longrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$$

$$f_1(X_2, X_3) = kX_2^2 \quad , \quad f_2(X_1, X_3) = kX_1^2 \quad , \quad f_3(X_2, X_3) = 0$$

Subject
Date

Finite Deformation :

$\vec{\nabla}\vec{u} \longrightarrow \underline{\underline{F}} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}$: ۱) متقارن نیست. ۲) در حرکت صلب را مقدار دارد.

1) $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$

$\hookrightarrow \gamma$

$\hookrightarrow E$

2) $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$

Deformation Tensors:

$C = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$ right cauchy _ Green tensor of Deformation.

$B = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$ left cauchy _ Green tensor of Deformation.

$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$, $C^T = \underline{\underline{F}}^T \cdot (\underline{\underline{F}}^T)^T = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}^T = \underline{\underline{C}}$ similarly $\underline{\underline{B}}^T = \underline{\underline{B}}$

positive Definite

$x^T A x > 0$

بردار ستونی دلخواه

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [a \quad b]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a^2 + b^2$$

اگر یک تانسور positive Definite باشد، سه مقدار ویژه و سه جهت اصلی دارد که همان جهت کرنش های اصلی (در مورد تانسور C) خواهد بود.

مثال: ثابت کنید C مثبت معین است.

$\vec{dX} \xrightarrow{\text{بعد از تغییر فرم}} \vec{dx}$ و فرض: $\vec{dx} = ds\,\vec{e}_1$

$$\vec{dx}\cdot\vec{dx} = \underline{\underline{F}}\cdot\vec{dX}\cdot\underline{\underline{F}}\vec{dX} = \vec{dX}\cdot\underline{\underline{F}}^T\cdot\underline{\underline{F}}\vec{dX} = \vec{dX}\cdot\underline{\underline{C}}\cdot\vec{dX}$$

طول اولیه: $ds^2 = \vec{dX}\cdot\underline{\underline{C}}\cdot\vec{dX} \longrightarrow \underline{\underline{C}}>0$

C مقادیر ویژه مثبت دارد. (سه مقدار ویژه مثبت، متمایز)

جهت ویژه N_I، مقدار ویژه Λ: $\underline{\underline{C}}\cdot\vec{N}_I = \Lambda\vec{N}_I$

ضرب در N_I: $\vec{N}_I\cdot\underbrace{\underline{\underline{C}}}_{\text{مثبت معین}}\cdot\vec{N}_I = \vec{N}_I\cdot\Lambda\vec{N}_I = \Lambda\vec{N}_I\cdot\vec{N}_I = \Lambda_I>0$

← مقادیر ویژه مثبت می باشند.

تانسوری مانند U وجود دارد که در رابطه مقابل صدق کند. $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^2 \quad , \quad \underline{\underline{U}} = \sqrt{\underline{\underline{C}}}$

یادآوری: spectral Decomposition: می توان یک تانسور را به صورت حاصلضرب مقادیر ویژه در بردارهای ویژه نشان داد.

$$\underline{\underline{C}} = \sum_{i=1}^{3}\Lambda_i\,\vec{N}_I\otimes\vec{N}_I$$

نمایش طیفی $\underline{\underline{U}} = \sum_{i=1}^{3}\lambda_I\,\vec{N}_I\otimes\vec{N}_I$ $\qquad \lambda_I^2 = \Lambda_I>0$

$$\underline{\underline{U}}^2 = (\sum\lambda_I\vec{N}_I\otimes\vec{N}_I)\cdot(\sum\lambda_J\vec{N}_J\otimes\vec{N}_J) = \sum\sum\lambda_I\lambda_J\delta_{IJ}\vec{N}_I\otimes\vec{N}_J$$

$$= \sum\lambda_I^2\,\vec{N}_I\otimes\vec{N}_I = \sum\Lambda_I\,\vec{N}_I\otimes\vec{N}_I$$

C : تانسور لاگرانژی

B : تانسور اویلری

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} = x_{i,J}\, \vec{e}_i \otimes \vec{E}_J = F_{iJ}\, \vec{e}_i \otimes \vec{E}_J$$

$$\underline{\underline{F}}^T = F_{iJ}\, \vec{E}_J \otimes \vec{e}_i$$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = F_{iJ}\, \vec{E}_J \otimes \vec{e}_i \cdot F_{mN}\, \vec{e}_m \otimes \vec{E}_N$$
$$= F_{iJ}\, F_{mN}\, \vec{E}_J\, \vec{E}_N\, \delta_{im} = F_{iJ}\, F_{iN}\, \vec{E}_J \otimes \vec{E}_N$$

تانسور لاگرانژی : $A = A_{IJ}\, \vec{E}_I \otimes \vec{E}_J$

تانسور اویلری : $A = A_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$

تانسور دو نقطه‌ای $\begin{cases} A = A_{iJ}\, \vec{e}_i \otimes \vec{E}_J \\ A = A_{Ij}\, \vec{E}_I \otimes \vec{e}_j \end{cases}$ Like $\underline{\underline{F}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} = x_{i,J}\, \vec{e}_i \otimes \vec{E}_J$

یک قضیه از جبر خطی :

اگر A یک تانسور مرتبه 2 باشد و $|A| \neq 0$ یا A^{-1} وجود داشته باشد، می‌توان ماتریس A را به صورت زیر تجزیه کرد.

$$\underline{\underline{A}} = \overbrace{\underline{\underline{Q}}\,\underbrace{\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{N}}}_{\text{متقارن و مثبت معین}}\,\underline{\underline{Q}}}^{\text{ماتریس متعامد}}$$: polar Decomposition

Subject
Date

اگر تانسور حقیقی $\underline{\underline{F}}$ ، دترمینان غیر صفر داشته باشد، می‌توان آن را به صورت دو تانسور متعامد R ، متقارن U (یا V) بصورت زیر تجزیه کرد.

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}.\underline{\underline{U}} \quad , \quad \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}}.\underline{\underline{R}}$$

$$\underline{\underline{R}}^T.\underline{\underline{R}} = I \qquad \underline{\underline{U}}^T = \underline{\underline{U}} \quad , \quad \underline{\underline{V}}^T = \underline{\underline{V}}$$

$\underline{\underline{U}}$: right stretch Tensor
$\underline{\underline{V}}$: left stretch Tensor

$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}.\underline{\underline{U}}$, $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}}.\underline{\underline{R}}$ یکتا هستند.

مثلاً اگر فرض کنیم R و U یکتا نباشند : $R, \bar{R}$, $U, \bar{U}$:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}.\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{\bar{R}}}\,\underline{\underline{\bar{U}}}$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\bar{R}}}\,\underline{\underline{\bar{U}}} \longrightarrow \underline{\underline{\bar{U}}} = \underline{\underline{\bar{R}}}^T.\underline{\underline{F}} \longrightarrow \bar{U}^T = F^T.\bar{R}$$

$$\bar{U}^T.\bar{U} = \bar{U}^2 = (F^T.\underbrace{\bar{R}).(\bar{R}^T}_{I}.F) = F^T.F = C = U^2$$

محاسبهٔ تانسور کشیدگی راست $\underline{\underline{U}}$ ، متعامد $\underline{\underline{R}}$ از گرادیان تغییر فرم $\underline{\underline{F}}$:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}.\underline{\underline{U}}$$

$$\underline{\underline{F}}^T.\underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}})^T.(\underline{\underline{R}}.\underline{\underline{U}}) = \underline{\underline{U}}^T.\underline{\underline{R}}^T.\underline{\underline{R}}.\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^T.\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^2$$

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}}.\underline{\underline{U}}^{-1}$$

برای بدست آوردن $\underline{\underline{U}}$ از $\underline{\underline{U}}^2$ ، ابتدا $\underline{\underline{U}}^2$ را قطری می‌کنیم ، سپس از آن جذر می‌گیریم.

مثال : نشان دهید R متعامد است.

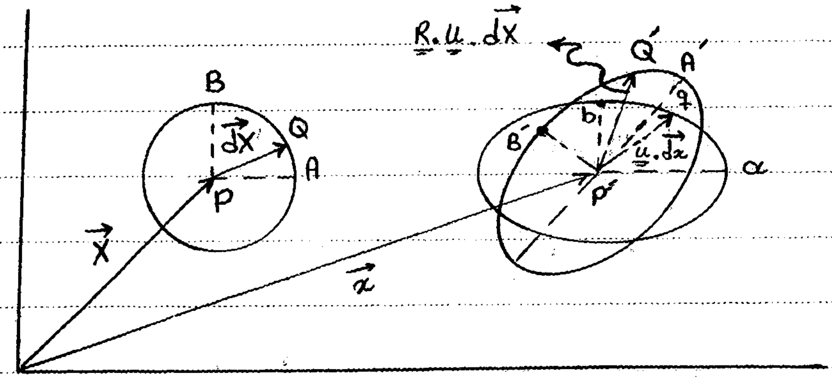
$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}.\underline{\underline{U}} \longrightarrow \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}}.\underline{\underline{U}}^{-1} \longrightarrow \underline{\underline{R}}^T = (\underline{\underline{U}}^{-1})^T.\underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{U}}^{-1}.\underline{\underline{F}}^T$$

$$\underline{\underline{R}}^T.\underline{\underline{R}} = (\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{U}}^{-1})^T.(\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{U}}^{-1}) = ((U^{-1})^T.F^T).(F.U^{-1}) = (U^{-1})^T.\underbrace{F^T.F}_{U^2 = U^T.U}.U^{-1} = \underbrace{(U^{-1})^T.U^T}_{I}.\underbrace{U U^{-1}}_{I} = I$$

Subject

Date

$$\vec{dx} = \underline{\underline{F}}\,\vec{dX} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{U}}\,\vec{dX} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{R}}\,\vec{dx}$$



از نظر هندسی هیچ فرقی نمی‌کند که جنبش با یک کشیدگی خالص شروع شده و با یک دوران صلب وار R تکمیل گردد و یا با یک دوران صلب وار R شروع شود و با یک کشیدگی خالص تکمیل گردد.

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{U}}$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}}\,.\,\underline{\underline{R}}$$

1) right cauchy _ Green's Tensor $\quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{F}}^T.\underline{\underline{F}}$

2) left cauchy _ Green's Tensor $\quad \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{V}}^2 = \underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}^T$

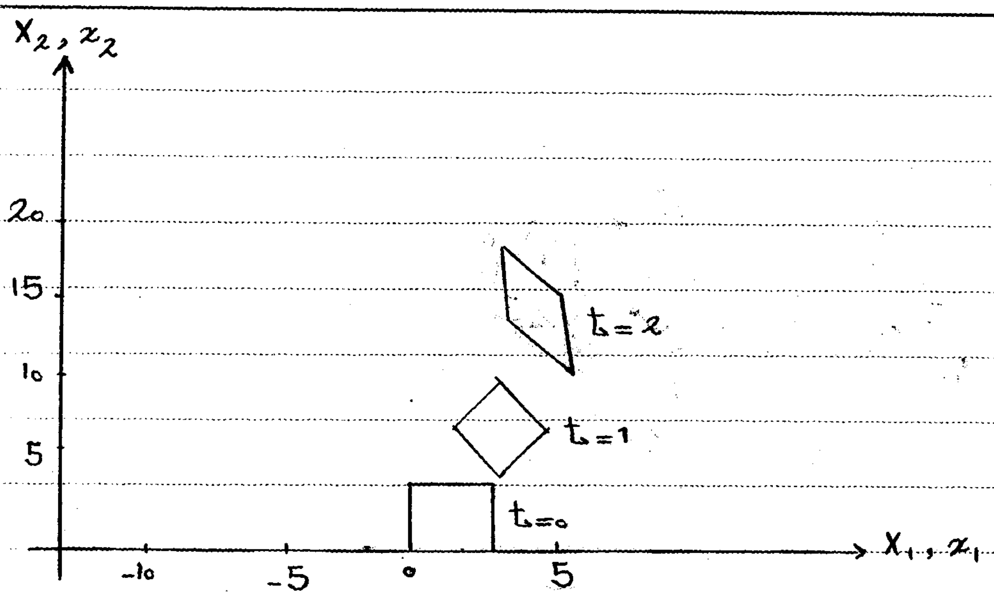
Ex : The motion is given by :

$$x_1 = \frac{1}{4}\left[4X_1 + (9 - 3X_1 - 5X_2 - X_1X_2)\,t\right]$$

$$x_2 = X_2 + (4 + 2X_1)\,t$$

Subject

Date



تنسورهای U , C را بدست آورید.

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \rightarrow \quad @t=1 \; ; \; \text{position} : X(0,0)$$

$$\underline{\underline{F}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 65 & 27 \\ 27 & 41 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\underline{C}} - \lambda^2 I) \cdot \vec{N} = 0$$

$$\det |\underline{\underline{C}} - \lambda^2 I| = 0 \longrightarrow \det \begin{bmatrix} \frac{65}{16} - \lambda^2 & \frac{27}{16} \\ \frac{27}{16} & \frac{41}{16} - \lambda^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 - \frac{53}{8}\lambda^2 + \frac{121}{16} = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1^2 = 5.159 \\ \lambda_2^2 = 1.466 \end{cases}$$

Subject

Date

$$\left\{ \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 65 & 27 \\ 27 & 41 \end{bmatrix} - \lambda_1^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} N_1^{(1)} \\ N_2^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

$$\vec{N}_1 = \begin{bmatrix} -0.5449 \\ 0.8385 \end{bmatrix} \qquad \text{similarly :} \quad \vec{N}_2 = \begin{bmatrix} -0.5449 \\ 0.8385 \end{bmatrix}$$

Spectral Decomposition :

$$\underline{\underline{U}} = \lambda_1 \vec{N}_1 \otimes \vec{N}_1 + \lambda_2 \vec{N}_2 \otimes \vec{N}_2$$

$$\vec{N}_1 \otimes \vec{N}_1 = \begin{bmatrix} 0.8385 & 0.5449 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.8385 \\ 0.5449 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7031 & 0.4569 \\ 0.4569 & 0.2969 \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = a_i b_j \, e_i \otimes e_j$$

$$\vec{N}_2 \otimes \vec{N}_2 = \begin{bmatrix} 0.2969 & -0.5469 \\ -0.5469 & 0.7031 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} 1.9565 & 0.4846 \\ 0.4846 & 1.5256 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{U}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3590 & -0.9334 \\ 0.9334 & 0.3590 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{U}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5548 & -0.1762 \\ -0.1762 & 0.7114 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} = I$$

Subject

Date

Right Cauchy _ Green's Deformation Tensor :

$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T . \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}}^2$ $\qquad \vec{dx}^1 = \underline{\underline{F}} \vec{dX}^1$

Rigid body motion : $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{R}}$ $\qquad \vec{dx}^2 = \underline{\underline{F}} \vec{dX}^2$

$\vec{dx}^2 , \vec{dx}^1 \longleftarrow \vec{dX}^2 , \vec{dX}^1$ الان

$$\vec{dx}^1 . \vec{dx}^2 = \underbrace{\underline{\underline{F}} . \vec{dX}^1}_{\vec{a}} . \underbrace{\underline{\underline{F}}}_{\underline{\underline{I}}} . \underbrace{\vec{dX}^2}_{\vec{b}} = \vec{dX}^2 . \underline{\underline{F}}^T . \underline{\underline{F}} . \vec{dX}^1 = \vec{dX}^2 . \underline{\underline{C}} . \vec{dX}^1$$

if $\vec{dx}^1 = ds_1 . \vec{n}$, $\vec{dX}^1 = dS_1 . \vec{e}_1$

$$\vec{dX}^1 = \vec{dX}^2 = \vec{dX} = dS_1 . \vec{e}_1$$

$$ds_1^2 = dS_1^2 \, \vec{e}_1 . \underline{\underline{C}} . \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_1 . \underline{\underline{C}} \vec{e}_1 = \frac{ds_1^2}{dS_1^2} \longrightarrow C_{11} = \frac{ds_1^2}{dS_1^2}$$

$$C_{22} = \left(\frac{ds_2}{dS_2}\right)^2$$

$$C_{33} = \left(\frac{ds_3}{dS_3}\right)^2$$

Subject

Date

$$\vec{dX}^1 = dS_1 \cdot \vec{e}_1 \qquad \vec{dX}^2 = dS_2 \cdot \vec{e}_2 \xrightarrow{\text{تغییر فرم}} \begin{cases} \vec{dx}^1 = ds_1 \cdot \vec{m} \\ \vec{dx}^2 = ds_2 \cdot \vec{n} \end{cases}$$

β : زاویهٔ میان $\vec{n}, \vec{m}$

$$\vec{dx}^1 \cdot \vec{dx}^2 = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{dX}^1 \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{dX}^2$$

$$ds_1 \, ds_2 \cos\beta = dS_1 \, dS_2 \; \vec{e}_2 \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \vec{e}_1$$

$$C_{21} = \frac{ds_1 \, ds_2}{dS_1 \, dS_2} \cos(\vec{dx}^1, \vec{dx}^2)$$

$$C_{31} = \frac{ds_1 \, ds_3}{dS_1 \, dS_3} \cos(\vec{dx}^1, \vec{dx}^2)$$

$$C_{32} = \frac{ds_2 \, ds_3}{dS_2 \, dS_3} \cos(\vec{dx}^1, \vec{dx}^2)$$

Ex: given $x_1 = X_1 + 2X_2$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$

a) $C = ?$

$$[F] = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Subject

Date

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) مقادیر اصلی و جهت های اصلی $\underline{\underline{C}}$ ؟

$$|\underline{\underline{C}} - \lambda I| = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_3 = 1 \qquad (1-\lambda)(5-\lambda) = 4 \longrightarrow \lambda_1 = 5.828 \qquad \lambda_2 = 0.1716$$

$$[\underline{\underline{C}} - \lambda I] \cdot \vec{N} = 0$$

$$\lambda_1 \longrightarrow N_1 = 0.3827\,\vec{e_1} + 0.9238\,\vec{e_2}$$

$$\lambda_2 \longrightarrow N_2 = 0.9238\,\vec{e_1} - 0.3827\,\vec{e_2}$$

$$\lambda_3 \longrightarrow N_3 = \vec{e_3}$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 5.828 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1716 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) U , U^{-1} در محورهای اصلی ؟

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^2 \xrightarrow[\text{اصلی}]{\text{در جهت های}} \underline{\underline{U}} = \sqrt{\underline{\underline{C}}} \longrightarrow U = \begin{bmatrix} 2.414 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4142 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{and} \quad \underline{\underline{U}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4142 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4142 & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PAPCO

Subject
Date

d) u , u^{-1} ? در محورهای پایه $(\vec{e}_i)$

$[u]_{e_i} = \underset{=}{Q}^T \cdot U_{n_i} \cdot \underset{=}{Q}$

ماتریس متعامدسازی $\underset{=}{Q}$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.3827 & 0.9238 & 0 \\ 0.9238 & -0.3827 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[u]_{e_i} = \begin{bmatrix} 0.3827 & 0.9238 & 0 \\ 0.9238 & -0.3827 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.414 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4142 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3827 & 0.9238 & 0 \\ 0.9238 & -0.3827 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[u]_{e_i} = \begin{bmatrix} 0.7070 & 0.7070 & 0 \\ 0.7070 & 2.121 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [u^{-1}]_{e_i} = \begin{bmatrix} 2.121 & -0.7070 & 0 \\ -0.7070 & 0.7070 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) $R_{(e_i)} = ?$ $(\vec{e}_i)$ در محورهای پایه

$$F = RU \longrightarrow R_{(e_i)} = [F][u^{-1}]_{e_i} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lagrangian Strain Tensor :

$\underset{=}{C} = \underset{=}{F}^T \cdot \underset{=}{F} = \underset{=}{U}^2$: right Cauchy - Green deformation tensor.

$\underset{=}{\gamma} = \frac{1}{2} (\underset{=}{C} - I)$: Lagrangian Finite strain Tensor.

تغییر فرم نداشته باشیم : $\underset{=}{C} = I$, $\underset{=}{\gamma} = 0$

PAPCO

Subject
Date

$$\vec{dx}^{1} \cdot \vec{dx}^{2} = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{dX}^{(1)} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{dX}^{(2)} \qquad \vec{dx}^{2}, \vec{dx}^{1} \longleftarrow \vec{dX}^{2}, \vec{dX}^{1}$$

$$= \vec{dX}^{(1)} \cdot \underbrace{\underline{\underline{F}}^{T} \cdot \underline{\underline{F}}}_{C} \cdot \vec{dX}^{(2)}$$

$$\vec{dx}^{(1)} \cdot \vec{dx}^{(2)} - \vec{dX}^{(1)} \cdot \vec{dX}^{(2)} = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{dX}^{1} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{dX}^{2} - \vec{dX}^{1} \cdot \vec{dX}^{2}$$

$$= \vec{dX}^{1} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \vec{dX}^{2} - \vec{dX}^{1} \cdot \vec{dX}^{2}$$

$$= \vec{dX}^{1} \cdot \underbrace{(\underline{\underline{C}} - I)}_{2\gamma} \cdot \vec{dX}^{2}$$

$$\vec{dX}^{1} = dS_1 \vec{e}_1 \qquad \vec{dx}^{1} = ds_1 \vec{n}$$

فرض
$$\begin{cases} \vec{dX}^{1} = \vec{dX}^{2} = \vec{dX} = dS_1 \vec{e}_1 \\ \vec{dx}^{1} = \vec{dx}^{2} = \vec{dx} = ds\, \vec{n} \end{cases}$$

$$ds_1^2 - dS_1^2 = 2dS_1^2\, \vec{e}_1 \cdot \underline{\underline{\gamma}} \cdot \vec{e}_1$$

$$\gamma_{11} = \frac{ds_1^2 - dS_1^2}{2dS_1^2} \quad \text{similarly}: \gamma_{22} = \frac{ds_2^2 - dS_2^2}{2dS_2^2}, \quad \gamma_{33} = \frac{ds_3^2 - \ldots}{2 \ldots}$$

$$2\gamma_{12} = \frac{ds_1\, ds_2}{dS_1\, dS_2} \cos(dx^1, dx^2), \quad 2\gamma_{13} = \frac{ds_1\, ds_3}{dS_1\, dS_3} \cos(dx^1, dx^3), \quad 2\gamma_{23} = \frac{ds_2\, ds_3}{dS_2\, dS_3} \ldots$$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^{T} \cdot \underline{\underline{F}}, \quad \underline{\underline{F}} = I + \vec{\nabla}\vec{u} \qquad \underline{\underline{\gamma}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^{T} \underline{\underline{F}} - I) = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^{T}) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{u} \ldots$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right)$$

PaPCO

Subject
Date

Left Cauchy - Green Deformation Tensor:

(در مختصات اویلری)

$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{V}}^2 = \underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}^T$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}}.\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}.\underline{\underline{U}} \longrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{R}}.\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{R}}^T \\ \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{R}}^T.\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{R}} \end{cases}$$

مؤلفه‌های قطری

$$B_{11} = \left(\frac{ds_1}{dS_1}\right)^2, \quad B_{22} = \left(\frac{ds_2}{dS_2}\right)^2, \quad B_{33} = \left(\frac{ds_3}{dS_3}\right)^2$$

$$B_{12} = \frac{ds_1 ds_2}{dS_1 dS_2}\cos(\vec{dx}^1, \vec{dx}^2), \quad B_{13} = \frac{ds_1 ds_3}{dS_1 dS_3}\cos(\vec{dx}^1, \vec{dx}^3), \quad B_{23} = \frac{ds_2 ds_3}{dS_2 dS_3}\cos(\vec{dx}^1, \vec{dx}^3)$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}^T = (I + \vec{\nabla}\vec{U})(I + \vec{\nabla}\vec{U})^T = I + \vec{\nabla}\vec{U} + (\vec{\nabla}\vec{U})^T + (\vec{\nabla}\vec{U})(\vec{\nabla}\vec{u})^T$$

indicial notation: $B_{ij} = \delta_{ij} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) + \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_m}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial X_m}\right)$

Almansi - Euler strain tensor:

$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}^T$

$\underline{\underline{\eta}} = \frac{1}{2}(I - \underline{\underline{B}}^{-1})$

$\vec{dx} = \underline{\underline{F}}.\vec{dX}$

$\vec{dX} = \underline{\underline{F}}^{-1}.\vec{dx}$

$F^{-1}_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$

$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X}$

$\vec{X} = \vec{x} - \vec{U}(x_1, x_2, x_3, t)$

$X_i = x_i - U_i(x_j, t)$

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Subject

Date

$$\underline{\underline{F}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{F}}^{-1} = I - \vec{\nabla}_{(x)} \vec{u}$$

$$\underline{\underline{B}}^{-1} = (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{T})^{-1} = (\underline{\underline{F}}^{-1})^{T} \cdot (\underline{\underline{F}}^{-1}) = (I - \vec{\nabla}_x \vec{u})^{T} (I - \vec{\nabla}_x \vec{u})$$

$$= I - \left[(\vec{\nabla}_x \vec{u})^{T} + (\vec{\nabla}_x \vec{u}) \right] + (\vec{\nabla}_x \vec{u})^{T} (\vec{\nabla}_x \vec{u})$$

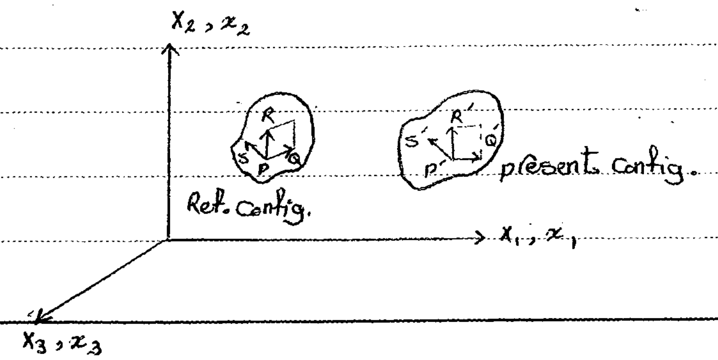
از طرفی : $\underline{\underline{\eta}} = \frac{1}{2} (I - \underline{\underline{B}}^{-1})$

در فرم اندیسی : $\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right)$

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \cong \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$ در تغییر فرم های بی نهایت کوچک

∞ کوچک : $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{\eta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$

change of Area due to deformation :



Subject
Date

$$\vec{dA} = \vec{PQ} \times \vec{PR}$$

$$dA_B = \varepsilon_{BCD}\,(PQ)_C\,(PR)_D$$

$$\vec{da} = \vec{P'Q'} \times \vec{P'R'} \xrightarrow{\text{اندیسی}} da_i = \varepsilon_{ijk}\,(P'Q')_j\,(P'R')_k$$

$$(P'Q')_j = F_{jC}\,(PQ)_C \quad , \quad (P'R')_k = F_{kD}\,(PR)_D$$

$$da_i = \varepsilon_{ijk}\,F_{jC}\,(PQ)_C\,F_{kD}\,(PR)_D$$

$$F_{iB} * da_i = \varepsilon_{ijk}\,F_{iB}\,F_{jC}\,F_{kD}\,(PQ)_C\,(PR)_D = \varepsilon_{BCD}\,\det F\,(PQ)_C\,(PR)_D$$

$$da_i = \varepsilon_{BCD}\,\det F\,(F_{iB}^{-1})\,(PQ)_C\,(PR)_D \longrightarrow da_i = \det F\,(F_{Bi})\,dA_B$$

$$da_i = J\,F_{Bi}\,dA_B \qquad J = \det F \qquad F_{Bi} = \frac{\partial X_B}{\partial x_i} = F_{iB}^{-1}$$

$$dV = \vec{PQ} \times \vec{PR} \cdot \vec{PS} = \varepsilon_{BCD}\,(PQ)_B\,(PR)_C\,(PS)_D$$

$$dv = \vec{P'Q'} \times \vec{P'R'} \cdot \vec{P'S'} = \varepsilon_{ijk}\,(P'Q')_i\,(P'R')_j\,(P'S')_k$$

$$dv = \varepsilon_{ijk}\,F_{iB}\,(PQ)_B\,F_{jC}\,(PR)_C\,F_{kD}\,(PS)_D = \varepsilon_{BCD}\,\det F\,(PQ)_B\,(PR)_C\,(PS)_D$$

$$\longrightarrow dv = J\,dV$$

Subject
Date

Conservation of Mass :

ثانوی $m = m_0$ اولیه

لاگرانژی : $\rho\, dv = \rho_0\, dV \longrightarrow \rho J = \rho_0$ equation of Continuity

$$\rho(x_1, x_2, x_3, t)\, J(x_1, x_2, x_3, t) = \rho_0 (X_1, X_2, X_3)$$

اویلری : $\dot{\rho} J + \dot{J} \rho = 0$

$$J = \varepsilon_{ABC} F_{1A} F_{2B} F_{3C} \longrightarrow \dot{J} = \varepsilon_{ABC} (\dot{F}_{1A} F_{2B} F_{3C} + F_{1A} \dot{F}_{2B} F_{3C} + F_{1A} F_{2B} \dot{F}_{3C})$$

سرعت

$$\varepsilon_{ABC} \dot{F}_{1A} F_{2B} F_{3C} = \varepsilon_{ABC} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial X_A} F_{2B} F_{3C} = \varepsilon_{ABC} \Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \overbrace{\frac{\partial x_1}{\partial X_A}}^{F_{1A}} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \cdot \overbrace{\frac{\partial x_2}{\partial X_A}}^{F_{2A}}$$

$$+ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \cdot \overbrace{\frac{\partial x_3}{\partial X_A}}^{F_{3A}} \Big) F_{2B} F_{3C}$$

$$= \varepsilon_{ABC} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} F_{1A} F_{2B} F_{3C} + 0 + 0$$

Hint :

$$\varepsilon_{123} \det A = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$$

در نتیجه :

$$\varepsilon_{ABC} F_{2A} F_{2B} F_{3C} = \varepsilon_{223} \det F = 0$$

Similarly : $\varepsilon_{ABC} F_{1A} \dot{F}_{2B} F_{3C} = J \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}$, $\varepsilon_{ABC} F_{1A} F_{2B} \dot{F}_{3C} = J \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3}$

$$\dot{J} = \underset{\det F}{J} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \qquad \dot{\rho} J + \rho J \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{if } J > 0 : \ \dot{\rho} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

RgPCO

Subject
Date

Example: for the given velocity field: $v_i = \dfrac{x_i}{1+t} \quad t \geq 0$

$\rho(t) = ?$

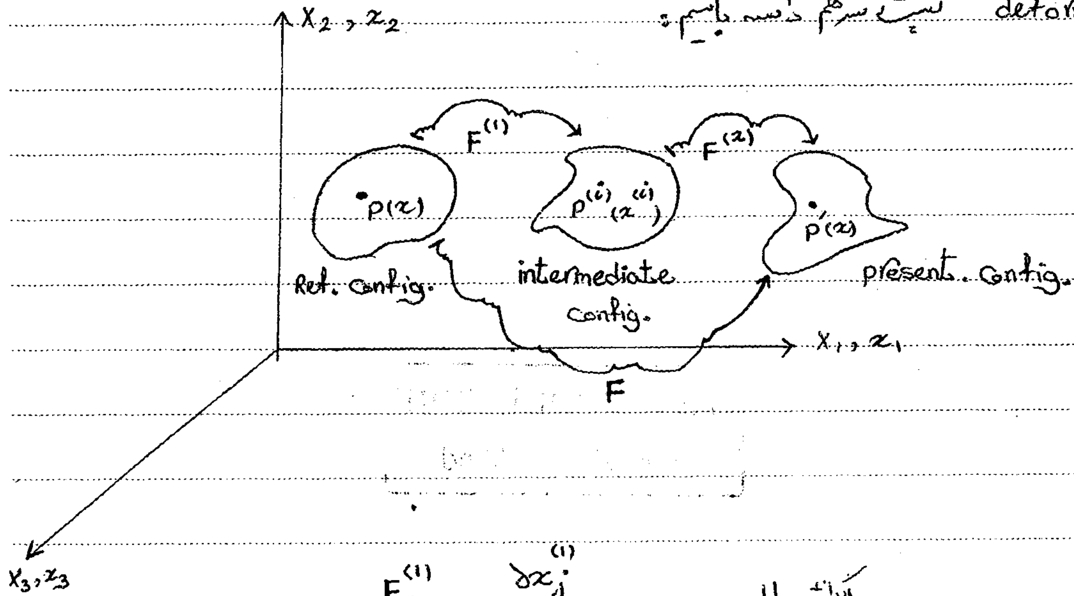
$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\delta_{ii}}{1+t} = \frac{3}{1+t}$$

جواب $\longrightarrow \rho(t) = \dfrac{\rho_0}{(1+t)^3}$

$$\dot{\rho} + \rho\frac{3}{1+t} = 0 \qquad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{3\,dt}{1+t}$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -3\int_0^t \frac{dt}{1+t} \longrightarrow \rho(t) = \frac{\rho_0}{(1+t)^3}$$

اگر دو deformation پشت سرهم داشته باشیم:



$$F^{(1)}_{jA} = \frac{\partial x^{(1)}_j}{\partial X_A}$$ لاگرانژی به اولر

$$F^{(2)}_{kj} = \frac{\partial x_k}{\partial x_j}$$ اولر به اولر

$$\longrightarrow F_{kA} = \frac{\partial x_k}{\partial X_A} = \frac{\partial x_k}{\partial x^{(1)}_j} \cdot \frac{\partial x^{(1)}_j}{\partial X_A} = F^{(2)}_{kj}\,F^{(1)}_{jA}$$

stretch (طول‌های نهایی به طول)

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}\cdot\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}}^{(2)}\cdot\underline{\underline{U}}^{(2)}\cdot\underline{\underline{R}}^{(1)}\cdot\underline{\underline{U}}^{(1)} = \underline{\underline{V}}\cdot\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{V}}^{(2)}\cdot\underline{\underline{R}}^{(2)}\cdot\underline{\underline{V}}^{(1)}\cdot\underline{\underline{R}}^{(1)}$$

$$\underline{\underline{\gamma}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) \qquad \underline{\underline{\eta}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}^{-1}) \qquad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^2 \;,\; \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{V}}^2$$

جابجایی : $\vec{u}_1 , \vec{u}_2 \xrightarrow{\text{اگر خطی باشد}} \vec{U} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$

Subject
Date

$$\gamma_{AB} = \gamma^{(1)}_{AB} + \gamma^{(2)}_{AB} + \frac{1}{2}\left(U^{(1)}_{k,A}\, U^{(2)}_{k,B} + U^{(1)}_{k,B}\, U^{(2)}_{k,A} \right)$$

$$\eta_{ij} = \eta^{(1)}_{ij} + \eta^{(2)}_{ij} - \frac{1}{2}\left(U^{(1)}_{k,i}\, U^{(2)}_{k,j} + U^{(1)}_{k,j}\, U^{(2)}_{k,i} \right)$$

$$B = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} + \frac{\partial x_j}{\partial X_i}$$

Subject

Date

Strain measures:

$$E^{(m)} = \frac{\Lambda^m - 1}{m} \qquad \Lambda \text{ stretch tensor } \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix}$$

$m = 2 \longrightarrow E^{(2)} = \frac{\Lambda^2 - 1}{2} = \frac{u^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}(C - I)$ Lagrange strain

= Green strain

= kirchhoff strain

$m = -2 \longrightarrow E^{(-2)} = \frac{\Lambda^{-2} - 1}{-2} = \frac{V^{-2} - 1}{-2} = \frac{1 - V^{-2}}{2} = \frac{1}{2}(I - B^{-1})$ Almansi-Euler strain

= Almansi Hamel strain

$m = 1 \longrightarrow E^{(1)} = \Lambda - 1$ Engineering strain, Biot strain, Cauchy strain

$$E^{1}_{11} = \lambda_{11} - 1 = \frac{L}{L_0} - 1 = \frac{L - L_0}{L_o} = \frac{\Delta L}{L_o}$$

$m = 0 \longrightarrow$

یادآوری: $e^{m\varepsilon} = I + m\varepsilon + \frac{1}{2!} m^2 \varepsilon^2 + \dots = \Lambda^m$

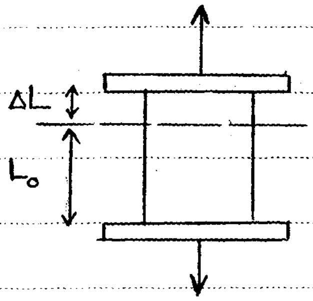
$$E^{(m)} = \frac{1}{m}(e^{m\varepsilon} - I) = \frac{1}{m}(m\varepsilon + \frac{1}{2!} m^2 \varepsilon^2 + \dots) \simeq \varepsilon + \frac{1}{2!} m\varepsilon^2$$

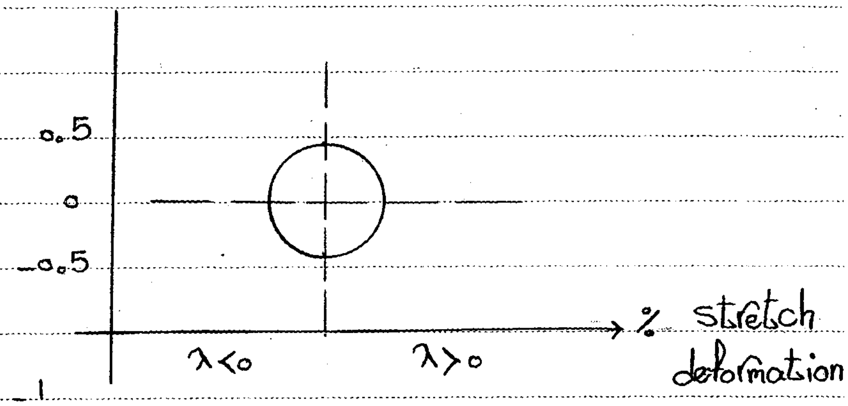
$m = 0 \longrightarrow E^{(0)} = \varepsilon = L_n \Lambda$ Logarithmic strain, Tive strain

, Natural strain, Hencky strain

Subject
Date

مثال: برای کشش و فشار محوری معیارهای مختلف کرنش را برحسب کشیدگی λ رسم کنید.

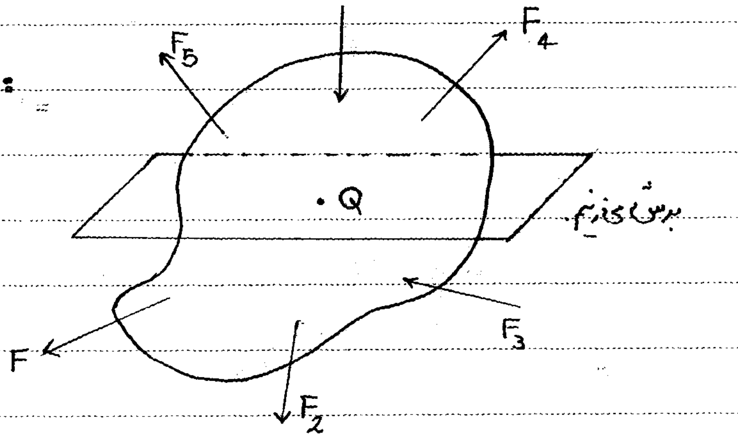


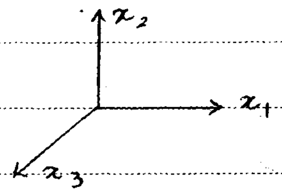


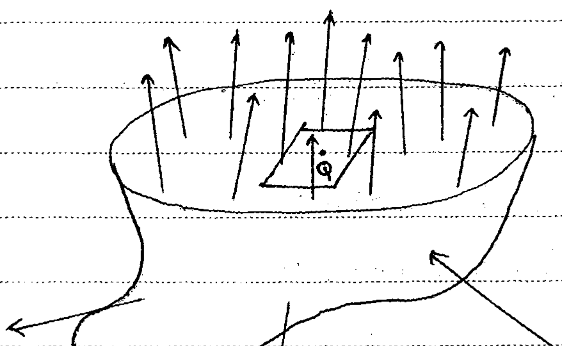
$$e = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{L}{L_0} - 1 = \lambda - 1$$

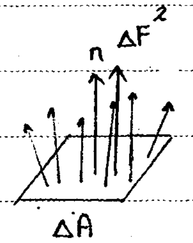
$$\rightarrow \lambda = e + 1$$

stress:









تنش: شدت نیرو در یک نقطه.

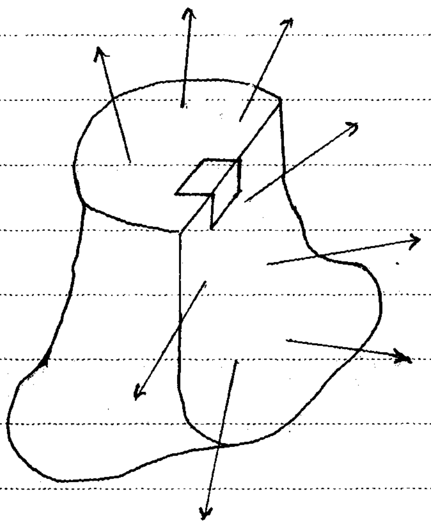
$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

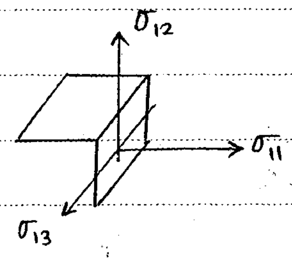
$$\sigma_{22} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_2^2}{\Delta A}$$

$$\sigma_{21} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_1^2}{\Delta A}$$

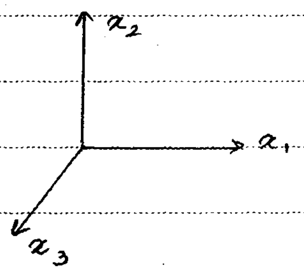
$$\sigma_{23} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_3^2}{\Delta A}$$

$$\vec{t}_2 = \sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3$$

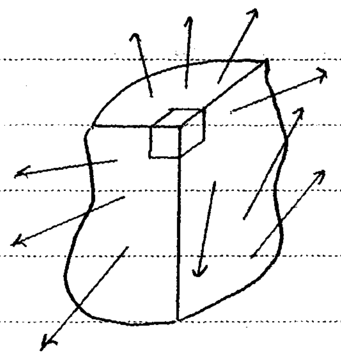


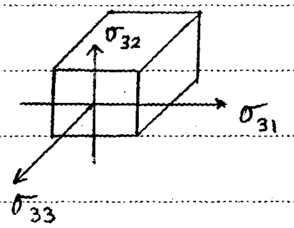


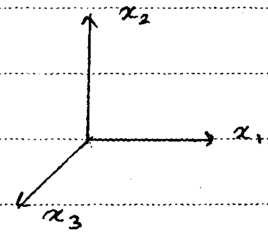
$$\vec{t}_1 = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3$$



Subject
Date

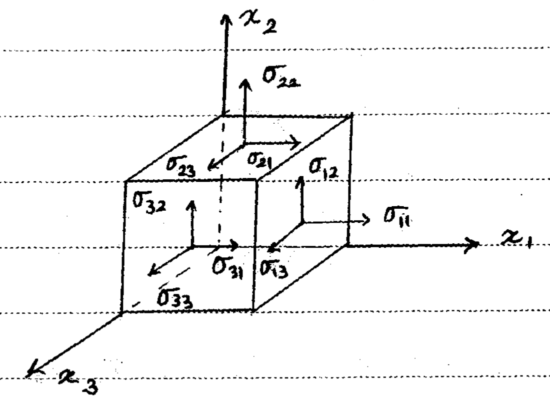






$$\vec{t}_3 = \sigma_{31}\,\vec{e}_1 + \sigma_{32}\,\vec{e}_2 + \sigma_{33}\,\vec{e}_3$$

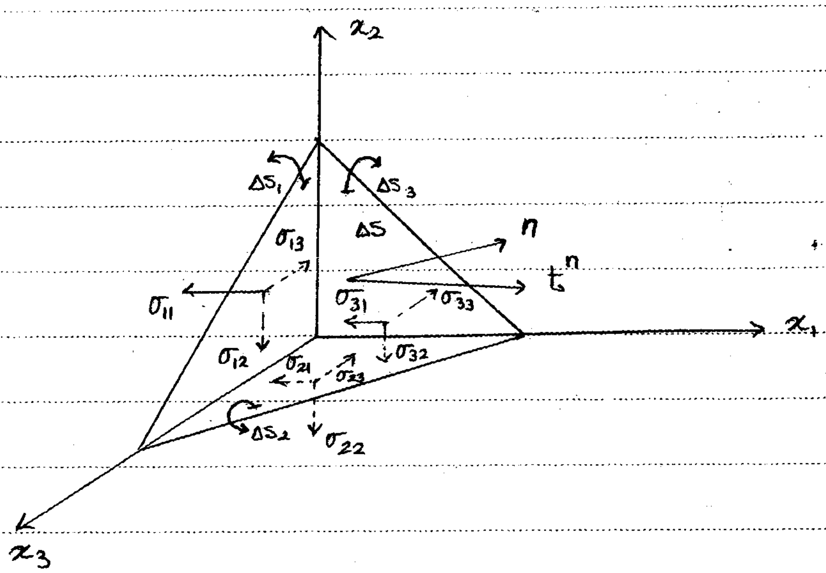
$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \qquad \vec{t}_i = \sigma_{ij}\,\vec{e}_j$$



Subject

Date

stress on an arbitrary plane: (The cauchy Tetrahedron)



$\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$ $\qquad \Delta S_1 = \Delta S n_1 \quad \Delta S_2 = \Delta S n_2 \quad \Delta S = \Delta S n_3$

مؤلفه‌های بردار تنش t^n ، بصورت t_1^n , t_2^n , t_3^n

$$t_1^n \Delta S = \sigma_{11} \Delta S n_1 + \sigma_{21} \Delta S n_2 + \sigma_{31} \Delta S n_3$$
$$t_2^n \Delta S = \sigma_{12} \Delta S n_1 + \sigma_{22} \Delta S n_2 + \sigma_{32} \Delta S n_3$$
$$t_3^n \Delta S = \sigma_{13} \Delta S n_1 + \sigma_{23} \Delta S n_2 + \sigma_{33} \Delta S n_3$$

$t_i^n = \sigma_{ji}\, n_j$ Cauchy rule of stress

اگر مؤلفه‌های تنش (۹ مؤلفه) را در یک نقطه بدست آوریم، می‌توانیم بردارهای تنش را در هر صفحه گذرنده از آن نقطه بدست آوریم.

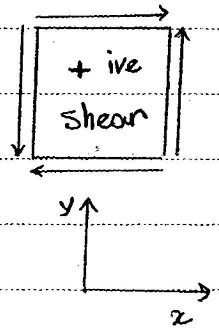
PAPCO

Subject
Date

$$t'^{n}_{i} = \sigma'_{ji}\, n'_{j} \quad , \quad t'^{n}_{i} = Q_{im}\, t^{n}_{m} \quad ; \quad n'_{j} = Q_{jp}\, n_{p}$$

$$\longrightarrow \sigma'_{ji} = Q_{jp}\, Q_{im}\, \sigma_{pn}$$

تانسور تنش یک تانسور مرتبه 2 است.

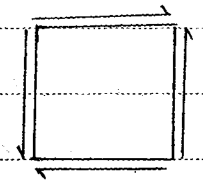


1. Pure Tension or Compression

$$\begin{bmatrix} \pm\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

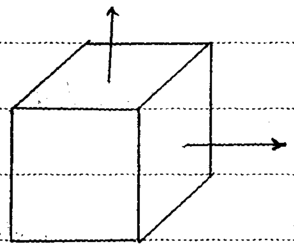
2. Pure shear :

$$\begin{bmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



3. Equal biaxial :

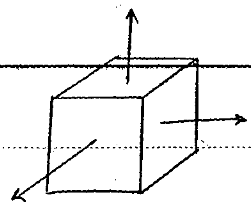
$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



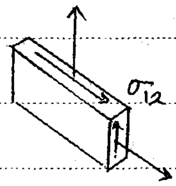
Subject

Date

4. Hydrostatic stress $\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$



5. plane stress $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



6. plane strain $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \end{bmatrix}$

مثال: وضعیت تنش در یک نقطه بصورت زیر داده شده است. تنش را در صفحه‌ای که با محورهای مختصات زاویه مساوی می‌سازد، بدست آورید.

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ MPa

Solution: normal to the plane is: $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$t^n = \frac{1}{\sqrt{3}}(3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3)$$

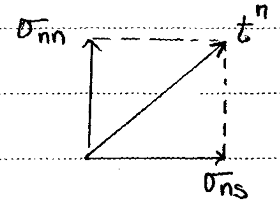
normal stress: $\sigma_{nn} = \vec{t}^n \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$

$= 4/3$ MPa

Subject
Date

shear stress : $\sigma_{ns}^2 = t^2 - \sigma_{nn}^2 = t^n \cdot t^n - \sigma_{nn}^2 = \frac{22}{3} - \frac{16}{9} = \frac{50}{9}$

فیثاغورث



$\sigma_{ns} = \frac{\sqrt{50}}{3}$ MPa

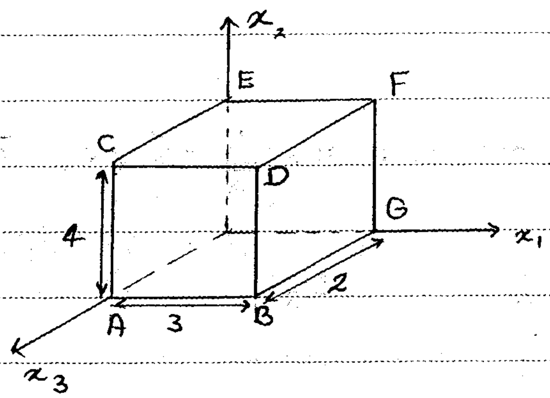
تمرین :

The stress at a point Q in a machine component relative to an x , y , z coordinat is given as :

$$\begin{bmatrix} 100 & 40 & 0 \\ 40 & 60 & 80 \\ 0 & 80 & 20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Refering to the rectangular cube shown below , calculate stress vector $\underline{t}$ and the shear stress τ at point $\underline{Q}$ for the surface parallel to the following planes :

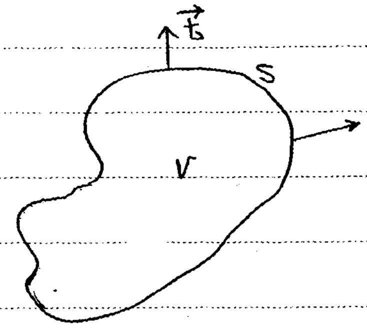
a) CEBG b) ABEF c) AEG



Subject

Date

Equation Of Equilibrium :



$\vec{b}$ ⟶ body force ناشی از

Balance of Force : $\iint_S \vec{t}^{\,n} \, ds + \iiint_V \rho \vec{b} \, dV = 0$

Balance of moments : $\iint_S \vec{x} \times \vec{t} \, ds + \iiint_V \rho \vec{x} \times \vec{b} \, dV = 0$

in term of Components : $\iint n_i T_{ij} \, ds + \iiint \rho b_j \, dV = 0$

$$\iint \varepsilon_{jpq} x_p n_r T_{rq} \, ds + \iiint \rho \, \varepsilon_{jpq} x_p b_q \, dV = 0$$

Divergence Gauss قضیه : $\iiint \operatorname{div} \vec{a} \, dV = \iint \vec{a} \cdot \vec{n} \, ds$

$$\iiint \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j \right) dV = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = 0} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0$$

$$\iiint \varepsilon_{jpq} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_r} (x_p T_{rq}) + \rho x_p b_q \right\} dV = 0$$

$$\varepsilon_{jpq} \left(\frac{\partial}{\partial x_r} (x_p T_{rq}) + \rho x_p b_q \right) = 0$$

$$\varepsilon_{jpq} \left(\underbrace{\frac{\partial x_p}{\partial x_r}}_{\delta_{pr}} T_{rq} + x_p \frac{\partial T_{rq}}{\partial x_r} + \rho x_p b_q \right) = 0$$

$$\varepsilon_{jpq} \left(T_{pq} + \underbrace{x_p \left\{ \left(\frac{\partial T_{rq}}{\partial x_r} \right) + \rho b_q \right\}}_{0} \right) = 0$$

$\varepsilon_{jpq} T_{pq} = 0 \longrightarrow T_{pq} = T_{qp} \longrightarrow$ symmetric

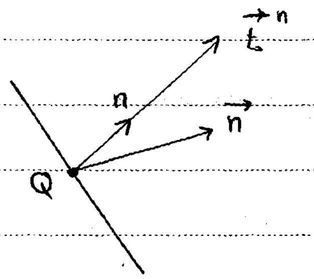
← تانسور تنش کوشی، یک تانسور تنش متقارن است.

در آزمایشگاه تنش مهندسی محاسبه می‌شود. ← نیرو به سطح مقطع اولیه تقسیم می‌شود ← مختصات مادی:

$$\sigma = \frac{P}{A_0}$$

بنابراین تنش کوشی برابر با تنش مهندسی اندازه‌گیری شده در آزمایشگاه می‌باشد.

Principal stress and principal axes:



درحالت کلی تنش‌ها در راستای نرمال بر سطح نمی‌باشند.
اما اگر صفحه را گونه‌ای انتخاب کنیم که نرمال بر سطح، تنش‌ها هم‌جهت باشند، تنش‌های اصلی حاصل خواهند شد.

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (1) \qquad \vec{t} = \sigma \vec{n} \longrightarrow t_i = \sigma n_i \quad (2)$$

$$1, 2 \longrightarrow \sigma_{ij} n_j = \sigma n_i$$

$$(\sigma_{ij} - \overset{\text{تنش اصلی}}{\sigma}\,\delta_{ij})\,\overset{\text{جهت‌های اصلی}}{n_j} = 0$$

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{cases}$$

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

Subject
Date

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \det \sigma$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$
$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3$$
$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Maximum shearing stress:

$$\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$$
$$\vec{t} = \sigma_{ij}\, \vec{n}_j$$

اگر جهت‌های اصلی $\vec{e}_1$ ، $\vec{e}_2$ ، $\vec{e}_3$ ، تنش‌های اصلی σ_1 ، σ_2 ، σ_3 باشند، بردار یکه عمود بر سطح $\vec{n}$ باشد، مؤلفه‌های تنش روی سطح دلخواه با بردار یکه $\vec{n}$ به صورت زیر می‌باشد:

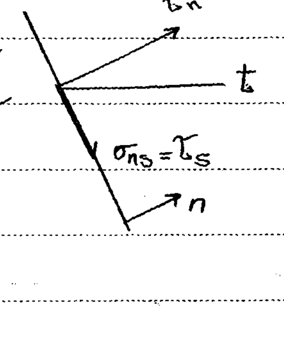
$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{t} = \sigma_1 n_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 n_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 n_3 \vec{e}_3$$

تنش نرمال $= \sigma_{nn} = \vec{n}\cdot\vec{t} = n_1^2\sigma_1 + n_2^2\sigma_2 + n_3^2\sigma_3$

$$\sigma_{ns}^2 = |t|^2 - \sigma_{nn}^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2$$

$$\sigma_{ns}^2 = f(n_1, n_2, n_3)$$
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

باید n_1, n_2, n_3 را گونه‌ای بیابیم که σ_{ns}^2 ماکسیمم شود.



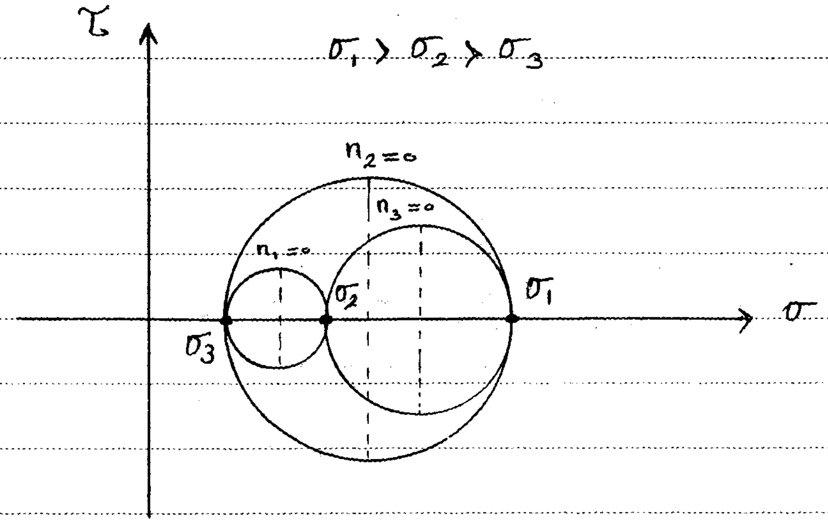
$$\nabla(\sigma - \lambda g) = 0$$
$$g = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \rightarrow$$

با حل این معادله جهت تنش‌های اصلی بدست می‌آید.

Subject

Date

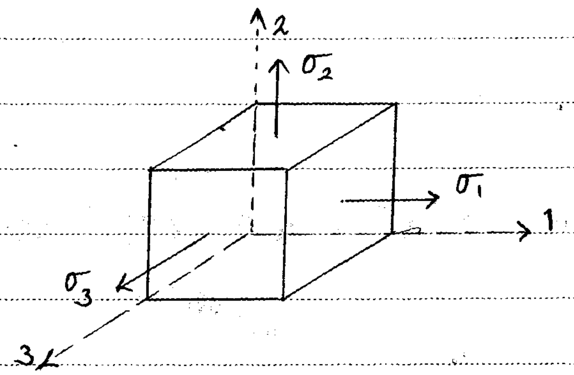
$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

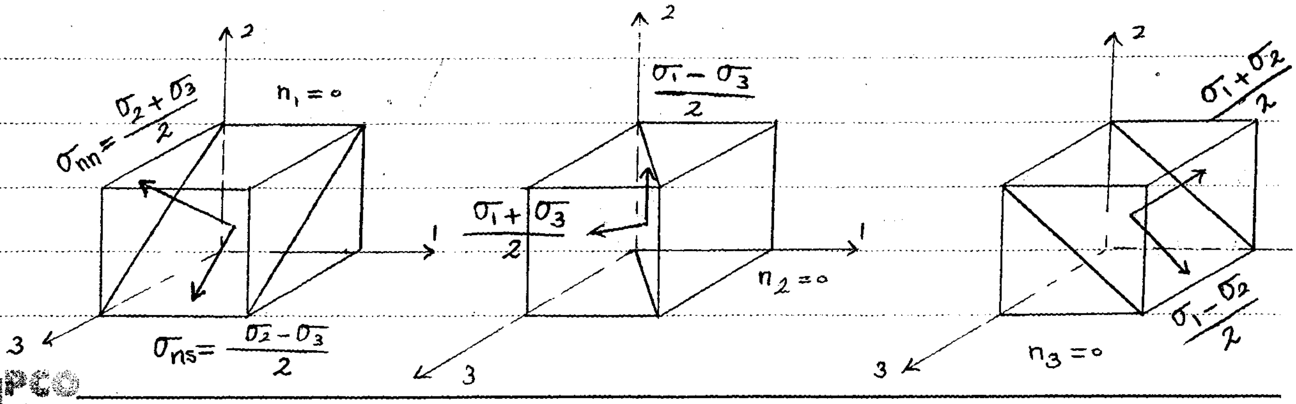


$$n_1 = 0 \longrightarrow \sigma_{ns} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad , \quad \sigma_{nn} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$$

$$n_2 = 0 \longrightarrow \sigma_{ns} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad , \quad \sigma_{nn} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

$$n_3 = 0 \longrightarrow \sigma_{ns} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad , \quad \sigma_{nn} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$





Subject
Date

در صفحات بین ماکزیمم

$$\sigma_{ns})_{max} = \frac{\sigma_n)_{max} - \sigma_n)_{min}}{2}$$

$$\sigma_{nn})_{max} = \frac{\sigma_n)_{max} + \sigma_n)_{min}}{2}$$

تنش اصلی : σ_n

Deviatoric stresses:

هر تانسور مرتبه 2 را می‌توان بصورت مجموع یک تانسور ایزوتروپیک (هیدرواستاتیک) و یک تانسور انحرافی تجزیه کرد.

$$T = \left(\frac{1}{3} \operatorname{tr} T\right) I + T'$$

به انحرافی

$$T' = T - \frac{I_1}{3} I \qquad \text{where:} \quad I_1 = \operatorname{tr}(T) \qquad I: \text{identity}$$

$$[\sigma_{ij}] = \underbrace{[\sigma'_{ij}]}_{\text{انحرافی}} + \underbrace{[\sigma_0 \delta_{ij}]}_{\text{Hydrostatic}}$$

$$\sigma_0 = \frac{\operatorname{tr} \sigma}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{\sigma_{11} - \sigma_0}^{\sigma'_{11}} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \underbrace{\sigma_{22} - \sigma_0}_{\sigma'_{22}} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \underbrace{\sigma_{33} - \sigma_0}_{\sigma'_{33}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}$$

انحرافی   هیدرواستاتیک

تنش های اصلی تنش انحرافی :

$$\sigma'^3 - J_1 \sigma'^2 + J_2 \sigma' - J_3 = 0$$

$$J_1 = \sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} \end{vmatrix}$$

$$J_3 = \det \sigma'_{ij}$$

$$J_1 = (\sigma_{11} - \sigma_0) + (\sigma_{22} - \sigma_0) + (\sigma_{23} - \sigma_0) = 3\sigma_0 - 3\sigma_0 = 0$$

معادلهٔ مشخصه : $\sigma'^3 + J_2 \sigma' - J_3 = 0 \longrightarrow \sigma'_1 , \sigma'_2 , \sigma'_3$

$$(\sigma' - \sigma'_1)(\sigma' - \sigma'_2)(\sigma' - \sigma'_3) = 0$$

$$\sigma'^3 - \underbrace{(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)}_{\text{صفر}} \sigma'^2 + (\sigma'_1\sigma'_2 + \sigma'_2\sigma'_3 + \sigma'_1\sigma'_3)\sigma' - \sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3 = 0$$

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = \sigma'_1\sigma'_2 + \sigma'_2\sigma'_3 + \sigma'_1\sigma'_3 = -\frac{1}{6}\left\{ (\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_1 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 \right.$$

$$J_3 = \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$$

$\downarrow$

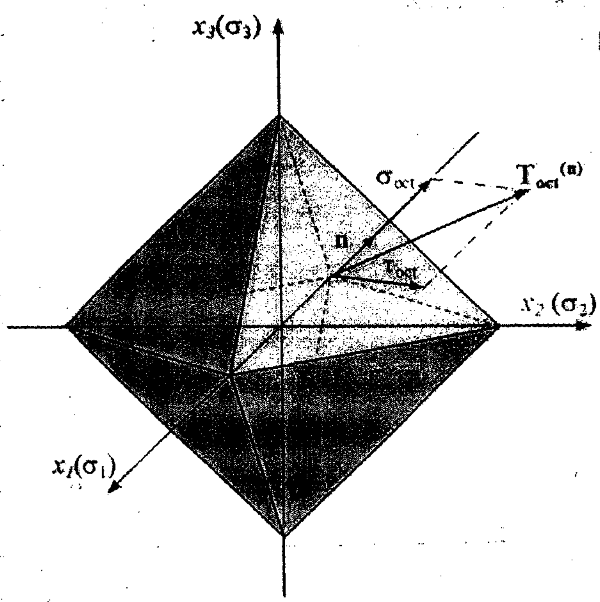
زیرا : $\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0$

$\longrightarrow (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)^2 = 0$

Subject

Date

Octahedral stress:



$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$n_1 = n_2 = n_3$$

$$\longrightarrow n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_{oct} = \sigma_{nn} = \hat{n}\cdot\vec{t} = \hat{n}\cdot T\cdot\hat{n}$$

$$\sigma_{oct} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_0$$

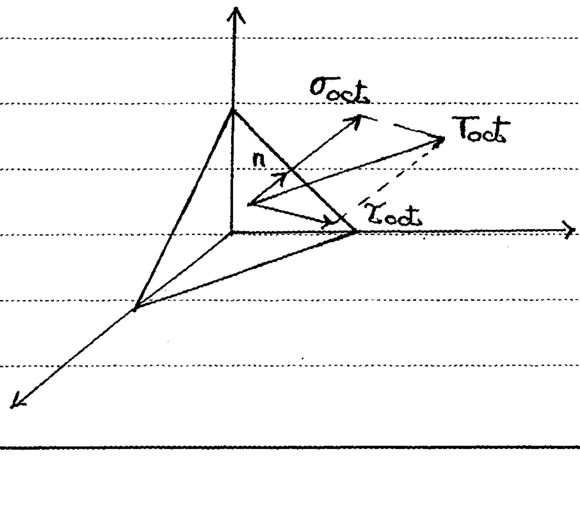
$$\tau_{oct} = \sqrt{|\vec{t}|^2 - \sigma_{nn}^2} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]^{1/2}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]^{1/2}$$

$\downarrow$

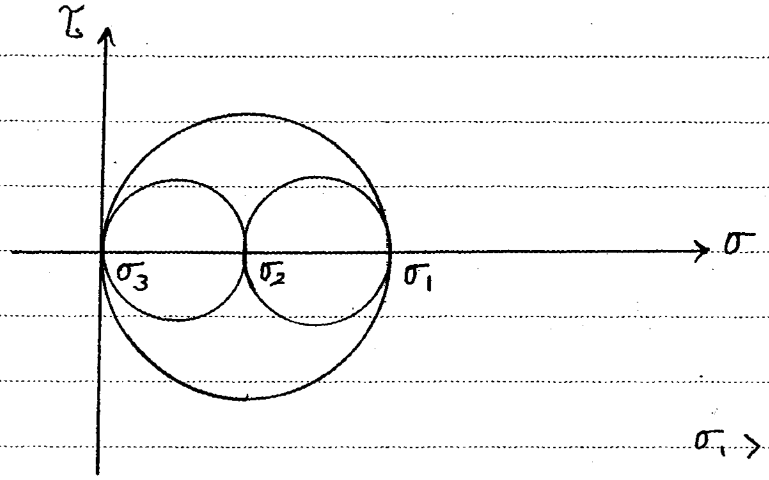
تنش معادل

فون مایسز



Subject

Date

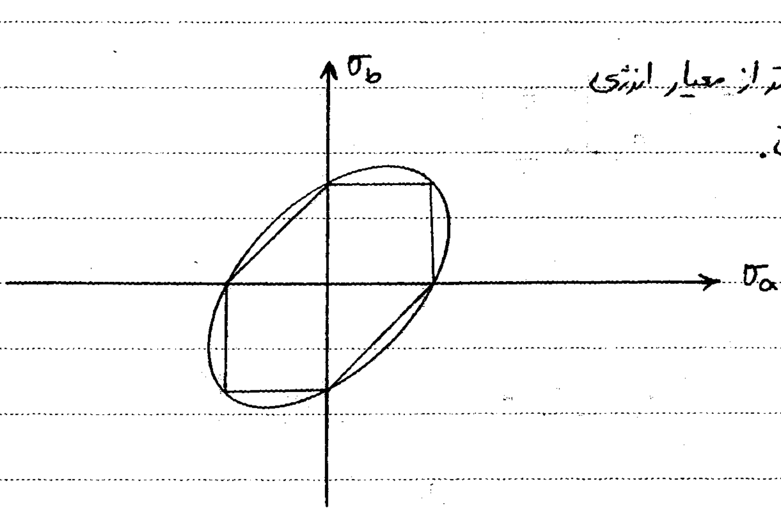


$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

در معیار ماکزیمم تنش برشی از $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ صرف نظر می کنیم.

در معیار فون مایسس از $\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{2}$ صرف نظر می کنیم.

معیار تنش برشی ماکزیمم (ترسکا) محافظه‌کارانه‌تر از معیار انرژی اعوجاج ماکزیمم (فون مایسس) است.



PaPCO

Subject
Date

مثال: اگر مؤلفه‌های تانسور تنش در یک نقطه (p) به صورت زیر در دسترس باشند:

1) مؤلفه‌های بردار تنش را روی صفحهٔ عمود بر محور x_1 که از نقطهٔ p می‌گذرد.

2) مؤلفه‌های بردار تنش را روی صفحه‌ای که مؤلفه‌های نرمال برآن به نسبت 2 : 1- : 1 می‌باشند به دست آورید.

3) مقادیر بردار تنش و مؤلفه‌های عمودی و برشی آن را بر روی صفحه‌ای به معادلهٔ زیر به دست آورید. $x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

1) $$t_i = \sigma_{ij} n_j = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{t} = \vec{e}_1 + 2\vec{e} + \vec{e}_3$$

2) $$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} (\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \qquad \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{6}} (5\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - \vec{e}_3)$$

3) $$\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \qquad f_{(x_1, x_2, x_3)} = 2x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$\vec{n} = \frac{2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} \qquad t_i = \sigma_{ij} n_j$$

$$\vec{t} = \frac{1}{3} (-5\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3) \qquad \sigma_{nn} = \frac{17}{9}$$

$$\sigma_{ns} = \sqrt{|t|^2 - \sigma_n^2} = \left[\frac{174}{9} - \left(\frac{17}{9}\right)^2\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{157}{9}}$$

PAPCO

Subject
Date

Different measure of stress:

فرض کنید dA و dA_0 المان‌های مساحت در مختصات مرجع و جاری باشند.

$dA_0 \rightarrow t_0 \qquad \vec{dA_0} = dA_0 \hat{n}_0$

$dA \rightarrow t \qquad \vec{dA} = dA \hat{n}$

$\vec{df} \equiv$ نیروی وارد بر سطح در حالت تغییر شکل یافته $\qquad \vec{t} = \frac{\vec{df}}{dA} \qquad \vec{t} = \underline{\underline{T}} \cdot \hat{n}$

Cauchy stress tensor تنش واقعی

a) The first Piola-kirchhoff stress tensor : T_0
or Lagrangian stress tensor.

$\boxed{\vec{t}_0 = \frac{\vec{df}}{dA_0}} \qquad \vec{t}_0$: pseudo-stress vector (کاذب)

$\boxed{\vec{t}_0 = \underline{\underline{T_0}} \cdot \hat{n}_0} \qquad \vec{df} = \vec{t}\,dA = \vec{t}_0 dA_0 \longrightarrow \vec{t}_0 = \left(\frac{dA}{dA_0}\right)\vec{t}$

$\underline{\underline{T_0}} \cdot \hat{n}_0 = \left(\frac{dA}{dA_0}\right)\underline{\underline{T}} \cdot \hat{n} \qquad ,$ از طرفی : $dA\hat{n} = dA_0 J (\underline{\underline{F}}^{-1})^T \cdot \hat{n}_0$

$\underline{\underline{T_0}} \cdot \hat{n}_0 = J\,\underline{\underline{T}} \cdot (\underline{\underline{F}}^{-1})^T \cdot \hat{n}_0$

$$\longrightarrow \underbrace{\underline{\underline{T_0}}}_{\text{1st Piola}} = J\,\underbrace{\underline{\underline{T}}}_{\text{Cauchy}} \cdot (\underline{\underline{F}}^{-1})^T$$

متقارن نیست.

Subject
Date

$$\begin{cases} \underline{\underline{T_o}} = J\, \underline{\underline{T}} \cdot (\underline{\underline{F}}^{-1})^T \\ \underline{\underline{T}} = \frac{1}{J}\, \underline{\underline{T_o}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \end{cases} \qquad \begin{cases} (T_o)_{iB} = J\, T_{ij}\, (F^{-1})_{Bj} \\ T_{ij} = \frac{1}{J} (T_o)_{iB}\, F_{jB} \end{cases}$$

Engineering stress Tensor
Nominal stress Tensor

_ Second Piola _ kirchhoff stress _ Tensor

$$\underline{\underline{\tilde{T}}} \cdot \hat{n}_o = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T_o}} \cdot \hat{n}_o \qquad \begin{cases} \underline{\underline{\tilde{T}}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T_o}} \\ \underline{\underline{\tilde{T}}} = J\, \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot (\underline{\underline{F}}^{-1})^T \end{cases}$$

$\tilde{T}$ متقارن است.

خلاصه:

1. Cauchy _ stress Tensor نیرو، سطح در مختصات اویلری
2. 1_st Piola _ kirchhoff نیرو در مختصات اویلری، سطح در مختصات لاگرانژی
3. 2_nd Piola _ kirchhoff نیرو، سطح در مختصات لاگرانژی

معیارهای دیگر:

kirchhoff: $\tau = JT$

Biot: $\underline{\underline{T_o}}^T \cdot \underline{\underline{R}} \longrightarrow \underline{\underline{T_B}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{R}}]$

Ex.) The deformed configuration of a body is described:

$x_1 = \frac{1}{2} X_1 \quad , \quad x_2 = -\frac{1}{2} X_3 \quad , \quad x_3 = 4X_2$

Cauchy stress tensor: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$

Subject

Date

a) what are 1st and 2nd Piola_kirchhof stress tensor?

$$(T_o)_{iB} = J\, T_{ij}\, (F^{-1})_{Bj} \;\;\underline{L}\;\; J\, T_{ij}\, (F^{-1})^T_{jB}$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \underline{\underline{F}}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \det F = 1$$

$$\underline{\underline{T_o}} = (1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\underline{\underline{\tilde{T}}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T_o}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

b) calculate the pseudo_stress vector with the First_Piola kirchhoff and second Piola_kirchhoff stress tensor on the e_3 - plane in the deformed state.

$dA = 1$ تغییر مرطوبه

$\hat{n} = \vec{e}_3$

$$dA\,\hat{n} = dA_o\; J\, (\underline{\underline{F}}^{-1})^T \cdot \hat{n}_o$$

$$dA_o\,\hat{n}_o = \frac{1}{|\det F|}\, \underline{\underline{F}}^T \hat{n}$$

$$dA_o\,\hat{n}_o = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Hence}} n_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad dA_o = 4$$

Subject
Date

$$[t_0] = [T_0][n_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix} \quad \text{MPa}$$

$$[\tilde{t}] = [\tilde{T}][n_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{25}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{MPa}$$

The Conservation of Mass :

اصل بقای جرم بیان می‌دارد که نرخ افزایش جرم در یک حجم ثابت از ماده برابر صفر می‌باشد یعنی :

$$\frac{D}{Dt}\int \rho \, dV = 0$$

نرخ افزایش جرم داخل حجم : $\dot{m} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \underset{\uparrow}{dV}^{\text{حجم ثابت}}$ (I)

نرخ ریزش جرم داخل حجم : $-\int \rho \, \underset{\text{سرعت}}{v_i} \, n_i \, ds$ (II)

$$(I) = (II) : \quad \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho \, v_i n_i \, ds = 0$$

Divergence Theorem : $\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) \, dV = 0$

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) \right] dV = 0$$

استدلال فوق باید برای هر حجم اختیاری V برقرار باشد.

PAPCO

Subject
Date

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0$$

ازطرفی : $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0}$$ بقای جرم (اویلری)

Conservation of Mass (Lagrangian form):

δv , δV , δm

ρ_0 , ρ

$$\rho_0 = \lim_{dV \to 0} \frac{\delta m}{dV} \qquad \rho = \lim_{dv \to 0} \frac{\delta m}{dv}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{dv}{dV} = \det F \qquad \boxed{\frac{\rho_0}{\rho} = \det F} \xrightarrow[\text{باید}]{\text{درنتیجه}} \det F \neq 0$$

if $\det F = 1 \longrightarrow$ incompressible

$$\det F = \det\left(\delta_{iR} + \frac{\partial u_i}{\partial X_R}\right) = 1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \alpha\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_R}\right)^2$$

in the case of small Def. $\det F = 1 + \frac{\partial u_i}{\partial X_i} = 1 + \underset{\downarrow}{E_{ii}}$

$tr(E) \to \gamma$

PAPCO

Subject
Date

The principle of linear momentum :

اصل تعادل مومنتم خطی را می‌توان به این صورت تعریف کرد که نرخ مادی تغییرات مومنتم خطی برای یک مجموعه مادی که حجم V و سطح جانبی S را اشغال کرده اند، مساوی برآیند کلیه نیروهای خارجی وارد بر آن مجموعه مادی است.

$$\frac{D}{Dt}(m\vec{V}) = \vec{L}$$

$$\vec{L} = \int \vec{v}\,dm = \int_V \rho \vec{v}\,dV$$

برآیند نیروهای خارجی : $\int_V \overbrace{b}^{\text{body Force}} dV + \int_S t\,ds = \int_V b_i\,dV + \int_S t_i\,ds$

$$\frac{D}{Dt}\int \rho v_i\,dV = \int_V b_i\,dV + \int_S t_i\,ds$$

از طرفی : $t_i = \sigma_{ji} n_j \longrightarrow \int_S t_i\,ds = \int_S \sigma_{ji} n_j\,ds = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}\,dV$

$$\frac{D}{Dt}\int \rho v_i\,dV = \int_V \left(b_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}\right)dV$$

Transport قضیه : $\frac{D}{Dt}\int_V \rho v_i\,dV = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)\right]dV$

Guss قضیه : $\int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)\,dV = \int_S (\rho v_i) n_j v_j\,ds$

$$\longrightarrow \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)\right]dV = \int_V \left(b + \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}\right)dV$$

$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = b + \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}$$

Subject
Date

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$= v_i \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) \right)}_{= 0 \text{ از طریق معادله پیوستگی}} + \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

$$= \rho \frac{D}{Dt} v_i$$

جایگذاری :

$$\rho \frac{D}{Dt} v_i = b_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Conservation of angular momentum:

خ مادی تغییرات بردار ممنتم زاویه‌ای نسبت به یک مبدأ برای یک مجموعهٔ مادی که حجم V با سطح جایی
را اشغال کرده اند برابر است با برآیند گشتاور کلیه نیروهای وارد بر مجموعه مادی نسبت به همان مبدأ.
ر بردار ممنتم زاویه‌ای را با A نشان دهیم ، داریم :

$$\vec{A} = \int_V \vec{r} \times (\vec{v}\, dm) = \int_V \vec{r} \times (\vec{v} \rho\, dV)$$

$$= \int_V \rho (\vec{r} \times \vec{v})\, dV \longrightarrow A_i = \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j v_k\, dV$$

روهای حجمی $\vec{b}$ ، نیروهای سطحی $\vec{t}$ و بردار گشتاور نسبت به مبدأ $\vec{M}$ ،

$$\vec{M} = \int_V \vec{r} \times \vec{b}\, dV + \int_S \vec{r} \times \vec{t}\, ds \,, \qquad M_i = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j b_k\, dV + \int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j v_k\, dV = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j b_k\, dV + \int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k\, ds$$

Subject
Date

کوشی : $t_i = T_{ji} n_j \quad , \quad t_k = T_{Lk} n_L$

$$\int_S \varepsilon_{ijk}\, x_j t_k\, ds = \int_S \varepsilon_{ijk}\, x_j T_{Lk} n_L\, ds \xrightarrow{\text{divergance}} = \int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_L}(x_j T_{Lk})\, dV$$

ازطرفی : $\dfrac{D}{Dt}\displaystyle\int \rho\, \varepsilon_{ijk}\, x_j v_k\, dV \underset{\text{قضیه انتقال رینولدز}}{=} \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, \varepsilon_{ijk}\, x_j v_k) + \frac{\partial}{\partial x_L}(\rho\, \varepsilon_{ijk}\, x_j v_k v_L)\right) dV$

یادآوری : $\dfrac{D}{Dt}\varphi(x,t) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla\varphi \cdot v$

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, \varepsilon_{ijk}\, x_j v_k) + \frac{\partial}{\partial x_L}(\rho\, \varepsilon_{ijk}\, x_j v_k v_L)\right] dV$$

$$= \int_V \varepsilon_{ijk}\, x_j b_k\, dV + \int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_L}(x_j T_{Lk})\, dV$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, \varepsilon_{ijk}\, x_j v_k)}_{1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_L}(\rho\, \varepsilon_{ijk}\, x_j v_k v_L)}_{2} = \varepsilon_{ijk}\, x_j b_k + \underbrace{\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_L}(x_j T_{Lk})}_{3}$$

$$\underline{1} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial t}(\rho x_j v_k) = \varepsilon_{ijk}\, x_j \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \overset{\text{صفر}}{\cancel{\varepsilon_{ijk}\, \rho v_k \overset{v_j}{\frac{\partial x_j}{\partial t}}}}$$

$$\text{صفر}\ (\vec{v}\times\vec{v}) \quad \varepsilon_{ijk} v_k v_j \vec{e}_i = \vec{v}\times\vec{v}$$

$$\underline{2} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_L}(\rho x_j v_k v_L) = \cancel{\varepsilon_{ijk}\, \rho v_k v_L \frac{\partial x_j}{\partial x_L}} + \varepsilon_{ijk}\, x_j \frac{\partial}{\partial x_L}(\rho v_k v_L)$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, x_j \frac{\partial}{\partial x_L}(\rho v_k v_L)$$

$$\underline{3} : \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_L}(x_j T_{Lk}) = \varepsilon_{ijk}\, T_{Lk} \overset{\delta_{jL}}{\cancel{\frac{\partial x_j}{\partial x_L}}} + \varepsilon_{ijk}\, x_j \frac{\partial T_{Lk}}{\partial x_L}$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, T_{jk} + \varepsilon_{ijk}\, x_j \frac{\partial T_{Lk}}{\partial x_L}$$

PAPCO

Subject

Date

با جایگذاری در (*) :

$$\varepsilon_{ijk}\, x_j \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_L}(\rho v_k v_L) - b_k - \frac{\partial}{\partial x_L} T_{Lk}\right] - \varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0$$

$$\varepsilon_{ijk}\, x_j \left[\rho \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial(\rho v_L)}{\partial x_L} + \rho v_L \frac{\partial v_k}{\partial x_L} - b_k - \frac{\partial T_{Lk}}{\partial x_L}\right]$$

$$- \varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0$$

$$\varepsilon_{ijk}\, x_j \Big[\overbrace{\rho\Big(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_L \frac{\partial v_k}{\partial x_L}\Big)}^{\rho \frac{D}{Dt} v_k} + v_k \underbrace{\Big(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_L)}{\partial x_L}\Big)}_{\text{Mass conservation}} - b_k - \frac{\partial T_L}{\partial x_L}\Big]$$

صفر

$$- \varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0$$

$$\longrightarrow \varepsilon_{ijk}\, x_j \underbrace{\left[\rho \frac{D}{Dt} v_k - b_k - \frac{\partial}{\partial x_L} T_{kL}\right]}_{\text{The principle of Linear momentum}} - \varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0$$

صفر

$$\longrightarrow \varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0$$

Conservation of Energy :

بر اساس این اصل می‌توان بیان کرد که نرخ مادی تغییرات مجموع انرژی جنبشی و داخلی برای یک مجموعهٔ مادی به حجم V که سطح جانبی S را اشغال کرده‌اند، برابر است با مجموع نرخ کارهای انجام شده به وسیلهٔ نیروهای وارد بر مجموعه مادی و گرمای جذب شده توسط محیط مادی.

انرژی داخلی در واحد جرم

$$K = \frac{1}{2}\int_V \rho v_i v_i \, dV \quad , \quad E = \int \rho e \, dV$$

$$\dot{W} = \int_V b_i v_i \, dV + \int_S t_i v_i \, ds \quad , \quad d\dot{Q} = -\vec{q}\cdot\vec{n}\, ds \longrightarrow \dot{Q} = -\int \vec{q}\cdot\vec{n}\, ds$$

$$= -\int q_i n_i \, ds$$

Subject

Date

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}\int \rho\, v_i v_i \, dV + \int \rho e \, dV\right] = \int_V b_i v_i \, dV + \int_S t_i v_i \, ds - \int_S q_i n_i \, ds$$

$$\frac{D}{Dt}\int\left[\rho\left(\frac{1}{2} v_i v_i + e\right) dV\right] = \int b_i v_i \, dV + \underbrace{\int (t_i v_i - q_i n_i)\, ds}_{1}$$

$$\underline{1} \longrightarrow \int_S (t_i v_i - q_i n_i)\, ds = \int_S (T_{ij} n_j v_i - q_i n_i)\, ds$$

تبدیل i به j $\rightarrow q_j n_j$

$$= \int_S (T_{ij} n_j v_i - q_j n_j)\, ds$$

$$= \int_S (T_{ij} v_i - q_j)\, n_j \, ds \underset{\text{قضیه}}{=} \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(T_{ij} v_i - q_j)\, dV$$

Divergance

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\left(\frac{1}{2} v_i v_i + e\right) dV = \int_V \left[\left(b_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(T_{ij} v_i - q_j)\right)\right] dV$$

(59 صفحه ***) $= \int \rho \dfrac{D}{Dt}\left(\dfrac{1}{2} v_i v_i + e\right) dV = \int_V \left[b_i v_i + \dfrac{\partial}{\partial x_j}(T_{ij} v_i - q_j)\right] dV$

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2} v_i v_i + e\right) = b_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(T_{ij} v_i) - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}$$

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2} v_i v_i\right) + \rho \frac{De}{Dt} = b_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(T_{ij} v_i) - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}$$

$$\rho v_i \frac{D}{Dt} v_i + \rho \frac{D}{Dt} e = b_i v_i + v_i \frac{\partial}{\partial x_j}(T_{ij}) + T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}$$

$$v_i \underbrace{\left(\rho \frac{D}{Dt} v_i - b_i - \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}\right)} + \rho \frac{De}{Dt} = T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}$$

صفر The principle of linear momentum

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}$$

Subject
Date

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{D_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{W_{ij}}$$

$$T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = T_{ji}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

$$\longrightarrow \quad T_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}T_{ij}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\rho\frac{D}{Dt}e = \underbrace{T_{ij}D_{ij}}_{\text{نرخ کار انجام شده توسط تنش}} - \frac{\partial q_i}{\partial x_j}}$$

principle of Virtual work (stress Power)

فرض کنید میدان تنش با مؤلفه‌های T_{ij} در حجم معین از فضا که در رابطهٔ تعادل صدق می‌کند، برقرار باشد:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = 0 \qquad (*)$$

همچنین یک میدان سرعت با مؤلفه‌های v_i طوری تعریف شده است که مؤلفه‌های تانسور نرخ تغییر فرم بصورت زیر می‌باشد. (در یک حجم معین)

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = 0$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

PAPCO

Subject
Date

حاصلضرب $T_{ij}D_{ij}$ را تشکیل داده، در حجم V انتگرال می‌گیریم:

$$\int_V T_{ij} D_{ij}\, dV = \frac{1}{2}\int T_{ij}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) dV = \int T_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dV$$

$$= \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(T_{ij} v_j\right) - v_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \right\} dV$$

با استفاده از رابطه (*):

$$= \int \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(T_{ij} v_j\right) + \rho v_j b_j \right) dV$$

divergance rule $\Rightarrow \int_V T_{ij} D_{ij}\, dV = \int_S T_{ij} v_j n_i\, ds + \int \rho v_j b_j\, dV$

$$\int_V T_{ij} D_{ij}\, dV = \int_S \underbrace{\vec{t}^{\,n}\cdot\vec{v}}_{\text{Traction force}}\, ds + \int_V \underbrace{\rho\,\vec{v}\cdot\vec{b}}_{\text{body force}}\, dV$$

(***):

$$B = \frac{1}{2} v_i v_i + e \longrightarrow \frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\frac{1}{2} v_i v_i + e\right) dV = \frac{d}{dt}\int_V \rho B\, dV$$

$$= \int_V \left(\frac{d}{dt}(\rho B) + (\rho B)\frac{d}{dt} \right) dV$$

$$\frac{d}{dt}(dV) = J\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\, dV_0 = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\, dV$$ (اثبات صفحه ۱۴۲ کتاب شاهرخ حسینی هاشمی)

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\int_V \rho B\, dV = \int_V \left[\left(\rho \frac{d}{dt}(B) + B\frac{d}{dt}(\rho)\right) + (\rho B) v_{j,j} \right] dV$$

(پیوستگی)

$$= \int_V \left[\left(\rho\frac{d}{dt}(B) + B\left(\cancel{\frac{d}{dt}(\rho) + (\rho) v_{j,j}}\right)\right)\right] dV = \int_V \rho \frac{d}{dt}(B)\, dV$$

PAPCO

$$= \int_V \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} v_i v_i + e\right) dV$$

Subject
Date

Constitutive Modeling : معادلات ساختاری

Constitutive modeling Priciples :

1. principle of Determinisim for stress :

$\sigma = f(\varepsilon)$ یا $\sigma = f(\dot{\varepsilon})$ یا $\dot{\sigma} = f(\dot{\varepsilon})$ تنش در یک جسم از طریق تاریخچه جنبش جسم تعیین می‌شود :

2. principle of local action :

هنگام بدست آوردن تنش در یک نقطه معین، جنبش ذرات دورتر از آن نقطه تأثیری بر تنش در آن نقطه ندارد.

3. principle of Material frame-indifference and objectivity :

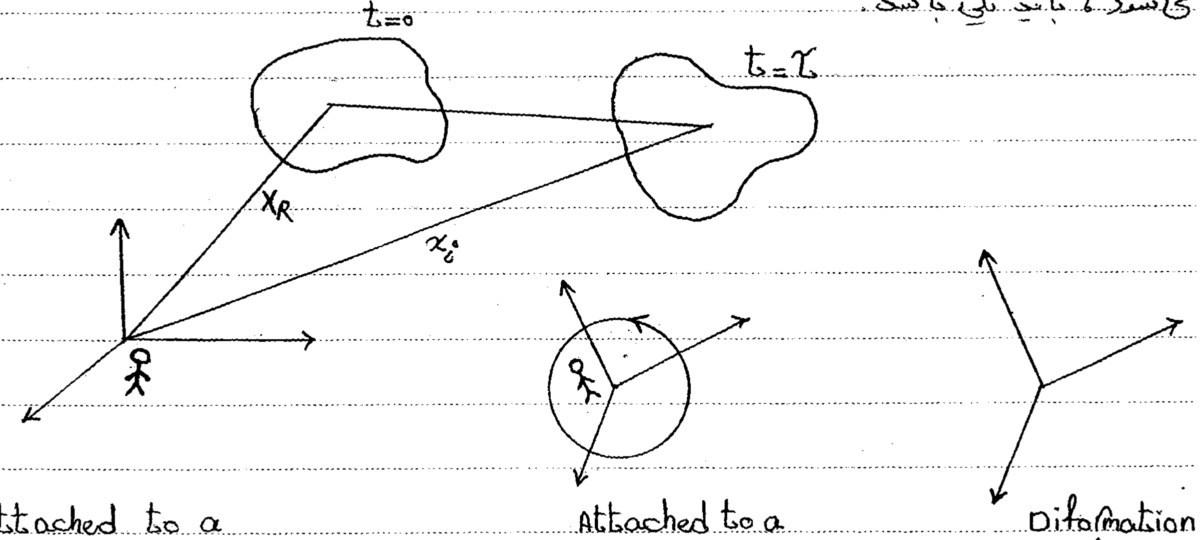
frame ابزار فیزیکی است درصورتی که محور مختصات ابزار ریاضی است.

frame نسبت به زمان sense دارد، ولی محور مختصات خیر.

frame جهت مشاهده کردن حرکت کل سیستم است، و می‌توان داخل یک frame چند محور مختصات داشت.

بیان اصل frame-indifference :

پاسخ یک سیستم پیوسته به بارگذاری، حرکت که توسط مشاهده گرهای مختلف از طریق frame خودشان بیان می‌شود، باید یکی باشد.



Attached to a Fixed frame of Refrence

Attached to a Rotating platform corotational frame of reference

Diformation platform

PAPCO

اصل objectivity:

در این حالت نقل یک چارچوب استفاده می شود و اعتبار کمیت با یک دوران صلب را بررسی می شود یعنی طبق این اصل کمیت هایی که برای نوشتن معادلات ساختاری بکار می روند، نباید تحت دوران صلب را تغییر کنند.

$\underline{\underline{E}}^* = \underline{\underline{Q}}.\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{Q}}^T$ $\quad$ $\underline{\underline{E}}^*$: E در یک frame جدید

$\vec{x}^*(t) = \vec{C}(t) + \underline{\underline{Q}}(t).\vec{x}$ $\quad$ x^*: x در یک frame جدید

Ex: show that left stretch tensor v is objective and F is not?

$\vec{dx} = \underline{\underline{F}}.\vec{dX}$

اگر X چارچوب مرجع باشد: Frame reference

$\vec{dx}^* = \underline{\underline{F}}^*.\vec{dX}$

$\vec{dx}^* = \underline{\underline{Q}}.\vec{dx} = \underline{\underline{Q}}.(\underline{\underline{F}}.\vec{dX}) = \underline{\underline{Q}}.\underline{\underline{F}}.\vec{dX}$

$\underline{\underline{F}}^* = \underline{\underline{Q}}.\underline{\underline{F}} \longrightarrow$ F تانسور مرتبه 2 دو نقطه ای است.

به همین دلیل از قانون تبدیل تانسور مرتبه 2 پیروی نمی کند.

$\rightarrow$ F: objective نیست!

$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}}.\underline{\underline{R}}$

$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{F}}.\underline{\underline{R}}^T$ $\quad$ $\underline{\underline{V}}^* = \underline{\underline{F}}^*.\underline{\underline{R}}^{*T}$ $\quad$ از طرفی: $\underline{\underline{F}}^* = \underline{\underline{Q}}.\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{R}}^* = \underline{\underline{Q}}.\underline{\underline{R}}$

چرا؟

$\underline{\underline{V}}^* = \underline{\underline{Q}}.(\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{R}}^T).\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}}.\underline{\underline{V}}.\underline{\underline{Q}}^T$

V از قانون تبدیل تانسور مرتبه 2 پیروی می کند، پس objective است.

Subject
Date

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$$

$$\underline{\underline{U}}^* = \underline{\underline{R}}^{*T} \cdot \underline{\underline{F}}^* \quad , \quad \underline{\underline{R}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}} \qquad \underline{\underline{F}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{F}}$$

$$\underline{\underline{U}}^* = \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}}$$

U از قانون تبدیل تانسورها پیروی نمی‌کند، ولی چون ثابت می‌ماند، objective است.

مثال: آیا مشتق زمانی تانسورهای مرتبهٔ 2 objective، objective است یا خیر؟

$$\underline{\underline{E}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$$

$$\dot{\underline{\underline{E}}}^* = \frac{d}{dt} (\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T) = \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{Q}} \cdot \dot{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T$$

← بنابراین $\dot{E}$، objective نیست. (باید برابر $\dot{E}^* = Q \cdot \dot{E} \cdot Q^T$ می‌شد.)

• برای تنش

$$\underline{\underline{T}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$$

$$\dot{\underline{\underline{T}}}^* = \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{Q}} \cdot \dot{\underline{\underline{T}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T$$

$$\underbrace{\overset{\circ}{\underline{\underline{T}}}}_{\text{co-rotational stress rate}} = \dot{\underline{\underline{T}}} - \underline{\underline{W}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{T}}}_{\text{stress}} + \underline{\underline{T}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{W}}}_{\text{spin tensor}}$$

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{T}}}{}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \overset{\circ}{\underline{\underline{T}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$$

Malvern → page 403

Subject
Date

4. principle of work Conjugacy : R.Hill (1978)

$$\rho \frac{D}{Dt} e = \underset{\text{نوعی از تنش}}{T_{ij}}\ \underset{\text{نوعی از کرنش}}{D_{ij}}$$ رابطه توان تنش

اسکالر

D با T مزدوج است.

همینطور برای تانسورهای دیگر تنش، یک توان مزدوج یافت.

T_{ij} : Cauchy stress

D_{ij} : strain rate tensor or (rate of deformation)

رابطه توان تنش، یک رابطه اسکالر است و می‌تواند برای مختصات جاری و اولیه صادق باشد. حال می‌خواهیم ببینیم اگر تانسور نرخ تغییر فرم D_{ij} در معادله توان تنش تغییر کند، چه تنشی با آن مزدوج خواهد شد و بالعکس.

$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{J}\underbrace{\underline{\underline{T_o}}}_{\text{1st piola}}\cdot\underline{\underline{F}}^T = \frac{1}{J}\underline{\underline{F}}\cdot\underbrace{\underline{\underline{\tilde{T}_o}}}_{\text{2nd piola}}\cdot\underline{\underline{F}}^T$$

از طرفی : $\rho\frac{De}{Dt} = T_{ij} D_{ij}$

در مختصات اولیه : $\frac{\rho_o}{J}\frac{De}{Dt} = (\frac{1}{J}\underline{\underline{T_o}}\cdot\underline{\underline{F}}^T):L$ (1)

یادآوری : $L = \dot{F}\cdot F^{-1}$ $\quad \frac{D}{Dt}(F_{iR}) = \frac{D}{Dt}(\frac{\partial x_i}{\partial X_R}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial X_R} = L_{ij}F_{jR}$

$$\xrightarrow{(1)}\quad \rho_o\frac{De}{Dt} = (\underline{\underline{T_o}}\cdot\underline{\underline{F}}^T):(\underline{\underline{\dot{F}}}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1}) = \underline{\underline{T_o}}:\underline{\underline{\dot{F}}}$$

در نتیجه $\underline{\underline{T_o}}$ با $\underline{\underline{F}}$ مزدوج است.

Subject
Date

$$\frac{\rho_0}{J}\frac{De}{Dt} = \left(\frac{1}{J}\,\underline{\underline{F}}\cdot\underline{\underline{\tilde{T}}}\cdot\underline{\underline{F}}^T\right) : \underline{\underline{L}}$$

$$= \underline{\underline{\tilde{T}}} : \dot{\underline{\underline{\gamma}}} \qquad \text{L} \qquad \underline{\underline{\tilde{T}}} : \dot{\underline{\underline{E}}}^{(2)}$$

second Piola   rate of Green_Lagrange strain tensor

$\tilde{T}$ با $\dot{E}$ مزدوج است.

$$\underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{E}}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\underline{\underline{F}}^T\cdot\underline{\underline{F}}}_{C} - \underline{\underline{I}}\right)$$

$$\dot{\underline{\underline{E}}}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\dot{\underline{\underline{F}}}^T\cdot\underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T\cdot\dot{\underline{\underline{F}}}\right)$$

از طرفی : $\dot{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{L}}\cdot\underline{\underline{F}} \longrightarrow \dot{\underline{\underline{E}}}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{F}}^T\cdot\underline{\underline{L}}^T\cdot\underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T\cdot\underline{\underline{L}}\cdot\underline{\underline{F}}\right)$

$$\dot{\underline{\underline{E}}}^{(2)} = \frac{1}{2}\underline{\underline{F}}^T\cdot\left(\underline{\underline{L}}^T\cdot\underline{\underline{F}} + \underline{\underline{L}}\cdot\underline{\underline{F}}\right) = \frac{1}{2}\underline{\underline{F}}^T\cdot\left(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T\right)\cdot\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^T\cdot\underline{\underline{D}}\cdot\underline{\underline{F}}$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{D}} = (\underline{\underline{F}}^T)^{-1}\cdot\dot{\underline{\underline{E}}}^{(2)}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1}$$

تمرین) Find The stress Conjugate to the Lagrangian right stretch tensor "U".

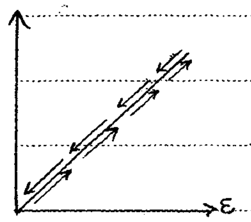
PAPCO

Subject

Date

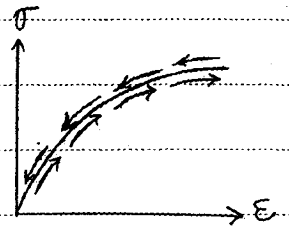
Elastic Material Idealization :

Elastic Material :



Elastic Materials

- Linear elasticity
- non-linear elasticity
  1. Cauchy elastic Models
  2. Green elastic Models (Hyperelastic)
  3. Hypo elastic Models



I. Cauchy elastic Models :

یک مادهٔ الاستیک کوشی ماده ای است که در آن تنش کوشی در یک نقطه تابعی از کرنش جاری همان نقطه بوده و به تاریخچه کرنش وابسته نمی باشد :

$$\sigma_{ij} = \underbrace{F_{ij}}_{\text{تابع غیرخطی}} (\varepsilon_{kL})$$

کار به مسیر وابسته است. ← کار غیر Conservative است ← نمی توان بصورت تابع پتانسیل نوشت

$$\sigma_{ij} = \alpha_0 \delta_{ij} + \alpha_1 \varepsilon_{ij} + \alpha_2 \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj} + \alpha_3 \varepsilon_{im} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{nj} + \dots$$

$$\text{L} \quad \sigma_{ij} = \alpha_0 I + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \alpha_3 \varepsilon^3 + \dots$$

ضرایب α از طریق آزمایش بدست می آیند.

Subject
Date

Example 1: First order cauchy elastic Model:

$\sigma_{ij} = \alpha_0 \delta_{ij} + \alpha_1 \varepsilon_{ij}$

$\alpha_0 , \alpha_1 = ?$

1. Simple shear Deformation:

$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \quad , \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0 \qquad \delta_{12} = 0$

$$\sigma_{12} = \alpha_1 \varepsilon_{12} = \alpha_1 \frac{\gamma_{12}}{2} \longrightarrow \alpha_1 = \frac{2\sigma_{12}}{\gamma_{12}} = 2G$$

2. Axial Tension:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \alpha_0 \delta_{ij} + 2G\left(\frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}\right) = \left(\alpha_0 + \frac{2}{3} G \varepsilon_{kk}\right) \delta_{ij}$$

تنش متوسط $= \frac{1}{3} \sigma_{mm} = \left(\alpha_0 + \frac{2}{3} G \varepsilon_{kk}\right) \qquad k = \frac{\frac{1}{3}\sigma_{mm}}{\varepsilon_{kk}} = \frac{\alpha_0}{\varepsilon_{kk}} + \frac{2}{3} G$

Bulk Modulus: $k = \dfrac{\frac{1}{3}\sigma_{mm}}{\varepsilon_{kk}} = \dfrac{\alpha_0 + \frac{2}{3} G \varepsilon_{kk}}{\varepsilon_{kk}} = \dfrac{\alpha_0}{\varepsilon_{kk}} + \dfrac{2}{3} G$

$$\longrightarrow \alpha_0 = \left(k - \frac{2G}{3}\right) \varepsilon_{kk} = \lambda \varepsilon_{kk}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}$$

PAPCO

Subject
Date

II. Hyperelastic Models: (Green elastic Materials)

به موادی که در آنها کار انجام شده مستقل از مسیر بارگذاری می باشد، مواد هایپرالاستیک یا الاستیک گرین گفته می شود. کاری به تاریخچه بارگذاری نداریم!

strain energy Function :

$W(E)$
↳ Lagrange Finite strain

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}}$$

$$d\sigma_{ij} = \underbrace{\frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij}\,\partial E_{kl}}}_{C_{ijkl}} dE_{kl} = \underset{\downarrow \ \text{81 مؤلفه}}{C_{ijkl}}\, dE_{kl} \quad (I)$$

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij}\,\partial E_{kl}}$$

$$d\sigma_{kl} = \frac{\partial^2 W}{\partial E_{kl}\,\partial E_{ij}} dE_{ij} = C_{klij}\, dE_{ij}$$

$\longrightarrow C_{ijkl} = C_{klij} \longrightarrow$ 36 مؤلفه مستقل

$$\frac{81-9}{2} = 36$$

۹ حالت : $i=k$ و $j=l$

σ_{ij}, kl / ji, lk $\longrightarrow$ تانسور تنش متقارن است. 21 مؤلفه مستقل

E_{ij}, kl

Subject
Date

a) polynomial Representation:

$$W(E) = W_0 + C_{ij} E_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijmn} E_{ij} E_{mn} + \frac{1}{3} C_{ijmnrs} E_{ij} E_{mn} E_{rs} +$$

$$C_{ij} = C_{ji}$$

$$C_{ijmn} = C_{mnij} = C_{jimn} = C_{ijnm}$$

$$C_{ijmnrs} = C_{jimnrs} = C_{ijnmrs} = C_{ijmnrs} = \cdots$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = C_{ij} + C_{ijmn} E_{mn} + C_{ijmnrs} E_{mn} E_{rs}$$

if $E_{mn} = 0$ $\quad \sigma_{ij} = C_{ij}$ (initial stress) ی سازه بار خارجی وجود ندارد

if $C_{ij} = 0 \longrightarrow W(E) = \frac{1}{2} C_{ijmn} E_{ij} E_{mn} + \frac{1}{3} C_{ijmnrs} E_{ij} E_{mn} E$
$+ W_0$

b) second order theory of elasticity:

$$\sigma'_{ij} = C_{ijmn} E_{mn} + C_{ijmnrs} E_{mn} E_{rs}$$

اگر کرنش جابجایات کوچک باشد:

$$\longrightarrow \sigma_{ij} = C_{ijmn} E_{mn}$$

$$W(E) = \frac{1}{2} C_{ijmn} E_{ij} E_{mn}$$

ی اینکه معادله سابق خطی باشد، علاوه بر کرنش ها،
Rotation ها هم باید بسیار کوچک باشد.

$$\underset{\text{2nd piola\_kirchhoff}}{\sigma_{ij}} = C_{ijmn} \underset{\text{لاگرانژ}}{E_{mn}}$$

Subject

Date

برای حالتهای بی‌نهایت کوچک : $\quad E_{ij} = \varepsilon_{ij}$

$$W(E) = \frac{1}{2} C_{ijmn}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{mn}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\, \varepsilon_{mn} \qquad \text{Hookian Materials}$$

21 ثوابت مستقل

c) Isotropic Materials :

خواص مکانیکی تابع جهت نیست.

$$W = W(\underbrace{I_{1\varepsilon},\ I_{2\varepsilon},\ I_{3\varepsilon}}_{})$$

لاتغیرهای کرنش

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial I_{1\varepsilon}} \frac{\partial I_{1\varepsilon}}{\partial E_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_{2\varepsilon}} \frac{\partial I_{2\varepsilon}}{\partial E_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_{3\varepsilon}} \frac{\partial I_{3\varepsilon}}{\partial E_{ij}}$$

کرنش لاگرانژ

تمرین :

$$I_{1\varepsilon} = tr(\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii}$$

$$I_{2\varepsilon} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ii}\,\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij})$$

$$I_{3\varepsilon} = det(\varepsilon) = \frac{1}{3}\{tr\varepsilon^3 - I_{1\varepsilon}\, tr\varepsilon^2 + I_{3\varepsilon}\, tr\varepsilon\}$$

$$\frac{\partial I_{1\varepsilon}}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial I_{2\varepsilon}}{\partial E_{ij}} = \underbrace{I_{1\varepsilon}\,\delta_{ij} - \varepsilon_{ij}}_{\varepsilon_{ij}}$$

$$\frac{\partial I_{3\varepsilon}}{\partial E_{ij}} = I_{2\varepsilon}\,\delta_{ij} - I_{1\varepsilon}\,\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{im}\,\varepsilon_{mj}$$

Subject
Date

مثلاً ؛ $W = C_1 I_{1\varepsilon}^2 + C_2 I_{2\varepsilon}$

d) Incompressible Materia

$I_{3\varepsilon} = 1 \leftarrow A_0 L_0 = AL$ حجم هنگام تغییر فرم ثابت می‌ماند.

$W = W(I_{13}, I_{23})$

Moony _ Rivlin :

$$W = C_1 (I_{1\varepsilon} - 3) + C_2 (I_{22} - 3)$$

تغییر فرم

C_1, C_2 : Constants Neo _ Hookian (rubber) 400%

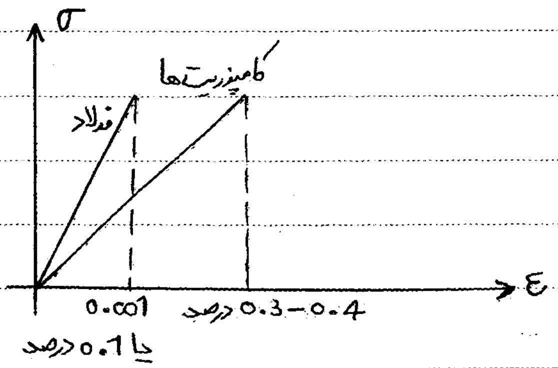
III. Hypoelastic Models :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}$$

در این حالت تنش سیالانه، کرنش سیالانه در ماده ایجاد شده و به مسیر وابسته است ← کاربرد اصلی در پلاستیسیته

IV. Linear elasticity :

The Ideal elastic elastic solid or Hookian solids :



PAPCO

$$\tilde{T}_{IJ} = C_{IJRS}\, E_{RS}$$

$$T_{ij} = C_{ijrs}\, E_{rs}$$

$$W = W(E)$$

$$\frac{\delta W}{\delta t} = T_{ij}\, D_{ij}$$

$$\frac{\delta W}{\delta E}\,\frac{\delta E}{\delta t} = T_{ij}\, D_{ij}$$

$$\frac{\delta W}{\delta E}\,\dot{E} = T_{ij}\, D_{ij} \longrightarrow T_{ij} = \frac{W}{\delta E_{ij}}$$

$$C_{ijrs} = \lambda \delta_{ij}\delta_{rs} + \mu(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}) + \nu(\delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr})$$

λ ، μ ، ν در تمام جهت‌ها ثابت هستند.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

$$C_{jirs} = \lambda \delta_{ji}\delta_{rs} + \mu(\delta_{jr}\delta_{is} + \delta_{js}\delta_{ir}) + \nu(\delta_{jr}\delta_{is} - \delta_{js}\delta_{ir})$$

$$C_{ijrs} = C_{jirs} \longrightarrow \nu = 0$$

Hence: $C_{ijrs} = \lambda \delta_{ij}\delta_{rs} + \mu(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr})$

$$\longrightarrow T_{ij} = [\lambda \delta_{ij}\delta_{rs} + \mu(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr})]\, E_{rs}$$

$$T_{ij} = \lambda \delta_{ij}\underbrace{\delta_{rs}}_{r=s} E_{rs} + \mu \underbrace{\delta_{ir}}_{i=r}\underbrace{\delta_{js}}_{j=s} E_{rs} + \mu \underbrace{\delta_{is}}_{i=s}\underbrace{\delta_{jr}}_{j=r} E_{rs}$$

Subject
Date

$$T_{ij} = \lambda \delta_{ij} E_{kk} + 2\mu E_{ij}$$

μ , λ ضرایب لامه

if $i = j \longrightarrow T_{ii} = 3\lambda E_{kk} + 2\mu E_{ii} = (3\lambda + 2\mu) E_{ii}$

$$E_{ij} = \frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{kk} + \frac{1}{2\mu} T_{ij}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \longrightarrow \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

ثانیاً : $E_{ij} = -\frac{\nu}{E} T_{ik} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} T_{ij}$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] , \quad \gamma_{yx} = \frac{1}{G}\tau_{yx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] , \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] , \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G}\tau_{zy}$$

_linear thermoelastic equations :

$\sigma_{ij} = C_{ij} + C_{ijmn} E_{mn} + C_{ijmnrs} E_{mn} E_{rs}$ جسم تبیا!

$\theta - \theta_0 \longrightarrow C_{ij} = -\beta_{ij}(\theta - \theta_0)$

small def. $\sigma_{ij} = -\beta_{ij}(\theta - \theta_0) + C_{ijmn} E_{mn}$ Duhamel _ Neuma

رابطه هوک تعمیم یافته برای تنش های حرارتی.

if $\theta = \theta_0$

$$\sigma_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$$

در حالتی که : $E_{mn} = 0 \longrightarrow \beta_{ij} = \beta \delta_{ij}$

Subject
Date

$$\sigma_{ij} = \lambda E_{kk}\delta_{ij} + 2\mu E_{ij} - \beta(\theta - \theta_0)\delta_{ij}$$

$$E_{ij} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} + \underset{\downarrow}{\alpha}(\theta - \theta_0)\delta_{ij}$$

ضریب انبساط حرارتی

$$3\alpha = \frac{\beta}{k} \quad \text{or} \quad \beta = \frac{E\alpha}{1-2\nu} \longrightarrow$$ هم در محدوده خطی

مدول بالک

Linear Viscoelasticity:

موادی که خواص آن‌ها بین سیال و جامد است.

دو مشخصه اصلی:

۱) رفتار وابسته به زمان دارند.

۲) تغییر فرم دائمی پیدا می‌کنند.

جهت تشخیص مواد ویسکوالاستیک:

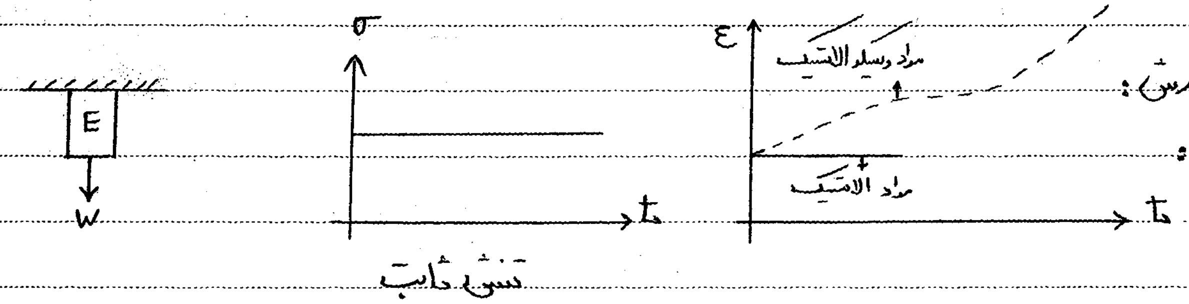
۱) تست خزش

۲) تست آسودگی تنش (stress relaxation)

۳) مطالعه پاسخ دینامیکی سیستم به یک بار سینوسی.

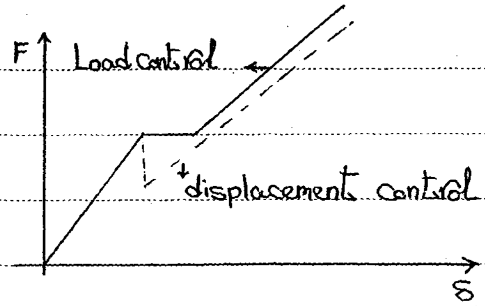
تست خزش:

با تغییر دما.



Subject

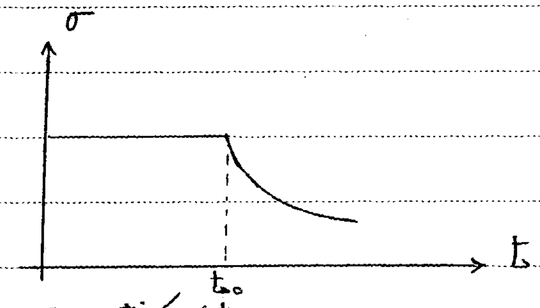
Date



تست آسودگی تنش:

کرنش را در یک مقدار معین ثابت نگه می‌داریم. در این صورت برای یک ماده ویسکوالاستیک خواهیم داشت:

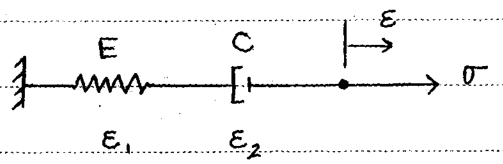
با تغییر دما:



لحظه‌ای که کرنش را در آن ثابت نگه داشتیم.

Maxwell Model:

(برای سیالات)



total strain: $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \longrightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{C}$$

لاپلاس : $L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \quad \text{for } s>0$

$f(t) = 1 \longrightarrow L(1) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = [-\frac{1}{s} e^{-st}]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$

$f(t) = t \longrightarrow L(t) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, t\,dt = [-\frac{1}{s} e^{-st} t]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{st} dt = \frac{1}{s^2}$

$f(t) = \frac{dy}{dt} \longrightarrow L(\frac{dy}{dt}) = -y(0) + sY(s) \qquad L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{C} \qquad L(\varepsilon) = \bar{\varepsilon} \qquad \underset{\text{domain time}}{L(\sigma)} = \bar{\sigma} \rightarrow \text{domain stress}$

$L(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{E} L(\dot{\sigma}) + L(\frac{\sigma}{C})$

$s\bar{\varepsilon} - \varepsilon(0) = \frac{1}{E}(s\bar{\sigma} - \sigma(0)) + \frac{1}{C}\bar{\sigma} \qquad (\mathrm{I})$

creep response :

$\sigma = \sigma_0\, u(t)$

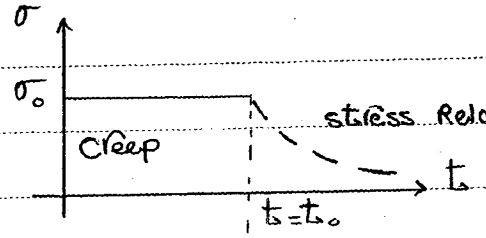
$L(\sigma) = \sigma_0\, L[u(t)] \longrightarrow \bar{\sigma} = \frac{\sigma_0}{s} \qquad (\mathrm{II})$

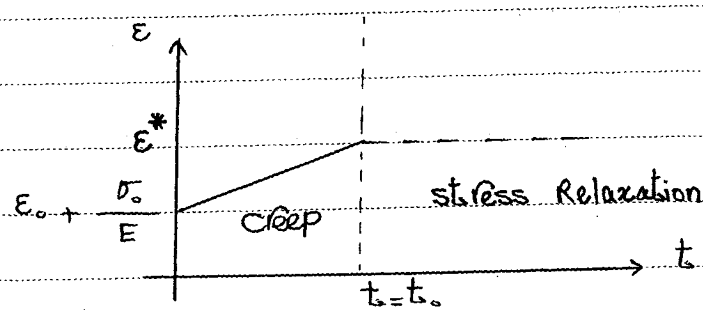
$(\mathrm{I}, \mathrm{II}) : s\bar{\varepsilon} - \underset{\frac{\sigma_0}{E}}{\cancel{\varepsilon(0)}} = \frac{1}{E}(\underset{\text{صفر}}{\cancel{s\frac{\sigma_0}{s} - \sigma_0}}) + \frac{1}{C}\frac{\sigma_0}{s}$

$\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{sE} + \frac{\sigma_0}{Cs^2} \longrightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E}(\frac{1}{s} + \frac{E}{Cs^2})$

معکوس لاپلاس : $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}(1 + \frac{E}{C}t) \quad \underline{L} \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0}{C}(t + \frac{C}{E})$

Subject
Date





$$\varepsilon^* = \frac{\sigma_0}{C}\left(t_0 + \frac{C}{E}\right) + \varepsilon_0$$

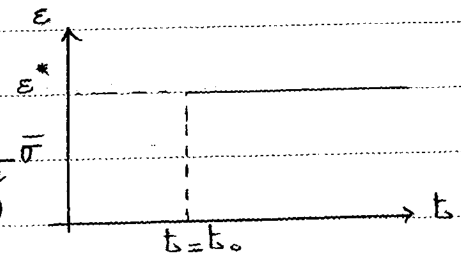
← ماکسول تغییرات تنش در خزش را بصورت خطی تقریب می‌زند.

stress Relaxation :

$$\varepsilon = \varepsilon^*\, u(t - t_1)$$

I معادله : $s\bar{\varepsilon} - \varepsilon(t_1) = \frac{1}{E}[s\bar{\sigma} - \sigma(t_1)] + \frac{1}{C}\bar{\sigma}$

(III)



تغییر متغیر : $t - t_1 = \tau \longrightarrow \varepsilon = \varepsilon^* u(\tau) \xrightarrow[\text{Laplace}]{} \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^*}{s}$ (IV)

$$(\text{III}, \text{IV})\quad s\cdot\frac{\varepsilon^*}{s} - \varepsilon^* = \frac{1}{E}[s\bar{\sigma} - \sigma_0] + \frac{1}{C}\bar{\sigma}$$

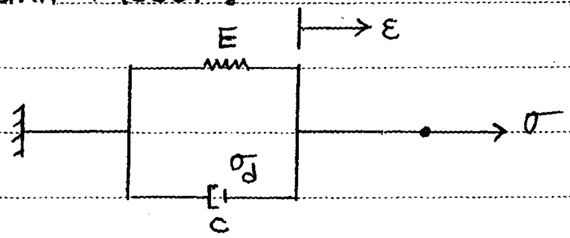
$$\left(\frac{s}{E} + \frac{1}{C}\right)\bar{\sigma} = \frac{\sigma_0}{E} \longrightarrow \bar{\sigma} = \sigma_0\frac{C}{Cs + E} = \frac{\sigma_0}{s + \frac{E}{C}}$$

Inverse Laplace : $\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{C}\tau} \longrightarrow \sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{C}(t - t_1)}$

PaPCO

Subject
Date

Kelvin Model :



(برای جامدات)

$$\sigma_s = E\varepsilon \quad , \quad \sigma_d = C\dot{\varepsilon}$$

تنش کل $= \sigma_s + \sigma_d = E\varepsilon + C\dot{\varepsilon}$ $\qquad \sigma = E\varepsilon + C\dot{\varepsilon} \quad (I)$

Creep response :

$$\sigma = \sigma_0\, u(t) \quad (II)$$

تبدیل لاپلاس (I) : $\bar{\sigma} = E\bar{\varepsilon} + C\left[s\bar{\varepsilon} - \varepsilon(0)\right]$

تبدیل لاپلاس (II) : $\bar{\sigma} = \dfrac{\sigma_0}{s}$

برای مدل طرین : $\varepsilon(0) = 0$

$$\frac{\sigma_0}{s} = E\bar{\varepsilon} + Cs\bar{\varepsilon} \longrightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{Cs\left(s + \frac{E}{C}\right)}$$

فرض : $\dfrac{E}{C} = \lambda$

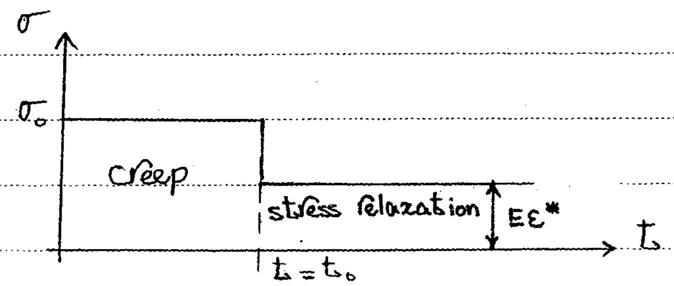
تفکیک کسرها : $\dfrac{1}{s(s+\lambda)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+\lambda} = \dfrac{A(s+\lambda) + Bs}{s(s+\lambda)} = \dfrac{(A+B)s + A\lambda}{s(s+\lambda)}$

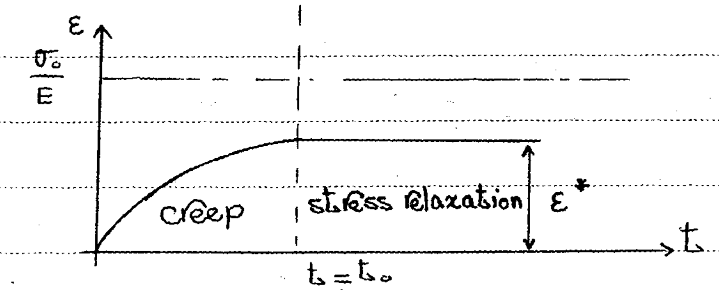
$$A + B = 0 \quad , \quad A\lambda = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad B = -\frac{1}{\lambda}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{C}\left[\frac{1}{\lambda s} - \frac{1}{\lambda(s+\lambda)}\right] = \frac{\sigma_0}{C\lambda}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\lambda}\right]$$

Subject
Date

Inverse Laplace : $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}\left[1 - e^{-\lambda t}\right] = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - e^{-\frac{E}{c}t}\right)$





stress relaxation :

$t = t_1 \longrightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon^* u(t - t_1) = \varepsilon^* u(\tau) \longrightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^*}{s}$

I جایگذاری در معادله : $\bar{\sigma} = E\frac{\varepsilon^*}{s} + c\left[s\frac{\varepsilon^*}{s} - \varepsilon^*\right] \longrightarrow \bar{\sigma} = E\frac{\varepsilon^*}{s}$

صفر

Inverse Laplace : $\sigma = E\varepsilon^* u(\tau) = E\varepsilon^* u(t - t_1)$

تمرین : Three element models :

معادله ساختاری، پدیده های آسودگی تنش و خزش را برای دو ماده ویسکوالاستیک که توسط فنر و دمپر بصورت زیر مدل شده اند را بنویسید.