«مقدمه‌ای بر اصول استاتیک»

معادلات تعادل استاتیکی

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \longrightarrow \sum F_x = 0 \,,\, \sum F_y = 0 \,,\, \sum F_z = 0 \\ \sum \vec{M} = 0 \longrightarrow \sum M_x = 0 \,,\, \sum M_y = 0 \,,\, \sum M_z = 0 \end{cases}$$

درجه آزادی اجسام : تعداد پارامترهای مستقل مورد نیاز برای نشان دادن یک جابجایی

به طور کلی تعداد درجات آزادی یک جسم سه بعدی و صلب برابر با ۶ می باشد و برای اطمینان از تعادل آن باید ۶ معادله

تعادل فوق به صورت همزمان برقرار باشد. هر گاه بخواهیم این جسم ساکن بماند در روش درجات آزادی آن کم می باید.

روش اول: محدودیت درجات آزادی (محدودیت در نوع بارگذاری) بدین ترتیب تنها برای درجات آزادی فعال معادلات تعادل نوشته

خواهد شد.

روش دوم: به تعداد درجات آزادی فعال باید واکنش تکیه گاهی مستقل وجود داشته باشد.

بدیهی است هرگاه واکنش‌های تکیه گاهی موجود از تعداد معادلات تعادل فعال کمتر باشد این جسم دچار ناپایداری خواهد

شد یعنی نیروهای وجود دارد که موجب حرکت سازه خواهد شد.

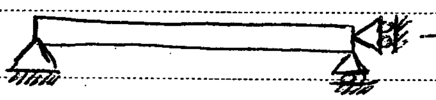
ناپایداری هندسی : تعداد واکنش‌های تکیه گاهی موجود کافی است اما آرایش هندسی آنها به گونه‌ای است که نمی‌تواند

تعادل جسم را تضمین کند. مثلاً در مسائل صفحه‌ای واکنش‌های تکیه گاهی موازی و یا متقارب این اشکال

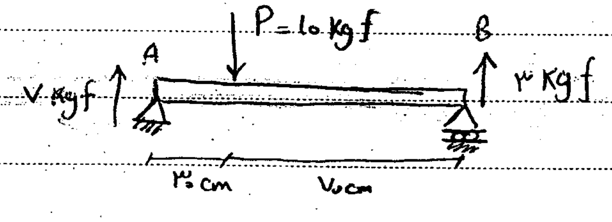
PAPCO

نکته: شرط لازم و کافی برای پایداری جسم در صفحه داشتن سه واکنش غیرموازی و غیرمتقارب است.

معین بودن استاتیکی: هرگاه در یک مسئله به تعداد معادلات تعادل استاتیکی حداکثر مجهول مستقل وجود داشته باشد دستگاه معادلات تعادل دارای جواب منحصر به فرد بوده این جسم تحت تأثیر نیروهای وارده معین و پایدار خواهد بود



هرگاه برای یک جسم بیش از تعداد معادلات تعادل حاکم نیروی مجهول تکیه‌گاهی وجود داشته باشد اصلاً دستگاه معادلات تعادل دارای بی‌نهایت جواب درست بوده که در حقیقت به معنای آن است که اتفاقی نیفتد که این جواب منحصر به فرد توسط معادلات استاتیکی به تنهایی قابل تعیین نیست لذا به مسئله نامعین استاتیکی می‌گویند.



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$ → یکی از آن‌ها وابسته به معادله‌ی $\sum F_y = 0$

* چون معادلات خطی‌اند اگر $P = 10\,kgf$ را دو برابر کنیم عکس‌العمل‌ها نیز دو برابر می‌شود.

واحد kgf (کیلوگرم نیرو): $F = ma$ (N, kg, m/s^2) ، $F = \frac{ma}{g_0}$ (kgf; m: kg, a: m/s^2)

* در مقاومت مصالح به دلیل استاتیک بودن اجزا لازم نیست kgf را به نیوتن (N) تبدیل کنیم.

Subject
Date

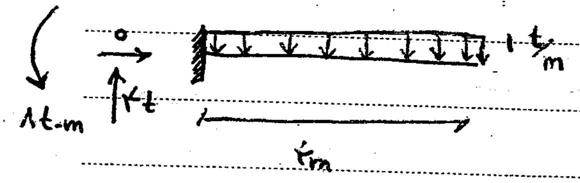
درجه نامعینی : اختلاف تعداد معادلات و مجهولات.

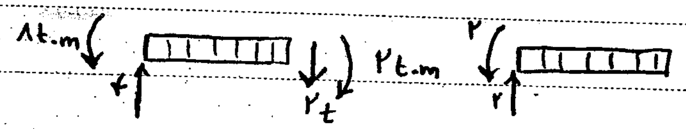
ـ تعداد مؤلفه‌های نیروی مجهول داخلی همواره برابر است با تعداد معادلات تعادل حاکم بر فضای مسئله

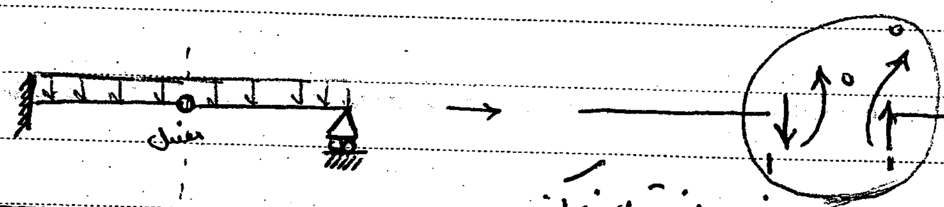
ـ درجه نامعینی : تفاضل بین تعداد نیروهای مجهول و تعداد معادلات تعادل درجه نامعینی است و دو صورت زیر است.

اضافه نمودن واکنش‌های تکیه‌گاهی (نامعینی خارجی) — اتصالات اضافی در درون سازه (نامعینی داخلی)

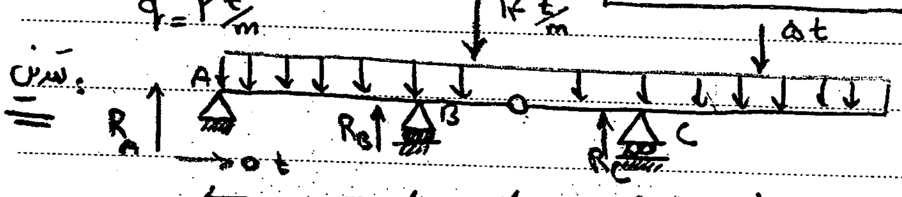
برای مثال هرگاه در یک سازه‌ی اسکلتی یک یا در بسته یا حلقه وجود داشته باشد در مسئله‌ی مسطح نشانه‌ی سه درجه نامعینی داخلی است.







مفصل ممان تحمل نمی‌کند



$R_A + R_B + R_C = 19$

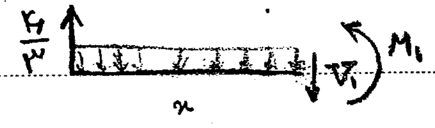
$3 \times R_B - 14 \times 3.5 + R_C \times 5 - 6 \times 5 = 0$ $\quad 3R_B = 79 - 95 \rightarrow \boxed{R_B = \frac{-16}{3}}$

PAPCO $\quad R_C \times 1 - 1.5 \times 6 - 5 \times 2 = 0$

$\boxed{R_C = 19}$ $\quad \boxed{R_A = \frac{16}{3}}$

Subject
Date

I

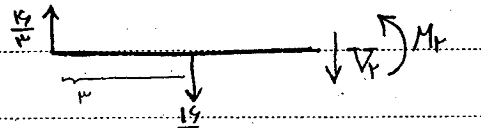


$$\boxed{V_1 = -2x + \frac{16}{3}}$$

$$+M_1 - \frac{16}{3}\times x + \frac{x}{2}\times 2x = 0$$ ۳

$$\boxed{M_1 = \frac{16}{3}x - x^2}$$

II

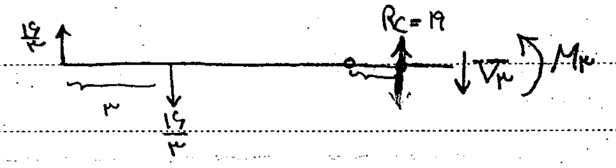


$$\boxed{V_2 = -2x}$$

$$+M_2 + \frac{16}{3}(x-3) - \frac{16}{3}(x) + 2x\times\frac{x}{2} = 0$$ ۵

$$\boxed{M_2 = +16 - x^2}$$

III

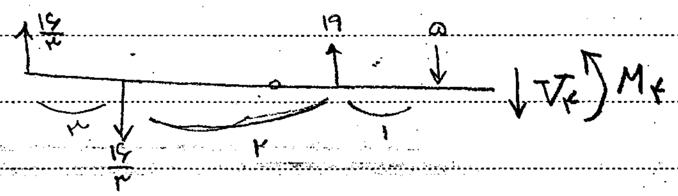


$$\boxed{V_3 = -2x + 19}$$ ۶

$$M_3 + \frac{16}{3}(x-3) - \frac{16}{3}x + 2x\times\frac{x}{2} - 19(x-5) = 0$$

$$M_3 - 16 + x^2 - 19x + 95 = 0 \longrightarrow \boxed{M_3 = -x^2 + 19x - 79}$$

IIII

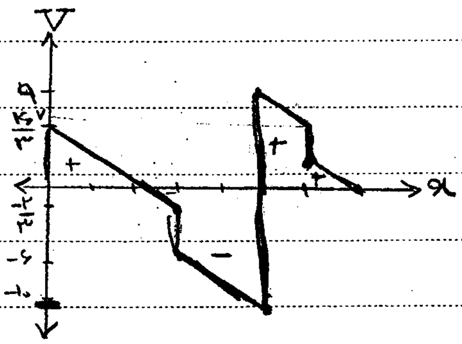


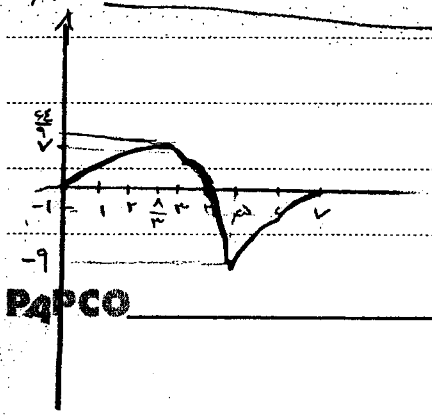
$$\boxed{V_4 = -2x + 14}$$ ۷

$$M_4 + \frac{16}{3}(x-3) - \frac{16}{3}x + 2x\times\frac{x}{2} - 19(x-5) + 5(x-6) = 0$$

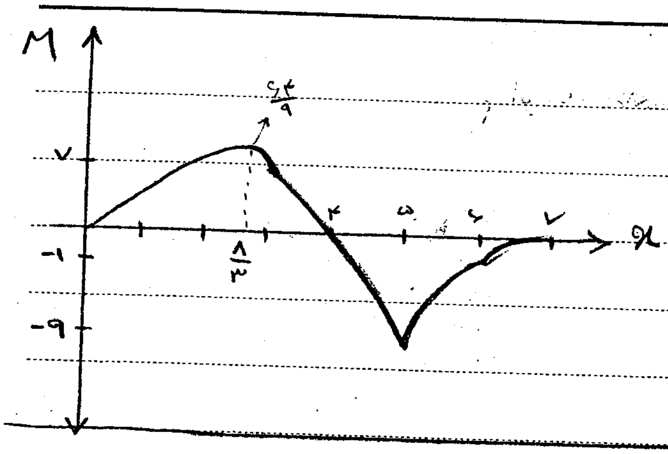
$$M_4 = 16 - x^2 + 19x - 95 - 5x + 30$$

$$\boxed{M_4 = -49 + 14x - x^2}$$





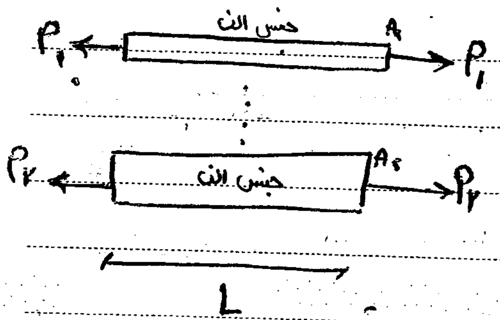
P4PCO



عوامل مؤثر در مقاومت: [برش - تغییرشکل - کشش - فشار - پیچش]

۱- ابعاد هندسی ۲- نوع بارگذاری (چگونگی تاثیر نیرو) ۳- جنس مصالح سازنده

- بررسی اثر سطح مقطع میله (A) در مقاومت کششی:



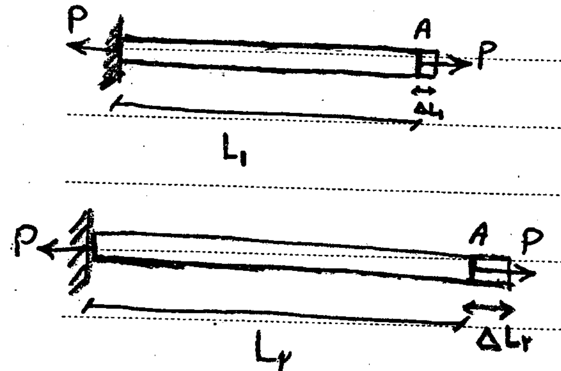
$$\frac{P_1}{A_1} = \frac{P_2}{A_2} = \text{ثابت}$$

واحد تنش: $1\,MPa = 10^6\,Pa = 1\,\frac{N}{mm^2}$ سیستم SI: $1\,Pa = 1\,\frac{N}{m^2}$ تنش $\sigma = \frac{P}{A}$ [stress]

سیستم MKS: $\frac{kgf}{cm^2}$

سیستم KSI: $\frac{lb}{in^2}$ psi $\quad KSi = 10^3\,psi$

- بررسی اثر طول میله (L) در مقاومت کششی:



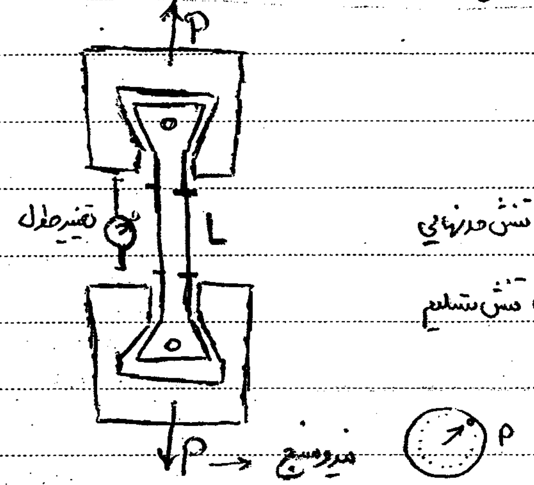
$$\frac{\Delta L_1}{L_1} = \frac{\Delta L_2}{L_2} = cte$$

strain کرنش (تنجش) $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ بدون واحد است

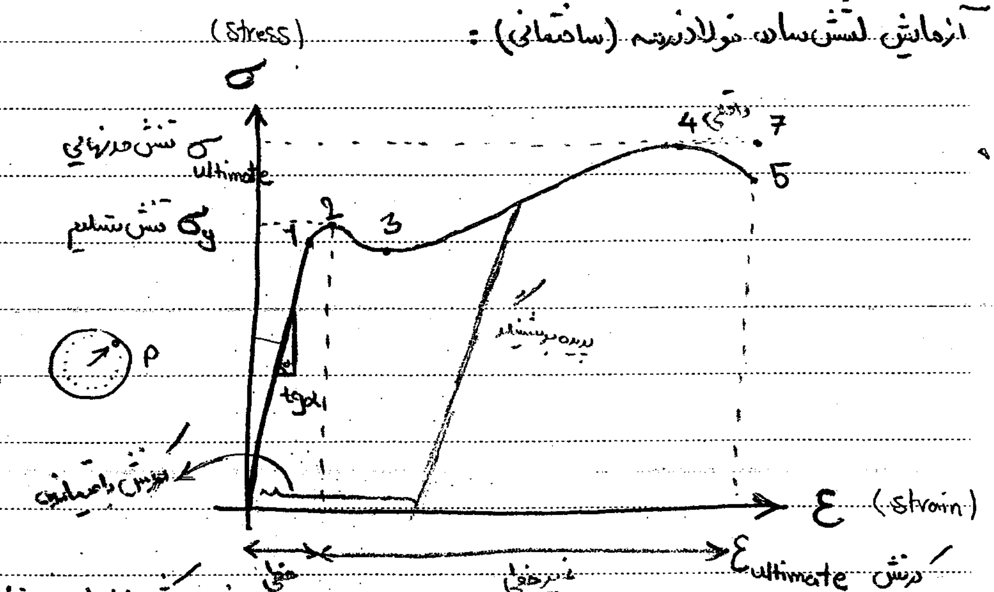
Subject
Date

ـ رابطه‌ی تنش و کرنش مستقل از ابعاد جسم است و به جنس بستگی دارد.

پس نمودار تنش ـ کرنش ($\sigma - \varepsilon$) برای هر ماده منحصر به فرد است ASTM : American Society Testing of Material



■ آزمایش کشش ساده فولاد نرمه (ساختمانی):



ـ ناحیه کشسان (Elastic)

Plastic (مومسان) (خمیری)

۱ـ حد تناسب (خطی) ۲ـ جاری شدن (نقطه تسلیم) ۳ـ آغاز سخت شدگی مجدد (strain-hardening)

۴ـ حد نهایی ۴ تا ۵ ← باریک شدگی ۵ـ گسیختگی

■ E مدول الاستیسیته (ضریب ارتجاعی) (مدول یانگ) : $< \sigma_y$ $\boxed{\sigma = E\varepsilon \quad \text{قانون هوک}}$

$$St\_37 \begin{cases} \sigma_y = ۲۴۰۰ \ \frac{kgf}{cm^2} \\ \sigma_u = ۳۷۰۰ \ \frac{kgf}{cm^2} \\ E = ۲/۱ \times ۱۰^۶ \ \frac{kgf}{cm^2} \end{cases}$$

$$\frac{\Delta L}{L} E = \frac{P}{A} \rightarrow \boxed{\Delta L = \frac{PL}{EA}}$$

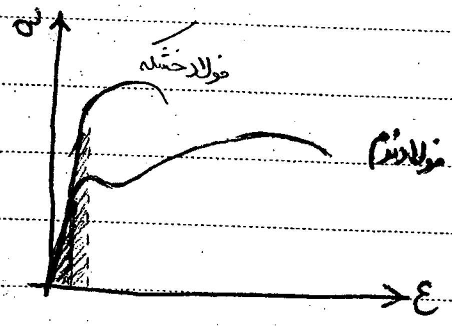
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$W_e = \frac{1}{2} P\Delta L = U_i$$

چگالی انرژی میله $u_0 = \frac{U}{V} = \frac{\frac{1}{2}P\Delta L}{AL} = \frac{1}{2}\,\frac{P}{A}\,\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$

ضریب قدرت ((رزلیانس) $= \frac{1}{2}\sigma_y \cdot \varepsilon_y = \frac{\sigma_y^2}{2E}$

مساحت زیر نمودار تنش - کرنش ← معرف طاقت



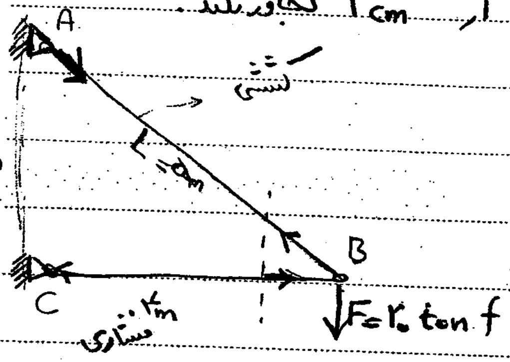
■ ضریب اطمینان : (Factor of Safety)

تنش مجاز $\sigma_{Allowable} = \frac{\sigma_y}{F.S}$

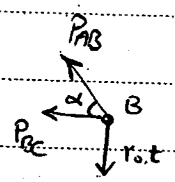
σ محاسباتی $= \frac{P}{A} \leq \frac{\sigma_y}{F.S} = \sigma_a$

$$A \geq \frac{P}{\sigma_a}$$

مثال: میله‌های خرپای شکل مقابل را از فولاد طرح کنید و کنترل نمایید که جابجایی نقطه B از 1 cm تجاوز نکند.



B گره



$\sum F_y = 0$ $\quad P_{AB}\sin\alpha - 20 = 0$

$$P_{AB} = \frac{20}{\sin\alpha} = 33{,}33 \text{ ton f}$$

$$-P_{AB}\cos\alpha - P_{BC} = 0 \rightarrow P_{BC} = -20\cot\alpha = \boxed{-26{,}67}\text{ ton f}$$

$P_{AB} = ۳۳٫۳۴$ کششی $\quad P_{BC} = ۲۶٫۶۷$ فشاری

$$\sigma_{AB} = \frac{P_{AB}}{A} \leq \frac{\sigma_y}{FS} = \sigma_a$$

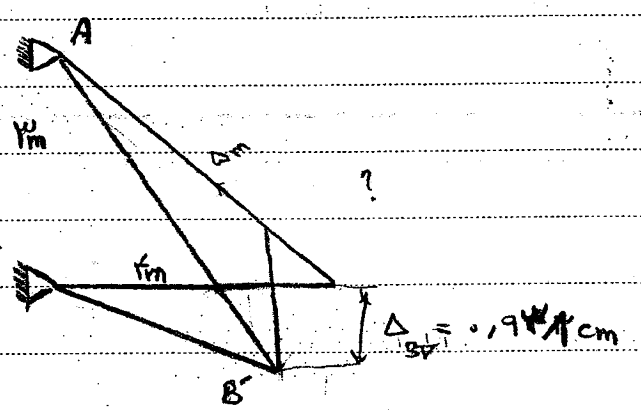
$$A_{AB} \geq \frac{P_{AB}}{\sigma_a} = + \frac{۳۳٫۳۴\times۱۰^۳}{۱۴۴۰} = ۲۳٫۱۵\ cm^۲$$

$$A_{BC} \geq \frac{P_{BC}}{\sigma_a} = \frac{۲۶٫۶۷\times۱۰^۳}{۱۴۴۰} = ۱۸٫۵\ cm^۲$$

طول عضو

$$\Delta_{AB} = \frac{PL}{EA} = \frac{+۳۳٫۳۳\times۵\times۱۰^۵}{۲٫۱\times۱۰^۶\times۲۳٫۱۵} = +۰٫۳۴۴\ cm$$

$$\Delta_{BC} = \frac{PL}{EA} = \frac{-۲۶٫۶۷\times۱۰^۳\times۴۰۰}{۲٫۱\times۱۰^۶\times۱۸٫۵} = -۰٫۲۷۵\ cm$$



درسیدی باسونی ؟

؟ روش انرژی محاسبه تغییرشکل ؟

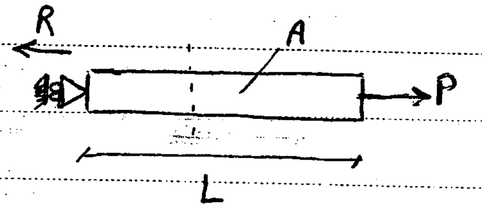
اصل جمع آثار نیروها (super Position):

مطابق این اصل می‌توان تأثیر مجموعه‌ای از نیروها بر یک جسم را توسط جمع آثار تک تک نیروها هنگامی که هر یک به تنهایی بر جسم اثر می‌کنند بدست آورد و شرط درستی این اصل آن است که جسم مورد نظر دارای رفتار خطی باشد و برای داشتن رفتار خطی شرایط زیر ضروری است: ۱ـ خطی از لحاظ مواد (مصالح سازنده از قانون هوک پیروی کند $(\sigma = E\varepsilon < \sigma_y)$ در محدوده‌ی خط تناسب

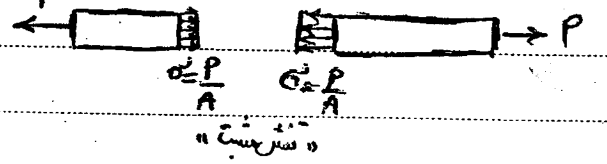
۲ـ خطی از لحاظ هندسی (تغییر شکلها در مقایسه با هندسه اولیه کوچک باشد.)

اصل جمع آثار، برای کلیه آثار نیرو اعم از واکنش های تکیه‌گاهی، نیروهای داخلی، تنش ها، کرنش ها و تغییر شکل سازه یا جسم برقرار است جز انرژی ذخیره شده در سازه زیرا رابطه‌ی نیرو و انرژی از درجه ۲ می‌باشد.

تحلیل میله‌ها:



الف) میله معین استاتیکی (ایزواستاتیک):



$$\sum F_x = 0 \rightarrow R - P = 0 \rightarrow R = P$$

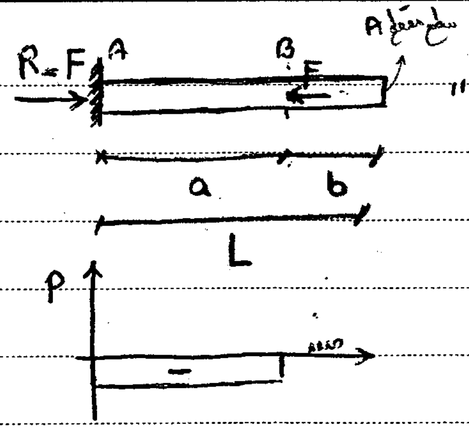
تغییر طول جزء dx

$$\varepsilon = \frac{\delta}{dx} \Rightarrow \int \delta = \int \varepsilon\, dx \Rightarrow \Delta = \int_0^L \varepsilon\, dx = \int_0^L \frac{\sigma}{E} dx = \frac{PL}{EA}$$

$$\boxed{\Delta = \frac{PL}{EA}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نمونه:

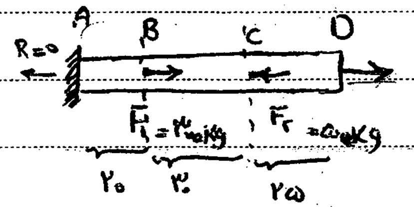


مقطع معین

$$\sigma = \frac{-F}{A} \qquad \varepsilon = \frac{-F}{EA}$$

$$\Delta_{AB} = \int_0^a \varepsilon\, dx = \frac{-F}{EA}\int_0^a dx = \frac{-Fa}{EA}$$

تمرین:



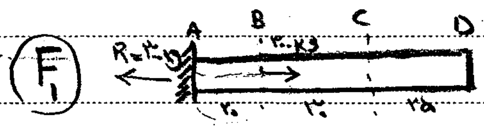
$A = 1.5\ cm^2$

$E = 2.1\times 10^6\ kgf/cm^2$

تغییر طول قسمت های مختلف را بیابید.

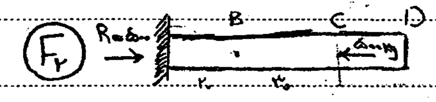
یعنی تغییر طول قسمت AB = 0 است

طبق اصل جمع آثار نیرو؟



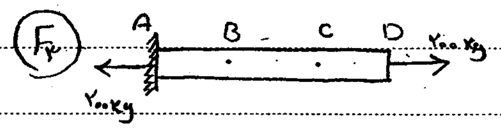
$$\Delta = \int \varepsilon\, dx \qquad \Delta_{BC_1} = 0 \qquad \Delta_{CD_1} = 0$$

$$\Delta_{AB_1} = \int_0^{20} \frac{+300x}{2.1\times10^6\times1.5}\,dx = \frac{6000}{2.1\times1.5\times10^6} = +0.0019\ cm$$



$$\Delta_{CD_2} = 0$$

$$\Delta_{AB_2} = \int_0^{20} \frac{-500\,dx}{2.1\times10^6\times1.5} = -0.0031\ cm \qquad \Delta_{BC_2} = \frac{-500\times30}{1.5\times2.1\times10^6} = -0.0047$$

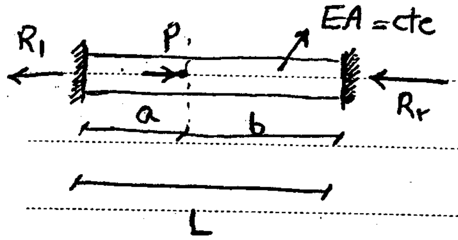


$$\Delta_{AB_3} = \frac{+200\times20}{2.1\times10^6\times1.5} = 0.0012 \qquad \Delta_{BC_3} = \frac{+200\times30}{2.1\times10^6\times1.5} = 0.0019$$

$$\Delta_{CD_3} = \frac{+200\times25}{2.1\times10^6\times1.5} = 0.0015$$

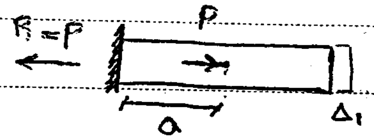
کل

اصل جمع آثار؛ $\Delta_{AB} = 0$ ... $\Delta_{BC} = -0.0028$ $\qquad \Delta_{CD} = 0.0015$



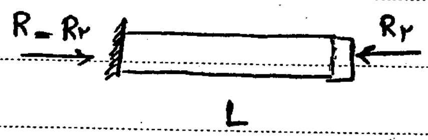
پ) تحلیل میله نامعین استاتیکی یا میله هیپراستاتیک:

روش نیرو



$$\Sigma F_x = 0 \begin{cases} R_1 + R_2 = P & \text{معادله تعادل} \\ \Delta_C = 0 & \text{رابطه سازگاری شکلها} \end{cases}$$

$$\Delta_1 = \frac{Pa}{EA}$$

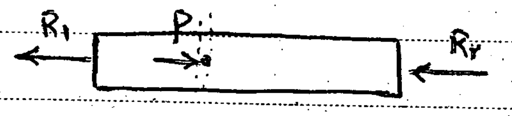


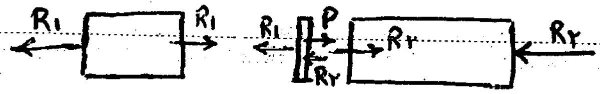
$$\Delta_2 = \frac{-R_2 L}{EA}$$

اصل جمع آثار: $\Delta_1 + \Delta_2 = 0 \rightarrow \frac{Pa}{EA} - \frac{R_2 L}{EA} \rightarrow \boxed{R_2 = \frac{Pa}{L}}$

$$R_1 = P\left(1 - \frac{a}{L}\right) = \frac{P(L-a)}{L} = \boxed{\frac{Pb}{L}}$$

روش دوم
روش تغییر مکان





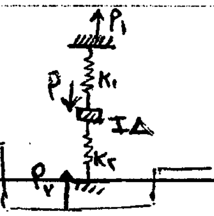
$\frac{R_1 a}{EA}$ $\frac{-R_2 b}{EA}$

$$\frac{R_1 a}{EA} - \frac{R_2 b}{EA} = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{b}{a}}$$

$$R = R_1 + R_2$$

تحلیل سازه های هیپراستاتیک ← روش نیرو
تحلیل سازه های هیپراستاتیک ← روش تغییر مکان

Subject:
Year. Month. Date. ( )

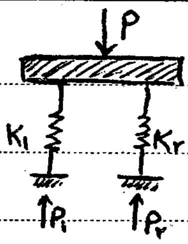


$P_1+P_2=P$ ، $K_1+K_2=K_e$

$|\Delta_1|=|\Delta_2|$

فنرها:

الف) ترکیب فنرهای موازی:



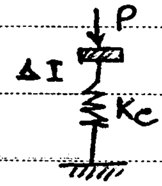
$$\begin{cases} P_1+P_2=P & \text{معادله تعادل} \\ \Delta_1=\Delta_2 & \text{رابطه سازگاری تغییرشکلها} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1=K_1\Delta_1 \\ P_2=K_2\Delta_2 \end{cases} \quad \text{معادلات نیرو-تغییرشکل}$$

۱- حل مسأله به روش نیرو: (Force Method)

(روش نرمی)

$$\begin{cases} P_1+P_2=P \\ \dfrac{P_1}{K_1}=\dfrac{P_2}{K_2} \end{cases} \qquad P_1=\frac{K_1}{K_1+K_2}P \qquad P_2=\frac{K_2}{K_1+K_2}P$$



$$\Delta_1=\Delta_2=\frac{P}{K_1+K_2} \qquad \Delta=\frac{P}{K_e} \qquad K_e=K_1+K_2$$

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{K_1}{K_2}$$ به نسبت سختی‌ها

به طور کلی: ۱- در سیستم فنرهای موازی تغییرشکلها مساوی است ۲- و نیروها نامساوی و به نسبت سختی‌ها خواهد بود.

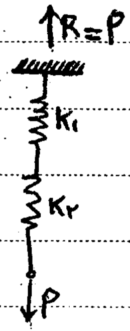
۳- و سختی معادل مجموع فنرهای موازی است:

$$K_e=\sum_{i=1}^{n}K_i \quad , \quad \Delta=\frac{P}{K_e}$$

۲- حل مسئله به روش تغییر مکان‌ها: (روش سختی) [Displacement Method]

$$\left.\begin{array}{l} P_1=K_1\Delta \\ P_2=K_2\Delta \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{تعادل}]{\text{در معادله}} K_1\Delta+K_2\Delta=P \longrightarrow \boxed{\Delta=\frac{P}{K_1+K_2}}$$

ب) ترکیب فنرهای سری:



نیروهای داخلی برای هر فنر هم P است.

$$\Delta_1=\frac{P}{K_1} \qquad \Delta_2=\frac{P}{K_2}$$

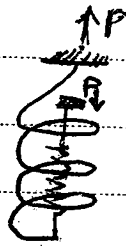
$$\Delta=\Delta_1+\Delta_2$$

$$\frac{P}{K_1}+\frac{P}{K_2}=\frac{P}{K_e}$$

$$\boxed{\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}=\frac{1}{K_e}}$$

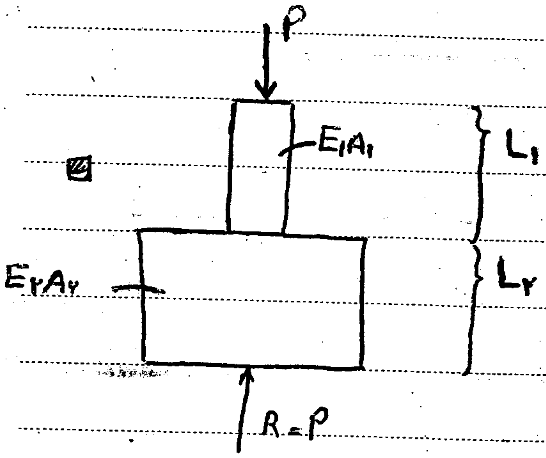
به طور کلی در فنرهای سری ← ۱- نیروها مساوی ۲- تغییر شکلها نامساوی و به نسبت (عکس سختی‌ها) یا (نرمی)

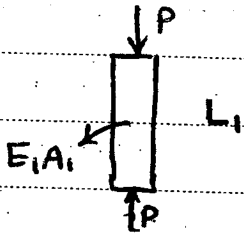
۳- نرمی فنر معادل برابر مجموع نرمی‌هاست. $\frac{1}{K_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{K_i}$ ۴- تغییر شکل کل مجموعه تغییر شکلها است



دو فنر سری اند

تحلیل میله‌های مرکب:



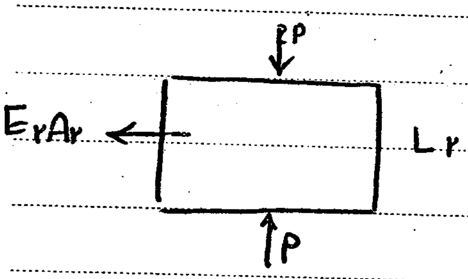


$$\Delta_1 = \frac{-PL_1}{E_1A_1}$$

$$K_1 = \frac{E_1A_1}{L_1}$$

$$P \not< \sigma'_{a_1} \cdot A_1 \leftarrow \sigma'_1 = \frac{-P}{A_1} < \sigma'_{a_1}$$

تنش مجاز



$$\Delta_2 = \frac{-PL_2}{E_2A_2} \qquad K_2 = \frac{E_2A_2}{L_2} \qquad \sigma'_2 = \frac{-P}{A_2} < \sigma'_{a_2}$$

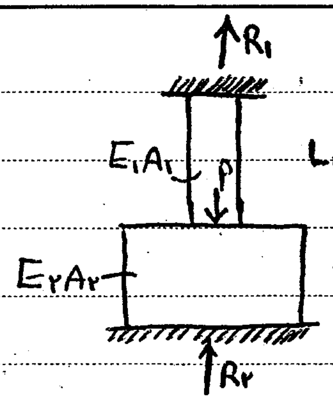
$$P \not< \sigma'_{a_2} A_2$$

کل $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{-PL_1}{E_1A_1} - \frac{PL_2}{E_2A_2} = -P\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)$

$$\Delta = \frac{PL}{EA} \qquad \overset{\text{سختی}}{K} = \frac{EA}{L}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

میله مرکب
(نامعین)



$$\begin{cases} R_1+R_2=P \\ \Delta_{کل}=0 \end{cases}$$

$$K_1=\frac{E_1A_1}{L_1} \qquad K_2=\frac{E_2A_2}{L_2}$$

تغییر شکلها مساوی ← مانند فنرهای موازی ← نقطه عمل مشترک

$$\Delta=\frac{P}{K_e}=\frac{P}{K_1+K_2}=\frac{P}{\frac{E_1A_1}{L_1}+\frac{E_2A_2}{L_2}}$$

$$P_1=K_1\Delta=\frac{K_1}{K_1+K_2}\cdot P \qquad \sigma_1=\frac{P_1}{A_1}\leqslant \sigma_{a_1}$$

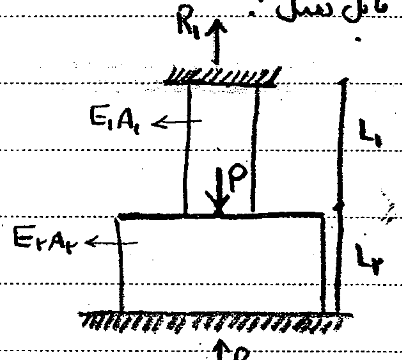
$$P_2=K_2\Delta=\frac{K_2}{K_1+K_2}\cdot P \qquad \sigma_2=\frac{P_2}{A_2}\leqslant \sigma_{a_2}$$

Min →

مثال

در مثال فوق فرض کنید $E_1=10^5\frac{kg}{cm^2}$ ، $E_2=10^4\frac{kg}{cm^2}$ ، $A_1=5cm^2$ ، $A_2=20cm^2$ ،

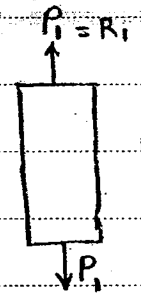
$L_1=30cm$ و $L_2=50cm$ ؛ $\sigma_{a_1}=200\frac{kg}{cm^2}$ ، $\sigma_{a_2}=50\frac{kg}{cm^2}$ حداکثر نیروی P قابل تحمل؟



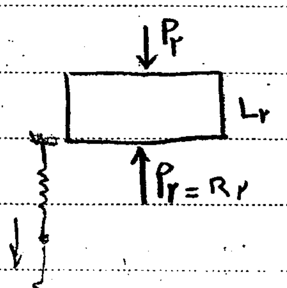
$$\begin{cases} P=P_1+P_2 \\ \Delta_{کل}=0 \end{cases}$$

سازگاری شکلها

موازی ← نیروها نابرابر



$$\Delta_1+\Delta_2=0 \Rightarrow \frac{P_1L_1}{E_1A_1}-\frac{P_2L_2}{E_2A_2}=0$$



$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{L_2}{L_1}\times\frac{E_1A_1}{E_2A_2}=\frac{50}{30}\times\frac{10^5\times5}{10^4\times20}=\frac{5}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{25}{6}$$

$$\sigma_1=\frac{P_1}{A_1}\leqslant 200 \longrightarrow P_1\leqslant 1000 \qquad P_2=\frac{6}{25}\times P_1 \qquad P_1=1000 \rightarrow P_2=240$$

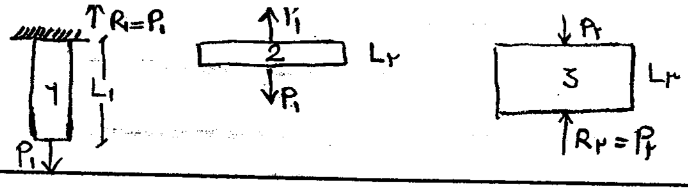
$$\sigma_2=\frac{P_2}{A_2}\leqslant 50 \longrightarrow P_2\leqslant 1000$$

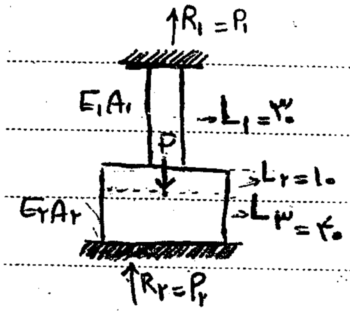
$$\boxed{P_{مجاز}=P_1+P_2=1240\ kgf}$$

1 و 2 باهم سری اند و با 3 موازی اند.

Subject:

Year. Month. Date. ( )





مثال: در شکل مقابل حداکثر نیروی P را چه مقدار می‌توان اثر داد؟ تغییر مکان نقطه اثر نیروی P؟

$$\Delta_1=\frac{P_1L_1}{E_1A_1}\qquad \Delta_2=\frac{P_1L_2}{E_2A_2}\qquad \Delta_3=\frac{-P_2L_3}{E_2A_2}$$

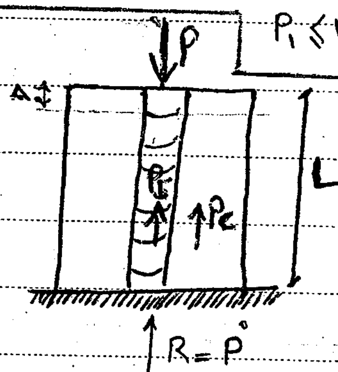
$$P_1\times\frac{30}{10^5\times5}+P_1\times\frac{10}{10^4\times20}=\frac{P_2\times40}{10^4\times20}$$

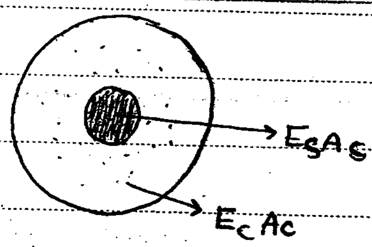
$$\frac{6}{10^5}P_1+\frac{5}{10^5}\times P_1=\frac{P_2\times2}{10^4}\longrightarrow 11P_1=20P_2\longrightarrow \boxed{P_2=\frac{11}{20}P_1}$$

$$\sigma_1=\frac{P_1}{5}\leq200\qquad \sigma_2=\frac{P_1}{20}\leq50\qquad \sigma_3=\frac{P_2}{20}\leq50\longrightarrow P_1=1000 \text{ و } P_2=550\rightsquigarrow \boxed{P=1550\,\text{kgf}}$$

$P_1\leq1000$ و $P_2\leq1000$ $\qquad \boxed{\Delta_{\text{نقطه اثر}}=\frac{550\times40}{10^4\times20}=0.11\,\text{cm}}$

تحلیل ستون کوتاه بتن آرمه:





مسئله از لحاظ نیروی خارجی معین

از لحاظ نیروی داخلی نامعین است

تحلیل:

$$\begin{cases}P_s+P_c=P\\ \Delta_s=\Delta_c\end{cases}$$ شرط پیوستگی مصالح

$$\Delta=\Delta_s=\Delta_c\rightarrow\begin{cases}\Delta_s=\dfrac{-P_sL}{E_sA_s}\\[2mm] \Delta_c=\dfrac{-P_cL}{E_cA_c}\end{cases}\qquad \frac{E_s}{E_c}=n$$

$$\begin{cases}K_s=\dfrac{P_s}{\Delta_s}=\dfrac{E_sA_s}{L}\\[2mm] K_c=\dfrac{P_c}{\Delta_c}=\dfrac{E_cA_c}{L}\end{cases}\xrightarrow[\text{نیروها نابرابر}]{\text{تغییر طول‌ها مساوی}}\ \text{فنرها موازی}\ \Longrightarrow\ K_e=K_s+K_c=\frac{E_sA_s+E_cA_c}{L}$$

$$\Delta=\Delta_s=\Delta_c=\frac{P}{K_e}$$

$$P_s=\frac{E_sA_s}{E_sA_s+E_cA_c}\times P\qquad P_c=\frac{E_cA_c}{E_sA_s+E_cA_c}\times P$$

$$\begin{cases}\sigma_s=\dfrac{P_s}{A_s}=\dfrac{PE_s}{E_sA_s+E_cA_c}=\dfrac{P}{A_s+\frac{E_c}{E_s}A_c}=\dfrac{P}{A_s+\frac{A_c}{n}}=\dfrac{P}{A_{es}\ \text{یا}\ A_{ts}}\\[3mm] \sigma_c=\dfrac{P_c}{A_c}=\dfrac{PE_c}{E_sA_s+E_cA_c}=\dfrac{P}{\frac{E_s}{E_c}A_s+A_c}=\dfrac{P}{A_{tc}}\end{cases}$$

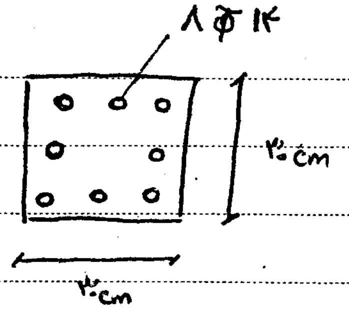
"transformed section"

$$\boxed{\text{مساحت تبدیل یافته}\ A_{tc}=nA_s+A_c}$$

$$\Delta_s=\Delta_c\rightarrow\frac{\Delta_s}{L}=\frac{\Delta_c}{L}\rightarrow\varepsilon_s=\varepsilon_c\rightarrow\frac{\sigma_s}{E_s}=\frac{\sigma_c}{E_c}\rightarrow\boxed{\frac{\sigma_s}{\sigma_c}=\frac{E_s}{E_c}=n}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

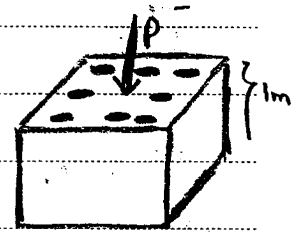


مثال:

$E_s = 2\times10^6$ $\quad \sigma_{as} = 2000 \ \frac{kgf}{cm^2}$

$E_c = 2\times10^5$ $\quad \sigma_{ac} = 200 \ \frac{kgf}{cm^2}$ $\quad L = 1m$

ظرفیت فشاری ستون را محاسبه کنید و تغییر شکل آن را بیابید.



$A_s = 8\times\pi\times\frac{(1.4)^2}{4} = 12.31 \ cm^2$

$A_c = 900 - A_s = 887.69 \ cm^2$

$$\begin{cases} P = P_s + P_c \\ \Delta_s = \Delta_c \end{cases}$$ شرط سازگاری مصالح

$\Delta_s = \frac{P_s\times100}{2\times10^6\times12.31}$

$\rightarrow \Delta_s = \Delta_c$ $\quad K_s = \frac{2\times10^6\times12.31}{100}$

$\Delta_c = \frac{P_c\times100}{2\times10^5\times887.69}$ $\quad K_c = \frac{2\times10^5\times887.7}{100}$ $\quad K_e = \frac{2\times10^6(88.77+12.31)}{100}$

$\Delta = \frac{202158.00}{2\times10^6(88.77+12.31)} = 0.1 \ cm = 1mm$

$$\begin{cases} \sigma_s = \frac{P}{A_{ts}} = \frac{P}{A_s+\frac{A_c}{n}} = \frac{P}{12.31+88.77} \leqslant 2000 \rightarrow P \leqslant 202158 \\ \sigma_c = \frac{P}{A_{tc}} = \frac{P}{A_c+A_s\times n} = \frac{P}{887.7+123.1} \leqslant 200 \rightarrow P \leqslant 202158 \end{cases}$$

$\boxed{P_{max} = 202158} \ kgf$

مثال ۲)

$\sigma_{as} = 3000 \ \frac{kgf}{cm^2}$ $\quad E_s = 2.1\times10^6$ $\quad L = 1m$

$\sigma_{ac} = 200 \ \frac{kgf}{cm^2}$ $\quad E_c = 2\times10^5$

اگر بخواهیم ظرفیت فشاری ستون فوق دو برابر شود اما مقطع بیشتر از مربع ۴۰×۴۰ نشد مقدار فولاد را محاسبه کنید.

$P = 404316$

$\sigma_s = \frac{404316}{A_s+\frac{1}{n}A_c} \leqslant 3000$ $\quad 134.772 \leqslant A_s + \frac{2}{21}\times1600 - \frac{2}{21}A_s$

$\sigma_c = \frac{404316}{A_c+\frac{n}{1}A_s} \leqslant 200$ $\quad 2021.58 \leqslant 10.5A_s + 1600 - A_s$

$421.58 \leqslant 9.5 A_s$

$\boxed{A_{s(min)} = 44.376842 \ cm^2}$ $\quad \boxed{A_s \geqslant 44.376842}$

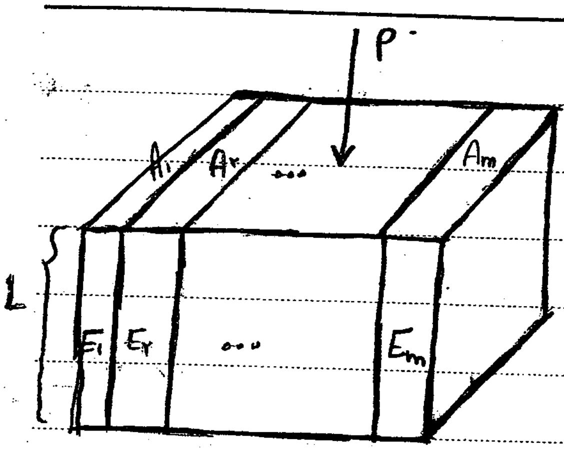
$44.376842 = \cancel{4}^{2}\times\pi\frac{d^2}{\cancel{4}}$

$d = 36 \ mm$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال :



$$\begin{cases} P_i = ? \\ \sigma_i = ? \\ \Delta = \dfrac{P.L}{\sum^{m} E_i A_i} \end{cases}$$

$$A_{t_i} = \sum_{j=1}^{m} n_{j_i} A_j$$

$$P = \sum_{i=1}^{m} P_i$$

تغییرطولهای هرقسمت برابراست ، بین نیروهای هرقسمت جزء وکلا است (فنرهای موازی)

$$K_i = \frac{E_i A_i}{L} \xrightarrow{\text{موازی}} K_e = \frac{\sum_{i=1}^{m} E_i A_i}{L} \longrightarrow K_e \Delta = P \longrightarrow \Delta = \frac{PL}{\sum_{i=1}^{m} E_i A_i}$$

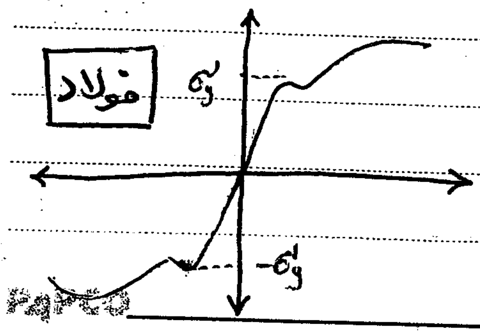
$$\frac{PL}{\sum_{i=1}^{m} E_i A_i} = \frac{P_i L}{E_i A_i} \longrightarrow \boxed{P_i = \frac{P E_i A_i}{\sum_{i=1}^{m} E_i A_i}}$$

$$\sigma_i = \frac{P_i}{A_i} = \boxed{\frac{P E_i}{\sum_{i=1}^{m} E_i A_i}} \leqslant \sigma_{a_i}$$

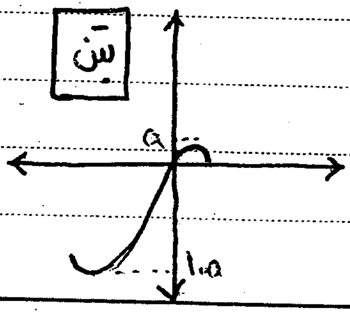
مصالح ساختمانی :

۱- فولاد ۲- بتن ۳- چوب ۴- سنگ ۵- آجر ۶- گچ ...

فولاد



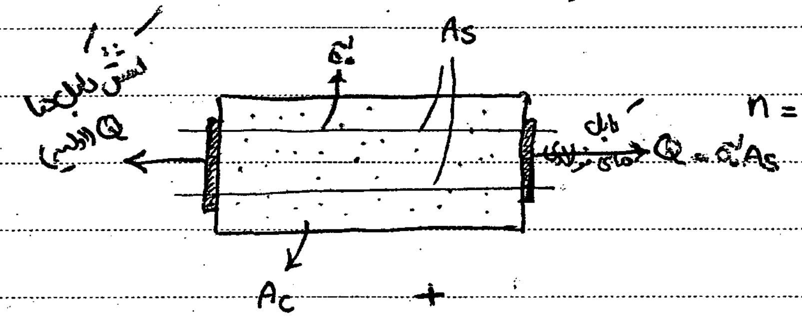
بتن



روشهای مقابله با ضعف کششی :

۱- مسلح کردن ، ۲- استفاده از شکل هندسی مناسب ، ۳- پیش تنیده کردن و پس تنیدن

اعضای قطعه پیش تنیده :

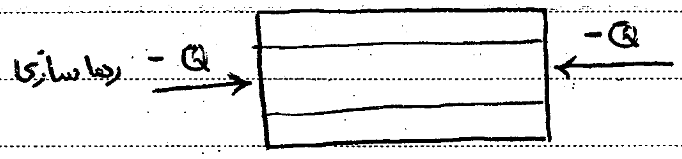


$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

$$\sigma_{c_0} = 0$$

$$\sigma_{s_0} = +\sigma_0$$

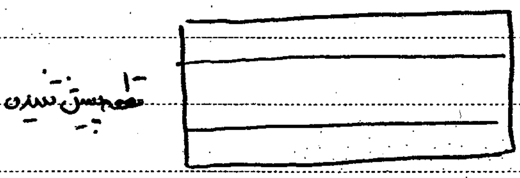
+



$$\sigma'_c = \frac{-Q}{A_{tc}} = -\frac{\sigma_0 A_s}{A_c + nA_s} = \frac{-\sigma_0}{\frac{A_c}{A_s}+n}$$

$$\sigma'_s = n\sigma'_c = \frac{-n\sigma_0}{\frac{A_c}{A_s}+n}$$

||



$$\sigma_c = \frac{-\sigma_0}{\frac{A_c}{A_s}+n}$$

مشکل کرنش تنش ← تنزیل خزش

$$\sigma_s = \sigma_0 - \frac{n\sigma_0}{\frac{A_c}{A_s}+n}$$

مثال : در ساخت یک قطعه پیش تنیده ی بتنی نسبت $\frac{A_c}{A_s} = ۱۵$ و نسبت ضرائب ارتجاعی $\frac{E_s}{E_c} = ۱۲$ است. اگر کابل ها با تنش اولیه $+۲۷۰۰ \frac{kg}{cm^2}$ کشیده شوند پس از رها سازی کابل ها چه تنشی در بتن و فولاد ایجاد می شود؟

$$\sigma_c = \frac{-\sigma_0}{\frac{A_c}{A_s}+n} = -100 \longleftarrow \sigma_c = \frac{-\sigma_0}{\frac{A_c}{A_s}+n}$$

$$\sigma_s = 1500 \longleftarrow \sigma_s = \sigma_0 - \frac{n\sigma_0}{\frac{A_c}{A_s}+n}$$

مثال: فرض کنید بتنی که در ساخت قطعه فوق بکار رفته دارای مقاومت فشاری ($\sigma_{ac}=-200$) و مقاومت کششی ($\sigma_{at}=+20$) داشته باشد

کابل‌ها را تا چه تنش σ_0 باید کشید تا مقاومت ظاهری بتن پیش تنیده آن در کشش و فشار مساوی باشد؟

بتن: فشاری $\sigma_{ac}=-200$ ، کششی $\sigma_{at}=+20$

$$\sigma_c = \frac{-\sigma_0}{\frac{A_c}{A_s}+n}$$

تنش فشاری در بتن پیش تنیده

بتن: $\sigma_{ac}=-110$ ، $\sigma_{at}=+110$

مقاومت حقیقی — تنش فشاری — مقاومت ظاهری

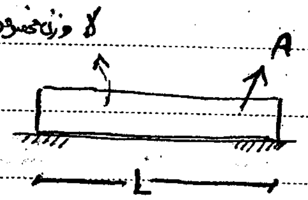
$$+20 = +110 - \frac{\sigma_0}{\frac{A_c}{A_s}+n} \rightarrow \frac{\sigma_0}{27} = 90$$

مقاومت ظاهری — مقاومت حقیقی — تنش فشاری

$$= -110 - \frac{2430}{27} = -200$$

$$\boxed{\sigma_0 = 2430}$$

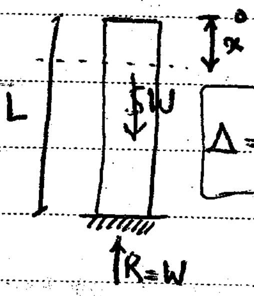
γ وزن مخصوص میله



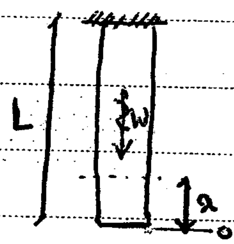
$V = AL$

$W = \gamma . V$

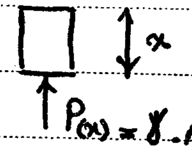
اثر نیروی وزن: میله منشوری روبرو را در نظر بگیرید:



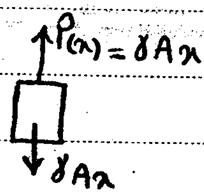
$$\boxed{\Delta = \frac{-WL}{2EA}}$$



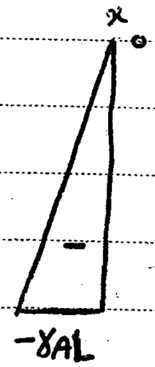
$$\boxed{\Delta = \frac{WL}{2EA}}$$



$P_{(x)} = \gamma . A . x$

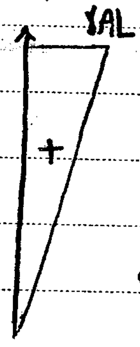


$P_{(x)} = \gamma A x$



$\sigma_{(x)} = -\gamma x$

$\varepsilon_{(x)} = \frac{-\gamma x}{E}$



$\sigma_{(x)} = +\gamma x$

$\varepsilon_{(x)} = \frac{\gamma x}{E}$

تابع تنش $\sigma_x = \left|\frac{P_{(x)}}{A}\right| = \gamma . x$

$$\Delta = \int_0^L \varepsilon_{(x)} dx = \int_0^L \frac{\gamma x}{E} dx = \frac{\gamma L^2}{2E} = \frac{WL}{2EA}$$

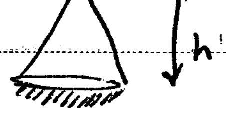
Subject:
Year. Month. Date. ( )

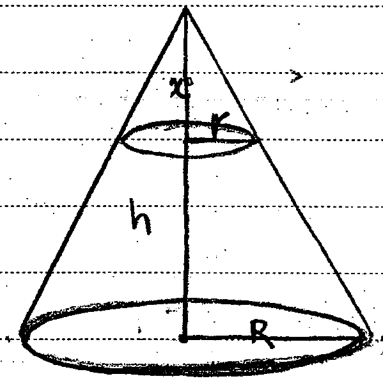
مثال: اگر وزن مخصوص آجر $1850 \frac{kg}{m^3}$ باشد و مقاومت مجاز آجرکاری $30 \frac{kg}{cm^2}$ باشد حداکثر ارتفاعی که می‌توان یک دیوار آجری را بنا کرد چقدر است؟

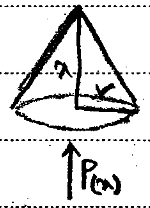
$$\sigma_x = \gamma x \qquad 30 \frac{kg}{cm^2} \times \frac{1 cm^2}{10^{-4} m^2} = 3\times10^5$$

$$3\times10^5 = 1850 \times x \longrightarrow x = 162.162162$$

مثال:
اثر وزن روی مخروط را نشان دهید و تغییر شکل مخروط؟







$$\frac{x}{h} = \frac{r}{R} \rightarrow r = \frac{R}{h} x$$

$$P_{(x)} = \gamma \times \frac{1}{3} \pi r_x^2 x$$

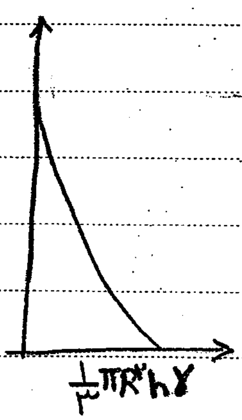
$$P_{(x)} = \frac{1}{3} \gamma \pi \frac{R^2}{h^2} x^3$$

روش کاملتر پایان جزوه قسمت ترفندها

$$\sigma = \frac{P_{(x)}}{A} = \frac{\frac{1}{3}\gamma \cancel{\pi r^2} x}{\cancel{\pi r^2}} = \frac{1}{3} \gamma x$$

$$\Delta = \int \varepsilon_{(x)} dx = \int_0^h \frac{1}{3} \gamma x \, dx = \frac{1}{3} \frac{\gamma x^2}{2E} = \boxed{\frac{\gamma h^2}{6E}}$$

نمی‌توان نیروها را در مرکز جرم شکل قرار داد و سپس تغییر شکل جسم را حساب کرد

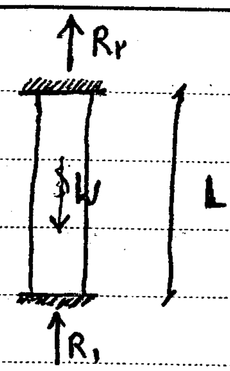


$$\Delta = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 h \gamma \, h}{\frac{1}{3} 6E \pi R^2} = \frac{Wh}{2E\pi R^2}$$

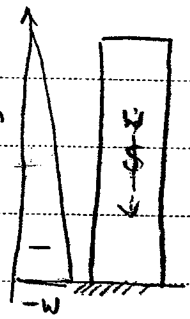
PAPCO

« حل به کمک انرژی تنش »

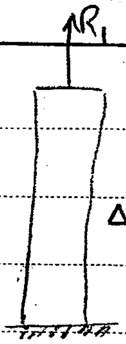
Subject:
Year. Month. Date. ( )



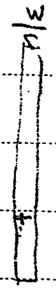
اصل superposition



$\Delta_{\circ W} = \frac{-WL}{2EA}$



$\Delta_1 = \frac{R_1 L}{EA}$



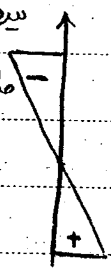
$\sum \Delta = 0 \qquad \frac{R_1}{EA} = \frac{WL}{2EA} \longrightarrow \boxed{R_1 = \frac{W}{2}}$

$P(x) = \frac{W}{2} - \gamma A x$

$\sigma_x = \frac{\gamma A L}{2A} - \gamma A x$

نیرو داخلی میله

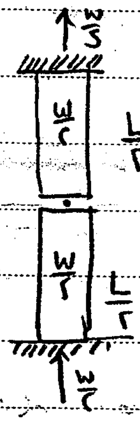
طبق اصل جمع آثار



$\sigma_x = \frac{\gamma L}{2} - \gamma x$ حل از طریق نوشتن رابطه

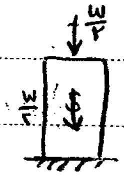
$\varepsilon_{(x)} = \frac{\sigma_x}{E}$

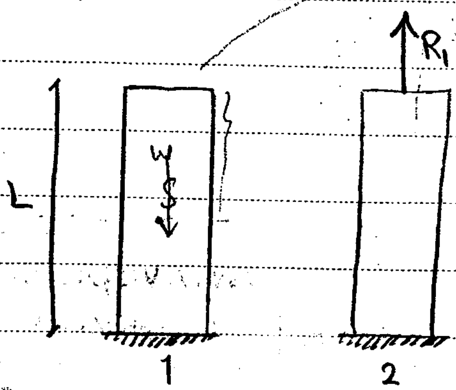
Δ_{C} وسط جابجایی $= \frac{\frac{W}{2} \times \frac{L}{2}}{2EA} = \frac{WL}{8EA}$ ، $\Delta_C = \int_0^{\frac{L}{2}} \varepsilon_{(x)} dx$



نیرو داخلی میله

تمرین Δ وسط میله از طریق اصل جمع آثار:





Δ_1 وسط $= \frac{\frac{W}{2} \times \frac{L}{2}}{2EA} + \frac{\frac{W}{2} \times \frac{L}{2}}{EA} = \frac{-3WL}{8EA}$

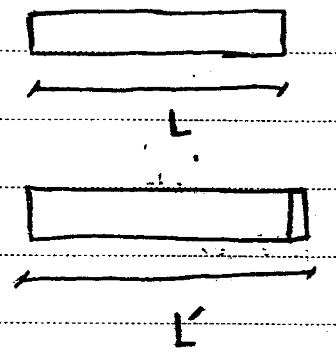
Δ_2 وسط $= \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{R_1}{EA} dx = + \frac{\frac{W}{2} \times \frac{L}{2}}{EA}$

$\Delta_{1C} + \Delta_{2C} = \frac{-WL}{8EA}$

PAPCO

تغییر حجم

اثر دما در تحلیل میله ها :

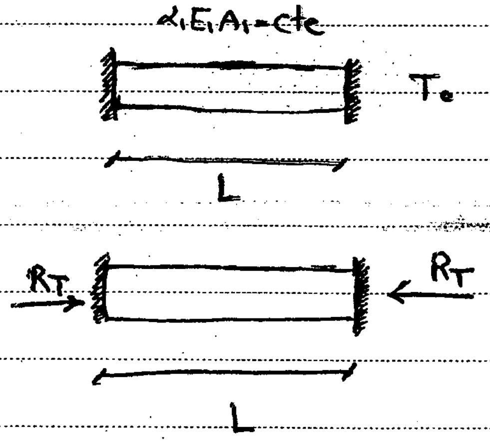


$$\Delta L = \alpha L \Delta T$$

واحد $\frac{1}{K}$

- اثر حرارت بر مسائل معین استاتیکی : تغییرشکل های ناشی از حرارت کوچک اند بنابراین نمی‌توانند موجب تغییر شکل سیستم مسائل شوند بنابراین معادلات تعادل استاتیکی از تغییر دما مستقل باقی خواهند ماند لذا کلیه واکنش های تکیه گاهی ، نیروهای داخلی و تنش های یک مسئله معین استاتیکی در مسئله تغییر دما صفر، تغییری نمی‌کند اما تغییر شکل های حرارتی و تغییرشکل های ناشی از نیروهای مسئله جمع شده و بر آنها اثر نداشت .

مسئله نامعین استاتیکی :

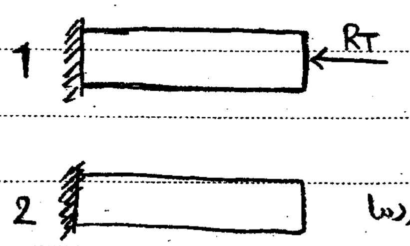


$$+\frac{R_T L}{EA} = \alpha L \Delta T$$

$$R_T = EA\alpha\Delta T$$

تنش حرارتی $\sigma_T = -E\alpha\Delta T$ $\quad \varepsilon_T = -\alpha\Delta T$

جمع آثار



$$\Delta' = -\frac{R_T L}{EA}$$

تعیین کنید برای آنکه میله‌ی $12m$ فولادی در اثر $50°$ تغییر دما دچار تنش حرارتی نشود به چه قدر درز انقطاع نیاز دارد؟

α فولاد $= 11.7 \times 10^{-6} \frac{1}{C°}$

$$11.7 \times 10^{-6} \times 50 \times 12 = 7.02 \times 10^{-3} m$$

$$\Delta L = \alpha L \Delta T \qquad \boxed{\simeq 7mm}$$

اثر دما در مسائل نامعین استاتیکی: نیروهای یک مسئله نامعین استاتیکی علاوه بر معادلات تعادل استاتیکی به روابط سازگاری تغییر شکل‌ها نیز وابسته است. تغییر شکل‌های حرارتی در کوچک هستند همچنان معادلات تعادل مسئله را نمی‌توانند تغییر دهند اما در روابط که سازگاری تغییر شکل که خود مابین تغییر شکل‌های کوچک نوشته شده است اثرگذار است و به همین علت حرارت می‌تواند در مسائل نامعین استاتیکی موجب تغییراتی در نیروها، تنش‌ها و کرنش‌ها باشد.

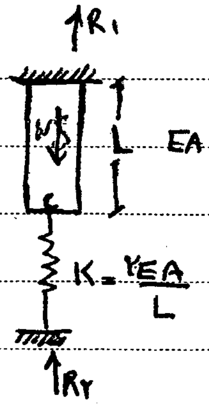
نکته: مطابق قانون هوک تنش و کرنش مستقیم با یکدیگرند بنابراین هرگاه تنش صفر باشد، کرنش نیز صفر است. به همین علت نمی‌توان از رابطه تغییر شکل نسبی $\frac{\Delta}{L}$ تغییر کرنش به عمل آورد. مثلاً یک میله معین استاتیکی در اثر تغییر دما تغییر طول $\Delta T = \alpha L \Delta T$ دارد و طول آن به L افزایش می‌یابد. مربوط به طول طبیعی میله در دمای جدید است بنابراین طول جسم ثابت نیست (در دماهای مختلف) و از تغییر طول‌های آن نمی‌توان تغییر کرنش کرد چون تنش $= 0$

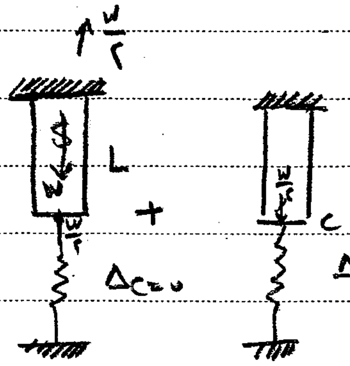
در میله نامعین استاتیکی هر چند طول آن ثابت می‌ماند ولی به دلیل تنش حرارتی $\sigma_T = E\alpha\Delta T$ کرنش حرارتی $\Delta T = -\alpha \Delta T$ محاسبه می‌شود به دلالت بر تغییر طول $\Delta T = -\alpha L \Delta T$ دارد. یعنی هر چند در واقع طول میله ثابت است اما به طول طبیعی خود در این دما که باید داشته باشد کوتاه‌تر است به همین دلیل دچار تنش و کرنش شده است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال (۱) عکس العمل‌های تکیه‌گاهی؟

$\Delta_C = ?$



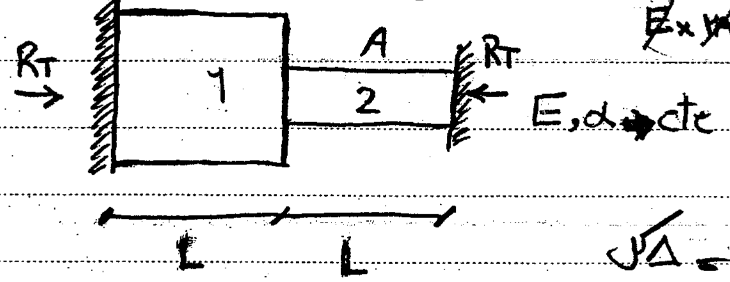


$$\Delta_C = \frac{\frac{W}{2}}{K_e} = \boxed{\frac{WL}{6EA}}$$

رو به پایین ↓

مثال: الف) مقطع 2A با اندازه ΔT گرم شود.

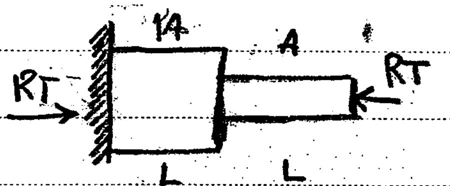
$$\Delta_{\text{فصل مشترک}} = \frac{-\frac{2}{3}\cancel{E}\alpha \cancel{A}\Delta T \times L}{\cancel{E}\times 2\cancel{A}} + L\alpha\Delta T = \boxed{\frac{2}{3}L\alpha\Delta T}$$



ب) کل میله با اندازه ΔT گرم شود.

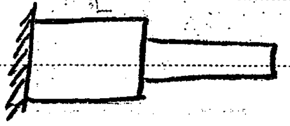
$\Delta_{\text{کل}} = 0$

(الف)



$$\Delta = \frac{-R_T L}{EA} - \frac{R_T L}{2EA} = \frac{-3R_T L}{2EA}$$

$$\sigma_1 = \frac{R_T}{2A}$$



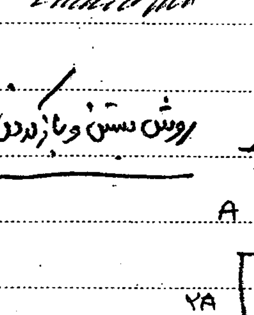
$$\Delta L = L\alpha\Delta T$$

$$\boxed{R_T = \frac{2}{3}EA\alpha\Delta T}$$

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{E\alpha\Delta T}{3}}$$

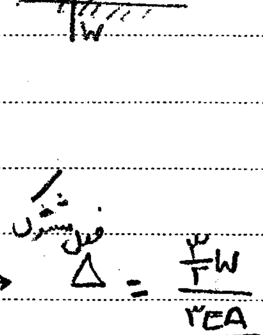
$$\boxed{\sigma_2 = \frac{2E\alpha\Delta T}{3}}$$

مثال:



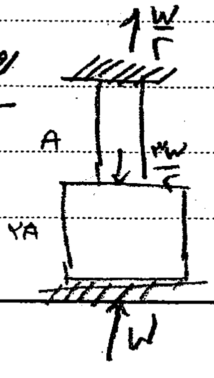
فصل مشترک

$\Delta = 0$



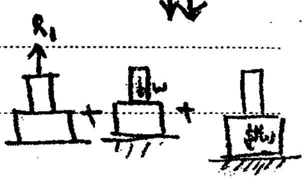
اصل جمع آثار

روش بستن و باز کردن



$$\Delta_{\text{فصل مشترک}} = \frac{\frac{3}{2}W}{\frac{3EA}{L}} = \frac{WL}{2EA}$$

* حل به روش عملی

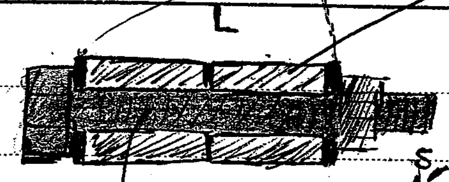


...

Subject: ونیس

Year. Month. Date. ( )

$A_p = 2\,cm^2$



$S_r = 1mm$ گام پیچ step

$A_b = 1\,cm^2$

مسئله پیچ و مهره:

$|P_b| = |P_p|$

$\sigma_a = 2000\ kgf/cm^2$

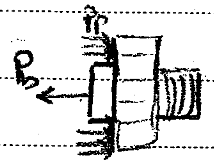
$E_s = 2\times10^6$

$\begin{cases} L - |\Delta p| \\ L + |\Delta b| - nS \end{cases} =$

طول نهایی ب پیچ و مهره در حال بسته شدن است

$$\boxed{|\Delta b| + |\Delta p| = nS}$$

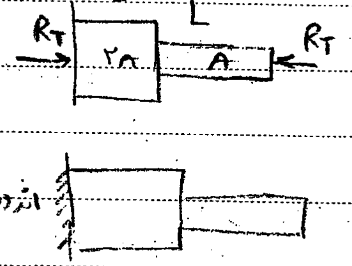
تعداد step ها



$$\begin{cases} \sigma_b = \dfrac{P_b}{A_b} \leq 2000 & P_b \leq 2000 \rightarrow \text{تعیین شده} \\ \sigma_p = \dfrac{P_p}{A_p} \leq 2000 & P_p \leq 4000 \end{cases}$$

$$nS = \frac{PL}{E}\left(\frac{1}{A_b} + \frac{1}{A_p}\right) = \frac{2000\times 20}{2\times10^6}\left[1{,}5\right] \Rightarrow n = 0{,}3\ \text{دور}$$

ب) مثال حل شده قبل



$\Delta = \dfrac{-3R_1L}{2EA}$

$\rightarrow R_T = \frac{4}{3}EA\alpha\Delta T$

اثر دما

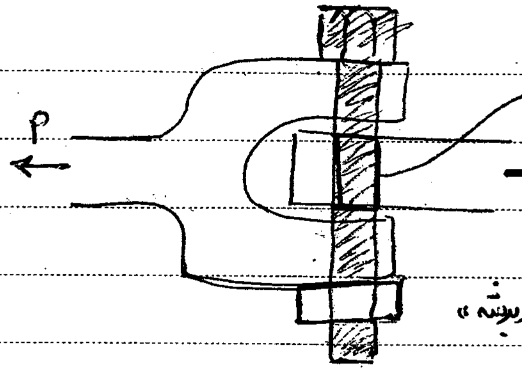
$\Delta L = 2L\alpha\Delta T$

$\sigma_1 = \frac{2}{3}E\alpha\Delta T \qquad \sigma_2 = \frac{4}{3}E\alpha\Delta T \qquad \Delta_{\text{فصل مشترک}} = \dfrac{L\alpha\Delta T}{3}$

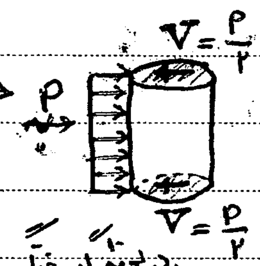
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تنش برشی:
(مماسی)



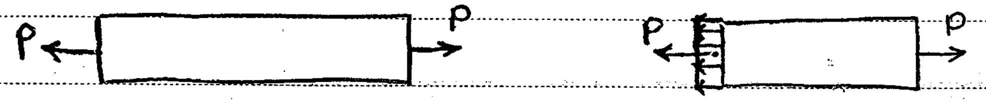
«پیچ دوبرشه»



«در لحظهٔ گسیختگی»
تنش یکنواخت در سطح پخش
می‌شود

$$\tau = \frac{V}{A}$$

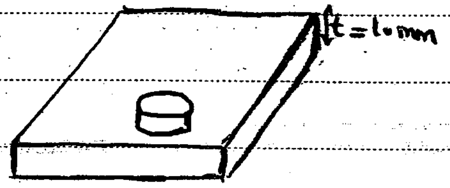
تنش قائم:



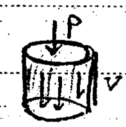
$$\sigma = \frac{P}{A}$$

مهم

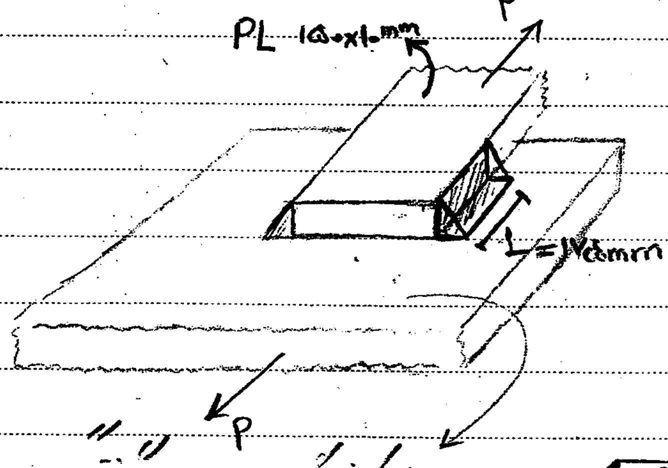
مسئله: تعیین کنید برای ایجاد سوراخی به قطر 25mm بر روی صفحه فولادی به ضخامت 10mm توسط پانچ حداقل نیروی مورد نیاز چقدر خواهد بود؟ فرض کنید تنش برشی گسیختگی این فولاد $3000\ \frac{Kg}{cm^2}$ باشد.



$$\tau_{\text{موجود}} = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi D t} = \tau_u$$



$$P = \pi D t\, \tau_u = \pi \times 2.5 \times 1 \times 3000 = 23500\ Kgf$$



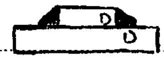
جوشکاری:

$\sigma_a = 1440\ \frac{Kg}{cm^2}$

فرض کنید تنش برشی مجاز جوش $\tau_w = 800\ \frac{Kg}{cm^2}$ باشد.

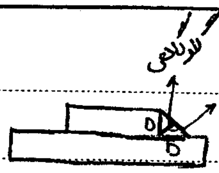
ظرفیت اتصال چقدر است.

به اندازه‌ای نیرو است که در آن گسیختگی صورت نگیرد.



PAPCO

۴-۱-۳ عادی ۴-۱-۹



$t_{min} = t_e = \frac{\sqrt{2}}{2} D$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{15\times 1} = 1440 \longrightarrow P_1 = 21600$$

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{2Lt_e} = 800 \longrightarrow \boxed{P_2 = 19800}$$

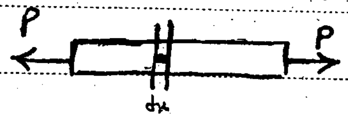
ظرفیت اتصال

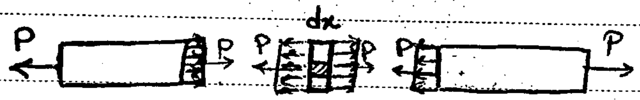
تمرین: طول جوش دوبال ورق را به صورت بهینه طوری تعیین کنید که بتوان از حداکثر ظرفیت ورق در این ورق استفاده شود؟

$$\sigma = \frac{P_1}{A} = 1440 \rightsquigarrow \frac{P_1}{15\times 1} = 1440 \longrightarrow \boxed{P_1 = 21600}$$

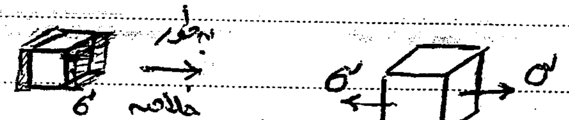
$$\tau = \frac{P_2}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1\times L} = 800 \xrightarrow{P_2 = 21600} 21600 = 800\times\sqrt{2}\,L \longrightarrow \boxed{L = 19.1}\ cm = 191\,mm$$

- انواع تنش واقعی
  - تنش نرمال (نرمال)
  - تنش مماسی (برشی)





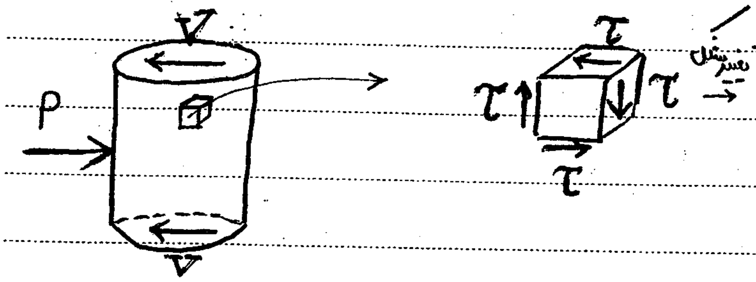
نرمال:

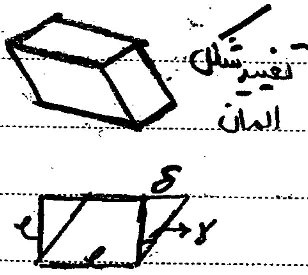


تنش نرمال

$\varepsilon = \frac{\delta}{l}$, $\sigma = E\varepsilon$ ← با تغییر (تغییر ابعاد) همراه است

برشی:

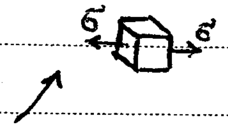




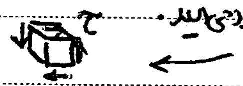
$\gamma \simeq tg\gamma = \frac{\delta}{l}$ تنش برشی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

☒ تفاوت بین تنش نرمال و مماسی

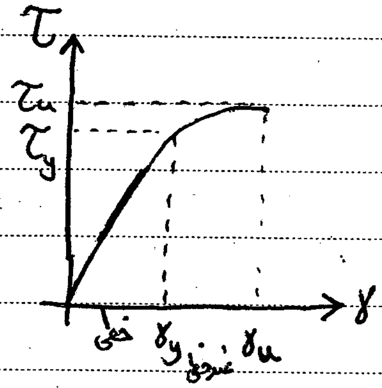


- تنش‌های نرمال در یک جزء مکعبی به‌طور کلی نشان می‌دهد که می‌تواند بر روی سطح‌های عمود بر هم (راستاهای) مقادیر متفاوت و مستقلی داشته باشند اما تنش‌های برشی بر روی سطوح عمود بر هم الزاماً به‌طور مساوی و همزمان به وجود می‌آیند.



- در اثر تنش برشی، کرنش برشی γ ایجاد می‌شود که دلالت بر تغییر زاویه دارد نه ابعاد.

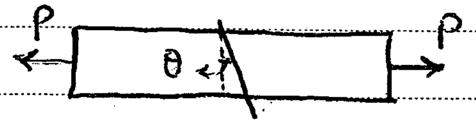
☒ قانون هوک برای تنش - کرنش برشی :

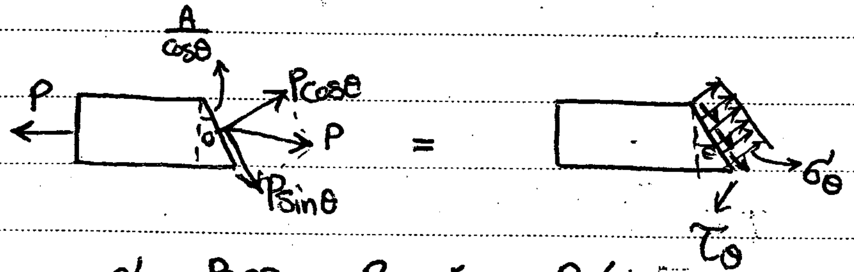


$$\tau = G\gamma < \tau_y$$

G: ضریب ارتجاعی برشی (مدول برشی)

* به‌طور کلی ← $\tau_u < \sigma_u$ ، $\tau_y < \sigma_y$ ، $G < E$





* حالت کلی‌تر جهت‌دار نشان می‌شود

$$\sigma_\theta = \frac{P\cos\theta}{\frac{A}{\cos\theta}} = \frac{P}{A}\cos^2\theta = \frac{P}{A}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)$$

$$\tau_\theta = \frac{P\sin\theta}{A/\cos\theta} = \frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta = \frac{P}{2A}\sin 2\theta$$

Subject:
Year. Month. Date. ( ) $\theta = 0$

$\boxed{\theta = 0}$ $\begin{cases} \sigma_{max} = \dfrac{P}{A} \\ \tau_{min} = 0 \end{cases}$ ، $\boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$ $\begin{cases} \tau_{max} = \dfrac{P}{2A} \\ \sigma_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{P}{2A} \end{cases}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$ $\begin{cases} \sigma_{min} = 0 \\ \tau_{min} = 0 \end{cases}$ $\theta = \frac{\pi}{2}$

☒ طبقه بندی مصالح از لحاظ داشتن مشخصات مکانیکی در کلیه جهات:

۱- ایزوتروپ: ۲- ارتوتروپ ۳- انیزوتروپ

Isotropic M. ortho tropic Aniso tropic

- طبقه بندی مواد از لحاظ داشتن مشخصات مکانیکی متفاوت در نقاط مختلف:

۱- هموژن (همگن) ۲- غیرهموژن (ناهمگن)

مثال) فرض کنیم در یک میله همگن و ایزوتروپ تنش نرمال مجاز $2000 \frac{kg}{cm^2}$ و تنش برشی مجاز $900 \frac{kg}{cm^2}$ باشد اگر مساحت

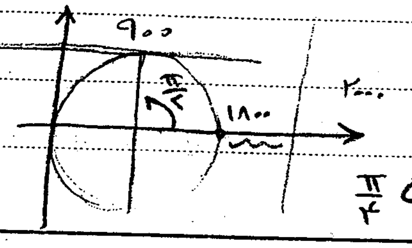
مقطع میله $10 cm^2$ باشد این میله در اثر چه نیرویی و تحت چه زاویه‌ای گسیخته خواهد شد؟

$\theta = 0 \rightarrow \sigma_{max} = \frac{P_1}{A} \rightarrow P_1 = 20000$

تحت زاویه $45°$ گسیخته می‌شود

$\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \tau_{max} = \frac{P_2}{2A} \rightarrow P_2 = 18000$ ✓

تنش تک محوره

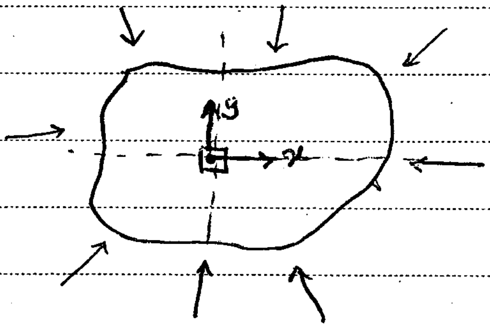


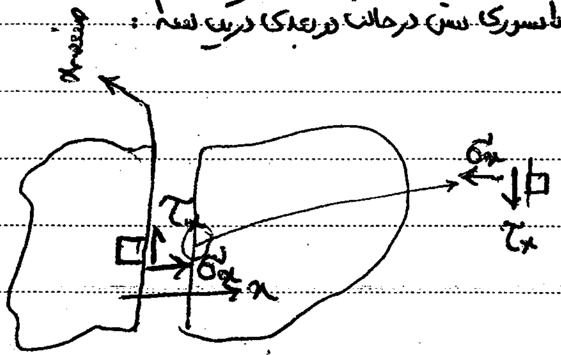
دایره مور زودتر به τ_{max} می‌رسد پس گسیختگی در سطح $\frac{\pi}{4}$ است.

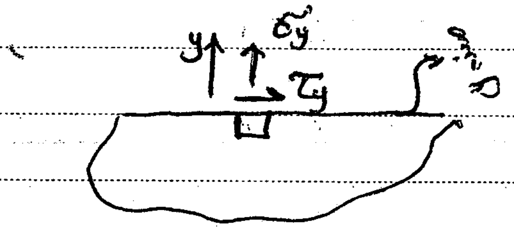
PAPCO

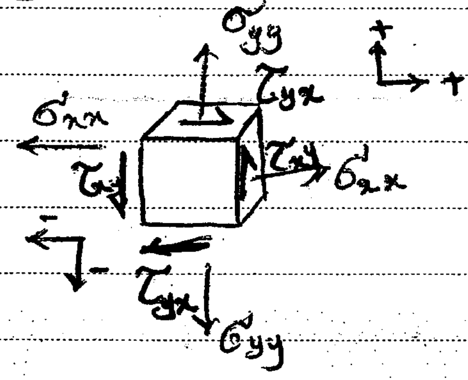
تنش کمیتی است تانسوری (Tensor) زیرا علاوه بر داشتن مقدار و جهت کیفیت آن به صفحه‌ی اندازه‌گیری نیز وابسته است.

نمایش تانسوری تنش در حالت دوبعدی در یک نقطه:









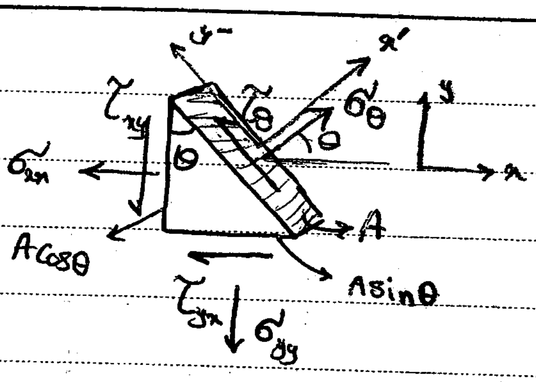
τ_{xy}

صفحه ← راستا

نمایش تانسوری تنش دوبعدی در یک نقطه ←
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}_{۲\times۲}$$

تانسور تنش دو محوره را می‌توان توسط یک ماتریس ۲x۲ متقارن نمایش داد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$\sum F_{x'}=0 \rightarrow \sigma_\theta \cdot A - \sigma_{xx}(A\cos\theta)\cos\theta - \tau_{xy}(A\cos\theta)\sin\theta - \tau_{yx} A\sin\theta\cos\theta - \sigma_{yy} A\sin\theta\sin\theta = 0$$

$$\sum F_{y'}=0 \rightarrow \ldots$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{-\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

تمرین: معادلات را تعیین کنید و به کمک مشتق‌گیری $\sigma_{max,min}$ و τ_{max} و θ را بیابید؟

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{yy}\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \\ \tau_\theta = \sigma_{yy}\sin\theta\cos\theta - \sigma_{xx}\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

ساده‌تر

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\times\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \tau_\theta = -\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

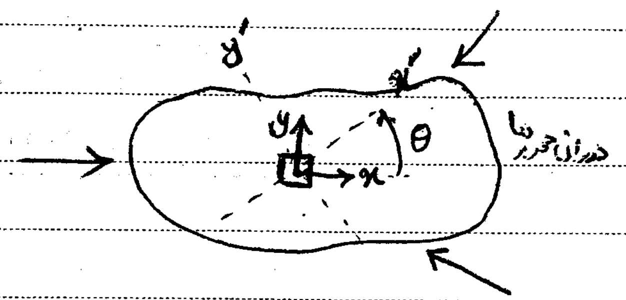
$$\boxed{\sigma_\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta}$$

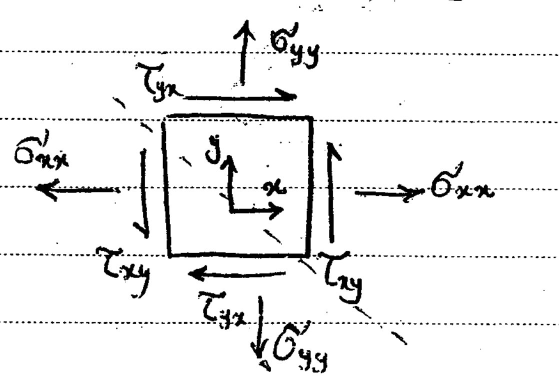
$$\boxed{\tau_\theta = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تنش در یک نقطه کمیتی است تانسوری :





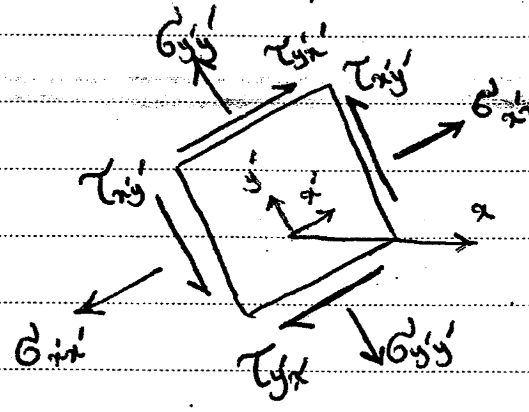
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$ تانسور تنش دو بعدی

با توجه به مبحث قبل :

$$\text{I} \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta = \sigma_{x'x'}$$

$$\tau_\theta = -\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta = \tau_{x'y'} = \tau_{(\theta+\frac{\pi}{2})} = \tau_{y'x'}$$

$$\text{II} \quad \sigma_{(\theta+\frac{\pi}{2})} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta = \sigma_{y'y'}$$



المان θ درجه چرخیده است.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} \\ & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

ناورداهای تنش :

$$\sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \text{constant}$$

$$\boxed{\sigma_{ave} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} = cte}$$ ⟵ (1) ناوردای اول تنش ،

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} \sigma_{x'x'} - \sigma_{ave} = \dfrac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \tau_{x'y'} = -\dfrac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

معادلات پارامتری دایره مور

$$(\sigma_{x'x'} - \sigma_{ave})^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$$

۲ → نامتغیر دوم تنش

$$\boxed{R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = cte}$$

$$(\underbrace{\sigma_{xx}}_{X} - \sigma_{ave})^2 + \underbrace{\tau_{xy}}_{Y}{}^2 = R^2 \rightarrow$$ معادله دایره مور

«روش ترسیمی مور برای تحلیل تنش در یک نقطه» در حالت مسطح

✓ دایره مور در دستگاه مختصاتی رسم می‌شود که محور افقی آن تنش‌های نرمال و محور عمودی آن نشان دهنده تنش‌های برشی است.

مرکز این دایره σ_{ave} و شعاع آن R (دو نامتغیر تنش) مستقل به جهت اندازه‌گیری تنش می‌باشند.

✓ هر نقطه واقع بر محیط این دایره دارای مختصات σ و τ بوده که به ترتیب مقادیر تنش نرمال و تنش برشی موجود در یکی از صفحات است

که در محل اندازه‌گیری تنش مشاهده می‌شود.

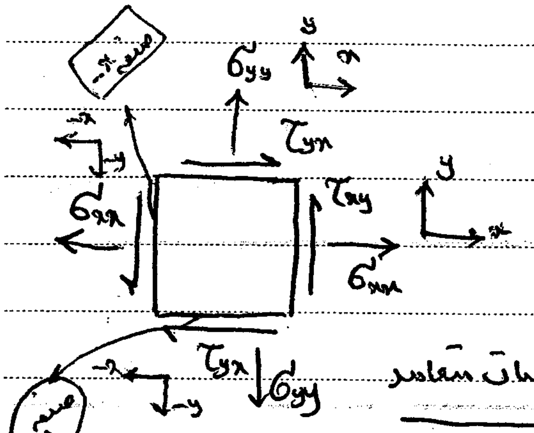
✓ مطابق معادلات پارامتری دایره مور دو صفحه در محل اندازه‌گیری تنش بردارهای نرمال آنها با یکدیگر زاویه‌ی θ دارند بر روی دایره مور

توسط دو نقطه که شعاع حامل آنها با یکدیگر زاویه 2θ خواهند داشت، نمایش داده خواهند شد.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دوره‌ی تناوب معادلات پارامتری دایره مور π بوده، بنابراین هر دوران یک صفحه به نقطه مورد نظر به اندازه π دوران کند بر روی دایره مور 360° دوران کرده و همان مقادیر σ و τ بدست می‌آید. به این مفهوم که دو صفحه موازی یک تنش دارند.



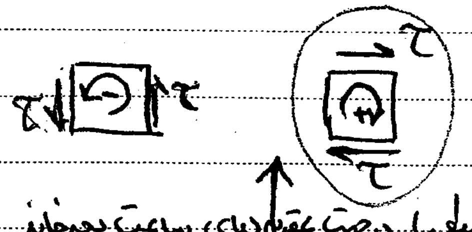
قرارداد علامت تنش‌ها:

۱- قرارداد علامت تانسوری:

تنش بر روی یک سطح هنگامی مثبت محسوب می‌شود که هم جهت با محورهای مختصات متعامد راستای آن یک بردار نرمال معرفی کننده سطح یکی از آن‌هاست. بنابراین بر روی صفحات +x و +y تنش‌های نرمال و برشی هنگامی مثبت‌اند که هم جهت با محورهای مختصات +x و +y باشند و بر روی صفحات -x و -y تنش‌ها هنگامی مثبت‌اند که هم جهت با محورهای -x و -y باشند.

۲- قرارداد علامت تنش‌ها در دایره مور:

همان قرارداد علامت نیروهای داخلی تنش‌هاست یعنی تنش نرمال بر روی یک سطح هنگامی + در نظر گرفته می‌شود که کششی باشد و تنش‌های نرمال فشاری منفی محسوب می‌شود.



تنش برشی بر روی یک سطح هنگامی مثبت محسوب می‌شود که المان متصل به آن سطح را در جهت عقربه‌های ساعت بچرخاند و بالعکس تنش‌های برشی که موجب دوران پادساعتگرد المان شوند منفی‌اند.

« مزیت این قرارداد »

۱- تنش های برشی بزرگتری در صفحات عمود بر هم قرینه خواهند بود، بنابراین بزرگی دایره مور توسط دو نقطه واقع بر سر یک قطر از دایره حاصل نمایش داده میشوند.

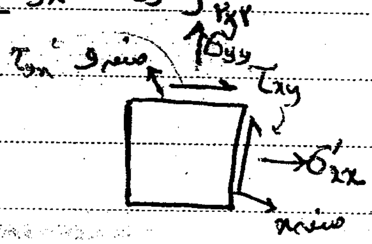
۲- هرگاه صفحه اندازه گیری تنش به جهتی دوران کند شعاع حامل آن نیز بر روی دایره مور در همان جهت دوران خواهد داشت.

۳- این قرارداد با قرارداد علامت نیروهای داخلی تیرها که در مهندسی عمران بسیار پرکاربرد است همخوان است.

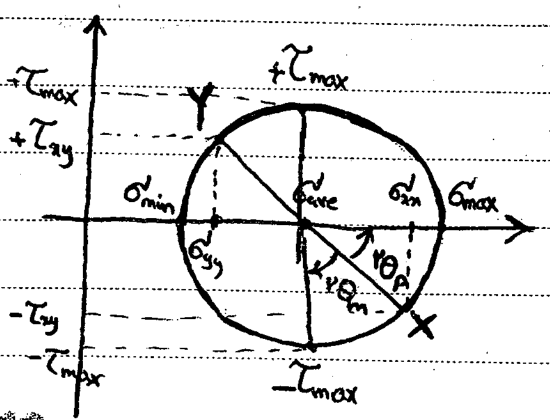
« رسم دایره مور »

فرض کنید وضعیت تنش در یک نقطه توسط ماتریس $\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}_{2\times2}$ نشان داده شده است.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ & \sigma_{yy} \end{bmatrix}_{2\times2} \xrightarrow[\text{علامت تانسوری}]{\text{رسم}}$$

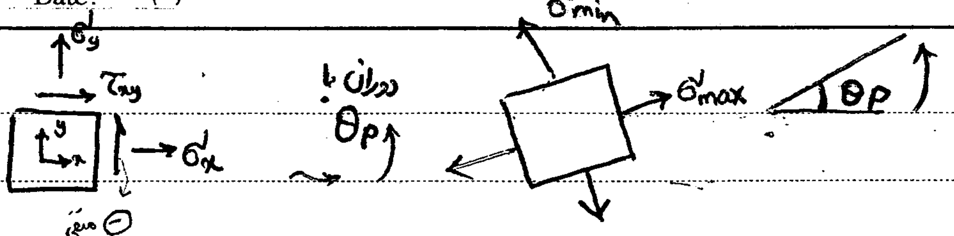


$$\Rightarrow \quad X = \left| \begin{array}{l} \sigma = +\sigma_{xx} \\ \tau = -\tau_{xy} \end{array} \right. \qquad Y = \left| \begin{array}{l} \sigma = +\sigma_{yy} \\ \tau = +\tau_{xy} \end{array} \right.$$



$$\boxed{\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



"تنش های اصلی"

وضعیت اصلی تنش: از آنجا که مرکز دایره مور همواره بر روی محور افقی واقع است دایره مور این محور را در دو نقطه قطع خواهد کرد. به این ترتیب نقاطی از دایره مور یافت خواهد شد که نقاط انتهای آن در سطح عمود بر هم را نشان می دهند که تنش نرمال آن ها σ_{max} و σ_{min} بوده و تنش برشی این دو سطح عمود بر هم صفر است.

متناظر با این نقاط المانی را می توان در حول اندازه گیری تنش تعریف کرد که نمایندگی وضعیت اصلی تنش را دارد. تنش های σ_{max} و σ_{min} بر روی سطوح این المان تنش های اصلی نامیده می شوند که به ترتیب برابرند با

$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R = \sigma_1 \qquad \sigma_{min} = \sigma_{ave} - R = \sigma_2$$

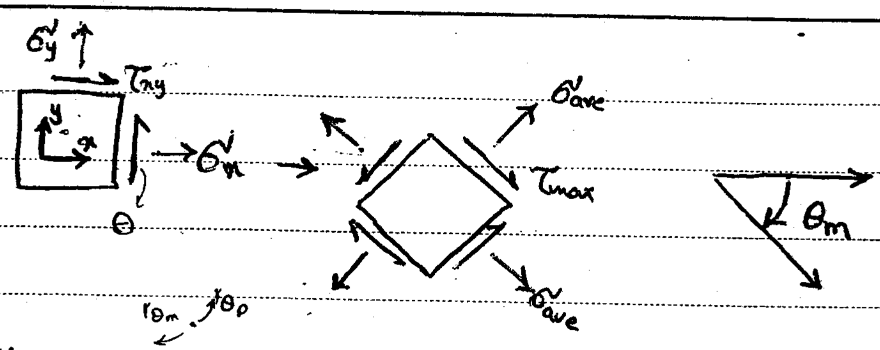
راستاهای این تنش ها نیز به راستاهای اصلی موسوم هستند.

$$tg\, 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)} \rightarrow \theta_p = \frac{1}{2} tg^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{max} & 0 \\ 0 & \sigma_{min} \end{bmatrix}$$

نمایش تانسوری تنش در این نقطه را به صورت ماتریس قطری روبرو نمایش می دهیم

Eigen Value (مقادیر ویژه ماتریس)



$$2\theta_p + 2\theta_m = \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta_m = \frac{\pi}{4} - \theta_p$$

صفحه‌های عمودی دایره مور نمایانگر دو سطح عمود برهم با المان مربع شکلی را دارد که تنش برشی کلیه سطوح آن برابر با τ_{max} شده در حالی که تنش نرمال آن‌ها صفر نبوده بلکه مساوی هم و برابر با σ_{ave} است. تانسور این وضعیت تنش را می‌توان به صورت ماتریس ۲×۲ از دو طرف متقارن نشان داد که عملاً در آن فقط دو عدد σ_{ave} و $\tau_{max}=R$ همان دو پارامتر تنش خواهند بود.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ave} & \tau_{max}=R \\ \tau_{max}=R & \sigma_{ave} \end{bmatrix}$$

در صفحه‌ای که تنش برشی ماکسیمم است، تنش نرمال برابر تنش میانگین (σ_{ave}) است.

از آنجا که راستای وضعیت تنش برشی حداکثر با راستاهای اصلی تنش زاویه ۴۵ درجه دارد بنابراین مقطع‌های المان‌های مربع شکلی که در وضعیت اصلی تنش است، صفحاتی است که مقدار تنش‌های نرمال و برشی آن‌ها σ_{ave} و τ_{max} است.

مقطع‌های المان مربع شکلی که در وضعیت تنش برشی حداکثر قرار دارد صفحات اصلی تنش محسوب شده مقدار $\tau=0$ و تنش‌های نرمال آن‌ها به ترتیب σ_{max} و σ_{min} خواهد بود.

Subject: ۵-۱-۱ ۵-۱-۲ ۵-۵-۳ ۵-۵-۴ ۵-۶-۱

Year. Month. Date. ( ) ۵-۷-۱

مثال: وضعیت تنش در یک نقطه از جسمی مسطح توسط تانسور $\begin{bmatrix} 50 & 40 \\ 40 & -10 \end{bmatrix}$ نشان داده شده است.

تنش‌های اصلی و راستاهای آن‌ها؟ تنش برشی حداکثر و راستای آن؟ و تنش نرمالی که روی صفحه‌ی τ_{max} قرار دارد؟ در حالات فوق وضعیت المان‌ها را بر روی شکل نشان دهید.

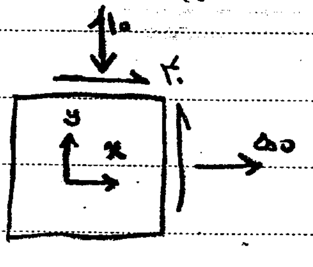
$$\begin{cases} \sigma_{xx} = +50\ MPa \\ \sigma_{yy} = -10\ MPa \\ \tau_{xy} = +40\ MPa \end{cases}$$

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 20\ MPa$$

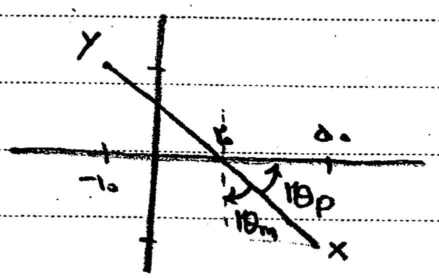
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 50\ MPa$$

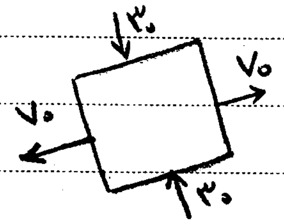
تنش‌های اصلی →
$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{ave} + R = 70\ MPa \\ \sigma_2 = \sigma_{ave} - R = -30\ MPa \end{cases}$$

$$\theta_p = \frac{1}{2} tg^{-1}\left(\frac{2 \times 40}{60}\right) = 26,56$$



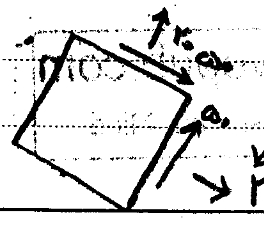
$$\begin{cases} X = \left| \begin{matrix} 50 \\ -40 \end{matrix} \right. \\ Y = \left| \begin{matrix} -10 \\ 40 \end{matrix} \right. \end{cases}$$





$\theta_p = 26,56$

$$\tau_{max} = R = 50\ MPa$$



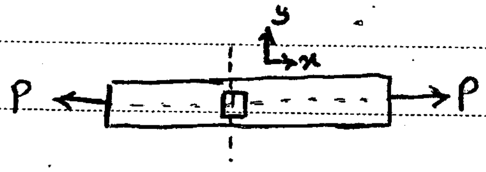
$\theta_m = 18,44$

$$\theta_m = 45 - 26,56 = \boxed{18,44}$$

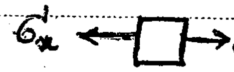
چند تبدیل تنش مهم:

۱- تنش تک محوره:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\sigma_{yy} = 0 = \tau_{xy}$$



$$\sigma_{xx} = +\frac{P}{A}$$

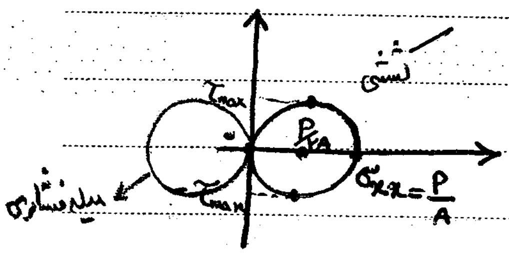
$$\begin{cases} \sigma_{ave} = \dfrac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} = \dfrac{P}{2A} \\ R = \dfrac{P}{2A} \end{cases}$$

$$\frac{P}{2A} = R = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x}{2}$$

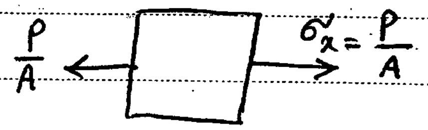
$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R = \sigma_{xx}$$

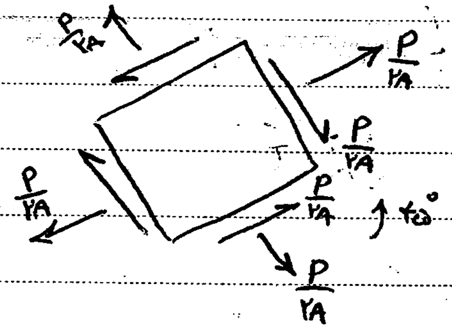
$$\sigma_{min} = \sigma_{ave} - R = 0$$

$$tg(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} = 0 \rightarrow \boxed{\theta_p = 0}$$



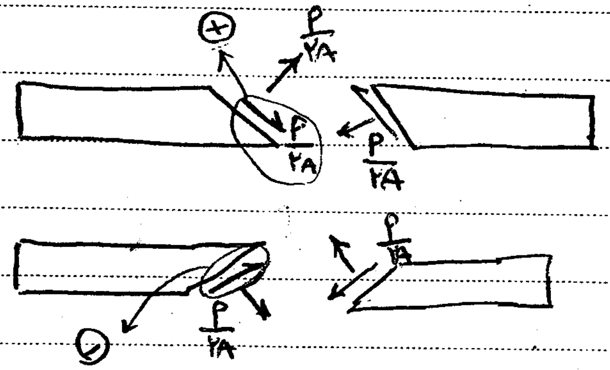
$$\boxed{\tau_{max} = \frac{\sigma_{max}}{2}} = R = \sigma_{ave}$$





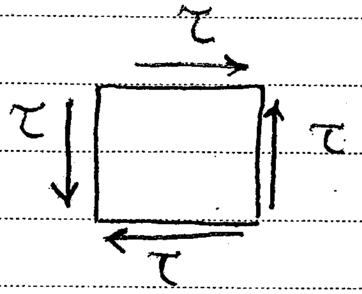
$$\begin{bmatrix} \frac{P}{2A} & -\frac{P}{2A} \\ -\frac{P}{2A} & \frac{P}{2A} \end{bmatrix}$$

برش

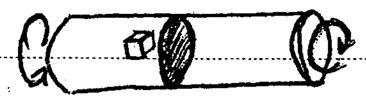


Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲- تنش برشی خالص :



$\sigma_x = \sigma_y = 0$



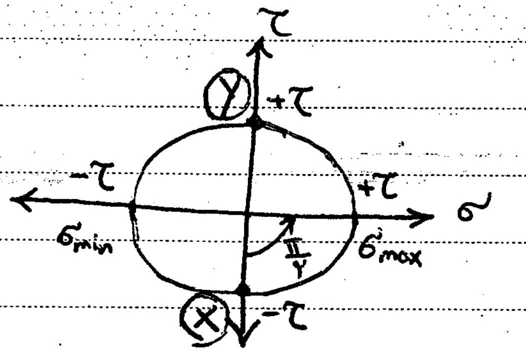
میله تحت پیچش

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 0 \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \tau$$

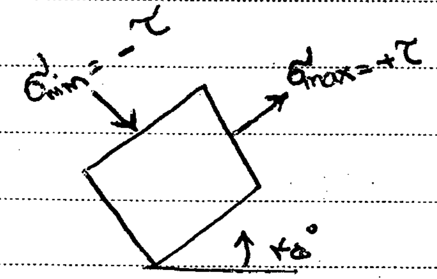
$$\sigma_{max} = +\tau \qquad \sigma_{min} = -\tau \qquad \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix}$$

$$tg\, 2\theta_P = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \infty \longrightarrow \theta_P = \frac{\pi}{4}$$

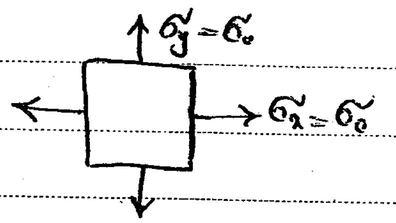
$$X \left| \begin{matrix} \sigma = 0 \\ \tau = -\tau \end{matrix} \right. \qquad Y \left| \begin{matrix} \sigma = 0 \\ \tau = +\tau \end{matrix} \right.$$



سطح المنتجی را حدود دوهای تنشی و فشاری و برشی مطالعه تعیین می‌کند اما استدلال تنش مبتنی دایره مور است .

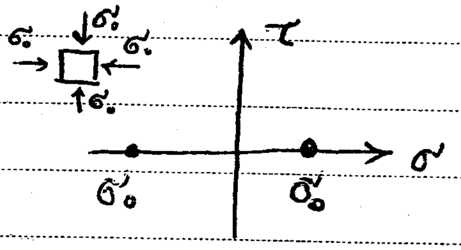


۳- تنش هیدروستاتیک :



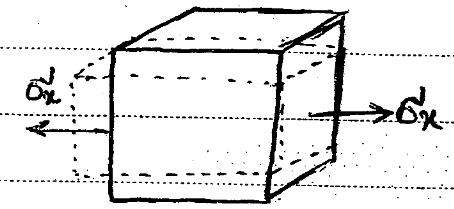
هیدرواستاتیک کششی

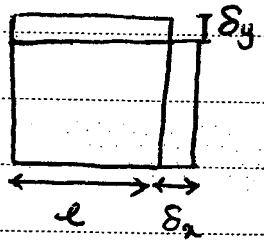
$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_0=\sigma_{ave}$ $\tau_{xy}=0$ $R=0$



$$\begin{bmatrix}\sigma_0 & 0\\ 0 & \sigma_0\end{bmatrix}$$

اثر پواسن :





کرنش طولی = $\varepsilon_x=\frac{\delta_x}{l}$ کرنش جانبی = $\frac{\delta_y}{l}=\varepsilon_y$

" = $\frac{\delta_z}{l}=\varepsilon_z$

کرنش جانبی $\propto$ $-$(کرنش طولی)

ضریب پواسن ν (نو) یا μ = $\left|\frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}}\right|$ $0.25<\nu_{\text{فلزات}}<0.35$

$\nu_s=0.3$ ، $0.1<\nu_c<0.2$ ، $\nu_{\text{لاستیک}}\approx 0.45$

به طور کلی $\rightarrow$ $0<\nu<0.5$

Subject:

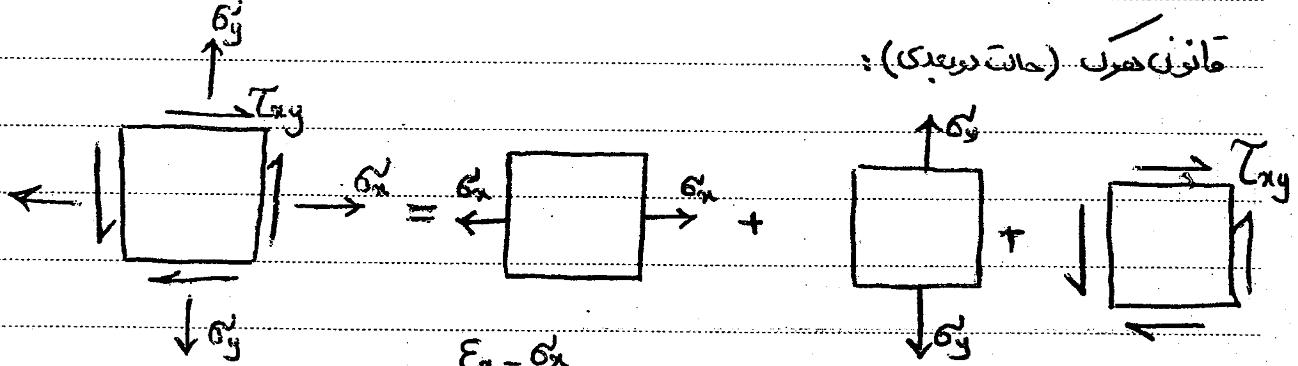
Year. Month. Date. ( )

برای مصالح همگن و ایزوتروپ

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z$$

$$\nu = \left|\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right| = \left|\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right| \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x$$

قانون هوک (حالت دو بعدی):



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_x = 0$$

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = \nu\frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_y = 0$$

$$\gamma_{xy} = 0 \qquad \gamma_{xy} = 0 \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

طبق اصل سوپرپوزیشن ←

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_y = +\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

دمای ثابت

تعریف قانون هوک را براساس کرنش ها بیان کنید.

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases}$$

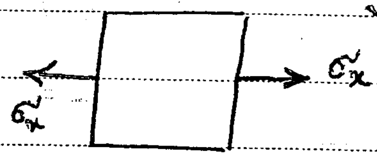
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0\\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0\\ 0 & 0 & G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}E\\ \nu\\ G\end{matrix}\right\}$$ * مشخصات مکانیکی جامد

$$[\sigma]=[E]\,[\varepsilon]$$

مثال) تنش تک محوره :

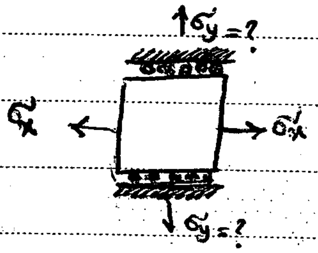


$\sigma_y=\tau_{xy}=0$

کرنش تک محوره نخواهد ماند

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}\qquad \varepsilon_y=-\nu\frac{\sigma_x}{E}\qquad \gamma_{xy}=0$$

مثال) کرنش تک محوره :



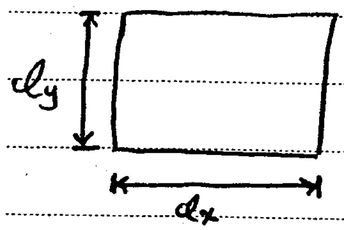
$\varepsilon_y=\gamma_{xy}=0$

تنش تک محوره نخواهد ماند

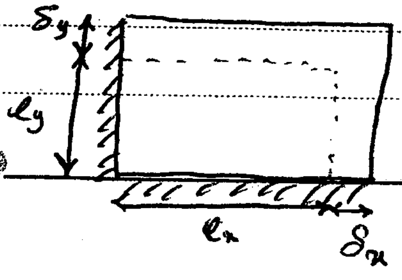
$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+0)\longrightarrow \varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}(1-\nu^2)\longrightarrow \varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{\frac{E}{1-\nu^2}}$$

$$\sigma_y=+\nu\sigma_x$$

اثر حرارت (حالت دو بعدی - صفحه‌ای) :



T_0



$T=T_0+\Delta T$

$$\delta_x=\alpha l_x\,\Delta T$$

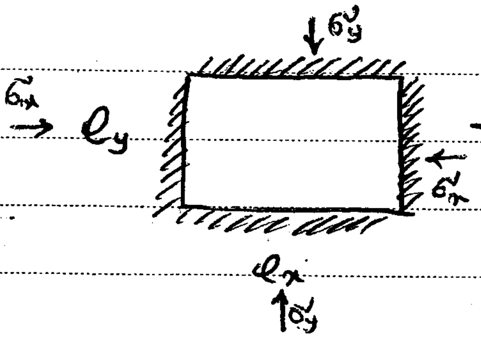
$$\delta_y=\alpha l_y\,\Delta T$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تنش دو محوره حرارتی ، (مثال)



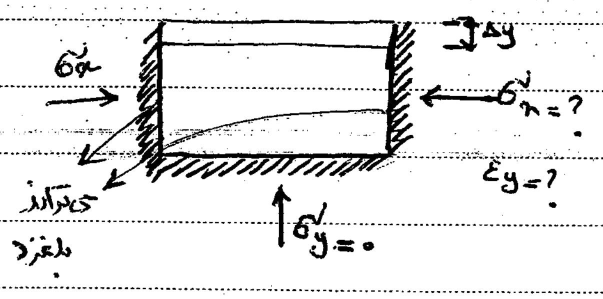
$$\varepsilon_x = -\frac{\delta_x}{l} = -\alpha\Delta T \qquad \varepsilon_y = -\frac{\delta_y}{l} = -\alpha\Delta T$$ ← کرنشهای حرارتی

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E(-\alpha\Delta T)}{1-\nu^2}(1+\nu) = \boxed{-\frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu}}$$ تنش های حرارتی

(مثال)



$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{-\delta_x}{l} = -\alpha\Delta T \\ \sigma_y = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_y = 0 \rightarrow \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = 0 \Rightarrow \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$$

$$\varepsilon_y = +\nu\alpha\Delta T$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(-\alpha\Delta T + \nu^2\alpha\Delta T\right) = -E\alpha\Delta T$$ تنش حرارتی تک محوره

مثل بعمیله

$$\Delta y = \delta_y + \varepsilon_y l_y$$

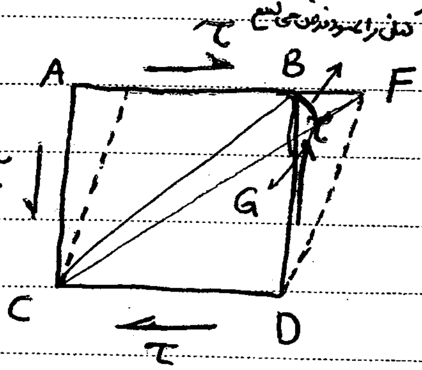
$$= \alpha l_y \Delta T + \nu\alpha\Delta T l_y = \alpha l_y \Delta T(1+\nu)$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

«رابطه‌ی بین مشخصات مکانیکی یک جامد» $[E ، G ، \nu]$



$$\varepsilon_{BC}^{\text{قطر}} = \frac{GF}{BC} = \frac{BF\cos(45-\frac{\gamma}{2})}{\frac{BD}{\cos 45^\circ}}$$

$$\varepsilon_{\text{قطر}} = \frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{2G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

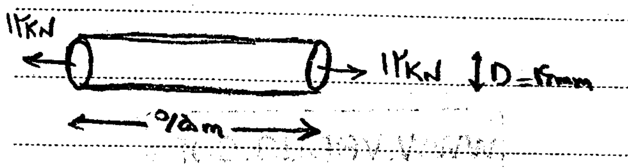
$$\varepsilon_{\text{قطر}} = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} = \frac{+\tau}{E} - \nu\frac{(-\tau)}{E} = \frac{\tau}{E}(1+\nu)$$

مثال)

$$\begin{cases} E = ۲,۱\times ۱۰^{۶} \\ \nu = ۰,۳ \end{cases} \rightarrow G = ? = ۰,۸۰۶\times ۱۰^{۶}$$

$$\boxed{\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}} \leftarrow 0 < \nu < 0.5$$

مثال) میله‌ای با مقطع دایره به قطر $D=16mm$ و طول $L=50cm$ از مصالحی ناشناخته را در آزمایش کشش تحت نیروی $P=12KN$ قرار داده و مشخص شده این میله دچار افزایش طولی معادل $+0.3mm$ و کاهش قطری برابر با $0.0024mm$ شده است مشخصات مکانیکی مصالح سازنده میله را بیابید.



PAPCO

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12\times10^{3}}{\pi\times8^{2}\times10^{-6}} = 5.97\times10^{7}\ \frac{N}{m^2}$$

$$\varepsilon_x = \frac{0.3\times10^{-3}}{0.5} = +6\times10^{-4} \qquad \varepsilon_y = \frac{-0.0024\times10^{-3}}{16\times10^{-3}} = -1.5\times10^{-4}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \boxed{0.25}$$

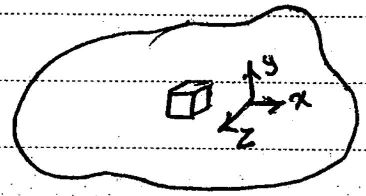
تک محوره

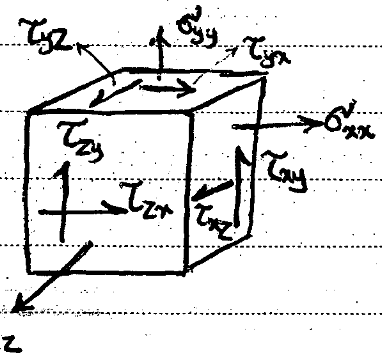
$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = 9.95\times10^{10}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \boxed{3.98\times10^{10}}$$

«پایان میان ترم»

تنش حالت کلی (سه بعدی - سه محوره - واقعی):

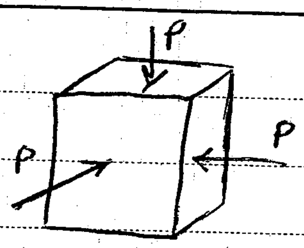




$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{صفحه } x \\ \rightarrow \text{صفحه } y \\ \rightarrow \text{صفحه } z \end{array} \end{array}$$

تانسور سه محوره

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$



$e \propto P$

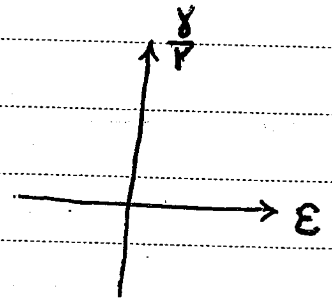
مدول بالک : سختی در برابر تراکم

$Ke = P$ ← مدول بالک

$$e = \frac{P}{K} = \frac{1-2\nu}{E}(3P) \rightarrow K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$ مدول بالک

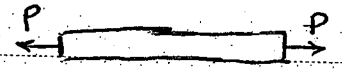
$\nu = 0.5 \rightarrow K = \infty$ تراکم ناپذیر

دایره موهر کرنش →

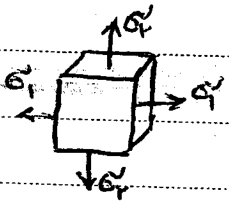


[Von_Mises] معیار تسلیم

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} = \sigma_{yp}$$



Von-Mises معیار تسلیم
حالت دوبعدی →



$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

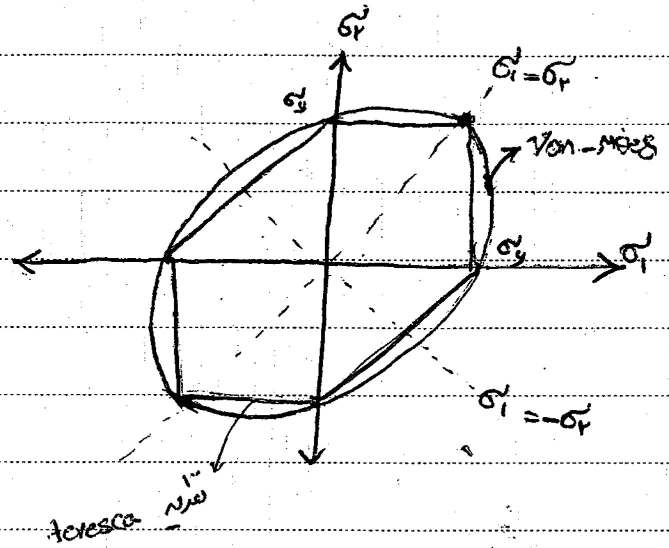
$\sigma_2 =$ 〃 $-$ 〃

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2 = \sigma_y^2$$

$$x^2+y^2-xy = \sigma_y^2$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

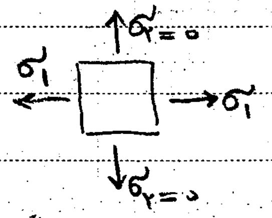


$$\sigma_y = \sqrt{3}\,\tau_y$$

$$\tau_y = 0.577\sigma_y$$

براساس معیار تسلیم Von-misses چه معیاری بین تنش برشی و تنش تسلیم تک محوره قرار دارد؟

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$$

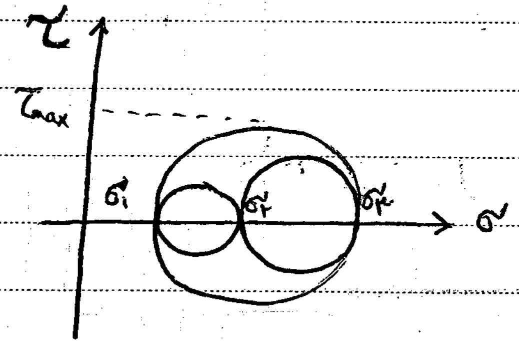


$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_1^2 + 0} = \sigma_1 \longrightarrow \boxed{\sigma_y = \sigma_1}$$

$$\sigma_y = \sqrt{3}\,\tau_y \rightarrow \tau_y = 0.577\sigma_y = 0.577\sigma_1 = \boxed{0.577\sigma_x}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left((\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right)} = \sigma_{yp}$$

معیار تسلیم [Von - Mises]

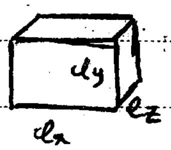


قانون تعمیم یافته هوک حالت کلی (سه بعدی - سه محوره):

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\sigma_{xx}}{E} - \nu\dfrac{\sigma_{yy}}{E} - \nu\dfrac{\sigma_{zz}}{E} \\ \varepsilon_{yy} = -\nu\dfrac{\sigma_{xx}}{E} + \dfrac{\sigma_{yy}}{E} - \nu\dfrac{\sigma_{zz}}{E} \\ \varepsilon_{zz} = -\nu\dfrac{\sigma_{xx}}{E} - \nu\dfrac{\sigma_{yy}}{E} + \dfrac{\sigma_{zz}}{E} \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}$$

« مصالح ایزوتروپ و همگن در راستای ~~...~~ کشسانی »

$$\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz} = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = e$$ کرنش حجمی



$$V = l_x \cdot l_y \cdot l_z \qquad V' = l'_x \cdot l'_y \cdot l'_z$$

$$l'_x = l_x + \delta_x = l_x + l_x\varepsilon_x = (1+\varepsilon_x)l_x$$

از توان‌های ۲ و ۳ ε

$$\Rightarrow V' = V(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) = V(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z+\dots)$$

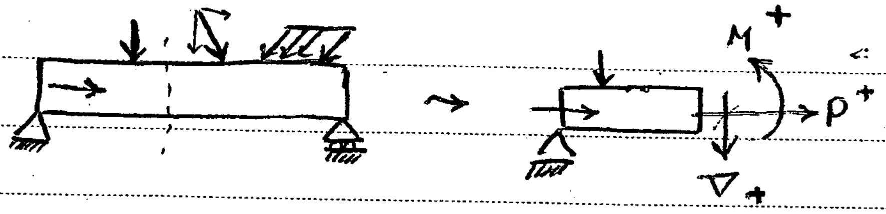
$$V' = V + Ve \rightarrow \Delta V = Ve \qquad \frac{\Delta V}{V} = e = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

ادامه در برگه‌ی بعد

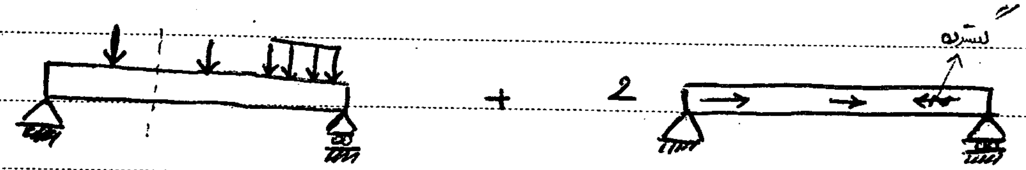
Subject: «برش و لنگر تیرها»

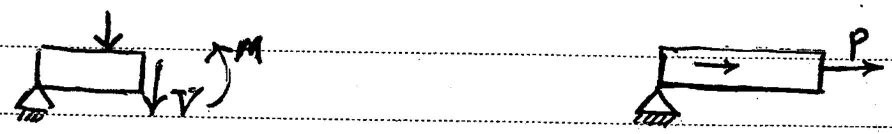
تذکر: میله‌هایی که تحت تأثیر نیروهای عمود بر محورش قرار دارد را تیر نامند.

Year. Month. Date. ( )



اصل جمع آثار:

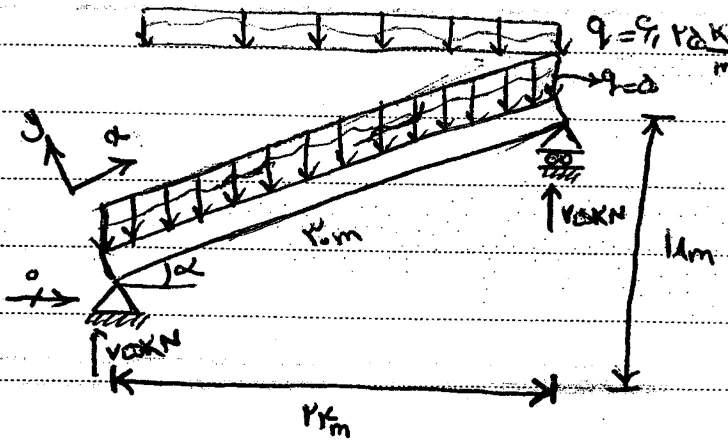




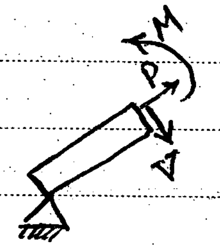
$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \qquad \sum F_x = 0$$

نیروهای عمودی در تیرها فقط برش و خمش ایجاد کند.

مثال



* برش روی تیر مایل



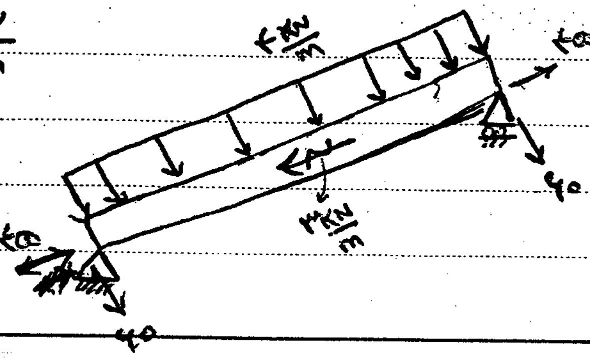
$$\text{کل بار} = 6.25 \times 24 = 150\ kN$$

$$\text{شدت بار روی تیر} = \frac{150}{30} = 5\ \frac{kN}{m} = q' = q\cos\alpha$$

$$q_y = q'\cos\alpha = q\cos^2\alpha$$

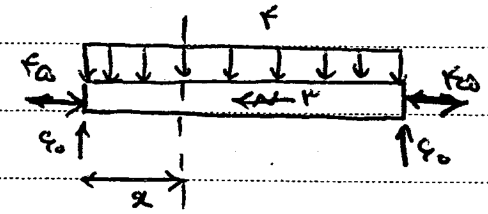
$$q_x = q'\sin\alpha = q\cos\alpha\sin\alpha$$

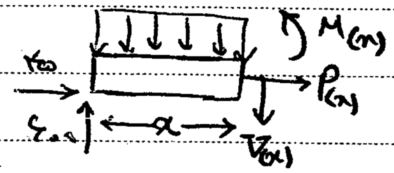
$$q_y = 4\ \frac{kN}{m} \qquad q_x = 3\ \frac{kN}{m}$$



PaPCO

می‌توانیم تیر را اینطور فرض کنیم



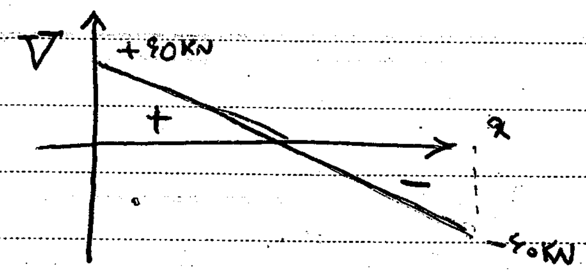


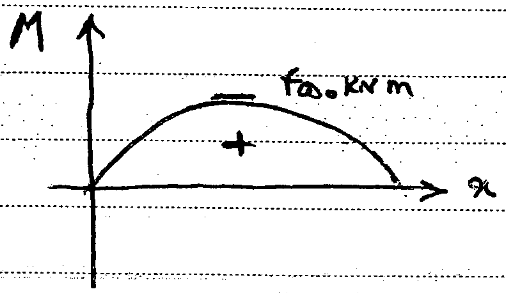
$$\Sigma F_x = 0$$

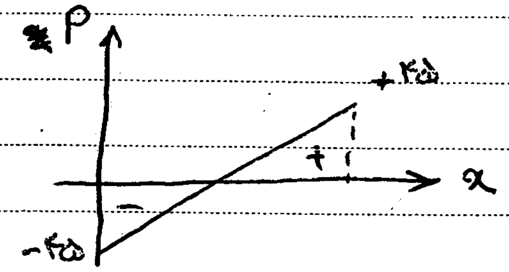
$$P_{(x)} = ۳x - ۴۵$$

$$V_{(x)} = ۶۰ - ۴x$$

$$\Sigma M = 0 \rightarrow M_{(x)} = ۶۰x - ۲x^۲$$



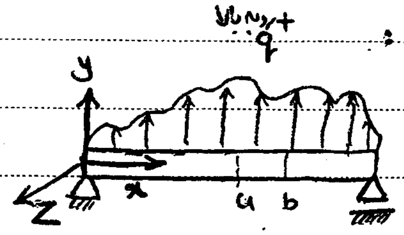




Subject:

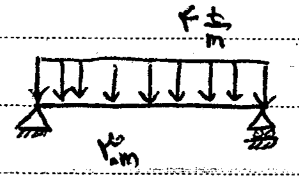
Year. Month. Date. ( )

معادلات دیفرانسیل تعادل تیرها (فقط تحت اثر بار قائم بر تیرها):

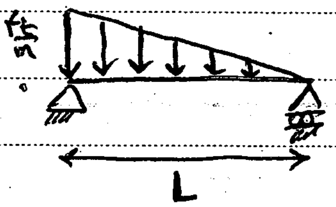


$q_{(x)} \longrightarrow$ تابع شدت بار قائم بر تیر

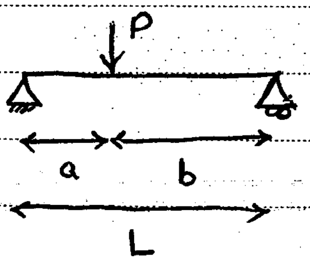
مثال:



$$q_{(x)} = -4 \qquad 0<x<30$$



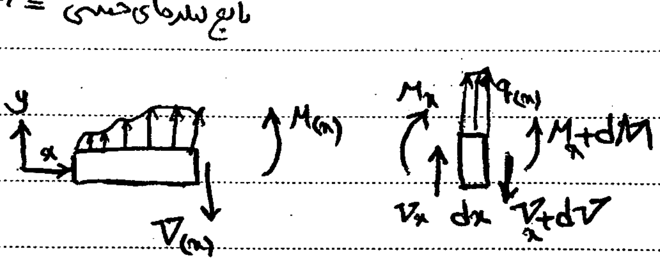
$$q_{(x)} = \frac{4}{L}x - 4$$



$$q_{(x)} = \begin{cases} 0 & 0<x<a \\ -\infty & x=a \\ 0 & a<x<L \end{cases}$$

$V_{(x)} =$ تابع نیروهای برشی تیر

$M_{(x)} =$ تابع لنگرهای خمشی



برش $\quad V_x + q_x dx - (V+dV) = 0 \longrightarrow q_x dx = dV \longrightarrow \frac{dV}{dx} = q_{(x)}$

PAPCO

$$V_{(x)} = \int q_{(x)} dx + V_0$$

خمش $M_x + V_x dx + q_x \frac{\cancel{dx^2}}{2} - (M+dM) = 0$

$$V_{(x)}\, dx = dM \longrightarrow \boxed{\frac{dM}{dx} = V_{(x)}}$$ نامعین

$$M_{(x)} = \int V_{(x)}\, dx + M_0$$

$$\boxed{V_b - V_a = \int_a^b q_{(x)}\, dx}$$

$$\boxed{M_b - M_a = \int_a^b V_{(x)}\, dx}$$ معین

روش جمع زدن برای رسم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی :

این روش مبتنی بر تفسیرهای هندسی معادلات تعادل به شکل های دیفرانسیلی و انتگرالی آن است، به صورت زیر است :

- شیب هر نقطه از دیاگرام نیروی برشی یک تیر برابر است با شدت بار گسترده بر تیر در همان نقطه .

- " " " " " " لنگر خمشی " " " " مقدار نیروی برشی در همان مقطع .

- درجه ی نمودار نیروهای برشی یک تیر در هر ناحیه برابر است با درجه تابع شدت بار گسترده بر تیر به علاوه یک .

- درجه ی منحنی لنگر خمشی " " " " " " " نمودار نیروی برشی آن تیر به علاوه یک یا دو درجه بالاتر

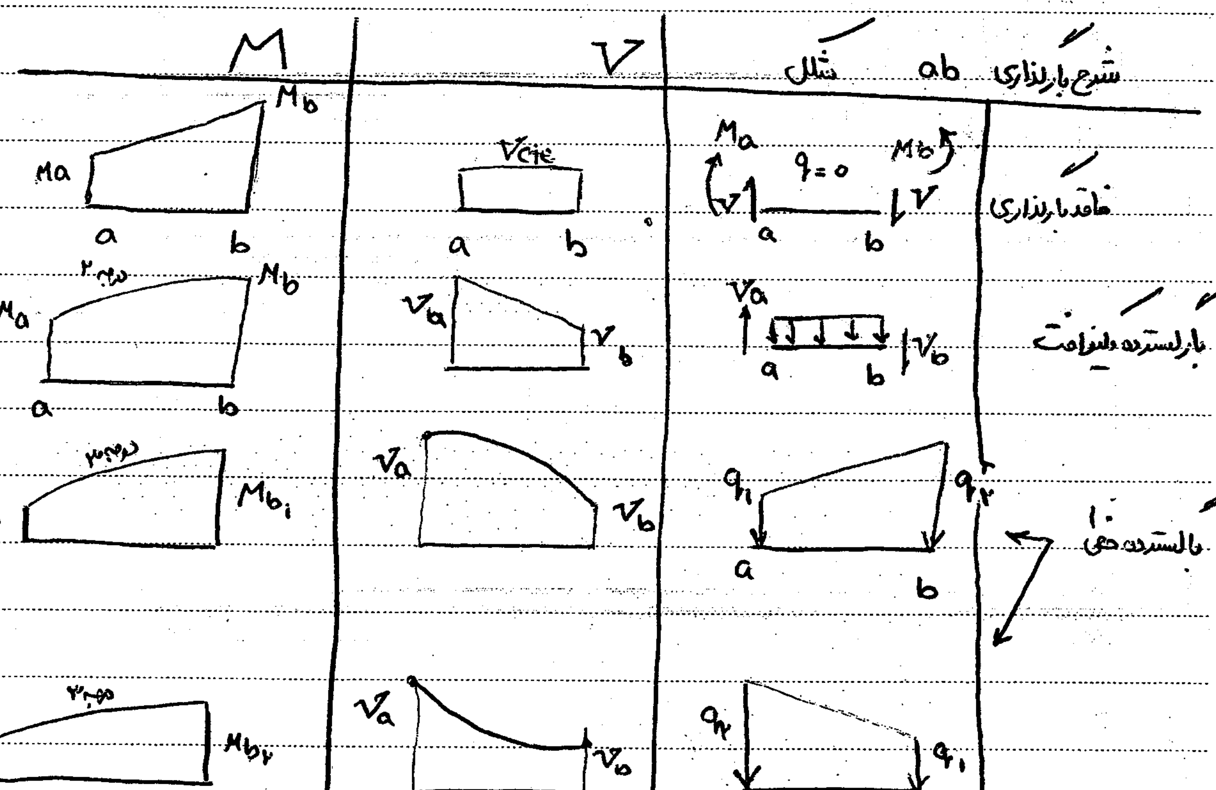
از درجه تابع شدت بار گسترده بر تیر .

Subject:

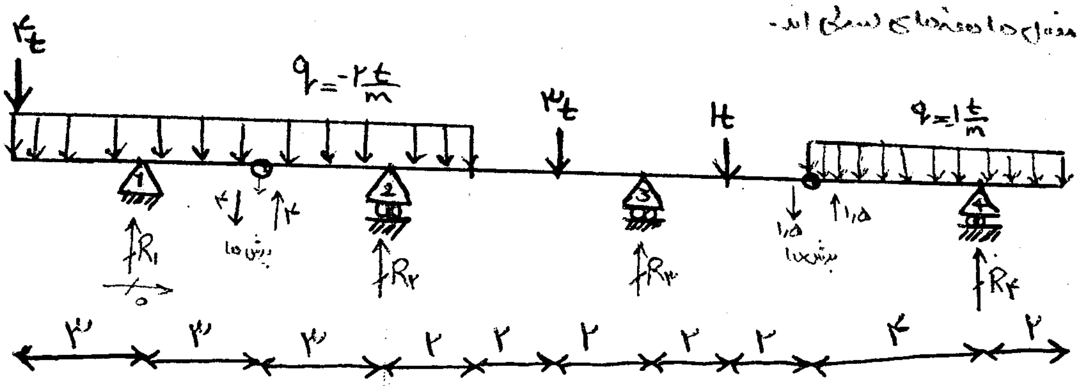
Year. Month. Date. ( )

- نیروی برشی در نقطه‌ای مانند b از یک تیر برابر مقدار نیروی برشی در نقطه‌ی دیگری مانند a به علاوه‌ی کل بار قائم وارد بر تیر در ناحیه ab (با رعایت علامت).

- لنگر خمشی در نقطه‌ای مانند b از یک تیر برابر است با مقدار لنگر خمشی در نقطه‌ی دیگر مانند a به علاوه‌ی مساحت زیر نمودار نیروی برشی در ناحیه ab (با رعایت علامت). (لنگر بارگذاری ab نسبت به b)

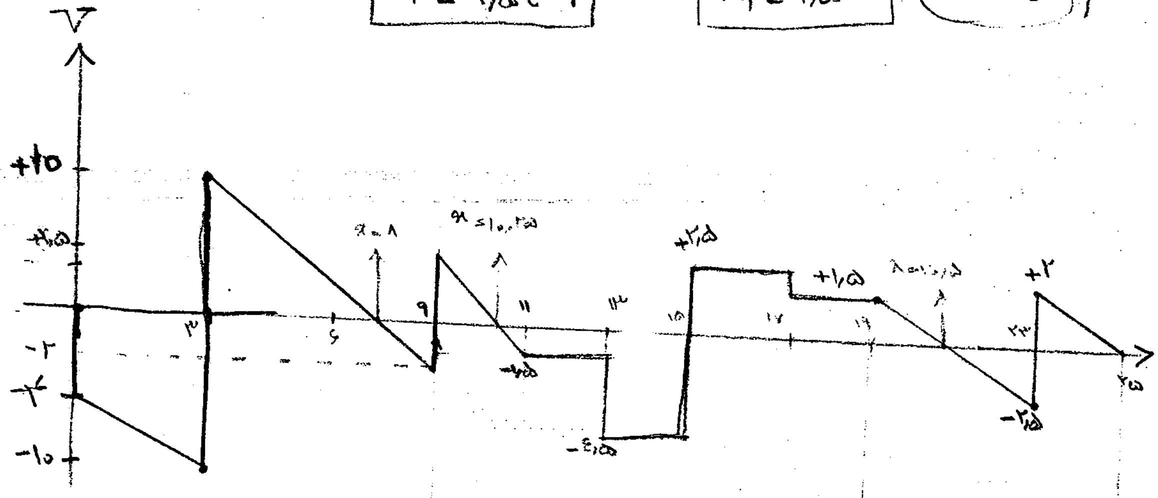


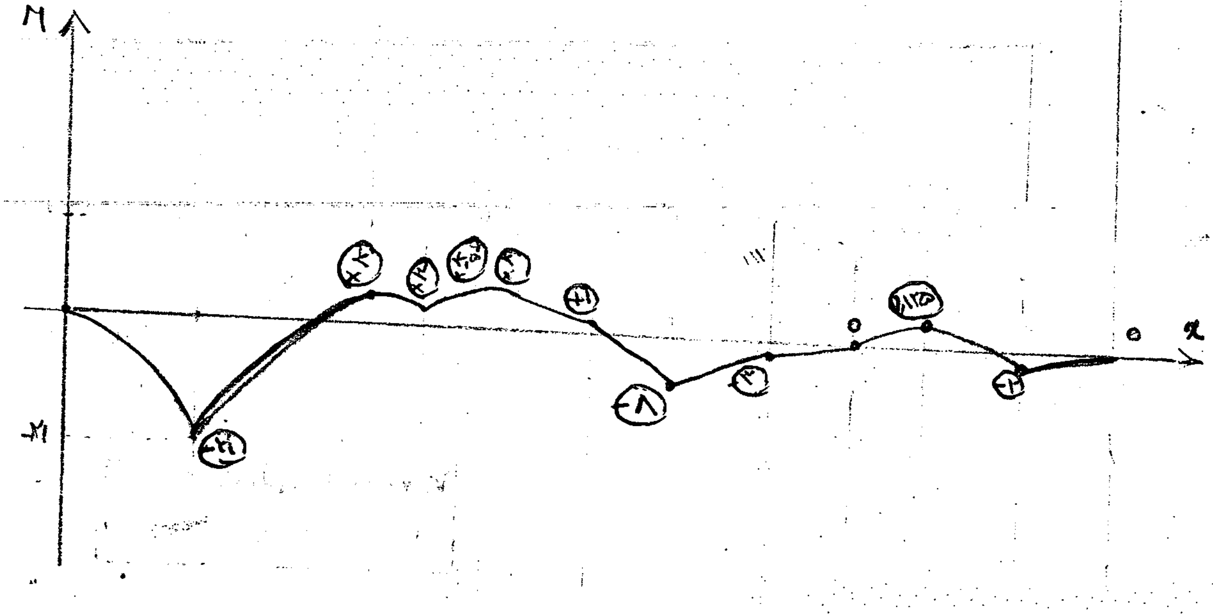
* مفصل‌ها مفصل‌های برشی اند.



دو مفصل و دو معادله تعادل داریم سپس می‌توانیم چهار مجهول خود را بیابیم.

$\boxed{R_1 = 20\,t}\uparrow$ ، $\boxed{R_4 = 4.5\,t\uparrow}$ $\boxed{R_2 = 4.5\,t\uparrow}$ $R_3 = 7\,t \uparrow$

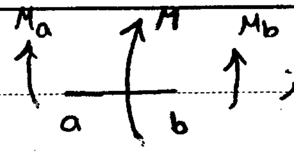
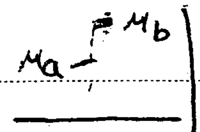
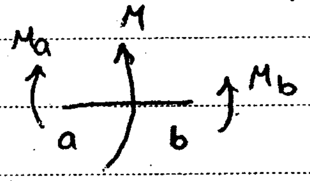
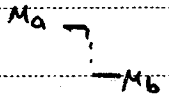




www.vepub.com
Publish Your Mind

قرارداد « $+\circlearrowleft$ » هم در لنگر خمشی برای ج اصلی در رسم دیاگرام ۱۷

Subject:
Year. Month. Date. ( )

لنگر متمرکز 	در نمودار برشی نشانه ندارد	باعث ایجاد جهش مثبت	
	"	باعث جهش منفی	

در روش جمع زدن ابتدا و با فرض نیروی برشی تیر رسم می‌شود برای این کار از منتها الیه سمت چپ تیر با مقدار اولیه $V_a=0$ کار جمع زدن نیروها آغاز می‌شود. سپس در نقاط مهم تیر مقدار نیروی برشی براساس $V_b = V_a +$ کل بارهای قائم مقدار نیروی برشی تعیین می‌شود. با تعیین نیروی برشی در نقطه بعدی آن را به عنوان نقطه A برای محاسبات ناحیه بعدی مجدد استفاده می‌کنیم. در منتها الیه سمت راست تیر عملیات جمع زدن نیروها با مقدار نهایی $V_b=0$ خاتمه می‌یابد که به اصطلاح به آن بسته شدن نمودار نیروی برشی گفته می‌شود. چنانچه این اتفاق نیفتاد نشانه از هر اشتباه احتمالی دارد. اشتباه در محاسبات جمع زدن، عکس العمل های تکیه گاهی یا تعیین اشتباه محاسبه شده اند.

مقادیر نیروی برشی بدست آمده در دست مسئله جبران نوع به سلسله تغییر منحنی مشتق و انتگرال با منحنی های درست به هم وصل می‌شوند.

نقاط مهم تیر:

ابتدا و انتهای تیر، محل تأثیر نیروهای متمرکز، محل تکیه گاه ها، محل آغاز یا خاتمه هر نوع بارگذاری، محل تغییر شدت بار

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

با روش مشابه قبل با جمع زدن مساحت های زیر منحنی دیاگرام برشی از سمت چپ تیر با مقدار اولیه $M_a = 0$

آغاز شده و به کمک دستورالعمل شماره ۶ لنگرهای خمشی نقاط مهم تیر تا انتهای سمت راست تیر را محاسبه باید

و با مقدار نهایی $M_b = 0$ خاتمه خواهد یافت (وگرنه تمام لنگرهای خمشی باید بررسی شود.) تعادل ممان ها

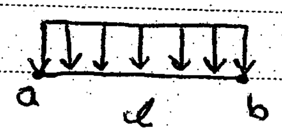
نقاط مهم تیر که در آن ها باید لنگرهای خمشی محاسبه شوند علاوه بر نقاط قبلی شامل ۱- محل صفر شدن نیروهای برشی

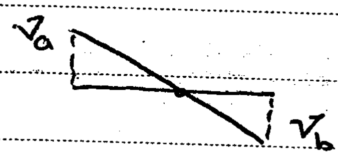
یا محل ماکسیمم نسبی ~~[illegible]~~ خمشی است ۲- محل لنگرهای متمرکز باید مد نظر قرار گیرد.

محل مفصل داخلی تیرها جایی که منحنی لنگر از صفر خواهد گذشت (شکل)

■ تعیین محل M_{max} :

الف) بار گسترده یکنواخت

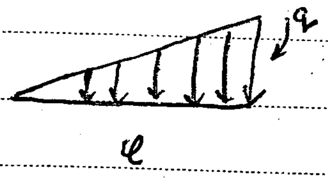




$$x_a q = V_a$$

$$x_b q = V_b$$

ب) بار گسترده خطی



$$x_a = \sqrt{\frac{V_a}{\left(\frac{ql}{2}\right)}} \cdot l$$

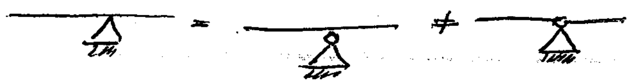
$$\frac{x_a}{l} = \frac{z}{q}$$

$$\frac{x_a}{2} \times \frac{q x_a}{l} = V_a$$

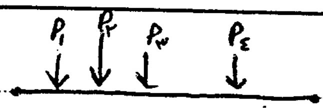
$$x_a^2 = \frac{2 V_a l}{q} \longrightarrow \boxed{x_a = \sqrt{\frac{2 V_a l}{q}}}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



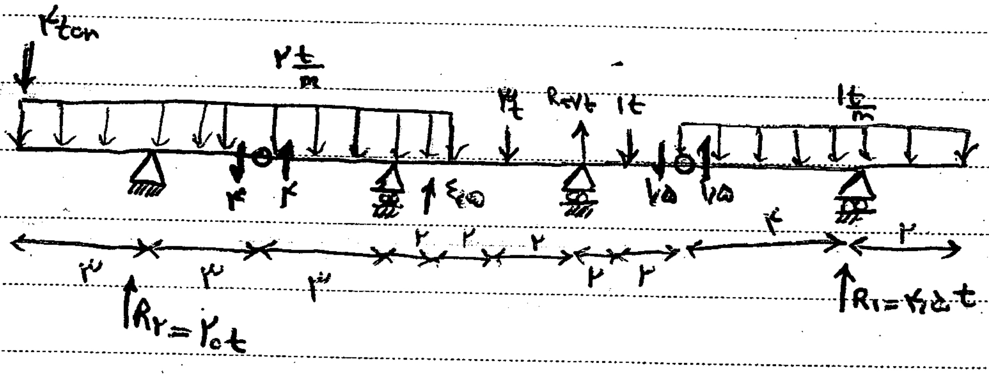
ج) سری بارهای متمرکز:



دیاگرام ممان بصورت خط شکسته خواهد بود بنابراین M_{max} زیر آن نیروی متمرکزی اتفاق می افتد که

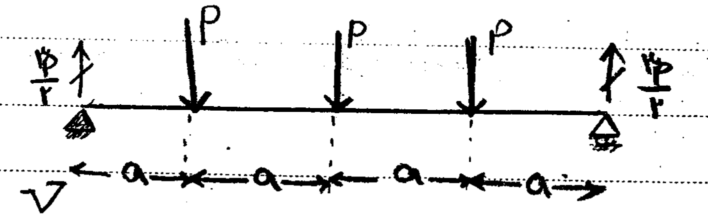
در رسم دیاگرام برش از محور صفر عبور کرده است:

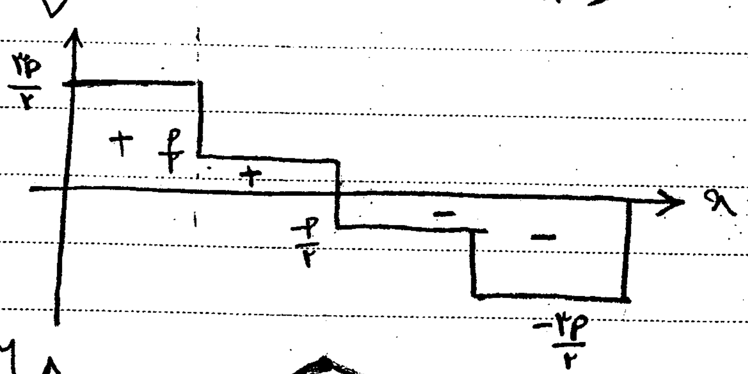
مثال

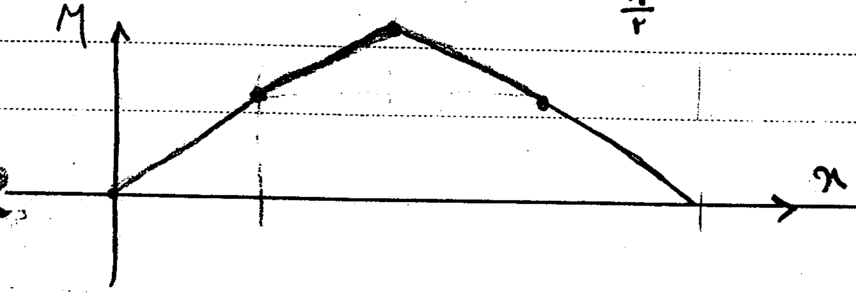


همان طور که در نمودارها می بینیم در جایی که $V=0$ برش است، لنگر M ماکسیمم نسبی است

و در نقطه ای که مفصل قرار دارد چون ممان تحمل نمی کنند لنگر $M=0$ است.



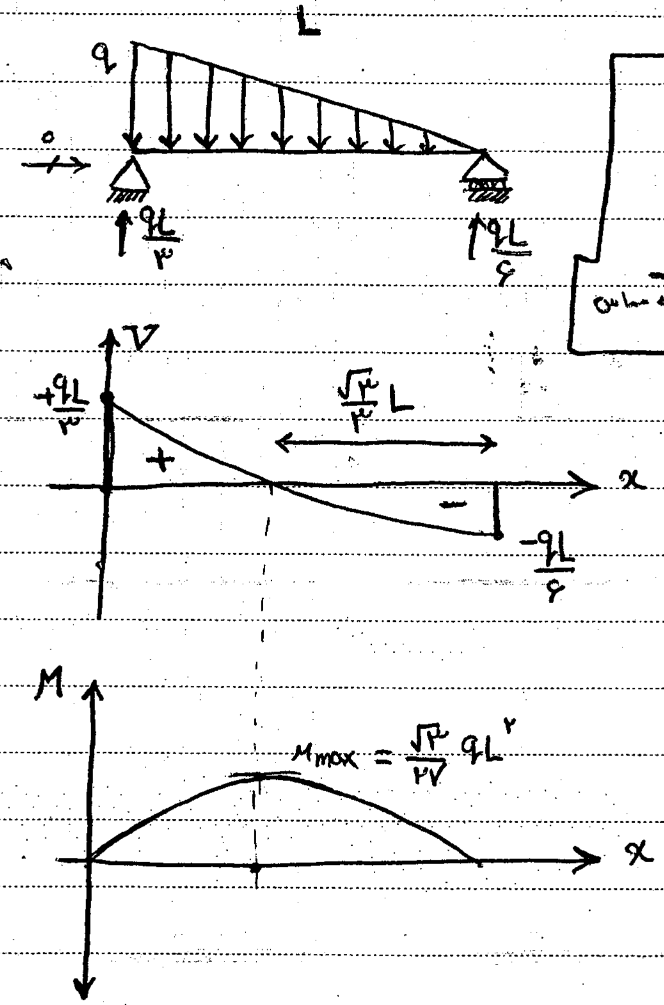


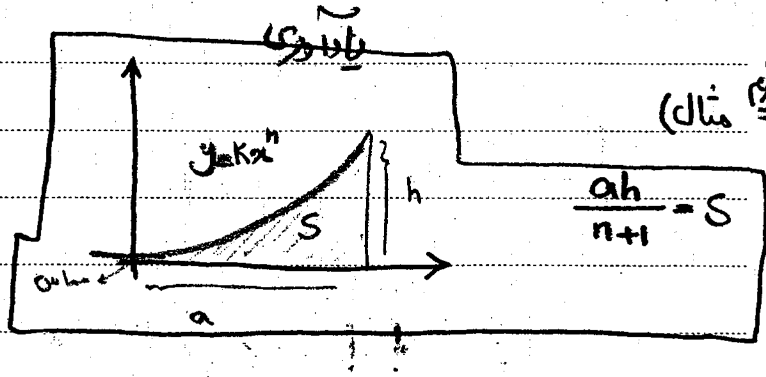


Subject:
Year. Month. Date. ( )

* تمرین کتاب دکتر عالی   ۷-۴-۲ و ۲۷ و ۲۹ و ۴۲ و ۴۷ و ۵۵

مثال ۳





$$x = \sqrt{\frac{\frac{qL}{6}}{\frac{qL}{2}} \times L} = \frac{\sqrt{3}}{3}L$$

از طریق معادله

$$q_{(x)} = -q + \frac{q}{L}\cdot x \qquad V_{(x)} = \int q_{(x)}dx = \frac{qx^2}{2L} - qx + \cancel{V_0}^{\frac{qL}{3}}$$

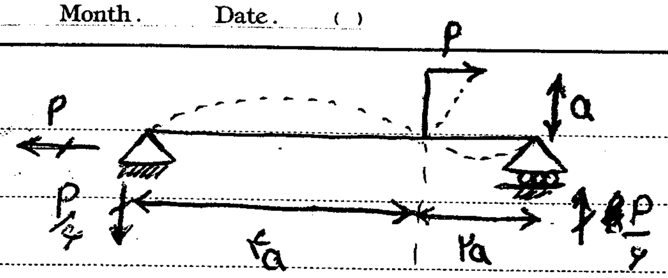
$$V_{(x)} = 0 \longrightarrow x = 0{,}423L$$

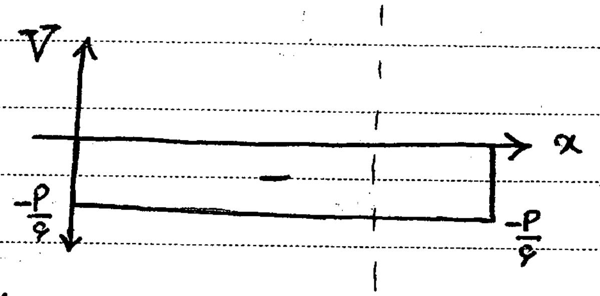
$$M(x) = \int V_{(x)}dx = \frac{qx^3}{6L} - \frac{qx^2}{2} + \frac{qL}{3}x + \cancel{M_0}^{0}$$

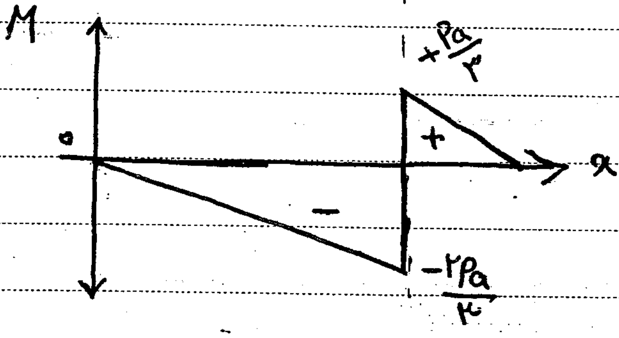
Subject:

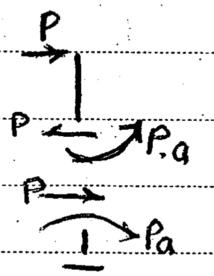
Year. Month. Date. ( )

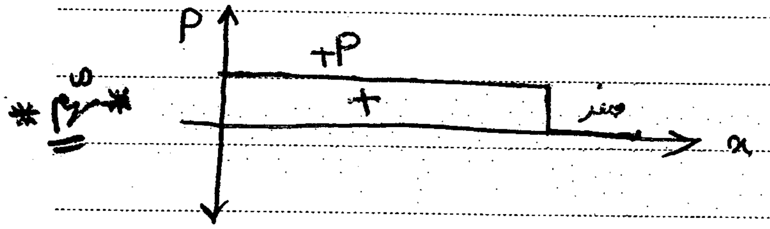
مثال :



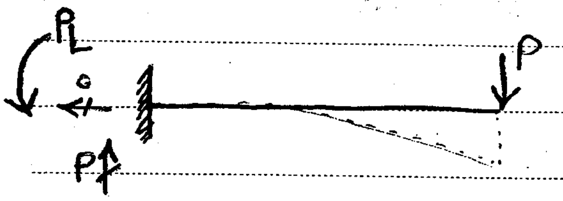


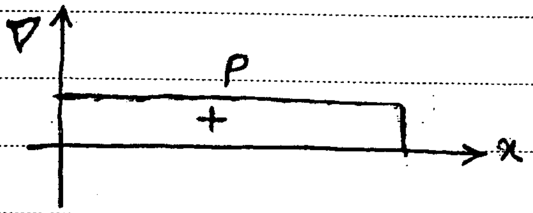


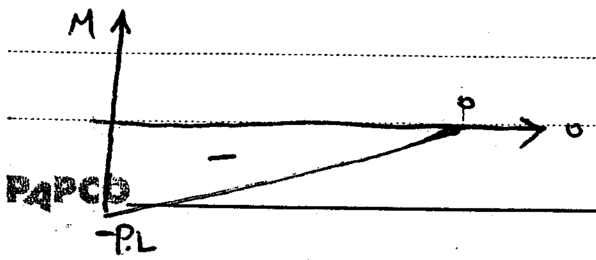




تیر طره (cantilever beam)

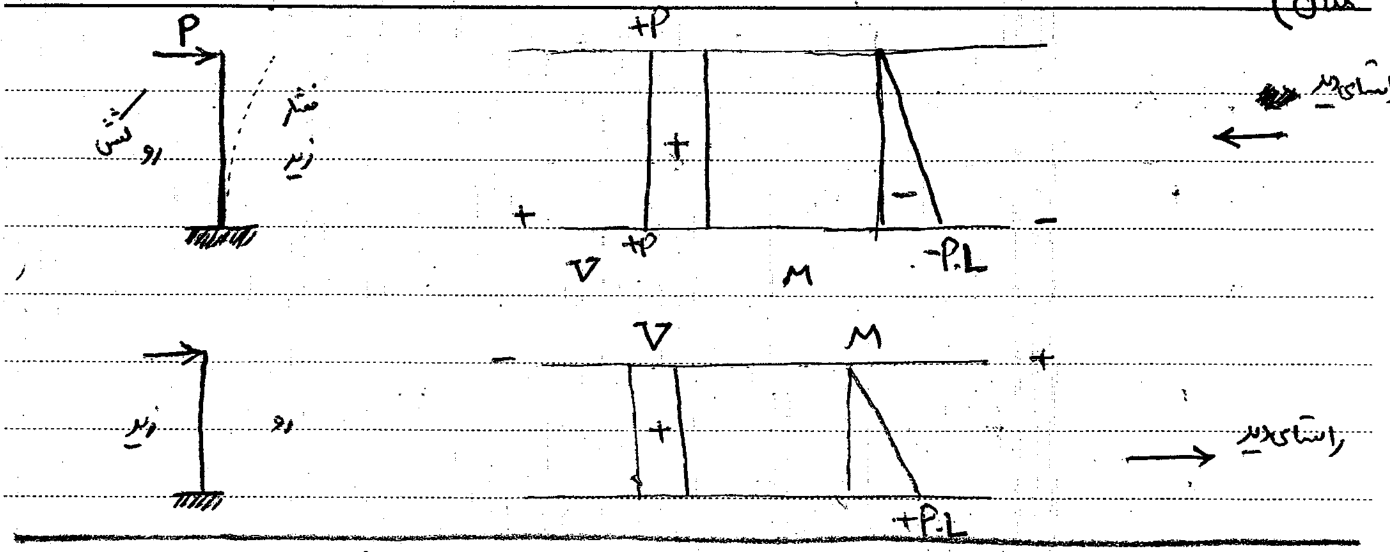




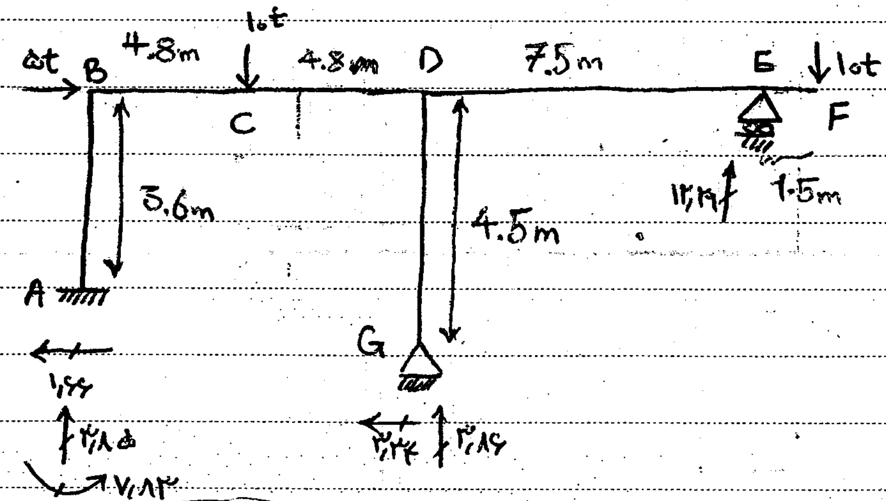


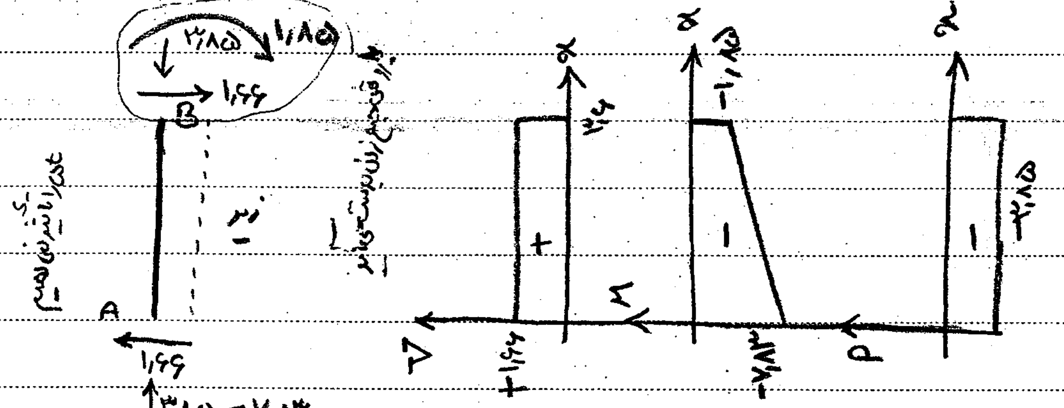
Subject:
Year. Month. Date. ( )

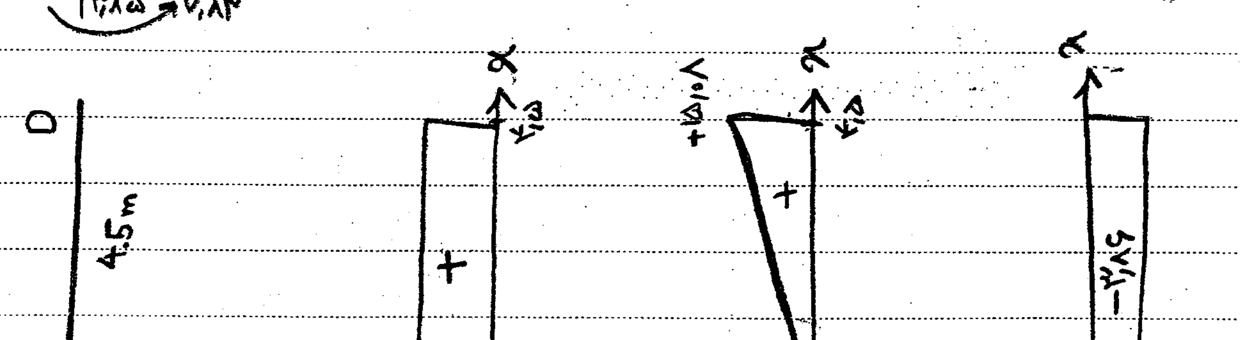
مثال)



مثال کتاب:



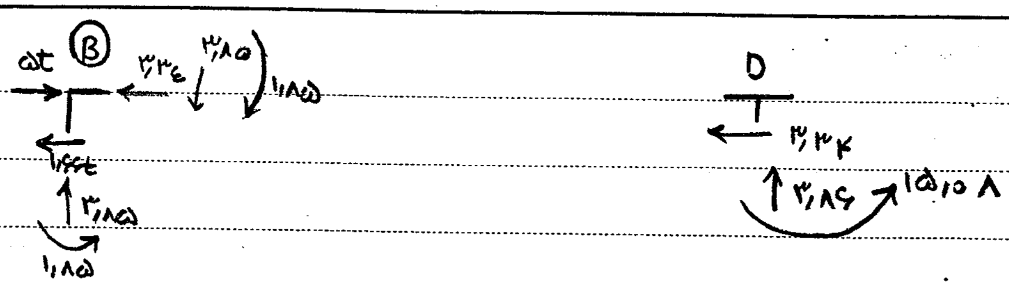




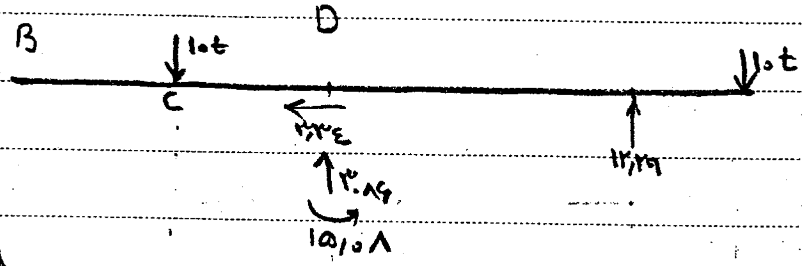
PAPCO

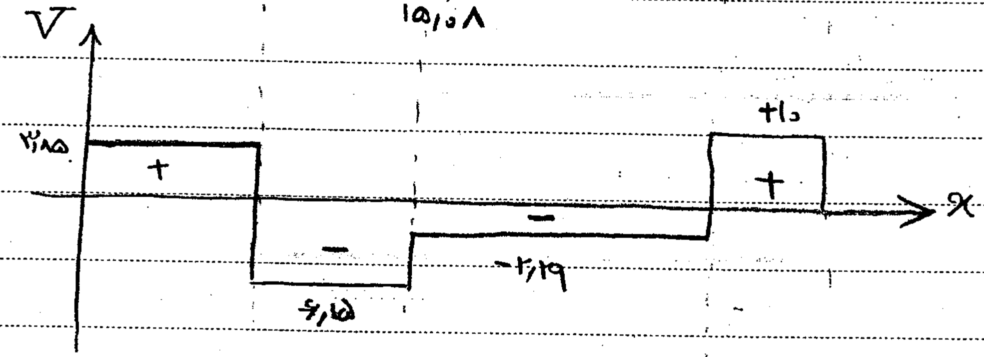
Subject:

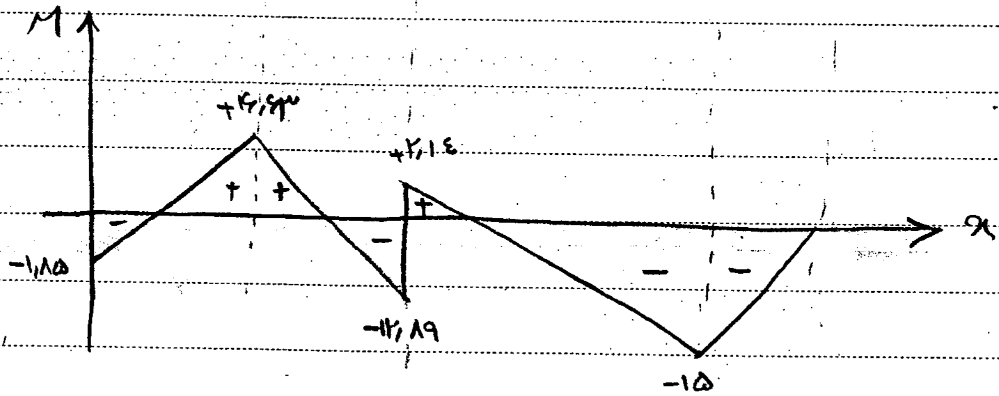
Year. Month. Date. ( )



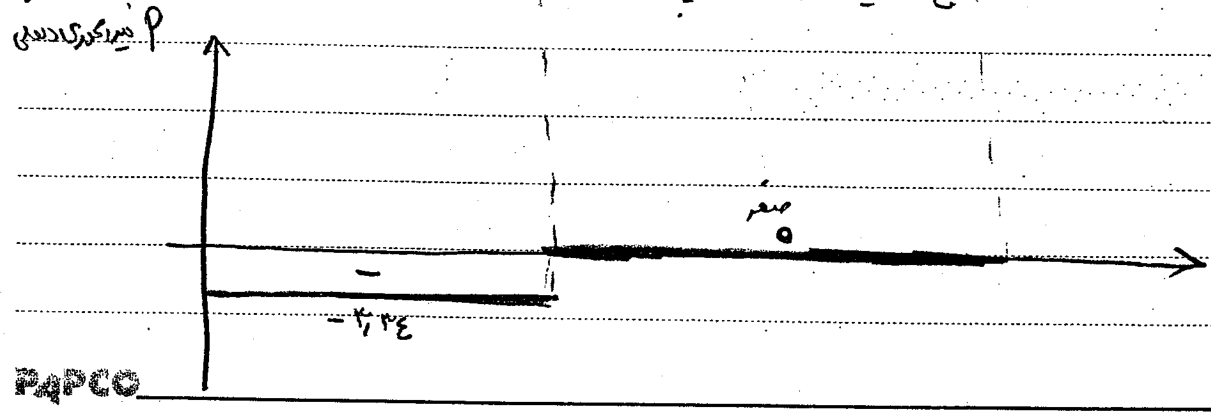
تیر افقی بالایی







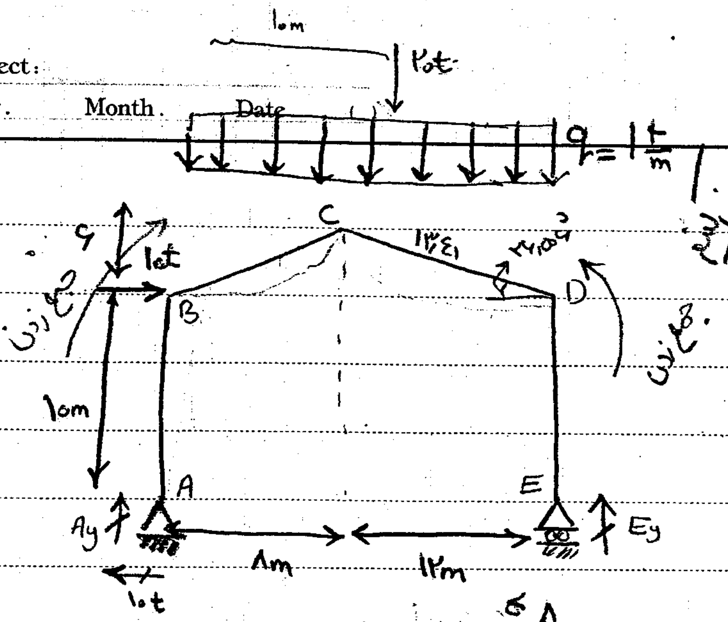
منبع: تحلیل سازه‌ها - شاپور طاحونی



Subject:

Year. Month. Date

مثال)



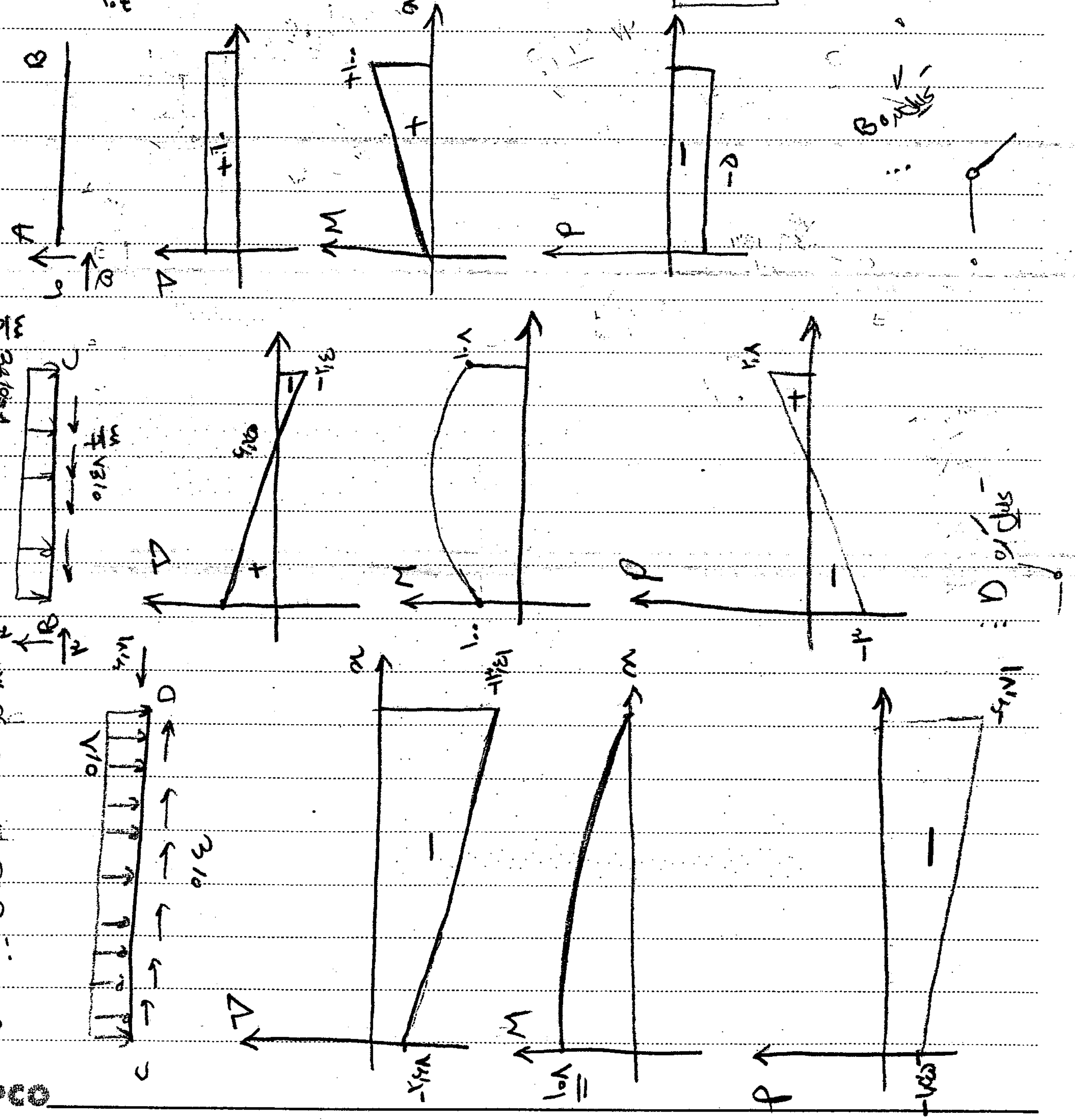
$$\text{کل بار} = 1\times 20 = 20t$$

$$+200 - 20E_y + 100 = 0$$

$$\boxed{E_y = 15t}$$

$$+100 - 200 + A_y \times 20 = 0$$

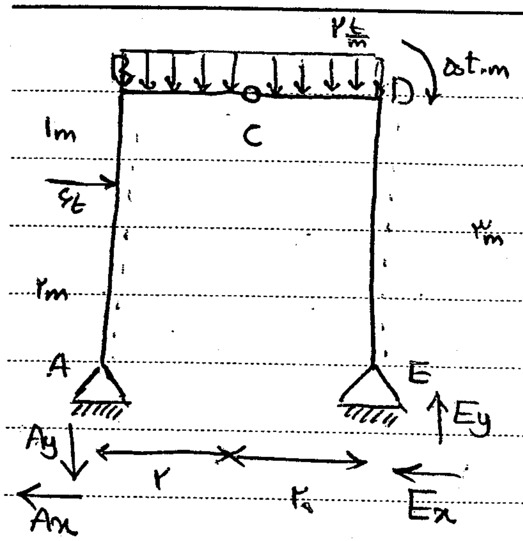
$$\boxed{A_y = 5t}$$



PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

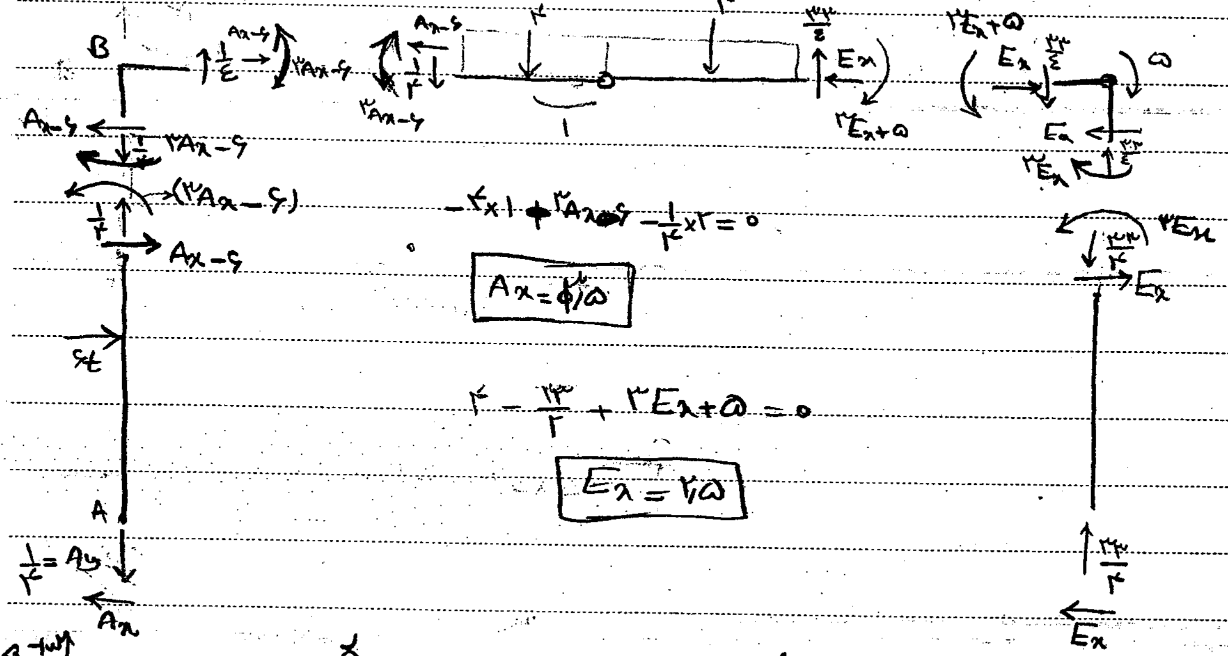


$$\sum M_A = ۰ \rightarrow -۴\times E_y + ۵ + ۱۶ + ۱۲ = ۰$$:حل

$$\boxed{E_y = +\frac{۳۳}{۴}}$$

$$\sum M_E = ۰ \rightarrow -A_y \times ۴ + ۵ - ۱۶ + ۱۲ = ۰$$

$$\boxed{A_y = +\frac{۱}{۴}}$$

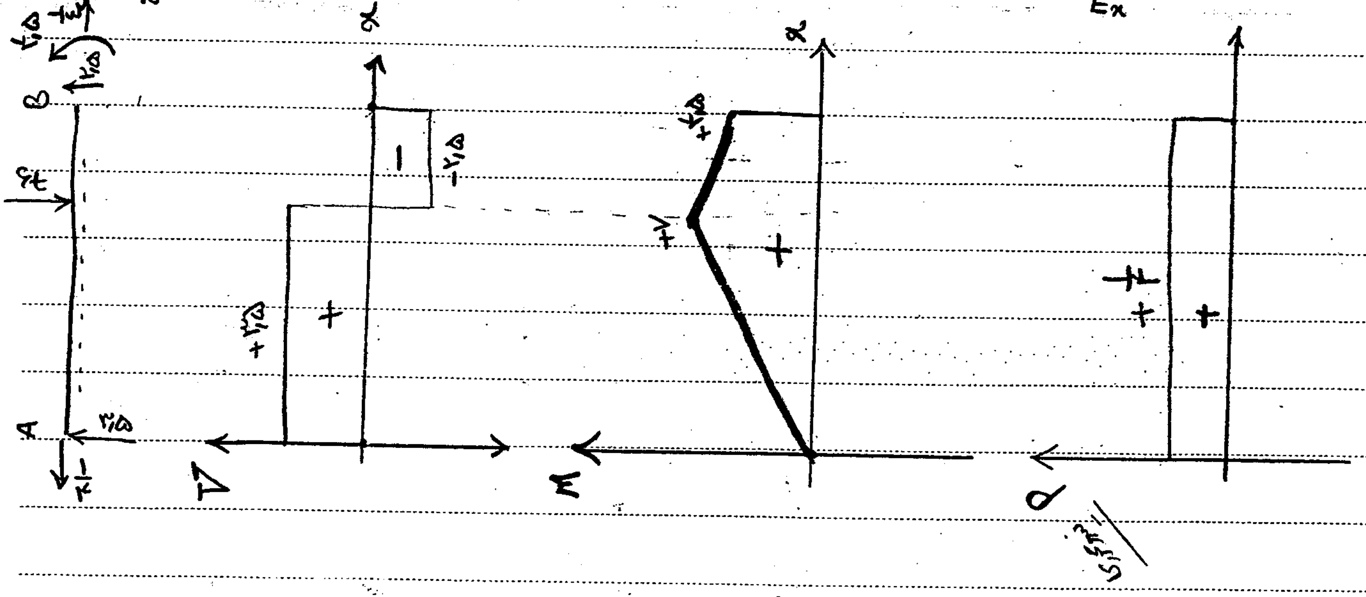


$$-۴\times ۱ + ۳A_x - ۶ - \frac{۱}{۴}\times ۲ = ۰$$

$$\boxed{A_x = ۳/۵}$$

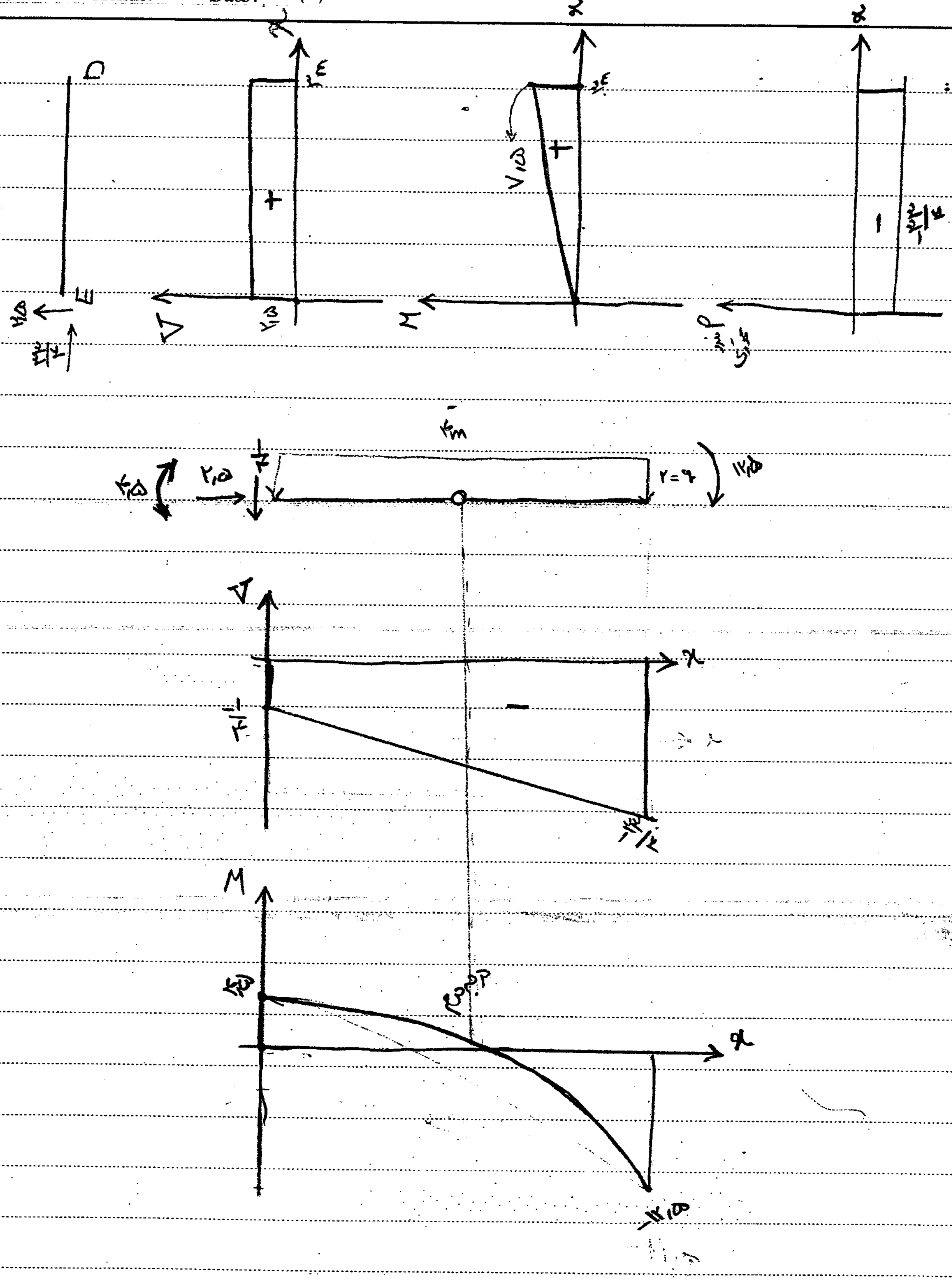
$$۴ - \frac{۱۳}{۲} + ۳E_x + ۵ = ۰$$

$$\boxed{E_x = ۲/۵}$$

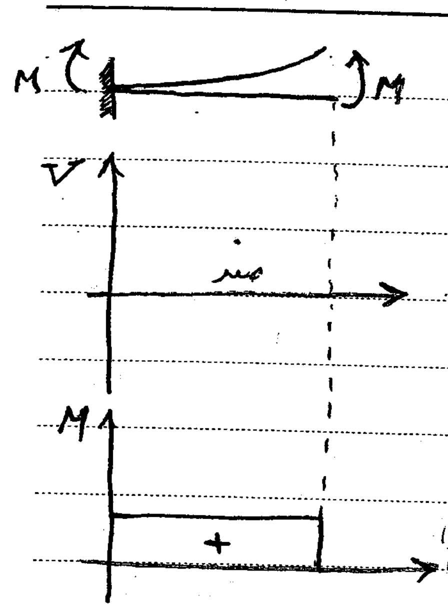


Subject:

Year. Month. Date. ( )



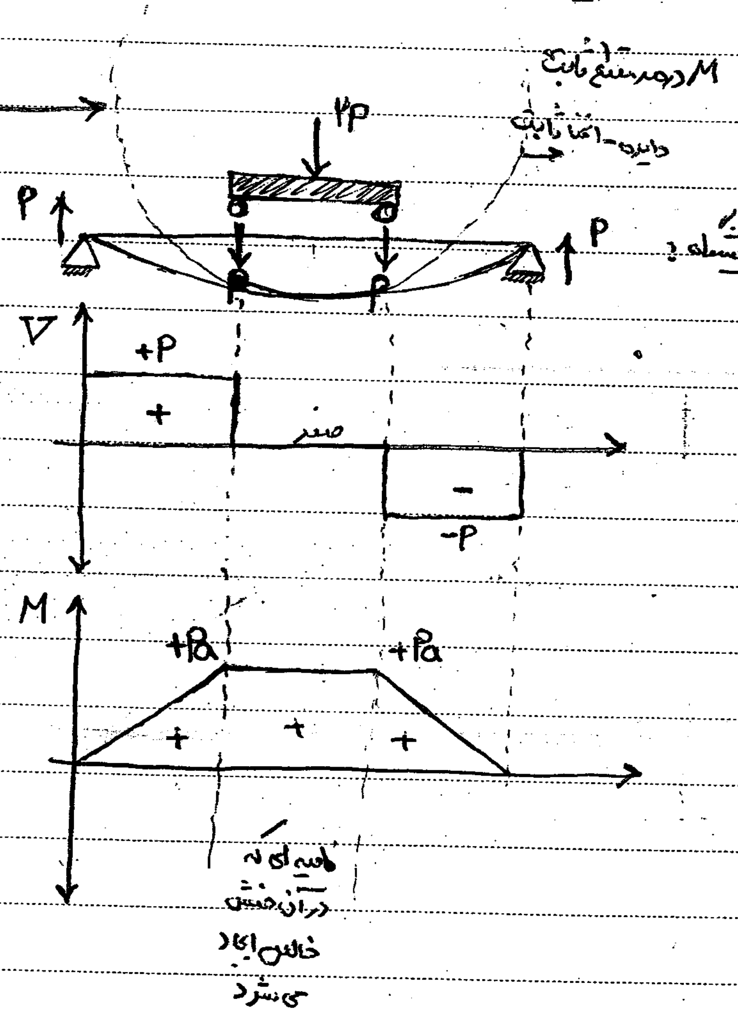
خمش خالص :



$V=0=\frac{dM}{dx} \rightarrow$ ثابت M

تغییر شکل این تیر (ناشی از M) دایره است . (انحنا ثابت)

ایجاد خمش خالص در آزمایشگاه :



* بر اثر خمش تنش نرمال (σ) ایجاد می شود و تنش برشی (τ) نداریم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تئوری خمش ارتجاعی (الاستیک) : فرضیات آزمایش را بررسی می‌کنیم :

① مصالح سازنده تیر از قانون هوک تبعیت کنند. $\sigma = E\varepsilon < \sigma_y$

② مقطع تیر از یک ماده ساخته شده که در کشش و فشار E یکسانی دارد.

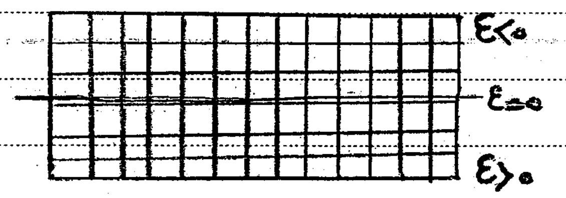
③ خمش محض یا خالص باشد و در تیر نیروهای محوری و برشی وجود نداشته باشد.

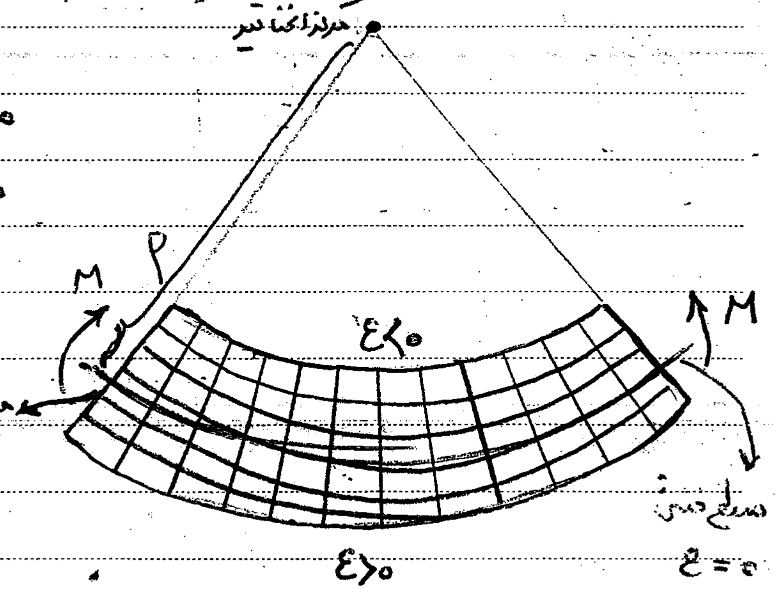
④ مقطع تیر متقارن بوده و بارگذاری در صفحه‌ی تقارن انجام گرفته باشد. (کوپل‌ها در صفحه تقارن اثر کنند)

⑤ تیر مستقیم و منشوری باشد.

قانون اساسی تئوری خمش

⑥ مقاطع عمودی تیر پس از خمش همچنان صفحه‌ای باقی بمانند در نتیجه تغییرات ε در ارتفاع تیر خطی است.

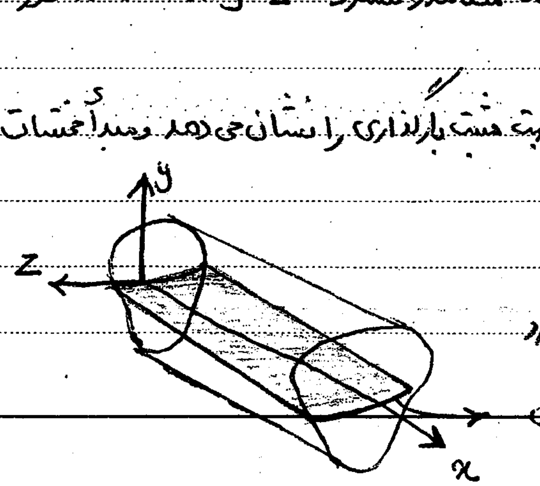




* با توجه به شکل مربع‌ها اضلاع همچنان با هم زاویه ۹۰° دارند پس نتیجه می‌گیریم در المان برشی ایجاد نمی‌شود.

$\sigma \leftarrow \square \rightarrow \sigma$ $\boxed{\tau = 0}$ ✓

▨ دستگاه مختصات تیر: یک دستگاه متعامد راستگرد x-y-z است که محور xها در امتداد طول تیر و محور y بر روی صفحه تقارن و جهت آن، جهت مثبت بارگذاری را نشان می‌دهد و مبدأ مختصات را بر روی سطح خنثی تیر قرار می‌دهیم.

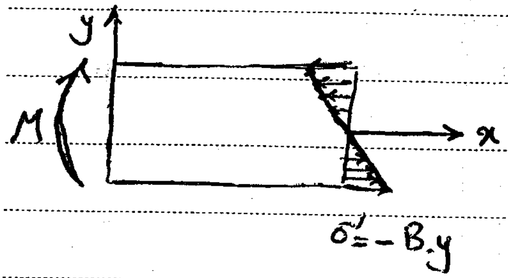


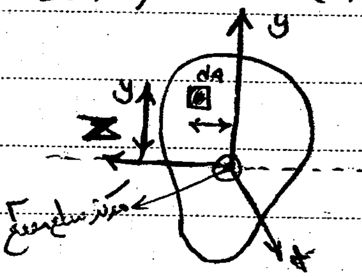
PAPCO

تابع کرنش تیر $\quad \varepsilon = f(x, y, z)$ (خمش خالص، مستقل بودن) $\longrightarrow \boxed{\varepsilon = f(y) = -by}$ «کرنش خطی تغییر می‌کند»

$\sigma = E\varepsilon = -Eby = -B\cdot y$ تنش خطی عمل می‌کند (در ارتفاع تیر)

مکان هندسی نقاطی از مقطع که شامل نقاطی است که (مقطع) تنش و کرنش صفر دارند.





تقاطع سطح خنثی و سطح مقطع

محور خنثی مقطع

Q لنگر اول سطح

$$\Sigma F_x = \int_A dF = \int_A \sigma\cdot dA = \int_A -By\, dA = -B\underbrace{\int_A y\, dA}_{A\cdot\bar{y}}$$

$$\Sigma F_x = -B\int_A y\cdot dA = 0 \rightarrow -B A\bar{y} = 0 \rightarrow \boxed{\bar{y} = 0}$$

یعنی فاصله مرکز سطح مقطع از سطح خنثی صفر است.

همواره در یک تیر تحت خمش خالص وجود داشته باشد محور خنثی خطی است که از مرکز سطح مقطع می‌گذرد.

$$\Sigma M_z = 0 \longrightarrow M + \int_A dM = 0 \longrightarrow \boxed{B = \frac{M}{\int_A y^2 dA}}$$

ممان اینرسی

$$dM = y\, dF = y\cdot\sigma\cdot dA = y(-B\cdot y\, dA)$$

$$B = \frac{M}{\int_A y^2 dA} = \frac{M}{I}$$

$I \rightarrow$ لنگر دوم سطح مقطع تیر نسبت به

$y > 0 \quad \sigma < 0$ فشاری
$y < 0 \quad \sigma > 0$ کششی

روابط اساسی خمش ارتجاعی: محوری که از مرکز سطح آن می‌گذرد و عمود بر صفحه تیر است.

$$\boxed{\sigma = \frac{-M\cdot y}{I}} \qquad \boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{-My}{EI}} \qquad b = \frac{B}{E} = \frac{M}{EI}$$

$$\boxed{\text{«انحنا»}\ \frac{1}{\rho} = b = \frac{M}{EI}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

▨ مدول مقطع :

$$\sigma = -\frac{M\cdot y}{I} \longrightarrow |\sigma_{max}| = \left|\frac{M y_{max}}{I}\right| = \left|\frac{Mc}{I}\right|$$

$$\boxed{y_{max} = c}$$

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{M}{\left(\frac{I}{c}\right)} = \frac{M}{S \text{ یا } W}} \leq \sigma_a \text{ تنش مجاز}$$

مدول مقطع یا اساس مقطع $\boxed{W \text{ یا } S = \frac{I}{c}}$ ، L_n^3

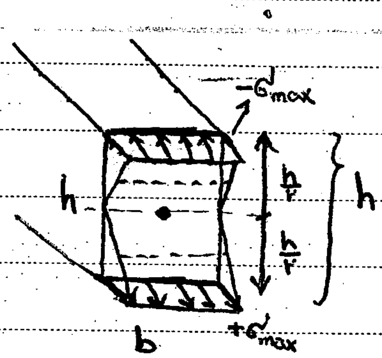
$$[\text{اساس مقطع}]\ S \geq \frac{M}{\sigma_a}$$

$$M_{\text{مجاز}} = \sigma_a \cdot S$$

▨ مقایسه شکل های هندسی مقاطع در مبحث خمش :

▨ σ_{max} ها

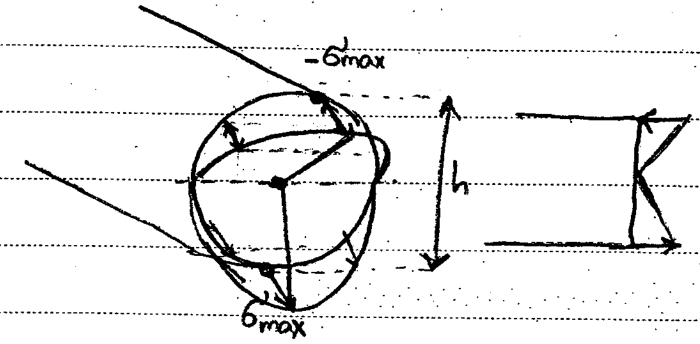
1



$$A = b \cdot h \qquad I = \frac{bh^3}{12} \qquad S = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6}$$

$$C = \frac{h}{2}$$

2



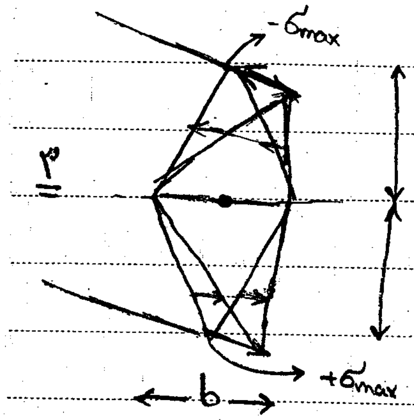
$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \pi R^2$$

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$C = \frac{h}{2} = R$$

$$S = \frac{I}{C} = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{Ah}{8}$$

۳

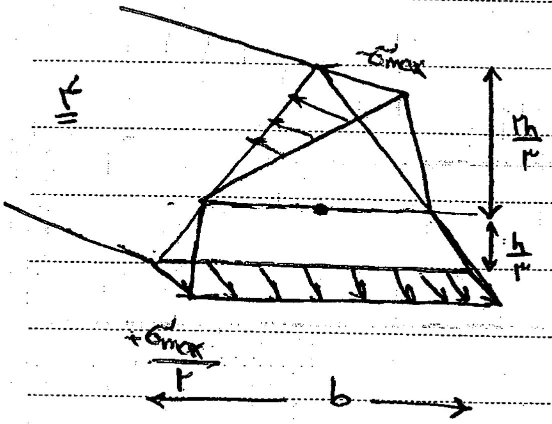


$A = \frac{bh}{2}$ $\boxed{I = \frac{bh^3}{48}}$

$h > b$ $C = \frac{h}{2}$

$S = \frac{bh^2}{24} = \frac{Ah}{12}$

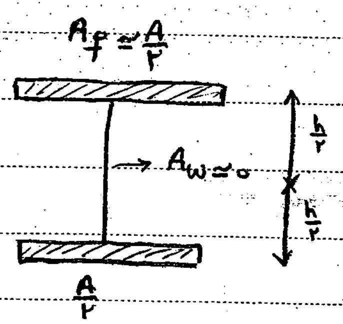
۴



$A = \frac{bh}{2}$ $\boxed{I = \frac{bh^3}{36}}$

$C = \frac{2h}{3}$ $S = \frac{bh^2}{24} = \frac{Ah}{12}$

۵
I شکل ایده‌ال



$A = 2A_f$

$I \simeq I_0 + 2A_f \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{A_f h^2}{2} = \frac{Ah^2}{4}$

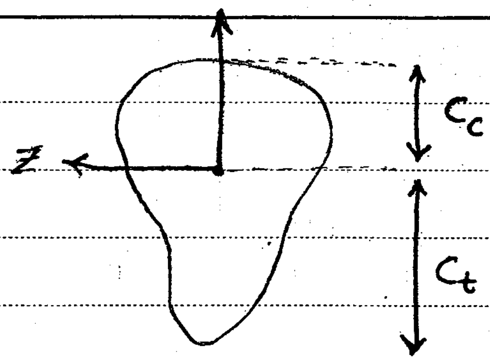
$C = \frac{h}{2}$ $\boxed{S \simeq \frac{Ah}{2} = A_f h}$

جان تیر Web

بال تیر Flange

Subject:
Year. Month. Date. ( )

عمل غیر یکسان در کشش و فشار :

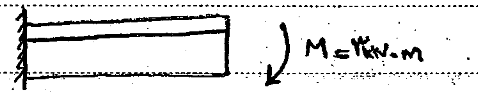


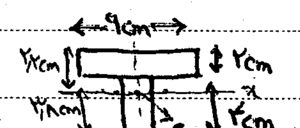
$$(\sigma_{max})_t = (\sigma_a)_t \qquad \frac{MC_t}{I} = (\sigma_a)_t$$

$$(\sigma_{max})_c = (\sigma_a)_c \qquad \frac{MC_c}{I} = (\sigma_a)_c$$

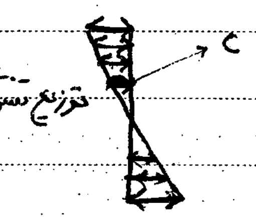
$$\frac{C_t}{C_c} = \frac{(\sigma_a)_t}{(\sigma_a)_c}$$

تمرین ← تیری با مقطع سه‌بری مطابق شکل تحت اثر لنگر خمشی ۳KN.m قرار دارد. حداکثر تنش‌های کششی و فشاری ایجاد شده در این تیر را محاسبه کنید.





$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{\int dA} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{۱۸\times۵ + ۱۲\times۲}{۹\times۲ + ۳\times۴} = ۳٫۸cm$$



$$I_x = \sum I_i = \sum (I_a + A_i d_i^2)$$

$$= \frac{۹\times۲^۳}{۱۲} + ۱۸(۲٫۲-۱)^۲ + \frac{۳\times۴^۳}{۱۲} + ۱۲(۳٫۸-۲)^۲ = ۸۶٫۸ \ cm^4$$

$$\begin{cases} \sigma_{max_t} = -\dfrac{MC_t}{I} = -\dfrac{-۳\times۱۰^۶\times(+۲۲)}{۸۶٫۸\times۱۰^۴} = +۷۶\ MPa \checkmark \\[2ex] \sigma_{max_c} = -\dfrac{MC_c}{I} = -\dfrac{-۳\times۱۰^۶\times(-۳۸)}{۸۶٫۸\times۱۰^۴} = -۱۳۱٫۳\ MPa \checkmark \end{cases}$$

N.mm

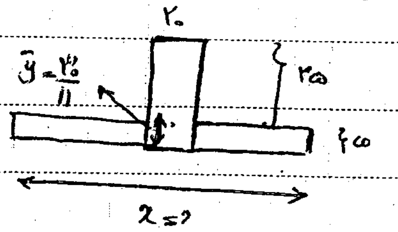
* فصل ۸ ۸-۱-۵, ۹, ۲۱

۸ = ۲-۶, ۱۰ و ۱۳, ۱۲, ۱۹

$\rightarrow \sigma_a = ۱۴۰۰$

PAPCO

تمرین : در مقطع مرکب شکل مقابل اندازه x چقدر باشد تا در این تیر تنش های حداکثر کششی و فشاری با هم به مقدار مجاز



$\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \frac{1}{10}$ زیر به کشش / رو به فشار

تیر مقید

$\frac{35}{11} = \frac{(25\times 20)(17.5) + 2.5\,(\ldots)}{500 + 100 + 550}$

* به دلیل بیش از حد بودن این طول با دیگر مقاطع همکاری نمی‌کند پس لازم است

قسمت تحت تنش با خوار سیری تقویت شود که در مبحث بعدی مورد توجه قرار می‌دهیم

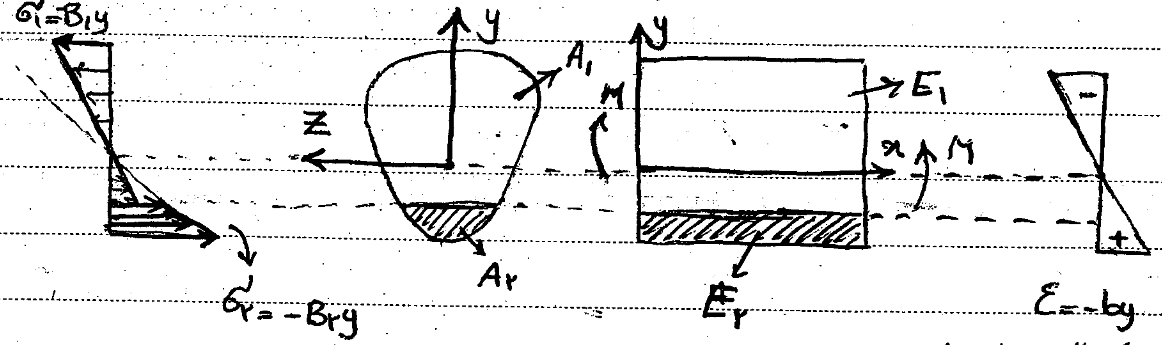
$\boxed{x = 9465}$

☒ خمش تیرهای مرکب :

$\sigma = E\varepsilon$

شرایط آنها به صورت روبه‌رو است : ۱- تبعیت از قانون هوک ۲- بین مقاطع پیوستگی کامل برقرار است . ۳- خمش خالص

۴- مقاطع بدون ۵- مستقیم و منشوری ۶- مقاطع عرضی تیر پس از خمش مستوی (مسطح) باقی می‌مانند .



رابطه کرنش همچنان خطی است

$\forall y \in A_1 \rightarrow \sigma_1 = E_1\varepsilon = -E_1 b y = -B_1 y$

$\forall y \in A_2 \rightarrow \sigma_2 = E_2\varepsilon = -E_2 b y = -B_2 y$

تحت خمش خالص

تفاوت در تیرهای مرکب توزیع تنش توسط دو خط متقاطع در y=0 نشان داده خواهد شد که نسبت ضریب زاویه دو خط برابر $n = \frac{E_2}{E_1}$

است . پیوستگی کرنش برقرار است ولی تنش پیوسته نیست .

Subject: $\varepsilon = \dfrac{-My}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$ $\quad \sigma_1 = \dfrac{-E_1 M y}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$ $\quad \sigma_2 = \dfrac{-E_2 M y}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$

Year. Month. Date. ( )

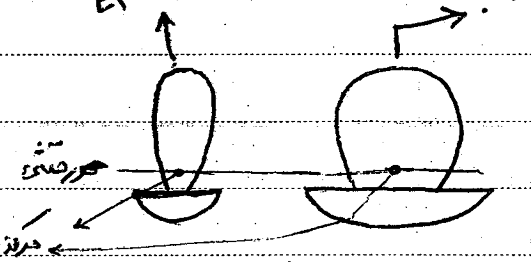
$$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow \int_A dF = \int \sigma\, dA = \int_{A_1} \sigma_1\, dA + \int_{A_2} \sigma_2\, dA = 0$$

$$-b\Big(E_1 \underbrace{\int_{A_1} y\,dA}_{A_1 \bar{y}_1} + E_2 \underbrace{\int_{A_2} y\,dA}_{A_2 \bar{y}_2}\Big) = 0$$

$$n = \frac{E_2}{E_1}$$

$$(A_1 \bar{y}_1 + n A_2 \bar{y}_2) = 0 \longrightarrow \bar{y}_{t_1} = 0$$

$$\left(\frac{A_1}{n} \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2\right) = 0 \longrightarrow \bar{y}_{t_2} = 0$$



$$\boxed{A_{t_1} = n A_{t_2}}$$

مساحت تبدیل یافته $\quad A_{t_2} = \dfrac{A_1}{n} + A_2 \qquad A_{t_1} = A_1 + n A_2$

← بنابراین در خمش خالص تیرهای مرکب (چندماده‌ای) سطح خنثی و محور خنثی از مرکز سطح مقطع نمی‌گذرد بلکه از مرکز سطح تبدیل یافته‌ای می‌گذرد که ارتفاع آن با ارتفاع تیر اصلی یکسان و تغییر مساحت‌ها با نسبت n در عرض ها اعمال شود.

$$\Sigma M = 0 \longrightarrow M + \int_A dM = 0 \qquad dM = y\,dF = y\,\sigma\,dA$$

$$M + \int_A y \cdot \sigma \cdot dA = 0 \qquad M + \int_{A_1} y \cdot (-E_1 b y)\,dA + \int_{A_2} y\,(-E_2 b y)\,dA = 0$$

$$M = b\Big(E_1 \underbrace{\int_{A_1} y^2 dA}_{I_1} + E_2 \underbrace{\int_{A_2} y^2 dA}_{I_2}\Big) \longrightarrow \boxed{b = \frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2}}$$

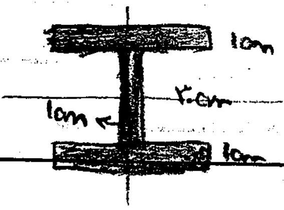
$$\sigma_1 = \frac{-E_1 M y}{E_1 I_1 + E_2 I_2} = \frac{-My}{I_1 + n I_2} = \frac{-My}{I_{t_1}} \qquad \sigma_2 = \frac{-My}{\frac{I_1}{n} + I_2} = \frac{-My}{I_{t_2}}$$

PAPCO

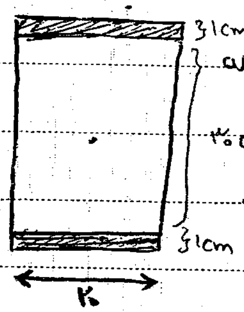
$$\sigma_2 = n\sigma_1 \,,\; A_{t_1} = n A_{t_2} \,,\; I_{t_1} = n\, I_{t_2}$$

Subject : مساحت تبدیل یافته به فولاد
متقارن

Year. Month. Date. ( )



* محور سطح تغییر نکرده به دلیل
تقارن

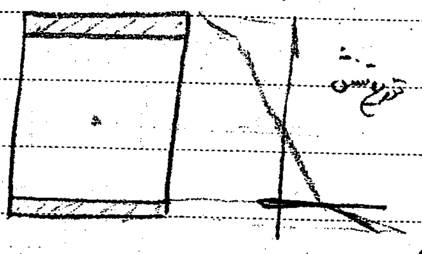


مثال) در تیر چوبی شکل مقابل از دو صفحه‌ی فولادی به ضخامت 1cm جهت تقویت تیر استفاده

شده اگر مشخصات فولاد و چوب به شرح زیر باشد ظرفیت خمشی تیر تقویت شده را تعیین کنید.

$E_S = 2\times10^6 \frac{kgf}{cm^2}$ $(\sigma_a)_S = 1120 \frac{kg}{cm^2}$ $E_W = 10^5 \frac{kg}{cm^2}$ $(\sigma_a)_W = 84 \frac{kg}{cm^2}$ $n = \frac{E_S}{E_W} = 20$

ظرفیت خمشی تیر تقویت نشده $M = \sigma_a . S = 84 \times \frac{bh^2}{6} = 14bh^2 = 252000\ kg.cm = \boxed{2.52\ t\text{-}m}$



$\sigma_W = \frac{-My}{I_{tW}}$

$\sigma_S = \frac{-My}{I_{tS}}$

$$I_{tS} = \frac{20\times32^3}{12} - \frac{19\times30^3}{12} = 11863\ cm^4 \checkmark$$

$\boxed{I_{tW} = n I_{tS}} =$

$\hookrightarrow \frac{M C_W}{n I_{tS}} = \sigma_{a\,W}$ ($C_W \to 15$) $\hookrightarrow \frac{M C_S}{I_{tS}} = 1120$ ($C_S \to 16$)

$M_1 = 13.28\ t.m$ ✗ $M_2 = 8.3\ t.m$ ✓

ظرفیت خمشی

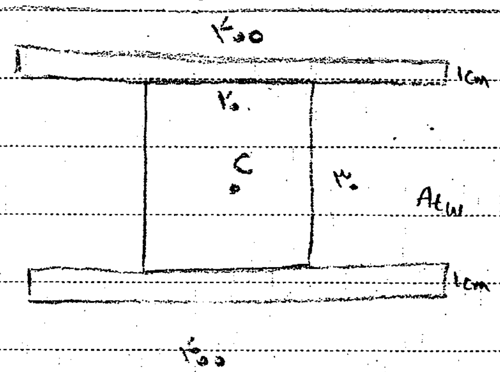
تشخیص مصالح حاکم بر ظرفیت تیر :

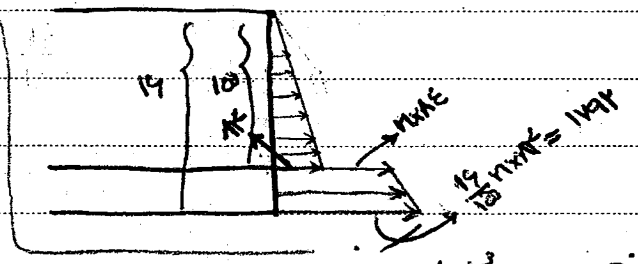
فرض می‌کنیم چوب حاکم است . $(\sigma_{max})_W = 84 \longrightarrow (\sigma_{max})_S = \frac{16}{15}\times n \times 84$ ✗

" " فولاد " " $\sigma_{max} = 1120$ $(\sigma_{max})_W = \frac{15}{16}\times\frac{1}{20}\times1120 = 54 < 84$ ✓

PAPCO

برای آنکه در این تیر فولاد و چوب همزمان تسلیم شوند از چه نوع فولاد با چه ظرفیتی باید استفاده شود؟





با مقطع تبدیل یافته چوب مسأله را بررسی کنید.

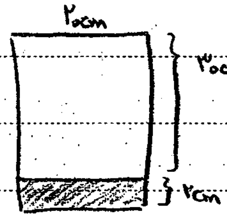
مرکز سطح همان جاست که می‌نشیند تغییر نمی‌کند.

$$I_{tw} = \frac{200\,(32)^3}{12} - \frac{(380)\,(30)^3}{12} = 237466\ cm^4 \rightarrow I_{ts} = n\,I_{tw} \rightarrow I_{ts} = 11873.3$$

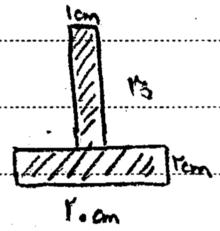
$$\sigma_{aw} = 84 = \frac{M \times 15}{237466} \qquad 1120 = \frac{M \times 16}{11873.3}$$

$$M = 13.28\ t.m \times \qquad M = 8.31\ t.m$$

با استفاده از ورق فولادی ۲cm تنها در زیر تیر مسئله را حل کنید.



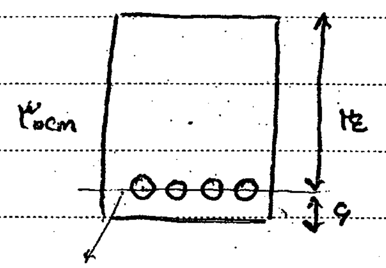
تبدیل به فولاد



$$\bar{y}_{tw} = \bar{y}_{ts} = \frac{35 + 510}{70} = \frac{55}{7}$$

$$I_{ts} = 6651.9\ cm^4 \quad C_s = \frac{55}{7} \quad C_w = \frac{169}{7}$$

مثال: «مقطع ترک نخورده»



$$E_s = 2\times10^6\ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_{as} = 2000$$

$$E_c = 2\times10^5$$

$$(\sigma_c)_c = -200$$

$$(\sigma_c)_t = +25$$

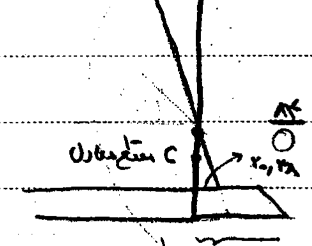
$$n = \frac{E_s}{E_c} = 10$$

$$\bar{y}_{ts} = \bar{y}_{tc} = \frac{15\times600 + 9\times4\times\pi\times6}{600 + 9\times4\times\pi\times1} = 13.57\ cm$$

$$\frac{M \times \frac{55}{7}\,cm}{6651.9\ cm^4} = 1120\ \frac{kg}{cm^2} \rightarrow M = 9.482\ t.m \times$$

تعیین کننده

$$\frac{M \times \frac{169}{7}}{20 \times 6651.9} = 84 \rightarrow M = 4.63\ t.m$$



$$\frac{84}{\sigma} = \frac{\frac{169}{7}}{\frac{41}{7}} \rightarrow \sigma = 20.28$$

نشان می‌دهد

چون تعیین کننده است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$\boxed{M_{\text{مجاز}} = ۶۹۱٫۳ \text{ Kg.m}}$ ✓

$$I_{tc} = \frac{1}{12} \times ۲۰ \times (۳۰)^۳ + ۶۰۰ \times (۱٫۴۳)^۲ + ۴ \times \frac{1}{4}\pi \times ۹ \times ۱^۳ + ۹\,(۱/۴ \times \pi \times ۱)(۷٫۵۷)^۲ = ۴۶۹۰۳٫۲۴ \text{ cm}^۴$$

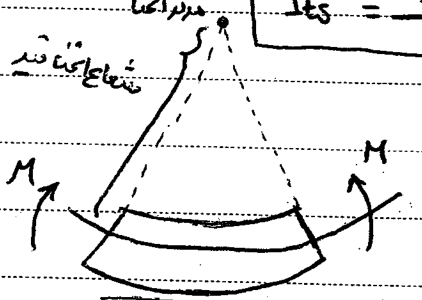
$$\frac{M\,(\overset{۱۳٫۵۷}{C_c})_t}{I_{tc} = ۴۶۹۰۳٫۲۴} = ۲۰ \rightarrow \underset{\text{تعیین‌کننده}}{\boxed{M = ۶۹۱٫۳ \text{ Kg.m}}}$$

$$\frac{M\,(\overset{۱۶٫۴۳ \text{cm}}{C_c})_c}{۴۶۹۰۳٫۲۴} = ۲۰۰ \rightarrow \boxed{M = ۵٫۷۱ \text{ t.m}}$$

$$\sigma_{as} = \frac{M\,\overset{۷٫۵۷ \text{cm}}{C_s}}{I_{ts} = \frac{۴۶۹۰۳٫۲۴}{۱۶}} = ۲۰۰۰ \rightarrow \boxed{M = ۱۲٫۴ \text{ t.m}}$$

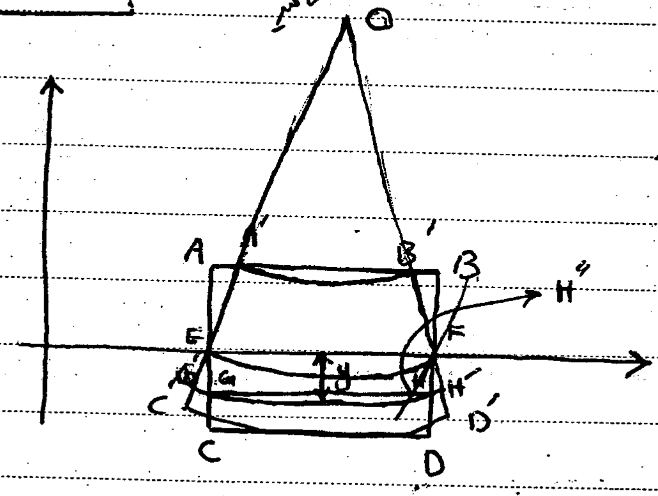
■ محاسبه تغییرشکل های ناشی از خمش:

ـ رابطه انحنا و لنگر خمشی:



$$\underset{\text{انحنا}}{\frac{1}{R}} = \frac{M}{EI}$$

شعاع انحنا



$$\Delta_{GH} = H'H''$$

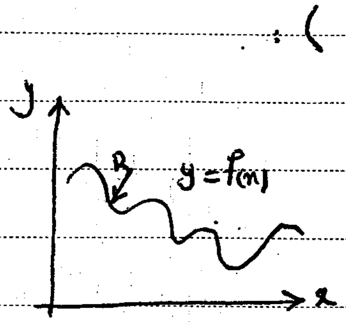
$$\varepsilon_{GH} = \frac{H'H''}{GH} = \frac{H'H''}{EF}$$

$$\overset{\triangle}{FH'H''} \sim \overset{\triangle}{OEF}$$

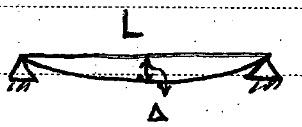
$$\frac{H'H''}{EF} = \frac{y}{R} \qquad \boxed{\varepsilon = \frac{y}{R}} \qquad \boxed{b = \frac{1}{R}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله تغییرشکل ارتجاعی تیر (معادله منحنی الاستیک یا تابع خیزهای تیر) :



$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{y''}{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}}}$$



$\rightarrow \Delta < \frac{L}{360}$ آیین‌نامه

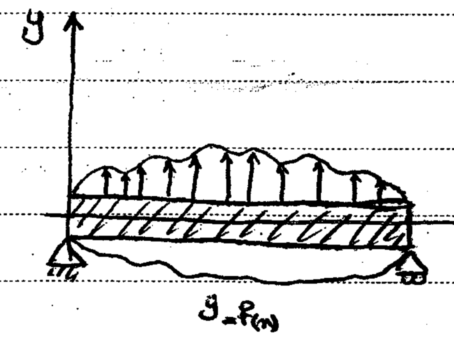
☑ معادله دیفرانسیل دقیق تغییرشکل های تیر :

$$\frac{y''}{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_{(x)}}{EI}$$

☑ معادله دیفرانسیل تیر با تغییرشکلهای کوچک :

$$y'' = \frac{M_{(x)}}{EI}$$

روش انتگرال‌گیری متوالی برای محاسبه تغییرشکلهای تیر



$q_{(x)}$ تابع شدت بارگذاری تیر

$$V_{(x)} = \int q_{(x)} dx + V_0$$

$$M_{(x)} = \int V_{(x)} dx + M_0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_{(x)}}{EI} \qquad y' = \int \frac{M_{(x)}}{EI} dx = tg\theta \simeq \theta_{(x)}$$

$$\theta_{(x)} = \int \frac{M_{(x)}}{EI} + \theta_0 \qquad y_{(x)} = \int \theta_{(x)} dx + y_0$$

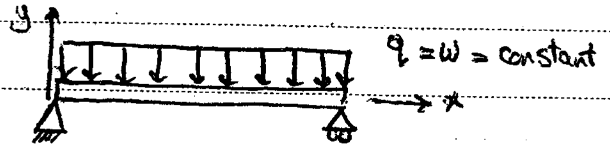
Subject:

Year. Month. Date. ( )

- اگر تیر مستقیم و منشوری (EI ثابت) باشد ، منحنی تغییرشکل تیر ۴ درجه بالاتر از تابع شدت بار تیر است.

معادله

مثال) منحنی تغییرشکل ارتجاعی یک تیر ساده تحت تاثیر بار گسترده یکنواخت را بدست آورده ، خیز ماکسیمم تیر را محاسبه کنید.



$$q_{(x)} = -w \rightarrow V_{(x)} = \int -w\,dx = -wx + V_0$$

$$M_{(x)} = \int (-wx + V_0)\,dx = \frac{-wx^2}{2} + V_0 x + \cancel{M_0}^{\,0} \rightarrow M_{(x)} = \frac{-wx^2}{2} + \frac{wL}{2}x$$

$$\theta_{(x)} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{wx^3}{6} + \frac{wLx^2}{4}\right) + \theta_0 \qquad y_{(x)} = \frac{1}{EI}\left(\frac{-wx^4}{24} + \frac{wLx^3}{12}\right) + \theta_0 x + \cancel{y_0}^{\,0}$$

$$\Big|_0^0 \quad \Big|_0^L \rightarrow \boxed{\theta_0 = -\frac{wL^3}{24EI}} \qquad \frac{-wL^2}{2} + V_0 L = 0 \rightarrow \boxed{V_0 = \frac{wL}{2}}$$

$$y_{(x)} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{wx^4}{24} + \frac{wLx^3}{12} - \frac{wL^3 x}{24}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{1}{EI}\left(\frac{-wx^3}{6} + \frac{wLx^2}{4} - \frac{wL^3}{24}\right) = 0$$

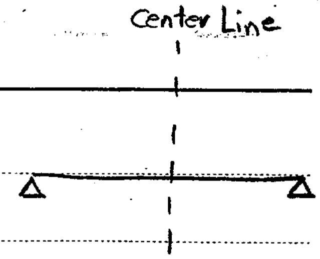
در کلیه سازه های متقارن (تقارن هندسی (طول - زاویه) ، شرایط تکیه گاهی ، مشخصات مکانیکی ، بارگذاری) در محل تلاقی محور تقارن

با سازه می بایست شیب و نیروی برشی تیر صفر باشد. توجه شود که در محل تقارن اگر تکیه گاه وجود داشته باشد نیروی برشی ناپیوستگی

داشته و نیروی برشی صفر نبوده آن قابل تعریف نیست در این نقطه ناپیوستگی دارد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

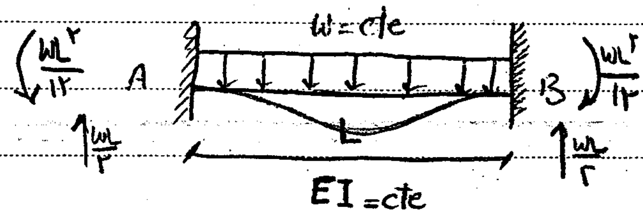
$$\begin{cases} x = \frac{L}{2} \\ \theta_{(x)} = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{y_{max} = -\frac{5}{384}\frac{WL^4}{EI}}$$



کلیه خیزهای بیشینه تحت بارگذاری یکنواخت می‌باید مضرب $\frac{WL^4}{EI}$ باشد. مضرب آن به حل معادله دیفرانسیل و شرایط تکیه‌گاهی بستگی دارد و کلیه شیب‌های آن مضرب $\frac{WL^3}{EI}$ دارند.

$$\boxed{\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{q_{(x)}}{EI}}$$ معادله دیفرانسیل تیر

مثال)



$q_{(x)} = -W$

$V_{(x)} = -Wx + V_0$

$$M_{(x)} = -\frac{Wx^2}{2} + V_0 x + M_0 \qquad \theta_{(x)} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{Wx^3}{6} + \frac{V_0 x^2}{2} + M_0 x\right) + \cancel{\theta_0}^{\,0}$$

$$A\Big|_{\theta_0 = 0}^{x=0} \longrightarrow \quad y_{(x)} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{Wx^4}{24} + \frac{V_0 x^3}{6} + \frac{M_0 x^2}{2}\right) + \cancel{y_0}^{\,0}$$

$$\Big|_{\theta=0,\ y=0}^{L} \quad \begin{cases} \theta(x=L) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{WL^3}{6} + \frac{V_0 L^2}{2} + M_0 L\right) = 0 & \times \frac{6}{L} \\ y(x=L) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{WL^4}{24} + \frac{V_0 L^3}{6} + \frac{M_0 L^2}{2}\right) = 0 & \times \frac{24}{L^2} \end{cases}$$

$$\boxed{V_0 = \frac{WL}{2}} \qquad \boxed{M_0 = \frac{-WL^2}{12}}$$

$$M_{(x)} = \frac{-Wx^2}{2} + \frac{WLx}{2} - \frac{WL^2}{12} \qquad y_{(x)} = \frac{1}{EI}\left(\frac{-Wx^4}{24} + \frac{WLx^3}{12} - \frac{WL^2x^2}{24}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{L}{2} \\ y_{max} = \boxed{\frac{-1}{384}\frac{WL^4}{EI}} \end{cases}$$

PAPCO

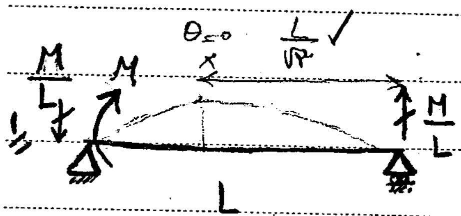
Subject:

Year. Month. Date. ( )

تمرین

معادله منحنی الاستیک تیر مقابل را بدست آورید نمودارهای برشی و خمشی را مشخص کنید و خیز ماکسیمم و محل آن را مشخص کنید.

$L, EI \to cte$ $\qquad q=0$ $\qquad \theta(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-Mx^2}{2L}+Mx\right)+\theta_0$



$V(x) = \frac{-M}{L}$

$M(x) = \frac{-Mx}{L}+M$

$y(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-Mx^3}{6L}+\frac{Mx^2}{2}\right)+\theta_0 x+\cancel{y_0}$

$\left.\right|_{y=0}^{x=L} \to L\theta_0+\left(\frac{ML^2}{2}-\frac{ML^2}{6}\right)\times\frac{1}{EI}=0 \to \boxed{\theta_0 = \frac{-ML}{3EI}}$

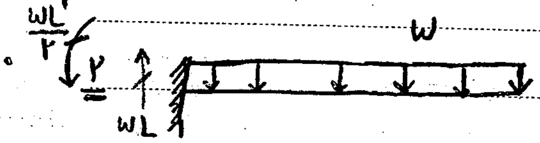
$\boxed{x = L \pm \frac{\sqrt{3}}{3}L}$

$\theta(x)=0 \to$ ماکسیمم خیز $\to \frac{-x^2}{2L}+x-\frac{L}{3}=0 \to 3x^2-6Lx+2L^2=0 \Rightarrow x=\frac{6L\pm\sqrt{36L^2-24L^2}}{6}$

$x_{\text{ماکسیمم}} = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)L = \boxed{0.42L}$

$y_{max} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{ML^2}{6}\times(0.42)^3+\frac{ML^2}{2}(0.42)^2\right)-\frac{ML^2}{3EI}\times 0.42$

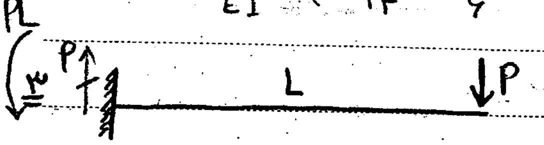
$y_{max} = \frac{ML^2}{EI}(0.064) = \boxed{64ML^2/1000EI} = \frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$



$q(x)=-w \qquad V(x)=-wx+wL \qquad M(x)=\frac{-wx^2}{2}+wLx-\frac{wL^2}{2} \qquad \theta(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{-wx^3}{6}+\frac{wLx^2}{2}-\frac{wL^2}{2}x\right)+0$

$y(x)=\frac{1}{EI}\left(-\frac{wx^4}{24}+\frac{wLx^3}{6}-\frac{wL^2}{4}x^2\right)+0$

$y_{max}=\frac{1}{EI}\left(-\frac{wL^4}{24}+\frac{wL^4}{6}-\frac{wL^4}{4}\right)=\boxed{\frac{-wL^4}{8EI}}$ در $x=L$



$q=0 \to V=P \to \boxed{M=Px-PL}$

$\theta=\frac{1}{EI}\left(\frac{Px^2}{2}-PLx\right)+\cancel{\theta_0} \to y=\frac{1}{EI}\left(\frac{Px^3}{6}-\frac{PLx^2}{2}\right)+0$

$\boxed{y_{max}=\frac{-PL^3}{3EI}}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$M_{(x)} = M \qquad \theta_{(x)} = \frac{1}{EI} Mx + \cancel{\theta_0}$$

$$y_{(x)} = \frac{Mx^2}{2EI} \rightarrow \boxed{\frac{ML^2}{2EI} = y_{max}}$$

$x=L$

* داپیوستن بدلیل
این است که از معادله دیفرانسیل
دقیق شیر
استفاده کردیم

منفذ

$+M$

$+$

M_0

w

$q = -w \rightarrow V_{(x)} = -wx + V_0$

$$M_{(x)} = \frac{-wx^2}{2} + V_0 x + M_0 \qquad \theta_{(x)} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{wx^3}{6} + \frac{V_0 x^2}{2} + M_0 x\right)$$

$$y_{(x)} = \frac{1}{EI}\left(\frac{-wx^4}{24} + \frac{V_0 x^3}{6} + \frac{M_0 x^2}{2}\right) \qquad \Big|_{y=0}^{x=L} \rightarrow \frac{-wL^4}{24} + \frac{V_0 L^3}{6} + \frac{M_0 L^2}{2} = 0$$

$$\boxed{3M_0 + V_0 L = \frac{wL^2}{4}} \qquad V_0 L - \frac{wL^2}{2} + M_0 = 0$$

$$\frac{-wL^2}{4} = 2M_0 \rightarrow M_0 = \frac{-wL^2}{8} \qquad \boxed{V_0 = \frac{5wL}{8}}$$

$$\frac{-x^3}{6} + \frac{5L}{16}x^2 - \frac{L^2}{8} = 0$$

$x = 0/96L$ و $0/915L$

$$\boxed{y_{max} = -0/0021\frac{wL^4}{EI}}$$

$$y = -0/0013\frac{wL^4}{EI}$$

انواع ناپیوستگی در توابع تیرها :

۱ـ ناپیوستگی در $q_{(x)}$ (بار متمرکز ـ تغییر ناگهانی ـ ....)

۲ـ " " $V_{(x)}$ "

۳ـ " " $M_{(x)}$ "

۴ـ " " $\theta_{(x)}$ در محل مفصل داخلی

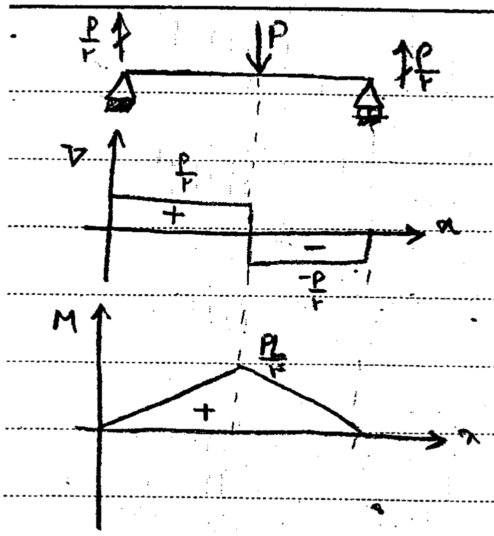
۵ـ " " $y_{(x)}$ در محل مفصل برشی

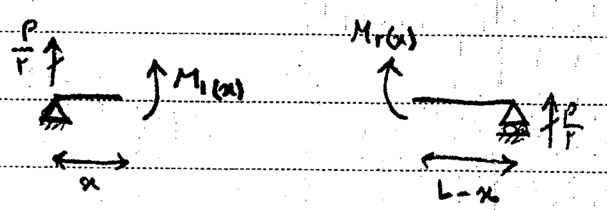
PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال)

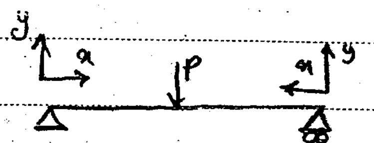




$0<x\le\frac{L}{2}$	$\frac{L}{2}\le x<L$
$M_1(x)=\frac{Px}{2}$	$M_2(x)=\frac{-Px}{2}+\frac{PL}{2}$
$\theta_1=\frac{1}{EI}\left(\frac{Px^2}{4}\right)+\theta_{01}$	$\theta_2=\frac{1}{EI}\left(\frac{-Px^2}{4}+\frac{PLx}{2}\right)+\theta_{02}$
$y_1=\frac{1}{EI}\left(\frac{Px^3}{12}\right)+\theta_{01}x+\cancel{y_{01}}$ (0)	$y_2(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{-Px^3}{12}+\frac{PLx^2}{4}\right)+\theta_{02}x+y_{02}$

$$\theta_1\left(x=\frac{L}{2}\right)=\theta_2\left(x=\frac{L}{2}\right)$$

$$y_1\left(x=\frac{L}{2}\right)=y_2\left(x=\frac{L}{2}\right)$$



شرایط در دستگاه مختصات را استفاده میکنیم

$0<x_1\le\frac{L}{2}$	$0<x_2\le\frac{L}{2}$
$M_1=\frac{Px}{2}$	$M_2=\frac{Px}{2}$
$\theta_1=\frac{1}{EI}\left(\frac{Px^2}{4}\right)+\theta_{01}$	$\theta_2=\frac{1}{EI}\left(\frac{Px^2}{4}\right)+\theta_{02}$
$y_1=\frac{1}{EI}\left(\frac{Px^3}{12}\right)+\theta_{01}x+\cancel{y_{01}}$ (0)	$y_2=\frac{1}{EI}\left(\frac{Px^3}{12}\right)+\theta_{02}x+\cancel{y_{02}}$ (0)

$$\theta_1\left(x_1=\frac{L}{2}\right)=-\theta_2\left(x_2=\frac{L}{2}\right)$$

$$y_1\left(x_1=\frac{L}{2}\right)=y_2\left(x_2=\frac{L}{2}\right)$$

$$\theta_1\left(x=\frac{L}{2}\right)=\frac{1}{EI}\left(\frac{PL^2}{16}\right)+\theta_{01}=\frac{-1}{EI}\left(\frac{PL^2}{16}\right)-\theta_{02}$$

$$\theta_{01}=\theta_{02}=\frac{-PL^2}{16EI}$$

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{96}\right)+\frac{\theta_{01}L}{2}=\frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{96}\right)+\frac{\theta_{02}L}{2}$$

$$\theta_{01}=\theta_{02}$$

PAPCO

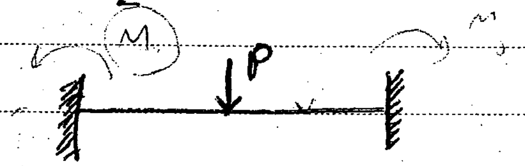
$$y_{1}(x) = y_{2}(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{Px^{3}}{12} - \frac{PL^{2}x}{16}\right)$$

$$\boxed{y_{max} = \frac{-PL^{3}}{48EI}} = \frac{P}{K} = \Delta$$

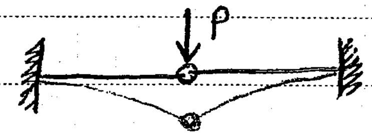
$$\theta\left(x=\frac{L}{2}\right) = 0$$

$K = \frac{48EI}{L^{3}}$ سختی خمشی

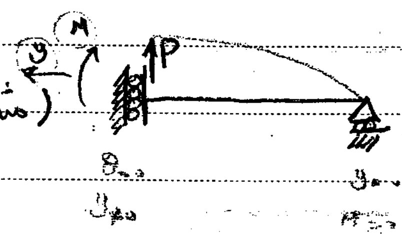
مثال)



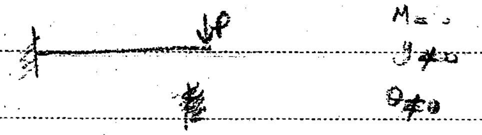
مثال)



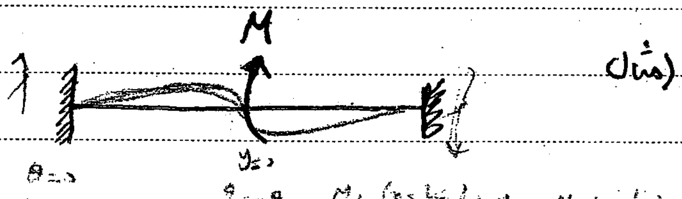
مثال)



معادل ≈

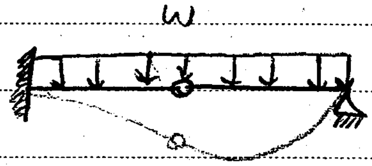


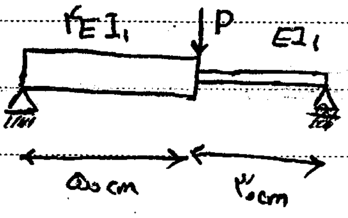
مثال)



$M_1(x=\frac{L}{2}) + M = M_2(x=\frac{L}{2})$

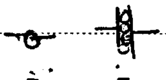
مثال)





$E = 2\times10^{6}$

$I_1 = 1000\ cm^{4}$



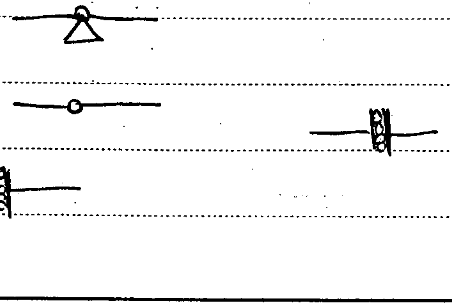
مفصل های برشی و خمشی در صورتی نمی توانند برش و لنگر را

منتقل کنند که در محل آن ها تکیه گاه وجود داشته باشد.

در غیر اینصورت یعنی داشتن امکان جابجایی به واسطه ی به ترتیب

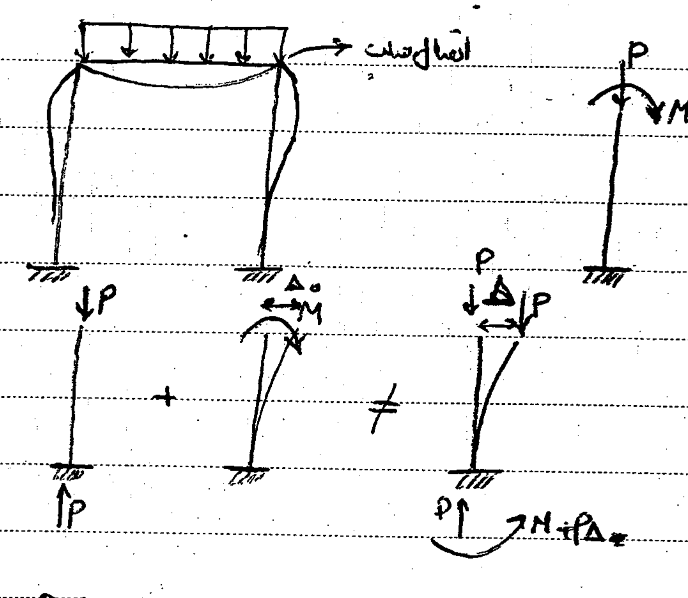
برای مفصل خمشی

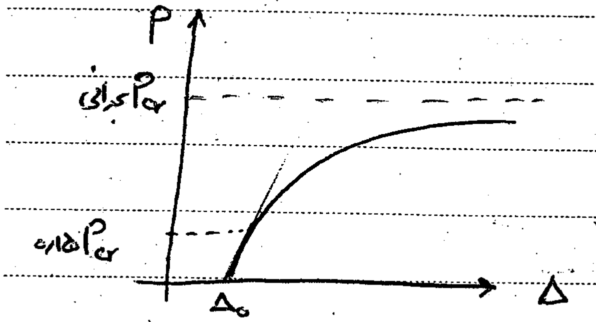
ممان و برشی به برش و لنگر را انتقال می دهند.



Subject:
Year. Month. Date. ( )

خمش توأم با نیروی محوری :

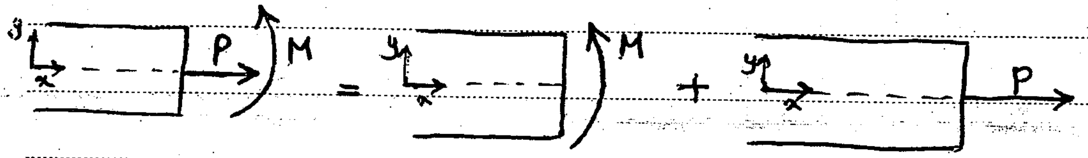


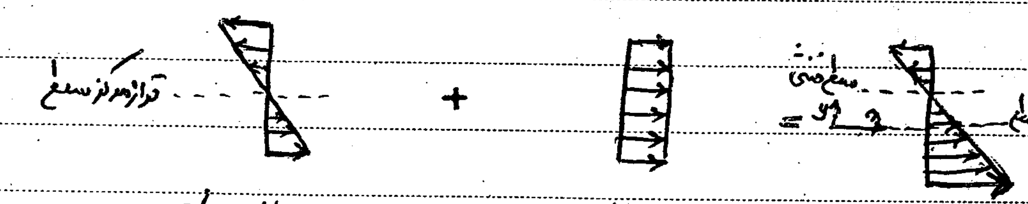


$$\Delta_0 = \frac{ML^2}{2EI}$$

نشون میده بیشتر تا Δ_0 کم باشد

"PΔ effect"





$$\sigma = \frac{-My}{I} \qquad \sigma = \frac{P}{A} \qquad \sigma = \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$$

موقعیت محور خنثی $\sigma = 0 \longrightarrow y = \frac{P}{M}\cdot\frac{I}{A} = \boxed{\frac{P}{M}K^2}$

شعاع چرخش

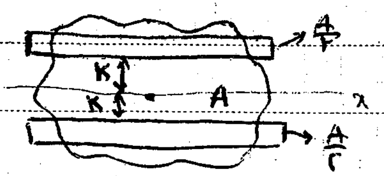
$$\frac{P}{A} = \frac{My}{I} \longrightarrow y = \frac{P}{M}K^2 = \frac{P}{M}r^2$$

شعاع ژیراسیون

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

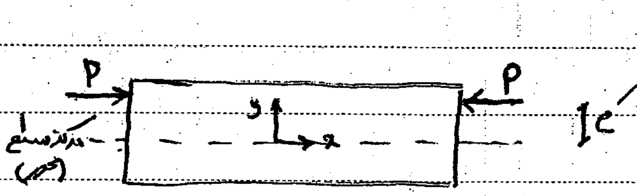


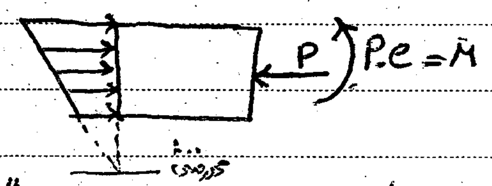
شعاع ژیراسیون $K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$

- در خمش توام با نیروی محوری سطح خنثی و در نتیجه محور خنثی از سطح مقطع نمی‌گذرد و در محل مرکز مقطع مقدار تنش $\frac{P}{A}$ است.

$$\boxed{\sigma_{max} = \left|\frac{P}{A}\right| + \left|\frac{M}{S}\right|}$$

نیروی محوری خارج از مرکز سطح:





$$\sigma = \frac{-P}{A} - \frac{My}{I} = -P\left(\frac{1}{A}+\frac{ey}{I}\right) \xrightarrow{\sigma=0} y = \frac{-I}{Ae} = \frac{-K^2}{e}$$ موقعیت محور خنثی

P فاکتور می‌شود و در موقعیت محور خنثی تاثیر ندارد

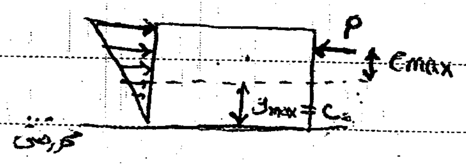
- موقعیت محور خنثی از مقدار نیروی محوری مؤثر مستقل است بلکه به محل تاثیر نیرو بستگی کامل دارد.

- مقدار نیروی مؤثر در مقدار تنش‌ها مؤثر است نه در علامت آنها

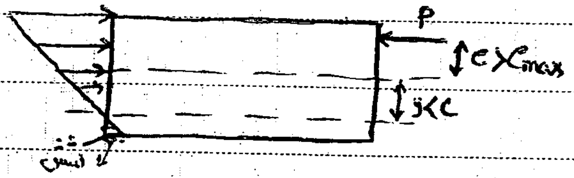
- علامت منفی دلالت بر این دارد که موقعیت محور خنثی و محل تاثیر نیروی محوری همواره در دو طرف مرکز سطح مقطع خواهند بود و در یک طرف نخواهند بود.

PAPCO

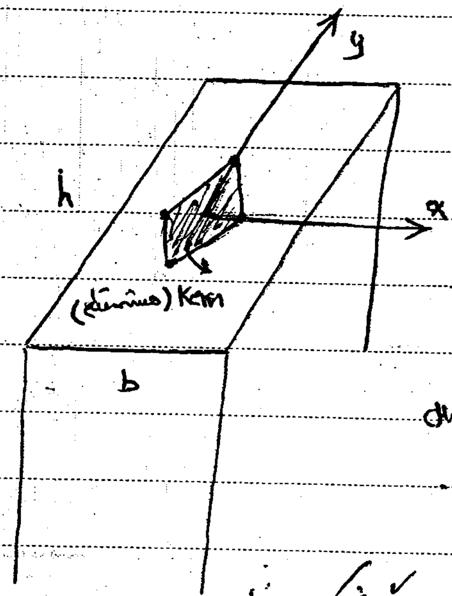
Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$C = \frac{-I}{A\,e_{max}} \longrightarrow e_{max} = -\frac{I}{A\cdot C} = \frac{-K^2}{C} = -\frac{S}{A}$$



* مقاومت مصالح ۲

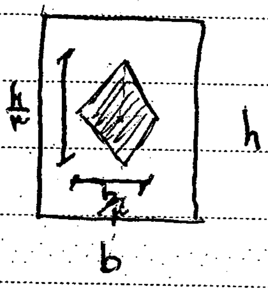


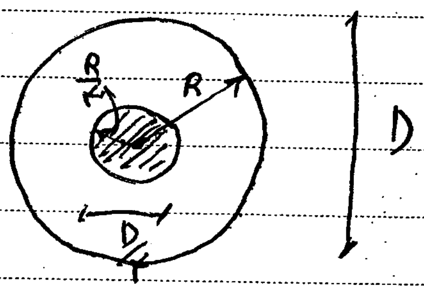
هسته مقطع Kern: برای هر شکل هندسی به عنوان مقطع یک ستون، ناحیه ای وجود دارد که اگر نیروی محوری در این ناحیه اثر کند، تنش های ایجاد شده در سرتاسر مقطع هم علامت خواهند بود و محور خنثی داخل مقطع نخواهد بود.

- اگر نیروی محوری در مرزهای هسته مقطع اثر کند محور خنثی بر یکی از لبه های شکل مماس شده و یا از یکی از گوشه های مقطع می گذرد اما وارد آن نخواهد شد.

- هسته ی یک مقطع که دارای n گوشه ی خارجی است یک n ضلعی است که به ازای هر گوشه یک ضلع.

- هسته ی مقطع شکل های توخالی بزرگتر از هسته مقطع شکل های توپر است.

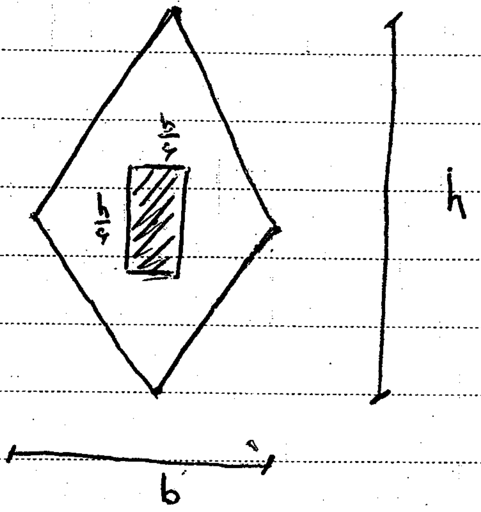


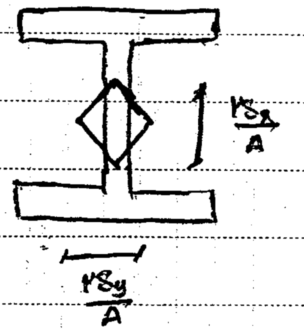


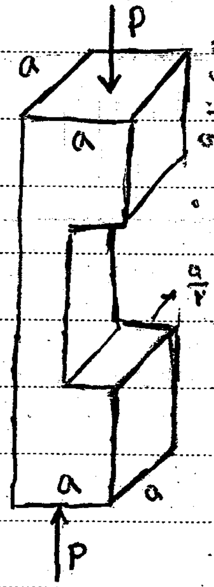
برای هسته مقطع یا Kern ثابت می شود که همواره محدب است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



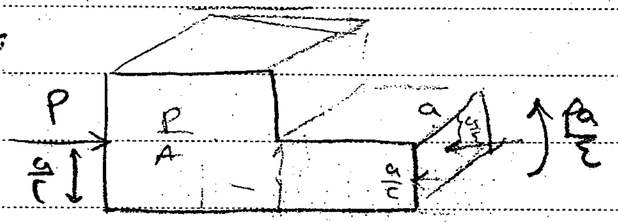




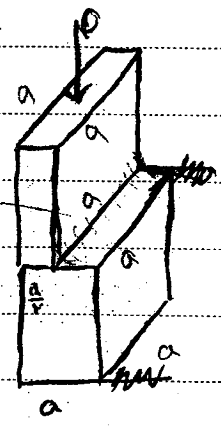
تمرین: رسم توزیع تنش در مقطع

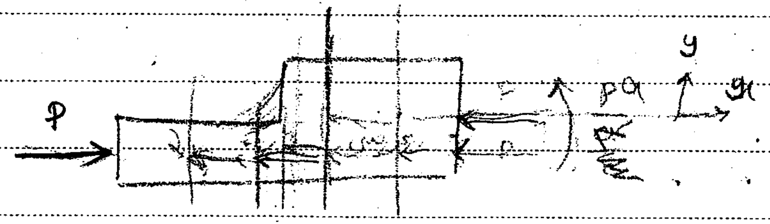
درگوشه‌های تیز تمرکز تنش بیشتر است پس بهتر است

تغییر مقطع ناگهانی صورت نگیرد.



$$\sigma = \frac{-P}{\frac{a^2}{2}} - \frac{P\frac{a}{4} \times y}{\frac{1}{12} \times a \times \frac{a^3}{8}}$$





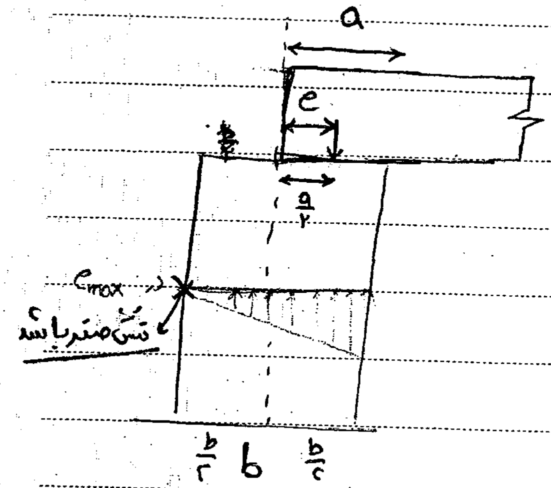
تمرین:

تنش در قسمت ضخیم $= \frac{-P}{a^2} - \frac{\frac{Pa}{2} \times y}{\frac{1}{12}a^4} = \frac{-P}{a^2} - \frac{6Py}{a^3}$?

موقعیت کمترین تنش $y = \frac{-a}{3}$ $= \frac{-5P}{a^3}$

σ در قسمت دیگر $= \frac{-2P}{a^2}$

مثال) تعیین کنید حداقل طول نشیمن یک تیر ساده بر روی یک دیوار آجری به پهنای b چقدر باید باشد تا این دیوار دچار کشش نشود

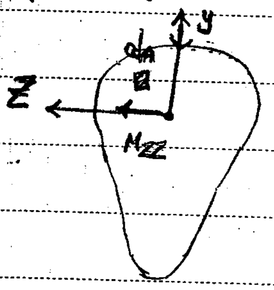


$$e = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = e_{max} = \frac{b}{6}$$

$$a \geq \frac{2b}{3}$$

$$\frac{P}{b\times 1} - \frac{P\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right) y}{\frac{1}{12}\times 1 \times b^3} = 0 \qquad y = \frac{b}{2}$$

خمش نامتقارن :



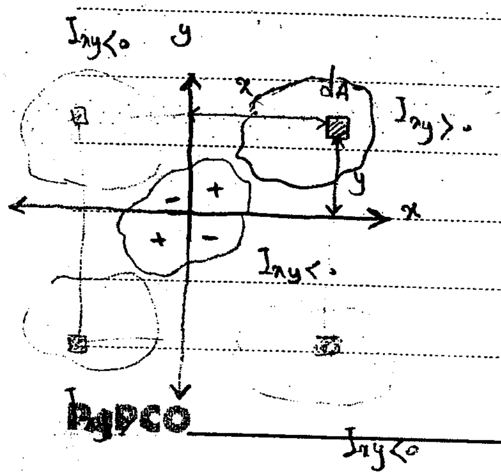
$$\sigma_{xx} = \frac{-M_{zz}\, y}{I_{zz}}$$

$$\int_A dM_{zz} = \int_A y\, dF = \int_A y\cdot\sigma\, dA \rightarrow \int_A y \frac{-M_{zz}\times y}{I_{zz}} dA = \frac{-M_{zz}}{\cancel{I_{zz}}}\int_A y^2 dA$$

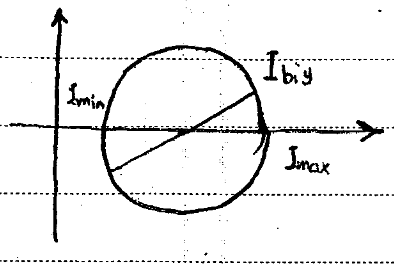
$$\int dM_{yy} = \int_A z\cdot\frac{M_{zz}\, y}{I_{zz}} dA = \frac{M_{zz}}{I_{zz}}\underbrace{\int_A zy\, dA}_{I_{yz}=0}$$

$$M_{yy} = M_{zz}\left(\frac{I_{yz}}{I_{zz}}\right)$$

« لنگرهای دوم سطح »



Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$I_{xx} = \int_A y^2 dA > 0$$

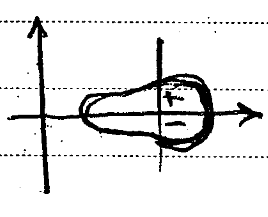
$$I_{yy} = \int_A x^2 dA > 0$$

$$I_{xy} = \int_A xy\, dA$$

محورهای اصلی: برای هر شکل هندسی دو محور عمود بر هم موجود دارد که از مرکز سطح آن می‌گذرند و همان اینرسی حاصل ضرب نسبت به آنها صفر است. این محورها محورهای اصلی شکل نامیده می‌شوند و ممان اینرسی‌های سطح I_{xx} و I_{yy} به طور همزمان به ترتیب مقادیر I_{max} و I_{min} را خواهند داشت.

مراحل یافتن محورهای اصلی:

① یافتن مرکز سطح ② عبور دادن دو محور عمود بر هم و گذرنده از مرکز سطح ③ و I_{xx} و I_{yy} و I_{xy} را نسبت به آنها محاسبه می‌کنیم ③ هرگاه شکل دارای یک محور تقارن باشد یکی از محورهای اصلی همان محور تقارن است و بنابر اصل تعامد محور اصلی هم خط محوری است که از محل مرکز سطح بر محور تقارن رسم می‌شود.



④ $I_{\text{دورتر}}$ $\oplus I_{xy}$ و $I_{\text{نزدیکتر}}$ $\ominus I_{xy}$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تعمیم به‌کارگیری رابطه‌ی $\frac{My}{I}$ برای شکل‌های نامتقارن:

هرگاه شکل مقطع تیر فاقد محور تقارن باشد ولی نیروهای وارد بر تیر موازی یکی از محورهای اصلی تیر باشند

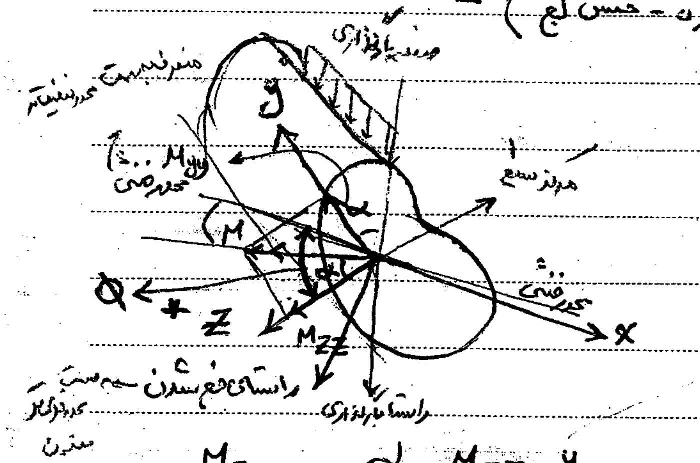
می‌توان همچنان توزیع تنش‌های ناشی از خمش را با رابطه‌ی اساسی $\sigma=\frac{My}{I}$ بدست آورد. بدیهی است

شرط اصلی به‌کارگیری این رابطه (متقارن و بارگذاری در صفحه تقارن) حالت خاصی از موضوع فوق است زیرا محور تقارن

همواره یکی از محورهای اصلی مقطع است. ← «M عمود بر راستای بارگذاری»

skew bending

خمش نامتقارن (خمش مورب - خمش کج)



$$M \angle \alpha \quad \begin{cases} M_{zz} = M\cos\alpha \\ M_{yy} = M\sin\alpha \end{cases}$$

(خمش تام با نیرو محوری)

محور خنثی از مرکز سطح مقطع می‌گذرد.

↓ جمع آثار

$$M_{zz} \rightarrow \sigma = -\frac{M_{zz}\cdot y}{I_{zz}} \quad + \quad M_{yy} \rightarrow \sigma = +\frac{M_{yy}\cdot Z}{I_{yy}}$$

تفاوت در درست کردن علامت‌ها

$$\sigma = \frac{-M_{zz}\,y}{I_{zz}} + \frac{M_{yy}\,z}{I_{yy}} \Rightarrow \frac{\cos\alpha\, y}{I_{zz}} + \frac{\sin\alpha \cdot z}{I_{yy}} = 0$$

$$\frac{M_{zz}\,y}{I_{zz}} = \frac{M_{yy}\,z}{I_{yy}}$$ → معادله خط گذرنده از مرکز سطح — معادله محور خنثی

و ۰ در آن صادق است.

$$y = \left(tg\alpha \cdot \frac{I_{zz}}{I_{yy}}\right)\cdot z \qquad tg\varphi = tg\alpha\,\frac{I_{zz}}{I_{yy}}$$

ضریب زاویه محور خنثی

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$I_{zz} \neq I_{yy} \rightarrow \phi \neq \alpha$ انحنای تیر خارج از صفحه بارگذاری خواهد بود

Skew bending

هرگاه در یک شکل هندسی بیش از ۲ محور تقارن داشته باشد

$I_{zz} > I_{yy} \rightarrow \phi > \alpha$

$I_{zz} < I_{yy} \rightarrow \phi < \alpha$

چون ممان اینرسی حاصل ضرب نسبت به محور تقارن صفر است و

$I_{zz} = I_{yy} \rightarrow \phi = \alpha$

دایره موهر ممان اینرسی پس از دوبار دوران به زاویه ۱۸۰° می تواند محور I را قطع کند

در چنین شکل های شعاع دایره موهر ممان اینرسی صفر خواهد بود $I_{max} = I_{min} \rightarrow R = 0$

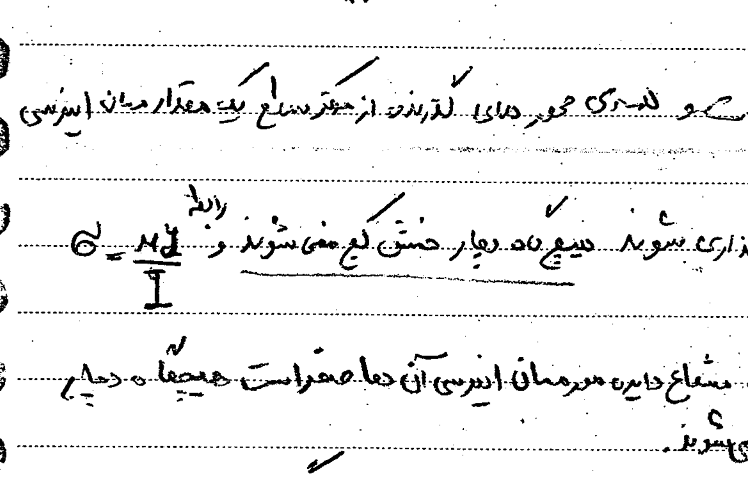
و این شکل ها هر محوری که از مرکز سطح بگذرد محور اصلی است و تمامی محورهای گذرنده از مرکز سطح یک مقدار ممان اینرسی

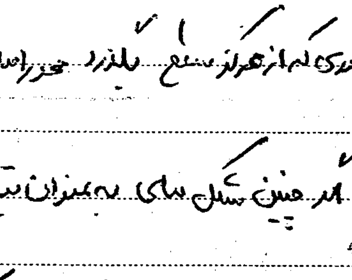
دارند. بنابراین اگر چنین شکل های به عنوان تیر بارگذاری شوند هیچ گاه دچار خمش کج نمی شوند و رابطه $\sigma = \frac{My}{I}$

در همان راستا قابل استفاده است. * شکل هایی که شعاع دایره موهر ممان اینرسی آن ها صفر است هیچگاه دچار خمش کج نمی شوند.

* **مثال)** اگر تیر چوبی سقف شیبدار شکل مقابل مستطیل به ابعاد 100x150 mm باشد و شدت بار گسترده این تیر

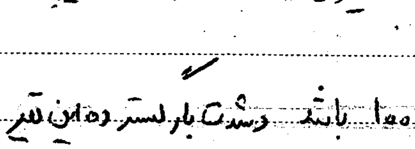
$q = \frac{4}{3} \frac{KN}{m}$ ، حداکثر تنش های کششی و فشاری ناشی از خمش را و در آن تعیین کنید و محور خنثی تیر را نمایش دهید





$M_{zz} = M\cos\alpha = 1.5\cos 30° = 1.3\ KN.m$

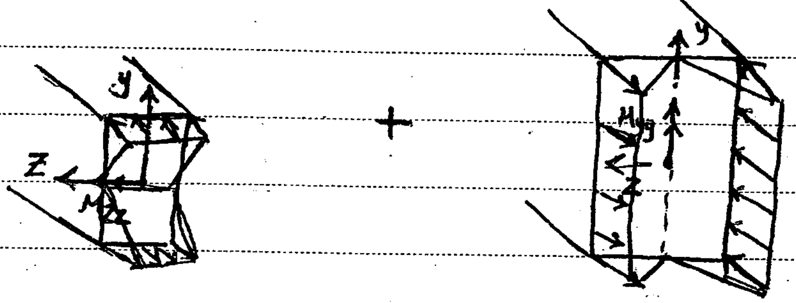
$M_{yy} = 0.75\ KN.m = M\sin\alpha$



$\rightarrow M_{max} = \frac{qL^2}{8} = \boxed{1.5\ KN.m}$ (وسط تیر)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\sigma = \frac{-M_{zz} \cdot y}{I_{zz}} \qquad \sigma = \frac{+M_{yy}\, Z}{I_{yy}}$$



$$I_{zz} = \frac{۱۰۰ \times ۱۵۰^{۳}}{۱۲} = ۲۸/۱۲۵ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$$

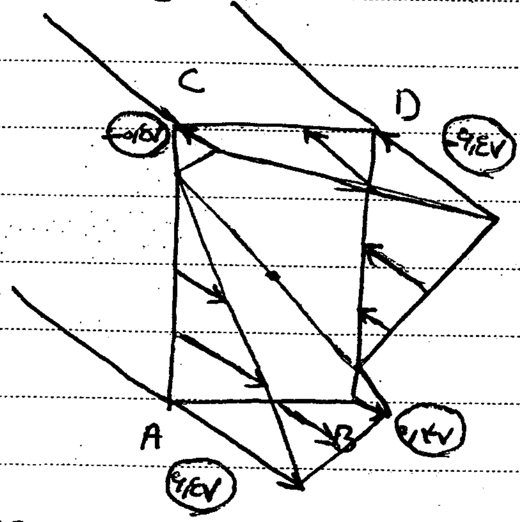
$$I_{yy} = \frac{۱۵۰ \times ۱۰۰^{۳}}{۱۲} = ۱۲/۵ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$$

$$\sigma_{max} = \left| \frac{۱/۳ \times ۱۰^{۶} \times ۷۵}{۲۸/۱۲۵ \times ۱۰^{۶}} \right| = ۳/۴۷\ MPa \qquad M_{zz}$$

$$\sigma_{max} = \left| \frac{۰/۳۷۵ \times ۱۰^{۶} \times ۵۰}{۱۲/۵ \times ۱۰^{۶}} \right| = ۳\ MPa \qquad M_{yy}$$

$$(\sigma_{max})_c = -۶/۴۷ \qquad (\sigma_{max})_t = ۶/۴۷$$

$$tg\phi = \frac{I_{zz}}{I_{yy}} \cdot tg\alpha = ۱/۳ \longrightarrow \phi = ۵۲/۴ > \alpha$$



$$\sigma_A = \frac{M_{zz}}{S_{zz}} + \frac{M_{yy}}{S_{yy}}$$

B = + " − "

C = − " + "

D = − " − "

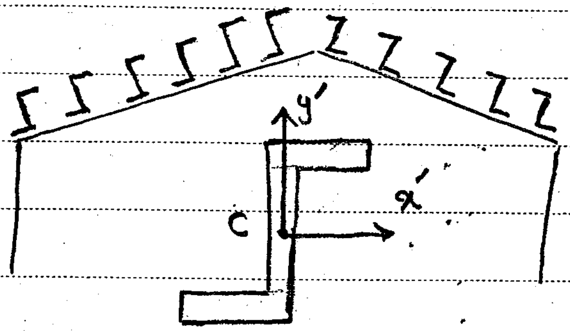
PAPCO

Subject:

Year.   Month.   Date.   ( )

$$\bar{y}=\frac{(2.5)(5b)+(197.5)(5b)+100\times950}{10b+950}=\frac{1000b+95000}{10b+950}=100$$

$$\bar{x}=\frac{5b\times\frac{b}{2}+5b\times(\frac{3b}{2}-5)+(b-2.5)(950)}{10b+950}$$

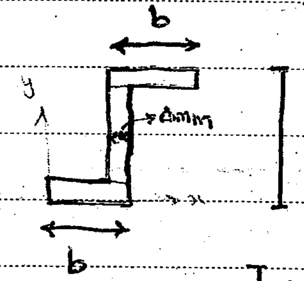


$$\bar{x}=\frac{\frac{5b^2}{2}+\frac{15b^2}{2}-25b+950b-2375}{10b+950}$$

$$\bar{x}=\frac{10b^2+925b-2375}{10b+950}$$

تعیین کنید چنانکه برای یک سقف با شیب ۳۰° بخواهیم پروفیل Z استاندارد شده از ورق با ضخامت 5mm تولید شود

و ارتفاع سوراخ‌بندی آن 200mm باشد اندازه بال‌های شکل Z چقدر باید باشد؟

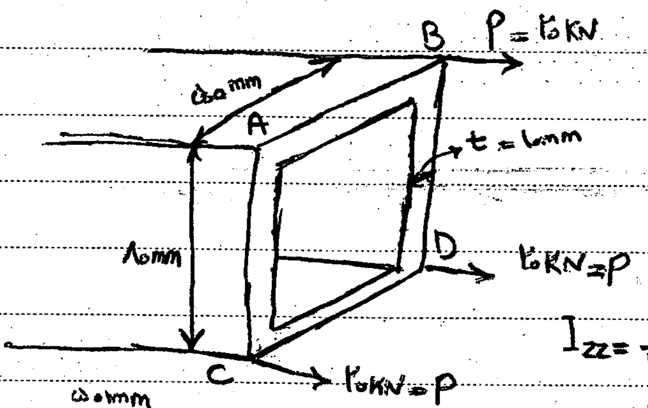


$$\bar{x}=\frac{10b^2+950b-25b-2375}{10b+950}=\boxed{b-2.5}$$

$$I_{x'x'}=\frac{1}{12}\times5\times(190)^3+\left[\frac{1}{12}\times b\times5^3+5b\times(97.5)^2\right]\times2$$

$$I_{y'y'}=\frac{1}{12}\times190\times5^3+\left(\frac{1}{12}\times5\times b^3+(\frac{b}{2}-2.5)^2\times5b\right)\times2$$

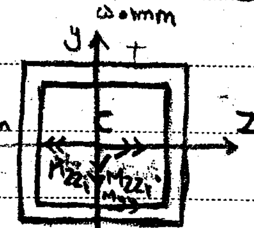
مثال) تنش در چهار گوشه مقطع و معادله‌ی محور خنثی؟



$$\sigma=\frac{P}{A}\pm\frac{M_{zz}\,y}{I_{zz}}\pm\frac{M_{yy}\,z}{I_{yy}}$$

$$I_{zz}=\frac{1}{12}\times0.05\times(0.08)^3-\frac{1}{12}\times(0.03)(0.06)^3$$

$$=10^{-8}\times213.3-10^{-8}\times54=\boxed{1.6\times10^{-6}\ m^4}$$



$M_{yy}=20\times25=500\ KN.mm=500\ N.m$

$M_{ZZ_1}=40\times40=1600\ N.m$ $M_{ZZ_2}=20\times40=800\ N.m$

$M_z=+800\ N.m$ $M_y=-500\ N.m$

$$I_{yy}=\frac{1}{12}\times(0.08)(0.05)^3-\frac{1}{12}\times(0.06)(0.03)^3=83.3\times10^{-8}-13.5\times10^{-8}=0.7\times10^{-6}\ m^4$$

$$\sigma=\frac{60\times10^3}{2400\times10^{-6}}-\frac{800\,y}{1.6\times10^{-6}}-\frac{500\,z}{0.7\times10^{-6}}=25-500y-714.3z\ (MPa)$$

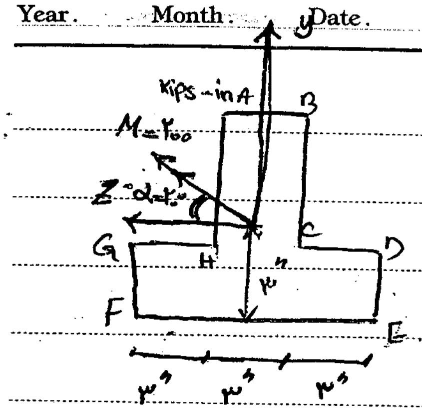
Subject:

Year. Month: Date. ( )

$\bar{y}=3\,in \qquad I_{zz}=204\,in^4 \qquad I_{yy}=135\,in^4$

$M_{zz}=187.94 \qquad M_{yy}=68.4$ kips-in

مثال) تنش در هسته‌ها و معادله محور خنثی



$\sigma = -0.92y + 0.5Z$

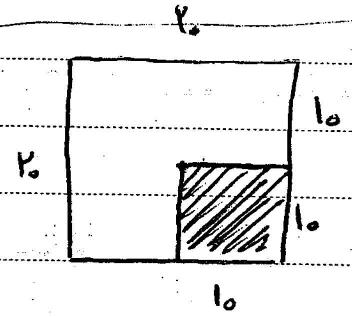
معادله محور خنثی $\Rightarrow Z = 1.84y$

$\sigma_A = -3.85 \qquad \sigma_B = -5.25 \qquad \sigma_C = 0.87 \qquad \sigma_D = -1.33 \qquad \sigma_E = 0.55$

$\sigma_F = 5.01$ kips-in $\qquad \sigma_G = 3.17 \qquad \sigma_H = 1.67$ kips-in

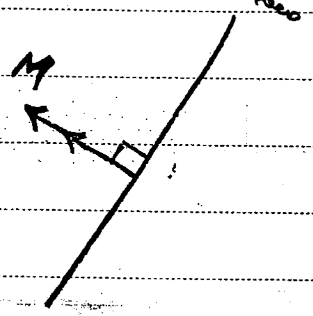
مثال)

**



$\dfrac{E_2}{E_1} = n$

?



نکته:

$\sigma_A = 25 - 500\times(0.04) - 714.3(+0.025) = -12.86$

$\sigma_B = 25 - 500(0.04) - 714.3(-0.025) = +22.86$

$\sigma_C = 25 + 20 - 17.86 = +27.14$

$\sigma_D = 25 + 20 + 17.86 = +62.86$

محور خنثی

$\boxed{25 - 500y - 714.3Z = 0}$

$I_{x'y'} = 5b(97.5)\left(\frac{b}{2} - 2.5\right)\times 2 + 0 + 0 + 0$

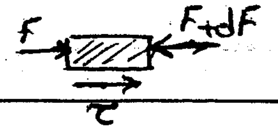
(I) $\tan 2\theta_p = \dfrac{10b(97.5)\left(\frac{b}{2}-2.5\right)\times 2}{I_{x'x'} - I_{y'y'}}$ $\qquad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$I_{x'x'} = 2885917 + 2508b + 95.0625b = 2885917 + 95083.3b$

$I_{y'y'} = 1979.2 + \frac{5}{6}b^3 + 10b\left(\frac{b^2}{4} + 6.25 - 2.5b\right) = \frac{5b^3}{2} + 62.5b - 25b^2 + 1979.2 + \frac{5}{6}b^3$

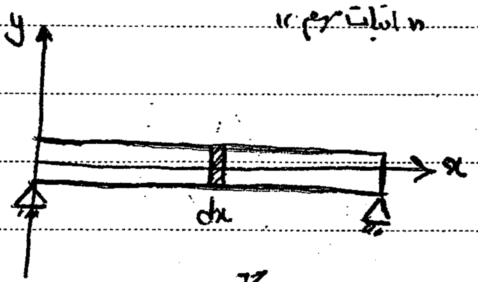
$I_{y'y'} = \frac{10}{3}b^3 - 25b^2 + 62.5b + 1979.2 \xrightarrow{I} b = \dots$

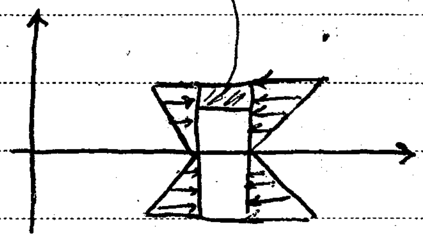
Subject:
Year. Month. Date. ( )

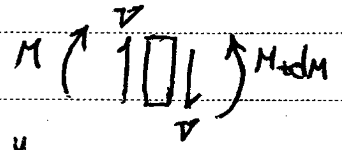


▨ تنش‌های ناشی از نیروی برشی در تیرها :

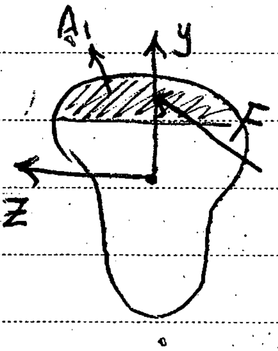
اثبات سوم







$$\sigma = \frac{-My}{I} \qquad \sigma' = \frac{-(M+dM)\,y}{I}$$



$$\int_{A_1} dF = \int_{A_1} \sigma' dA = \int_{A_1} \frac{My}{I} dA$$

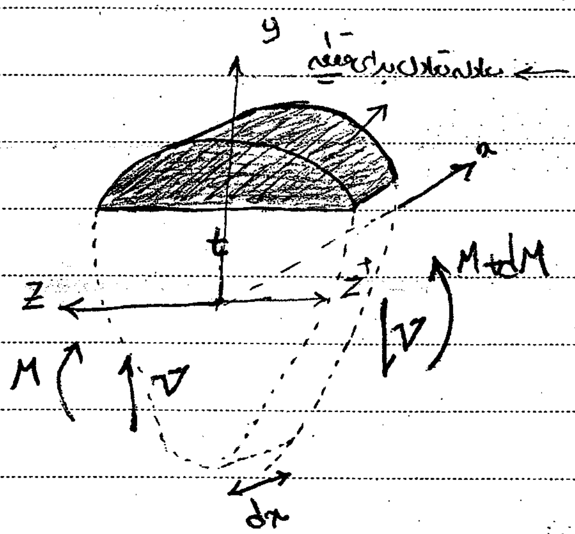
$$F = \frac{M}{I}\int_{A_1} y\,dA = \frac{MQ}{I} \rightarrow Q = A_1 . \bar{y}_1$$ گشتاور اول سطح بخشی از مقطع ۱

معادله تعادل برای مقطع ۱ ←
$$\frac{MQ}{I} - \frac{(M+dM)Q}{I} + \tau(t\,dx) = 0$$
توزیع یکنواخت τ در پهنای t

$$\tau t\,dx = \frac{dM\,Q}{I}$$ t پهنای مقطع ۱

$$\tau t = \frac{dM}{dx} . \frac{Q}{I} = \frac{V.Q}{I}$$

$$\tau = \frac{V.Q}{I.t}$$ با فرض یکنواختی توزیع τ در پهنای t



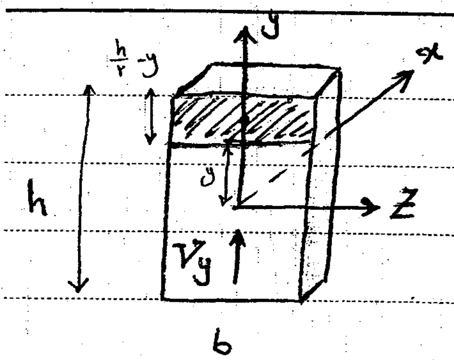
* برش و خمش هم تأثیر گذارند و از هم تأثیر می‌پذیرند.

رابطه‌ی $\tau = \frac{VQ}{It}$ رابطه‌ی اساسی توزیع تنش برشی در تیرهاست در اثبات این معادله از رابطه‌ی $\sigma = \frac{My}{I}$ استفاده شده است بنابراین تمامی شرایط برقراری آن در تیرها به این رابطه وارد می‌شود. اضافه بر آن باید توزیع τ در محل اندازه‌گیری تنش (پهنای مقطع t) یکنواخت باشد که غیر این صورت مقدار τ محاسبه شده میانگین τ در مقطع خواهد

Subject: تنش برشی میانگین $\boxed{\tau_{ave} = \dfrac{V}{A}}$

Year. Month. Date. ( )

توزیع تنش های برشی در مقطع مستطیل :

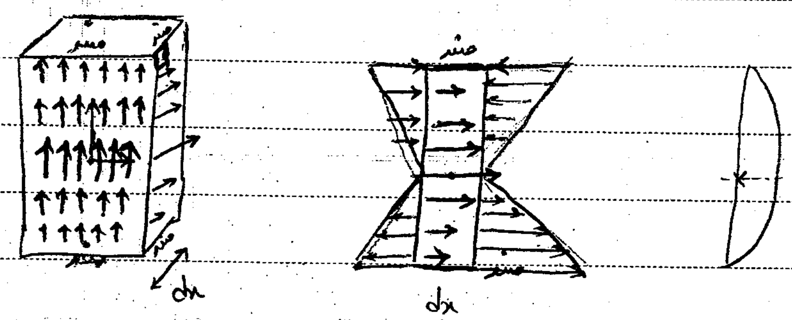


$$Q(y) = A_1 \cdot \bar{y}_1 = \left[b\left(\frac{h}{2}-y\right)\right] \cdot \left[y + \frac{\left(\frac{h}{2}-y\right)}{2}\right] = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

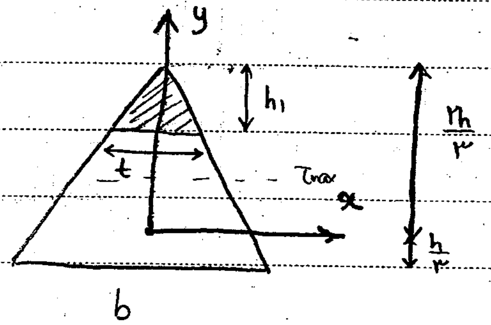
$$t = b = cte \longrightarrow \boxed{\tau_y = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)}$$

$$y = \pm\frac{h}{2} \longrightarrow \tau_{min} = 0 \quad \text{سطح آزاد}$$

$$y = 0 \longrightarrow \tau_{max} = \frac{Vh^2}{8I} = \frac{Vh^2}{8\frac{bh^3}{12}} = 1.5\frac{V}{A} = 1.5\,\tau_{ave}$$



$$\tau_{max} = \frac{Vh^2}{8I} = 1.5\,\tau_{ave}$$



تمرین

مثلث :

$$A_1 = \frac{th_1}{2} \qquad \bar{y}_1 = y + \frac{1}{3}h_1$$

$$Q = A_1\bar{y}_1 = \frac{th_1}{2} \times \bar{y}_1$$

$$\tau_{max} = \frac{3V}{bh} = 1.5\,\tau_{ave}$$

نباید بدست آوردن t

نیست حساب می‌شود

$$Q_1 = A_1\bar{y}_1 = \frac{t \times h_1}{2} \times \bar{y}_1 = \left(\frac{2y}{3} + \frac{2h}{9}\right)\left(\frac{2h}{3}-y\right) \times \frac{t}{2}$$

$$\bar{y}_1 = y + \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{3}-y\right)$$

$$h_1 = \frac{2h}{3} - y$$

$$\tau = \frac{VQ}{I \cdot t} = \frac{V}{\frac{1}{36}bh^3} \times \frac{\frac{\cancel{t}}{2}\left(\frac{2y}{3}+\frac{2h}{9}\right)\left(\frac{2h}{3}-y\right)}{\cancel{t}}$$

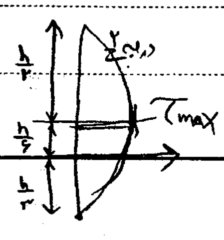
$$\boxed{\tau = \frac{36V}{2bh^3}\left(\frac{2yh}{9} - \frac{2y^2}{3} + \frac{4h^2}{27}\right) = \frac{4V}{2bh^3}\left(2yh - 6y^2 + \frac{4h^2}{3}\right)}$$

$$-12y + 2h = 0 \longrightarrow \boxed{y = \frac{h}{6}} \qquad \tau_{max} = \frac{12V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{3} - \frac{h^2}{6} + \frac{\cancel{4}h^2}{3}\right)$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{3V}{bh} = 1.5\,\tau_{ave}}$$

$$\tau_{min} = 0$$

$$yh - 3y^2 + \frac{2h^2}{3} = 0 \qquad y = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 + 8h^2}}{-6} \to \frac{2h}{3},\ -\frac{h}{3}$$

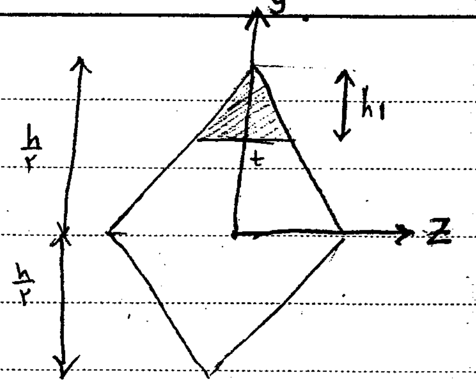


$Q = A_1\bar{y}_1 = \frac{h_1 t}{2}\left(y+\frac{h_1}{3}\right) = \frac{t}{2}\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(\frac{2y}{3}+\frac{h}{6}\right)$ I لوزی $= \frac{bh^3}{48}$

Subject:
Year. Month. Date ( )

$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{\frac{bh^3}{48}\times t}\times\frac{t}{2}\left(\frac{yh}{6}-\frac{2y^2}{3}+\frac{h^2}{12}\right)$

☒ لوزی:



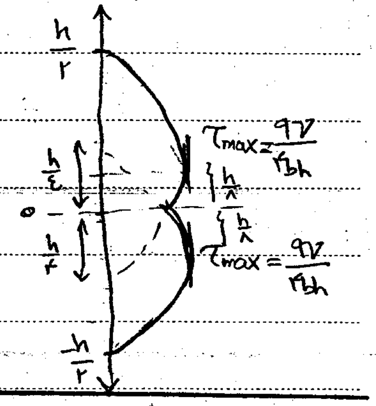
$\tau = \frac{4V}{2\times bh^3}(2yh-8y^2+h^2) \to -16y+2h=0 \to y=\frac{h}{8}$

$\tau_{max} = \frac{4V}{2bh^3}\left(2h\times\frac{h}{8}-8\times\frac{h^2}{64}+h^2\right) = \frac{9V}{4bh^3}\times h^2 = \frac{9V}{4bh}$

$\boxed{=1.125\,\tau_{ave}}$

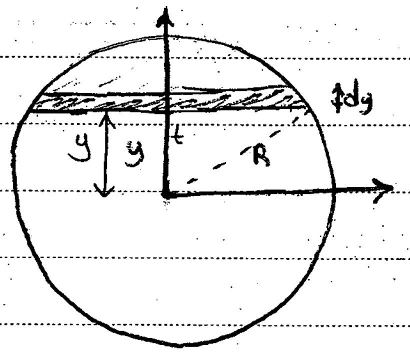
به روش مشابه بالا و به دلیل وجود تقارن

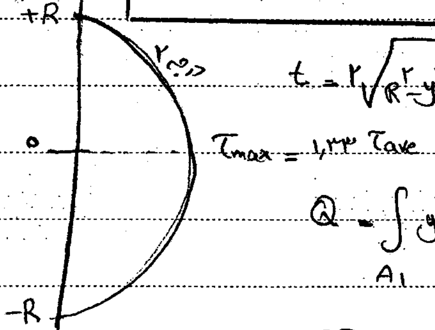
$8y^2-2yh-h^2=0 \quad y=\frac{2h\pm 6h}{16}$ → $\frac{h}{2}$ ق ق ✓ ; → $-\frac{h}{4}$ غ ق ق ✗



$\boxed{V = \frac{\tau_{(a)}A}{K}}$ $K\frac{V_{all}}{A} = \tau_{(a)}$

☒ دایره:





$t = 2\sqrt{R^2-y^2}$

$Q = \int_{A_1} y\,dA = \int_y^R y\cdot t\cdot dy$

$Q = \int_y^R 2y\sqrt{R^2-y^2}\,dy = -\frac{2}{3}(R^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_y^R$

$\boxed{\tau_{max} = \frac{4V}{3\pi R^2} = 1.33\,\tau_{ave}}$

$\boxed{Q_y = +\frac{(R^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+0 = \frac{2}{3}(R^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{\frac{1}{4}\pi R^4}\times\frac{\frac{2}{3}(R^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{R^2-y^2}}$

$= \frac{4V}{\pi R^4}\times\frac{R^2-y^2}{3} \longrightarrow \tau_{max} \to y=0 \to \tau_{max} = \frac{4V}{3\pi R^2} = 1.33\,\tau_{ave}$

$\tau_{min} = 0 \longrightarrow y = R, -R$

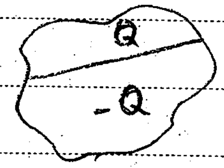
Subject:
Year. Month. Date.

نکات مرتبط با بکارگیری رابطه‌ی $\tau_{xy}=\frac{VQ}{It}$

۱- در این رابطه $\frac{V}{I}$ مقداری است ثابت در کل مقطع و به لحاظ رابطه‌ی $\sigma=\frac{My}{I}$ در این رابطه وارد شده است.

بنابراین تغییرات تنش برشی از نسبت $\frac{Q}{t}$ مشخص و معین خواهد شد.

۲- در این معادله Q لنگر اول سطح کشی از مقطع نسبت به مبدأ مختصات تیر بوده و برای قطعه جدا شده حول



محاسبه‌ی τ در نظر گرفته می‌شود.

۳- در هر جایی از شکل که مقطع شکل به دو قسمت با Q قرینه تقسیم می‌شود بدیهی است محاسبه‌ی Q برای قطعه

کوچکتر یا قطعه‌ای که به طور کامل در یک طرف مرکز سطح واقع شده است ساده‌تر است.

۴- تعیین جهت صحیح τ:

هرگاه نیروی برشی مؤثر رو به بالا باشد بر روی قطعه جدا شده با Q مثبت جهت صحیح τ به صورت دور شونده از لبه بریده شده

رسم خواهد شد و بالعکس بر روی قطعه‌ی با Q منفی به صورت نزدیک شونده به لبه بریده شده رسم می‌شود.

۵- تابع تغییرات Q همواره در تراز مرکز سطح مقطع مقدار حداکثر خود را خواهد داشت.

۶- محل τ_{min} در تیرهای اشکال دلخواه مطابق رابطه‌ی $\frac{VQ}{It}$، $(\tau_{min}=0)$ خواهد بود هرگاه $Q=0$ باشد

$(A=0)$

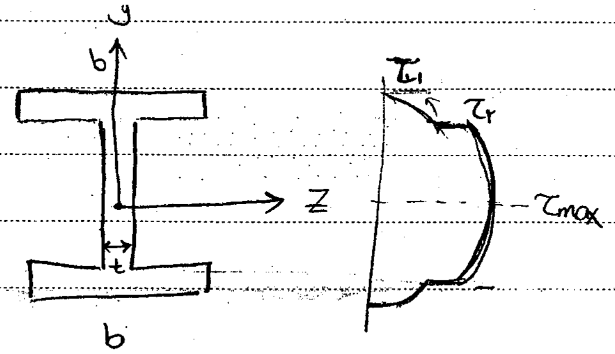
بنابراین این اتفاق در دو حالت پدید خواهد آمد: ۱- منتهی الیه بالای مقطع ۲- منتهی الیه پایین مقطع (دو آل)

صفر شدن τ در بالا و پایین مقطع ضروری است (بی‌ در سطح آزاد).

PAPCO

۷- البته در اثبات رابطه‌ی $\frac{VQ}{It}$ فرض شد توزیع τ در پهنای مقطع t یکنواخت باشد. لذا در مکان‌هایی که مقطع زده شده به عبارتی سطح آزاد مورب می‌رسد. τ محاسبه شده درست نخواهد بود که هر چه مقداری غیر یکنواختی τ در پهنای t است.

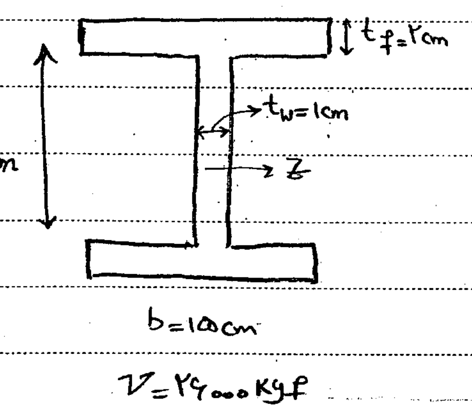
۸- محل τ_{max} تیرها: از آنجا که در رابطه $\frac{VQ}{It}$، $\frac{V}{I}$ ثابت است، τ_{max} در محل حداکثر شدن $\frac{Q}{t}$ خواهد بود. اگر در تراز مرکز سطح مقطع پهنای t از بقیه‌ی نقاط مقطع بیشتر نباشد (کوچکتر یا مساوی) τ_{max} حتماً در تراز مرکز سطح مقطع اتفاق می‌افتد. در غیر این صورت با نوشتن تابع $\frac{Q}{t}$ و یافتن حداکثر آن محل τ_{max} بدست می‌آید.



$\tau_{max} \simeq \frac{V}{d\,t_w} = ?$ ← ارتفاع تیر

$\simeq \frac{V}{h\,t_w} = ?$ ← ارتفاع جان

تمرین:



$b = 15cm$

$V = 26000\,kgf$

$\tau_1, \tau_2, \tau_{max} = ?$

$\tau_{max} \simeq \frac{26000}{30\times 1}, \quad \frac{26000}{26\times 1}$

$I_{zz} = \frac{1}{12}\times 1\times 26^3 + \frac{1}{12}\times 15\times 8\times 2 + 14^2\times 30\times 2$

$I_{zz} = 1464.67 + 20 + 11760 = \boxed{13244.67}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

« توزیع تنش های ناشی از نیروی برشی در مقطع I شکل »

$\tau_{xy} \rightarrow$ محور

اگر نیروی برشی موازی جان مقطع I شکل باشد.

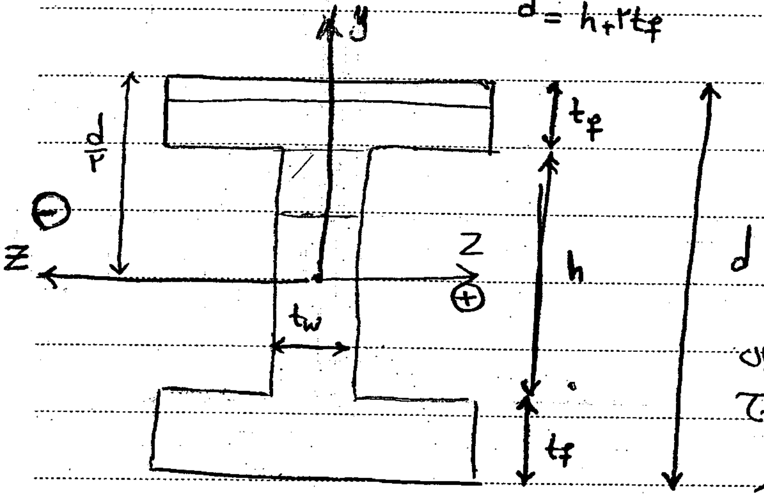
توزیع τ_{xy} ناشی از V_y : در بال و جان

$\sigma = \frac{My}{I} \Rightarrow \tau = \frac{VQ}{It}$

بال: (b, t_f) ، جان: (h, t_w)

$d = h + 2t_f$

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$



$$Q_{zz} = b\left(\frac{d}{2} - y\right) \times \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2} + y\right)$$

تنش بال

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q_{(zz)}}{I_{zz}\, t = b} = \frac{V}{2I_{zz}}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)$$

$$\boxed{\tau_{xy_1} = \frac{V}{2I}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)} \quad \boxed{\frac{h}{2} < y < \frac{d}{2}}$$

« در تنش بال »

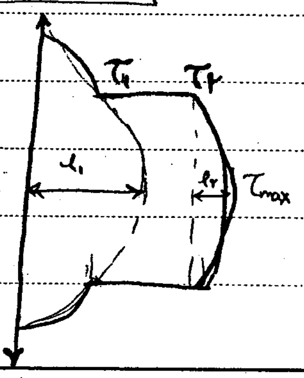
کل بال $Q_f = bt_f\left[\frac{h}{2} + \frac{t_f}{2}\right]$

$$Q_2 = Q_f + \left[t_w \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right)\right] \cdot \left[y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2}\right] = \underset{\text{ثابت}}{Q_f} + \underset{\text{متغیر}}{\frac{t_w}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}$$

در تنش جان

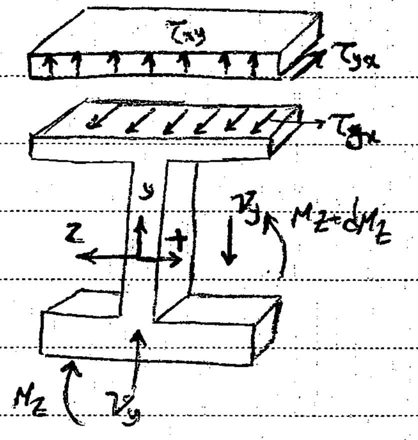
$$\boxed{\tau_{xy_2} = \tau_1 \times \frac{b}{t_w} + \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}$$

$$\boxed{\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\frac{VQ_f}{It_w}}{\frac{VQ_f}{Ib}} = \frac{b}{t_w}}$$

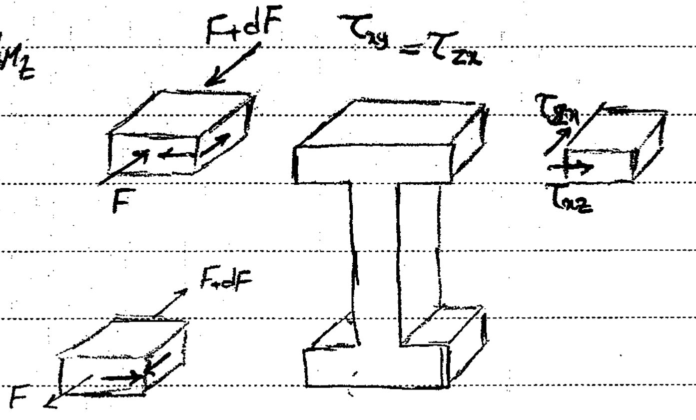


$\ell_1 > \ell_2$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

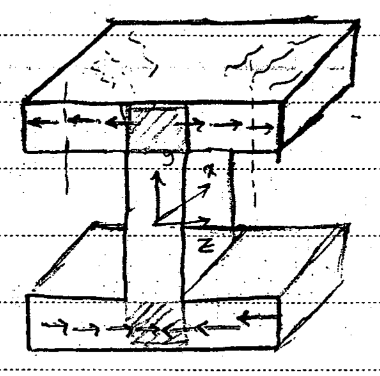


ـــ توزیع τ_{xz} ناشی از V_y در بال مقطع:



$$Q = A\bar{y} = t_f\left(\frac{b}{2}-z\right)\underbrace{\left(\frac{h}{2}+\frac{t_f}{2}\right)}_{\text{ثابت}}$$

$$\boxed{\tau_{xz} = \frac{V_y\, y}{I_z}\left(\frac{b}{2}-z\right)\left(\frac{h}{2}+\frac{t_f}{2}\right) \qquad \frac{t_w}{2} < z < \frac{b}{2}}$$

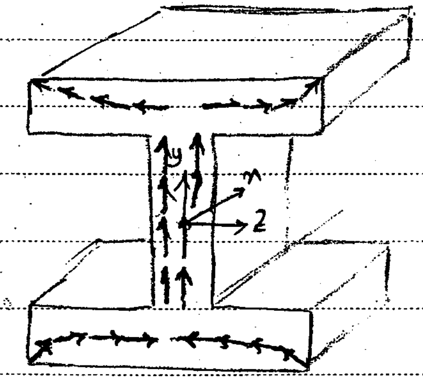


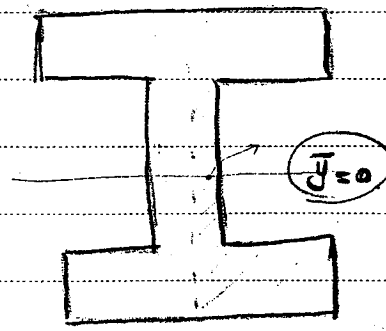
$$\boxed{\text{در بال ها}\ \tau_{xz} = \frac{V_y}{I_{zz}}\left(\frac{b}{2}-z\right)\underbrace{\left(\frac{h}{2}+\frac{t_f}{2}\right)}_{\text{ثابت}}}$$

(ناشی از V_y)

* τ_{xz} در بال ها عمدتاً وجود دارد و در جان مقطع I شکل فقط τ_{xy} داریم. (چون $\bar{y}=0$ مقطع زده شده)

مانند τ_{xz} و τ_{xy}

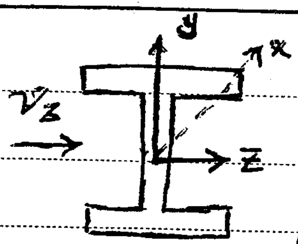




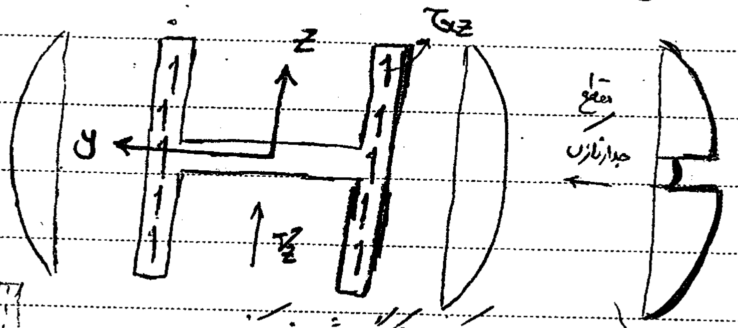
PAPCO

Subject:

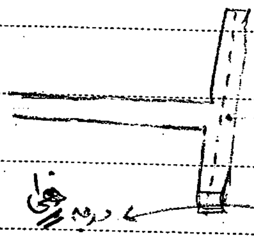
Year. Month. Date. ( )



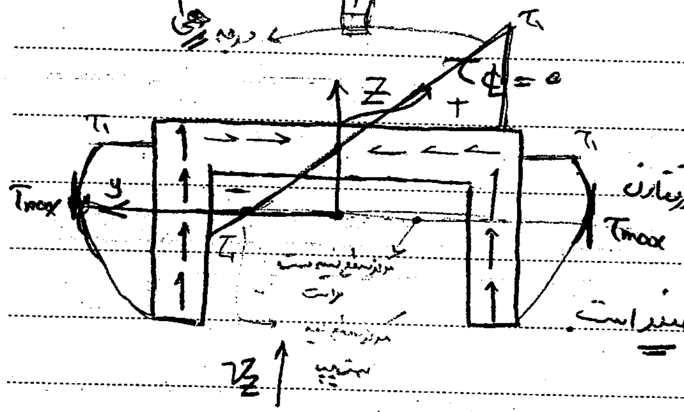
ب) نیروی برشی موازی بالهای مقطع باشند (V_z)



« فوق جامع نازک شکل جسم برشی نیست »

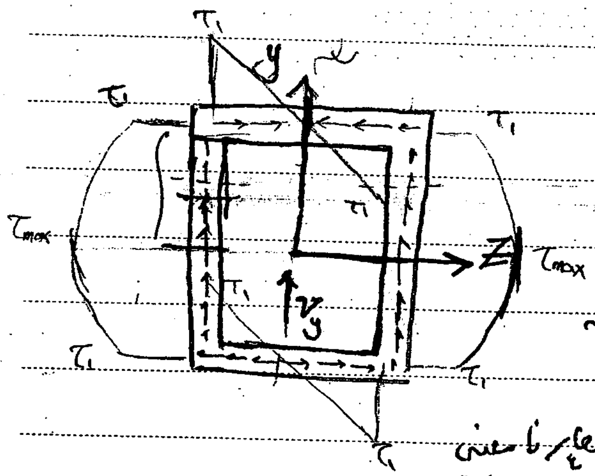


$Z=0 \rightarrow Q_y=0 \rightarrow \tau_{xy}=0$



نقطه ... در یک مقطع جدار نازک هرگاه نیروی برشی موازی محور تقارن

اگر تنش مستقر τ در محل تلاقی محور تقارن با جدارها صفر است.



برای محاسبه تنش برشی در مقطع جدار نازک بسته

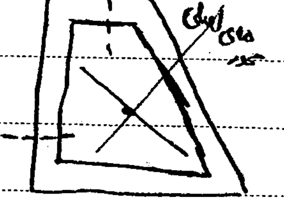
می بایست در مقطع زده شود که در این صورت

در معادل τ خواهیم داشت در حالیکه رابطه $\tau=\frac{VQ}{It}$ یک معادله

تعادل است بین مجهول که مقاطع جدار نازک بسته در حالت کلی چهار نامعین

داخلی هستند.

$$\sum \tau_i t_i = \frac{VQ}{I}$$



$$\tau_1 t_1+\tau_2 t_2 = \frac{VQ}{I}$$

درجه نامعین

$$\tau_a t_a+\tau t = \frac{VQ}{I}$$

باشد

در شکل مسائل که کنیم تا نیز نیروی برشی موازی محور تقارن باشد

PAPCO

معمول
روش اول: دو مقطع زده می‌شود یکی در محل تعیین τ و دیگری در محل محور تقارن

(زدن)
روش دوم: ۲ مقطع قرینه روی مقطع.

$$2\tau t = \frac{VQ}{I}$$

مثال) با $V=1000$ تمام معادلات τ را در برای box بیابید. (مثال عددی)

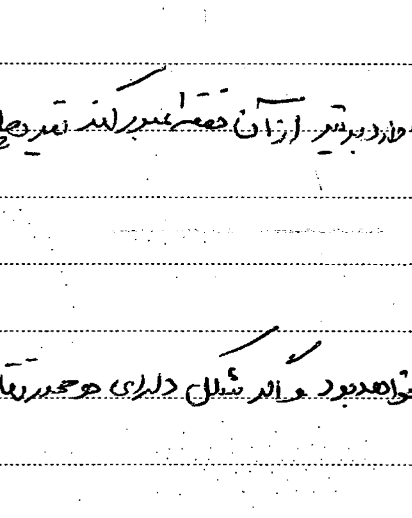
بارگذاری مقاطع جدار نازک نامتقارن (مرکز برش) یا (مرکز پیچش):

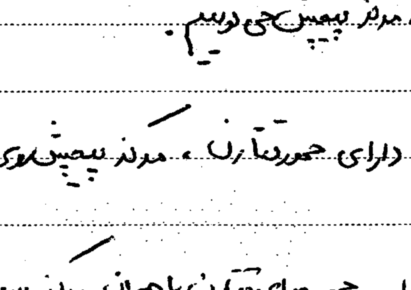
برای هر شکل هندسی به عنوان مقطع یک تیر نقطه‌ای وجود دارد که اگر نیروی برشی وارد بر تیر از آن نقطه عبور کند تیر دچار پیچش نخواهد شد به این نقطه مرکز پیچش می‌گوییم.

- برای شکل‌های هندسی دارای محور تقارن، مرکز پیچش روی محور تقارن خواهد بود و اگر شکل دارای دو محور تقارن باشد، مرکز پیچش محل تلاقی محورهای تقارن یا همان مرکز سطح است.

و شرایط تکیه‌گاهی نیز ندارد.
- مرکز پیچش جزء مشخصات هندسی مقطع است و ارتباطی با جنس تیر، طول آن، نوع بار و مقدار بار ندارد.

- تعیین مرکز پیچش (مرکز برش) ناودانی:





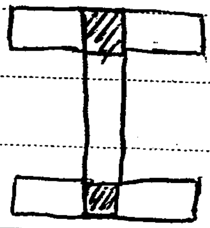
☑ جریان برش : حاصل ضرب τ و t را جریان برشی می نامند. t پهنایی که τ توزیع شده است. واحد آن مثل بار نیرو بر طول است.

$$q = \tau . t = \frac{VQ}{I}$$ جریان برش

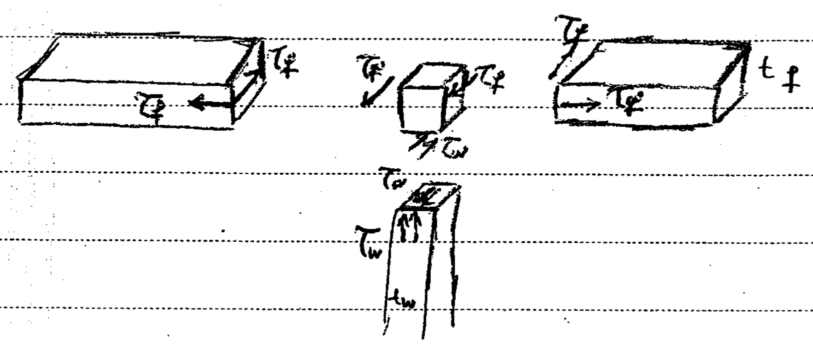
به طور کلی در مقاطع جدار نازک نیروی برشی در جداره ها می تواند موجب دو مؤلفه از تنش برشی باشد یکی از آنها در امتداد جداره و یکی در جهت عرض جداره خواهد بود و برای محاسبه هر یک از این دو مؤلفه مقاطعی زده خواهد شد که یکی از آنها به اندازه طول جداره و یکی پهنایی هم اندازه ضخامت جداره خواهد داشت. بدیهی است تنش برشی در امتداد طول به تنش برشی در امتداد عرض عکس مقاطع زده شده خواهد بود یعنی همواره مؤلفه ای از تنش برشی بزرگتر است که در امتداد جداره محاسبه می شود.

بنابراین همواره مؤلفه ای از تنش برشی که در امتداد جداره است بزرگتر بوده و در محاسبه آن دقت بیشتری وجود خواهد داشت

اصل پیوستگی جریان برش : از آنجا که در مقاطع جدار نازک تنش های برشی ایجاد شده به طور عمده در امتداد جداره ها هستند می توان حاصلضرب τt یا جریان برش را در امتداد جداره در نظر گرفت و جهت صحیح جریان را با استفاده از اصل تعیین جهت τ مشخص نمود. [در محل اتصال جداره های نازک به یکدیگر یا ناحیه ای وجود دارد که می توان طوری آن را τ و جریان برش مشخص را به وضعیت بسته درآورد] اما می توان در رابطه با جریان برش وارد شده به این ناحیه اصل پیوستگی جریان برش را مورد استفاده قرار داد به این ترتیب باید جریان برش وارد شده به این ناحیه مساوی جریان برش خارج شده از این ناحیه باشد.



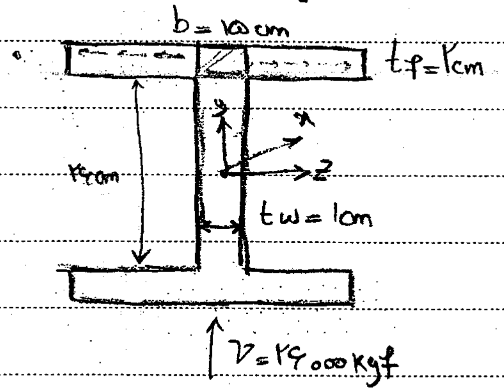
PAPCO



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \tau_w \cdot t_w \cancel{dx} - 2\tau_f \cdot t_f \cdot \cancel{dx} = 0 \qquad \tau_w t_w = 2\tau_f t_f$$

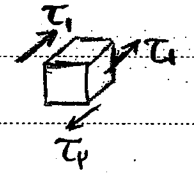
$$\boxed{q_w = 2q_f}$$

تمرین ← اصل پیوستگی جریان برش را در محل اتصال بال به جان مقطع تمرین قبل کنترل کنید.



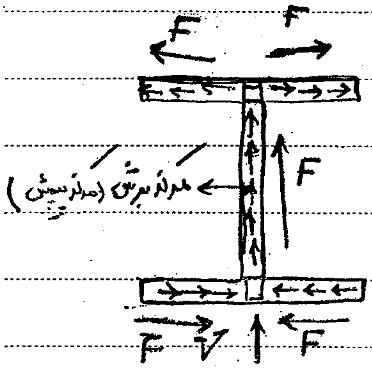
$$\tau_{xz} = \frac{V_y}{I_z} \times \left(\frac{b}{2} - z\right)\left(\frac{h}{2} + \frac{t_f}{2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{V_y}{I_z}\,\frac{Q_f}{t_w} + \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$



$$\tau_1 = \tau_{xz}\Big|_{z=\frac{t_w}{2}} = \frac{26000(7.5-0.5)(14)}{13244.67}$$

$$\tau_1 = 192.38$$



$$\tau_2 = \frac{420}{1} \times \frac{26000}{13244.67} + \frac{26000}{2(13244.67)}\left(169 - 169\right) = 824.483$$

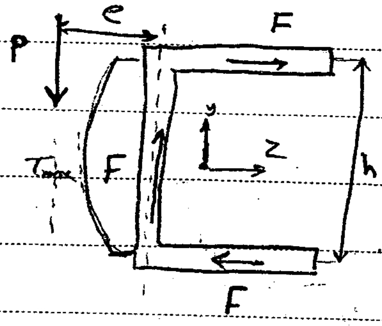
$$Q_f = A_f \bar{y} = 30 \times 14 = 420$$

$$\boxed{\underbrace{192.38 \times 2 \times 2}_{770} \neq 824.483\ kg/cm^2} \ *$$

الف ✓

$$\tau_{xz} \overset{(Z=0)}{=} \frac{26000}{13244.67} \times (7.5 - 0)(14) \qquad \tau_2 = \tau_{xy} = \frac{420 \times 26000}{13244.67}$$

$$2 \times \tau_{xz} = \tau_{xy} \times 1$$ ✓ درسته برابر



به مرکز پیچش، مرکز برش نیز گفته می‌شود چرا که اگر توزیع تنش ناشی از نیروی برشی

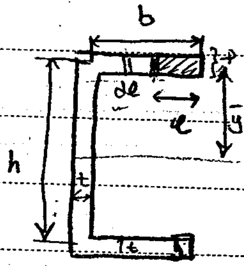
بتنهایی بتواند تعادل مقطع را به جای نیروی برشی حفظ کند (بارگذاری خارجی) $\tau = \frac{VQ}{It}$

نیروی لازم جهت بر هم زدن (قرین) تنش‌های ناشی از پیچش نداشته باشیم

بارگذاری در محل مرکز پیچش برده که محل حل برآیند توزیع تنش $\tau = \frac{VQ}{It}$ خواهد بود

$$P e = F.h \rightarrow e = \frac{F.h}{P=V}$$

هندسه شکل ناودانی

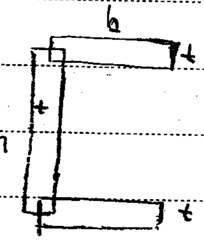


$$Q_{(\ell)} = (\ell t).\frac{h}{2} \qquad \tau_{(\ell)} = \frac{V Q_{(\ell)}}{It}$$

$$F = \int_0^b \tau \, dA \quad (dA = t.d\ell) \quad = \int_0^b \frac{V}{It}\left(\ell t \frac{h}{2}\right).t\,d\ell$$

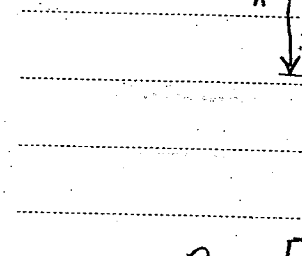
$$F = \frac{Vht}{2I}\frac{b^2}{2}$$

$$e = \frac{F.h}{V} = \frac{\frac{\cancel{V}htb^2}{4I} \times h}{\cancel{V}} = \boxed{\frac{th^2b^2}{4I}}$$



$$I \cong \frac{th^3}{12} + 2\left[\underbrace{\frac{bt^3}{12}}_{\simeq 0} + bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] \overset{t \ll h,\ t \ll b}{\cong} \frac{th^2}{4}\left(\frac{h}{3} + 2b\right)$$

$$e \simeq \frac{b^2}{\frac{h}{3} + 2b} = \frac{b}{\frac{h}{3b} + 2} \rightarrow 0 < e < \frac{b}{2} \leftarrow \begin{cases} b \rightarrow 0 & e \rightarrow 0 \\ b \rightarrow \infty & e \rightarrow \frac{b}{2} \end{cases}$$



نیروی برآیند توزیع تنش $\tau = \frac{VQ}{It}$ در مقاطع جدار نازک (جهت محاسبه):

$$dF = \tau dA = \tau t \, d\ell \rightarrow F = \int dF = \int_0^b \tau t \, d\ell = \int_0^b \overbrace{\frac{VQ}{I}}^{q_{(\ell)}} d\ell$$

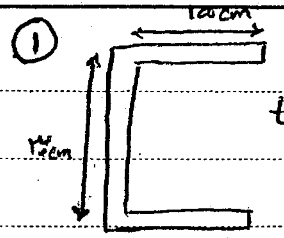
$$\boxed{F = \frac{V}{I}\int_0^b Q_{(\ell)} d\ell}$$

انتگرال جریان برش

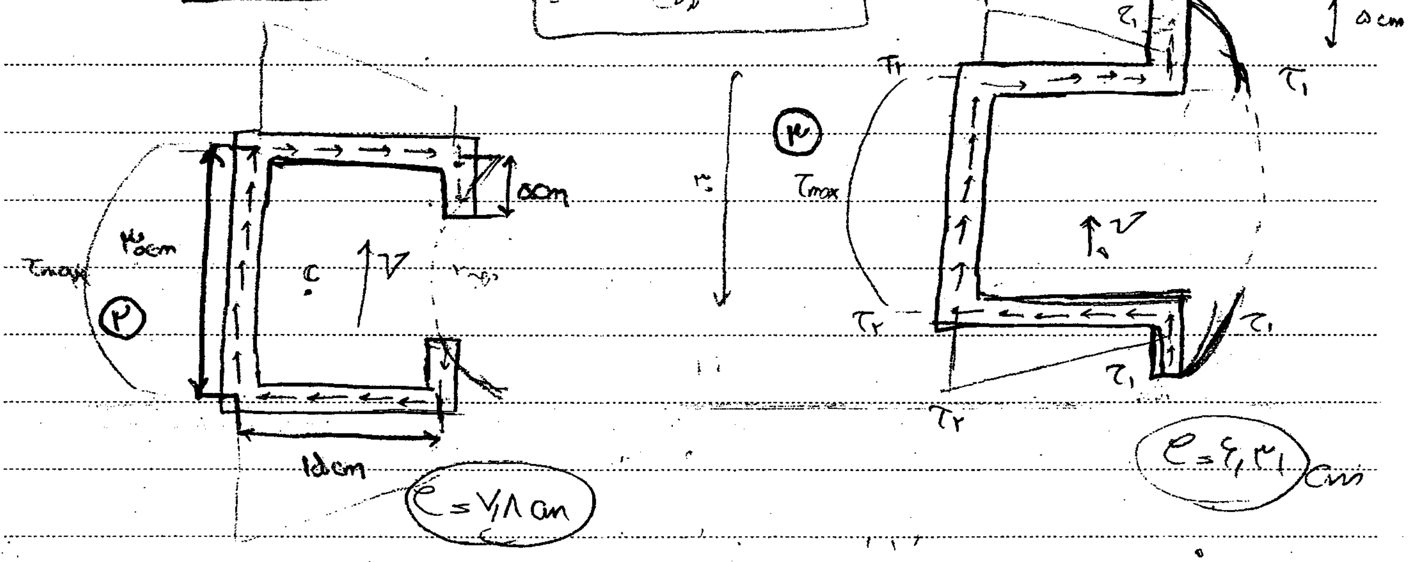
Subject:

Year. Month. Date. ( )

* مرکز برش شکل های زیر را بدست آورید؛

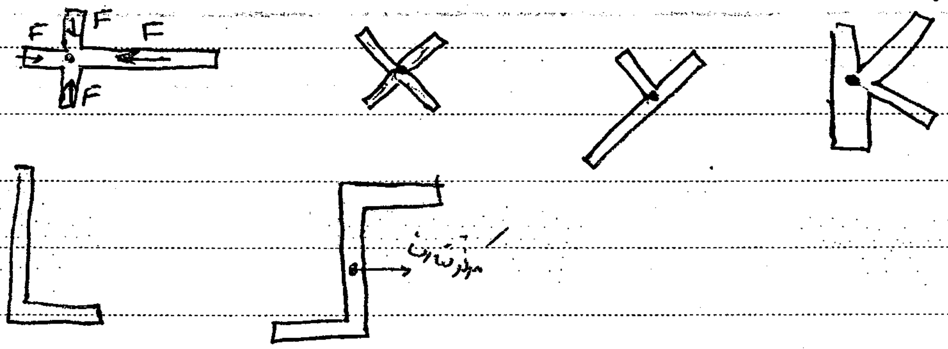


$e = 6.42\,cm$

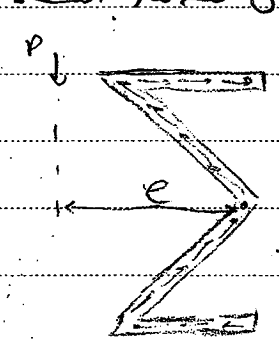


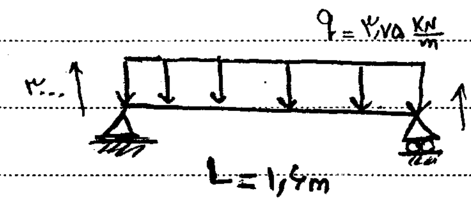
$e = 7.8\,cm$

$e = 6.31\,cm$



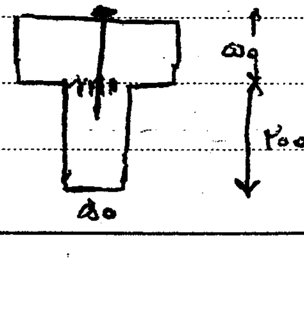
هرگاه در یک مقطع جدار نازک امتداد المان ها همرس باشند مرکز برش شکل همان نقطه تقاطع است.





مثال) برای ساخت تیر چوبی شکل مقابل با ۳۰۰ از میخ هایی استفاده شده است که هر کدام ظرفیت انتقال نیروی برشی 700N را دارند.

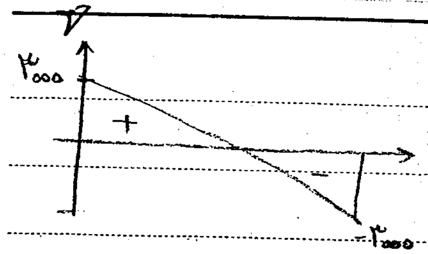
فاصله لازم بین میخ ها در طول تیر را تعیین کنید.

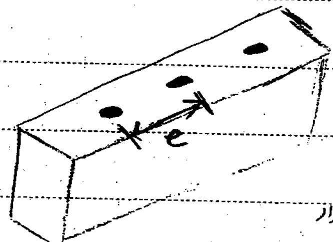


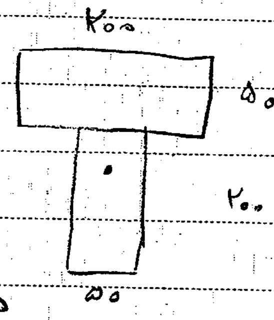
Subject:

Year. Month. Date. ( )

۸-۳-۱ ۴-۵ ۸-۶-۲
۴-۱ ۴-۶ ۸-۶-۴
~~۴-۳~~
۴-۴







نیروی برشی لازم $= F = \tau A = \tau . t . a = \frac{VQ}{I} e$ تعداد $F = n f_s$

$\frac{VQ}{I} = q$ نیروی برشی در واحد طول

$$\boxed{e = \frac{n f_s I}{VQ}}$$

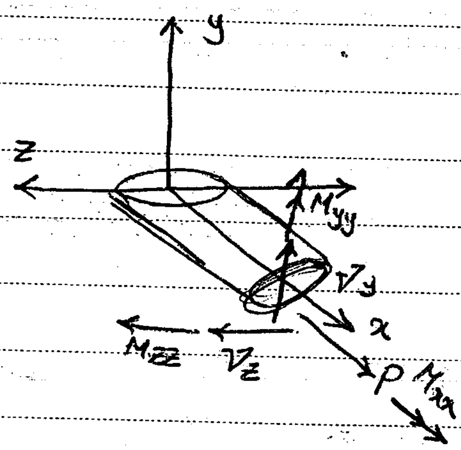
$\bar{y}$ از بالا $= ۸۷٫۵$ mm

$I = ۱۱٫۳۵ \times ۱۰^{۶}\ mm^4$

$e = \frac{۱ \times ۷۵۰۰ \times ۱۱٫۳۵ \times ۱۰^{۶}}{۳۰۰۰ \times ۶۲۵۰۰۰} = ۴۳\ mm$

$Q = (۲۰۰ \times ۵۰)(۸۷٫۵ - ۲۵) = ۶۲۵۰۰۰\ mm^3$

پیچش : Torsion Twisting



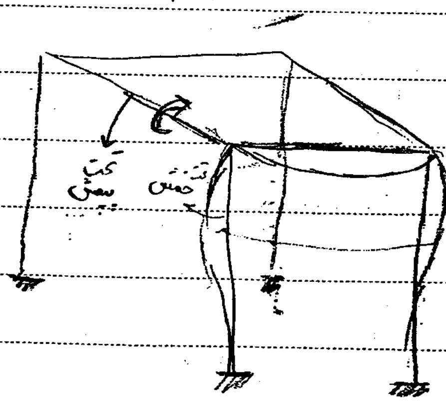
$P \rightarrow \sigma = \frac{P}{A}$

$V_y \Rightarrow \frac{V_y . Q_z}{I_{zz}\, t} = \tau$

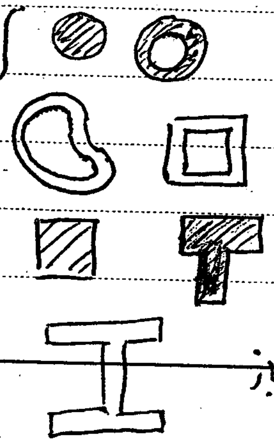
$V_z \rightarrow \tau = \frac{V_z Q_y}{I_{yy}\, t}$

$M_{xx} \rightarrow$? تنش برشی

$M_{yy} \Rightarrow \sigma = \frac{M_{yy} z}{I_{yy}}$ ، $\sigma = -\frac{M_{zz} y}{I_{zz}}$



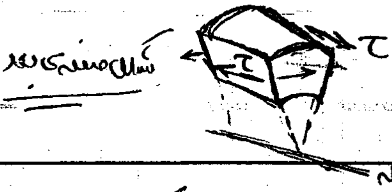
$M_{xx} \rightarrow$ چارچوب

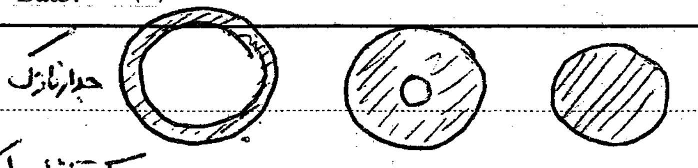


PAPCO

Subject: [روی هر جزء تشکیل شده تنش های برشی مساوی داریم.] شکل مستطیلی بعد

Year. Month. Date. ( )

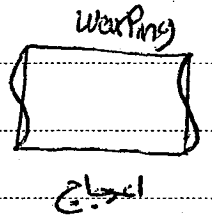


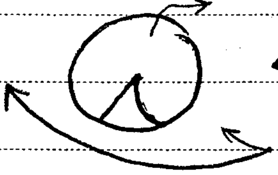


پیچش مقاطع دایره‌ای شکل :

n کمتر از استحکام تسلیم !!

فرضیات : ۱- مصالح سازنده از قانون هوک تبعیت کند و تغییر شکل ها کوچک باشد (قانون هوک و جمع آثار برقرار)



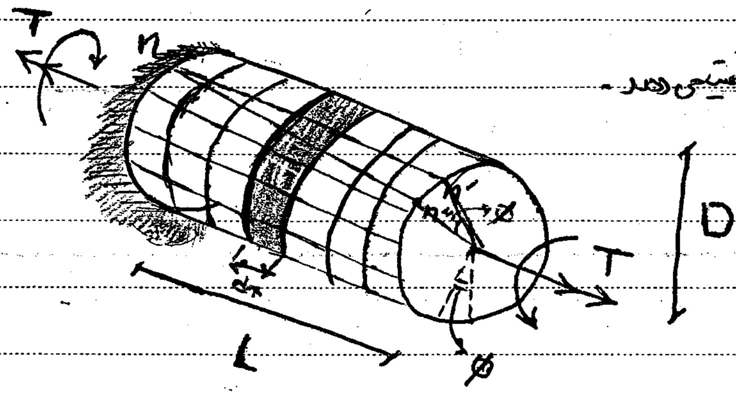


* برای جلوگیری از این اتفاق دیواره ها را با دو ورق صلب ...

۲- طول و قطر استوانه تغییر نکرده است.

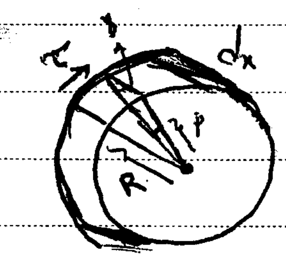
۳- در اثر پیچش شعاع ها مستقیم و مقاطع صفحه‌ای باقی می مانند

۴- خطوط nn' به nn'' تغییر وضعیت می دهد.



$$\frac{d\phi}{dx} = \theta = \frac{\phi}{L} = cte \qquad \phi = \int \theta . dx = \theta . L$$

زاویه پیچش واحد طول — زاویه پیچش



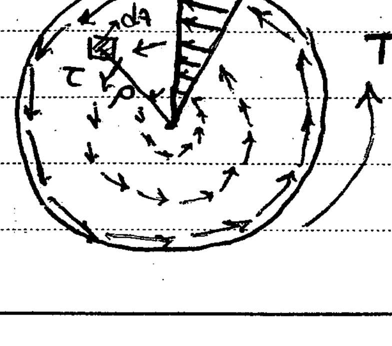
$$\delta = \gamma dx \quad \Rightarrow \gamma . dx = R d\phi$$

$$\delta = R . d\phi \qquad \gamma = R . \frac{d\phi}{dx} = R . \frac{\phi}{L} = \frac{D\phi}{2L}$$

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{R}{\rho} \longrightarrow \delta = \gamma dx \qquad \delta = \rho d\phi$$

$$\boxed{\gamma = \frac{\rho \phi}{L}} \rightarrow 0 < \rho < \frac{D}{2}$$

rad — rad



$$T = \int_A dT = \int_A \rho dF = \int_A \rho (\tau dA)$$

ممان اینرسی قطبی

$$T = \int_A \rho (G \rho \frac{\phi}{L}) dA = \frac{G\phi}{L} \int_A \rho^2 dA$$

$\tau = G\gamma$

PAPCO

Subject: $\theta = \frac{\phi}{L}$ زاویه پیچش واحد طول

Year. Month. Date. ( )

$\frac{GJ}{L} \rightarrow$ سختی پیچشی $\leftarrow K_T$

مشابه $\Delta = \frac{PL}{EA}$

$$T = \frac{G\phi}{L} J \rightarrow \boxed{\phi = \frac{TL}{GJ}}$$

$$J = \frac{1}{2}\pi R^4$$

$$\boxed{\tau = \frac{T\rho}{J}} \rightarrow \text{شبیه } \sigma = \frac{My}{I}$$

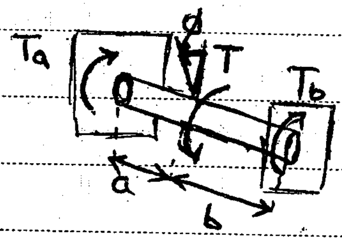
$$K_T = \frac{GJ}{L}$$ سختی پیچشی

$$\boxed{\tau = G\gamma = G\rho\frac{\phi}{L}}$$

پیچش یکسان

(در محدوده‌ی قانون هوک)

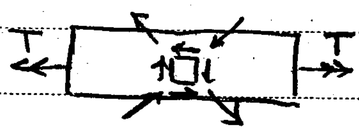
مثال) شافت با تکیه‌گاه

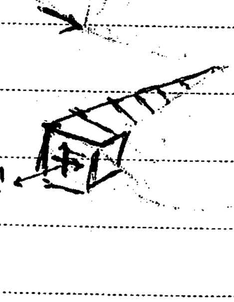


$$\begin{cases} K_a = \frac{GJ}{a} \\ K_b = \frac{GJ}{b} \end{cases} \qquad \phi_a = \phi_b$$

$$\phi = \frac{T}{K_e} = \frac{T}{\frac{GJ}{a} + \frac{GJ}{b}}$$

$$T_a = \frac{GJ}{a} * \frac{T}{\frac{GJ}{a} + \frac{GJ}{b}} = \frac{K_a}{K_a + K_b} . T \qquad \boxed{\frac{T_a}{T_b} = \frac{K_a}{K_b} = \frac{b}{a}} \checkmark$$

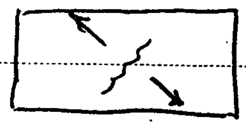




این تنش‌ها را دارد

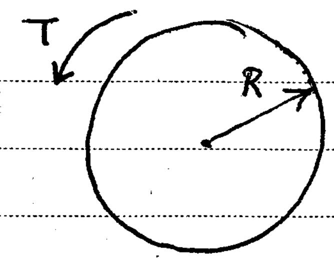
پوسته نازک (ضعیف در فشار)

ترد (ضعیف در برش)

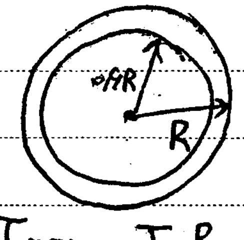


فرمول طراحی

$$\tau_{max} = \frac{T \cdot \frac{D}{2}}{\frac{\pi D^4}{32}} = \frac{16T}{\pi D^3} = \tau_a \rightarrow \boxed{D = \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi \tau_a}}}$$



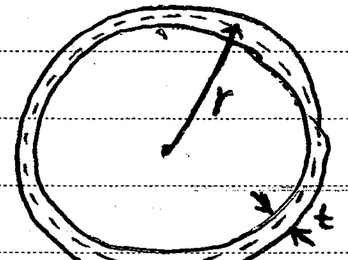
$$\tau_{max_1} = \frac{T.R}{J_1}$$



$$\tau_{max_2} = \frac{T.R}{J_2}$$

$$\frac{\tau_{max_2}}{\tau_{max_1}} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{\frac{\pi R^4}{2}}{\frac{\pi}{2}\left[R^4 - (0.6R)^4\right]} = 1.15$$

جدار نازک



$$\tau_{max} = \frac{T(r+\frac{t}{2})}{J}$$

$$\tau_{min} = \frac{T(r-\frac{t}{2})}{J}$$

$$J = \frac{\pi}{2}\left[(r+\frac{t}{2})^4 - (r-\frac{t}{2})^4\right] \simeq 2\pi r^3 t$$

$$J = \int_A \rho^2 dA = r^2 \int_A dA = r^2(2\pi r t) = 2\pi r^3 t$$ پیچش

$$I = \frac{J}{2} = \pi r^3 t$$ خمش

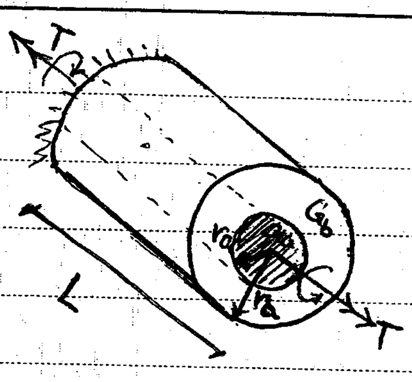
$$\tau_{max} \simeq \tau_{min} \simeq \frac{T.r}{J} = \frac{T.r}{r^2.A} \longrightarrow \tau_a = \frac{T}{r.A}$$

$$T = \tau_a r.A$$

گشتاور ناشی از انتقال توان : جلوتر توضیح داده شده است.

« حل مرکب »

مثال)



$$n = \frac{G_b}{G_a}$$

$$\begin{cases} J_a = \dfrac{\pi r_a^4}{2} \\ J_b = \dfrac{\pi}{2}\left(r_b^4 - r_a^4\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_a + T_b = T \\ \phi_a = \phi_b \end{cases}$$ موازی‌اند

$$\begin{cases} K_a = \dfrac{G_a J_a}{L} \\ K_b = \dfrac{G_b J_b}{L} \end{cases}$$

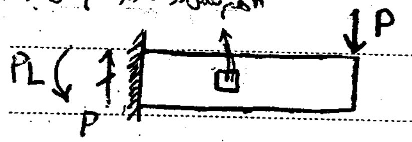
$$\phi = \frac{T}{K_a + K_b} = \frac{TL}{G_a J_a + G_b J_b} = \phi_a = \phi_b \qquad T_a = \frac{K_a}{K_a + K_b} \cdot T = \frac{G_a J_a}{G_a J_a + G_b J_b} \cdot T$$

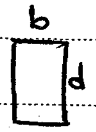
$$T_b = \frac{G_b J_b}{G_a J_a + G_b J_b} \times T \qquad (\tau_{max})_a = \frac{T_a r_a}{J_a}$$

$$(\tau_{max})_b = \frac{T_b r_b}{J_b} = \frac{G_b \cdot T \cdot r_b}{G_a J_a + G_b J_b} = \frac{T r_b}{\underbrace{\frac{J_a}{n} + J_b}}$$

تغییرشکلی ندارد [تیرهای عمیق شعاع نمی‌توان سطح انرژی را افزایش یا کاهش داد]

«هم تنش نرمال داریم هم تنش برشی»

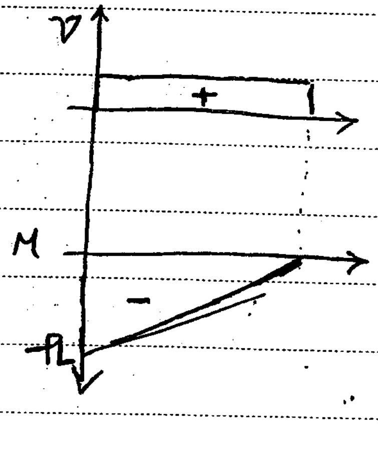




$$U_i = W_e = \frac{1}{2} P \Delta$$ بارگذاری تدریجی

$$\downarrow$$

$$U_\sigma + U_\tau$$



$$U_\sigma = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV$$

$$U_\tau = \int \frac{\tau^2}{2G} dV$$

$$\begin{cases} \text{« متوسط »} \quad \frac{1}{15} < \frac{h}{L} < \frac{1}{10} \\ \text{« عمیق »} \quad \frac{1}{25} < \frac{h}{L} < \frac{1}{4} \end{cases}$$

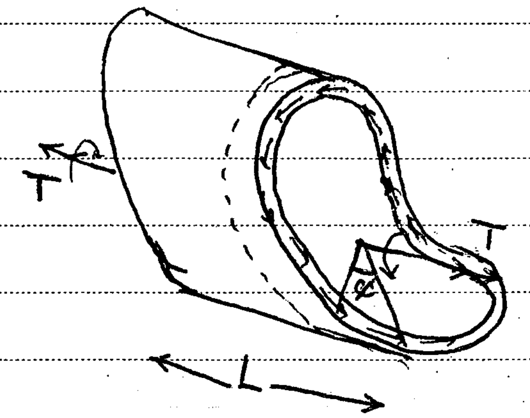
$$\Delta = \Delta_{bending} + \Delta_{shearing} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6PL}{5GA}$$

$$= \frac{PL^3}{3EA}\left(1 + 0.75\left(\frac{h}{L}\right)^2\right) = \Delta_b \times 1.0075$$

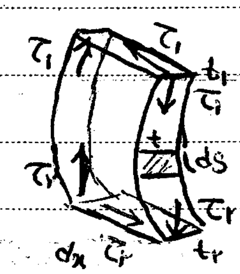
Subject:

Year. Month. Date. ( )

← در تیرهای معمولی $\frac{h}{L} > \frac{1}{10}$ از تغییرشکل های برشی در مقابل تغییر شکل های ناشی از خمش چشم پوشی می شود. اما در تیرهای عمیق به علت کم بودن تغییرشکل های ناشی از خمش نمی توان از تغییرشکل های ناشی از برش صرف نظر کرد.



پیچش مقاطع جدار نازک بسته:



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \tau_1 t_1 dx = \tau_2 t_2 dx$$

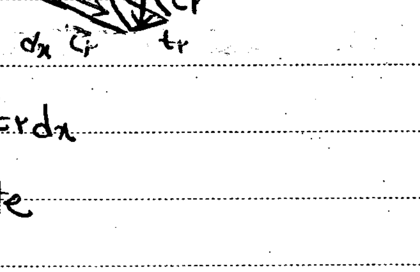
$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \tau_3 t_3 = f = cte$$

$$f = \tau_{max} \cdot t_{min} \qquad dA = t\,ds \qquad dF = \tau dA$$

$$dF = \tau dA = \tau t\,ds = f\,ds \qquad T = \int dT = \int r\,dF = \oint r \cdot f \cdot ds$$

$$T = f \underbrace{\oint r \cdot ds}_{2A_m} \rightarrow \tau t = f = \frac{T}{2A_m}$$

$$\tau = \frac{T}{2t \cdot A_m}$$



A_m ← مساحت منحنی بسته میانی مقطع

L_m ← محیط " " " "

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۹-۲-۶ ۴-۴ ۴-۸
۴-۱۷ مهم ۴-۵

$$U_\tau = \frac{1}{2}T\theta = W_e = \int_V \frac{\tau^2}{2G}\,dv = \oint \frac{1}{2G}\,\frac{T^2}{4t^2A_m^2}\,t\,ds$$

$$\frac{1}{2}T\frac{\phi}{L} = \frac{T^2}{8GA_m^2}\oint\frac{ds}{t} \longrightarrow \phi = \frac{TL}{4GA_m^2}\oint\frac{ds}{t}$$

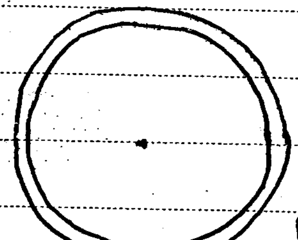
اگر t ثابت $\longrightarrow \oint\frac{ds}{t} = \frac{L_m}{t}$

ثابت پیچشی مقطع جدار نازک با t ثابت $J = \frac{4A_m^2}{\oint\frac{ds}{t}} = \frac{4tA_m^2}{L_m}$

$$\boxed{\text{تغییرشکل‌ها}\quad \phi = \frac{TL}{GJ}}$$

ثابت پیچشی مقاطع دایره‌ای ← همان اینرسی قطبی

در مقطع لوله‌ای دایره‌ای شکل جدار نازک مقدار تنش برشی را با استفاده از فرمول‌های هردو تئوری پیچش محاسبه نموده و با هم مقایسه کنید.



$r = 20\,cm$
$t = 1\,cm$

تئوری اول → $\tau_{max} = \dfrac{T(r+\frac{t}{2})}{\frac{\pi}{2}\left[(r+\frac{t}{2})^4-(r-\frac{t}{2})^4\right]}$
دقیق

مقایسه کنید.

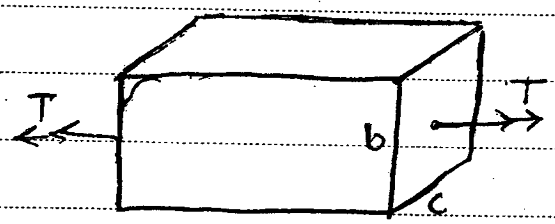
تأثیرش دقیق مقایسه

تئوری دوم

$\tau_{\text{میانی}} = \dfrac{T}{2t\pi r^2}$

میانی

مطالب مبحث ۲: «پیچش مقطع مستطیل» «پیچش سن ونان»



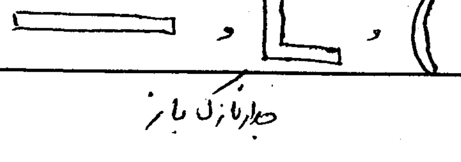
$b > c$

$$J = \frac{bc^3}{3}\left[\frac{16}{3} - 3{,}36\,\frac{c}{b}\left(1-\frac{c^4}{12b^4}\right)\right]\cdots$$

وسط ضلع بزرگتر $\tau_{max} = \alpha b c^2$ $\qquad \phi = \dfrac{TL}{GJ}$

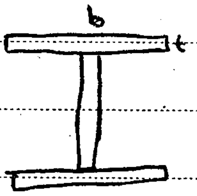
$b \gg c \quad \alpha = \beta = \frac{1}{3}$

رفتار مشابه



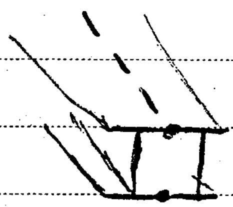
جدار نازک باز

مقاطع جدار نازک باز (حالت خاص پیچش سن ونان) : $b \gg c$ $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$



$J = \sum J_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{b_i t_i^3}{3}$ معمولاً درنظر گرفته می‌شود

درحالی که در I آنها معمولاً چهار رقمی است.



کمانش - تیرهای غیرمنشوری

طراحی میل گردان های انتقال توان :

در مسئله باید در نظر گرفته شود، توانی که باید انتقال یابد و دیگری سرعت چرخش میل گردان.

توان مربوط به چرخش جسم صلبی که گشتاور T در آن قرار دارد ← $P = T\omega$

ω سرعت زاویه‌ای جسم برحسب $\frac{rad}{s}$ است که $\omega = 2\pi f$ که f بسامد چرخش، یعنی تعداد دورها در ثانیه است

یکای بسامد s^{-1} که آن را هرتز Hz می‌نامند. $P = 2\pi f T \Rightarrow \boxed{T = \frac{P}{2\pi f}}$

$SI \rightarrow f \Rightarrow Hz$ ، $T \Rightarrow N.m$ ، $P \rightarrow \frac{N.m}{s}$ یا W وات

* حال با بدست آوردن T و یافتن حداکثر مقدار مجاز تنش برشی (Shearing stress) می‌توان قطر مورد نظر را طراحی کرد.

واحدهای دیگر مهم عبارتند از: $1hp = 550 \frac{ft.lb}{s} = 6600 \frac{in.lb}{s}$ $1rpm = \frac{1}{60} s^{-1} = \frac{1}{60} Hz$ واحد f بسامد است

$1hp = 7500 \frac{kg.cm}{s}$ $\omega = 2\pi f$ ↓ rpm یا Hz یا s^{-1}