تحلیل ۲

تحلیل سازه های (2) - دکتر علی کاوه

▨ جلسه اول:

* روش های کلاسیک:

1- مقدمه
2- روش شیب - افت
3- روش کراس
4- روش کانی

فصل ۱۹-۱۰ تحلیل سازه‌ها، دکتر کاوه (میان ترم)

* روش های نوین

5- مقدمه ای بر جبر ماتریس ها
6- روش ماتریس سختی (تغییر مکان ها)
7- روش ماتریس نرمی (نیروها) ... تحلیل ۱ را هم خوانده ایم.
8- روش پاره سازه ها

کتاب تئوری ماتریسی سازه ها، دکتر کاوه / کتاب تحلیل ماتریسی سازه ها، آقای کاردستونی، ترجمه کاوه

9- مقدمه ای بر روش اجزاء محدود
10- المان مثلثی تنش - کرنش مستوی
11- المان مستطیلی تنش - کرنش مستوی
12- المان های خمشی

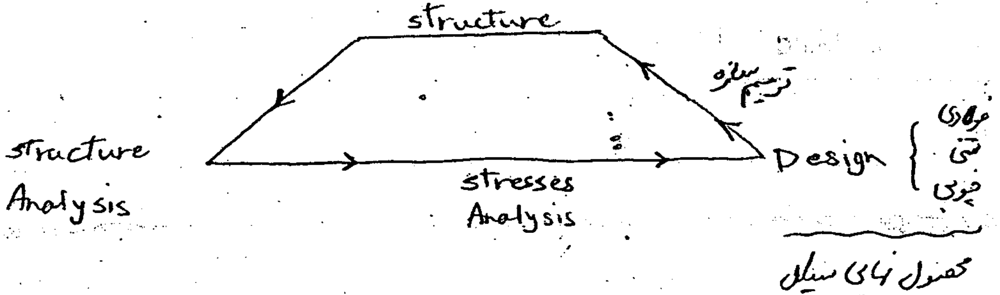
کتاب روش المان های محدود، دکتر کاوه / کتاب اجزاء محدود، آقای زینکویچ، ترجمه دکترهای افشار

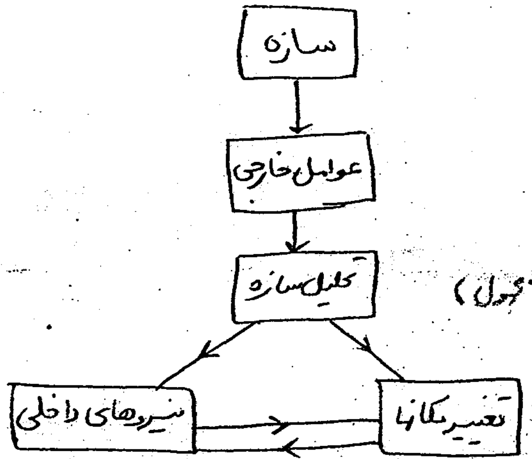
کتب تکمیلی تحلیل سازه ها:
1 Structural Mechanics: Graph & Matrix methodes
2 Optimal Structural Analysis, A. Kaweh

▨ مقدمه:

* سازه: جسمی تغییر شکل پذیر که عوامل خارجی وارده مثل بار، زلزله، حرارت، نشست های تکیه گاهی و... را تحمل می کند.

تحلیل سازه ها: سازه را تحت اثر عوامل خارجی قرار داده و پاسخ سازه اعم از تنش های داخلی و کرنش ها را محاسبه می کنیم.


structure
ترسیم سازه
structure Analysis
stresses Analysis
Design
فولادی
بتنی
چوبی
محصول نهایی سیویل


سازه
عوامل خارجی
تحلیل سازه
نیروهای داخلی
تغییرمکانها

(M, V معلوم - θ و Δ مجهول)

تحلیل I

* روش نیروها

روش نرمی : تعادل ← سازگاری

روش سازگاری

معادلات به تعداد درجه نامعینی استاتیکی

(θ و Δ معلوم - M و V مجهول)

تحلیل II

* روش تغییرمکان‌ها

روش سختی : سازگاری ← تعادل

روش تعادل

معادلات به تعداد درجه آزادی

* In the "displacement method" of analysis:

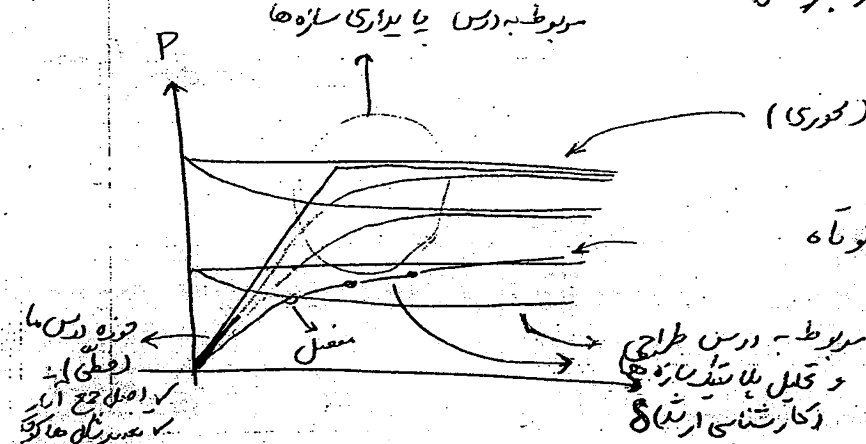
we assume "compatibility" to hold → we proceed to satisfy the "equilib

* In the "force method" of structural analysis:

we assume "equilibrium" to hold → we proceed to satisfy the "compatibil

▨ جلسه دوم :

یک چیزی می‌گم که بین زیر چهارتا کلاس سه واحدی داره. همینطوری می‌گم
رفتار سازه های مختلف در اثر بارهای مختلف



برای جلسه بعد تحقیق بکنید در مورد کار مجازی Principle of virtual work (PVW)

- تعریف
- کاربردهای
  - استاتیکی
  - سازه‌ای
  - اجزای محدود (finite element)

این homework شماست برای جلسه بعد

موضوع درس امروز

▨ روش شیب افت: اولین روش از خانواده تغییرمکان‌ها و مادر تمام روش‌های بعدی

سه بحث تعادل / سازگاری / تغییر شکل است.

در تغییرمکان‌ها: اول: برقراری سازگاری را فرض می‌کنیم ← دوم: تعادل را بررسی می‌کنیم

فرض می‌کنیم که رابطه تغییر شکل الاستیک است. (قانون هوک)

از رابطه نیرو تغییر شکل شروع می‌کنیم.

هر رابطه چندین فرضیه دارد مثل رابطه $\sigma = \frac{My}{I}$ ده تا حداقل فرضیه دارد

1- اصل سیلان برقرار است

2- 〃 جمع آثار 〃

3- 〃 برنولی 〃

فرضیات ما در این فصل:

1- تغییر شکل ها کوچک باشد

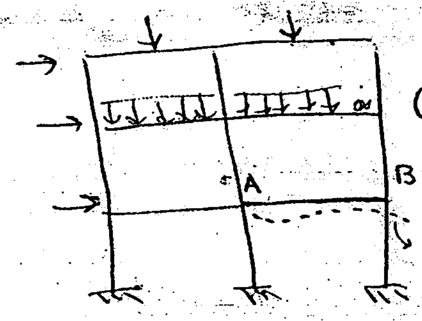
مهم 2- از اثر نیروهای محوری صرفنظر می کنیم

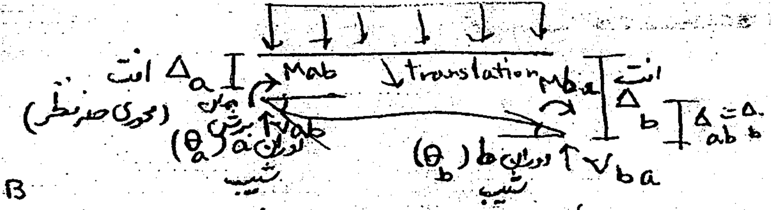
مثلاً 3- مثلاً فرض می کنیم المان ما منشوری است یعنی مقطعش ثابته.

4- رفتار سازه را خطی می گیریم.

این روش شیب افت بیشتر برای قاب های دوبعدی است (سه بعدی هم می شه ولی ماتریسی و...)

این روش آقای Maney درسال 1958 است.


A
B
تغییر شکل داده

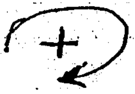

افت Δ_a
(محوری صرفنظر)
Mab
برش
V_{ab}
دوران a
(θ_a)
شیب
translation
Mba
افت Δ_b
$\Delta_{ab} = \Delta_b$
(θ_b) دوران b
شیب
V_{ba}

در روش شیب افت، Δ_{ab} را درنظر می گیریم؛ با Δ_a و Δ_b به تنهایی کاری نداریم.

دوران a و دوران b و Δ_{ab} این المان را اذیت می کنند. بار وارده هم مهمه.

اذیت شدن المان را در دو انتهای المان متمرکز می کنیم.

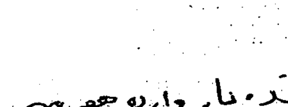
قرارداد علامت خیلی مهمه. برعکس ننویسید.

جهت ساعت مثبته  خجالت نکشید. سر امتحان، ساعتتون رو نگاه کنید.

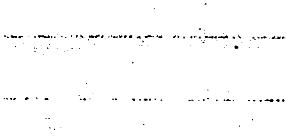
اُردر دوران 0.00002_{rad} است: (فوق العاده کوچک)

این کار ما First order and analysis است

(second order and analysis با در نظر گرفتن نیروی محوری است (اسمی)



(نیروی محوری درجهت [illegible] 〃 third 〃 〃 〃



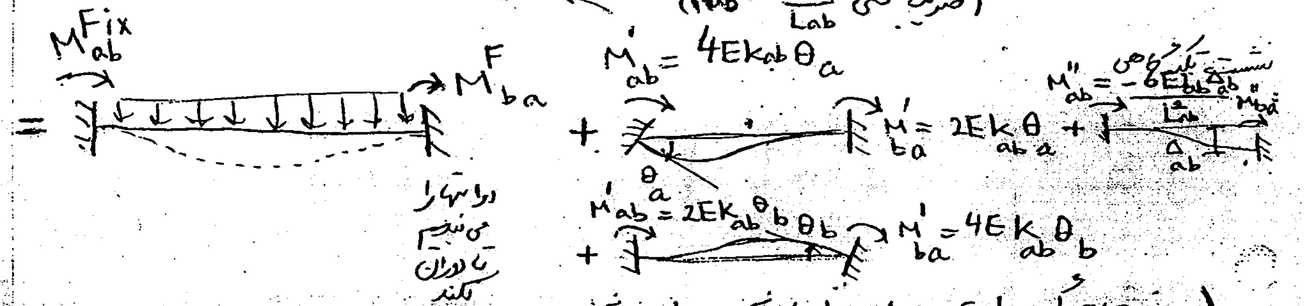
حالا باید آثار و عوامل را افراز کنیم (Decomposition)

Decompose می‌کنیم به المان‌های independent بعد compose می‌کنیم.

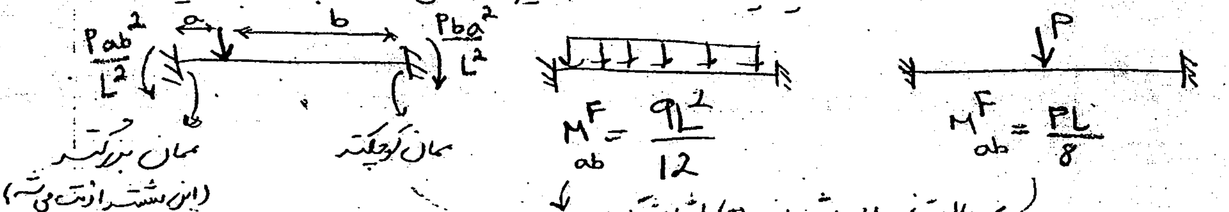
این چسب برای compose کردن، روابط تعادل و سازگاری است. حالا در خود المان هم، همین کار را می‌کنیم

یکبار امشب خودتان اثبات کنید.

(ضریب سختی $K_{ab}=\frac{I_{ab}}{L_{ab}}$)


M_{ab}^{Fix}
M_{ba}^{F}
$=$
$M'_{ab}=4Ek_{ab}\theta_a$
$+$
θ_a
$M'_{ba}=2Ek_{ab}\theta_a$
$+$
نشست تکیه‌گاهی
$M''_{ab}=-\frac{6Ek_{ab}\Delta_{ab}}{L_{ab}^2}$
M''_{ba}
Δ_{ab}
$M'_{ab}=2Ek_{ab}\theta_b$
θ_b
$M'_{ba}=4Ek_{ab}\theta_b$
$+$
دوران‌ها را می‌گیریم تا دوران نکند

(ممان‌های گیرداری را یا حفظ باشید یا از روش‌های تیر مزدوج و ... به دست بیارید.


$\frac{Pab^2}{L^2}$
a
b
$\frac{Pba^2}{L^2}$
ممان بزرگتر
(این بیشتر اذیت می‌شه)
ممان کوچکتر
$M_{ab}^F=\frac{qL^2}{12}$
P
$M_{ab}^F=\frac{PL}{8}$

با استفاده از روش نیروها اثبات کردیم

این سه حالت را حفظ باشید.)

$$\text{پس}\quad M_{ab}=4Ek_{ab}\theta_a+2Ek_{ab}\theta_b-\frac{6Ek_{ab}\Delta_{ab}}{L}\boxed{\pm}M_{ab}^F$$

سر امتحان به علامت‌ها نگاه کنید! مقاومت مصالحی ننویسید.

$$\text{و}\quad M_{ba}=2Ek_{ab}\theta_a+4Ek_{ab}\theta_b-\frac{6Ek_{ab}}{L}\Delta_{ab}\pm M_{ba}^F$$

$$\rightarrow\begin{cases}M_{ab}=2Ek_{ab}\left(2\theta_a+\theta_b-3\frac{\Delta_{ab}}{L_{ab}}\right)\pm M_{ab}^F\\ M_{ba}=2Ek_{ab}\left(\theta_a+2\theta_b-3\frac{\Delta_{ab}}{L_{ab}}\right)\pm M_{ba}^F\end{cases}$$

دوران عضو (از لحاظ کوچک)

$$\xrightarrow{\frac{\Delta_{ab}}{L_{ab}}=R_{ab}}\begin{cases}M_{ab}=2Ek_{ab}(2\theta_a+\theta_b-3R_{ab})\pm M_{ab}^F\\ \qquad\qquad \text{slope-deflection Equati}\\ M_{ba}=2Ek_{ab}(\theta_a+2\theta_b-3R_{ab})\pm M_{ba}^F\end{cases}$$

در واقع این‌ها رابطه هوک هست برای یک تیر

(هوک برای میله $\delta_{ab}=\frac{P_{ab}L_{ab}}{EA}$)

(در روش های ماتریسی، اثر بارها فقط در گره ها متمرکز می شود پس M^F_{ab} نداریم)

حال که M^F_{ab} و M^F_{ba} صفره، با تعادل المان، V_{ab} و V_{ba} را هم بدست بیار. $\Delta_{ab}=\Delta_a-\Delta_b$ بنویسید. این Homework 2 است.

← اینا آخرش تغییر مکان ها را بدست میاریم.

← آخرش نیروها رو بدست میاوردیم.

$$\begin{bmatrix} V_{ab} \\ M_{ab} \\ V_{ba} \\ M_{ba} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} & & & \\ & 4\times 4 & & \\ & & & \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سختی}} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \theta a \\ \Delta b \\ \theta b \end{bmatrix} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & & \delta_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس نرمی}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}$$

درایه هاش رو بدست بیارید.

این رو امینی گفت. جزوت رو نگاه کن

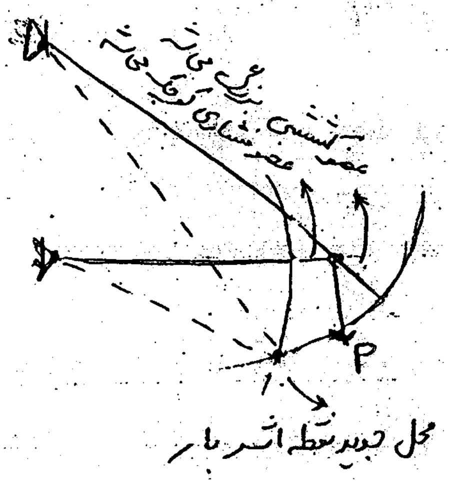
در روش ماتریسی، بارهای گسترده را به صورت دو بار متمرکز در دو گره تبدیل می کنیم.

Force-Displacement Relationships:

1 compatibility

2 Equilibrium

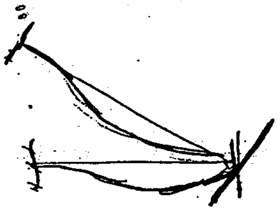
compatibility را با نقش نشان می دهیم.



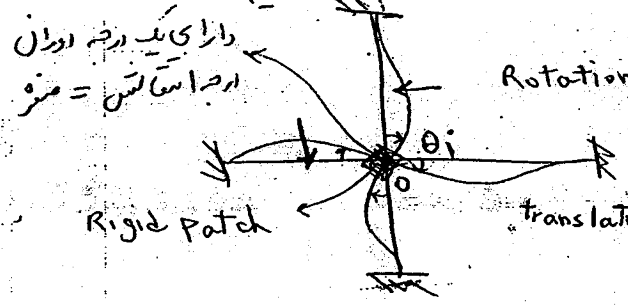
اولین مسئله را مقاومت مصالح

معادله دایره ها را تلاقی بدیم، نقطه جدید را بدست بیاریم. چون درجه دو است، تسلیم ← ماکا می زنیم.

در روش شیب افت هم از مماس استفاده می کنیم (اندازه چون تغییر شکل ها کمه، تقریب ما خوبه)



حال نقاشی می کنیم: تغییر شکل های این سازه را تحت بار نامتقارن بدست میاریم:


دارای یک درجه دوران
درجه انتقالش = صفر
θ_i
o
Rigid patch

Degree of freedom

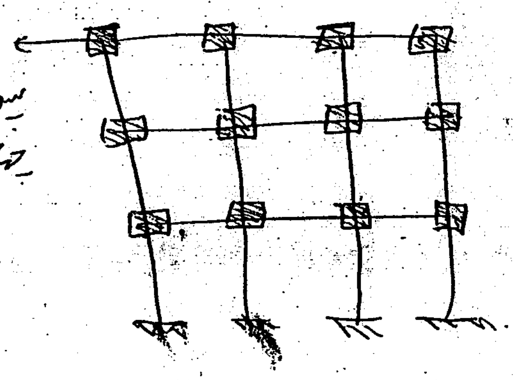
Rotation ← $R_{DOF} = 1$

$T_{DoF} = 0$ ← translation

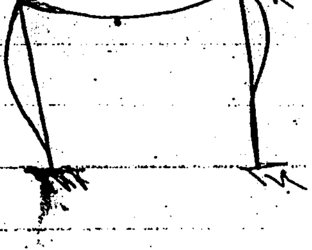
$Total_{DoF} = 1 + 0 = 1$

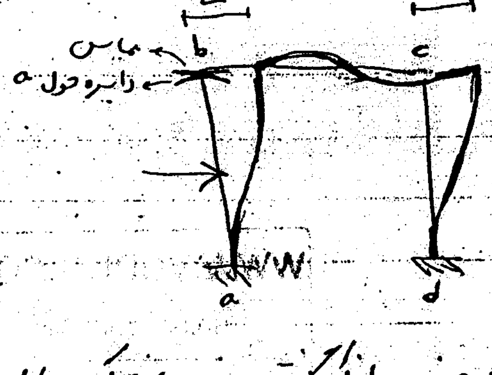
(بر اساس استدلال محل تلاقی دو اسپر، نقطه o ثابت است.)

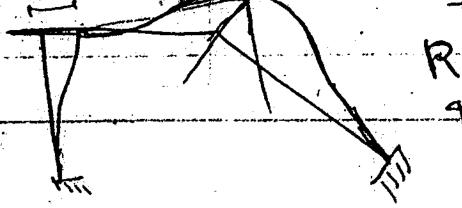
(در سازه ها هم می آییم اتصالات را صلب فرض می کنیم (جهت manageable شدن)


rigid Patch

پس اصل سازگاری می گه هر چهارتا عضو به اندازه θ می چرخند.




Δ
Δ
مماس
زاویه حول a
b
c
a
d
W

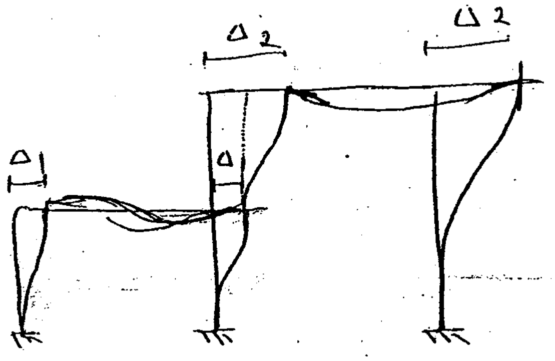


بمحض اینکه کشیدن روی هم یک پارامتری را وارد کنید:

$R_{DOF} = 2$

$T_{DOF} = 1$

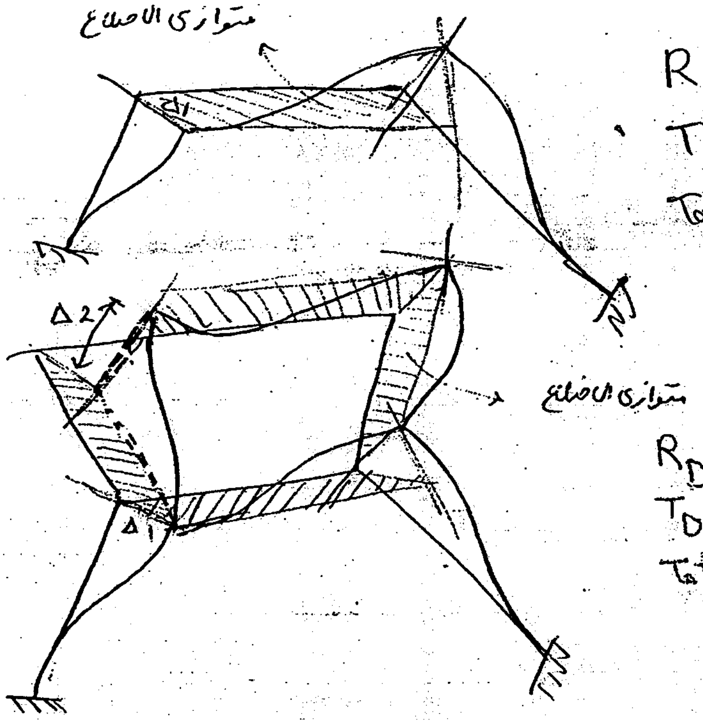
$Total_{DoF} = 3$


Δ_2
$\Delta 2$
Δ
Δ

$R_{DoF} = 4$

$T = 2$

$Total = 6$


متوازی الاضلاع
$\Delta 1$
$\Delta 2$
متوازی الاضلاع
$\Delta 1$

$R = 2$

$T = 1$

$Total = 3$

$R_{DoF} = 4$

$T_{DoF} \; 2$

$Total = 6$

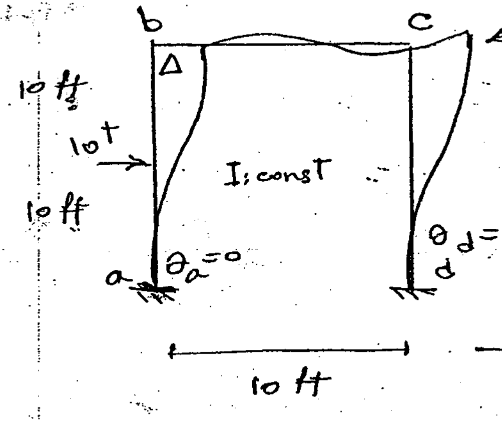
در همه اینها بارها حالت عمومی است. حالات خاص را جدا بررسی می کنیم.

www.ve
Publish

a compatible state of deformation (CSD) نمودار تغییر شکل نیست.

جلسه سوم :

مسئله ص 376



$M_{ab}=2Ek_{ab}(\theta_b-3R)-\frac{bx^{2}}{6}$ که $R=\frac{\Delta}{20}$

$M_{ba}=2Ek_{ba}(2\theta_b-3R)+25$

1 فرض می‌گیریم

$\longrightarrow M_{ab}=\boxed{2E\left(\frac{I}{20}\right)}(\theta_b-3R)-25=\theta_b-3R-25$

$M_{ba}=2E\left(\frac{I}{20}\right)(2\theta_b-3R)+25=2\theta_b-3R+2$

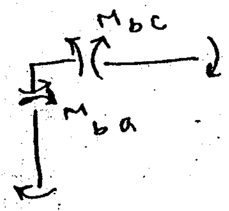
$M_{bc}=2E\left(\frac{I}{10}\right)(2\theta_b+\theta_c)=$

$M_{cb}=2E\left(\frac{I}{10}\right)(\theta_b+2\theta_c)=$

$M_{cd}=2E\left(\frac{I}{20}\right)(2\theta_c-3R)=$

$M_{dc}=2E\left(\frac{I}{20}\right)(\theta_c-3R)=$

حال معادلات تعادل را می‌نویسیم :



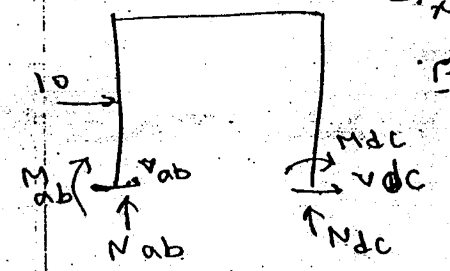
$\Sigma M_b=0\longrightarrow M_{ba}+M_{bc}=0$ (1)

$\Sigma M_c=0\longrightarrow M_{cb}+M_{cd}=0$ (2)

یکی دیگر هم می‌خواهیم (θ_b ، θ_c و Δ سه تا مجهول داریم)

$\Sigma F_x=0$

تعادل دو تا ستون را جدا می‌نویسیم تا V_{ab} و V_{dc} را بدست بیاریم.



$V_{dc}=\frac{M_{dc}+M_{cd}}{20}$

$V_{ab}=\frac{M_{ab}+M_{bc}}{20}-5$

$\Sigma F_x=0\longrightarrow 10+\left(\frac{M_{ab}+M_{ba}}{20}-5\right)+\left(\frac{M_{cd}+M_{dc}}{20}\right)=0$ (3)

(1) و (2) و (3) $\longrightarrow \theta_b=\checkmark\quad\theta_c=\checkmark\quad\Delta=\checkmark$

برای حساب کردن مجهولات از راه ماتریسی می‌رویم. فرض می‌گیریم $2E\frac{I}{20}=1$

$\theta_b=-1.20$

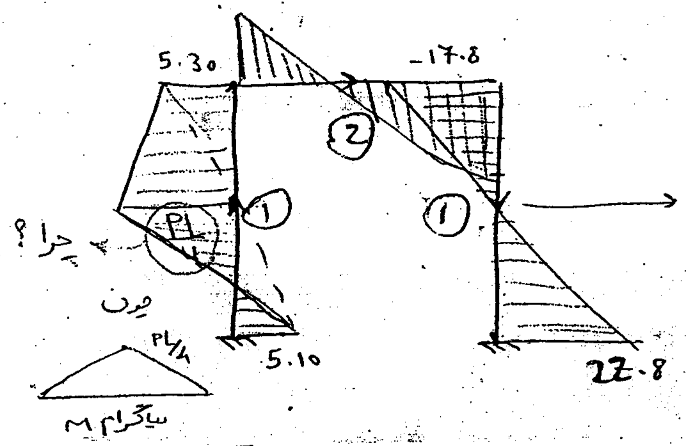
$\longrightarrow \theta_c=5.05$

$\Delta=9.30$

نتایج را باید
کوچک کنیم
نسبت به فرض
گرفته شده
تقسیم می‌شود به $2E\left(\frac{I}{20}\right)$

حالا ممان ها را بدست میاوریم.

قدم بعد نمودار ممان قاب را رسم می کنیم.

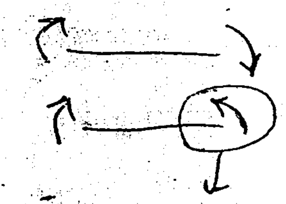

5.30
-17.8
②
①
①
PL
چرا؟
چون
PL/4
دیاگرام M
5.10
22.8

یعنی چپ به راست نگاه کنی
بالا می شه مثبت
پایین می شه منفی

① و ② همون معادله سرشیبه.

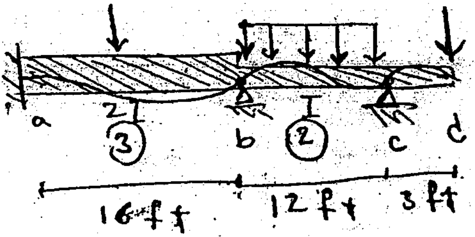
شیب افت

مقاومت مصالح



پس برای بدست آوردن این که M_{ba} را منفی می کنید ← برای رسم دیاگرام M، باید ممان ها را به قرارداد مقاومت مصالح ببریم

سه تیپ مسئله که در کتاب گفته شده {
- Δ ها صفر
- یک Δ غیر صفر
- دو Δ یا بیشتر


a
2I
③
b
I
②
c
d
16 ft
12 ft
3 ft

مسئله ص 381

گام اول: رسم نقاشی

نکته: کنسول را وارد نکنید

$\frac{2I}{16} = \frac{I}{8}$ ③

$\frac{I}{12}$ ②

$M_{ab} = 3(2\theta_a + \theta_b) - \frac{7.5 \times 16}{2}$

$M_{ba} = 3(2\theta_b) + 15$

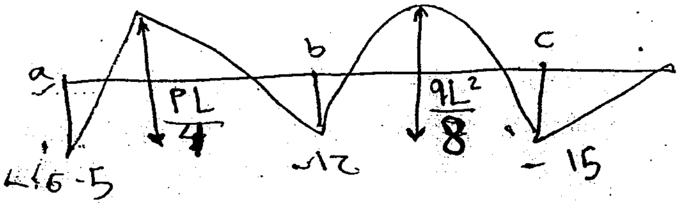
$M_{bc} = 2(2\theta_b + \theta_c) - \frac{1 \times 12^2}{12}$

$M_{cb} = 2(\theta_b + 2\theta_c) + 12$

معادلات تعادل $\xrightarrow{\quad}$ $\Sigma M_b = M_{ba} + M_{bc} = 0$

$\Sigma M_c = 0 = M_{cb} + M_{cd}$

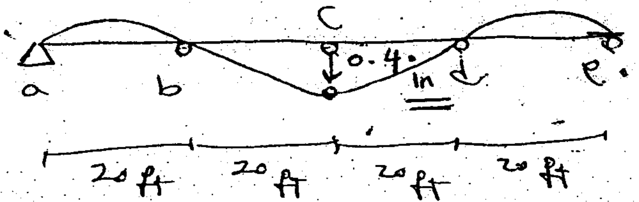
$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} 10\theta_b + 20\theta_c + 3 = 0 \\ 20\theta_b + 40\theta_c - 3 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} \theta_c = 1 \\ \theta_b = -\frac{1}{2} \end{array}$$ مقادیر شیب



دیاگرام ممان

در منزل دیاگرام برش را رسم کنید. ماکزیمم ها و مینیمم ها را برای خودتان حساب کنید

مسأله 2 :



چون متقارن است، نصفش به عبارة یک چیزی رو حل می کنیم

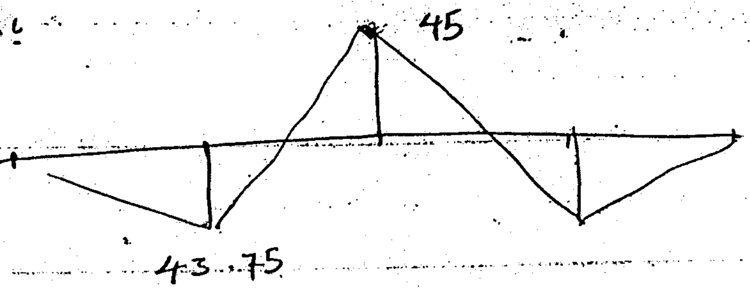
$\theta_a = -\theta_e$
$\theta_b = -\theta_d$
$\theta_c = 0$
} از شرط تقارن

چهار تا معادله شیب افت می نویسیم برای ab و bc بعد $M_a = 0$ و $\Sigma M_b = 0$

این جا چون نشست معین داریم، 2EK را با ریشه سنی نگیرید چون اول موقع 0.4 رو هم باید تبدیل کنید سپس 2EI سنی ضرب کنید. (اینجا چون M^F_{ab} و M^F_{ba} نداریم اشتباهی پیش نمیاد چون اصلاً میشه 2EI را فاکتور زد ولی اگر بار داشته باشیم اشتباه می شه. ضمناً واحدها را چک کنید $\frac{\Delta\ \text{in}}{L\ \text{ft}}$

مثلاً که θ ها و Δ مجهول بوده آخر با یک ضریبی بدست میومد یعنی اینجا نمی تونی بگی $\frac{\Delta}{L} = R$ بلکه $\frac{\Delta}{L} 2EI = R$ برعکس الان که از θ ها یا Δ معلوم بود سنی زوم

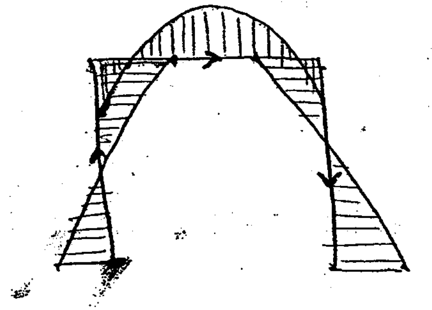
$M_{ab} = 0 \quad M_{ba} = 43.75 \quad M_{cb} = -45$



ص 384 به علت تقارن، سازه حرکت جانبی ندارد.

▤ جلسه چهارم :

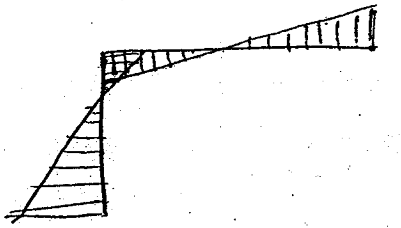
مثال 3-12 ص 384



در رسم دیاگرام ممان

ابتدا را حتماً بکشید. انتها رو منفی

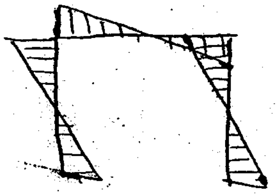
مثال 4-12 ص 385



ص 387 - مسائل با یک درجه آزادی

مثال 5-12 ص 389

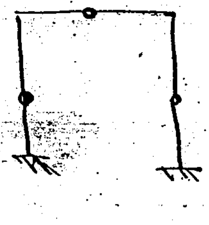
مشابه پرتال

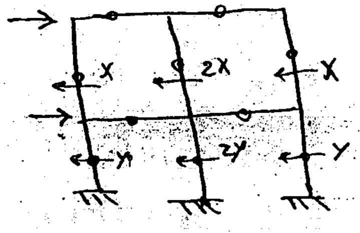


symmetry متقارن

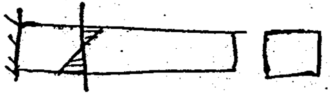
unti symmetry نامتقارن

Report: geogle ⟶ symmetry + structure + Kawch





این فرضیات از کجا بدست آمده ؟ از مقاومت مصالح -



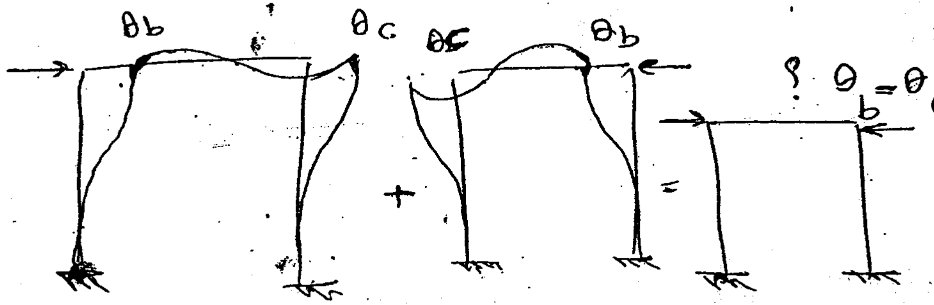
روش کانتیلیور

توزیع تنش‌های برشی . و توزیع لنگر خمشی

↓ بنیان روش پرتال (برای اعضای کوتاه)

↓ بنیان روش کانتیلیور (برای اعضای بلند)

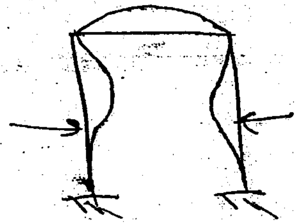
ص 391 همهٔ این شکل‌ها، مثال امتحانی هستند. (یک چیزی یادم رفت. بقیهٔ این را فراموش کنید.)



درمثال 125 چرا $\theta_b = \theta_c$ ؟

$\theta_c + \theta_b = 0 \longrightarrow \theta_c = \theta_b$

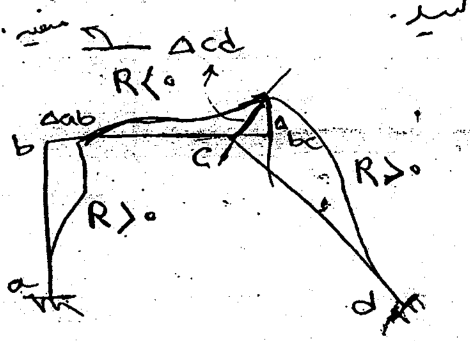
اگر

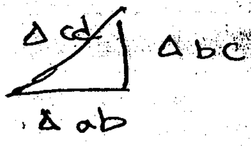


قوای اینجوری دیگر $\theta_c - \theta_b \neq 0$ دقت کنید.

حالا ص 392

کتاب روش‌های پخش ممان 45 تا مسئله حل شده جدی داره به روش کراس حل کرده شما با روش شیب افت حل کنید.


منفیه. خلاف حرکت عقربه‌های ساعت
Δcd
R<0
Δab
b
c
Δbc
R>0
R>0
a
d



مثلثاتی بدست می‌آورید.

به علامت R توجه کنید.

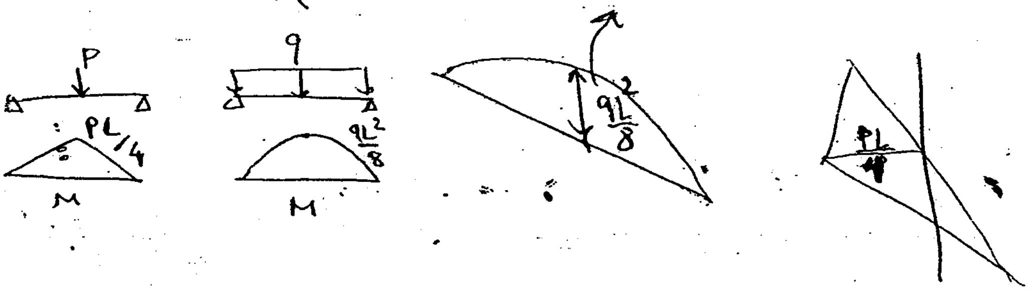
[illegible] سه تا معادله
- تعادل b
- تعادل c
- * ab و cd را با تعادل بدهید؟ — ممان حول o بگیرید

از خودتان روش‌های دیگر ابداع نکنید.

$\sum F_x = 0$ ننویسید چون F_x از گره d را ندارید.

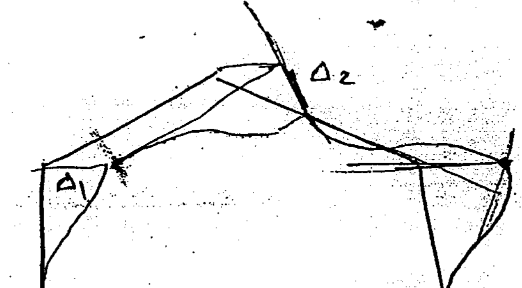
در معادله سوم یک چیز بزرگ باید بدست بیاد. اگر کوچک بود، اشتباه کرده‌اید (4 نمره)

درسته. اثبات کن. چرا؟



ص 393 مساله با دو درجه آزادی

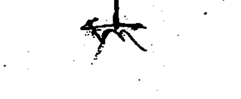
Δ_1 را راست نزنید. شکل شلوغ میشه.
حالت جبرال بگیرید.
اول شکل افتضاح. شکل کتاب عالیه



ص 395 - بار برف داده.
گام اول: نقاشی می‌کنید.
گام دوم: مثلث را می‌کشید و Δ ها را بدست میاورید ← R ها را بدست بیارید.
(علامت‌هاش رو هم دقت کنید)

گام سوم: معادلات شیب افت را بنویسید.
گام چهارم: معادلات تعادل را بنویسید ← θ ها و Δ ها بدست میاد ← ممان‌ها حساب می‌شوند
در ص 396 ممان‌های گیرداری را دقت کنید.

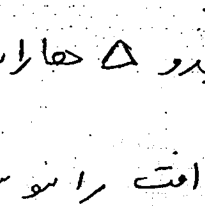
✓ $M_{bc} = -\frac{qL'^2}{12}$



نکته: پس $qL'^2 = q'L^2$
نه مساحت‌ها $(qL' \neq q'L)$

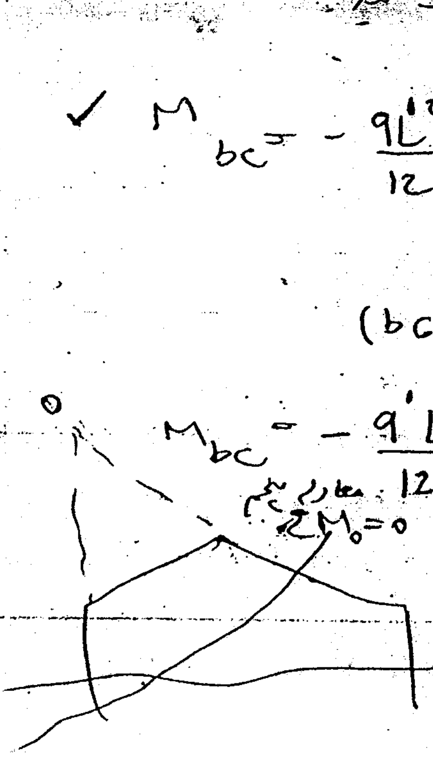
L' اینه (تصویر خط مایل bc)

$M_{bc} = -\frac{q'L^2}{12}$



اینجا q را تصویر کنید

معادله پنجم $\Sigma M_0 = 0$



سه تا معادل گره

$\Sigma F_x = 0$ معادله

سوال: چرا معادله 4 و 5 مستقل اند؟

یعنی معادله 4 و 5 را از کجا می فهمیم چطور برش بزنیم که مستقل باشند؟

شکل 17-12 ص 398 طبق استدلال گفته شده $\theta_a = \theta_b$ و $\theta_d = \theta_c$

ص 400 - 16 معادله 16 مجهول -

شکل 19-12 ص 401   5 تا Δ
6 تا دوران θ

نقاط تکیه گاهی 5 = Δ نخواهی تکیه گاهی 7 = Δ برای هر عضو یک Δ

دوشنبه مسائل صفحه 402 را بیاورید.

کلیّه بارها را 1.5 برابر کنید حل کنید

▨ جلسه پنجم : مقدمه ای بر روش پخش لنگر (روش کراس)

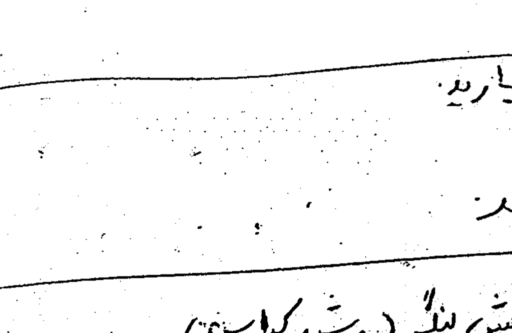
روش شیب افت قدیمی است یعنی برای زمانی که کامپیوتر نبود و خیلی وقت گیر است. روش کراس یک روش تکراری است به همین علت موثر است. همچنین یک احساس خوبی از توزیع لنگر در تیرها و اعضا به ما می دهد.

قرارداد علائم در اینجا هم مثل شیب - افت است.

مثلاً اعضایی را در نظر می گیریم که مقطع آنها ثابت باشند (منشوری)

ببینیم این روش چطور به ذهن آقای کراس رسید؟

سازه روبرو را بگیرید. اول با روش شیب افت حلش کرد.



$M_{ja} = 2EK_{ja}(2\theta_j) = 4EK_{ja}\theta_j$

$\therefore M_{aj} = 2EK_{ja}\theta_j = \frac{1}{2}M_{ja}$

$M_{jb} = 4EK_{jb}\theta_j$

$M_{jc} = 4EK_{jc}\theta_j$

$M_{jd} = 4EK_{jd}\theta_j$

$$\sum M_j = M_0 \longrightarrow M_{ja} + M_{jb} + M_{jc} + M_{jd} = M_0$$

$$\longrightarrow 4E\,(k_{ja} + k_{jb} + k_{jc} + k_{jd})\,\theta_j = M_0$$

$$\longrightarrow \theta_j = \frac{M_0}{4E \sum k_{ji}}$$

$$\longrightarrow M_{ja} = \overset{D_{ja}}{\boxed{\frac{k_{ja}}{\sum k_{ji}}}} M_0 \qquad M_{aj} = \frac{k_{ja}}{2\sum k_{ji}} M_0 \qquad M_{jb} = \overset{D_{jb}}{\boxed{\frac{k_{jb}}{\sum k_{j}}}} M_0$$

$$M_{jc} = \overset{D_{jc}}{\boxed{\frac{k_{jc}}{\sum k_{ji}}}} M_0 \qquad M_{jd} = \overset{D_{jd}}{\boxed{\frac{k_{jd}}{\sum k_{ji}}}} M_0$$

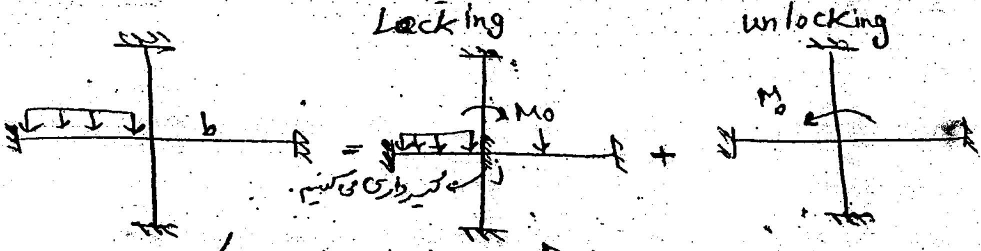
D_{ja} : ضریب توزیع شده distribution factor (گردن کلفتی!)

M_{ja} : ممان توزیع شده distributed moment

C_{ja} : ضریب انتقالی carry over factor

M_{aj} : ممان انتقالی carry over moment

خب حال نه فقط M در ز نداشته باشیم. شاید بارهای دیگر هم داشته باشیم.



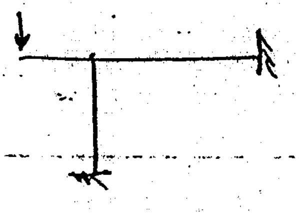
ممان M_0 را به اندازه‌ای می‌گذارم که ؟ در این شکل نقطه ز دوران نکند.
در شکل سمت راست هم ممان چهار طرف را با ضرایب توزیع پخش می‌کنیم.
ص 412 این مثال را حل کرده.

$$M_{ea} = \left(\frac{1}{1+2+3+4}\right)(-10) = -1$$

Co.M : carry over moment

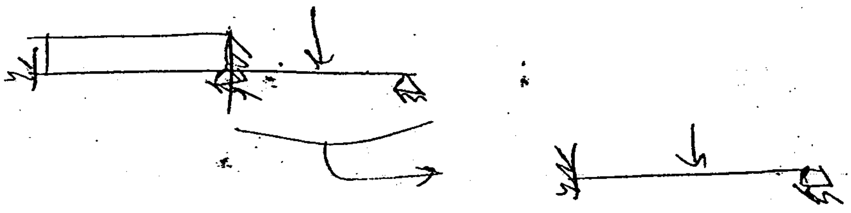
* هیچوقت کنسول را در محاسبات وارد نکنید

شکل 13-4

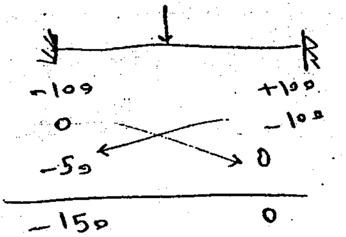


شکل 13-14

شکل 13-15 سمت bc یکذره کار داره.



همچنین مسئله‌ای می‌دهند. می‌گویند ممان گیرداری را حساب کنید. با روش کراس معمولی حل می‌کنیم.



ضرایب اصلاح شده: ضرایبی که با استفاده از آنها، انتهای دیگر را در وضعیت اصلی خود حفظ می‌کنید.

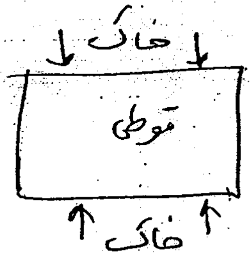
در این مثال، سمت راست را با ضرایب اصلاح شده انجام نداده ایم.

79.5 - را همینطور سمت راست نمی‌دهی چون ممان C باید صفر بشه ولی -70.5 را نصف می‌کنی و می‌دهی به سمت چپ

مثال 13-9:

مسائل مفصل را حل می‌کنید. دو شکل آینده

شکل 13-18 چیه؟



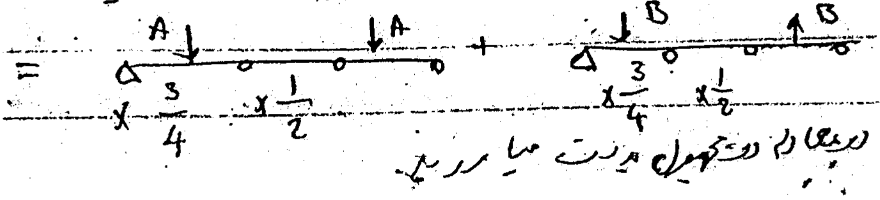
یک محور تقارن قائم و افقی

K'ها را پیدا می‌کنید. ممان b را بدست می‌آورید. توزیع می‌کنید M_{bc_1} و M_{ba} و دیگر صفحش ن را منتقل نمی‌کنید

مسئله 13-6: محور تقارنی در بین دو نقطه C و D داریم.

بین A و B و C و D جداگانه نوسان می‌کنند.

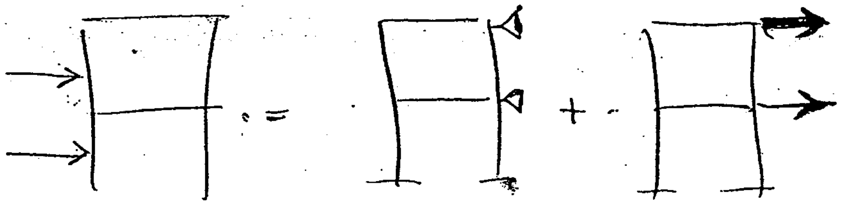
مسئله 13-7: به یک مسئله متقارن و غیرمتقارن decompose می‌کنیم



A و B را با دو معادله دو مجهول بدست می‌آوریم.

روش بحث دیگر برای تحلیل قاب ها که انتقال گره ای دارند

شکل 14-1: تیپ B را می توانید به تیپ A تبدیل کنید. یعنی b می شه جمع c و d



حالا چطوری تیپ A را حل کنیم؟ الان می گم. باید از رفتار خطی سازه تشکر کنیم. شکل 14-2 میام decompose می کنم.

$$Q = \underset{\text{Pure translation}}{\underline{Q_1}} + \underset{\text{Pure rotation}}{\underline{Q_2}}$$

شکل 14-3: برش ها و P را برحسب Δ بدست بیاورید.

شکل b هم همین طور

$$\overset{\uparrow\ \text{معلوم}}{P} = P_1 + P_2 \xrightarrow[\text{یک مجهولی}]{\text{یک معادله}} \Delta = \checkmark$$

روش اول:

اگر دو درجه آزاد داشته باشیم، دو معادله دو مجهول

روش دوم: تکنیک ساده کننده: فرض کن $\Delta = 2_{cm}$ ← P ها و برش ها را بدست می آوریم،

ولی دیگر در شکل b ، $\Delta_1 \neq \Delta$ مجموع بار a و b می شه 3_{Kips}

$\Delta = 2cm$ تحت بار 3^{kips} بوجود آمده است. حالا که P=15 است، نتیجه چه می شود؟ نتایج را ضربدر $\underset{\text{modification}}{\boxed{\frac{15}{3}}}$ می کنیم.

یا سوم: روش ساده تر: به جای 2_{cm} یک مقدار معقول بیابکن Δ را جوری بدست بیار که $6EI\frac{\Delta}{L^2}$ ـ یک عدد قشنگی دربیاد مثلاً 100

شکل 14-5 ص 435 را حل می کنیم. در عمل می تونید یک کاری کنید راحت تر باشید.

Pure translation followed by Pure rotation plus Modification

در ص 436 جدول شکل 14-6 این کار را قشنگتر نوشته.

: . itritive

شکل 14-7 مسیار ط را ساده می‌کنه.

تیر dc گفتیم چون انتهایش ساده است ضرب در $\frac{3}{4}$ می‌کنیم

این روش غیر مستقیم (indirect method) است.

shear balance method در روش کلاسی خواهیم گفت.

چطوری برش ها رو هم بالانس کنیم.

معادله را متوجه شوید. در امتحان حتماً مسائل متقارن می‌دهم.

▨ جلسه هفتم:

ص 439 مسئله تیپ A هست.

شکل 14-9 نکته این سوال: استفاده از symmetry

شکل 14-10 antisymmetry عضو bc یک $\frac{3}{2}$ وارد می‌کند.

▨ دو درجه آزادی ← تبدیل می‌کنیم به دو تا یک درجه آزادی (به خاطر رفتار خطی سازه) می‌شه دو معادله دو مجهول ولی بارگذاری هستند.

شکل 14-12

شکل 14-13 خودش تبدیل شده است. فقط decompose می‌کنیم به دو تا یک درجه آزادی

شکل 14-14
" 14-15
} $\xleftarrow[\text{می‌کنید}]{\text{d ها را جمع}}$ شکل 14-16

شکل 14-17 جلو هر درجه حرکت را می‌گیریم؛ کراس حل می‌کنیم. برش ها و عکس العمل ها ✓ با کمک مسئله قبلی حل می‌کنید.

▨ چند درجه آزادی:

شکل 14-19 ← تبدیل می‌کنیم به 4 تا یک درجه آزادی

کتاب های روش پخش ممان را بخوانید. روش shear balance method را بسته.

منحنی تأثیر با استفاده از روش پخش لنگر مهم است.

به ازای هر زمان که بار واحد را می‌گذارید، کراس حل می‌کنید تا مقادیر به صورت عددی دربیاید. اگر کیفی بخواهید، فقط با اصل مولر می‌برید.

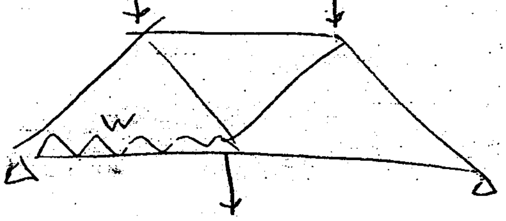
اما می‌خواهیم 9 تا کراس حل کنیم، راه ساده‌تری هم دارد.

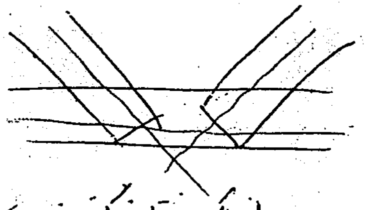
شکل 14-22: شش تا کراس حل می‌کنیم. ممان ها در اول و آخر هر عضو می‌توانید همه ممان واحدها را متقارن بگیرید. کار ساده‌تر می‌شه

حال آن بار واحد را بگذارید، اول تیر را دو سر گیردار می گیرید. ممان ها را بدست میاورید.
در ضرایب ضرب می کنید و بعد با هم جمع می کنید. سپس می رید در دیاگرام مولر می کشید.
این استفاده از اصل جمع آثار است.

▨ محاسبه تنش های ثانویه در خرپا ها با استفاده از روش کینی کنگر

در سازهٔ واقعی، اتصالات مفصلی نیستند. تنش های اولیه را در زمان مفصلی بدست آوردیم (تحلیل ۱)





از یک نقطه نمی گذرند [illegible] ای است برای
ایجاد ممان

همهٔ اینها ایجاد ممان می کنند.

primary forces

اول خرپا را به صورت اتصالات مفصلی بگیرید. نیروهای داخلی و تغییر شکل ها بدست می آید.
کاستی گلیانو هم معادله بده. ویلیوت موهر خیلی ساده تر می کنه.

Translation ← تمام اعضا را دو سر گیردار بگیرید. $\frac{6EI}{L^2}$ تنش های اولیه
rotation ← گره ها را با کراس بالانس کنید ← ممان ها بدست میاد.
دوباره به ازای تنش های اولیه و ثانویه مسئله را حل می کنید.
پروسه را تکرار کنید تا اختلاف ها به صفر برسند. دو سه بار تکرار می کنید.
از تقارن استفاده نمی کنید. دو سه گام جلو برید.
پایین ص 456 – مسئله 14-4 بین ممان M_{bc} و M_{cb} رابطه ای
پیدا کنید. بعد از تقارن بروید. می رسیم به تیپ A
تمرینات ص 456 را حل کنید.

▨ مقطع متغیر: روشی که می‌گم قدیمه. ساده‌تره. ص 458

سه روش:
- روش انتگرالسیون
- روش sum یا جمع کردن
- روش جدولی

▨ جلسه هشتم:

برای شیب افت فقط معادلات آن فرق می‌کنه.

ولی برای روش کراس، ممان‌های گیرداری و ضرایب توزیع و چند چیز دیگه عوض شده.

امروز از قضایای لنگر سطح و تیر مزدوج و روش‌های تحلیلی استفاده می‌کنیم.

روش لنگر سطح برای تیرهای یک سر گیردار خیلی مفید بود. یا سازه متقارن باشد تا وسطش مماس صفر بشه.

صفرهای معادلات 1-15 و 2-15 به خاطر گیرداری در انتهای a و b در رابطه لنگر سطح، روابط سازگاری ما هستند.

در رابطه 5-15 اگر I را ثابت بگیرید، همان $\frac{qL^2}{12}$ می‌شود.

نتیجه 1: ممان‌های گیرداری را از معادله 5-15 بدست بیارید. در ص 461 از کاستیگلیانو میره.

اگر $M_{ab}=1$ ←

در رابطه 7-15 فقط ترم خمشی کاستیگلیانو رو می‌نویسیم. ترم برش و پیچش خیلی موثر نیست.

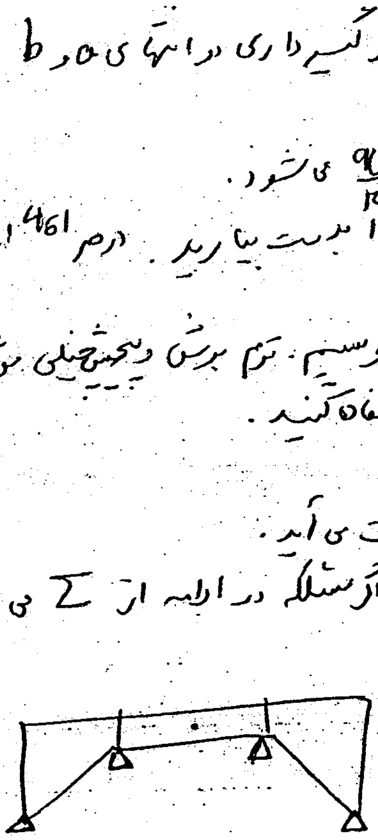
نتیجه 2: C_{ab} دیگه $\frac{1}{2}$ نیست. باید از رابطه 8-15 استفاده کنید.

اگر I ثابت بگیرید، C_{ab}، $\frac{1}{2}$ می‌شه

نتیجه 3: $S_{ab} \neq \frac{4EI}{L}$ بلکه S_{ab} از معادله 11-15 بدست می‌آید.

نقص انتگرال‌ها این روابط چندتا تغییر متغیر بدید. اگر مسئله در ادامه از Σ می‌ریم.

تا اینجا شد روش انتگرالی -

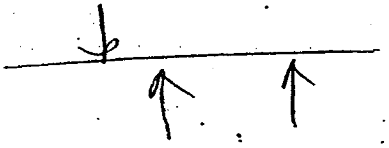


نکته: اگر مقطع چند بار تغییر کرد، جزء به جزء می‌کنیم.
خطی

▨ روش عددی: می‌خواهیم C_{ab} و S_{ab} و ممان‌های گیردار را بدست بیاریم.

اینجا از تیر مزدوج کار داریم.

تیر مزدوج دو سر گیردار می‌شه تیر دو سر آزاد



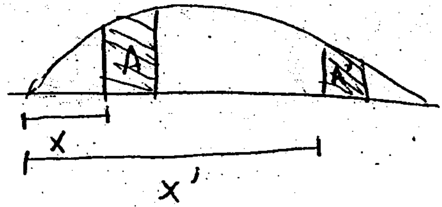
مرکز سطح و مساحت هر سطح را بدست میارم

M_{ab}^{F} و M_{ba}^{F} را با نوشتن دو معادله تعادل بدست میارم.

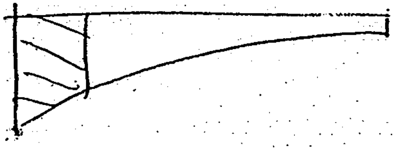
سوال ۱: مرکز سطح و مساحت سطح را چگونه بدست بیاریم؟

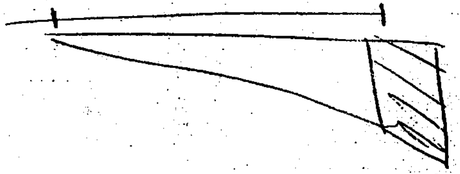
به مستطیل های کوچک تقسیم میکنیم. با هم جمع میکنیم.

$M \cong AX$ از این ترتیب برید.

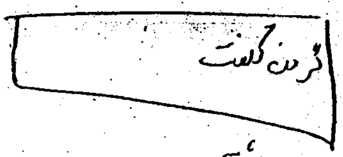


در $\frac{1}{3}$ ضرب کرده که نابود نشه. مثلث تقریب زده.





در اینجا همه را حساب میکنید بعد چه میگذارید ممان بیشتر زیر گردن کلفته باید باشه. دقت کنید

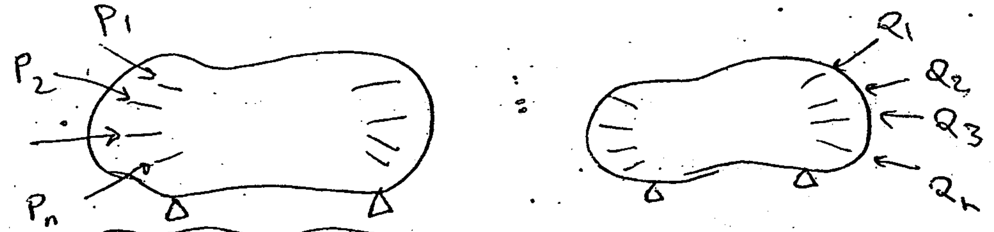


$$M_{ab}^{F} < \overset{\text{ممان بیشتر}}{M_{ba}^{F}}$$

مثال 2-15: اگرچه سر b گیردار نیست ولی چون M_{ab} اثر داده میشه گیردار. C_{ab} و بعد S_{ab} را بدست آورده. $C_{ab}+C_{ba}\neq 1$ دقت کنید. همین جوری طرف ترند C_{ba} و S_{ba} را بدست میارید.

10.1 از انتگرال میاد. 9.90 از تقریب sum میاد. می بینید که خیلی تفاوت ندارند.

رابطه مهم $\boxed{C_{ab}S_{ab}=C_{ba}S_{ba}}$ ابزاری برای کنترل عملیات



$$\boxed{\sum P_i s_i = \sum Q_j \delta_j}$$

خیلی مهم (کنکوری!)

S_{ab} ممان به ازای دوران واحد بود. زاویه θ رو صفر گرفته ولی base structure ش رو ساده کرده. رو سازه نامعین را به یک تیر ساده تبدیل کردم.

کاربرد این قضیه { کنترل مقادیر بدست آمده
سختی‌های اصلاح شده (دیگه $\frac{3}{4}$ و $\frac{3}{2}$ و $\frac{1}{2}$ نباید استفاده کنیم. باید فرمول‌های مربوطه را بدست بیاریم.)

از رابطه 15-15 برای سختی‌های اصلاح شده باید استفاده کنیم. اثباتش رو بعدش نوشته.

ممان لازم جهت دوران واحد زمانی که ممان در θ صفر باشه

دوباره از اصل جمع آثار استفاده می‌کنیم.

θ را ۱ می‌گیریم بعد relax ش می‌کنیم.

بعد θ رو برای اینکه بالانس کنه در θ ممان عکس θS_{ab} می‌دیم.

جهت‌ها از شکل‌ها را اگر درست نگذارید، از سه نمره، ۰.۵ نمره می‌گذاریم.

a چون تغییر مکانش رو داده دیگه no further rotation

کتاب یک ایرادی داره. اگه جهت ↶ نشون داده اینکه نباید (-) بگذاری.

حالت (2.) صفحه 472 بالای صفحه:

اگر $C_{ab} = \frac{1}{2}$ باشه همان جواب قبلی رو می‌ده. کنترل ✓

حالت (3):

پس برای مقاطع منشوری به جای $\frac{3}{4}$ و $\frac{3}{2}$ و $\frac{1}{2}$ از این‌ها استفاده می‌کنیم.

ممان‌های گیرداری رو هم بدست بیاریم.

θ_a رو باید مجموعش صفر بشه. ممان در a در (c) را می‌دهم

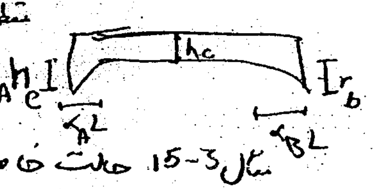
ممان به ازای دوران واحد بود S_{ab} حالا که θ است با تشکر از رفتار خطی می‌شه θS_{ab}

a رو بستم. برای b هم همین کار را می‌کنم. b رو هم می‌بندم.
حالا که همه رو جمع کنید $M^F_{ab} = -S_{ab}\frac{\Delta}{L} - C_{ba}S_{ba}\frac{\Delta}{L}$ و با نشست
ثابت‌ها رو از رابطه 18-15 و 19-15. دقت کنید که یکی برابر نیستند
$C_{ab}=\frac{1}{2}$ و $S_{ab}=4EK$ بگذارید همان جواب قبل رو می‌دهد. کنترل ✓

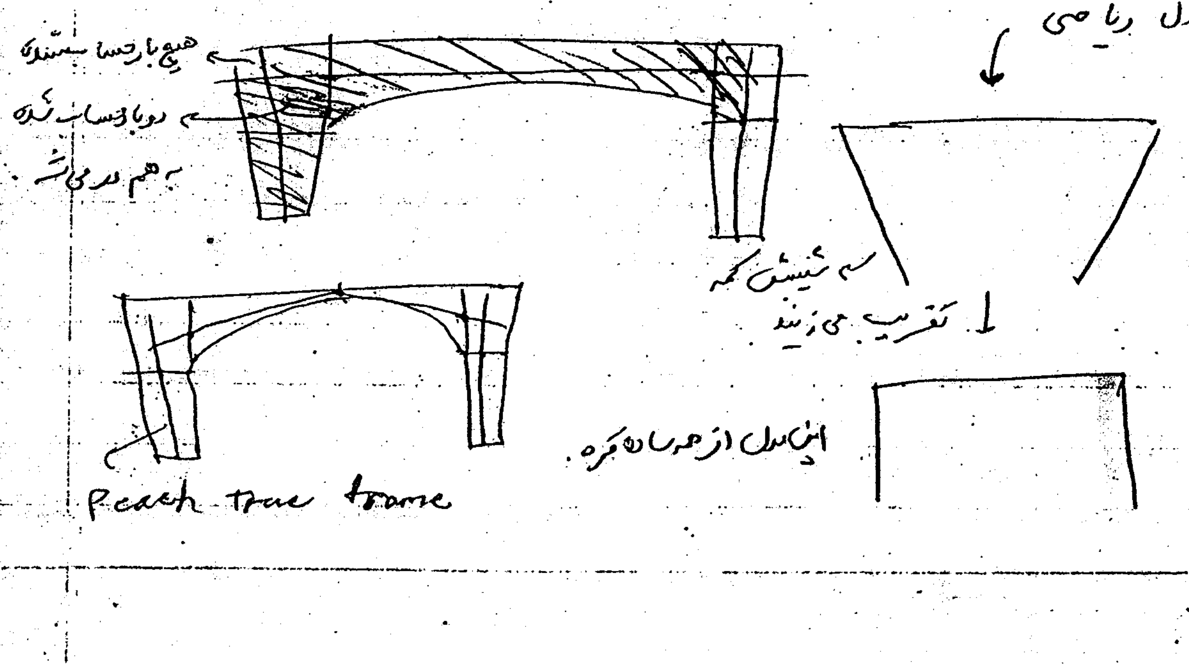
▨ جلسه نهم: 8-15 مثال‌های عددی

ص 475:

جداول: ثابت‌های قاب‌ها، ساختمان‌های خمشی، پل‌ها برای روش پخش ممان (توزیع لنگر)
برای اعضا با مقطع متغیر - کتابش را از مسیر شکار بگیرید.
K_{AB} رو با $\frac{I}{K}$ اشتباه نگیرید.
برای مقاطع و دهانه‌ها و مشخصات هندسی مختلف C_{ab} و C_{ba}
K_{ab} و K_{ba} ← باید ضرب کنید $\frac{EI_c}{L}$ در — ممان اینرسی مقطع میانی
ممان‌های گیرداری
می‌تونید ignore کنید ← وزن‌ها سر به ماهیچه‌ها را هم می‌ده.

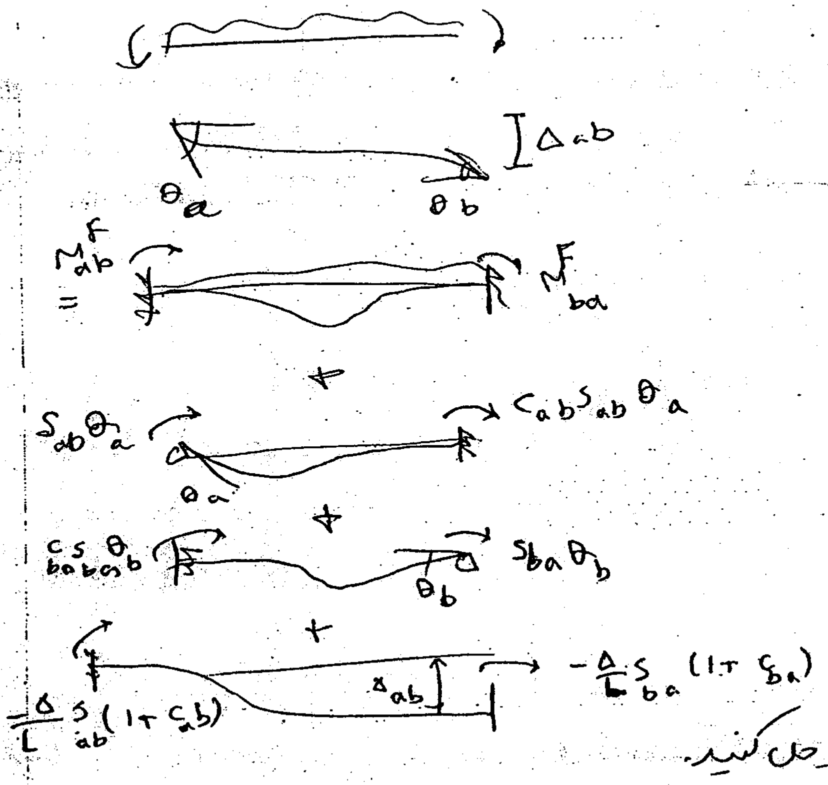

$r_A h_c I$
h_c
$I r_b$
$\alpha_A L$
$\alpha_B L$

مثال 3-15 حالت خاص این جداول است. $\alpha_A = \alpha_B = \frac{1}{2}$
این مثال را با استفاده از جدول هم خودتان حل کنید.
ص 478 باید بشمرید بیارید بیرون. اول باید جلو حرکت رو بگیرید. یک کراس معمولی با مقطع متغیر بنویسید. عکس العمل را بدست بیارید بعد
Pure translation followed by pure rotation plus modification


هیچ بار حساب نشده
دوبار حساب شده
به هم در می‌شه
Peach tree frame
مدل ریاضی
سه شیبش کمه
تقریب می‌زنید
این مدل از همه ساده‌تره.

از جدول حساب می کنید ضرایب اشکال و غیره را .
معادلیها نوعاً گراس می نویسید .
فقط در محاسبه برش درنه بار گسترده سمت چپ فراموش نشه .

9-15 : شیب - افت : باید معادلات شیب افت را اصلاح کنید، برای حالت مقطع متغیر


Δ_{ab}
θ_a
θ_b
M^F_{ab}
$=$
M^F_{ba}
$+$
$S_{ab}\theta_a$
$C_{ab}S_{ab}\theta_a$
θ_a
$+$
$C_{ba}S_{ab}\theta_b$
$S_{ba}\theta_b$
θ_b
$+$
Δ_{ab}
$-\frac{\Delta}{L}S_{ba}(1+C_{ba})$
$-\frac{\Delta}{L}S_{ab}(1+C_{ab})$

مسئله های این فصل را حل کنید.

▨ روش کانی :

اینجا چون روی خود مجهولات iteration می کنید، اگر اشتباه کنید، خودش خودش رو درست می کنه. self repairing approach

▨ کانی : پیوست H را باز کنید. گوس - سایدل

گام اول : همه X ها رو صفر می گذاریم $x_1 = \frac{c_1}{a_N}, \ldots, x_n = \frac{c_n}{a_{nn}}$
این بشه iteration اول

همان روشی که در درس محاسبات عددی خوندیم.

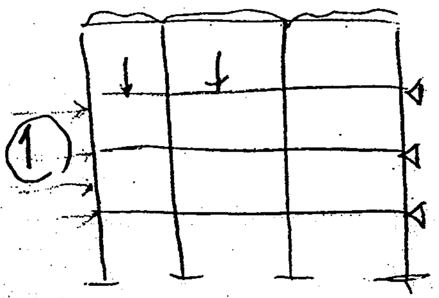
در سازه به علت ماتریس سختی اش همیشه converge می شه.

در سازه‌های متعارف بعد از 3 تا سیکل به جواب می‌رسید
کانی تو هم نشسته می‌شه میاره کرم

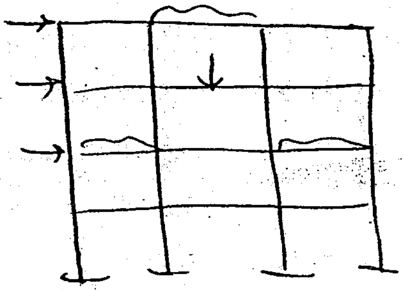
▨ جلسه دهم :

▨ روش کانی : 4 حالت را بررسی می‌کنیم

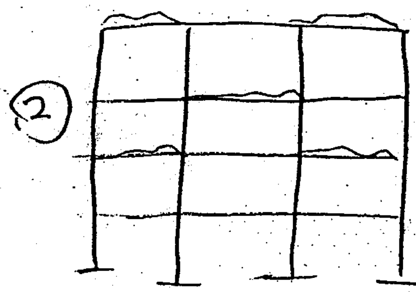
①



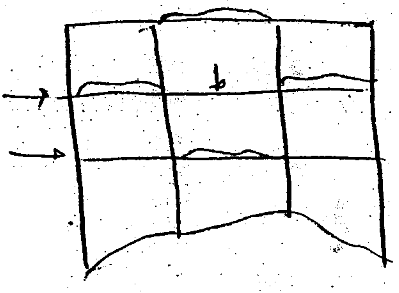
③

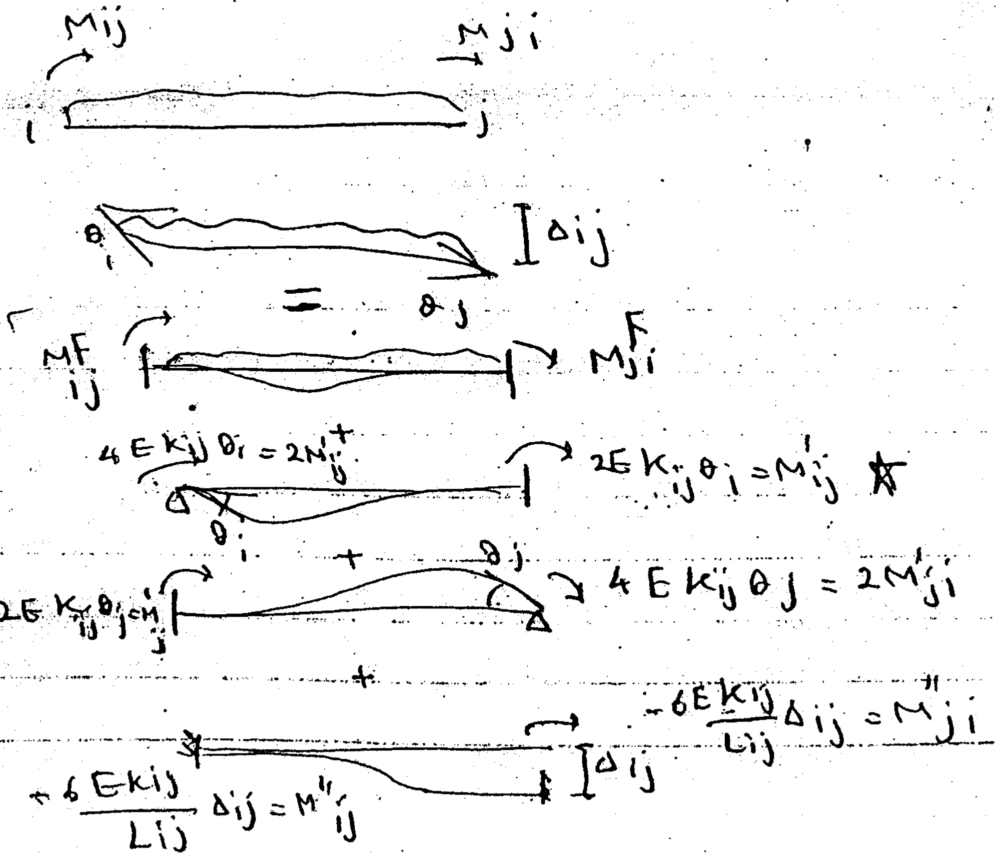


②



④





M_{ij}
M_{ji}
i
j
θ_i
Δ_{ij}
=
θ_j
M^F_{ij}
M^F_{ji}
θ_i
+
θ_j
+
Δ_{ij}

$4EK_{ij}\theta_i = 2M'_{ij}$

$2EK_{ij}\theta_i = M'_{ij}$ ☆

$2EK_{ij}\theta_j = M'_{j}$

$4EK_{ij}\theta_j = 2M'_{ji}$

$-6E\frac{K_{ij}}{L_{ij}}\Delta_{ij} = M''_{ji}$

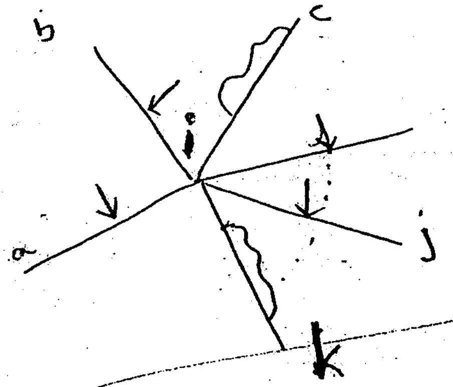
$+6\frac{EK_{ij}}{L_{ij}}\Delta_{ij} = M''_{ij}$

جمع آثار :

$$\begin{cases} M_{ij} = \overset{\checkmark}{M^F_{ij}} + 2M'_{ij} + M'_{ji} + M''_{ij} & * \\ M_{ji} = M^F_{ji} + M'_{ij} + 2M'_{ji} + M''_{ji} & ** \end{cases}$$

اینجا دیگر متغیرهایمان را M' و M'' می گیریم. θ و Δ را وارد نمی کنیم. تکرار را روی همین ها انجام می دهیم.

حالا معادلات تعادل را باید بنویسیم. ۴ تا حالت بارگذاری و تکیه گاه های صفحه قبل را می نویسیم. یک ذره با هم فرق می کنند.



$$\sum_{j=0}^{K} M_{ij} = 0 \quad \text{یا} \quad \sum_{j} M_{ij} = 0$$

$$\xrightarrow{*} \sum M^F_{ij} + 2\sum M'_{ij} + \sum M'_{ji} + \sum M'' = 0$$

اگر در گره ممان داشته باشیم، به جای صفر می گذاریم.

$$\underbrace{\sum_j M'_{ij}}_{\text{حساب می کنیم}} = -\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\cancel{\sum M^F_{ij}}}_{\substack{M_i^F \\ \text{ممان نامتعادل گره i}}} + \sum_j M'_{ji} + \sum_j M''_{ij}\Big]$$

در کانی سازگاری را کی ارضا کرده ایم؟ پیچ ریجید یا θ دورانی در انتهای اعضا یکسان است.
Patch rigid

$$\bigstar \longrightarrow M'_{ij} \sim k_{ij} \longrightarrow \frac{M'_{ij}}{\sum_j M'_{ij}} = \frac{k_{ij}}{\sum k_{ij}}$$

$$\longrightarrow \overset{\times}{M'_{ij}} = \overset{\checkmark}{\boxed{-\frac{1}{2}\,\frac{k_{ij}}{\sum k_{ij}}}} \Big[\overset{\checkmark}{M^F_i} + \overset{\times}{\sum_j M'_{ji}} + \overset{\checkmark}{\sum_j M''_{ij}}\Big]$$

(برای کنسول)
R_{ij} ضریب دورانی ← مجموع $\sum_j R_{ij}$ هر گره، $-\frac{1}{2}$ باید بشود

در سازه ① صفر است.

معادله کلی تعادل گره — این یعنی کانی — تموم شد همین کانی است!

* در حالت دوم ② این معادله کافی نیست. باید معادلات تعادل کمکی بنویسیم

(همون کاری که در شیب افت می‌کردیم. برش افقی می‌زدیم و $\sum F_x = 0$ می‌نوشتیم)

$$M'_{ij} = R_{ij}\left[M^F_i + \sum_j M'_{ji} + \sum_j M''_{ij}\right]$$

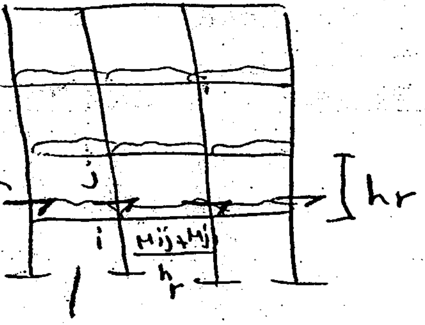
پس برای حالت ② می‌خواهیم معادله تعادل کمکی بنویسیم.

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow \sum_r \frac{M_{ij} + M_{ji}}{h_r} = 0$$

حال M_{ij} و M_{ji} را از صفحه قبل با هم جمع می‌کنیم

$M^F_{ij} = M^F_{ji} = 0$ چون ما نیروی گیرداری نداریم (روی ستون‌ها بار نداریم)

برش ها را اعلام میدیم طبقه r ام



$$\hookrightarrow 3\sum M'_{ij} + 3\sum M'_{ji} + 2\sum M''_{ij} = 0$$

$$\longrightarrow \sum M''_{ij} = \frac{-3}{2}\left[\sum_r M'_{ij} + \sum_r M'_{ji}\right]$$

ضمناً $M''_{ij} = -\frac{3 E k_{ij} \Delta_{ij}}{h_r} \longrightarrow M''_{ij} \sim K_{ij}$

یعنی برای تمام ستون‌ها ثابته

معادله سازگاری در اینجا این است که Δ تمام ستون های یک طبقه باهم برابرند.

$$\longrightarrow M''_{ij} = \frac{-3}{2}\frac{k_{ij}}{\sum_r k_{ij}}\left[\sum_r M'_{ij} + \sum_r M'_{ji}\right]$$

ضریب انتقال D_{ij}

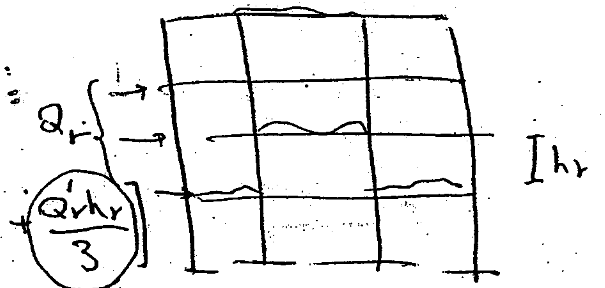
معادله تعادل کمکی

(این معادله و معادله صفحه قبل یعنی کافی)

* در حالت سوم ③ :

این اضافه شد. تفاوتش با حالت دوم.

$$\sum \frac{M_{ij}+M_{ji}}{h_r} + \overset{\uparrow}{Q_r} = 0$$



$$\longrightarrow \sum M''_{ij} = -\frac{3}{2}\left[\sum_r M'_{ij} + \sum_r M'_{ji} + \boxed{\frac{Q'_r h_r}{3}}\right]$$

$$\longrightarrow M''_{ij} = D_{ij}\left[\sum_r M'_{ij} + \sum_r M'_{ji} + M_r\right]$$

M_r ممان طبقه

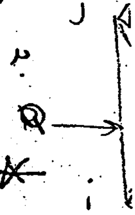
$Q'_r = Q_r + \sum FES$

Q_r برای هر طبقه می‌شه جمع نیروهای جانبی بالاتر از طبقه r ـم

no physical moment فکر نکنید باید دنبال ممان بگردید.

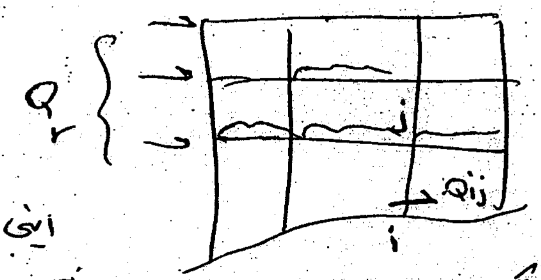
$\sum_r FES_{ji} = R_{ji}$

با این دو تا معادله تکراری شبیه گوس سایدل می‌زنیم. تکرار می‌کنیم روی گره‌های متوالی این می‌شه کافی. وقتی گام k و k+1 به هم نزدیک شوند، M'_{ij} و M''_{ij} بدست آمده در * و ** می‌گذاریم.



* در حالت ④: همون حالت ③ است فقط از طبقه‌ی پایین مسئله داریم.

حالات ① و ② و ③ حالات خاص این حالت ④ است.



اینجا h_{ij} دیگه ثابت نیست که بگذاریم h_r

یکی از ستون‌ها را ستون مرجع انتخاب می‌کنیم. ستونی که بیشتر تکرار شده (h'_r)

$$Q_{ij} = \frac{M_{ij}+M_{ji}}{h_{ij}}$$

$$\frac{h'_r}{h_{ij}} = c_{ij}$$

دوباره معادله‌مان را می‌نویسیم:

$$Q_r + \sum_r \frac{1}{h_{ij}}\left[M_{ij}+M_{ji}\right] = 0$$

$$\longrightarrow Q_r h'_r + \sum_r \frac{h'_r}{h_{ij}}\left[M_{ij}+M_{ji}\right] = 0$$

$$\longrightarrow Q_r h'_r + \sum_r c_{ij}\left[M_{ij}+M_{ji}\right] = 0$$

فرض: بارهای جانبی فقط در گره‌ها وارد می‌شوند $\overset{F}{M}_{ij}=\overset{F}{M}_{ji}=0$

$$\xrightarrow{*\ و\ **} Q_r h'_r + 3\sum c_{ij}\left(M'_{ij}+M'_{ji}\right)+2\sum c_{ij}M''_{ij}=0$$

هدف ما یافتن M''_{ij} است:

$$\longrightarrow \sum c_{ij}M''_{ij} = -\frac{3}{2}\left[\overset{M'_r}{\boxed{\frac{Q_r h'_r}{3}}} + \sum c_{ij}\left(M'_{ij}+M'_{ji}\right)\right]$$

بازهم داریم $M''_{ij} = \frac{-6EK_{ij}}{h_{ij}}\Delta_{ij} \sim \frac{K_{ij}}{h_{ij}}\overset{\text{تغییر}}{\frac{\times h'_r}{\times h'_r}} \sim c_{ij}K_{ij}$

$$\frac{M''_{ij}}{\sum c_{ij}M''_{ij}} = \frac{c_{ij}K_{ij}}{\sum c_{ij}^2 K_{ij}}$$

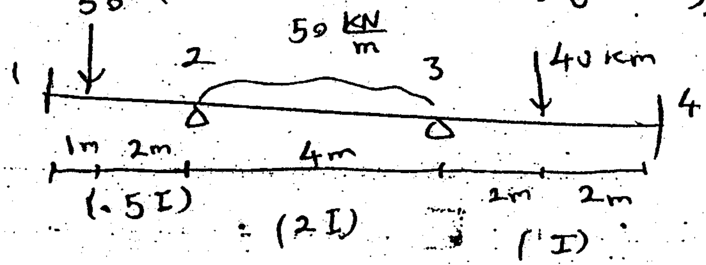
$$\longrightarrow M''_{ij} = \underbrace{\boxed{-\frac{3}{2}\frac{c_{ij}K_{ij}}{\sum c_{ij}^2 K_{ij}}}}_{D'_{ij}}\Big[\underset{\downarrow\ \frac{Q'_r h'_r}{3}}{M'_r} + \sum_r c_{ij}\left(M'_{ij}+M'_{ji}\right)\Big]$$

که $c_{ij}=\frac{h'_r}{h_{ij}}$

$Q'_r = Q_r + R_{ji} + \frac{\overset{F}{M}_{ij}+\overset{F}{M}_{ji}}{h_{ij}}$

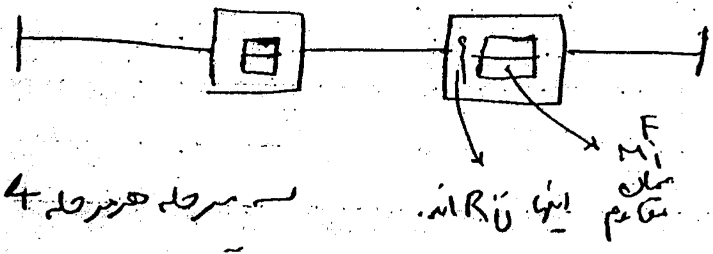
$\longleftarrow$ فرمول کلی می‌شه این - حالات دیگه، حالت خاص اینه.

اگر در امتحان اعضا مایل بوده، باید معادله مکمل را خودتان بدست بیارید. چون دیگه $\sum F'_x$ جواب نمی‌دهد.



مثال اول:
حالت ⊥ است.
فقط تعادل گره‌ها را بنویسیم.

$M''=0$

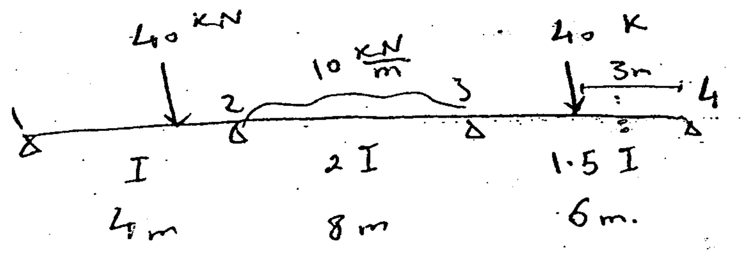


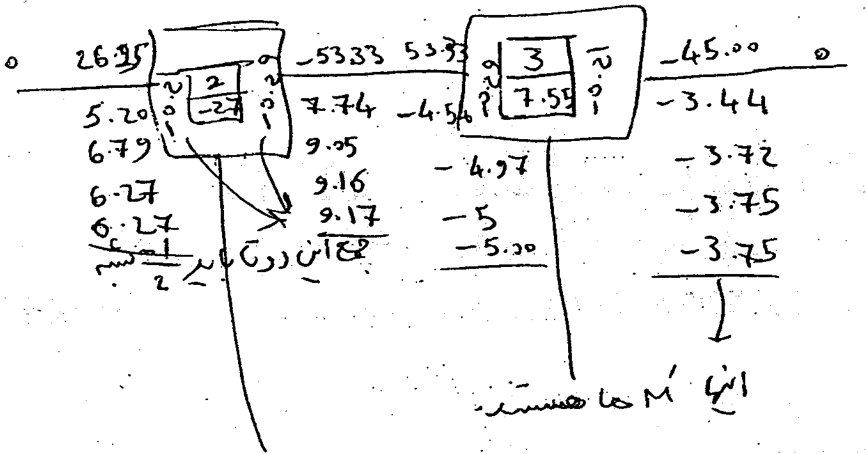
$R_{ij}\left[\overset{F}{M}_i + \text{ممان‌های دور } \sum M'_{ji}\right]$

ممان مقاوم اینها R_{ij} اند.

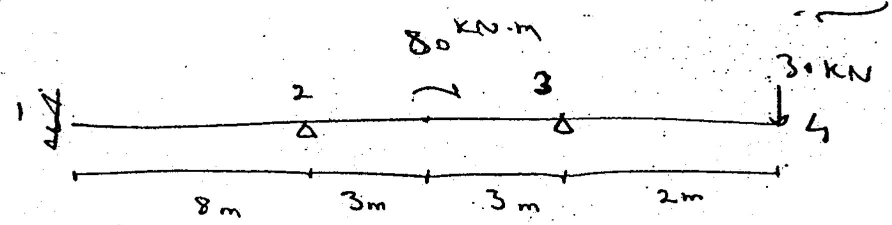
پس مرحله هر مرحله 4 عدد بدست بیارید و جلو برید.

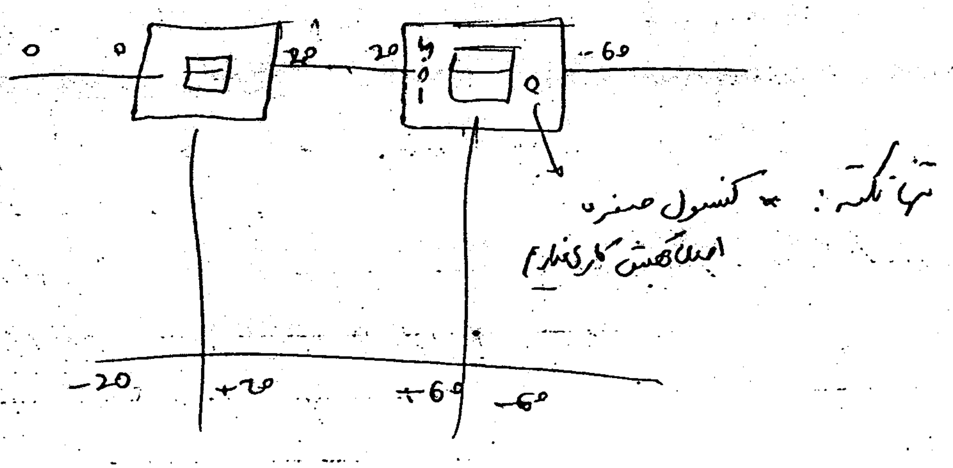
مثال دوم :

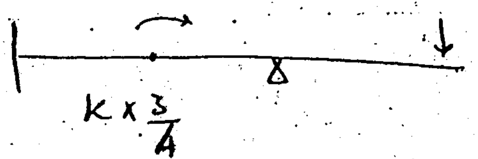

40 KN
10 KN/m
40 K
3m
1
2
3
4
I
2 I
1.5 I
4m
8m
6m.


0
26.95
-53.33
53.33
-45.00
0
2
-27
3
7.55
5.20
6.79
6.27
6.27
7.74
9.05
9.16
9.17
-4.56
-4.97
-5
-5.00
-3.44
-3.72
-3.75
-3.75
جمع این دوتا باید
1/2
اینها M' ها هستند.

در کانی اگر یک جایی اشتباه کردید، سیکل ها اضافه تر می شه ولی اشتباهش برطرف می شه.


80 KN.m
30 KN
1
2
3
4
8m
3m
3m
2m


0
0
20
20
-60
0
-20
+20
+60
-60
تنها نکته: * کنسول صفره
اصلاً هیچ کاری ندارم

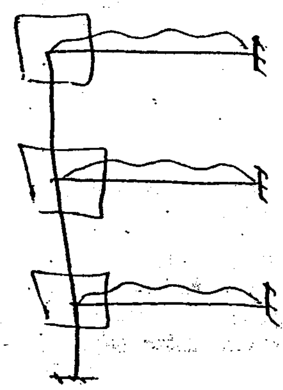


اگر این تکه را بیرون حل کنید، در بالا فقط قوطی چپی کافیه.

جلسه یازدهم : جلسه بعد کتاب تئوری ماتریسی سازه ها را بیاورید.

ص 489 - شکل 2-16 - حرکت جانبی ندارید چون هم سازه متقارن است هم بارگذاری

در نتیجه در وسط تیرها شیب ما صفر است (به خاطر تقارن) ← گیردار می‌گیریم.



کتاب سازه رو نصف نکرده. خودش میومده از شلوغی

دور قوطی R_{ij} را می‌نویسید.

در ستون AD و DG چون ممان گیرداری نداریم صفر نوشته

جمع ممان ها را در وسط قوطی می‌نویسیم.

4 بار از رابطه اصلی جلوی رویم تا جواب‌ها به هم نزدیک شود.

در منزل این مسئله را با تقارن حل کنید.

حال که M'_{ij} ها بدست آمد، M_{ij} ها را بدست بیارید.

$$M_{ij} = 2M'_{ij} + M'_{ji} + M''_{ij} + M^F_{ij}$$

$$M_{ji} = M'_{ij} + 2M'_{ji} + M''_{ji} + M^F_{ji}$$

$$M'_{ij} = R_{ij}\left[M^F_i + \sum M'_{ji}\right]$$

مثال 2 : G بسته است پس باری که در ستون وارد شده مشکلی ایجاد نمی‌کند.

ممان های گیرداری ← ممان های متفاوت - R_{ij} ها را هم می‌نویسد

ص 498 بالای صفحه نوشته شده. ممان کنسول و بار وارد بر ستون را هم در

ممان های گیرداری می‌نویسید.

در ص 499 عین همین ها ی سختی ها ی اصلاح شده را داریم. کتاب درباره اش مده

توضیح داده. شما توجه نکنید. کار خودتان را بکنید.

سختی FG و JK را $\frac{1}{2}$ ضرب کنید.

کراس نا قدر حرکت جانبی به علت تقارن

سوالات امتحانی را از کتاب های انگلیسی کتابخانه می‌دهم.

از مسائل حل شده 4_5 کتاب سوال می‌دهم.

Basic Structural Analysis By C S Reddy

هفته دیگه امتحان تکلیف داریم.

۴شنبه دو هفته بعد 18 آبان

ص 501 برای B و F لازم نیست قوطی بکشید .

$K=\frac{3}{4}$ برای وقتی است که ممان انتها را بلسید. پس K_{BC} و K_{EF} را در $\frac{3}{4}$ ضرب کنید. می شه 3 تا قوطی .

وقتی $K=\frac{3}{4}$ را به کار بردید دیگه حق ندارید قوطی بکشید .

اینجا در کتاب اومده با هم عمل کرده ! از نظر کاوه این کار غلطه

تمرین 12 مثال 3 را به این روش حل کنید تحویل بدید هفته بعد

تمرین : مثال 1 را روش تکراره حل کنید

مثال 4 ص 503 : FG و JK را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنید.

FB و GC در $\frac{5}{4}$ 〃 〃

می شه شکل 8-16

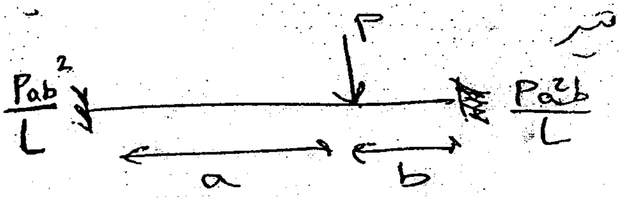
حالا که K ها را تصحیح کردیم با بقیه راستی کاری نداریم.

تکیه گاه A و G را مواظب باشید. هیچی نمی خواد بگذارید. به این ها توجه نکنید .

ص 513 - با برنامه نویسی می تونید این کارها را انجام بدید .

تیر

ممان‌ها گیرداری اینو سر امتحان بپرسید ۱۰ نمره کم می کنم .



ممان راستی چون P نزدیکه بزرگتره . چپه نگذارید .

M'_{ij} و CA و CB را می نویسید. هر وقت M'' را نداشتید صفر بگذارید .

می روید جدول تکمیلی

$$\begin{cases} M'_{ij}=R_{ij}\left[M^f_i+\sum M'_{ji}+\sum M''_{ij}\right] \\ M''_{ij}=D_{ij}\left[\sum_r M'_{ij}+\sum_r M'_{ji}\right] \end{cases}$$

روی گره عمل می کنید

هم M' ها converge کنند هم M'' ها converge کنند .

بارگذاره اینجا بد است، 5 تا تکرار کرد. شما 4 تا 5 تا کافیه.

شکل (16-12a) ص 519

این مسئله کاملاً نامتقارن است ← حرکت جانبی داره.

از R_{ij} ها از D_{ij} ممان های گیرداری ممان های ستاره

شروع می کنید - از M ها

سپس از M'' ها را پیدا می کنید.

از توجه می رید M' بهتر و بهتر را پیدا می کنید. بعد M'' بهتر و بهتر تکرار می کنید. نکته خاصی نداره.

مثال 7 : شکل 16-14a بارجانبی هم داره

$$M'_{ij} = R_{ij}\left[M^F_i + \sum M'_{ji} + \sum M''_{ij}\right]$$

Complimentary را

$$M''_{ij} = D_{ij}\left[\sum_r M'_{ij} + \sum_r M'_{ji} + M_r\right]$$

که $M_r = \frac{Q_r h_r}{3}$ می گیریم مال طبقه

ولی هیچ ربطی به ممان نداره.

M_r چه کمکی می ده؟ قبلاً اول M' را بدست می آوردید بعد M'' ولی در این حالت می تونید اول M'' را بدست بیارید بعد برید M' را بدست بیاورید.

شکل 16-15 حسن سوال: A و B و C و D مفصله.

اگر حرکت جانبی نداشتیم اگر انتهای ستون ها مفصل بود K را در $\frac{3}{4}$ ضرب می کنیم

اگر حرکت جانبی داشتید k_r در $\frac{3}{4}$ ضرب کنید بعلاوه اینکه جمع ضرایب D_{ij} طبقه پایین را 2 می گیرید به جای $\frac{3}{2}$ - چرا؟ در appendix کتاب می گیم.

اگر همه ستون ها مفصلی بودند، ... از دست می ره. نمی شه استفاده کرد.

طول آنهایی که مفصلی دارند را در $\frac{3}{2}$ ضرب می کنید و سپس را گیردار حل کنید

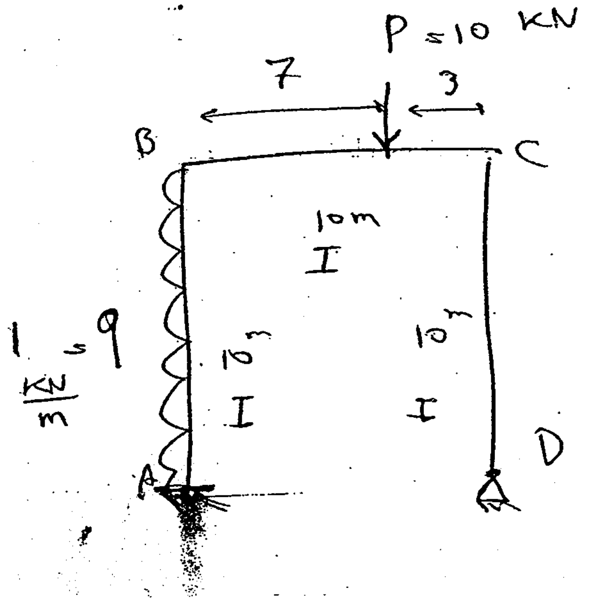
بعد با حالت 4 یعنی تیر ساهور حل می کنید: این طول $\times \frac{3}{2}$ را هم در appendix گفته.

ص 536 : ① طول ستون های پایین مساوی ... یا تیر ساهور

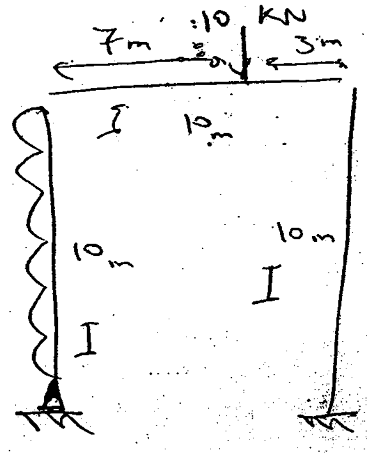
یا همین تبدیل مفصل به گیردار

② با گسترده بر روی ستون ها وارد می شه (بار باد) ممان های گیردار صفر نمی شه

روش تقریبی : بارهای گسترده را نصف کنید. هر نصف را به یک طرف ببرید. بعد ما کم می شه


P = 10 KN
7
3
B
C
10m
I
1 = q
KN/m
10m
I
10m
I
A
D

سوال امتحانی:


10 KN
7m
3m
I
10m
10m
I
10m
I

تمرین تحویل بدید. با کانی

(با روش های کراس و شیب افت هم حل کنید. باید جواب هاتان یکی بشود.) به هر سه روش حل کنید. تحویل بدید.

سه چیز
تعریف
اثبات
مسئله (می‌تونی نقاشی باشه)

با نقاشی کنید و R ها را هم بنویسید تا آخرش بزنید.

به تقارن ها توجه خاص مبذول کنید.

سوالات طولانی را می‌خوام یک تکّش رو حل کنید.

30 ٪ نمره تمام - تا چهارشنبه هفته آینده همه تمرینات را بیارید.

فصل اول و دوم کتاب تئوری ماتریسی سازه ها را حتماً بخوانید. 15 دقیقه اول درس می‌دهم. میرم فصل سوم

☐ جلسه دوازدهم: تئوری ماتریسی سازه‌ها   کتاب کاردستونر نیره

فصل اول: مقدمه‌ای از ماتریس‌ها و جبر.

ماتریس سختی و نرمی سازه معرفی خواهند بود.

ماتریس مستطیلی در معادلات تعادل یک سازه معین دیده می‌شود در معادله سازگاری

row matrix

column matrix

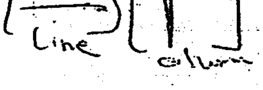
diagonal ״

۱ Unit ״

cross - symmetric به ندرت اتفاق می‌افتد.

Transpose یا ترانهاده

دترمینان یک ماتریس خیلی مهم است. روابط ۱-۱۰ و ۱-۱۱



Line column (Li co)

minors و co-factors

adjoint ماتریس مربعی که تمام درایه‌های آن co-factor ها باشد.

ماتریس سختی‌ای که دترمینانش صفر شود، مکانیزم یا ناپایدار است.

قوانین مربوط به دترمینان‌ها ص 7

در دترمینان ضریب b در یک سطر یا ستون ضرب می‌شود. در ماتریس در تمام درایه‌ها ضرب می‌شود

اگر دو سطر یا دو ستون از |A| مشابه باشند ← |A|=0

دترمینان ماتریس 10000 × 10000 را چطوری حل می‌کنند؟

ماتریس را به صورت جمع دو ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی می‌نویسیم. اگر قطرش صفر شد دترمینان صفر است.

جمع ماتریس‌ها

تفریق ״

ضرب ״

خصوصیات ضرب:

✓ associative law

✓ distributive law

X commutative law

* معکوس ماتریس ها: دعوای ما سر این است.

در روش شیب افت، روش نیروها و ... باید چند معادله چند مجهول را حل کنیم.

$[A]^{-1}$ = A inverse

روش Traditional برای درآوردن A inverse: $[A^{-1}] = \frac{adj[A]^T}{|A|}$

این هم باز مستقیم به کار ما نمی خوره.

ما هرگز inverse پیدا نخواهیم کرد. معادلات را حل می کنیم. به روش LU

در ماتریس غیر ویژه ($|A| \neq 0$) و متقارن روش LU می شه cholesky

می خواهیم ماتریس غیرویژه [S] را به صورت [L][Γ] decompose کنیم.

ماتریس [L] را می خواهیم پیدا کنیم.

از دو رابطه 1-26a و 1-27a یا روابط 1-28 و 1-29 بدست می آیند.

با داشتن S می شود L را بدست آورید. تو ماشین برنامه بنویسید.

با داشتن L می خواهیم R را پیدا کنیم. چگونه؟

سه قانون 1-34 و 1-35 و 1-36 را بدست می آوریم. R بدست می آید.

$$S \longrightarrow L \longrightarrow R \longrightarrow [S]^{-1}$$ ✓

این روش LU Factorisation است.

خواص ماتریس معکوس: معکوس ماتریس متقارن متقارن است.

Partitioning:

بلوک بندی را با توجه به نیازمان انجام می دهیم.

در ماتریس سختی بلوک های 6x6 دوست داریم. هر گره 6 تا

پارتیشن های high level خاص هستند. operation

زیباترین کار partitioning $[A]^{-1}=[C]$ است.

10000x10000 را می کنید 5000x5000 چهارتا

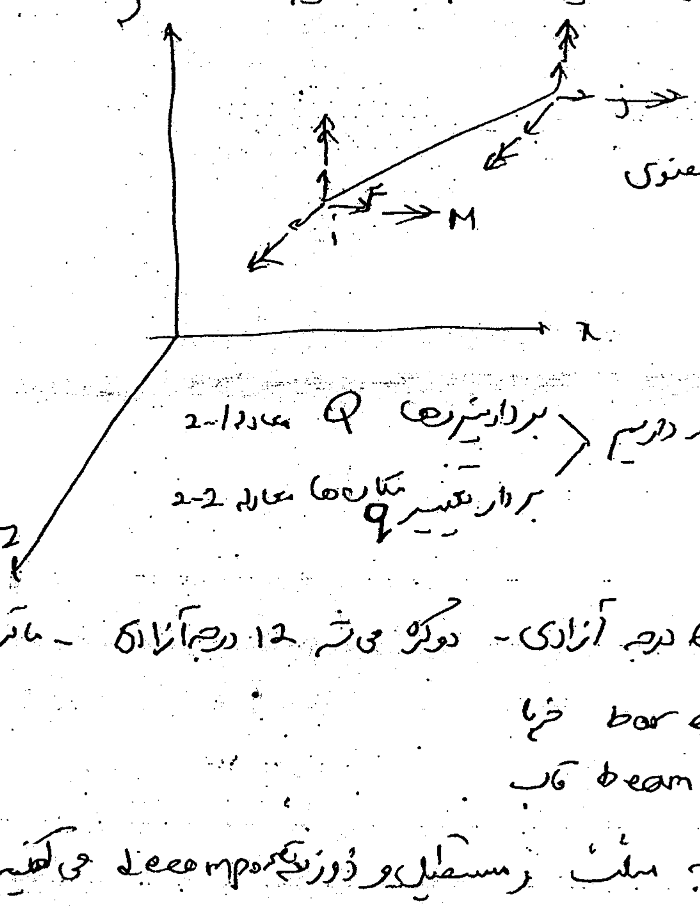
هر کدام از 5000 x 5000 را باز چهارتا بلوک می کنید.

1-43a همون adjoint است.

یک inverse ماتریس 10000 x 10000 را می کنید 6 تا inverse 5000x5000

درفصل 7 و 8 این partitioning را در سازه‌ها انجام می‌دهیم.
بلوک‌ها را با جهت تعادل و سازگاری به هم می‌چسبانیم.
روش‌های مورد استفاده برای programming در فصل دوم. (جبر بردارها)
کتاب کار دستوینر
وابستگی خطی بردارها را بحث کرد.
فصل 3: معادلات خطی همزمان - فصل مهمی است. حل n معادله n مجهول را گفته
well conditioning و ill conditioning
روش حذفی گوس

☒ فصل دوم:
نیرو و تغییر مکان تعمیم یافته یعنی هم نیرو داریم هم تغییر مکان
روش ماتریس سختی مثل شیب افت: المان‌ها را بیرون می‌کشیم و به روش سختی تحلیل می‌کنیم. به هم می‌چسبانیم.



دوتا بردار داریم
بردار نیروها Q معادله 2-1
بردار تغییر مکان‌ها q معادله 2-2

هر گره 6 درجه آزادی - دو گره می‌شه 12 درجه آزادی - ماتریس سختی 16×6 است

خرپا bar element
قاب beam element

سازه را به مثلث، مستطیل و ذوزنقه decompose می‌کنیم component ها را به هم می‌چسبانیم. (بحث Finite element)

امتحان: دوشنبه بعد عید قربان

~~اعضای پوسته‌ای~~ صفحات برشی ← بدنه هواپیما

اعضای پوسته‌ای ← بدنه دودکش‌ها! المان‌های دوار

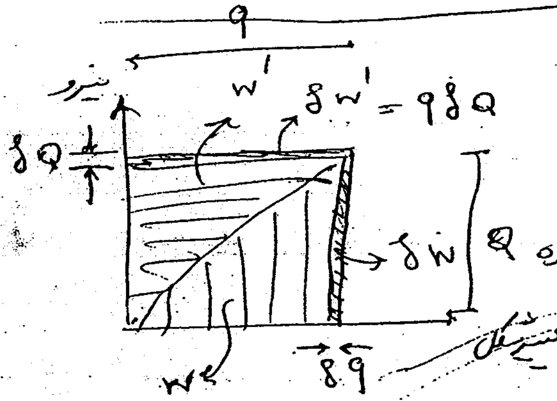
homework: روش چولسکی رو program کنید.

از کتاب سعید.

یک مسئله اختیاری 4x4 حل کنید بیارید.

▨ جلسه سیزدهم:

2-5 قضایای انرژی:



می‌خواهیم اثبات کنیم $\frac{\partial U}{\partial Q} = q$

اگر سیستم در حالت تعادل باشد کار انجام شده Q برابر انرژی داخلی سیستم می‌شه

$\delta W = Q\,\delta q$

$$U = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}dx + \cdots$$

قضیه دوم کاستیگلیانو $\frac{\delta \bar{U}}{\delta Q_i} = q_i$

قضیه اول کاستیگلیانو $\frac{\delta U}{\delta q_i} = Q_i$

← اگر رفتار خطی باشد $\delta \bar{U} = \delta U$

این ساده‌ترین شیوه اثبات است. در تحقیق 1 با یک روش دیگر اثبات کنید.

▨ روابط تنش کرنش: $\bar{\varepsilon}$ ← یعنی strain ای برای کرنش‌های الاستیک است.

2-14 روابط هوک هستند.

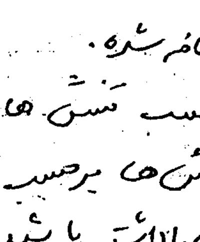
2-16 تغییرات برای شرایط دما اضافه شده.

در رابطه 2-17 کرنش‌ها را برحسب تنش‌ها بدست آورده

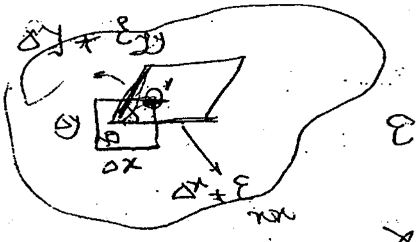
در 2-18 برعکس یعنی تنش‌ها برحسب کرنش‌ها

تنش مسطح: اگر تانسور تنش را داشته باشید و درایه‌های دارای اندیس z صفر باشند، تحت اثر تنش مسطح قرار گرفته است. بسیار مهم است.

کرنش مسطح: درایه‌های اندیس z دار تانسور کرنش صفر باشد.



روابط کرنش - تغییر مکان



$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= q_{x,x} = \frac{\partial q}{\partial x} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} \\ \varepsilon_{xy} &= q_{x,y} + q_{y,x} \end{aligned}\right\}$$

نکته : این روا حفظ کنید -

در رابطه 2-29 به صورت برداری می‌نویسیم.

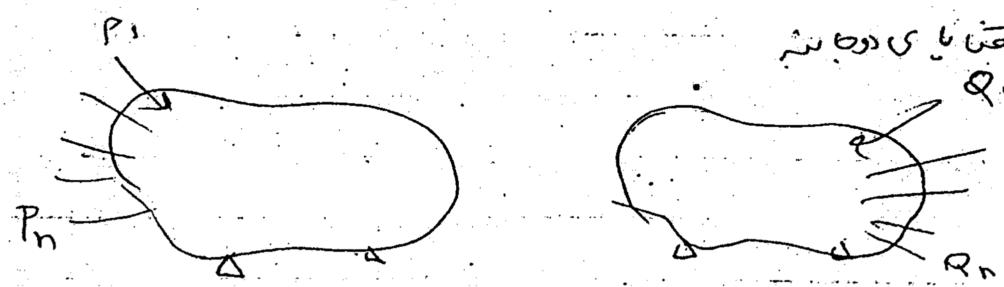
روابط 2-32 انرژی داخلی را برحسب نیروهای داخلی نوشته.

مثال 1 : انرژی داخلی میله را می‌خواهید اگر،
اگر تغییر طول را بخواهید $\frac{\partial U}{\partial P}$ را حساب کنید

مثال 2 : هم خمش داریم هم برش - و انتگرال‌ها را دو تکه می‌کنیم.

2-8 اصول جمع آثار - خیلی خوب است. جمع آثار دو حالت داره { برای نیروها / برای تغییر مکان‌ها
شکل 2-6 همان کاری است که در شیب افت می‌کردیم.

2-9 قضایای دوجانبه



RWT
reciprocal working Theorems

اثبات این قضایا را بلد باشید.

▨ فصل سوم : موضوع اصلی بحث ماست.

direct stiffness Matrix ← محبوب خیلی مهم

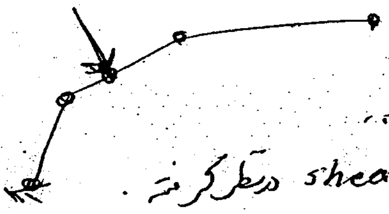
در فصل بعدی روش نرمی را هم خواهیم دید.

المان های مورد توجه ما برای ماتریس سختی

- میله با نیروی محوری ← خرپا
- تیر خطی ← همون میله است
- میله پیچشی ← مثل گاردان
- تیر پیچشی ← برای semirigid کردن اتصالات
- تیر مستقیم ← اصل کار ما

سازه‌های فضا کاری گره به skeletal structures

سازه خرپا را فوراً می تونیم به المان ها و گره ها تجزیه کنیم.



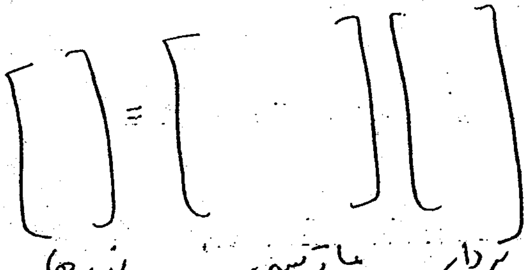
skeletization

برای اسلب، 2 بعدی و 3 بعدی بحث می‌شه.

در ساختمان صنعتی به صورت shear elements در نظر گرفته.

می تونه برش را هم تحمل کنه.

موضوع بحث ما تشکیل ماتریس سختی است.



ماتریس سختی

$$Q = Sq$$

بردار نیروهای خارجی

بردار تغییر مکان های سازه

درواقع: از کی چی رو بهشون می‌ده؟

اگر از q ها، همه را ببندیم فقط یکی‌اش را آزاد بگذاریم که دوران واحد کند. مثلاً q_1

ستون اول ماتریس سختی بدست میاد. نیروها را حساب می کنیم.

ستون i ام ← نیروهایی که بوجود آمده تحت اثر q_i و بقیه q ها صفر

ماتریس سختی

S_{ij} : Q_i را یک، بقیه را صفر بگیرید، یعنی از روی این نیروی Q را بدست میارید.

تعریف S_{ij}: نیروی بوجود آمده در امتداد Q_i زمانی که بقیه q ها صفر باشد. (امتحانی)
غیر از $q_j = 1$

S_{ij}: نیروی بوجود آمده در امتداد Q_i زمانی که $q_j = 1$ و بقیه q_j ها صفر باشد.

بنا به قضیه بتی $S_{ij} = S_{ji}$

dimansion S_{ij} چیه؟ سوال امتحانی

نیرو / جابجایی

ماتریس های سختی برای ~~پاره~~ سازه
سازه

در صفحه ی 61 گسترده ها ماتریس 4x4 را برای المان ها بدست آورده.

کتاب تحلیل ماتریسی سازه های کاردستونی را ببینید.

ثابت کرده $S_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_i} = S_{ji} \Rightarrow$ S is symmetric

خاصیت دوم ماتریس سختی: positive definit مثبت معین

$$\sum q_i^{t} Q_i = \underbrace{q^{t} Q}_{\text{کار انجام شده}} > 0 \longrightarrow q^{t}(Sq) > 0$$

transpose

اگر $q^{t} = a \Rightarrow a S a^{t} > 0$

تعریف: ماتریس مثبت معین یعنی ماتریسی که وقتی با ترانهاده اش ضرب میشه مثبت بشه.

خاصیت positive d.: دترمینان بلوک ها، آن مثبت بشه

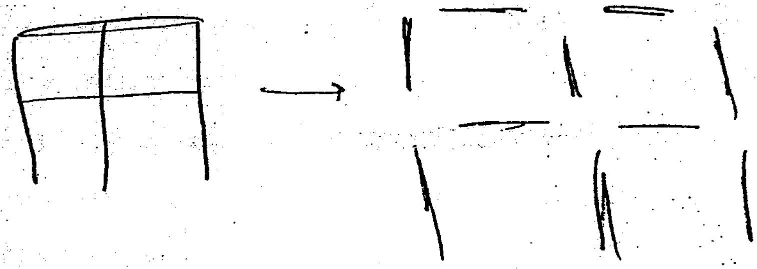
قطر ماتریس سختی نباید منفی بشه. نیرو درخلاف جهت حرکت!؟ ⟸ غلط

ممان درخلاف جهت دوران ⟸ غلط

اگر ماتریسی positive definite باشد همواره روش iterative آن converge است.

مثال 3.3 سه تا گره داریم. می‌خواهیم ماتریس سختی این سازه را پیدا کنیم ← پیوست الف ص 275 را بخوانید. آقای آذر جزئیات گفته

روش ما Level 3 stiffness Method است. یک شکل الگوریتمی



رابطه نیروی تغییرشکل با سختی را برای هر المان می‌نویسیم بعد با هم می‌چسبونیم که تعادل نیروها و سازگاری تغییرشکل‌ها تعریف deformation ها را در المان‌های مختلف بدست بیاریم.

~~درجه آزادی یا معنی تعداد ماتریس [illegible] که درجه آزادی تعیین کننده ماتریس سختی یک سازه~~

☒ جلسه چهاردهم، Degrees of Freedom (DoFs)

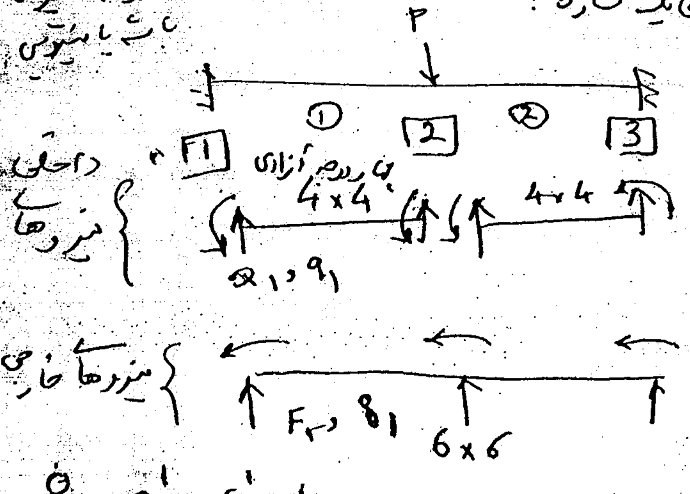
درجات آزادی می‌تونه تغییرشکلی باشه یا نیرویی

پیوست الف) روش تشکیل ماتریس سختی (stiffness) یک سازه:

ماتریس سختی هر المان همان رابطه نیرو تغییرشکل است (شیب است)

← سختی المان‌ها را بدست خواهیم آورد.

← المان‌ها را به هم می‌چسبانیم و ماتریس سختی کل را بدست می‌آوریم. (در ادامه می‌گیم)



$$Q = S.q$$

(1) تغییرشکل × ماتریس سختی «المان» = نیرو

s کوچک

المان ① $Q^1 = s^1 q^1$

المان ② $Q^2 = s^2 q^2$

$$\begin{bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s^1 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix}}_{\text{unassembled stiffness matrix}} \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix} \longrightarrow \underset{\text{element level}}{\boxed{Q = sq}}$$

تا اینجا الان فقط روابط شیب است را نوشته‌ایم. ماتریسی اش کرده‌ایم.

عضوی { q : تغییر شکل‌های عضوی element displacements (distortion)
Q : نیروهای عضوی element forces

سازه‌ای { δ : تغییر شکل‌های گره‌ای سازه Nodal displacements
F : نیروهای گره‌ای سازه nodal forces

ماتریس ص 276 این بار ماتریس سختی کل سازه است 6×6

structure level $\boxed{F = S\delta}$ S بزرگ

برای بدست آوردن هر ستون ماتریس سختی هر عضو، q مربوط را یک بگذاریم بقیه را صفر بگذارید. نیروهای بدست آورده را در ستون اول ماتریس سختی بگذارید.

4 تا ستون برای هر عضو را بدست میاریم. ماتریس (4)

این ماتریس را در اینجا با شیب افت بدست میاره. ولی روش‌های متنوع دیگری هم وجود دارد

بعد unassembled stiffness M. را با گذاشتن این ماتریس‌ها در قطر بدست میاریم (5)

ما می‌خواهیم با داشتن ماتریس سختی المان‌ها به ماتریس سختی اصلی برسیم (به صورت غیرمستقیم) باید از روابط تعادل و سازگاری استفاده کنیم.

$\boxed{F = AQ}$ معادله تعادل ← Binary Matix (صفر و یکی)

روابط (7) روابط تعادل اند ⟵ ماتریس (8)

$\boxed{q = B\delta}$ معادله سازگاری

روابط (10) روابط سازگاری است ⟵ ماتریس (11)

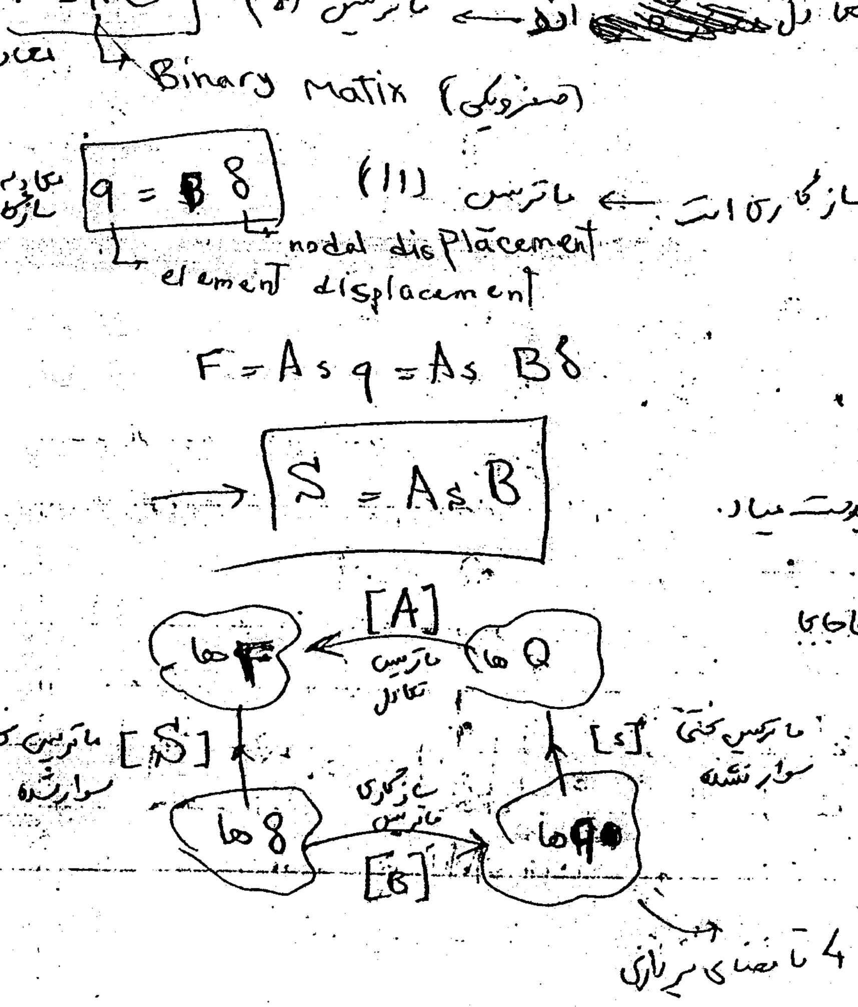
q → element displacement
δ → nodal displacement

$$F = A s q = A s B \delta$$

S را می‌خواهم.

$$\longrightarrow \boxed{S = A s B}$$

ماتریس سختی سازه بدست میاد.



سر امتحان این زنجیرها را حتما بکشید تا اشتباه نکنید.

تحلیل 1
تحلیل 2 } ← هر جسمی المان محدود Maping است.

level 1 زمانی بود که جابجایی های واحد را می دادیم.
معادل این کار یک کار الکتریکی می کنیم. در قدیم که A و B را بدست می آوردند بود
level 2 stiffnes ← ما تا level 3 stiffness کار می کنیم.

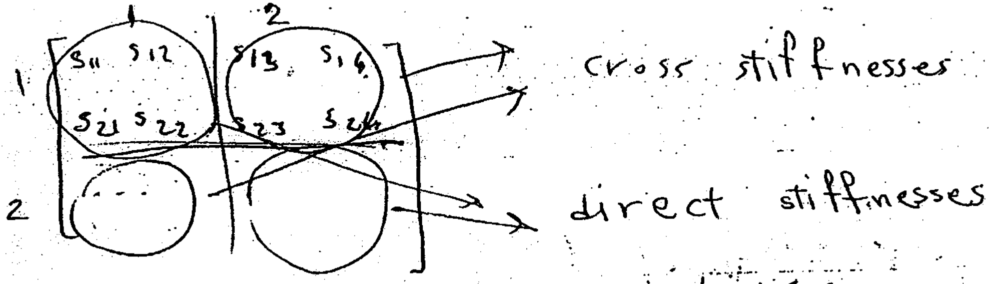
روش کار مجازی: کار نیروهای داخلی = کار نیروهای خارجی

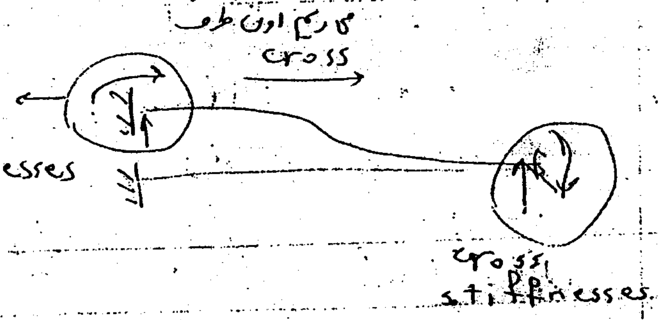
$$F^t Q = \delta^t F$$

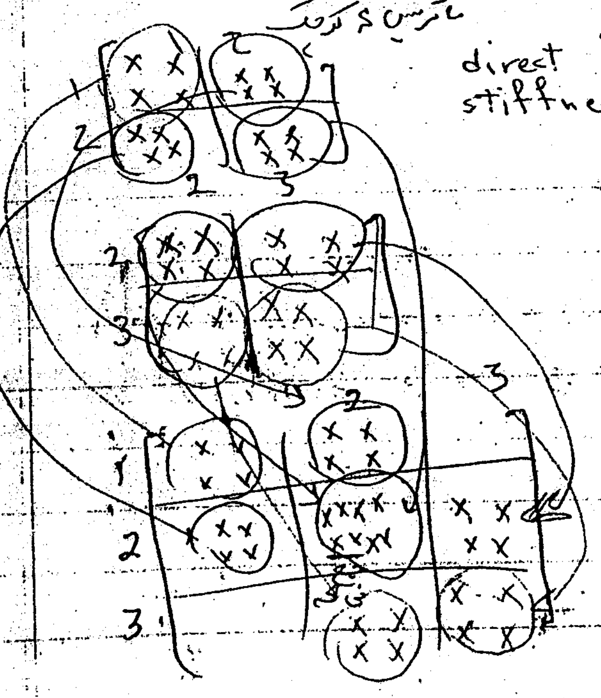
و $Q^t q = E^t \delta \Longrightarrow A = B^t$ و $B = A^t$

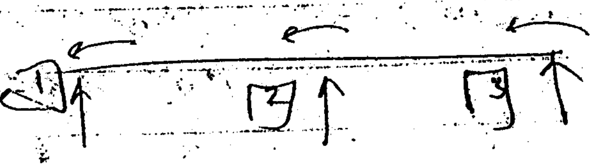
$$\Longrightarrow \boxed{S = AsA^t}$$

چه پیچیده ای بوجود آمد؟
شبهه: فقط A کافیه؟ در سیستم B رو در نظر گرفته ام جای virtual work
باز هم A پر صفر و یک است. چیکار کنیم؟ معادل الکتریکی است که در ادامه می گم


1
2
1
2
s11 s12
s13 s14
s21 s22
s23 s24
...
cross stiffnesses
direct stiffnesses


می بریم اون طرف
cross
direct
stiffnesses
cross
stiffnesses


ماتریس ۲ کوچک
1
2
2
3
2
3
3
2
1
2
3

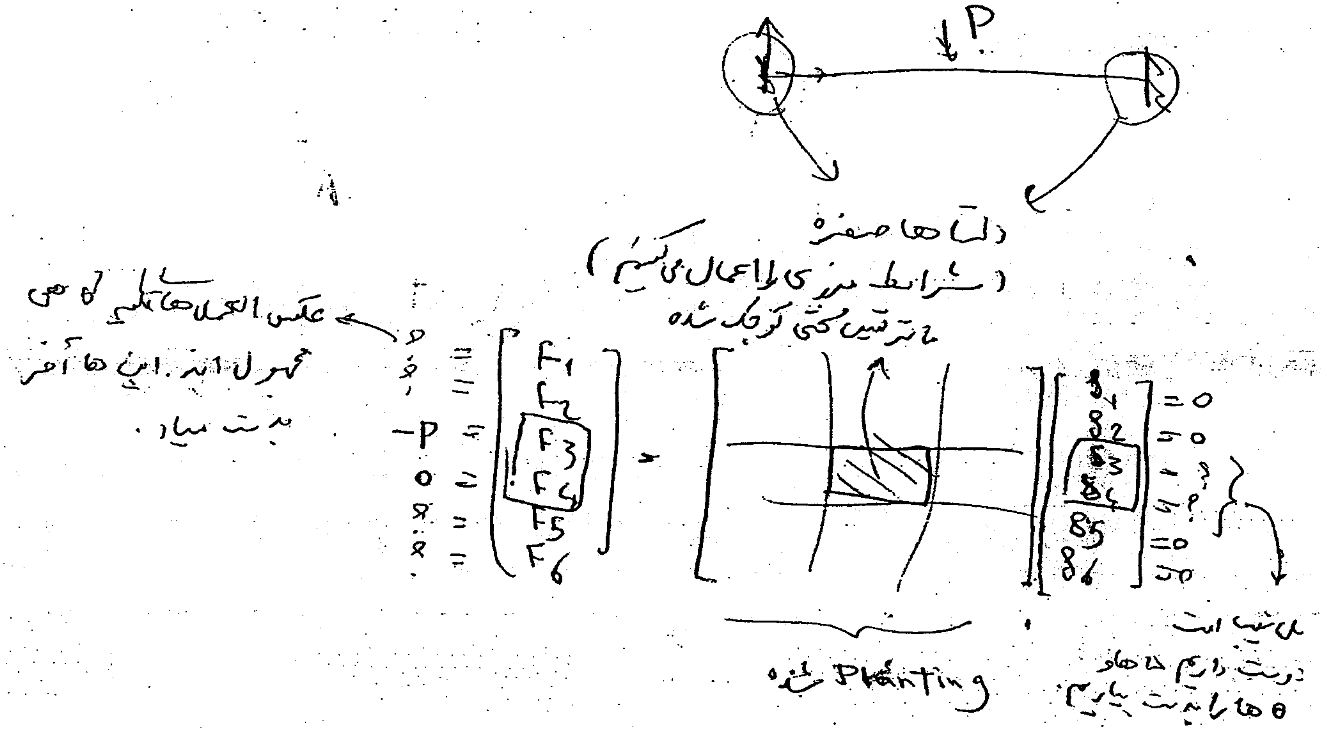


← ماتریس کلی

سوال امتحانی: چرا $S = AsA^t$ معادل این کار است؟ اثباتش را از structural Mechnich colomns metho کتاب مفید خودم بخوانید.

اثبات ص 283 را بخوانید

ماتریس (21) همون نتیجه planting است. برای این مسئله ما


P
دلتا ها صفره
(شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم)
ماتریس سختی کوچک شده
عکس العمل‌های تکیه‌گاهی که مجهول اند. این ها آخر بدست میاد.
?
?
−P
0
F_1
F_2
F_3
F_4
F_5
F_6
δ_1 =0
δ_2 =0
δ_3
δ_4
δ_5 =0
δ_6 =0
Planting شده
مجهول است
دوست داریم δ ها و θ ها را بدست بیاریم

- b تا مجهول داریم. چند تا این طرف چند تا اون طرف

$$\begin{bmatrix}F_3\\F_4\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0x & 0x\\0x & 0x\end{bmatrix}}_{\text{reduced stiffness metrix}}\begin{bmatrix}\delta_3\\\delta_4\end{bmatrix}$$

(در اینجا به دلیل تقارن $\delta_4=0$ است. ولی معمولاً هیچی)

reduced stiffness metrix

(یعنی بعد از اعمال کردن شرایط مرزی)

$\xrightarrow[\text{در معادله دو مجهول}]{}$ $\delta_3=✓$ $\delta_4=✓$

در معادله دو مجهول را حل می‌کنیم

در کامپیوتر قطری که جزو ماتریس سختی کوچک شده نیستند را (در اینجاها) عدد 10^{20} می‌گیرند

این معادل این است که δ های صفر را بوجود بیاوریم.

- چهار روش برای محاسبه ماتریس سختی وجود دارد:

۱) همه جا را می‌بندیم به جز یک جز یعنی $\bar{q}$ ها را صفر میگذاریم غیر از اون یکی که مورد نظر است. نیرو ها را بدست بیاریم. ستون مربوطه ماتریس بدست میاد. روش هوک

$$q_1 = 1 = \frac{S_{11} L}{EA} \longrightarrow S_{11} = \frac{EA}{L} ✓ \qquad \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} =1 \\ =0 \end{matrix}$$

هوک

تعادل کل عضو

$$\bar{S}_{11} + \bar{S}_{21} = 0 \longrightarrow \bar{S}_{21} = -\frac{EA}{L} ✓$$

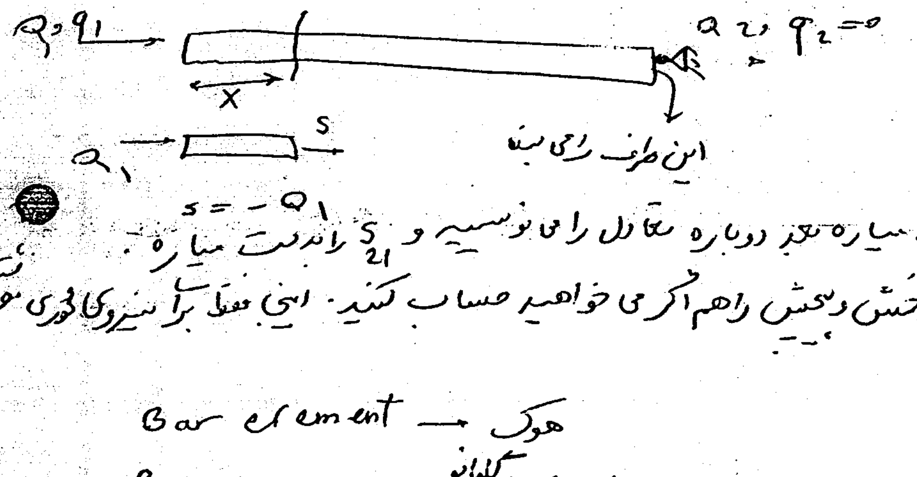
$$q_2 = 1 = \frac{S_{22} L}{EA} \longrightarrow \bar{S}_{22} = \frac{EA}{L} \qquad \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} =0 \\ =1 \end{matrix}$$

تعادل کل عضو

$$\bar{S}_{12} + \bar{S}_{22} = 0 \longrightarrow \bar{S}_{12} = -\frac{EA}{L} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

این روش مستقیم است. برای Beam element هم می‌تونید بنویسید ولی به جای هوک باید شیب افت یا روش های دیگر را بنویسید.

۲) در ص 66 با کاستیگلیانو ماتریس سختی میله را حساب می‌کنه.



$s = -Q_1$

در رابطه که همون $\frac{EA}{L}$ را بدست میاره بعد دوباره تعادل را می‌نویسیم و S_{21} را بدست میاره.

در بیشتر باید ترم های برشی و خمشی و پیچشی را هم اگر می‌خواهید حساب کنید. این فقط برای نیروی محوری نوشته همانند روش اول می‌شه.

Bar element → هوک

Beam " → شیب افت یا کاستیگلیانو

المان مثلثی
المان مکعبی } → روش دیگری می‌خواد
" مستطیل

۳) انرژی داخلی المان را برحسب q_1 و q_2 و ... بنویسید. این رو بنویسید دیگه کاری نداره.

$$S_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \, \partial q_j}$$

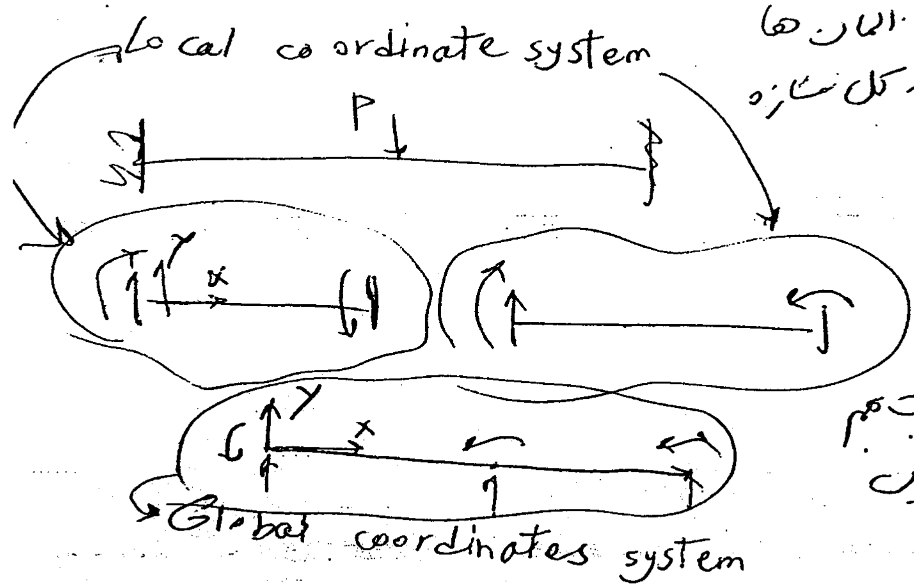
برای اثبات این رابطه کتاب کاردستونی را بخوانید.

پس هنر اصلی نوشتن $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ است. بعضی وقتی‌ها هم ساده نیست، در finite element این ها را برای المان های مثلثی و... بدست میارم.

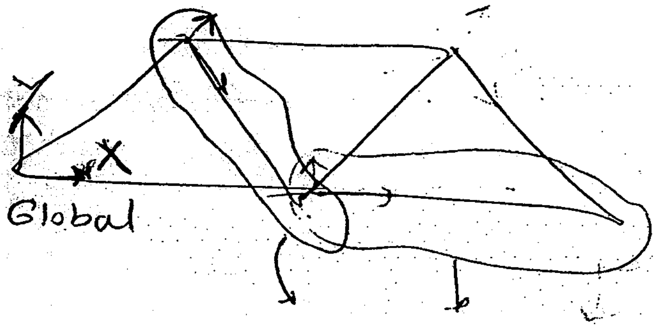
می‌ریم ص 62 - در ماتریس سختی با یک عمل planting را انجام داده. (d) هم همون ... educed

نیروها و تغییرشکل‌ها که برداری اند باید در یک دستگاه مختصات باشد.

دستگاه‌های مختصات < المان‌ها
کل سازه



اگر این دستگاه‌های مختصات نسبت هم دوران داشته باشند باید ماتریس [illegible] Transpose



Locals should be transported to the Global sys.
then we produce the reduced stiffness Metrix

ص 64 : ▨ ماتریس سختی برای میله با نیروی محوری

سوال امتحانی: روش گوس سایدل را با روش چولسکی مقایسه کنید. کدام یک در کامپیوتر زمان بیشتری می‌برد؟ چرا؟

▨ جلسه یازدهم:

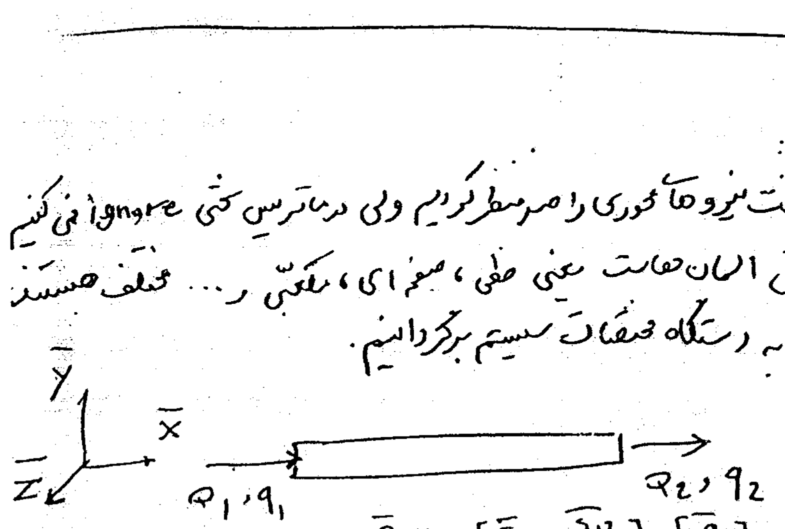
3-5 ماتریس سختی برای میله با نیروی محوری:

شیب است مادر ماتریس سختی است. البته از شیب است نیروهای محوری را صرف‌نظر کردیم ولی در ماتریس سختی ignore نمی‌کنیم

تفاوت‌های ماتریس سختی‌ها در یافتن ماتریس سختی المان‌هاست یعنی خطی، صفحه‌ای، مکعبی و ... مختلف هستند

وقتی ماتریس سختی‌ها را می‌خواهیم به هم بچسبانیم باید به دستگاه مختصات سیستم برگردانیم.

حالا می‌خواهیم ماتریس سختی یک میله را بدست بیاریم.



$\bar{Q}_1$ یعنی کلی

$$\begin{bmatrix}\bar{Q}_1\\ \bar{Q}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{S}_{11} & \bar{S}_{12}\\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{q}_1\\ \bar{q}_2\end{bmatrix}$$

رابطه 3-4 انرژی کرنشی داخلی المان است (مقاومت مصالح)

$$U = \frac{1}{2}\iiint \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}\,dx\,dy\,dz$$

این یک روش کلیه. اینجا فقط σ_{xx} را داریم.

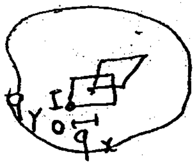
$$U = \frac{1}{2}\iiint \sigma_{xx}\,\varepsilon_{xx}\,dx\,dy\,dz$$

$\iint dy\,dz = A$ سطح مقطع

$$= \frac{EA}{2}\int \varepsilon_{xx}^{2}\,dx \quad ☆$$

$\sigma_{xx} = E\,\varepsilon_{xx}$

$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial q_x}{\partial x}$



بین q_x و q_y و تنش یک رابطه ای داریم (مقاومت مصالح)

پس $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial q_x}{\partial x}$

این رو می‌گذاریم در ☆ می‌شه

$$(3) \quad U = \frac{AE}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial q_x}{\partial x}\right)^2 dx$$

در میله تنش ثابته ← کرنش ثابته ← $\frac{\partial q_x}{\partial x} = cte$

← خطی است q_x ← $(2) \quad q_x = A_1 x + A_2$

A_1 و A_2 را از شرایط مرزی بدست میاریم

$x = 0 \rightarrow q_x = q_1$

$x = L \rightarrow q_x = q_2$

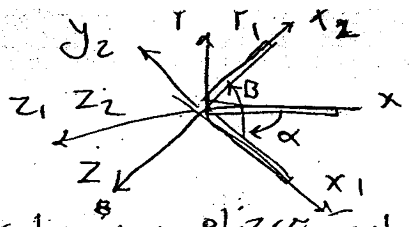
از اینجا بمقدار $A_1 = \frac{q_2 - q_1}{L}$ و $A_2 = q_1$ حال می‌گذاریم در (2) بعد می‌گذاریم در رابطه 3 و U بدست میاد.

$$U = \frac{AE}{2L}\left(q_2^2 - 2q_1q_2 + q_1^2\right)$$

حال سختی درایه‌های را با مشتق گیری بدست میاریم. دوباره می‌شه

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

این روش برای المان های محدود فایده اش را نشان می‌ده. اونجا هوک و کاستیگلیانو را نمی‌شه استفاده کرد.



حالا اینجا همه برحسب دستگاه مختصات کلی است می‌خواهیم ببینیم چطوری
می‌شود از Local coor... برسیم Global coor... :
یکبار دوران کلی را به دو تا دوران α و β حول محور y ها و z ها decompose
می‌کنم. ماتریس های دوران را در دبیرستان دیده اید.

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad Li \quad \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} Co$$

$$y_1 = y$$

چون y ثابته

حالا حول Z دوران می‌دهیم. اینجا $Z_2 = Z_1$ ثابته.

composition می‌شه حاصلضرب 3-7 و 3-8 از $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ می‌ره $\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}$

پس نهایتاً $\bar{\delta} = T\delta$

حالا برمی‌گردیم به المان خودمون

$$\bar{Q}_1 = TQ_1$$
$$\bar{Q}_2 = TQ_2$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & \underset{\text{یک ماتریس سه درسه}}{\underset{\downarrow}{\textcircled{T}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

اگر Beam element بود و ممان هم در هر انتها می‌داشتیم چهار تا T توی قطر می‌داشتیم.
finite element مثلاً 12 تا توی قطر داریم.

تعریف ماتریس سختی در دستگاه مختصات کلی $\{\bar{Q}\} = [\bar{S}]\{\bar{q}\} \xrightarrow{} \{Q\} = [T]^{-1}[\bar{S}][T]\{q\}$

در دستگاه مختصات سیستم $\{Q\} = [S]\{q\}$

Transpose می‌شه چون orthogonal است

پس $$\boxed{S = \underset{\text{Global}}{\cdot}\, T^{t}\, \underset{\text{محلی}}{\bar{S}}\, T} \longleftarrow [S] = \textcircled{[T]^{-1}}[\bar{S}][T]$$

این نشون می‌ده که
ماتریس سختی یک تانسور درجه دو است. (این تعریف تانسور درجه دو است)
از ~~ماتریس~~ تانسور درجه دو داریم $T' \bar{S}\, T^{t}$. این جا هم همین شد.

این ها رو فراموش کنید. ما هندسیم تا سنو ربده. ماتریس خوبه.

امّا α و β گفته. مثبت منفی اشتباه کنید اگر هیچی. ماتریس sin و cos را می خواد تبدیل کنه به یک ماتریس معمولی

برای ا [illegible] نوشته $\{0,0,0\}$ چون حالت کلی را نوشته
به جای sin و cos ها مقادیر و نسبت هاشون را می گذاریم.

$$L = \sqrt{x_{ji}^2 + y_{ji}^2 + z_{ji}^2}$$

ماتریس sin و cos تبدیل می شه به ماتریس (3-15a)

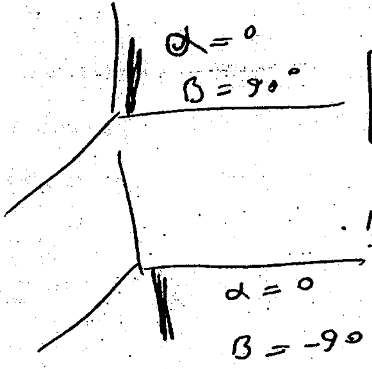
این رو حفظ کنید. زیاد باهاش کار داریم

$$T_{11} = \frac{x_{ji}}{L} \quad T_{12} = \frac{y_{ji}}{L} \quad T_{13} = \frac{z_{ji}}{L}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x_{ji}}{L} & \frac{y_{ji}}{L} & \frac{z_{ji}}{L} \\ — & — & — \\ — & — & — \end{bmatrix}$$

در مثال های دوبعدی بقیه درایه ها هم صفر هستند.

این ماتریس از یک نظر بده. کی شه؟



$\alpha = 0$
$\beta = 90°$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

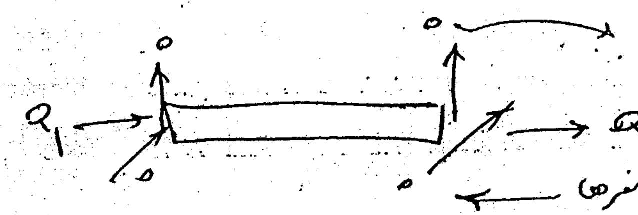
در این ها دو حالت $\frac{0}{0}$ بدست میاد

این دو حالت را با ماتریس sin و cos بدست میاریم.

$\alpha = 0$
$\beta = -90$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در دستگاه مختصات محلی صفره



اثرات صفرها

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overset{3\times 3}{T} & 0 \\ 0 & \underset{3\times 5}{T} \end{bmatrix}$$ ماتریس 6×6 کرده‌ام که بعدا بتونم ازش استفاده کنم.

$$\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}^t_{6\times 6} \bar{S} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}_{6\times 6}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

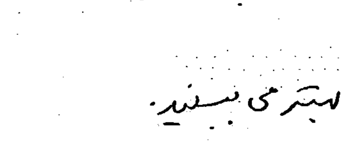
می‌رسیم به صفحه 74 یعنی پیش ضرب و پس ضرب می‌رسیم به مختصات سیستم

از ص 92 [illegible] ماتریس 3-16a را ببینید.

پس این ماتریس سختی یک المان در مختصات سیستم است.

سطر 3 و 6 و ستون 3 و 6 را حذف کنید می‌شه ماتریس سختی یک المان در یک خرپای مسطح. اینجا همونه که گفتم T_{11} و T_{12} و T_{13} را حفظ باشید. ماتریس را در امتحان می‌دهم ولی باید این سه درایه را حفظ باشید.

ماتریس 3-17 را کامل بنویسید بعد 3×3 پارتیشن‌بندی کنید و [illegible] به قیافه این ماتریس نگاه بکنید.



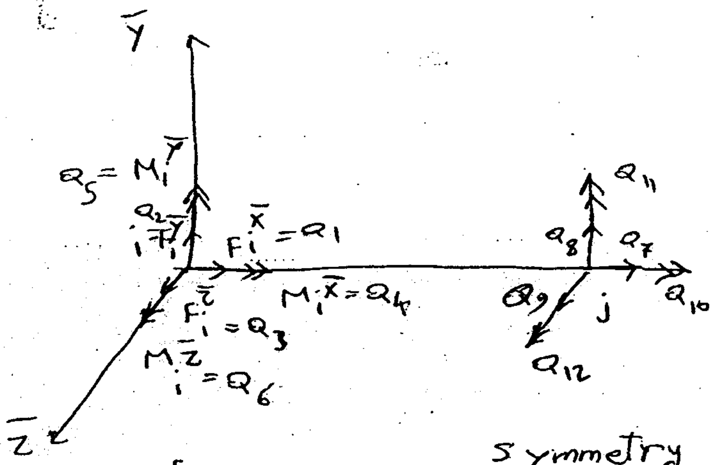
این جهت کنترل در روز امتحان استفاده می‌شه. از وقت‌تان صرفه‌جویی می‌شه.

سوال: چرا بلوک‌های بالا چپی و پایین راستی با هم یکیه؟ فکر کنید.

مسئله	سوال	اثبات
70%	10%	20%

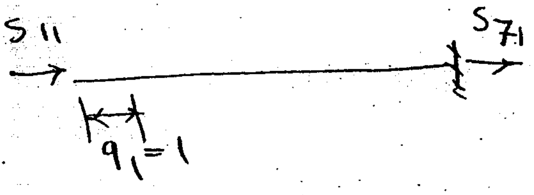
▨ جلسه شانزدهم:

ماتریس سختی تیر مستقیم:


$\bar{Y}$
$Q_5 = M_i^{\bar{Y}}$
$Q_2 = F_i^{\bar{Y}}$
$F_i^{\bar{X}} = Q_1$
$M_i^{\bar{X}} = Q_4$
$F_i^{\bar{Z}} = Q_3$
$M_i^{\bar{Z}} = Q_6$
Q_{11}
Q_8
Q_7
Q_9
j
Q_{10}
Q_{12}
$\bar{X}$
$\bar{Z}$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{12} \end{bmatrix} = \overset{\text{symmetry}}{\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & \cdots & \frac{-EA}{L} & \cdots \\ \vdots & & & \\ -\frac{EA}{L} & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}}_{12\times12} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی این رو بدست بیارید. با روشی که قبلاً گفته‌ام. یکی را یک کنید. بقیه را صفر کنید.



$$\delta = \frac{PL}{EA} \longrightarrow 1 = \frac{S_{11}L}{EA}$$

$$\longrightarrow S_{11} = \frac{EA}{L}$$

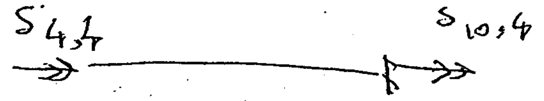
$$S_{11} + S_{71} = 0 \longrightarrow S_{71} = \frac{-EA}{L}$$

بقیه درایه‌های این ستون هم صفر است. به همین ترتیب

در امتحان می‌گم S_{25} چنده.. S_{36} چنده و ..... پس با دست بنویسید و

بدست بیارید. با کامپیوتر ننویسید.

ستون چهارم را می‌خواهیم پیدا کنیم



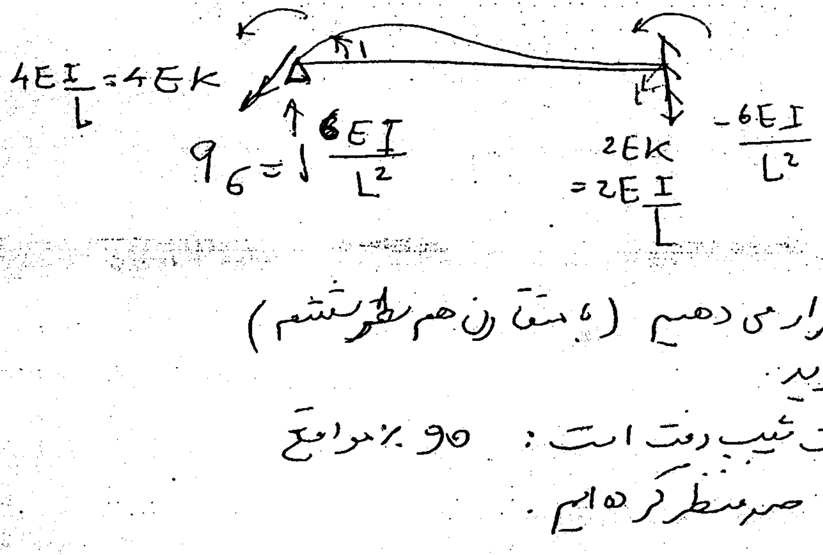
$$q_4 = 1 \qquad \phi = \frac{TL}{GJ} \qquad 1 = \frac{S_{44}\times L}{GJ} \rightarrow S_{44} = \frac{GJ}{L}$$

$$S_{10,4} + S_{4,4} = 0 \rightarrow S_{10,4} = -\frac{GJ}{L}$$

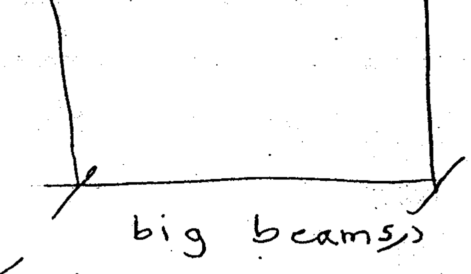
پس ستون چهارم

$$\cdots \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{GJ}{L} \\ \vdots \\ -\frac{GJ}{L} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdots\cdots -\frac{GJ}{L} \cdot$$

این‌ها مقاومت مصالح بودند. در غیر این صورت باید از روابط شیب افت حساب کنید.



این‌ها را در ستون ششم قرار می‌دهیم (با متقارن هم سطر ششم)
همه را اینطور درست نمایید.
فرضیات اینجا همانند فرضیات شیب افت است: 90% مواقع
1- از shear deformation صرف‌نظر کرده‌ایم.



در امتحان از روش کتاب استفاده کنید.
چون یک پروسه طولانی است. لطفاً از
shear deformation صرف‌نظر فرمایید.

در big beams
از shear deformation صرف‌نظر نمی‌کنیم.

در ص 95 از کاستیگلیانو استفاده کرده.

$$q_3 = q_5 = q_{11} = 0$$

دوست شما اول می‌آید صفرها را specify می‌کند.

در ص 96: یک المان را در صفحه $\bar{X}\bar{Y}$ نشان داده است. مولفه‌های این صفحه را نشان می‌دهد.

تیر را به 6 صفحه می‌برید. برش و ممان و... را بدست می‌آورید (تیرهای داخلی)

رابطه 3-24 را نوشتن تعادل حاصل شده است.

در معادله 3-23 تمام اثرات را در نظر می‌گیرد.

از رابطه 3-24 در 3-23 می‌گذارید سپس a و b و ...ها بدست می‌آیند.

من مولفه به مولفه انجام دادم. اینجا تمام مولفه‌های یک صفحه را با هم بدست می‌آورد.

از a و b و c و d ماتریس 4x4 سمت ا را بدست می‌آورد.

یک ذره فرض می‌کنیم! حال میاید $q_1=1$ می‌گیره و بقیه را صفر می‌گیره!

S_{11}، S_{12}، S_{14} و S_{16} بدست میاد. (حاصل 4 معادله 4 مجهول)

S_{21}، S_{22}، S_{24} و S_{26} بدست میاد اگر $q_2=1$ و بقیه صفر

در بالا ص 98 برای 4x4 به صورت شماتیک کشیده.

در صفحه 100 اون 4 x 4 تجربی را بدست میاره.

اینها مولفه‌های صفحه $\bar{X}\bar{Y}$ بود.

اینبار مولفه‌های صفحه $\bar{X}\bar{Z}$ را در نظر می‌گیریم.

در این حالت I_z شما تبدیل می‌شه به I_Y

ص 102 همون ماتریس 12x12 ای است که می‌خواستیم بدست بیارید.

اگر برش را صرفنظر کنید یعنی 6A را بزرگ بگیرید مخرج کسر بزرگ می‌شه و همون 12x12 ای بدست می‌آید که با شیب افت و مقاومت مصالح بدست می‌آوردید. 99٪ مواقع از shear deformation صرفنظر می‌کنیم

deformation confined to / $\bar{X}\bar{Y}$ plane
\ $\bar{X}\bar{Z}$ plane

ماتریس ص 102 ماتریس سختی یک تیر است

امتحان: گفتیم من در امتحان معمولاً چهارتا S را می‌گم پیدا کنید. چندتاش هم صفر است.

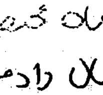
این شد $\bar{k}$ که یعنی دستگاه مختصات محلی
در 3-30 $\bar{k}$ را به S یعنی دستگاه مختصات Global می بریم.

سوال امتحان: چرا ماتریس سختی یک تانسور درجه 2 است؟
چون Transpose آن از محلی به سیستم با ضرب یک ترنسپوز
قبل و بعد آن بدست می آید.

$[T]_{3\times3}$ را با داشتن مختصات دو سر عضو بدست می آورید.

ص 104 همون چیزی رو نوشته که در کامپیوتر می نویسند. تا ص 108
می شه ماتریس سختی شده در دستگاه مختصات سیستم
حالا از system باید با هم asemble کنید
همه را در یک دستگاه می بریم و بعد با هم جمع می کنیم.

در روابط 3-31 از shear deformation صرفنظر می کنید. می شود همون چیزی
که باید امشب بدست بیارید. می شه 3-32 در دستگاه مختصات محلی
در 3-33 به سیستم می برید. در امتحان اگر یک مثال دادم که قاب بود
ماتریس 3-34a را می دهم. planer frame قاب مسطح
از این به بعد ما فقط با ماتریس سختی بدست بیاریم. بقیه کار تلفیق ماتریس های
سختی است. چگونه ماتریس سختی المان ها را بدست بیاریم.
تا الان Bar element و Beam element را مطرح کردیم. در
Finite element المان های مثلثی و مستطیلی و ... را مطرح می کنیم.
اگر سازه تقارن داشت، محور L را جوری می گذارید که از تقارن استفاده کنید.
شماره گذاری اعضا را باید جوری انجام بدهید تا به صورت نواری در بیاید.
برای سازه های کلی باید ص 15 صفحه از کتاب انگلیسی من رو بخونید! اینجا
چون ساده است، فرقی نمی کند.
اول ستون ها - بعد تیرها در طبقات. این مال المان ها
آتاسمان گره ها را که بخواهید نواری در بیارید باید ... کنید.



شماره گذاری را ببرید! در عرض کم سازه شماره گذاری کنید.

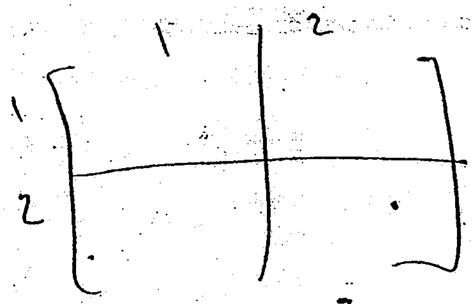
اینجا اول تکیه گاه ها بعداً گره های آزادتون را شماره گذاری کنید. ماتریس سختی کوچک شده در یک گوشه ها افتد. توصیه است. اجباری نیست.

با بالای ص ۱۱۱ ۸دل و طول المان ها را می نویسید

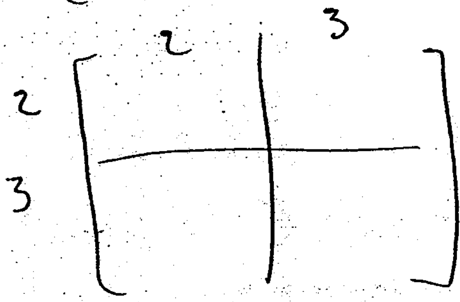
بعد T_{11} و T_{12} و T_{13} را می نویسید. اینها را حفظ هستید. در امتحان می گویند $\frac{x_{ji}}{L}$ $\frac{y_{ji}}{L}$ $\frac{z_{ji}}{L}$ محاسبه کنید و به دست بیارید. اول 3×3 که رابطه sin و رخص نوژ را استفاده می کنید.

بر اساس ۸دل اعضا نوشتیم. بدست آوردن این ماتریس دو ترم قبل سوال امتحانی بود. بعد می گذارید در ماتریس [illegible]

ضرایبش به صورت بلوک بلوک بنویسید. sym هم بنویسید. تمام درایه ها را بنویسید

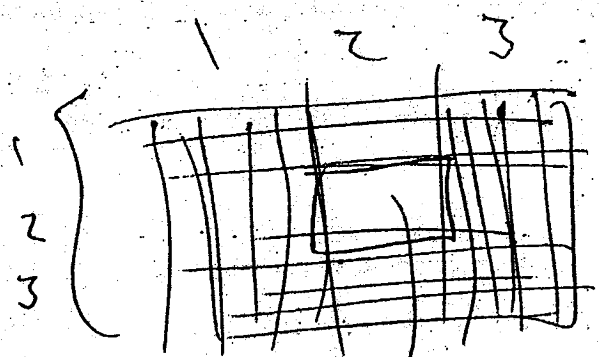


برای تیر ۱



برای تیر ۲

حال این دو تا را باهم assemble می کنید. فاکتور مشترک باید حفظ داشته باشد. اگر ضرایب پشت ماتریس ها یکی نبودند می بریمشون داخل ماتریس ها و فاکتور مشترک می گیریم.



ماتریس سختی کل

اینجا تکیه گاه ها را اول گذاشته بودید.

ص ۱۱۳ سمت چپ نیروهایی است که ماتریس سختی کوچک شده
به سازه وارد می شه و سمت راست گره هایی است که جابجا می شه.

اگر همان متمرکز هم می‌داشتیم در ماتریس جیبی وارد می‌کردیم.
وقتی θ و δ ها درست درآمد. ۹۹٪ مسئله حل است.
دوباره می‌آیید (از ماتریس‌های تیرهای ۱ و ۲ ضرب می‌کنیم و ضریب‌ها را بدست می‌آورید. در امتحان آخر دوباره شیب و کراس و کانی صرجاش است.

در امتحان‌های ماشین حساب نمی‌گذارم استفاده کنید. هیچ نوع ماشین حسابی.

امتحان پایان ترم ۴ ساعت وقت می‌دهیم.

مثال ۸: هشتگی سوال: محورهای محلی نسبت به هم دوران دارند.
هر دو را در محلی می‌نویسیم و با هم تلفیق می‌کنیم.
رفیق شما این کار را نکرده. شما از این کارها نکنید.
اگر هم اشتباهاً ببردید سیستم می‌بینید که θ ها صفرانه.
اینجا چون بارگذار هم همگان است دوران ۲ صفر است. پس سطر و ستون آن را هم حذف می‌کنیم.
پس از G فقط یک معادله یک مجهولی بدست می‌آید.

مثال ۹: تیر ۲۳ یک بار گسترده داشته. اگر بارها در گره‌ها اثر نکردند مثل کراس بیت δ گره‌ها را می‌بندیم و بعد عکس العمل‌ها را به صورت عمل روی گره‌ها می‌گذاریم.
δ ها و θ بدست می‌آید. برمی‌گردید از ماتریس‌های محلی المان‌ها نیروها را بدست می‌آورید. نیروهایی را که بدست می‌آورید در چه دستگاهی است؟
نیروها در دستگاه مختصات سیستم خواهند بود. دوباره برای طراحی المان‌ها باید به دستگاه محلی ببرید.

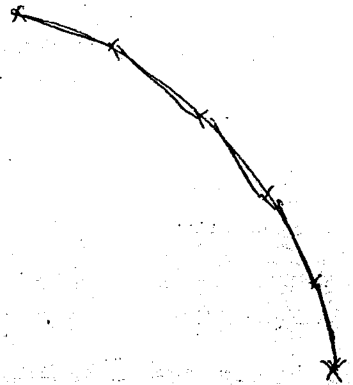
▨ جلسه هفدهم :

ماتریس سختی تیر خمیده : خیلی تکیه نمی‌کنیم . گذرا می‌گیم .

منحنی می‌تونه دایره‌ای باشه یا غیر دایره‌ای

اگر اینکار را بکنید درجات آزادی زیاد می‌شه

← معادلات بیشتری باید حل کنید .



اگر باهوش باشید کل منحنی را یک المان می‌گیرید

و یک ماتریس سختی 12×12 می‌نویسید.

اما چطوری اینکار را بکنیم ؟

صـ 119 درست مثل همان تیر مستقیم از می‌گیریم .

(در هر انتها 6 درجه آزادی (3 تا نیرو و 3 تا ممان)

پس کلاً 12 × 12 بوجود می‌آورید .

از روش کاستیگلیانو بهتر است استفاده کنیم چون روش شیب افت را برای تیرهای خمیده نگفتیم

بالای صـ 120 ، تا بعد مشتق گرفته . شما مستقیم مشتق گرفته را بگیرید.

نظر به فاصله زاویه مرکزی θ ببرید.

این‌ها مؤلفه‌های Δ هستند . روابط 38-3 روابط تعادل هستند ،

این روابط را در 36-3 قرار می‌دهیم . سه تا رابطه بدست می‌آید

در مستقیم 4 تا 4 تا بدست می‌آمد.

با این سه معادله سه مجهول بالای صـ 121 ، یکی از q ها را یک می‌کنید و بقیه را صفر می‌کنیم

Q ها یا S ها را بدست می‌آورید. 3×3 دیگر را هم بدست می‌آورید.

برای صحیح X Σ هم انجام می‌دهید می‌رسید به رابطه 47-3

در تیر ثابت α و β داشتیم ولی γ نداشتیم . اینجا هم α و β داریم هم γ

ها باید می‌رسید به 51-3

در امتحان می‌پرسیم چرا $T^{-1} = T^{t}$ است؟ T یک ماتریس orthognal

است ← $T^{t} = T^{-1}$

پس زیر صـ 128 اینورس همون ترنسپوز است .

ماتریس محلی را به ماتریس سیستم می‌بریم . این ماتریس 12×12 را خودتون بدست بیارید.

اگر قوس دایره‌ای نباشه مثلاً فکر کنید چی می‌شه .

تا الان فرض کرده‌ایم که سازه از گره‌ها وارد می‌شود. صـ 129 بار روی عضو است.

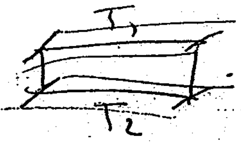
اول گره‌های B و C را گیردار می‌کنید. ممان‌های گیرداری ← عکس‌العمل‌ها ← عمل‌ها را وارد می‌کنید. نتایج را با هم جمع می‌کنید.

مفصل 4 را هم که بسته اید باز می کنید. (شکل 3-22)

در شکل 3-33 (c) مولفه های قائم و افقی اند (سیستم). در (b) مورب و محلی است
باید تجزیه کنید به دو مولفه قائم و افقی

▨ بارهای حرارتی: در سدهای قوسی مثلاً یک طرف آفتاب می خورد. یک طرف هم که آب است سردتر است.

معادل اش می شه معادله 3-59 است.



فرض: تغییرات درجه حرارت را در یک تیر خطی بگیرید.
در امتحان از شما بارهای حرارتی را نمی پرسم.
ولی پس فردا در محاسبات در کار باید در نظر بگیرید.

ص 133 مثال 10:

مثال 11 (البته خوب نیست روی خرپا بار وارد کنید.)

$\frac{1}{4}$ به گره 4 - $\frac{1}{4}$ به گره 2 - $\frac{1}{2}$ هم به گره 3 -

اگر گره 3 حرکت جانبی نمی تونه داشته باشه ولی حرکت قائم می تونه داشته باشه.
در ص 137 ماتریس کوچک شده را نوشته و مسئله را حل کرده.
ص 258 - برنامه کامپیوتری برای تحلیل قاب ها به وسیله ماتریس سختی

RT → Rotation Transformation
SM → stiffness of the member
SMR
  └→ Rotated
AJ → بار joint ها
D_m → member disturtion

ص 260 - این فلوچارت رو توضیح می دهم.
* صفرسازی ماتریس ها و بردارها: همه درایه ها را صفر می کنیم که آشغال نداشته باشند.
* خواندن داده ها input سه نوع اند: topological properties خصوصیات اتصالی
یعنی مثلاً ابتدا و انتهای المان 4 من هست و 3 geometrical خصوصیات هندسی
مختصات گره ها را باید بدهیم که بشود ماتریس 3x3 T را تشکیل داد Mechanical

برای حروف I و A و E و ... ← Mechanical pro.

پس اینجا می‌شه خواندن داده‌ها -

Box C : sin α ، cos α ، sin β ، cos β را می‌نویسد. البته شاید اینها لازم

$\rightarrow T_{11} = \frac{X_{ij}}{EL}$. T_{12} T_{13}

قرار بود حذف باشند

شماره کوچک ابتدای عضو است

شماره بزرگ انتهای عضو است.

ماتریس سختی کلی را به سیستم می‌برد. ماتریس سختی المان در دستگاه سیستم

5 - assembling را می‌گم . ماتریس سختی کل سازه را درست می‌کنه.

BoxE

BoxF : بارهای روی عضوهایتان را بار گره‌ای می‌کند.

عکس‌العمل‌ها را بدست میاره. بصورت عمل واردی که به دستگاه مختصات سیستم هم می‌بره. عکس‌ها را با هم جمع می‌کنه می‌گذاره روی گره

S و AJ را تا الان درست کردید.

BoxG : شرایط مرزی را می‌دهیم -

با امتیاز: سه طریقه توضیح بدهید که شرایط مرزی را چطوری اعمال می‌کنیم؟ پیوست ب

این هم در Metrix Method هست هم در finite element

کلیه درجات آزادی بسته را می‌آیید المان قطری را در 10^{20} ضرب کنید. این یعنی درجات آزادی معنی صفر است. چرا؟ ← در پیوست ب توضیح داده‌ام.

$10^{20} \times S_{11}$ ← ill conditioning بوجود نمی‌آید. نگران نباشید. پیوست ب

راهکار دیگر: المان قطری را یک کنید. سطر و ستون را صفر کنید. این راهکار مشکل دارد

روش سوم: اصلاً ماتریس سختی المان را با توجه به شرایط مرزی generate کنید. ماتریس سختی را یک ضرب بدست میارید.

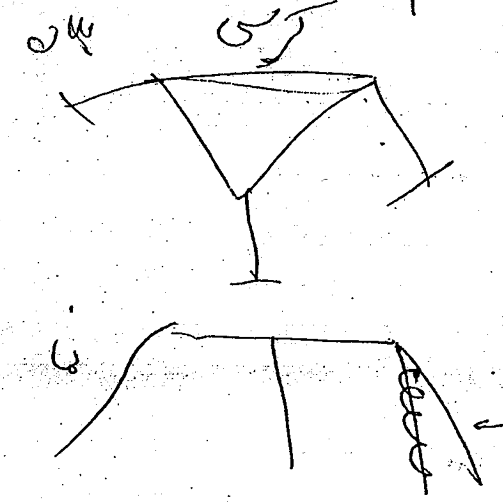
روش چهارم: سر امتحان شما پیشنهاد کنید.

Box II : ماتریس های کوچک شده را حل می کند ← جابجایی گره های آزاد را پیدا می کنید. کوتو 12ـ24 با بلوک 3x3 12 و 24 را بیرون بیارید، در ماتریس سختی المان ضرب کنید. به محلی ببرید.

Box I : نوشتن تغییر شکل ها و نیروهای داخلی ← output

$$\underset{\text{در مختصات محلی}}{AMF} \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{stiffness member} \\ \text{در سیستم}}}{\underline{SM}} .* RT * D_m + \underset{\text{Fixed end Axial}}{\underline{FEA_m}}$$

ص 263 را نگاه کنید. ص 262 را [illegible] دهم



بار گسترده روی المان ها اثر می کند
نه روی کرسی — صفحه

6 تا گره بالا 3 تا گره پایین
هر تیر را دو تا کرده ایم
تا افت وسط تیر را هم بدست بیاریم.

ص 264 : input این مثال را می دهد. از بغل راستی write است. راستی read است یعنی write است.

ص 266 از در دوران باید 40000.0 باشه. نه که 14 بدهی بیرون
اگر E را یک بگذارید این طوری می شه

ص 270 subRooTINE

از جلسه بعد روش نیروها را می گم. تمرینات را خودتان حل کنید.

جلسه هجدهم:

▨ فصل هفتم : روش پاره سازه‌ها. تحلیل یک سازه با استفاده از روش تقسیم کند

در اینجا بجای اینکه المان‌ها را جدا جدا در نظر بگیریم، سازه را به پاره سازه‌ها تقسیم می‌کنیم. ماتریس سختی پاره سازه‌ها را می‌نویسیم. دوباره با استفاده از روابط تعادل و سازگاری تکه‌ها را بهم می‌چسبانیم.

در مسائل کامپیوتری سوال اینست که چطوری سازه را تکه تکه کنیم که حداقل حجم را مصرف کند. در این صورت، processor کمتر اذیت می‌شود. مسئله optimization است.

شکل 7-1 :

سازه را چارتکه می‌کنه. همه مرزها را می‌بنده. Locking و unlocking می‌کنه. بعد از بستن تکه‌ها، تحت اثر بارهای وارده بر هر بخش، ممان‌های داخلی را بدست می‌آوریم. بعد باید relax کنیم.

کراس و کانی و شیب افت و ... همه یک چیز هستند.

در اینجا آن تکنیک من را در تکه تکه کردن سازه استفاده نکرده. همین طوری یک کاری کرده.

ص 242 : رابطه 7-1 چی میگه ؟ این رابطه مهم است.

$$\{Q^k\} = [S^k]\{q^k\}$$ رابطه نیرو و تغییر شکل

برای پاره سازه k ام ماتریس سختی‌اش این می‌شه.

این رابطه را Refine می‌کنیم. Q نیروها هستند در پاره سازه k ام

هر پاره سازه دو نوع گره داره

$$C \leftarrow \text{common}$$

$$i \leftarrow \text{internal} = \text{No common}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\{Q_c^k\}\\ \{Q_i^k\}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c} S^k_{cc} & S^k_{ci} \\ \hline S^k_{ic} & S^k_{ii}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\{q_c^k\}\\ \hline \{q_i^k\}\end{array}\right\}$$

رابطه 7-3 . گره‌ها را Relax می‌کنم + گره‌های مشترک را قفل کرده‌ام = بردار نیرو را در دو مرحله ارزیابی می‌کنم

common nodes relaxed   common nodes fixed

فلوچارت ص 245، فلوچارت حل سازه به روش پاره سازه هاست.

[illegible]

① تقسیم بندی: گفتم یکسری قواعد وجود دارد. اگر repeated pattern باشد ...

② درست مثل کراس

③ تغییر مکان‌ها را بدست می‌آوریم.

④ باز هم درست مثل کراس که FEM ها را حساب می‌کردیم، لنگرها balanced را می‌کردیم

⑤ عکس‌العمل‌ها و نیروها را با هم حل می‌کند

⑥ آزاد کردن گره‌های مرزی با relax کردن گره‌ها

⑦ برای این سیستمی که فقط مشتمل بر گره‌های مرزهای مشترک هستند تغییر مکان‌ها را بدست می‌آوریم.

⑧ با ترکیب ~~[illegible]~~ تغییر مکان‌های بدست آمده اخیر و تغییر شکل‌های پاره سازه‌ها

⑨ ماتریس سختی را در تغییر شکل‌ها ضرب می‌کنیم، نیروها را بدست می‌آوریم.

حروف‌های این فلوچارت را به صورت معمول در می‌آوریم

$Q^K = [S^K] q^K$ برای هر پاره سازه روابط نیرو-تغییر شکل می‌نویسیم

این ماتریس‌ها را پارتیشن بندی می‌کنیم.

ص 244 : با بستن گره‌های مرزی ...

این حالت fix است (φ) $\{q_c^K\} = \{0\}$ چون گره‌ها را بسته‌ایم.

در آینده با $q_i^{K\varphi}$ جمع می‌کنیم پس $q_i^K = q_i^{K\varphi}$ گره‌های آزاد را که بسته‌ایم

$\boxed{Q_c^K} = Q_c^{K\varphi} = R_{eaction}^{K\varphi}$ یعنی چه؟ نیرو در گره‌های مشترک درباره سازه Kام

عکس العمل‌ها را بدست می‌آوریم

$Q_i^K =$

اینها را در رابطه 3-7 می‌گذاریم ← می‌شه رابطه 7-7

رابطه 7-7 را لطفاً ضرب کنید. Li سه روابط 7-8 و 7-9

برای هر پاره سازه

$q_i^{k\varphi}$ جابجایی گره های آزاد در حالت گره های بسته

$R_c^{k\varphi}$ عکس العمل ها است. عیناً کارکراس. به جای تک گره، یک مرز داریم.

7-5 Relaxed : چهارتا مقدار را دوباره برای Relax شده می نویسیم.

نیروهای واقعی وارده عکس العمل ها

Relaxation در common point نیرو در $(7\text{-}10a) = \{\ \} - \{\ \}$

عکس العمل ها را به صورت منفی وارد می کنیم

$(7\text{-}10b) = 0$ نیروهای وارده را قبلاً اثر داده ایم اینجا صفر می گذاریم.

ill condition: یک ماتریس کی ill condition است؟ اگر یکی از درایه هاش را عوض کنید جواب ها به صورت زیادی تغییر می کند. انفجاری

در حالت باز { نیروها ← کامان پوینت ها
اینترنال پوینت ها
تغییر مکان ها

q_c^k و q_i^k در دو مرحله حساب می شوند. بعداً باهم جمع می کنیم.

دوباره این ها را در رابطه 7-6 می گذاریم.

دوباره بسط Li Cu می نویسیم ← دو تا رابطه می دهد 7-14 و 7-15

تماماً q_i^{kp} و Q_c^{kp} را بدست می آوریم.

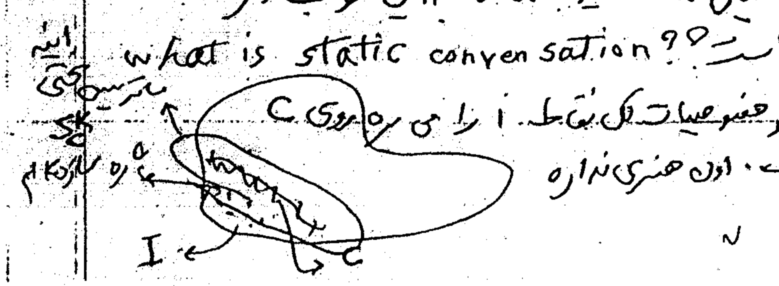
رابطه 7-16 : بردار تغییر مکان × ماتریس سختی = بردار نیروها

ماتریس رابطه 7-17 را خیلی نگاه کنید. نگاه به این جواب داره

* این درست سوال امتحانی است: what is static convensation??

ماتریس سختی ای است که ~~[illegible]~~ خصوصیات کل نقاط I را می بره روی C

ماتریس سختی کل پاره سازه نیست. اون هنری نداره



همین ها برای بقیه common point ها هم بدست می‌آید.

اول processor روی این ها کار می‌کنه: فقط درجات آزادی روی common point ها

condense stiffness Matrix ⇐ برای "K" substructure

برای node های داخلی
- یک بار مرز را ببندیم ← تغییر شکل ها را بدست آوریم.
- یک بار هم خود مرز حرکت می‌کند

این دو تا را با هم جمع می‌کنید.

پس common point ها فقط یک جابجایی دارند. internal point دوتا جابجایی دارند

رابطه 7-25 : هر مولفه ای شد یکی به ازای گره ها بسته # حرکت common point ها

ص 247 را ببینید. تقسیم کرده به سه تا پاره سازه.
فقط با گره های common کار داره. همون condense
بعد ماتریس ها را با هم تلفیق می‌کنه می‌شه با این شکل ← ماتریس مربوط به کلیه گره‌های مشترک سازه نشان است. برای گره های آزاد قبلاً بدست آورده‌ایم.

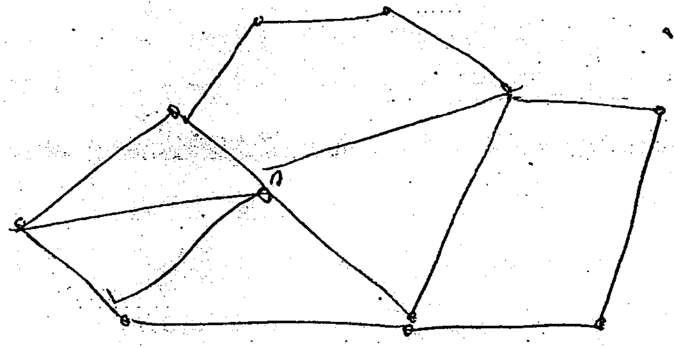
مثال 1 : دو تا پاره سازه کرده. مرزهای مشترک را بسته.
عضو مشترک را انداخته برای پاره سازه 1
برای پاره سازه I 4 تا المان داره، 4 تا ماتریس سختی می‌نویسیم.
بعد چهار تا را در پایین ص 250 assemble کرده. ماتریس سختی پاره سازه I
را به دست میاره. برای پاره سازه دوم هم به همین ترتیب پایین ص 251
حال باید ماتریس سختی condense شده را برای هرکدام بدست آوریم.
با استفاده از رابطه 7-17 ماتریس سختی condense شده را پیدا می‌کنیم
در بالای ص 252
ماتریس سختی های condense شده را جمع می‌کنه. درستش assemble کردن
می‌شه رابطه 7-27

درباره ص 243 — connectivity properties
Geometrical → سازه داده می‌شود
mechanical

2- مرزهای مشترک را می‌بندیم.

7- تغییر مکان‌های گره‌های مرزی { محاسبه خود تغییر مکان‌های گره‌های مرزی
″ ″ ″ گره‌های داخلی

سوال ۱۰۰ نمره‌ای ! :



نکته: این رو دوست کنید که هم درجات آزادی برابر داشته باشند و interface آن‌ها مینیمم باشد. ← Bisection

برای این روش‌های مختلفی هست.

سوال کلی: اگر شما یک سازه کلی داشته باشید. این سازه را من می‌خوام به k قسمت تقسیم کنم به دو شرط

1- قسمت‌ها حدوداً هم وزن باشند یعنی درجات آزادی گره‌ها حدوداً یکسان باشند

2- گره‌های مشترک حداقل باشند. یا minimize interfaces

یکی از مسائل را اگر حل کنید امتحان را ۱۰۰ می‌گیرید.

در جلسه بعد روش نیروها را به روش نیروها می‌گیم

$$\underset{\text{نیروهای داخلی سازه}}{R} = \overbrace{[B_0]\underset{\text{نیروهای خارجی گرهی}}{P}}^{\text{primary solution}} + \overbrace{[B_1]\underset{\text{مجهولات اضافه}}{X}}^{\text{complementry solution}}$$

☒ جلسه نوزدهم: روش ماتریس نیروها:

گام اول: تعیین درجه نامعینی استاتیکی
گام دوم: تشکیل سازه اولیه و تعیین مجهولات اضافی
گام سوم: تعیین تغییر شکل‌ها تحت اثر بارهای خارجی و مجهولات اضافی
گام چهارم: نوشتن معادلات سازگاری و حل آنها
گام پنجم: معادلات تعادل برای یافتن نیروهای داخلی اعضا

" خرپا شما فقط نیروی محوری دارید.

اگر در جهتی جابجایی را می‌خواستند، باید در آنجا یک نیرو q بگذارید. اگر نیرو وجود نداشت، در آخر آن را صفر بگذارید.

$$\underbrace{I}_{\text{نیروهای داخلی}} = \overbrace{B_0 \underbrace{Q}_{\text{نیروهای خارجی}}}^{\text{Primary solution}} + \overbrace{B_1 \underbrace{R}_{\text{ریدان دانت‌ها}}}^{\text{complementry solution}}$$

هزاران نیروی خارجی و داخلی می‌توانیم معادل هم پیدا کنیم. فقط یکی از آنها معادلات سازگاری را ارضا می‌کند. روابط سازگاری را باید بنویسید تا R ها به دست بیایند.
(در کتاب‌های دیگر آن را با R نشون می‌دهند. R را با X)

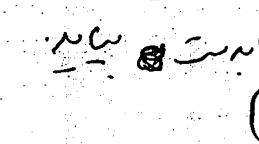
5-5a ← ماتریسی نوشته می‌شه 5-5b

مثل روش سختی، ماتریس نرمی هر یک از المان‌ها را می‌نویسید و در قطر یک ماتریس unassemble می‌چینید (5-6)

برای اعضای خرپا $F = \frac{L}{AE}$

انرژی complement

در روابط 5-6 چی می‌بینید: نیرو × ماتریس نرمی × نیرو = کار مکمل
تغییر شکل



اگر خطی باشه دوتا مساحت زیر و بالای خط موجب برابرند.

کار ما در سازه رفتار خطی است.

رابطه 5-5b را در 5-6a بگذارید.

~~[illegible] نرسیده به رابطه 15-5~~

می رسیم به رابطه 8-5

D را بدست آورد (۱۵-5)

بدست. D را پارتیشن بندی می کنیم. D_{RR} درجه نامعینی است که 5 درجه نامعین است 5 تا ستون را یک دسته می گیرید

حال از U مشتق بگیرید نسبت به Q می رسیم به 5-17a

در 5-17a $[\quad \cdots \quad]$ ماتریس نرمی است.

سوال: سازگاری را در کجا ارضا کردیم؟

$\frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{\partial U}{\partial q}$ $\longleftarrow$ در اینجا سازگاری را ارضا کرده اید

برای یک سازه چون $[D_{RR}]^{-1}$ طول می کشد. در واقعیت باید معادلات مربوط را بنویسید. این نمادین است.

اگر فقط نیروها را بخواهید α را لازم نیست حساب کنید.

رابطه

$\frac{\partial U}{\partial R} = 0 \rightarrow$ 5-13 می رسید به $\xrightarrow[\text{کنید}]{\text{Manupolate}}$ 5-14

زائدها را استاتیکی

اگر تغییر مکان را بخواهید باید الزاما α را بدست آورید.

پس مشکل اصلی ما ماتریس D_{RR}^{-1} است.

ص 255 :

1- ماتریس B_0 را تشکیل دهید. $B_{null} =$

$$\underline{I} = B_0\, Q \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} + B_1 R$$

Q را

2- ماتریس B_1

اولی را 1 کنید بقیه را صفر. B_0 بدست می آید.

R را صفر بدهید. B_1 هم به همین شکل

3 - ماتریس $\begin{bmatrix} P & 0 \\ & 0 \end{bmatrix}$ را تشکیل دهید.

4 - ماتریس D : اگر درجه نامعینی 5 است

$$\left[\begin{array}{c|c} D_{QQ} & D_{QR} \\ \hline D_{RQ} & D_{RR} \end{array}\right]_{5 \times 5}$$

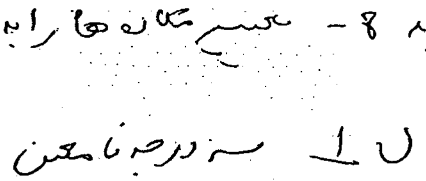
5 - از رابطه 13-5 نیروهای داخلی را بدست آورید.

6 - رابطه تعادل

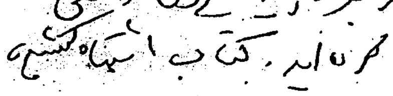
7- اگر تغییر مکان‌ها را خواسته بودند ← d را بدست آورید.
بعد 8 - تغییر مکان‌ها را بدست می‌آورید.

مثال 1 سه درجه نامعین است ولی سازه Fix است عضو صفر است.
برای همین دوتا مجهول می‌گیریم
عضو را می‌بریم. عضو را برمی‌داریم. اول یک سازه تکه است.

اگر این دو عضو را برداریم نیروی داخلی
را ignore کرده‌اید. کتاب اشتباه کرده



دقت کنید در ص 201 المان 6 را ننوشته است. دقت کنید.
دقت کنید مجهولات اضافی Biaction هستند.



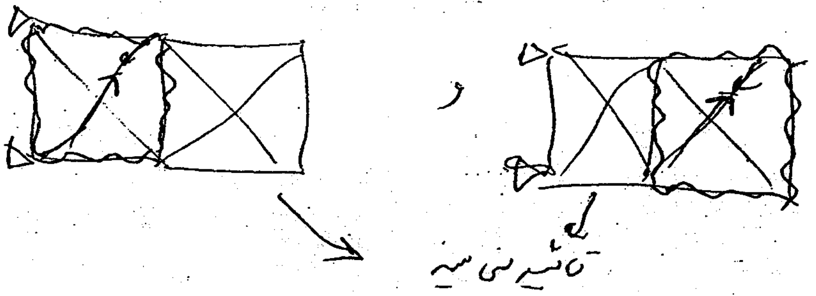
R ها Biaction هستند. سیستم‌ها خودمتعادل هستند.

self equilibretem stress
سازه‌های خودمتعادل

این سیستم‌های خودتنش اگر صحیح انتخاب شود هست statistical basis

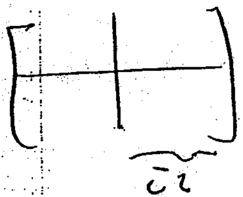
یا null basis

* انتخاب B_1 مهم است. 200 صفحه من برای B_1 نوشته‌ام. 70 تا مقاله نوشته‌ام



می‌رسیم به C یا ماتریس نرمی unassembled

همه را می‌بریم در D به رابطه (d) می‌رسیم.



D_{RR} اینجا چون 2 درجه نامعین است 2 تا می‌آید عقب خط می‌کشید

در رابطه بالا 5 می‌گذاریم. R زائدهای استاتیکی بدست می‌آید.

$I \leftarrow R \leftarrow$ پارتیشن‌بندی $\leftarrow D \leftarrow F \leftarrow B_1 \leftarrow B_0$

ما معمولاً نیروهای داخلی را می‌خواهیم. α را بدست بیاورید.

influence metrix

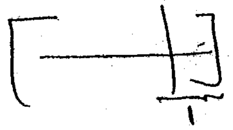
مثال 2: یک درجه نامعین است. زائد استاتیکی را R می‌گذاریم

B_0 و B_1 را بدست می‌آوریم.

مطلب خیلی مهم: یادتان باشد در گام دوم تقسیم تشکیل سازه اولیه براساس
تعیین مجهولات اضافی - سازه اولیه باید پایدار باشد. باید Rigid باشد
Geometry state باشد

سوال: R ها را چطور در نظر بگیریم که سازه پایدار بشه.
برای چه سازه‌هایی مثل اینجا مطرح هست.

F را در (b) بدست میاره. ماتریس (C) را بدست میاره



$R = 1$

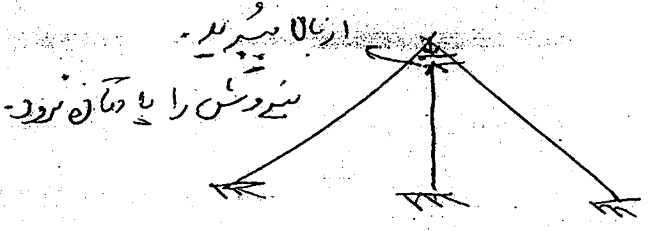
نیروهای داخلی را بدست می‌آوریم.

مثال 3 ازسوال بقیه فرض کرده که چون هیچ باری وجود ندارد Q_3 را یک می‌گیریم آخر صفرش می‌کنیم.

اینجا چون تغییر شکل‌ها را هم خواسته، α را هم تشکیل می‌دهیم.

α را Q ضرب می‌کنیم تا تغییر مکان‌ها بدست بیاد ولی Q_3 را صفر می‌گذاریم $\begin{bmatrix} Q \\ Q \\ 0 \end{bmatrix}$.

مثال 4: یکی را Redundant بگیرید.



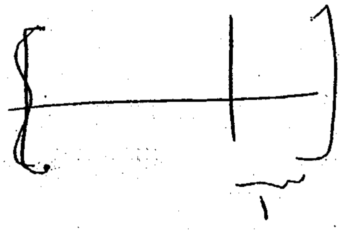
$Q_1=1$ یکبار هم $Q_2=1$

$$\begin{bmatrix} -0.52 \\ -0.73 \\ \textcircled{1} \end{bmatrix}$$

← صفر نگذارید. عضو را حذف نکرده‌ایم.

یک درجه نامعین

(b)



• I ها و δ ها را بدست بیاره. حالا تموم شده.
در خرپا نیروی محوری می‌گذاشتیم.
در قاب M و V و N می‌گذاریم. فرقش همینه.

پیدا کردن درجات نامعینی سازه‌ها:

خرپاهای دوبعدی: $\underline{\gamma(S)} = \underline{M(S)} - 2\, N(S) + 3$

درجه نامعینی سازه S — Members تعداد میله‌ها — Nodes یا تعداد joints ها

درجه نامعینی خرپاهای مستوی را از این بدست می‌آوریم. روابط تیموشنکو

$\gamma(S) = M(S) - 3\, N(S) + 6$ درجه نامعینی خرپاهای فضایی

فرض می‌کنیم سازه از نظر تکیه‌گاهی معین است.

$\gamma(S) = 3M(S) - 3\, N(S) + 3$ درجه نامعینی قاب‌های مستوی

$\gamma(S) = 6M(S) - 6\, N(S) + 6$ درجه نامعینی قاب‌های فضایی

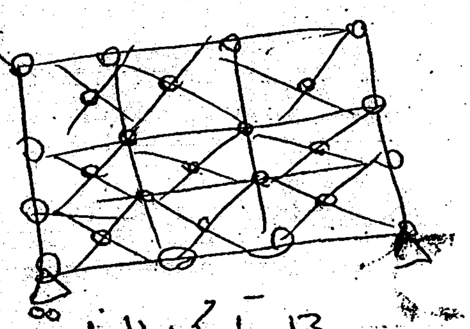
این روابط فقط یک عدد می‌دهد. هیچ حسی نشان نمی‌دهد.

Kareh. روابط :

① $\gamma(S) = \underline{\overset{\text{Node}}{N}_{\overset{\text{internal}}{i}}(S)} - \underline{M_c(S)}$ خرپاهای مستوی

تعداد گره‌های داخلی (در تماس با تکیه‌گاه نباشد.)

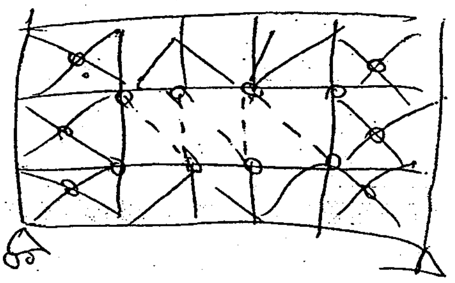
تعداد اعضای لازم برای شکل شبکه کامل



نامعینی خارجی را سریع می‌شماریم
هرجا دو تا عضو از روی هم عبور کنند آن‌ها را گره می‌گیریم.

13 تا گره داخلی
$\gamma(S) = 13$

$M_c(S) = 0$ ⟵ همه مثلثی شکل بودند.



$M_c(S) = 5$

$N_1(S) = 14$

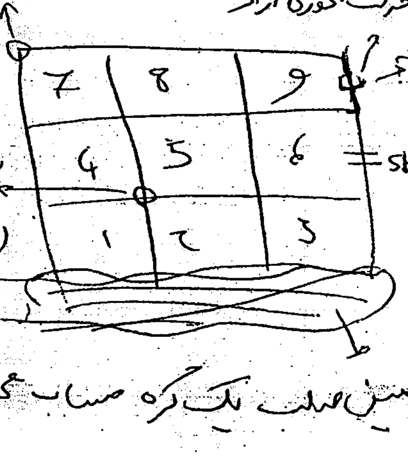
$\gamma(S) = 14 - 5 = 9$

---

② $\gamma(S) = 3\left[M(S) - N(S) + 1\right]$ قابهای مستوی

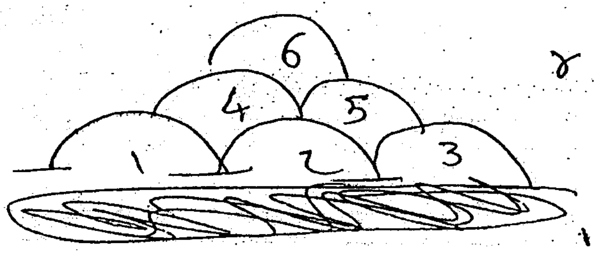
$= 3b_1(S)$

first Betti Number

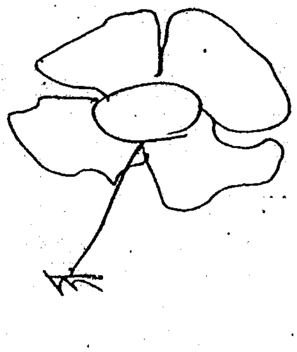

یکی سه رهاسی ۱ = ۲-۱
حرکت محوری آزاد
یک درجه
درجه نامعینی
سه تا سیار رهاسی
(چون معادله تعادل
می ده.)
7
8
9
4
5
6
1
2
3
زمین مثل یک گره حساب می‌شه

$\gamma(S) = 3 \times 9 = 27$

= shear connector = 1



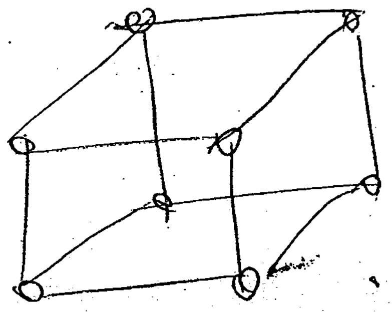
$\gamma(S) = 3 \times 6 = 18$



$3 \times 5 = 15$

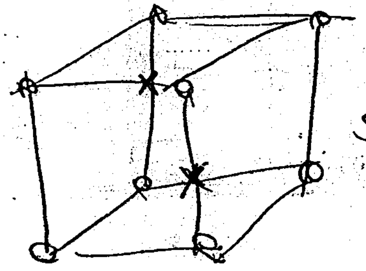
③ $\gamma(S) = 6\,[\underbrace{R_1(S^P)}_{\text{تعداد نواحی داخلی}} - \underbrace{C(S^P)}_{\text{تعداد نقاط تقاطع}}]$ قاب سه بعدی

تعداد نواحی داخلی S^P تعداد بمانک!



این مکعب را به صورت تصویری می‌کشیم.

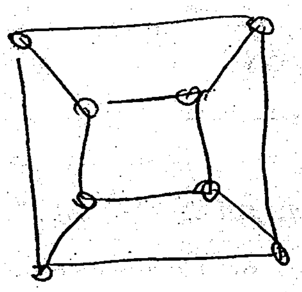
آدم خُل!



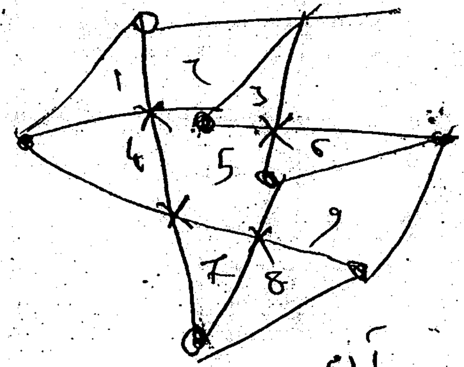
$\gamma_S = 6(7-2)$
$= 30$

$C(S^P) = 2$
Crossing No

آدم باهوش



$C(S^P) = 0$ $\gamma(S) = 6[5-0] =$



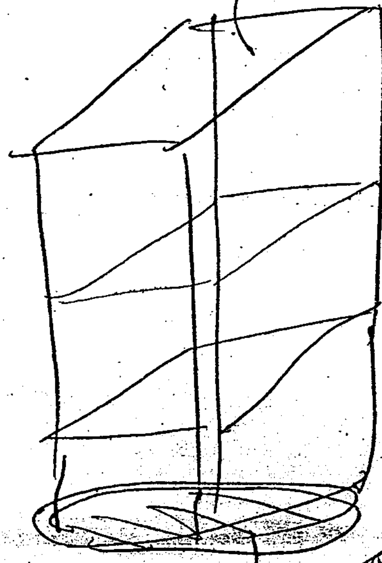
$C(S^P) = 4$

$\gamma(S) = 6[9-4] = 30$

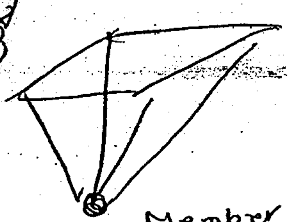
آدم نانجیب

۱۰۰ نمره داره؟ ببینید چند تا می سازه.

جمعی را بیرون بکشید.



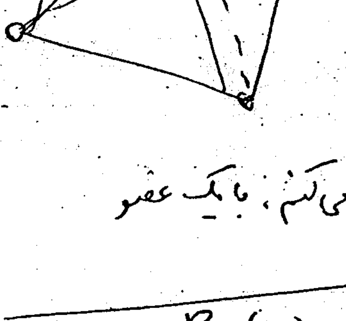
$$6\underbrace{(4+4+4)}_{\text{تعداد وجه هایی که می سازه.}} = 72$$

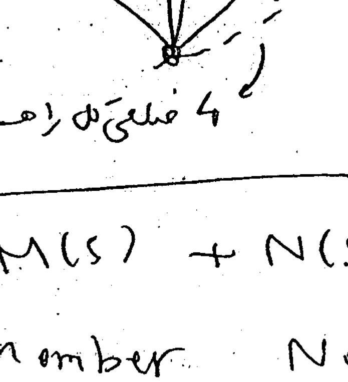


خرپای فضایی

$$④\ \gamma(s) = \underbrace{C(s^P)}_{\text{تعداد تقاطع ها}} - \underbrace{\bar{M}_c^{f}(s^P)}_{\text{تعداد اعضای مکمل برای مثلثی کردن کامل}}$$

که هم داخلی هم اسپایزس را مثلثی می کنید.





$C(s^P) = 3$

$\bar{M}_c(s^P) = 2$

$\gamma(s) = 3 - 2 = 1$

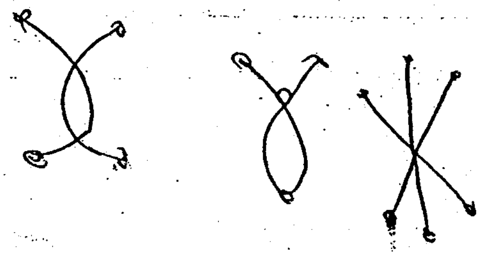
4 ضلعی ها را هم مثلثی می کنم. با یک عضو

اویلر

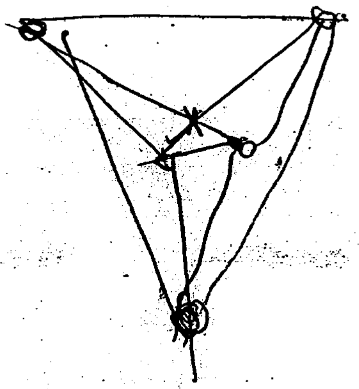
$$R(s) - M(s) + N(s) = 2$$

Rigion Member Node

base اثبات تمامی این روابط است.



These are forbidden



$C(S^P)=1$

$\bar{M}_c(S^P)=0$

$\gamma(S)=1-0=1$

در استیله اینها را اثبات کنید.

structrual Mechanics Graph

und Metrix Method (A.Kaweh)

فصل دوم این کتاب را بخوانید. اثبات هایش را نوشته

کتاب سفید رنگ است.

جلسه بعد .. ~~[illegible]~~ دوشنبه هفته آینده.

▨ جلسه بیستم : جلسه بعد کتاب المان محدود را بیاورید. فصل‌های 1 و 2 را خودتان بخوانید.

5-4 تحلیل قاب‌ها و تیرها با استفاده از روش ماتریسی نیروها :

در تیرها اولین کار تعریف نیروهای عضوی است. نیروهایی که در نظر می‌گیرید و بقیه نیروها را از تعادل عضو بدست می‌آورید. independent variants

مثلاً با axial خیلی کاری نداریم تا ماتریس‌هامون کوچک باشه.

شکل 5-4 - در a فرض می‌کنید M_1 و M_2 مستقل اند. }
در b " " دو تا ممان M مستقل اند. } ← هر دو تا درسته. هرکدام راحت‌تر هستید.

بقیه نیروها را با تعادل عضو بدست می‌آوریم.

عضو نوع اول و دوم نیست. یکی هستند. آقای آذر همین جوری حرف زده.

در رابطه 5-22 فقط ممان را در نظر گرفته‌ایم. shear deformation اگر مهم بود باید خودتان یک ترم دیگه اضافه کنید. U را بدست میاریم تا رابطه کاستیگلیانو بنویسیم و رابطه نیرو تغییر شکل بنویسیم.

در معادله 5-22 داریم برای نوع اول نیروها × ماتریس نرمی عضو = جابجایی‌ها

معادله 5-25 را هم برای نوع دوم بدست میاره.

$$\frac{\partial U}{\partial M_i} = \theta_i \qquad \xrightarrow[\text{می‌کنید}]{\text{تیزکاری}} \quad \text{5-25}$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_j} = \theta_j$$

بدست میاد. دیگه ننوشتم.

از این ماتریس‌ها در تشکیل ماتریس نرمی کل می‌نویسیم. میشه unassembled

مثال 5 را با سبک کتاب حل نکنید. [illegible] اشکال اشتباه می‌کنید. علتش رو می‌گم ممان و برش سمت راست را به عنوان Redundant گرفته.

نیروهای داخلی را بدست بیارید. دیاگرام لنگر خمشی را بکشید تا اشتباه نکنید. برای ممان واحد برش واحد

اگر از نوع اول می‌رید باید دیاگرام ممان و برش را هم بکشید.

کتاب این کار را نکرده. همین جوری B_1 و B_2 را نوشته. از نوع اول رفته.

ماتریس نرمی را هم از نوع اول می‌نویسه ← unassembled (c)

D را حساب می‌کنه تا نیروها را بدست بیاره. تغییر شکل‌ها رو هم می‌خواهد [illegible] را بدست بیاره.

نوع دومی به نظر من بهتره ← نوع دومی بنویسید.

مثال 6 - با نوع دوم رفته. B_1 و B_2 را تشکیل داده. ماتریس نرمی را بدست میاره.

[illegible] توی 5-10 D بدست میاد. پارتیشن‌بندی می‌کنه.

تنها Key Word : بار واحد بگذارید و دیاگرام‌ها را رسم کنید. به علامت‌ها توجه کنید.

مثال 7 - تیر سرتاسری گرفته.

یک تیر و ستون را بسته به دقت شما می‌توانید به تعداد بیشتری تکه تکه کنید.

ردانت‌ها را طوری بگیرید که دیاگرام‌ها ساده بشود. البته توی این نوع سازه‌ها مطرح نیست.

شما سازه را که معین کردید دیاگرام‌ها را بکشید. کار آخر را بکنید. حالا ماتریس B_0 و B_1 را (0)NWL − به دست آورید. در رابطه e رابطه تعادل افقی است. M_1 و M_2 را انتخاب کرده. شما M_1 و M_2 رو یکجا ببرید. اگر آنها را از نوع دوم استفاده می‌کنید از ماتریس نرمی همان نوع استفاده کنید.

در رابطه e اگر M_{2left} و M_{2right} را دو تا ممان مختلف به دست بیاورید یعنی از اول اشتباه کرده اید.

مثال 8 - سه تا ردانت‌ها را عکس العمل‌های سمت راست گرفته.

گره‌ها را با اعداد مشخصات کنید. اعضا را در دایره بنویسید. ①

باز هم دیاگرام‌های برش و ممان را رسم کنید. باید سریع بتوانید بکشید وگرنه وقت کم می‌آورید. برش نزنید. سریع بکشید.

در c چون ما مسئله‌مان 3 درجه نامعین است سه تا به چپ بیاییم خطی کنیم،

ستون‌های ماتریس B_1 یعنی همه اینها سیستم‌هایی که خود متعادل هستند.

در رابطه 5-5 ص 180

$$\underbrace{[\ ] = B_0[\ ]}\ +\ \underbrace{B_1[\ ]}$$

تا اینجا تعادل برقرار است. ۱ سری نیرو وجود دارد، فقط یکی شون سازگاری را ارضا می‌کند.

سیستم خود متعادل

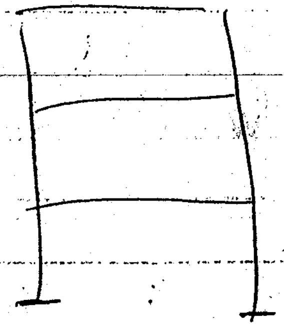
complementary solution

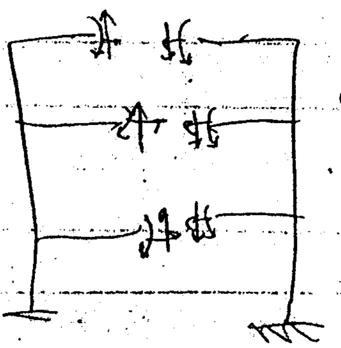
اگر B_1 را خوب انتخاب کنید روش ساده خواهد بود

اگر B_1 را خوب بد انتخاب کنید نیروها مشکل می‌شود.

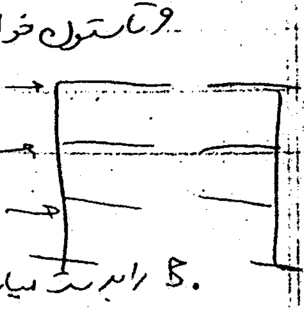
Primary solution

0 درجه نامعین



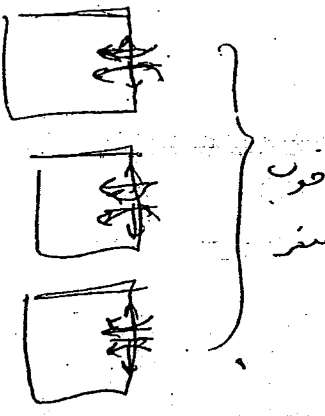


ماتریس B_1 شما 9 تا ستون خواهد داشت.



B_0 را به دست بیاورید.

من می‌گم لزومی نداره برای B_1 و B یک سازه را بگیریم.


B_1 خوب
پر صفر

B_1 به صورت Local درمیاد. ارتباط کمتری
از اعضا نیز ایجاد می‌شه.

بعد

$$B_1^T F_m B_1$$

پر صفر می‌شه.

Optimal matrix

1 sparse → پر صفر کردن

2 well-structured

3 Well-conditioned

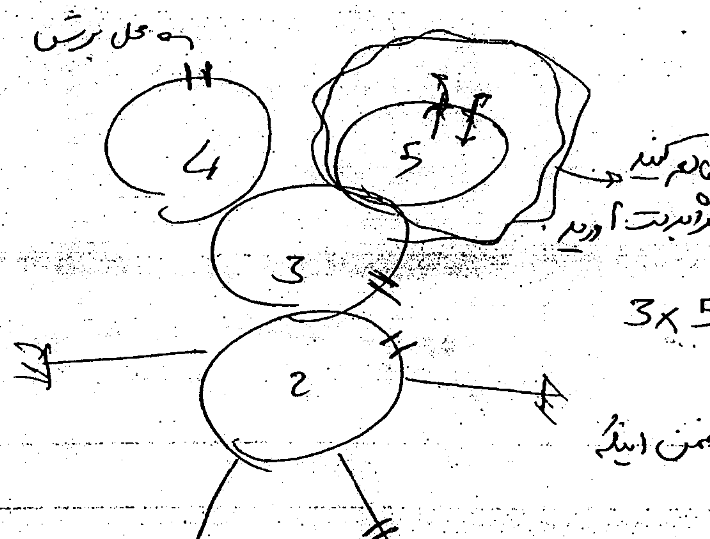
پر صفر باشه یعنی ارتباط بین معادلات ضعیف باشه. راحت‌تر شه بشکنه.

حافظه مورد نیاز کامپیوتر را کم می‌کنه.

چگونه پر صفر کنیم؟ دوست نداریم

بشه. دوست داریم که

بشه.


به محل برش
4
5
3
2
1
محلی مطالعه کنید
محل ستون که
سه تا B_1 را بدست آوردیم

$3 \times 5 = 15$

15 تا ستون به دست می‌آید ضمن اینکه اینها شلوغ نیستند.

المان محدود: مسائل دو بعدی است.

مقدمه: meshing = discritization

مسئله: یک مسئله داده شده را چندتا المان در نظر بگیریم. اگر مجرب باشید سریع می‌گیرید. اگر تازه وارد باشید با آزمون و خطا جلو می‌روید. باید همین جوری المان ها را ریزتر کنید تا زمانی که هیچ further improvement نبینید.

mesh . refinement

adoptivity generation → بسته به وضعیت بارگذاری و شکل مسئله المان ها را در نظر بگیرید.

از این به بعد تا member باید element بگیم.

~~کار انجام شده~~

اگر سازه ای تحت اثر بارهای وارده تحت تعادل باشد آن زمان به ازای یک بار واحد کار انجام شده داخلی با کار انجام شده خارجی برابر است = قانون کار مجازی

فصل دوم همان مبحث های ۱-۲ برای Bar element است. اینها را با نیرو شروع می‌کنم بعد منتشره میکنم. بنابراین من چیزی ندارم بگم.

تمرینات force method را تحویل بدید.

▨ جلسه بیست و یکم:

پیوست 233 را مشاهده کنید.

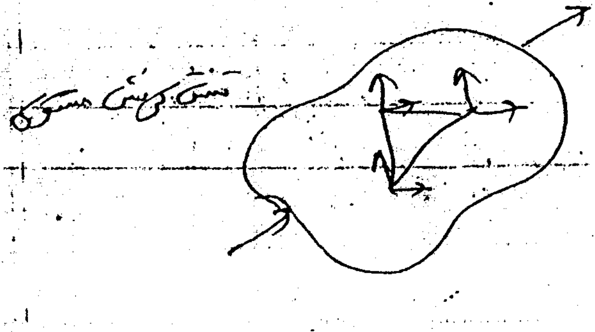
* گام های اساسی در بسط مشخصات کلی المان

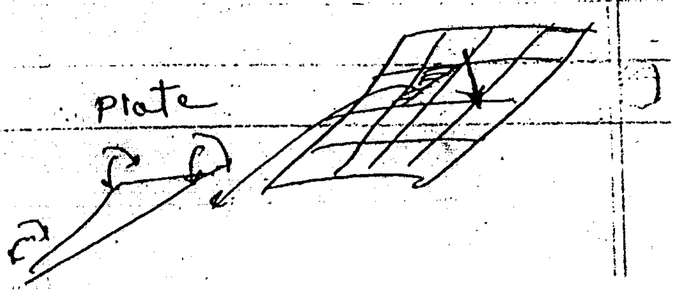
این یک صفحه و نیم جوهره تمام کتاب است. الان شاید نفهمید.

تمام صحبت های ماتریس ها و المان محدود یکسان است. فقط شما ماتریس یک المان کلی را بدست بیاورید (تنها تفاوت) — با استفاده از روش کلی برای finite element ماتریس یک المان مجزا را به دست می‌آوریم. در این دو صفحه این کار را می‌کنیم.

گام ۱: نوع مسئله را مشخص کنید. مسئله خمشی است + مسئله تنش مستوی است یا

این المان جزو یک سازه خمشی است. جزو یک سازه کرنش مستوی است یا ...





: یک دستگاه مختصات انتخاب کنیم. چو شبکه‌بندی در روش المان محدود یک دستگاه کلی نداریم. دستگاه ما فقط شکل‌ها و سیستم است. ترانسپورت و... ندارد.

: معمولاً مثلثاتی شماره‌گذاری می‌کنند.

مثلاً $Q = \delta q$

element

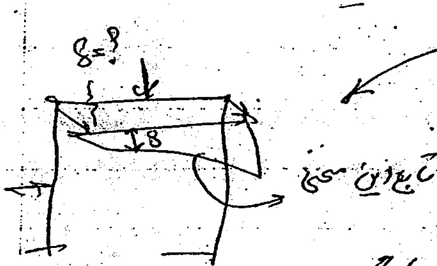
اینجا $F = K^e q^e$

Force | displacement

ماتریس سختی المان

گام دوم: یک تابع تغییر مکان انتخاب کنید.

یک مسئله شبیه آن می‌دهند. می‌گویند تغییر مکان نقطه δ را بدست آورید.

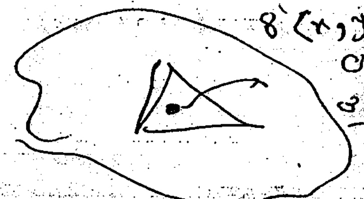


در این جا داریم $f(x)$ چون یک بعدی است.

درصورت ما المان‌های دوبعدی $f(x,y)$ کافیه.

convention دنیا ← $f(x,y)$ را چندجمله‌ای بگیرید.

گام III: وضع تغییر مکان نقاط برحسب تغییر مکان‌های گره‌ها



راجع به ماتریس A صحبت خواهیم کرد.

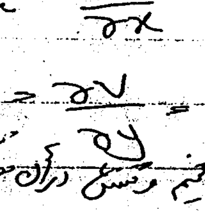
IV: مولفه‌های کرنش را حالا می‌توانیم بدست بیاوریم.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \delta_{xx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \delta_{yy}$$

گام V: کرنش را در ماتریس D یا روابط هوک ضرب می‌کنیم و تنش در آن نقطه را بدست می‌آوریم.

گام VI: اصل کار مجازی:



کار گره‌ها ← کار خارجی

کار نقاط وسط ← کار داخلی

این دو را برابر می‌گذاریم

رابطه VI، F^e را به δ^e مربوط می‌کند.

پس ماتریس K^e ماتریس سختی است. در امتحان این گام‌ها را می‌پرسم. همراه با پرسش.

VII ۵° تغییر مکان های گرهی که بدست آمد، در ۱۱ ضرب می کنیم تا تنش در نقاط مختلف سازه را بدست بیاریم.

حالا این بحث را برای المان های مختلف ~~بدست می آوریم~~ می نویسیم. ماتریس سختی ها بدست می آید

مفصل دوم داریم. ص ۸

☒ مفاهیم مربوط به روش تحلیل سختی

ایشان از فنر شروع می کنه. فنر را تحت اثر بار قرار بدیم مثل شکل ۲-۲

ماتریس سختی K ۱×۱ این فنر است.

رابطه نیرو تغییر شکل برای یک سازه را می خواهیم شکل ۲-۳

در صفحه ۱۱ روابطی که در ماتریس گفتیم را دوباره می نویسیم. در اون کتاب

با q و Q نشان می دادیم. این شده a و F

ماتریس سختی المان ها را به جای اینکه بهم پیوست بدیم (پیوست کتاب ماتریس ها) اینجا

از ایده فنر سری گرفته

رابطه ۲-۸ همون چیزیه که گفتیم.

در ۲-۸a اگر تغییر مکان صفر باشه، سطر و ستون ها را حذف می کنیم.

در ص ۲۵ گام ها را دوباره گفته. همون چیزی که قبلاً گفتیم.

ص ۲۲ ـ فنر را فرض کنیم یک میله است. ایشون از فنرها میاد به میله.

شکل ۲-۱۰ همون تبدیل مختصات محلی و سیستم به هم است.

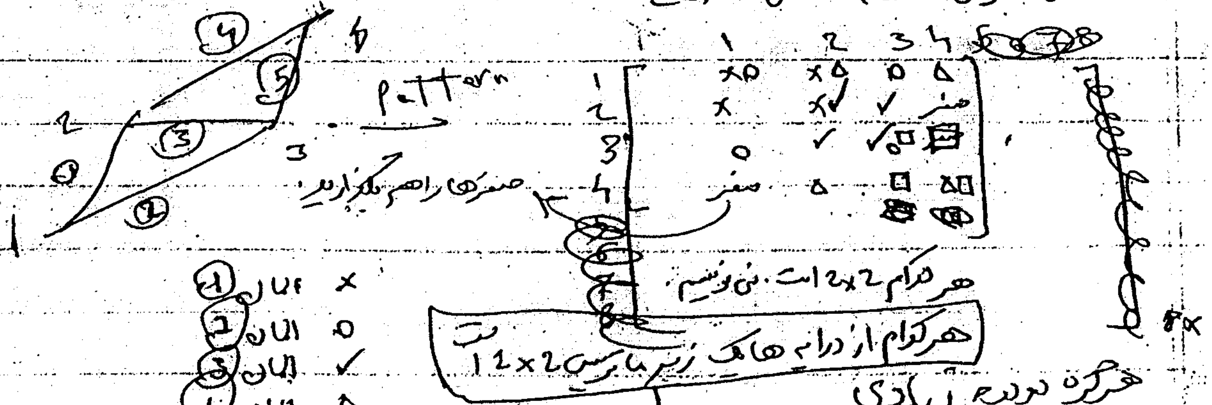
معادله ۲-۱۲ همان معادله Transport است که گفته بودیم.

در رابطه ۲-۱۴ یعنی ماتریس سختی تا سیستم دوران است.

شکل ۲-۱۱ ص ۲۹ تشکیل ـ

سوال: pattern ماتریس سختی را بنویسید؟ باید این شکل را بکشید

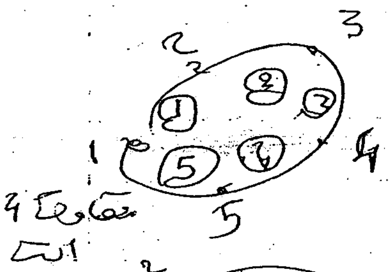
امتحانی برای مسئله شکل ۲-۱۲


①
②
③
④
⑤
1
2
3
4
pattern
1 2 3 4 5 6 7 8
صفر
صفرها را هم بگذارید
هر کدام ۲×۲ است. نمی نویسیم
هر کدام از درایه ها یک زیر ماتریس ۲×۲ است
هر گره دو درجه آزادی
8×

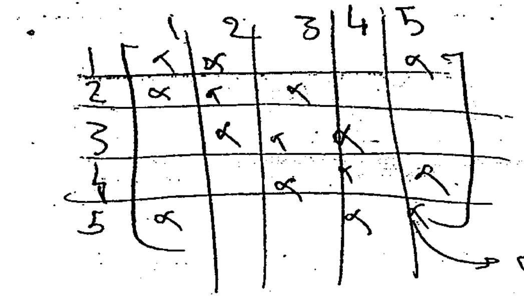
① المان ×
② المان ○
③ المان ✓
④ المان △
⑤ المان □

این را هم در امتحانش بنویسید.

برای ترسیم 35 جوری نامگذاری گره‌ها انجام که ماتریس سختی نواری بشه.

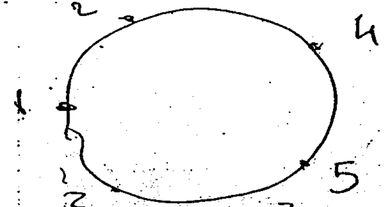

3
2
1
4
5
1
2
3
4
5

متفاوت ؟ است


1 2 3 4 5
1
2
3
4
5

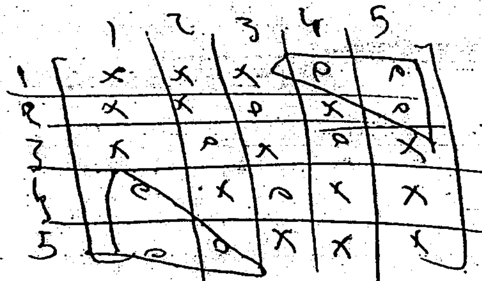
هر گره به خودش وصله پس در قطر دایره صفر نمیگذاریم.

شماره المان‌ها نقشی ندارد.



نزدیک‌ترها وصله است.

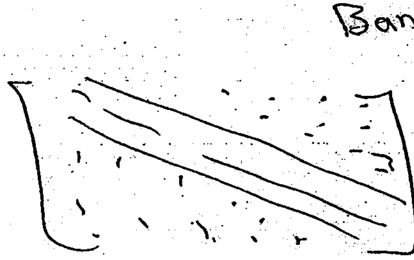
هر چه کوچک‌تر نواری بیشتر میشه.


1 2 3 4 5
1
2
3
4
5

Banded

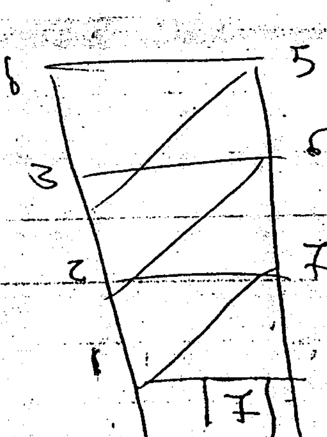
در اینجا محل صفرها را نگاه میکنم. اشتباه نوشتم ببخشید خداحافظ

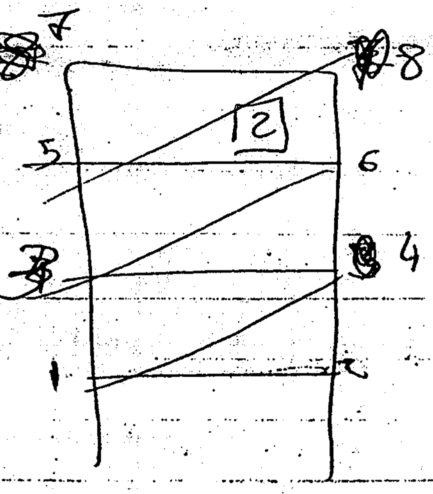
ideal: قطر را کشیده با [illegible] شماره بشه.

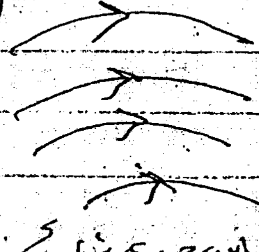


tower building

ذ:







این جوری شماره گذاری کنید.

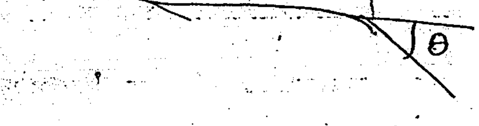
م 37 – این شکل و مسئله به درد فصل 7 می‌خوره.
شبیه تغییر شکل شیب است. چون ما Δ هایی خواهیم است که برقرار کنیم فقط w_1 و w_2 می‌نویسیم. به ΔW کار نداریم.
به این θ ها و F ها و T ها و w ها آشنا بشید.
معادلات شیب افت را می‌نویسید در پایین.
ماتریس 4×4 بدست میاره. همون ماتریسی که قبلاً گفته بودیم. Axial هم صرفنظر
ماتریس تبدیل T را هم صفحه 38 نوشته.

فصل سوم:

المان های محدود تیر گونه Beam element

ماتریس سختی این المان را با گام های اول پیوست می‌خواهیم بدست بیاریم
یعنی به روش Finite element ای.
ماتریس سختی برای تیر از ماتریس سختی برای المان مثلثی و مستطیلی سخت‌تر بدست میاد.
ص 40 – حالت عمومی برای هر المانی صادق است. حالت خاص فقط برای المان تیری را می‌گیرید.

گام I: مسئله را مشخص کنید



ارتباط بین F^e و δ^e را می‌خواهیم بدست بیاریم.

گام II: تابع تغییر مکان: مشکل. چند جمله‌ای می‌نویسیم
در این تیر 4 درجه آزادی داریم w_1، θ_1، w_2 و θ_2
تابع درجه چند باشد؟ جوری که با درجات آزادی هماهنگ باشد.

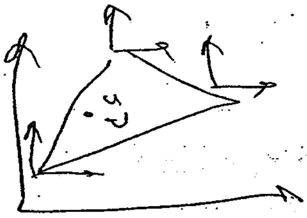
$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

α ها را با 4 تا w و θ بدست می‌آریم.
این چند جمله‌ای را ⟵ کامل انتخاب می‌کنم. ضریب ثابت + ضرایب 2 ← ...

$$\frac{dw}{dx} = \theta = \alpha_2 + 2\alpha_3 x^2 + 3\alpha_4 x^3$$

اگر المان مثلثی باشد 6 درجه آزادی برای المان تنش مسطح

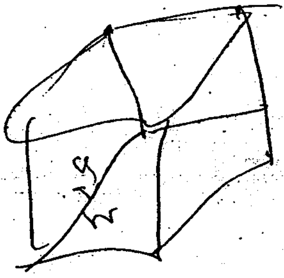
6 تا اطلاعات داریم:



$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_6 x$$

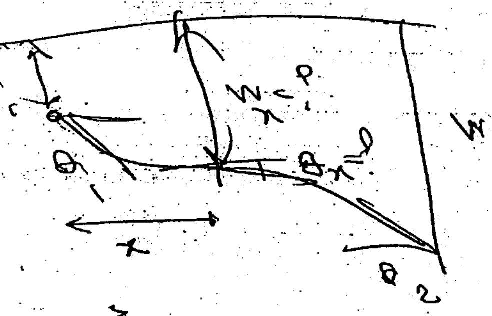
که 6 تا سه تا ش رو فرض u می‌کنیم سه تا هم v



در هر گره 6 درجه آزادی - 6×8 اطلاعات داریم

برای u 2×8
" v 2×8
" w 2×8

پایین ص 42



$$\delta(x,y) = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_y \end{Bmatrix}$$

$$w \text{ تابع } = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

در امتحان ممکن است سه گراس را با شیب اعمال کرده اید. معلم در فاصله $\frac{1}{4}$ از پای ستون دوران و جابجایی را بدست بیاورید. با بدهمین کارها را هم بکنید. پس دقت کنید.

معادله 5-2

$$\underbrace{[\quad\quad]}$$

تابع ($f(x,y)$ = تابع تغییر مکان)

پس باید α ها را داشته باشیم. با توجه به شرایط مرزی حساب می‌کنیم. 4 معادله 4 مجهولی می‌نویسیم. α ها را بدست می‌آوریم.

گام III: همینه که گفتم. شرایط مرزی را قرار دهید.

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ x=L \end{matrix}\right\} \rightarrow$$ 4 تا معادله 4 تا مجهول گام 4

$$\alpha = \left[\; A \;\right]^{-1} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} = A^{-1} \delta$$

~~بیایید چهار معادله~~ چهار مجهولی را حل کنید بلکه A^{-1} را بدست آورید.

به جای کرنش

گام V کرنش را بدست می آوریم. از $\frac{1}{R}$ = انحنا استفاده می کنیم. همچنین σ به جای تنش از همان خمشی استفاده می کنیم

از بقیه المان های فاینایتِ المنت تنش و کرنش را می خواهیم.

ε(x,y) منظورش curvature است.

در جز 47 هم اینها را بدست آورده.

فرض: y^2 خیلی کوچک است. صرفنظر می شود.

ماتریس پایین جز 47 خیلی قشنگه.

از قبل در اینجا $w_1=1$ می گرفتیم و بقیه را صفر می کردیم بعد ~~[illegible]~~ ستون اول بدست می آمد.

این تابع شکل اول منحنی است.

یک درجه آزادی را واحد می کنیم بقیه را صفر می کنیم. شکلی که بدست می آید می شوند shape function ها بعد با یک ضرایبی جمع می شوند → finite funtion

کرنش از این [illegible] است. $M=-EI\frac{d^2w}{dx^2}$ پس تنش هم پیدا شد.

گام VI: خیلی مهم. استفاده از اصل کار انرژی ماتریس سختی المان را بیرون میاریم. کار خارجی را مساوی کار داخلی میگذاریم و سختی را بدست می آوریم

حالت عمومی → finite element حجمی

▨ جلسه بیست و دوم:

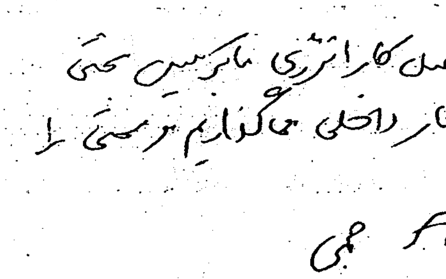
پیوست I را دوباره مرور می کنیم. الان بهتر می فهمید.

جز 48 را توجه کنید.

قسمت مربوط به تیر را با دقت بیشتر توجه کنید. المان مثلثی از المان تیری ساده تر است،

ماتریس پایین جز 48 ماتریس قشنگی حالت shapefunction داره.

گام VI مهمترین گام است. بارهای گرهی را با تغییر مکان های گرهی مرتبط سازید.

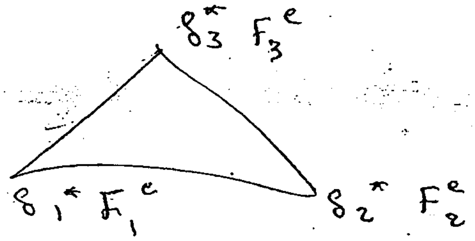


از اصل کار مجازی استفاده می کنیم

برای یک deformation مجازی کار خارجی = کار داخلی

$\rightarrow F^e = K^e \delta^e$

المان مثلثی ۳ تا port دارد. المان مستطیلی ۴ تا port دارد. حالا از ص 49 ثبت
می‌گیم n تا port داشته باشد. بسته به تعداد درجات آزادی هر گره یا port، δ ها آن بعدی می‌شوند 3x3


$\delta_3^* \; F_3^e$
$\delta_1^* \; F_1^e$
$\delta_2^* \; F_2^e$

* ستاره یعنی مجازی

$$w_{ext} = \delta_1^* F_1^e + \delta_2^* F_2^e + \delta_3^* F_3^*$$

کار خارجی انجام شده.

کار داخلی برای واحد حجم $W_{int} = \{\varepsilon(x,y)^*\}^T\{\sigma(x,y)\}$

اینجا $\frac{1}{2}$ نداریم چون deformation مجازی از صفر شروع می‌شود.

حالا مجموع کار داخلی و خارجی را مساوی هم می‌گذاریم.

با رابطه VI ص 50 زیباترین رابطه است. چون برای هر المان که نیروها را به تغییر مکان‌ها مربوط مرتبط می‌سازد.

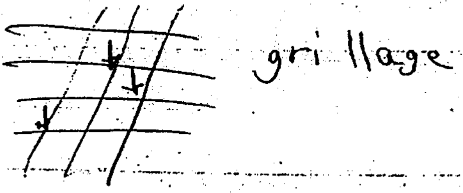
نیروی گره‌ها را مساوی با واحد قرار داده‌ایم.

ص 52 اگر از چند جمله‌ای‌ها استفاده نمی‌کردیم به sinh و ... می‌رسیدیم.

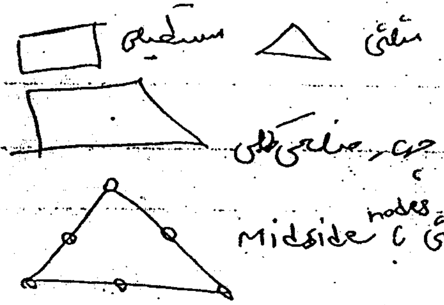
ماتریس 7-3 همان ماتریسی است که از شیب افت هم بدست آورده بودیم.

این فصل را با شیب و افت و ... بلد بودیم. یک جوری‌اش زیاد جذاب نبود.

فصل چهارم: المان‌های محدود محیط‌های پیوسته:



المان‌های مشهور


مستطیلی
مثلثی
چهار ضلعی کلی
Midside nodes مثلثی با

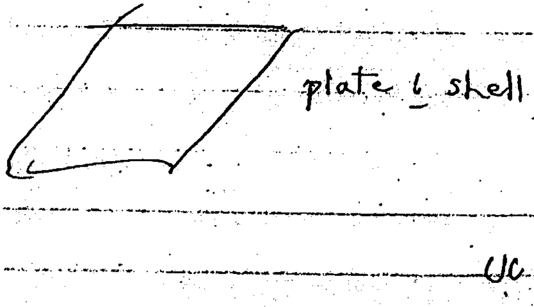
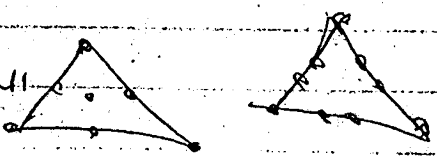


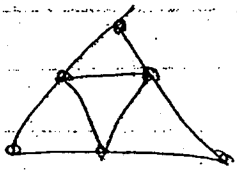
plate & shell

المان درجه بالا

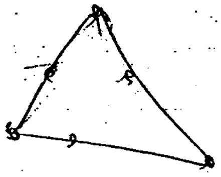


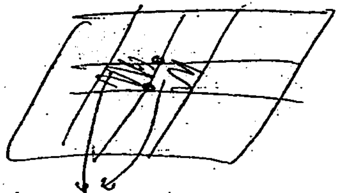
جزئیات تئوری برای المان‌های مختلف فرقی ندارد فقط تابع تغییر مکان آن‌ها در حالت کلی فرق می‌کند.

یک زمانی مسئله جدای بود، الان حل شده



سازه C

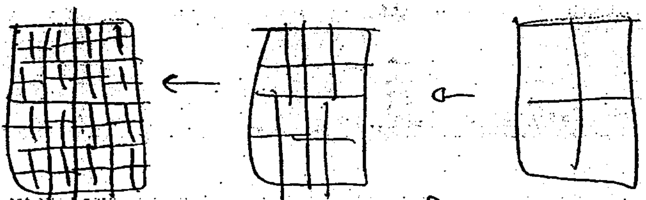




این دو المان را با تعادل و سازگاری در گره‌ها می چسبانند.

تقسیم بندی سازه هم 58 زیاد کار ساده ای نیست. مگر تجربه داشته باشید.

روش تکراری



C ... زمانی که بهم نزدیک شوند.

به این نکته توجه کنیم
بار متمرکز کاکسیر مثلا
صفحه خودش تحت اثر

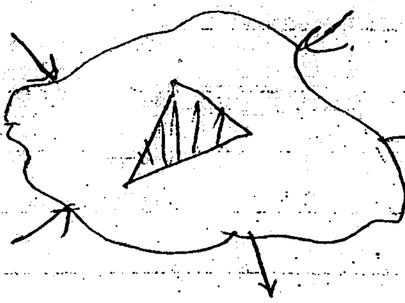
ریزکردن حلقه‌ها Mesh refiement

تنش مستوی: یعنی سازه در
کرنش مستوی:

فصل پنجم: المان محدود مثلثی برای مسائل الاستیسیته صفحه ای

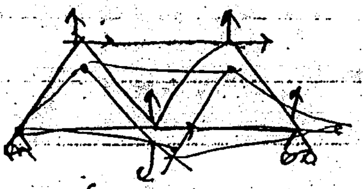
حالت کلی
یک جسم کی در حال تنش مستوی است؟ زمانی که تانسور تنش در راستای z اندیس تنش صفر باشد
″ ″ ″ کرنش ″ ? ″ ″ کرنش ″ اندیس z کرنش ″ ″

فرمول های این دو حالت خوشبختانه یکسان خواهد بود.



هر نقطه از این جسم دو درجه آزادی دارد؟

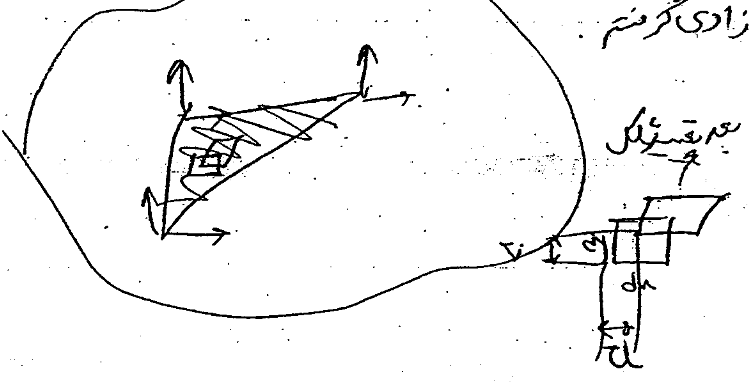
سوال امتحان what is degree of freedom?



7 درجه آزادی
Dof = 1

درجه آزادی یک سازه i's the mimimuse noumber of component which specifies the deformation of completely structure

برای یک مسئله تنش کرنش مستوی
برای هر گره دو مولفه آزادی گرفتیم.
سوال: چرا دو تا ؟



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

المان کرنش و تنش را با داشتن روی u و v توانستیم بنویسیم. پس کل فرم u و v

ص 63

ص 64 : المان مثلثی . روابط سختی وقت این ~~[illegible]~~ المان را می‌نویسیم. ارتباط بین F^e و δ^e را بدست میاریم
گام‌ها عیناً مثل میله است.

* زیبایی روش‌های تحلیلی نسبت به ماتریسی چیه؟ در روش تحلیلی نیاز به تبدیل مختصات محلی به سیستم و برعکسش نیست.

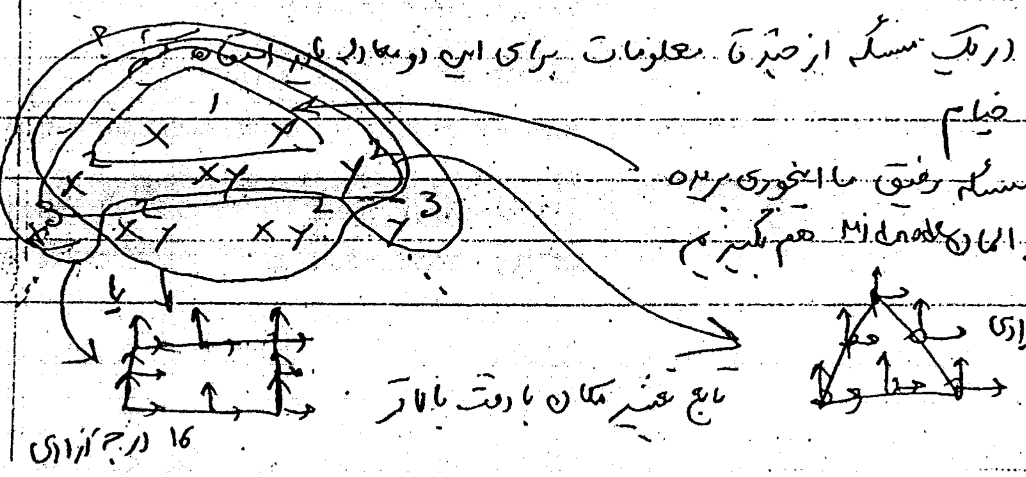
موضوع بحث ما $F^e = K^e \delta^e$
این رو می‌خواهیم بدست بیاریم.

گام II : را می‌گیم.
اینجا 6 درجه آزادی با 6 تا اطلاعات داریم. بنابراین تابع تغییر مکان برای u و v طبیعتاً با این شرایط مرزی باید بتوانند جواب u و v را بدست بیارند.

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

سوال: در یک مسئله از چند تا معلومات برای این دو معادله باید استفاده کنم؟
جدول خیام
(برای مسئله دقیق ما اینجوری بره)
اگر در راستای المان Midnode هم بگیریم



این ها ایزوتروپیک است یعنی استرا[illegible] و V یک اهمیت دارند. اگر ایزوتروپیک نمی بود، توجه بیشتری به جهت مهم تر می کردیم.

▨ جلسه بیست و دوم:

ص 63 را گفتیم.

گام III : وضعیت α را می‌خواهیم مشخص کنیم. نقطه مورد نظر را اینجا روی گره 1 می‌گذاریم.

$\delta_1 = [f(x_1,y_1)]\{\alpha\}$

در دو هم تحقیقات را می‌نویسید. در سه هم می‌نویسید. δ_1 و δ_2 و δ_3 را در یک ماتریس بچینید. می‌شود

$$\delta^e = \begin{bmatrix} f(x_1,y_1) \\ f(x_2,y_2) \\ f(x_3,y_3) \end{bmatrix}\{\alpha\}$$

[illegible] برای یافتن α باید A را معکوس کنید تا حل کنید. حسنش سادگی‌اش چون پر صفر است:

وارون کردن ماتریس‌ها بحث جالبی است:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} A+B \\ A-B \end{matrix}$$

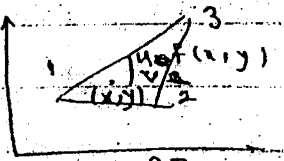
$$\begin{bmatrix} A & B & & \\ B & A & B & \\ & \ddots & A & \ddots & B \\ & & & B & A \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A & B & & B^T \\ B^T & A & B & \\ & B^T & \ddots & \ddots & B \\ B & & & B^T & A \end{bmatrix}$$

حالا اینجا منظورش اینست به صفر $\left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$ دربیاریم.

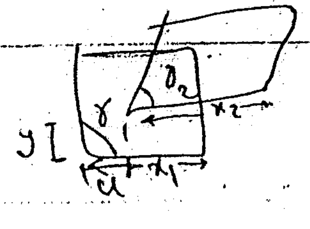
ستون ها را جابجا کنید.

در بالای صفحه 70 ماتریسش رو چک کرده.

بعد در بالایش به رابطه III می‌رسیم. تغییر شکل‌های هر نقطه درون مثلث را برحسب تغییر شکل‌های گره‌ها



گام IV : در رابطه 11-5 $\varepsilon(x,y)$ را به جای تانسور $\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$ به صورت $\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$ نشان می‌دهیم.



$$\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_{xy}$$

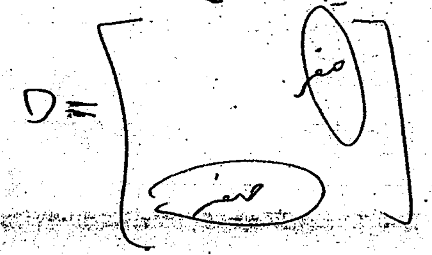
$$\frac{x_2 - x_1}{x_1} = \varepsilon_x \qquad \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \varepsilon_y$$

ارتباطات همه را در 13-5 مرتب می‌کنید.

معادله 5-14: مولفه‌های تغییر مکان در x و y می‌شه ماتریس e در α.
زمانی پیدا کردیم که α هست $A^{-1}\delta^e$ ـ جاگذاری می‌کنیم در 14-5
ماتریس CA^{-1} خیلی مهم است. می‌گذاریم B. خواهید دید چرا این ماتریس B مهمه

در گام V: کرنش‌ها را به تنش‌ها می‌بریم. تانسور تنش هم بود $\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}$

با زبان ما هم σ را به صورت بردار $\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}$ نشان می‌دهیم. تمام این کتاب‌های مقاومت مصالح است. روابط هوک را بین تنش‌ها و کرنش‌ها می‌نویسیم.
از 19-5 به صورت معکوس رابطه 20-5 را درآورده‌ایم. اینجا ما تنش‌ها را می‌خواهیم. ماتریس D را تشکیل می‌دهیم.
پس رابطه تنش‌ها را به تغییر شکل‌های گرهی مرتبط کرد.
تا اینجا فرض می‌کردیم مسئله plain stress است. حال می‌رسیم به کرنش مسطح. D درایه‌ها
با درایه σ را صفر می‌گذاریم. قانون هوک به روابط 22-5 می‌رسد.
این روابط را به صورت ماتریسی بیان می‌کنیم. ماتریس D درست می‌شه این D با D قبلی یکی نیست. طبیعتاً فرق می‌کند.



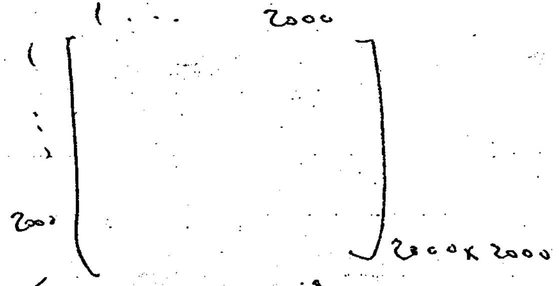
گام VI: برای هر المان F^e را داریم. برای هر نقطه هم σ و ε را داریم. کارهای داخلی و خارجی را مساوی هم می‌گذاریم ← ماتریس کلی به عنوان K را بدست می‌آوریم.
رابطه VI همان رابطه مشهور برای المان‌ها گرهی است.
B که گفتیم محترم است اینجا می‌بینید
درایه‌های B تابع x و y نیستند. کاملاً B بیرون می‌آید و انتگرال $\int dv$ می‌شود حجم مثلث یعنی مساحت × ضخامت $\underbrace{\Delta}_{\text{مساحت}} \times \underbrace{t}_{\text{ضخامت}}$. با ΔT دینامیک اشتباه نکنید.

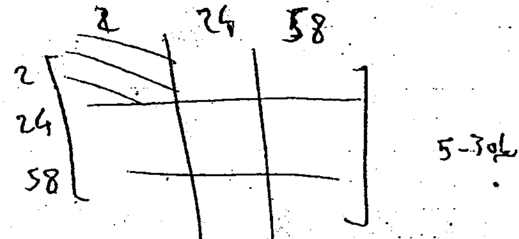
در رابطه 28-5 مساحت نصف دترمینان ماتریس است.
D.B مهم است چون داریم $\sigma = D B \delta^e$ یعنی DB را همیشه لازم داریم مثل معادلات تنش است.

رابطه 30-5 می‌شه معادله سختی المان مثلثی. معادله 30-5 همون روابط ثبت است

است: می‌خوام سر امتحان بدست بیارید. جمع و تفریق است. چهارتا عدد درهم ضرب می‌شه.

گام VII: ماتریس سختی های المان ها را با هم combine می‌کنیم.



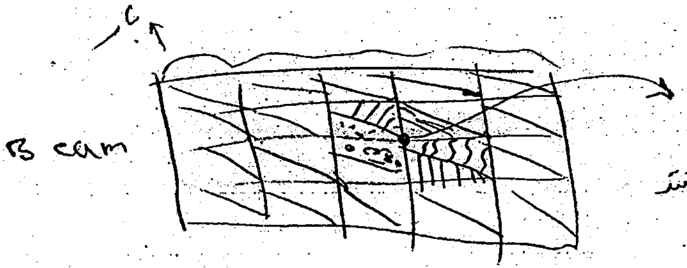


بعد از این می‌شه ماتریس سختی کل
بعد باید شرایط مرزی را اعمال کنید
تا ماتریس سختی کوچک شده بدست بیاید

تک تک این بلوک ها
را در ماتریس کلی سمت چپ می‌چینیم

Reduced stiffness Matrix → سه تا روش را درست نوشتم
بود. در امتحان هم می‌پرسم

δ^e ها بدست می‌آیند. δ^e را در H یا DB ضرب می‌کنیم تا تنش ها بدست بیایند.



مختصات این نقطه را در
هرکدام از المان ها بگذارید
جواب ها یک ذره با هم فرق می‌کنند
باید average بگیرید.

یا تنش ها را اصلاً از اول در مرکز المان ها بدست بیارید.

حال این تنش ها به چه دردی می‌خورند:

کاربردها: یک تیر Beam با تکیه گاه های ساده و بار گسترده روی بال

این تیر وارد می‌شه که فرض می‌کنیم مستقیماً به جان تیر وارد شه.

آمده به صور مختلف discritize کرده.

نتایج a pattern از b بهتر است

بعد باید المان ها را ریزتر کنه

در شکل 80 c [illegible] ها را برای شما پیدا کرده.

سوال امتحان: ص 71: تابع u و v را مشتق بگیرید ثابت می‌شود.

المان تنش ثابت constant stress element

$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$

$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$

$\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y) = \alpha_2$ چرا به این المان می‌گند المان تنش ثابت؟ چون

$\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y) = \alpha_6$

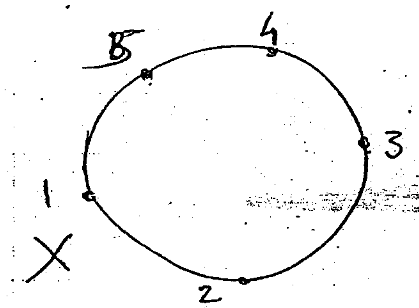
$\gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\quad) + \frac{\partial}{\partial x}(\quad) = \alpha_3 + \alpha_5$

▨ جلسه بیست و چهارم

فصل ششم: المان محدود مستطیلی برای مسائل الاستیسیته صفحه‌ای

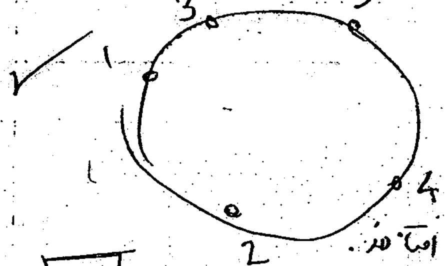
چرا برای هر گره دو درجه آزادی کافی است؟ چون ε_x و ε_y و γ_{xy} را با داشتن u و v می‌توانیم بدست بیاوریم. سپس تنش را هم می‌توانیم بدست بیاوریم. پس وضعیت مشخص می‌شود.

▨ جلسه بیست و پنجم: المان خمشی

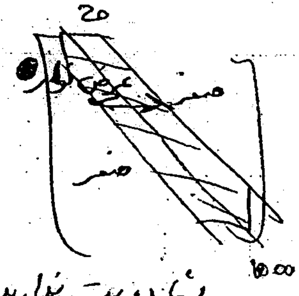


$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \alpha & \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \alpha & \alpha & \alpha & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 5 & \alpha & 0 & 0 & \alpha & \alpha \end{array}$$

ماتریس کلی

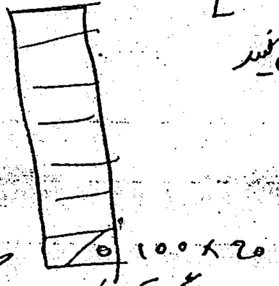


$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \alpha & \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & \alpha & \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ 4 & 0 & \alpha & 0 & \alpha & \alpha \\ 5 & 0 & 0 & \alpha & \alpha & \alpha \end{array}$$


20
عرض نوار
صفر
صفر
1000

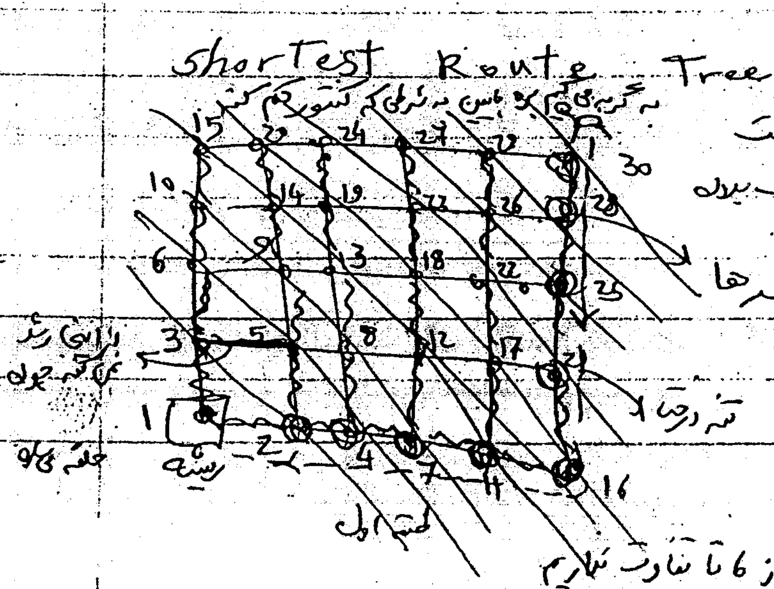
صفرها در گوشه‌ها می‌افتند.

شما دوست ندارید صفرها را وارد کامپیوتر کنید و فضای کامپیوتر را اشغال کنید



سوال: یک سازه را چگونه شماره‌گذاری کنیم تا ماتریس نواری در بیاید. الگوریتم خودم رو می‌گم.

Shortest Route Tree درخت کوتاه‌ترین مسیر


به تجربه می‌گم که باشین به شرطی که کنتور کم کشد
15
20
24
27
29
30
10
14
19
23
26
28
6
9
13
18
22
25
3
5
8
12
17
21
1
2
4
7
11
16
مسیرها
تنه درخت
برای این رشد نمی‌کنه چون
حلقه‌ها
ریشه
کنتور اول

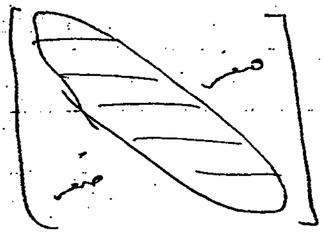
این روش شماره‌گذاری کنید. این درخت یک ریشه داره. درخت یک گراف بی‌حلقه متصل است.

این درخت کوتاه‌ترین مسیر است.

حالا شماره‌گذاری ← ریشه 1

کنتور اول: مقطع 2 نقطه‌ایه

این شماره‌گذاری 95٪ عالیه. بیش از 6 تا تفاوت نداریم



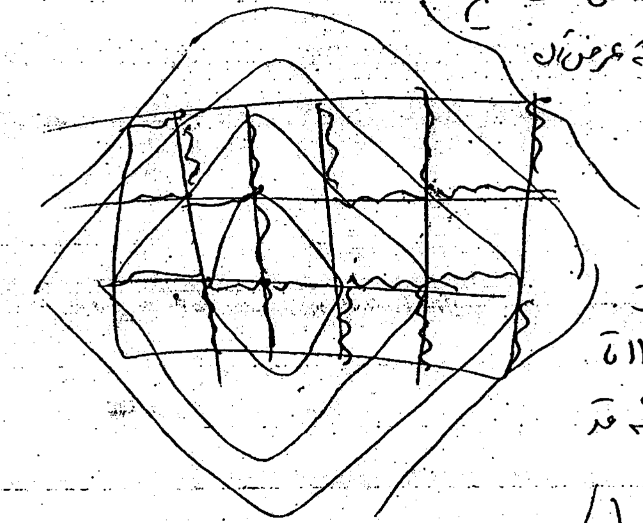
حالا یک تبه قرار میدهیم -
هدف از شماره گذاری Banded درسیاید
اگر ریشه را درست انتخاب کنید.

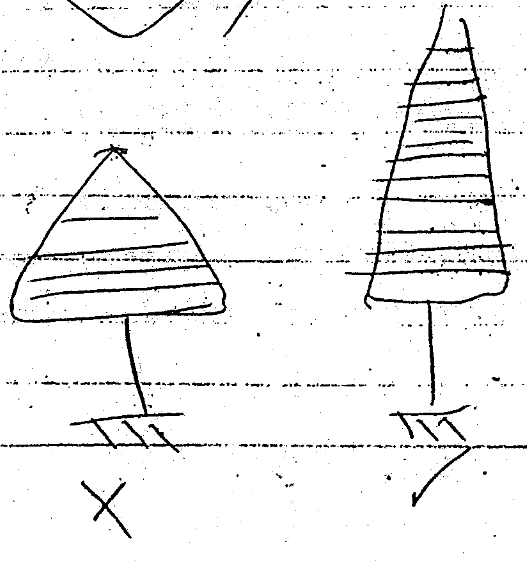
اما ریشه را چطور انتخاب کنم؟

الگوریتم چهار گامی شماره گذاری گره ها : (Kaweh 1974)
۱ - گره خوب انتخاب کنیم
2 - یک درخت کوتاه ترین مسیر تشکیل دهیم SRT
3 - تنه درخت را انتخاب کنید (Transversal)
← انتخاب یک نماینده برای هر subset

4 - شماره گذاری نمائید.

سوال: گره ریشه را کجا انتخاب کنیم؟
شما به درختی علاقه مند هستید که عرض آن کمینه باشد.
عرض درخت قبلی 6 بود
(بزرگترین کنتور)
اینجا عرض بزرگترین کنتور 7 است.
اینجا 6 تا کنتور داریم. قبلی 11 تا کنتور داشتید. تعداد کنتورها ش قد





از یک نقطه درخت بکشید. از نقطه آخر دوباره برای مرحله بعد درخت بکشید. دوباره از نقطه آخر این درخت، درخت مرحله بعد را شروع کنید. هر درختی که کاملتر و قد بلندتر بود بهتر است.

اطلاعات بیشتر ← فصل ordering کتاب‌های خارجی ما

جلسه بیست و ششم:

مرور کلی: کدام روش بهتر است؟ ماتریس سختی را برای حل مسئله انتخاب کنیم یا ماتریس نرمی؟

اول: درجه آزادی سینماتیکی و نامعینی استاتیکی را تعیین می‌کنیم

↓ ابعاد ماتریس سختی (ابعاد ماتریس کوچک‌تر) ↓ ابعاد ماتریس نرمی

هر کدام که مجهولاتش کمتر بود ← اون بهتره.

مطلق

دوم: ببینیم ماتریس ما مریض حال است یا نه. اگر ماتریس نرمی مریض الحال باشد ماتریس سختی مریض الحال نیست. و بالعکس.

سوم: مناسب بودن روش برای محاسبات کامپیوتری ← طبیعتاً روش ماتریس سختی بهتر است.

فصل دوم: شیب - افت

کشیدن a compatible state of deformation چقدر مهم است.

به چه درد می‌خورد؟ Δها را هم (اعضا) مربوط می‌کنیم. با θها کاری نداریم. هر گره θ خودش رو داره.

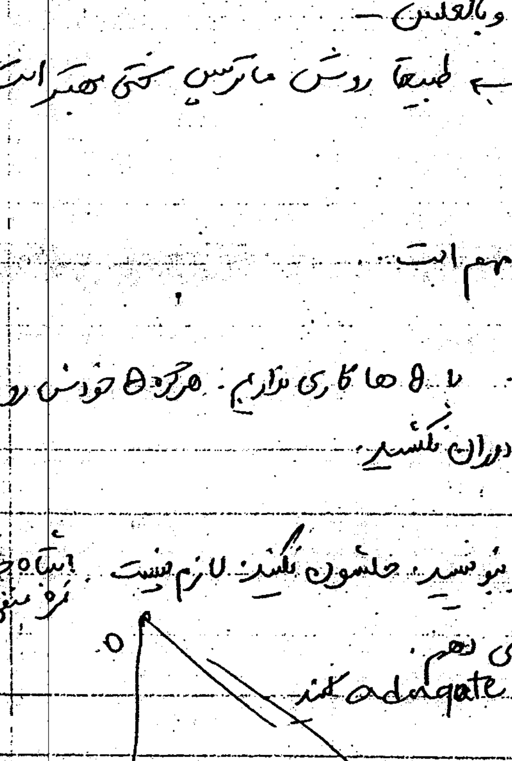
به شرایط مرزی دقت کنید. تکیه‌گاه گیردار را دوران نکشید.

ممکنه 5 تا شکل بدم بگم نقاشی بکشید.

لطفاً به صورت مسئله توجه کنید. می‌خوام معادلات تعادل را بنویسید. حلشون نکنید. لازم نیست. اینا رو حل کنید نمره منفی می‌دم.

می‌گم از شیب افت حل کنید اگر از کراس حل کنید هیچ نمره‌ای نمی‌دم.

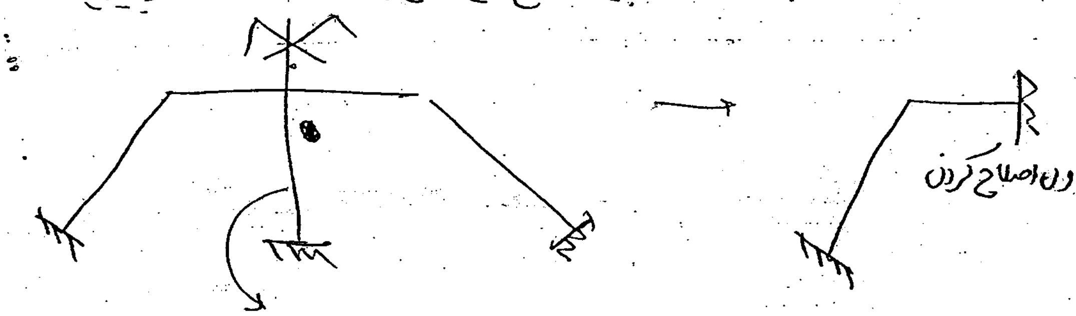
توصیه: از ساده‌ترین مسئله شروع کنید. 12 دقیقه adequate کمه



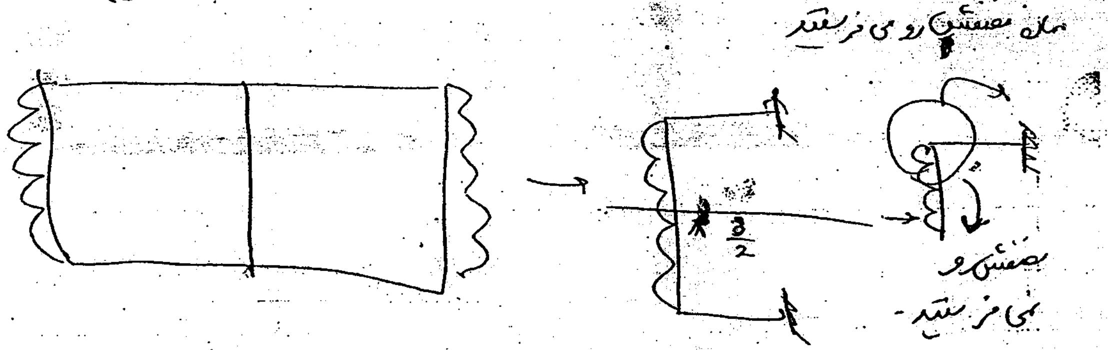
زمانی که حول O تعادل می‌نویسید مان‌های گیردار را فراموش نکنید

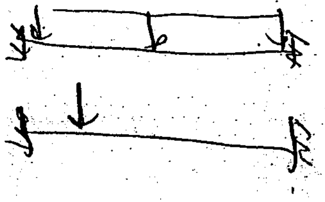
برش طبقه‌ای را می‌خواهید بیارید
نیروی قائم با M_1 و M_2 نگیرید. [illegible]

اگر تعداد دهانه‌ها فرد بود K/۲ را باید تصحیح کنید. زوج باشه نمی خواد کاری انجام بدید.



حالت های خاص را به شما می دهم. دقت کنید.





ممان های گیردار این حالات روبرو را بلد باشید.

اگر برای امتحان وقت با روش شیب افت ممان ها را بدست بیارید.

سیستم متقارن دادم. شما غیرمتقارن حل کنید وقت کم میارید.

اگر مسئله پیچیده بود، جلو رفتید و دیدید اگر جواب های متقارن می گیرید، برمی گردید و متقارن می نویسید.

سوال امتحان: در روش شیب افت استقلال را تعریف کنید. از کجا معلوم دو تا معادله independent اند. تاکید دترمینانش صفر نمیشه

How to write independent equation? ~~[illegible]~~

روش کراس: How to provide the independent equations to operate?

تفاوت روش کراس و کانی: تکرار یکی روی خود تغییرات است یکی روی کل.

چرا روی خود دوران ها کار نمی کنیم میریم روی ممان ها کار می کنیم؟ چون اثر دوران ها خیلی کم است.

سوال امتحان: شیب افت چرا روش تحلیلی است؟ سه تا جمله بنویسید.

$\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{8}$ را ثابت کنید.

اثبات روابط را محکم بنویسید. شکل ها را کامل بکشید.

اول باید بفهمید حرکت جانبی دارد یا ندارد

بارگذاری کلی ← جلوی حرکت را گرفت. عکس‌العمل‌ها را بدست آورد.

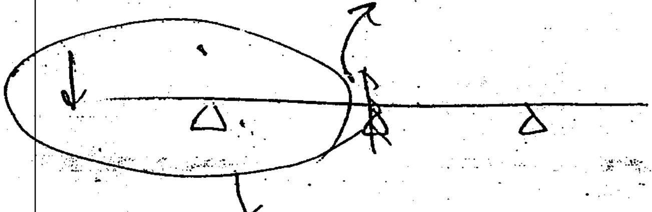
+

عکس عکس‌العمل‌ها را به سازه در گره‌ها وارد کنید و این رو هم دوباره حل کنید.

اگر بار در گره بود و Iها دو طرف برشان برابر بود باید anty symmetric ببرید. البته بار نباید وسط ستون باشد.

کانتا رو هم ببندید.

یک قوطی کافیه



حالا تحت می‌کند. تحلیل کنید.

سختی را از $\frac{3}{4}$ هم ضرب کنید.

کلاسیک توجه. ماتریسی:

تعریف ماتریس سختی چیه؟ یک درایه‌ش رو نشون بده؟ $F = K\delta$

تعریف K_{ij}؟ تغییر مکان واحد در امتداد j وارد می‌کنه - نیروی در جهت i را بدست بیارید

$\delta = FQ$

F_{ij}

$xAx^T > 0 \xrightarrow{\text{ثابت}}$ A مثبت معین چون

یعنی ماتریس سختی positive definite است.

کراس چرا converge می‌کنه؟ چون ماتریس سختی مثبت معین است

when is this applicable

$k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}$ ↗

چرا ماتریس سختی متقارن است.

از کتاب سفیدها مطالعه کنید.

$K_{ji} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_i}$

اول باید ثابت کنید چرا $K_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}$

when the order doesn't influence ...?

سیستم را decompose می کند به subsystem ها بعد تک تک بررسی
می کنیم بعد به هم می چسبانیم رفتار کلی سازه را predicte می کنیم

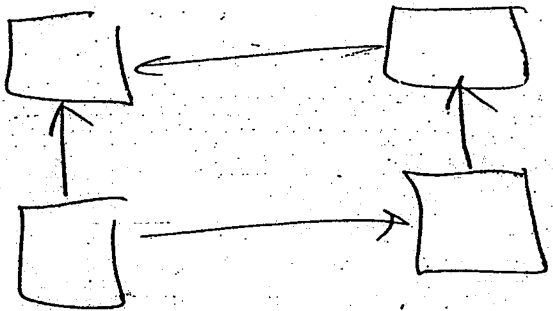
المان ها ← روش سختی
سازه ها ← پاره سازه ها
subsystem

البته یکسری شرایط مرزی را در نظر می گیریم.

چسباندن < تعادل / سازگاری

روش سختی : جدا جدا ماتریس های سختی را بدست آوریم بعد . . .

چرا سوار کردن ماتریس ها معادل است با ارضای تعادل و سازگاری
چیدمت



این فضاها را بکشید.

ص 282

روش نیروها :

نوع دوم - دیاگرام همان را بکشید، ← ماتریس b و B را بدون [illegible]
اثبات روابط ماتریس های تبدیل در روش سختی ها
ماتریس سختی Beam element با فرض صرف نظر کردن از تغییر شکل های برشی را بیابید

بیابید، از رابطه انرژی هم تا به حال کسی ننوشته حل کند.

پاره سازه ها : گام های پاره سازه ها را بنویسید. می خم
st affic condense ~~convention~~ را بنویسید. ماتریس سختی گره های مشترک را طوری تشکیل
می دهیم

Finite element

روش سختی:

سیستم را افراز: subsystem ← آنالیز ← تلفیق آنها ← روش پاره سازی

سیستم متشکل از سازه‌های مختلف، را افراز به قطعه‌ها. حل قطعه‌ها و بعد پیوند آنها به هم که باید با شرایط مرزی خاص به هم ببندیم مثلاً حالت ساده، گره‌ها را گیردار می‌کنیم و تغییر شکلها در قسمت‌ها را، به دست می‌آوریم و صحیح ← تعادل و سازگاری کل سیستم برقرار باشد.

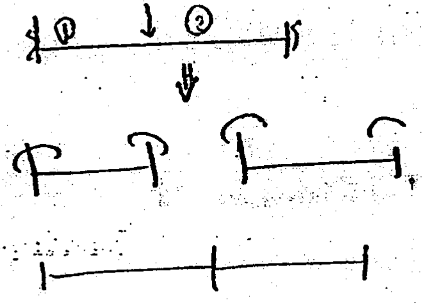
locally → کلی

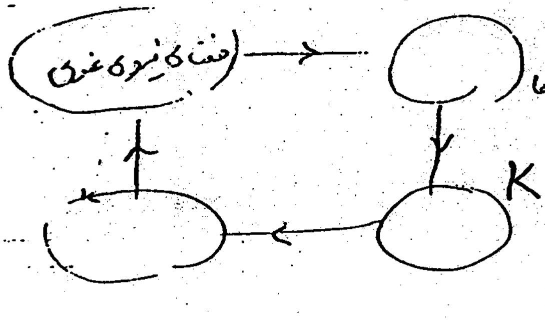
المان‌ها را جدا بررسی ← ماتریس سختی المان‌ها ← تلفیق ← ماتریس سختی کلی ← استفاده از تعادل و سازگاری

که ماتریس‌ها را در ماتریس کلی گذاشتیم

هر کدام را کجا استفاده کردیم. ← پیوست الف کتاب ماتریس

imp → exam





فلوچارت مهم
اسم ماتریس‌ها
و جفت‌ها

- تیر چند دهانه ← تقسیم می‌کنیم از المان نوع اول
المان دوم

سازه‌ها در واقع آنها ساده‌تر
سازه در برش چندگانه از آنها ها
سازه دقیقه‌ی دیگر اجزاء ها

با تحت اثر دیدن آنها داده
می‌کشیم و چگونگی سازه‌ها
به دست می‌آوریم.

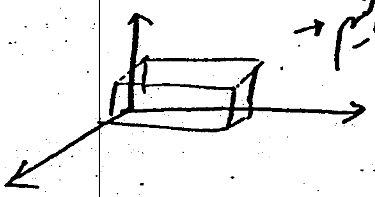
روش تغییر لگاز ، ما β و θ را برحسب مختصات جداگانه ماتریس 3×3 آن را بیرون میدهد

ماتریس سختی را برای beam element در دستگاه مختصات محلی ، ممکن است بدهیم

حساب ها را پیدا کنید

خود برش را صرف نظر نمی کنیم ولی در حالت خاص از تغییر شکل ناشی از برش صرف نظر می کنیم

از تغییر شکل برشی صرف نظر می کنیم ←

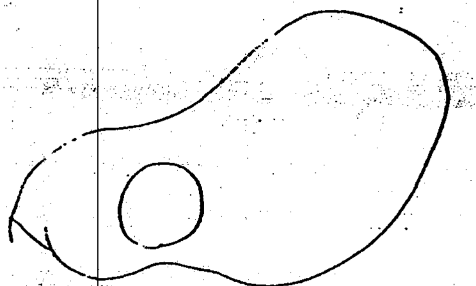


روش پاره سازه ها ← گام ها را باید بلد باشیم .

گفته می شود مثلاً static condensation را ببینید .

تبدیل به پاره سازه و بستن مرزها گره های

* خصوصیات پاره سازه را روی مرزهای مشترک متمرکز و درجات آزادی منتقل شده و از بین می روند .

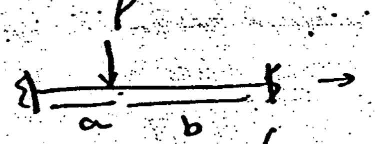


به 3 قسمت که بوزلی تقسیم م

مرزها مینیمم و حدود پاره سازه ها تقریباً برابر

روش programming ←

می توانیم ماتریس سختی یک المان را داریم .



→ مثلا: گشتاورها حول هر نقطه را باید بنویسید

اگر تعادل را متوجه نشدیم و سیستم متعادل را نامتعادل حل کنیم، وقت کم می‌آوریم.

← مسئله پیچیده ← وقتی بدون تعادل حل می‌کنیم باید از چند گام، نوع تعادل را متوجه می‌شویم

فصل 3) روش کراس

تفاوت کراس و کانی:

عملیات تکرار روی خود مجهول (کراس)، و کانی روی تغییرات مجهول

چرا روی ممان‌ها در روش کانی کار می‌کنیم؟

چرا روی ممان‌ها کار می‌کنیم؟ ← ممان‌ها در سازه‌های واقعی خیلی کوچک هستند و هنگام حل مسئله که گرد می‌کنیم اعداد حذف می‌شود.

در روش شیب - افت معادلات تعادل را می‌نوشتیم که باید مستقل باشند.

How to write independent eqn —

← چگونه می‌توان معادلات تعادل را مستقل از هم نوشت؟ چه نکاتی را باید لحاظ کنیم.

← اصل کار مجازی

← مکانیزم‌ها

چرا شیب افت روش مهمی است؟ در 3 جمله

در کراس مهم است که تصحیح‌ها را درست انجام دهیم.

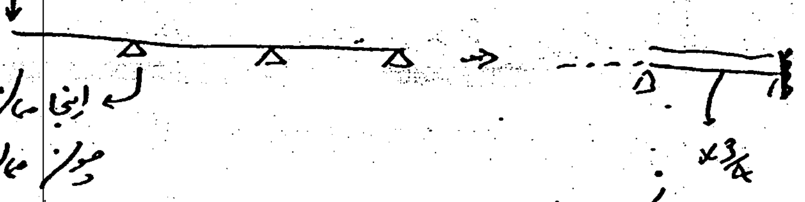
اگر مقطع متغیر باشد ← رابطه‌ها را نمی‌نویسیم ← شکل‌ها را دقیق بگیرید.

* حرکت جانبی. اگر قاب حرکت جانبی نداشت کار ساده.

اگر قاب حرکت جانبی داشت و بارگذاری کلی، باید گره را نسبت داد و عکس العمل را، درست کرده و حذف کرده با یک کراس دیگر حل کرد و جواب را، درست آورد که 2 حالت می‌شود. اگر تقارنی هم وجود داشت مثلاً قاب متقارن! [illegible]

اگر بار در طبقه وارد بشود، باید طوری حل کنیم که بار در طبقه وارد شود.

فصل 4) کانی



اینجا ممان صفر نیست ولی چون ممان را داریم

پس $\frac{3}{4}$ فقط برای انتهای آزاد نیست.

ولی ممان خط چین را باید بیرون حساب کنیم.

روش های ماتریسی

$[F]=[k_{ij}][\delta]$

تعریف ماتریس سختی و اینکه یک درایه چه چیزی را نشان می‌دهد؟

برای مشخص کردن ستون‌های $[k]$، $\delta_1=1$ و بقیه برابر صفر.

تغییر مکان واحد در امتداد یک درجه آزادی اعمال و نیرو در امتداد i را اندازه‌یابی می‌کنیم.

چون $k_{ij}=k_{ji}$ اگر برعکس حل کنیم تغییری نمی‌کند.

اگر بگویند k_{ji} که ماتریس نرمی، نیروی واحد را وارد و تغییر مکان را اندازه‌یابی

چرا ماتریس سختی مثبت معین است؟ وقتی $[k]$ را می‌نویسیم.

$\underbrace{[A][k][A]^{-1}}$ همواره مثبت

$k=\frac{1}{2}P\Delta$

چون k مثبت است ← ؟

چرا گرس همواره است؟ ← چون ماتریس سختی مثبت معین است. positive definit

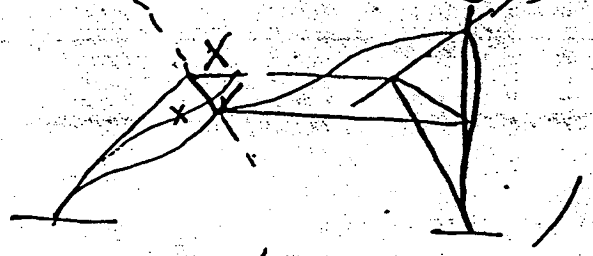
ماتریس سختی متقارن است چرا؟

$k_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial q_i \partial q_j}$ کاستیلیانو

کمال باید ثابت کنیم $k_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial q_i \partial q_j}$ و باید بگوییم چرا

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial q_i \partial q_j}=\frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_i}}$$ چرا؟

2- توجه به شرایط مرزی هنگام کشیدن تغییر شکل سازه

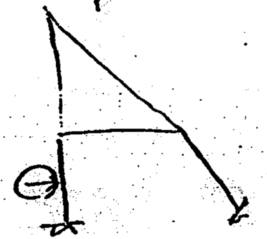


* جمیع مسائل حل شده را بنویسید و حل کنید و همه را بنویسید و اگر همه را نتوانستید برای جواب ها ببینید اگر ، حتماً باید از روش گفته شده حل کرد مثلاً اگر گفت کراس ، فقط کراس.

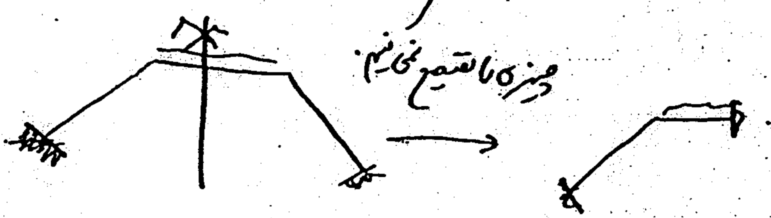
جای را اشتباه می کنیم :

وقتی برش را بدست می آوریم ، جابجایی را در نظر نمی گیریم ... و

یا بعد از تقاطع خطوط علاوه بر برش باید بار جابجایی را دوباره لحاظ کنیم و ممان های انتهایی اعضا را هم بنویسیم.



تقارن
زوج ← گره گیردار عمل می کند و اما لنگر [illegible] تغییری نمی کند
فرد ← از فرم [illegible] استفاده می کنیم



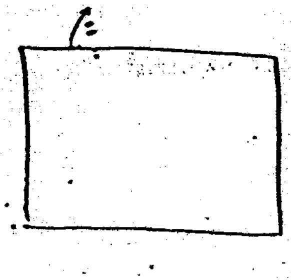
چیزی را تقسیم نمی کنیم.

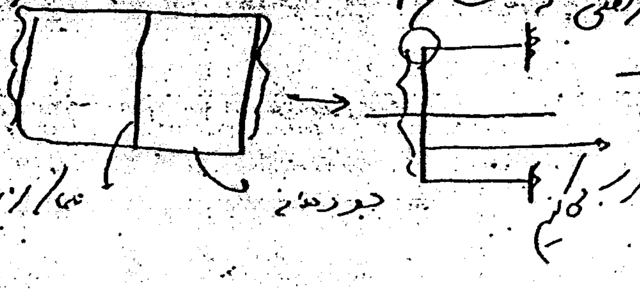
دیگه نیروی محوری را تحمل می کند ولی ما نادیده می گیریم

طراحی سوالات حالتهای خاص که خیلی ساده انجام بشود

گر دیدیم باید اعداد را پخش کنیم چون ضریب تقسیمی ندارد.

یک دهانه را در $\frac{1}{2}$ ضرب





نصف از عضو

جور دهانه

اما تاج را تقسیم کرده بود چیزی نمی خواستیم ولی اما از افقی که نصف

این را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم

بنام خداوند مهربان 10,10,12

ماتریس

۱- درجه نامعینی استاتیکی سازه ← ابعاد سختی و نرمی سازه را می دهد.

degrees of freedom → درجات آزادی سازه

وقتی ماتریس سختی را تشکیل می دهیم بدون توجه به ایده آل سازی است

هر کدام از ماتریس ها کوچکتر ← تعداد معادلات کمتر.

2- conditioning ماتریس را باید ببینیم چگونه است.

اگر ماتریس سختی مریض الحال باشد ← ماتریس نرمی خیلی خوب است.

اگر ماتریس نرمی مریض الحال باشد ← ماتریس سختی خوش وضع است.

در حالت متعارف هیچکدام مریض نیست چون طراحی برای سازه اعضایی

اندازه متناسب دارند. ولی وقتی تغییراتی ایجاد می کنیم مثلاً یک المان خیلی سخت یا

فنر خیلی نرم اضافه کنیم از حالت well condition خارج می شود.

روش محاسبات ماتریسی

3- anablity for computer: مناسب بودن برای برنامه کامپیوتری.

نیروها، تنش و ... حاصل کل.

رابطه تنش، کرنش و ارتباطی بین تغییر مکان و تغییر شکل

فصل ۴) شیب افت

compatable state of deformation

۱) سازگاری تغییر شکل ها هماهنگ و سازگار با سازه

← به دست آمدن رابطه ای بین Δ_i ها و کار جنبشی ها، اگر معلوم نشد باید

معادلات جبری حل کنیم و با θ_i ها کاری نداریم فقط Δ_i ها را، جهت مثبت Δ_i ها

ایرا شد

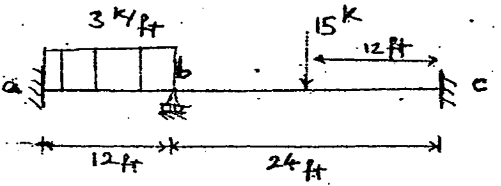
A

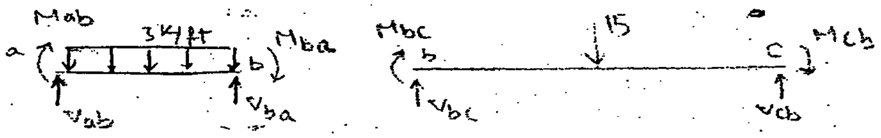
تحلیل II

مصطفی صانعیان
88481272

تمرینات سری اول (روش شیب - افت)

1ـ 12 مطلوبست تحلیل تیر نشان داده شده در شکل (12-20) ، با استفاده از روش شیب ـ افت.
منحنی های نیروی برشی ولنگر خمشی را نیز رسم کنید. I= ثابت





$$M_{ba} = 2(2\theta_b) + \frac{3\times 12^2}{12} = 4\theta_b + 36$$

$$M_{bc} = 1(2\theta_b) - \frac{15\times 24}{8} = 2\theta_b - 45$$

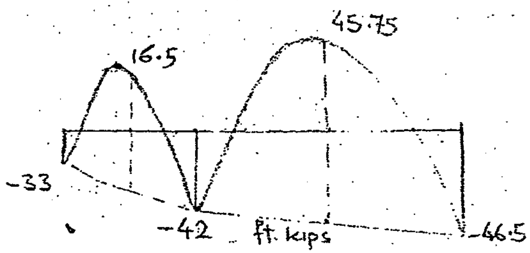
$$\Sigma M_b = 0 \rightarrow M_{ba} + M_{bc} = 0 \rightarrow 6\theta_b - 9 = 0 \rightarrow \theta_b = \frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} M_{ba} = 42 \text{ ft.kips} ✓ \\ M_{bc} = -42 \text{ ft.kips} ✓ \end{cases}$$

$$M_{ab} = 2(\theta_b) - \frac{3\times 12^2}{12} = -33 \text{ ft.kips} ✓$$

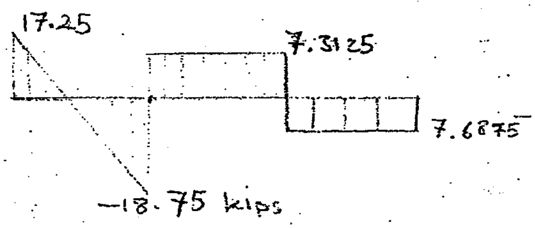
$$M_{cb} = 1(\theta_b) + \frac{15\times 24}{8} = 46.5 \text{ ft. kips} ✓$$

$$\Sigma M_b = 0 \rightarrow M_{ab} + 12V_{ab} - \frac{3\times 12^2}{2} + M_{ba} = 0 \rightarrow V_{ab} = 17.25 \text{ kips}$$

$$\Sigma M_b = 0 \rightarrow M_{bc} + 15\times 12 + M_{cb} - 24V_{cb} = 0 \rightarrow V_{cb} = +7.6875 \text{kips}$$



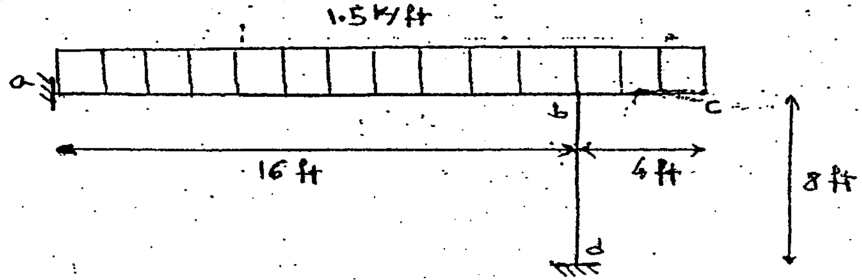
دیاگرام ممان



دیاگرام برش

12-2 شکل (12-21) یک قاب با مقاطع ثابت را نشان می دهد. با استفاده از روش شیب - افت تمام لنگرهای انتهائی اعضاء این قاب را پیدا کرده و منحنی تغییر شکل آنرا رسم کنید.

$I =$ ثابت



$$M_{ab} = 1\,(\theta_B) - \frac{1.5\times16^2}{12} = \theta_B - 32$$

$$M_{ba} = 1\,(2\theta_B) + \frac{1.5\times16^2}{12} = 2\theta_B + 32$$

$$M_{bc} = -\frac{1.5\times4^2}{2} = -12 \text{ ft.kps}$$

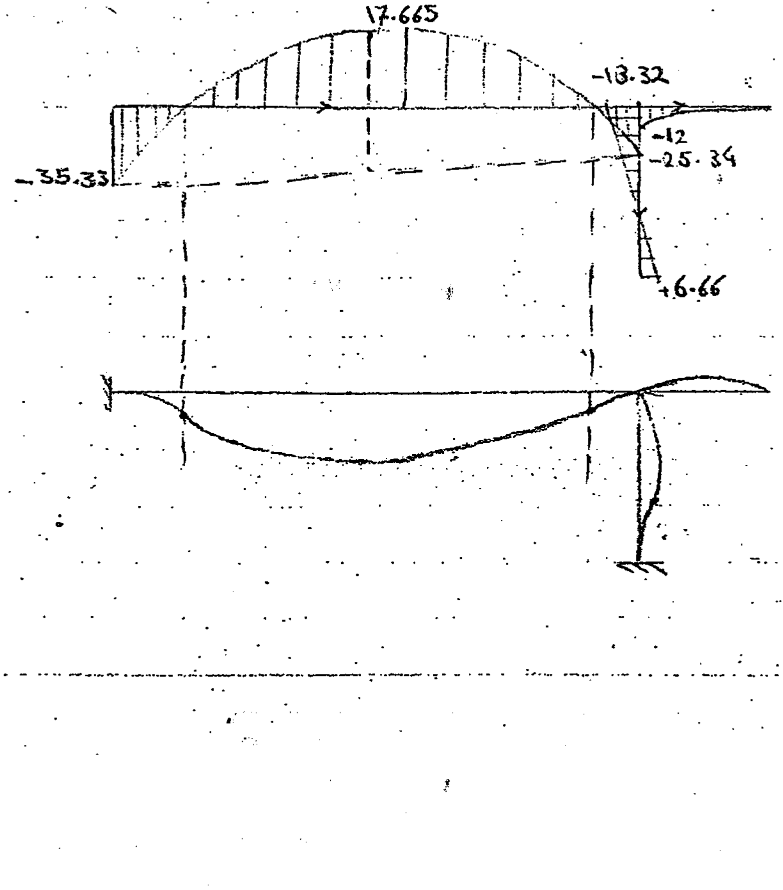
$$M_{bd} = 2\,(2\theta_B) = 4\theta_B$$

$$M_{db} = 2\,(\theta_B) = 2\theta_B$$

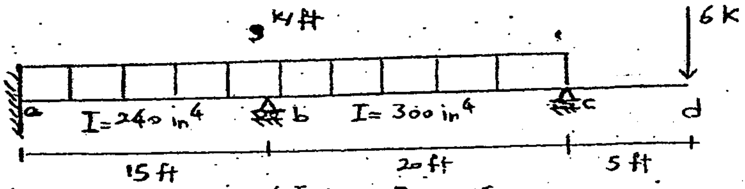
$$\frac{2EI}{16} = 1$$

$$\Sigma M_b = 0 \rightarrow M_{ba} + M_{bc} + M_{bd} = 0 \rightarrow 2\theta_B + 32 + 4\theta_B - 12 = 0 \rightarrow \theta_B = -3.33$$

$$\rightarrow M_{ab} = -35.33 \quad M_{ba} = 25.34 \quad M_{bd} = -13.32 \quad M_{db} = -6.66$$



12-3 تیر شکل (12-22) را با استفاده از روش شیب - افت تحلیل کنید. منحنی های نیروی برشی و لنگر خمشی آنرا رسم کنید.



$2E\left(\frac{I}{L}\right)_{ab} = \frac{240}{15} = 16 \qquad 2E\left(\frac{I}{L}\right)_{bc} = \frac{300}{20} = 15$ نسبی

$M_{ab} = 16(\theta_b) - \frac{3\times15^2}{12} = 16\theta_b - 56.25$

$M_{ba} = 16(2\theta_b) + \frac{3\times15^2}{12} = 32\theta_b + 56.25$

$M_{bc} = 15(2\theta_b + \theta_c) - \frac{3\times20^2}{12} = 30\theta_b + 15\theta_c - 100$

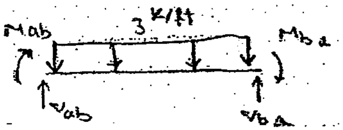
$M_{cb} = 15(2\theta_c + \theta_b) + \frac{3\times20^2}{12} = 15\theta_b + 30\theta_c + 100$

$M_{cd} = -30$ ft. kips

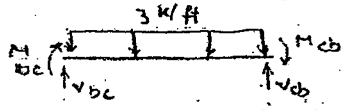
$\sum M_b = 0 \longrightarrow M_{ba} + M_{bc} = 0 \longrightarrow 32\theta_b + 56.25 + 30\theta_b + 15\theta_c - 100 = 0$ (1)

$\sum M_c = 0 \longrightarrow M_{cb} + M_{cd} = 0 \longrightarrow 30\theta_c + 15\theta_b + 100 - 30 = 0$ (2)

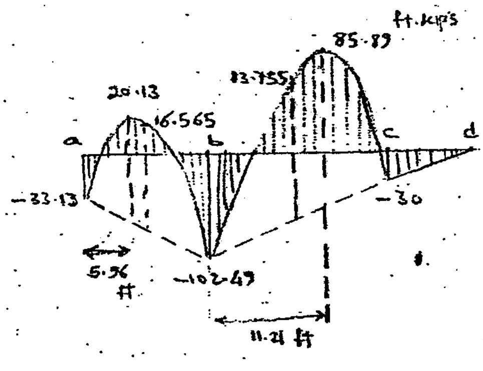
$(1), (2) \longrightarrow \begin{matrix}\theta_b = 1.445 \\ \theta_c = -3.056\end{matrix} \rightarrow M_{ab} = -33.13 \ , \ M_{ba} = -M_{bc} = 102.49 \ , \ M_{cb} = -M_{cd} = 30$



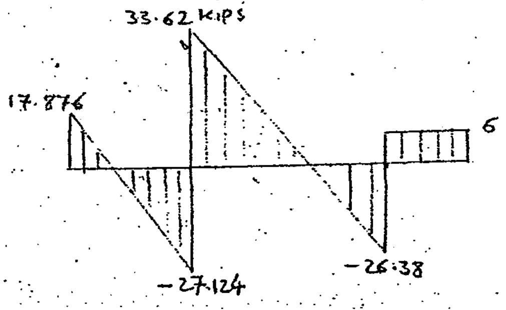
$M_{ab} + M_{ba} + 15V_{ab} - \frac{3\times15^2}{2} = 0 \longrightarrow V_{ab} = 17.876$ Kips



$M_{bc} + 20V_{bc} - \frac{3\times20^2}{2} + M_{cb} = 0 \longrightarrow V_{bc} = 33.62$ Kips

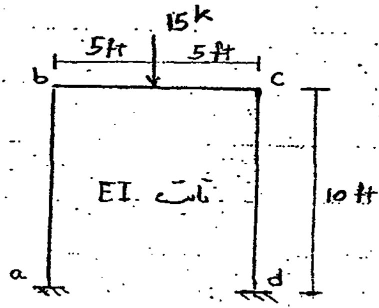


دیاگرام ممان



دیاگرام برش

12-4 لنگرهای انتهایی قاب پیوسته شکل (12-23) را با روش شیب - افت محاسبه کنید، منحنی لنگر خمشی و منحنی تغییر شکل تیر را نیز رسم کنید:


15k
5ft
5ft
b
c
EI ثابت
10 ft
a
d

بنا بر تقارن :

$R_{ab} = R_{bc} = R_{cd} = 0$

$\theta_b = -\theta_c \quad M_{ba} = -M_{cd}$

$M_{bc} = -M_{cb} \quad M_{ab} = -M_{dc}$

فرض می کنیم $2E\frac{I}{10} = 1$

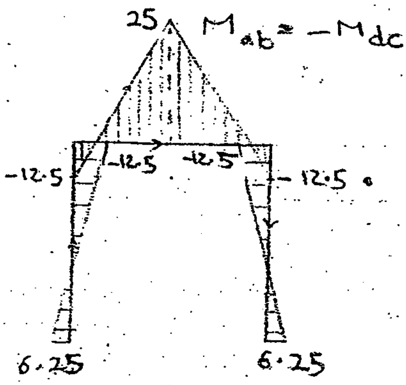
$M_{ba} = 1(2\theta_b)$

$M_{bc} = 1(2\theta_b - \theta_b - 0) - \frac{15\times10}{8} = \theta_b - 18.75$

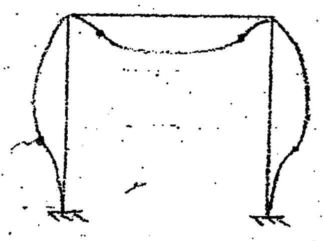
$\Sigma M_b = 0 \rightarrow M_{ba} + M_{bc} = 0 \rightarrow 3\theta_b = 18.75 \rightarrow \theta_b = 6.25$

$\rightarrow M_{ba} = -M_{cd} = -M_{bc} = M_{cb} = 12.5$ ft. kips

$M_{ab} = -M_{dc} = \theta_b = 6.25$ ft. kips

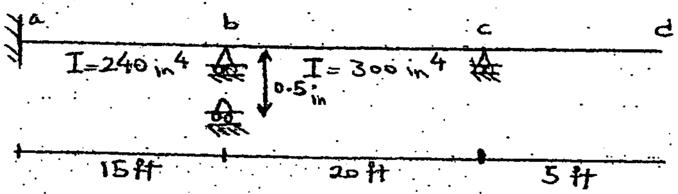

25
-12.5
-12.5
-12.5
-12.5
6.25
6.25

منحنی لنگر خمشی



منحنی تغییر شکل

12-5 در شکل (12-22) تمام بارها را حذف کرده و فرض کنید تکیه‌گاه b به اندازه 0.5 in نشست کند. لنگرهای انتهایی اعضاء را با روش شیب - افت تعیین کنید. مقدار $E = 30000 \frac{kips}{in^2}$ فرض شود.


a
b
c
d
I=240 in4
I= 300 in4
0.5 in
15 ft
20 ft
5 ft

$R_{ab} = \frac{0.5}{15\times12} \qquad R_{bc} = -\frac{0.5}{20\times12}$

$\left(2E\frac{I}{L}\right)_{ab} = 2\times30{,}000\times\frac{240}{15\times12} = 80{,}000$

$\left(2E\frac{I}{L}\right)_{bc} = 2\times30{,}000\times\frac{300}{20\times12} = 75{,}000$

$M_{ab} = 80{,}000\left(\theta_b - 3\,\frac{0.5}{15\times12}\right)$

$M_{ba} = 80{,}000\left(2\theta_b - 3\,\frac{0.5}{15\times12}\right)$

$M_{bc} = 75{,}000\left(2\theta_b + \theta_c + 3\,\frac{0.5}{20\times12}\right)$

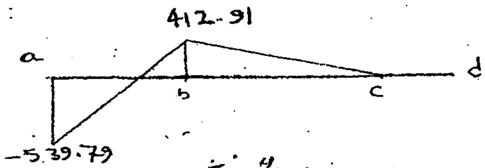
$M_{cb} = 75{,}000\left(2\theta_c + \theta_b + 3\,\frac{0.5}{20\times12}\right) = 0 \quad (1)$

$\Sigma M_b = 0 \longrightarrow M_{bc} + M_{ba} = 0 \quad (2)$

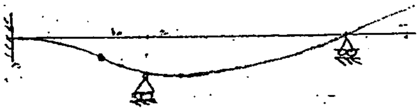
$(1),(2) \longrightarrow \theta_b = 1.586\times10^{-3} \qquad \theta_c = -3.918\times10^{-3}$

$\longrightarrow M_{ab} = -539.79$ in.kips

$M_{ba} = -M_{bc} = -412.91$ in.kips

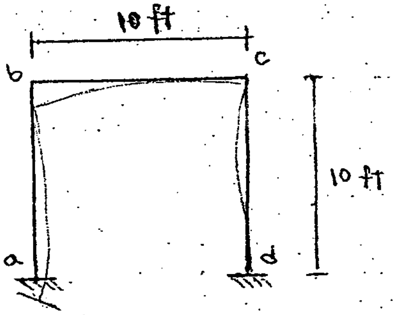


منحنی لنگر خمشی



منحنی تغییر شکل

12-6 بارگذاری قاب شکل (12-23) را حذف کرده و فرض کنید تکیه‌گاه a به اندازه 0.002 رادیان در جهت عقربه‌های ساعت دوران کرده و به اندازه 0.1 in نشست کند. منحنی لنگر خمشی قاب را رسم کنید. (مقدار $EI = 10{,}000\ \text{kips.ft}^2$ فرض شود.



$R_{ab} = R_{cd} = 0$

$R_{bc} = -\frac{\Delta}{10} = -\frac{0.1}{10\times12} = -\frac{1}{1200}$

$M_{ab} = 2\times\frac{10000}{10}(2\theta_a + \theta_b)$

$M_{ba} = 2\times\frac{10{,}000}{10}(2\theta_b + \theta_a)$

$M_{bc} = 2\times\frac{10000}{10}\left(2\theta_b + \theta_c + \frac{3}{1200}\right)$

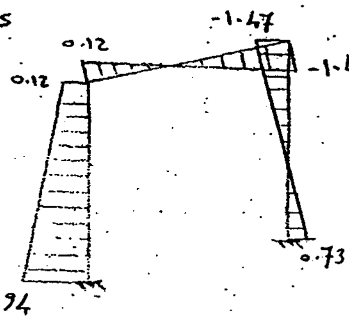
$M_{cb} = 2\times\frac{10000}{10}\left(2\theta_c + \theta_b + \frac{3}{1200}\right)$

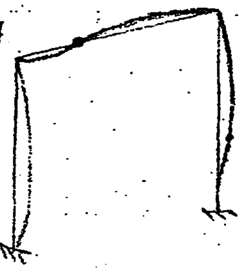
$M_{cd} = 2\times\frac{10000}{10}(2\theta_c)$

$M_{dc} = 2\times\frac{10000}{10}(\theta_c)$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma M_b = 0 \rightarrow M_{ba} + M_{bc} = 0\\ \Sigma M_c = 0 \rightarrow M_{cb} + M_{cd} = 0\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\theta_b = -1.03\times10^{-3}\ \text{rad}\\ \theta_c = -3.67\times10^{-4}\ \text{rad}\end{array}\right.$$

$$\rightarrow\begin{cases} M_{ab}=5.94 \text{ ft.kips} \\ M_{ba}=-0.12 \\ M_{bc}=0.12 \\ M_{cb}=1.472 \\ M_{cd}=-1.472 \\ M_{dc}=-0.734 \end{cases}$$

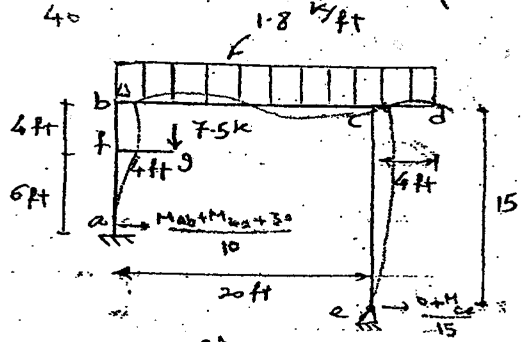

-1.47
0.12
0.12
-1.47
0.73
5.94

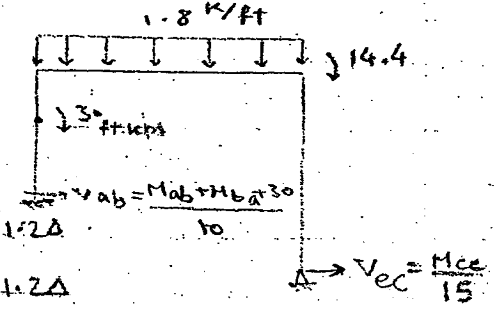


12-7 هر کدام از قاب‌های شکل (12-24) را با روش شیب - افت مورد تجزیه و تحلیل قرار داده، لنگر خمشی آن‌ها را رسم کنید. (I= ثابت)

$\frac{2EI}{40}=1$

کنسول cd و gf را جدا می‌کنیم و شکل جدید را رسم می‌کنیم:


1.8 K/ft
b
c
d
f
g
a
e
7.5k
4ft
4ft
6ft
4ft
15 ft
20 ft
$\frac{M_{ab}+M_{ba}+30}{10}$
$\frac{0+M_{ce}}{15}$


1.8 K/ft
14.4
30 ft.kips
$V_{ab}=\frac{M_{ab}+M_{ba}+30}{10}$
Δ
$V_{ec}=\frac{M_{ce}}{15}$

$$M_{ab}=4(\theta_b-\frac{3\Delta}{10})+\frac{30\times4\times(12-4)}{10^2}=4\theta_b+9.6-1.2\Delta$$

$$M_{ba}=4(2\theta_b-\frac{3\Delta}{10})+\frac{30\times6(8-6)}{10^2}=8\theta_b+3.6-1.2\Delta$$

$$M_{bc}=2(2\theta_b+\theta_c)-\frac{1.8\times20^2}{12}=4\theta_b+2\theta_c-60$$

$$M_{cb}=2(2\theta_c+\theta_b)+\frac{1.8\times20^2}{12}=4\theta_c+2\theta_b+60$$

$$M_{ce}=\frac{40}{15}(2\theta_c+\theta_e-3\frac{\Delta}{15})=\frac{16}{3}\theta_c+\frac{8}{3}\theta_e-\frac{8\Delta}{15}$$

$$M_{ec}=\frac{40}{15}(2\theta_e+\theta_c-\frac{3\Delta}{15})=0 \quad (1)$$

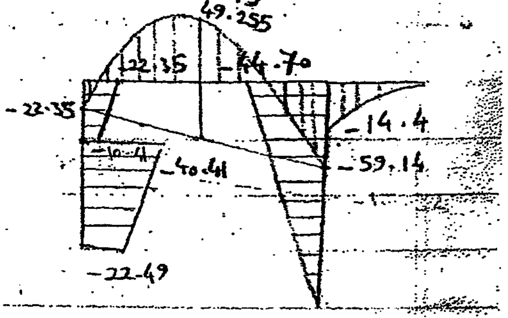
$$\sum_b M=0 \rightarrow M_{ba}+M_{bc}=0 \rightarrow 12\theta_b+2\theta_c-1.2\Delta-56.4=0 \quad (2)$$

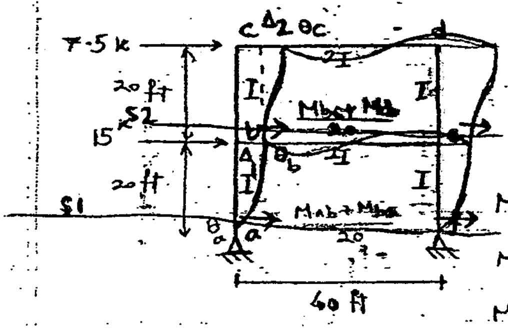
$$\sum_c M=0 \rightarrow M_{cb}+M_{ce}-14.4=0 \rightarrow \frac{28}{3}\theta_c+2\theta_b+\frac{8}{3}\theta_e-\frac{8\Delta}{15}+60-14.4=0 \quad (3)$$

$$\sum F_x=0 \rightarrow \frac{M_{ab}+M_{ba}+30}{10}+\frac{M_{ce}}{15}=0 \rightarrow \frac{12\theta_b-2.4\Delta+43.2}{10}+\frac{\frac{16}{3}\theta_c+\frac{8}{3}\theta_e-\frac{8\Delta}{15}}{15}=0 \quad (4)$$

$$\rightarrow\begin{cases} \theta_b=12.71 \\ \theta_c=-6.57 \\ \theta_e=10.2 \\ \Delta=69.11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_{ab}=-22.49 \text{ ft.kips} \\ M_{ba}=+22.35 \\ M_{bc}=-22.35 \\ M_{cb}=59.14 \\ M_{ce}=-44.70 \end{cases}$$

$M_{ec}=0$


49.255
22.35
-44.70
-22.35
-14.4
-10.41
-40.41
-59.14
-22.49


7.5 k
c
Δ_2
θ_c
d
2I
I
I
20 ft
S2
15 k
$M_{bc}+M_{cb}$
20
b
Δ_1
θ_b
2I
I
I
20 ft
S1
$M_{ab}+M_{ba}$
20
θ_a
a
40 ft

شرایط : $\theta_a=\theta_f$, $\theta_b=\theta_e$, $\theta_c=\theta_d$

$2E\frac{I}{20}=1$

$2E\frac{2I}{40}=1$

$M_{fe}=M_{ab}=1\left(2\theta_a+\theta_b-3\frac{\Delta_1}{20}\right)=0$ (1)

$M_{ef}=M_{ba}=1\left(2\theta_b+\theta_a-3\frac{\Delta_1}{20}\right)$

$M_{be}=M_{eb}=1(2\theta_b+\theta_b)=3\theta_b$

$M_{bc}=M_{ed}=1\left(2\theta_b+\theta_c-3\frac{\Delta_2}{20}\right)$

$M_{cb}=M_{de}=1\left(2\theta_c+\theta_b-3\frac{\Delta_2}{20}\right)$

$M_{cd}=M_{dc}=1(2\theta_c+\theta_c)=3\theta_c$

$\Sigma M_b=0 \rightarrow M_{ba}+M_{be}+M_{bc}=0 \rightarrow 7\theta_b+\theta_a+\theta_c-\frac{3\Delta_1}{20}-\frac{3\Delta_2}{20}=0$ (2)

$\Sigma M_c=0 \rightarrow M_{cb}+M_{cd}=0 \rightarrow 5\theta_c+\theta_b-\frac{3\Delta_2}{20}=0$ (3)

S1 $\Sigma F_x=0 \rightarrow 22.5+\cancel{2}\left(\frac{0+2\theta_b+\theta_a-\frac{3\Delta_1}{20}}{\cancel{20}\ 10}\right)=0$ (4)

S2 $\Sigma F_x=0 \rightarrow 7.5+\cancel{2}\left(\frac{3\theta_b+3\theta_c-6\frac{\Delta_2}{20}}{\cancel{20}\ 10}\right)=0$ (5)

(1) , (2) , (3) , (4) , (5) $\rightarrow$

x $\theta_a=303.125$

$\theta_b=78.125$

z $\theta_c=21.875$

w $\Delta_1=4562.5$

v $\Delta_2=1250$

$\rightarrow$

$M_{ab}=M_{fe}=0$

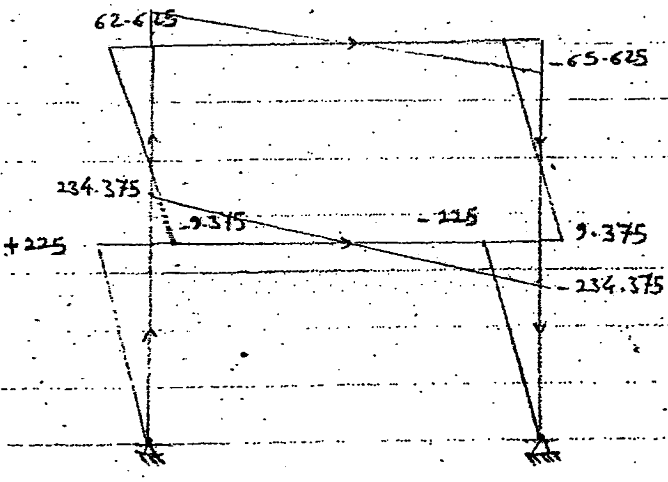
$M_{ef}=M_{ba}=-225$

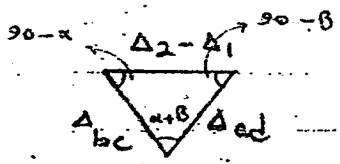
$M_{be}=M_{eb}=234.375$

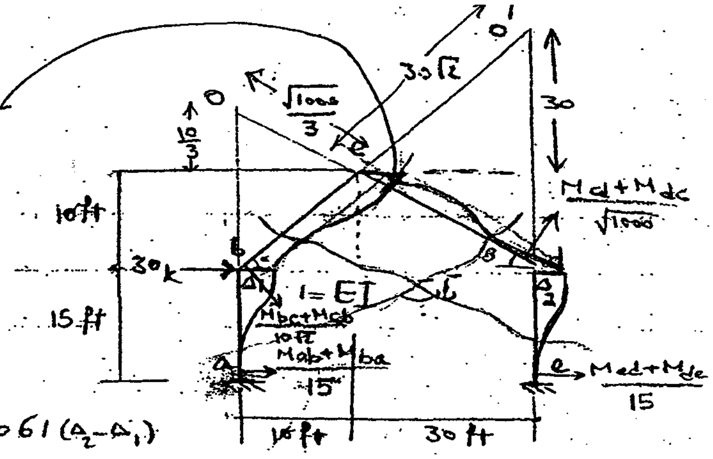
$M_{bc}=M_{ed}=-9.375$

$M_{cb}=M_{de}=-65.625$

$M_{cd}=M_{dc}=65.625$


62.625
-65.625
234.375
-9.375
-225
9.375
+225
-234.375





$$\Delta_{bc}=\frac{\sin(90-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}(\Delta_2-\Delta_1)$$

$$=\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}(\Delta_2-\Delta_1)=1.061(\Delta_2-\Delta_1)$$

$$\Delta_{cd}=\frac{\sin(90-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}(\Delta_2-\Delta_1)$$

$\alpha=45°$ $\quad \beta=tg^{-1}\frac{10}{30}=18.435$

$R_{ab}=\frac{\Delta_1}{15}$ $\quad R_{bc}=\frac{\Delta_{bc}}{10\sqrt2}$ $\quad R_{cd}=-\frac{\Delta_{cd}}{\sqrt{1000}}$ $\quad R_{ed}=\frac{\Delta_2}{15}$

$$=\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}(\Delta_2-\Delta_1)=0.791(\Delta_2-\Delta_1)$$

$$M_{ab}=\frac{1}{15}\left(\theta_b-3\frac{\Delta_1}{15}\right)=\frac{\theta_b}{15}-\frac{3\Delta_1}{\cancel{225}\,75}$$

$$M_{ba}=\frac{1}{15}\left(2\theta_b-3\frac{\Delta_1}{15}\right)=\frac{2\theta_b}{15}-\frac{3\Delta_1}{225}$$

$$M_{bc}=\frac{1}{10\sqrt2}\left(2\theta_b+\theta_c-3\frac{\Delta_{bc}}{10\sqrt2}\right)=\frac{2\theta_b}{10\sqrt2}+\frac{\theta_c}{10\sqrt2}-\frac{3}{200}1.061(\Delta_2-\Delta_1)$$

$$M_{cb}=\frac{1}{10\sqrt2}\left(2\theta_c+\theta_b-3\frac{\Delta_{bc}}{10\sqrt2}\right)=\frac{2\theta_c}{10\sqrt2}+\frac{\theta_b}{10\sqrt2}-\frac{3}{200}1.061(\Delta_2-\Delta_1)$$

$$M_{cd}=\frac{1}{\sqrt{1000}}\left(2\theta_c+\theta_d-3\frac{-\Delta_{cd}}{\sqrt{1000}}\right)=\frac{2\theta_c}{\sqrt{1000}}+\frac{\theta_d}{\sqrt{1000}}+\frac{3}{1000}0.791(\Delta_2-\Delta_1)$$

$$M_{dc}=\frac{1}{\sqrt{1000}}\left(2\theta_d+\theta_c-3\frac{-\Delta_{cd}}{\sqrt{1000}}\right)=\frac{2\theta_d+\theta_c-3}{\sqrt{1000}}+\frac{3}{1000}0.791(\Delta_2-\Delta_1)$$

$$M_{de}=\frac{1}{15}\left(2\theta_d-3\frac{\Delta_2}{15}\right)=\frac{2\theta_d}{15}-\frac{3\Delta_2}{225}$$

$$M_{ed}=\frac{1}{15}\left(\theta_d-3\frac{\Delta_2}{15}\right)=\frac{\theta_d}{15}-\frac{3\Delta_2}{225}$$

$$\sum M_b=0\rightarrow M_{ba}+M_{bc}=0\rightarrow\frac{2\theta_b}{15}-\frac{3\Delta_1}{225}+\frac{2\theta_b}{10\sqrt2}+\frac{\theta_c}{10\sqrt2}-\frac{3.183}{200}(\Delta_2-\Delta_1)=0\quad(1)$$

$$\sum M_c=0\rightarrow M_{cb}+M'_{cd}=0\rightarrow\frac{2\theta_c}{10\sqrt2}+\frac{\theta_b}{10\sqrt2}-\frac{3.183}{200}(\Delta_2-\Delta_1)+\frac{2\theta_c+\theta_d}{\sqrt{1000}}+\frac{2.373}{1000}(\Delta_2-\Delta_1)=0\quad(2)$$

$$\sum M_d=0\rightarrow M_{dc}+M_{de}=0\rightarrow\frac{2\theta_d+\theta_c-3}{\sqrt{1000}}+\frac{2.373}{1000}(\Delta_2-\Delta_1)+\frac{2\theta_d}{15}-\frac{3\Delta_2}{225}=0\quad(3)$$

$$\sum M_0=0\rightarrow M_{ab}+\frac{M_{ab}+M_{ba}}{15}\left(25+\frac{10}{3}\right)-30\left(10+\frac{10}{3}\right)-\frac{M_{cd}+M_{dc}}{\sqrt{1000}}\left(\frac{\sqrt{1000}}{3}+\sqrt{1000}\right)+M_{dc}=0$$

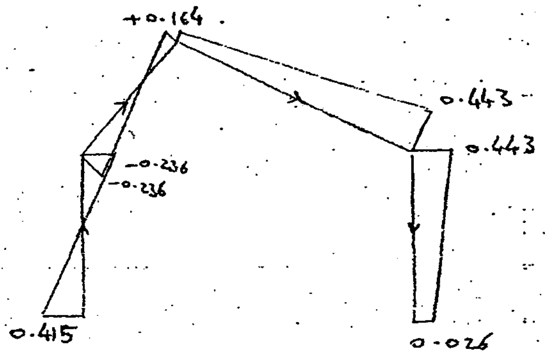
$$\sum M_0'=0\rightarrow M_{bc}-\frac{M_{bc}+M_{cb}}{10\sqrt2}(10\sqrt2+30\sqrt2)+M_{ed}-\frac{M_{ed}+M_{de}}{\cancel{15}\;3}55=0$$

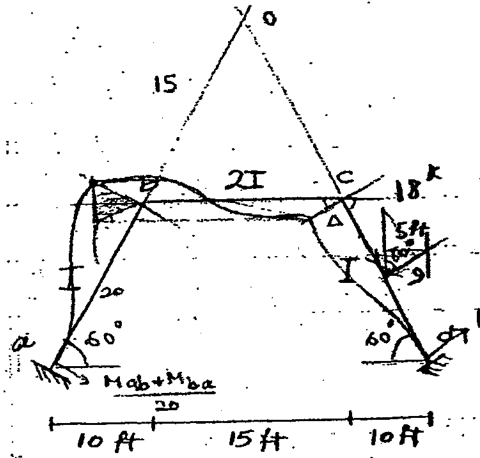
$$\sum M_0=0\rightarrow\frac{\theta_b}{5}-\frac{\Delta_1}{75}-\left(\frac{\theta_b}{5}-\frac{2\Delta_1}{75}\right)\left(\frac{5}{3}+\frac{2}{9}\right)-400-\frac{4}{3}\left(\frac{3\theta_c+3\theta_d-6}{\sqrt{1000}}+\frac{5.826}{1000}(\Delta_2-\Delta_1)\right)$$
$$+\frac{2\theta_d+\theta_c-3}{\sqrt{1000}}+\frac{2.373}{1000}(\Delta_2-\Delta_1)=0\quad(4)$$

$$\frac{2\theta_b+\theta_c}{10\sqrt2}-\frac{3.183}{200}(\Delta_2-\Delta_1)-4\left(\frac{3\theta_b+3\theta_c}{10\sqrt2}-\frac{6.366}{200}(\Delta_2-\Delta_1)\right)+\frac{\theta_d}{15}-\frac{\Delta_2}{75}$$
$$-\frac{11}{3}\left(\frac{\theta_d}{5}-\frac{2\Delta_2}{75}\right)=0\quad(5)$$

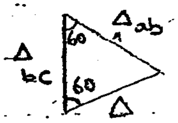
$$(1),(2),(3),(4),(5) \rightarrow \begin{cases} x & \theta_b = -2.695 \\ y & \theta_c = 1.608 \\ z & \theta_d = -6.786 \\ w & \Delta_1 = -44.64 \\ v & \Delta_2 = -32 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} M_{ab} = 0.415 \\ M_{ba} = -M_{bc} = 0.236 \\ M_{cb} = -M_{cd} = -0.164 \\ M_{dc} = -M_{de} = -0.443 \\ M_{ed} = -0.026 \end{cases}$$


+0.164
0.443
0.443
-0.236
-0.236
0.415
0.026



$\frac{M_{cd}+M_{dc}+90}{20}$



$\Delta_{ab} = \Delta_{bc} = \Delta$

$R_{ab} = -\frac{\Delta_{ab}}{20} \qquad (2E\frac{I}{20})_{ab} = 3$

$R_{bc} = +\frac{\Delta_{bc}}{15} \qquad (2E\frac{2I}{15})_{bc} = 8$

$R_{cd} = -\frac{\Delta}{20} \qquad (2E\frac{I}{20})_{cd} = 3$

$2E\frac{I}{60} = 1$

$M_{ab} = 3(\theta_b - 3\frac{-\Delta}{20}) = 3\theta_b + \frac{9\Delta}{20}$

$M_{ba} = 3(2\theta_b - 3\frac{-\Delta}{20}) = 6\theta_b + \frac{9\Delta}{20}$

$M_{bc} = 8(2\theta_b + \theta_c - \cancel{3}\frac{\Delta}{\cancel{15}\,5}) = 16\theta_b + 8\theta_c - \frac{8\Delta}{5}$

$M_{cb} = 8(2\theta_c + \theta_b - \cancel{3}\frac{\Delta}{\cancel{15}\,5}) = 16\theta_c + 8\theta_b - \frac{8\Delta}{5}$

$M_{cd} = 3(2\theta_c - 3\frac{-\Delta}{20}) - \frac{9\times\overset{5}{\cancel{20}}}{\cancel{8}\,2} = 6\theta_c + \frac{9\Delta}{20} - \frac{45}{2}$

$M_{dc} = 3(\theta_c - 3\frac{-\Delta}{20}) + \frac{9\times 20}{8} = 3\theta_c + \frac{9\Delta}{20} + \frac{45}{2}$

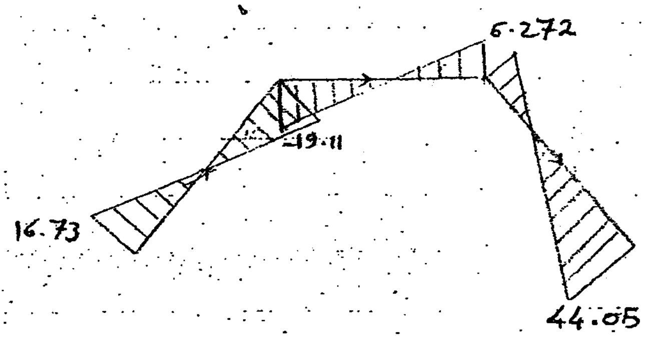
$\sum_b M = 0 \rightarrow M_{ba} + M_{bc} = 0 \rightarrow 22\theta_b + 8\theta_c - \frac{23\Delta}{20} = 0$

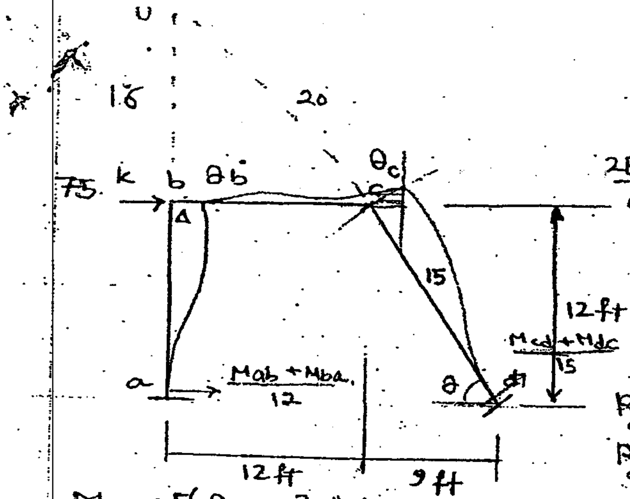
$\sum_c M = 0 \rightarrow M_{cb} + M_{cd} = 0 \rightarrow 8\theta_b + 22\theta_c - \frac{23\Delta}{20} - \frac{45}{2} = 0$

$\sum_o M = 0 \rightarrow M_{ab} - \overset{7}{\cancel{35}}\frac{M_{ab}+M_{ba}}{4\cdot\cancel{20}} + M_{dc} - 35\frac{M_{cd}+M_{dc}+90}{20} + 9\times 25 = 0$

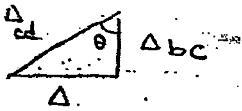
$\rightarrow 3\theta_b + \frac{9\Delta}{20} - \frac{7}{4}(9\theta_b + \frac{18\Delta}{20}) + 3\theta_c + \frac{9\Delta}{20} + 45 - \frac{7}{4}(9\theta_c + \frac{18\Delta}{20} + 90) + 225 = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} \theta_b = 0.794 \\ \theta_c = 2.4 \\ \Delta = 31.89 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_{ab} = 16.73 \text{ ft.kips} \\ M_{ba} = -M_{bc} = 19.11 \\ M_{cb} = -M_{cd} = -6.272 \\ M_{dc} = 44.05 \end{cases}$$




16
20
75 k
b
θb
θc
c
Δ
15
12 ft
$\frac{M_{cd}+M_{dc}}{15}$
a
$\frac{M_{ab}+M_{ba}}{12}$
θ
d
12 ft
9 ft

$\frac{2EI}{60}=1$


Δ_{cd}
θ
Δ_{bc}
Δ

$\Delta_{cd}=\frac{\Delta}{\sin\theta}=\frac{15\Delta}{12}$

$\Delta_{bc}=\frac{\Delta}{tg\,\theta}=\frac{9\Delta}{12}$

$R_{ab}=\frac{\Delta}{12}$ $R_{bc}=-\frac{\Delta bc}{12}=-\frac{9\Delta}{144}$

$R_{cd}=\frac{\Delta cd}{15}=\frac{\Delta}{12}$

$M_{ab}=5(\theta_b-3\frac{\Delta}{12})$ $M_{bc}=5(2\theta_b+\theta_c+3\,\frac{9\Delta}{144})$

$M_{ba}=5(2\theta_b-3\frac{\Delta}{12})$ $M_{cb}=5(2\theta_c+\theta_b+3\,\frac{9\Delta}{144})$

$M_{cd}={}^{4}(2\theta_c-3\,\frac{\Delta}{12})$ $M_{dc}={}^{4}(\theta_c-3\,\frac{\Delta}{12})$

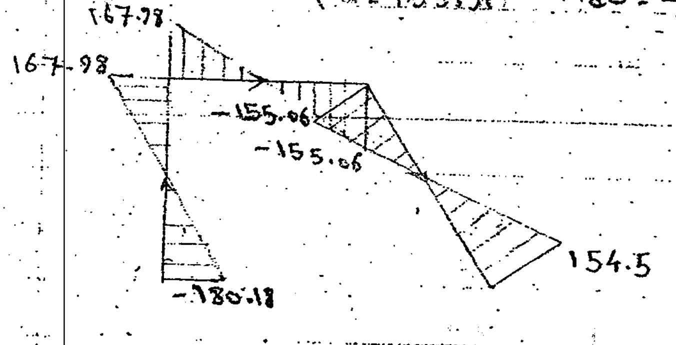
$\Sigma M_b=0\longrightarrow M_{ba}+M_{bc}=0\longrightarrow 5(2\theta_b-3\,\frac{\Delta}{12})+5(2\theta_b+\theta_c+\frac{27\Delta}{144})=0$ (1)

$\Sigma M_c=0\longrightarrow M_{cb}+M_{cd}=0\longrightarrow {}^{5}(2\theta_c+\theta_b+\frac{27\Delta}{144})+{}^{4}(2\theta_c-\frac{3\Delta}{12})=0$ (2)

$\Sigma M_o=0\longrightarrow M_{ab}-\frac{M_{ab}+M_{ba}}{12}28-75\times16-\frac{M_{cd}+M_{dc}}{15}35+M_{dc}=0$

$\longrightarrow {}^{5}(\theta_b-\frac{3\Delta}{12})-\frac{28}{12}(15\theta_b-\frac{30\Delta}{12})-1200-\frac{35}{15}(12\theta_c-2\Delta)+{}^{4}\theta_c-\Delta=0$ (3)

$(1),(2),(3)\longrightarrow\begin{cases}\theta_b=2.441\\ \theta_c=-0.144\\ \Delta=553.91\end{cases}\longrightarrow$
$M_{ab}=-180.18$ ft.kips
$M_{ba}=-M_{bc}=-167.98$
$M_{cb}=-M_{cd}=155.06$
$M_{dc}=-154.5$

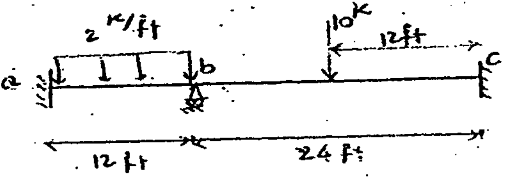

167.98
167.98
-155.06
-155.06
154.5
-180.18

مصطفی صاحیان
۸۳۴۸۱۲۷۲

تحلیل 2
سری 2 (کراس)

۱-۱۳ – لنگرهای انتهائی اعضای مسئله ۱-۱۲ را با استفاده از روش پخش لنگر محاسبه کنید.

$\frac{K}{\Sigma K}$	0	2/3	1/3	0
	ab	ba	bc	cb
FEM	-24	+24	-30	+30
DM		4	2	
COM	2			1
Σ	-22 ft.kips	28	-28	31

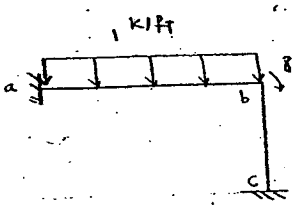


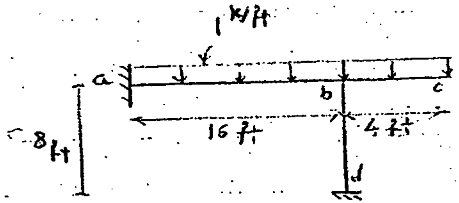
2 k/ft
10k
12ft
a
b
c
12 ft
24 ft

$K_{ab} = \frac{I}{12}$

$K_{bc} = \frac{I}{24}$

۲-۱۳ لنگرهای انتهائی اعضای مسئله ۲-۱۲ را با روش پخش لنگر محاسبه کنید.





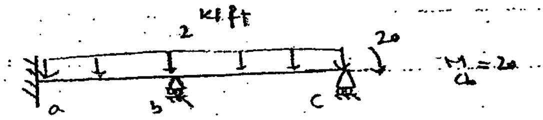
1 k/ft
a
b
c
d
16 ft
4 ft
8 ft

$K_{ab} = \frac{I}{16}$ $K_{bd} = \frac{I}{8}$

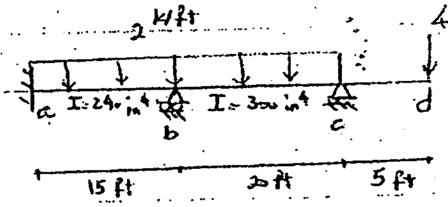
$M_{ba} + M_{bd} = 8$

	0	1/3	2/3	0
	ab	ba	bd	db
FEM	-21.33	21.33	0	0
DM		-4.44	-8.89	
CoM	-2.22			-4.44
Σ	-23.55	16.89	-8.89	-4.44

۳-۱۳، لنگرهای انتهائی اعضای مسئله ۳-۱۲ را با استفاده از روش پخش لنگر محاسبه کنید.



$M_{ca} = 20$



2 k/ft
4k
a
b
c
d
I=240 in⁴
I=300 in⁴
15 ft
20 ft
5 ft

	0	0.516	0.484	1
	ab	ba	bc	cb
FEM	-37.5	37.5	-66.67	66.67
DM		15.05	14.12	-46.67
CoM	7.525		-23.335	7.06
DM		12.04	11.27	-7.06
CoM	6.02		-3.53	5.645
DM		1.82	1.71	-5.645
CoM	0.91		-2.82	0.855

$K_{ab} = \frac{I_{ab}}{15\ ft} = \frac{240}{180} = 1.333$

$K_{bc} = \frac{I_{bc}}{20} = \frac{300}{240} = 1.25$

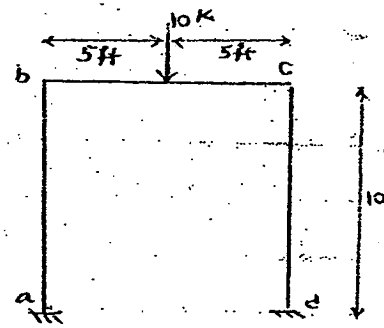
ادامه صفحه بعد

DM		1.46	1.36	-0.855
COM	0.73		-0.43	0.68
DM		0.22	0.21	-0.68
COM	0.11		-0.34	0.105
DM		0.175	-0.16	-0.105
COM	0.09		-0.05	0.08
		0.03	0.02	-0.08
$\sum$	-22.12	68.3	-68.3	79

۱۳-۴ لنگرهای انتهایی اعضای مسئله ۱۲-۴ را با استفاده از روش پخش لنگر برای حالات زیر محاسبه کنید:

(۱) بدون استفاده از ضرایب سختی اصلاح شده

(۲) با استفاده از ضرایب اصلاح شده



(1)

$\frac{K}{\Sigma K}$	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0
	ab	ba	bc	cb	cd	dc
FEM	0	0	-12.5	+12.5	0	0
DM		6.25	6.25	-6.25	-6.25	
COM	3.125		-3.125	3.125		-3.125
DM		1.56	1.56	-1.56	-1.56	
COM	0.78		-0.78	0.78		-0.78
DM		0.39	0.39	-0.39	-0.39	
COM	0.195		-0.195	+0.195		-0.195
DM		0.1	0.1	-0.1	-0.1	
COM	0.05		-0.05	0.05		-0.05
DM		0.025	0.025	-0.025	-0.025	
COM	0.012		-0.012	0.012		-0.012
$\sum$	4.162	8.325	-8.34	8.34	-8.325	-4.162

(2)

$\frac{K'}{\Sigma K'}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	ba	bc
FEM	0	-12.5
DM	8.33	4.17
$\sum$	8.33	-8.33

$K'_{ab} = K_{ab} = \frac{I}{10}$

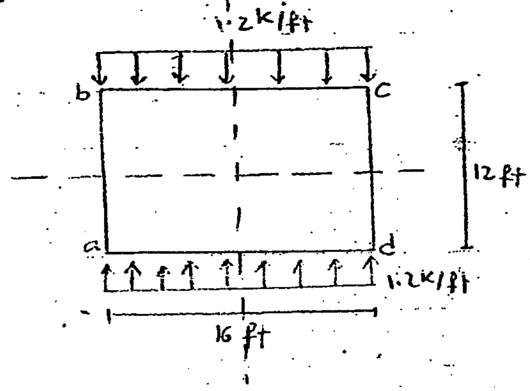
$K'_{bc} = \frac{K_{bc}}{2} = \frac{I}{20}$

$M_{ab} = \frac{8.33}{2} = 4.16 = -M_{dc}$

$M_{cb} = -M_{bc} = 8.33$

$M_{cd} = -M_{ba} = -8.33$

۱۳-۵ قاب قوطی شکل نشان داده شده در شکل ۱۸-۱۳ را با استفاده از روش پخش لنگر مورد بررسی قرار دهید. مقدار EI برای تمام اعضاء یکسان فرض شود.


1.2 k/ft
b
c
a
d
12 ft
1.2 k/ft
16 ft

$$K'_{ba}=\frac{k_{ba}}{2}=\frac{I}{2\times12}=\frac{4I}{96}$$

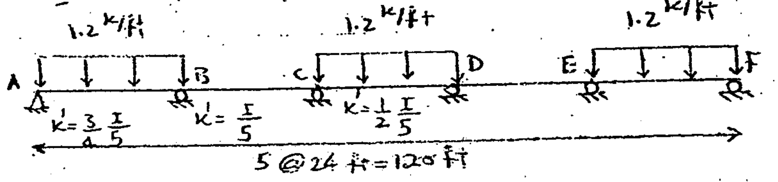
$$k'_{bc}=\frac{k_{bc}}{2}=\frac{I}{2\times16}=\frac{3I}{96}$$

$\frac{k'}{\Sigma k'}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$
	ba	bc
FEM	0	−25.6
DM	14.63	10.97
Σ	14.63	−14.63

$M_{bc}=-M_{cb}=-M_{ad}=+M_{da}=-14.63$ k.ft

$M_{ba}=-M_{ab}=-M_{cd}=+M_{dc}=14.63$ kips.ft

۱۳-۶ تیر سرتاسری شکل ۱۹-۱۳ را با استفاده از روش پخش لنگر تحلیل نمائید.


1.2 k/ft
1.2 k/ft
1.2 k/ft
A
B
C
D
E
F
k' = 3/4 I/5
k' = I/5
k' = 1/2 I/5
5 @ 24 ft = 120 ft

	1	3/7	4/7	2/3	1/3
FEM	−57.6	57.6	0	0	−57.6
DM	57.6			38.4	19.2
COM		28.8	19.2		
DM		−45.26	−60.34		
COM				−30.17	
DM				20.11	10.06
COM			10.06		
DM		−4.31	−5.75		
COM				−2.88	
DM				1.92	0.96
COM			0.96		
DM		−0.41	−0.55		
COM				−0.28	
DM				0.19	0.09
COM			0.095		
DM		−0.04	−0.05		
Σ	0	36.38	−36.38	27.29	−27.29

$\rightarrow M_{AB}=M_{FE}=0$

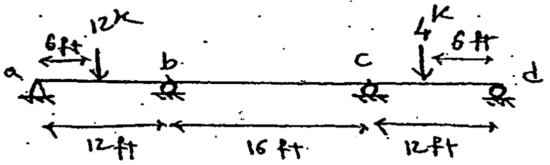
$M_{BA}=-M_{EF}=36.38$

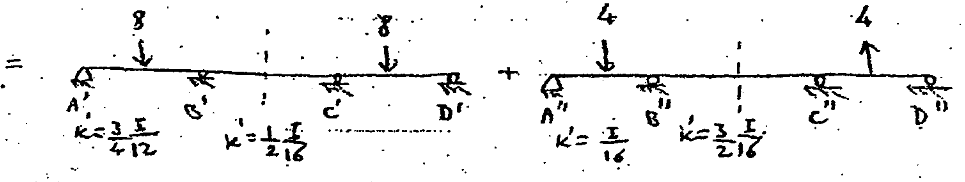
$M_{BC}=-M_{ED}=-36.38$

$M_{CB}=M_{DE}=27.29$

$M_{CD}=-M_{DC}=-27.29$

۱۳-۷ مطلوبست تحلیل تیر سرتاسری شکل (۱۳-۲۰) با استفاده از روش پخش لنگر برای این منظور بارگذاری غیرمتقارن تیر را به صورت مجموع دو بارگذاری متقارن و متقارن معکوس. در نظر بگیرید EI ثابت فرض شود.





$k = \frac{3}{4}\frac{I}{12}$ $k' = \frac{1}{2}\frac{I}{16}$

$k' = \frac{I}{16}$ $k' = \frac{3}{2}\frac{I}{16}$

	1	2/3	1/3
EFM	-12	12	0
DM	+12 →	6	
		-12	-6
Σ	0	6	-6

	1	2/5	3/5
EFM	-6	+6	0
DM	6 →	3	
		-3.6	-5.4
Σ	0	5.4	-5.4

$M_{A'B'} = 0 = M_{D'C'}$

$M_{B'A'} = 6 = -M_{C'D'}$

$M_{B'C'} = -6 = -M_{C'B'}$

$M_{A''B''} = 0 = M_{D''C''}$

$M_{B''A''} = 5.4 = M_{C''D''}$

$M_{B''C''} = M_{C''B''} = -5.4$

$\longrightarrow M_{AB} = M_{DC} = 0$ $M_{BA} = 11.4$ kips.ft $M_{CD} = -0.6$ kips.ft

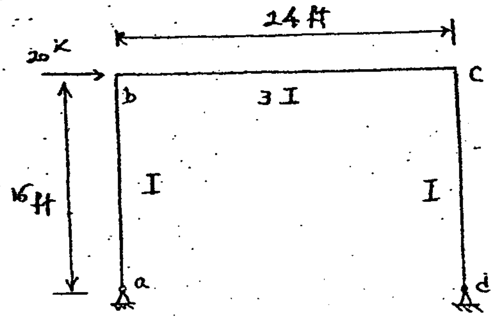
$M_{BC} = -11.4$ kips.ft $M_{CB} = 0.6$ kips.ft

مصطفی صاحبیان
88481272

سری سوم

روش پخش لنگر برای تحلیل قاب‌ها با انتقال گره‌ها

14-1 قاب شکل (14-24) را با استفاده از روش پخش لنگر مورد بررسی قرار دهید.


24 ft
20^K
b
c
3 I
16 ft
I
I
a
d

گره ها حرکت انتقالی دارند.

نیروها در گره ها اثر دارد — تیپ A

$K_{ab} = \frac{I}{16} \rightarrow K'_{ab} = \frac{3}{4}\frac{I}{16} = \frac{3I}{64}$

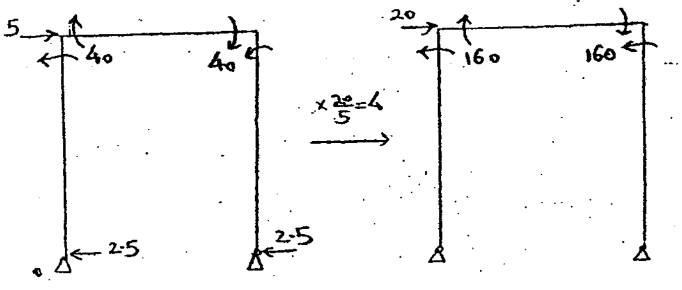
$K_{bc} = \frac{3I}{24} \rightarrow K'_{bc} = \frac{3}{2}K_{bc} = \frac{3I}{16} = \frac{12I}{64}$

$K_{cd} = \frac{I}{16}$

$M_{ab} = M_{bc} = -\frac{6EI\Delta}{L^2} = -100 \qquad M_{bc} = M_{cb} = 0$

ba	bc
1/5	4/5
-100	0
50	
+16	+40
-40	+40

+100
-100
0


5
40
40
2.5
2.5
$\times \frac{20}{5} = 4$
20
160
160

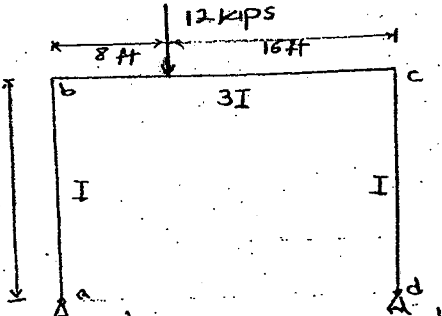
14-2 برای قاب مسئله قبل که بار جانبی 20 kips را حذف و نیروی قائم 12 kips را که به طرف پایین و به فاصله 8 ft از b بر روی عضو bc اثر می‌کند در نظر بگیرید. با استفاده از روش پخش لنگر، لنگرهای انتهای عضو bc را محاسبه کنید. گره ها حرکت انتقالی دارند.

نیروها بر اعضا اثر دارند — تیپ B = کراس معمولی + تیپ A

$K'_{ba} = \frac{3}{4}K_{ba} = \frac{3}{4}\frac{I}{16} = \frac{3I}{64}$

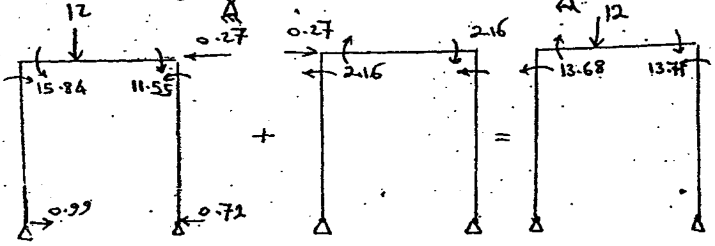
$K'_{bc} = K_{bc} = \frac{8I}{64}$

$K'_{cd} = \frac{3}{4}K_{cd} = \frac{3I}{64}$


12 kips
8 ft
16 ft
b
c
3I
16 ft
I
I
a
d

ba	bc	cb	cd
3/11	8/11	8/11	3/11
0	-42.67	21.3	0
11.64	31.03	-15.49	-5.81
	-7.74	15.52	
2.11	5.63	-11.29	-4.23
	-5.64	2.82	
1.54	4.10	-2.05	-0.77
	-1.02	2.05	
0.28	0.74	-1.49	-0.56
	-0.74	0.37	
0.20	0.54	-0.27	-0.1
	-0.14	0.27	
0.04	0.10	-0.20	-0.07
	-0.10	0.05	
0.03	0.07	-0.04	-0.01
15.84	-15.84	11.55	-11.55

0 0


12
15.84
11.55
0.27
0.99
0.72
+
0.27
2.16
2.16
=
12
13.68
13.71

14-3 مطلوبست تحلیل سازه شکل (14-25) با استفاده از روش پخش لنگر

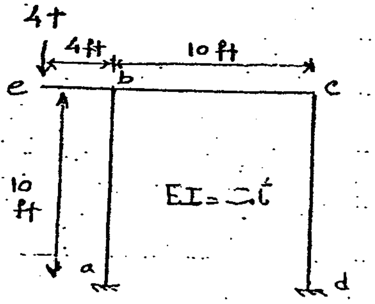
یکبار $\overset{10}{+}$ در وسط bc وارد می کنیم تا مسئله به شکل تیپ B تبدیل شود

بعلاوه یک تیپ B بگیرید. در حقیقت در این مسئله نمی توان مستقیماً

از تیپ A مسئله را حل کرد چون ممان کنسول یک مقدار واقعی استاتیکی

ممان‌ها در تیپ A مقادیر ممان‌های نسبی است.

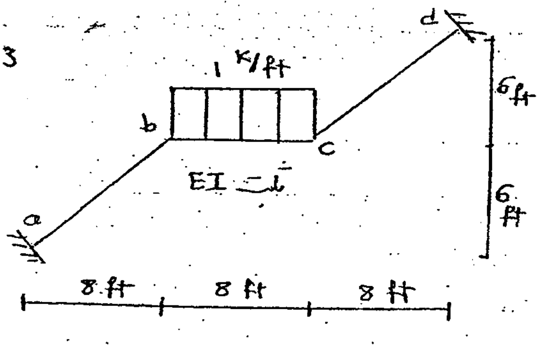
به علت کمبود فضا، جواب را در دو برگ جلوتر نوشته ام.

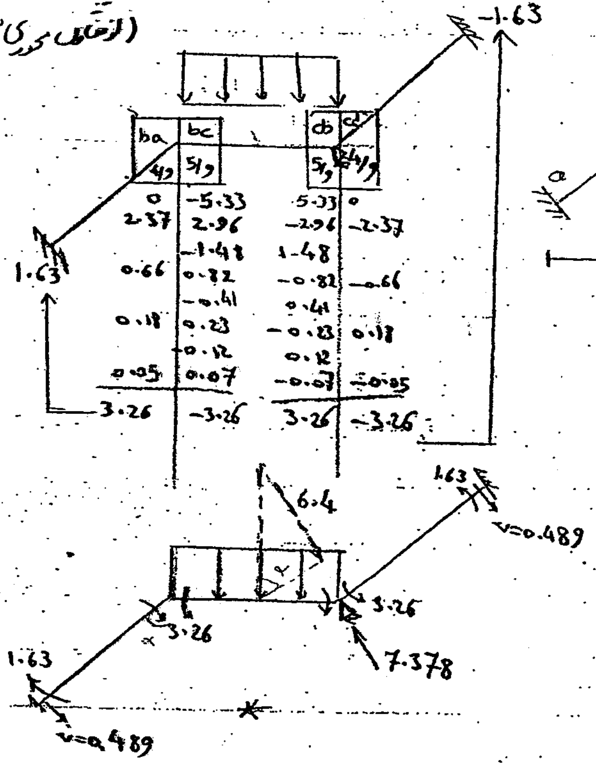

4+
4 ft
10 ft
e
b
c
10 ft
a
d
EI = ثابت

14-4 مطلوبست تحلیل قاب شکل (14-26) با استفاده از روش پخش لنگر   بارگذاری در عضو ← تیپ B

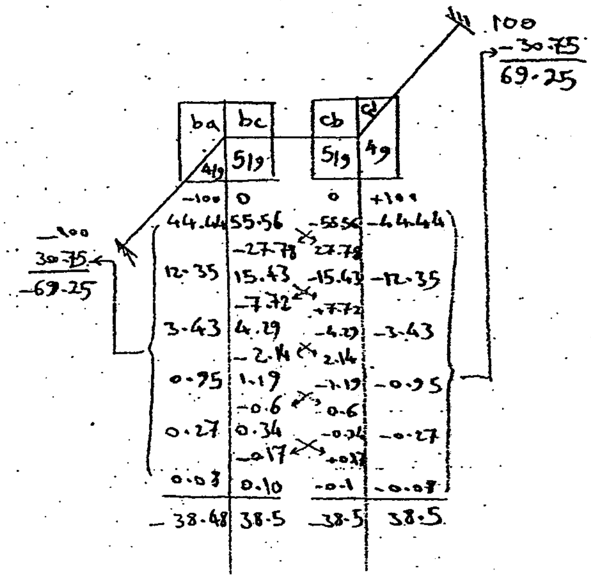
← کراس معمولی ← تیپ A

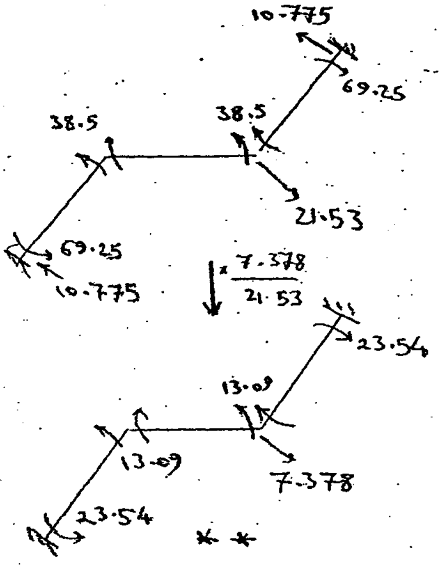
(از اختلاف محوری سر عضو به جواب می رسد


d
1 K/ft
b
c
EI ثابت
a
6 ft
6 ft
8 ft
8 ft
8 ft

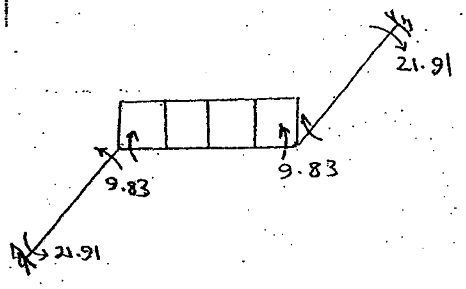

-1.63
1.63
1.63
6.4
v=0.489
3.26
3.26
7.378
1.63
v=0.489

ba	bc	cb	cd
4/9	5/9	5/9	4/9
0	-5.33	5.33	0
2.37	2.96	-2.96	-2.37
	-1.48	1.48	
0.66	0.82	-0.82	-0.66
	-0.41	0.41	
0.18	0.23	-0.23	0.18
	-0.12	0.12	
0.05	0.07	-0.07	-0.05
3.26	-3.26	3.26	-3.26


100
-30.75
69.25
ba
bc
cb
cd
4/9
5/9
5/9
4/9
-100
0
0
+100
44.44
55.56
-55.56
-44.44
-27.78
27.78
12.35
15.43
-15.43
-12.35
-7.72
+7.72
3.43
4.29
-4.29
-3.43
-2.14
2.14
0.95
1.19
-1.19
-0.95
-0.6
0.6
0.27
0.34
-0.34
-0.27
-0.17
+0.17
0.08
0.10
-0.1
-0.08
-38.48
38.5
-38.5
38.5
-100
30.75
-69.25


10.775
69.25
38.5
38.5
21.53
69.25
10.775
× 7.378 / 21.53
23.54
13.09
13.09
7.378
23.54
* *

* 9 * * →

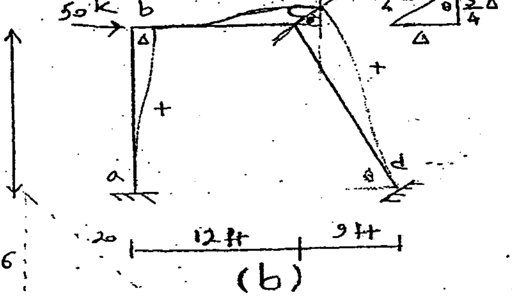

21.91
9.83
9.83
21.91

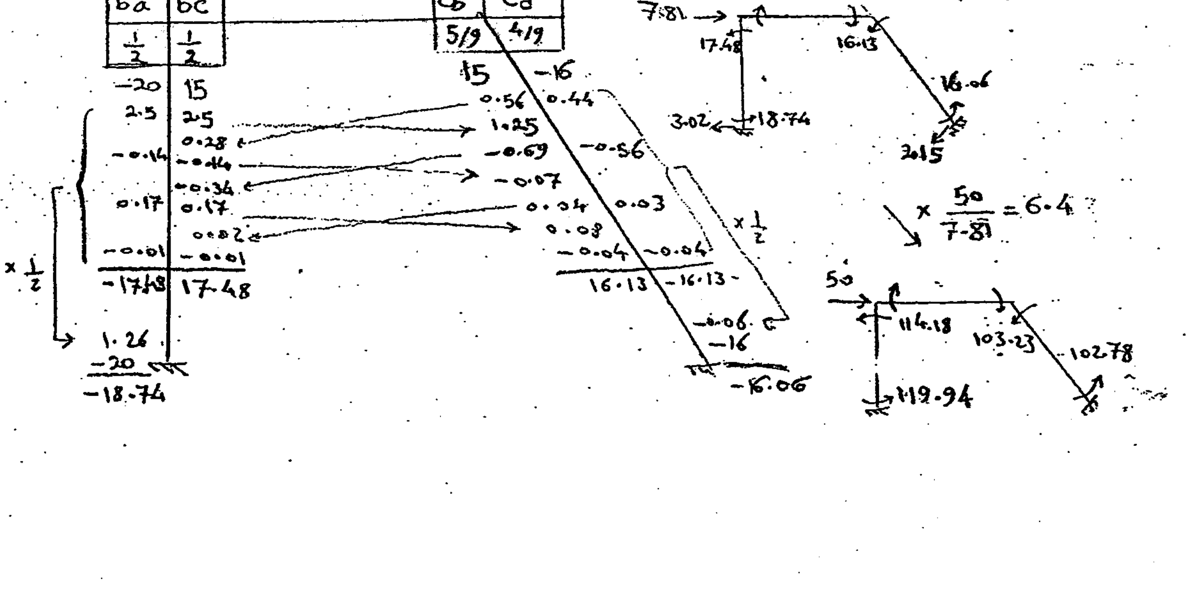
14-5 هر یک از قاب های مسئله 7-12 را با استفاده از روش پخش لنگر مورد بررسی قرار دهید. مسئله بخش A است.

$K_{ab}=\frac{I}{12}=5\frac{I}{60}$ $M_{ab}=M_{ba}=-6\frac{EK_{ab}\Delta_{ab}}{12}=-20$

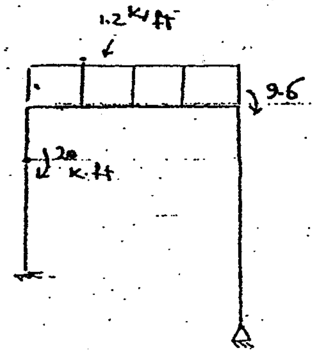
$K_{bc}=\frac{I}{12}=5\frac{I}{60}$ $M_{bc}=M_{cb}=+6\frac{EK_{bc}\Delta_{bc}}{12}=+15$

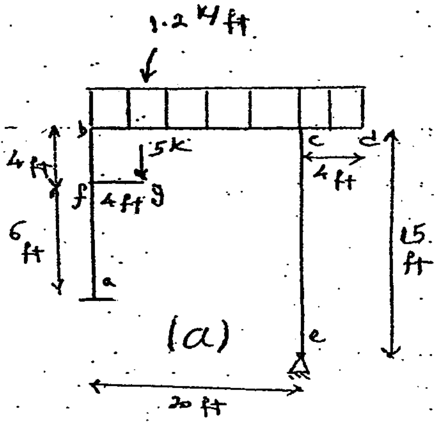
$K_{cd}=\frac{I}{15}=4\frac{I}{60}$ $M_{cd}=M_{dc}=-6\frac{EK_{cd}\Delta_{cd}}{15}=-16$

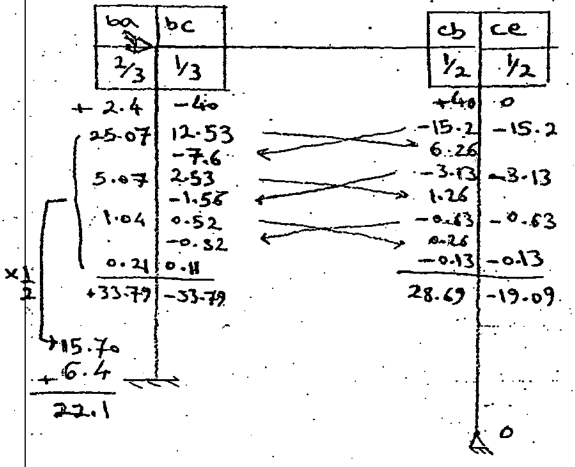

50 K
b
$\frac{5}{4}\Delta$
$\frac{3}{4}\Delta$
Δ
Δ
+
+
12 ft
a
d
12 ft
9 ft
(b)


ba
bc
cb
cd
1/2
1/2
5/9
4/9
-20
15
15
-16
2.5
2.5
0.56
0.44
0.28
1.25
-0.14
-0.14
-0.69
-0.56
-0.34
-0.07
0.17
0.17
0.04
0.03
0.02
0.08
-0.01
-0.01
-0.04
-0.04
-17.48
17.48
16.13
-16.13
× 1/2
× 1/2
1.26
-20
-18.74
-0.06
-16
-16.06
7.81
17.48
16.13
16.06
3.02
18.74
3.15
16
20
× 50/7.81 = 6.4
50
114.18
103.23
102.78
119.94

A تیر + کراس ← B تیر


1.2 k/ft
9.6
20 k.ft

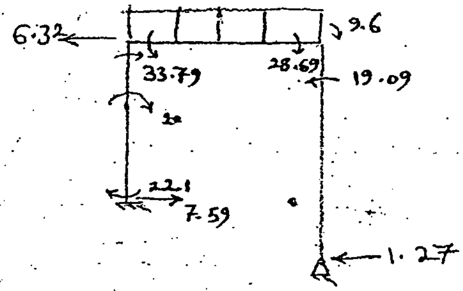

1.2 k/ft
b
c
d
5k
4 ft
f
4 ft
g
4 ft
6 ft
a
15 ft
e
(a)
20 ft


ba
bc
2/3
1/3
cb
ce
1/2
1/2
+2.4
-40
+40
0
25.07
12.53
-15.2
-15.2
-7.6
6.26
5.07
2.53
-3.13
-3.13
-1.56
1.26
1.04
0.52
-0.63
-0.63
-0.32
0.26
0.21
0.11
-0.13
-0.13
+33.79
-33.79
28.69
-19.09
× 1/2
15.70
+6.4
22.1
0

$$K_{ab} = \frac{I}{10} = \frac{6I}{60} = 6 \rightarrow K'_{ab} = K_{ab} = 6$$

$$K_{bc} = \frac{I}{20} = \frac{3I}{60} = 3 \rightarrow K'_{bc} = K_{bc} = 3$$

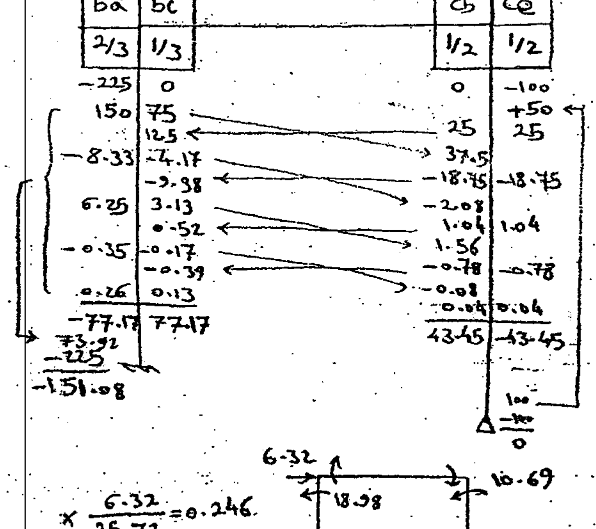
$$K_{ce} = \frac{I}{15} = \frac{4I}{60} = 4 \rightarrow K'_{ce} = \frac{3}{4}K_{ce} = 3$$

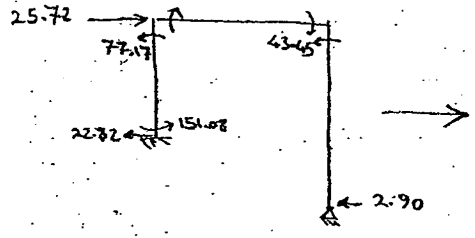

6.32
9.6
33.79
28.69
19.09
20
22.1
7.59
1.27

کراس معمولی

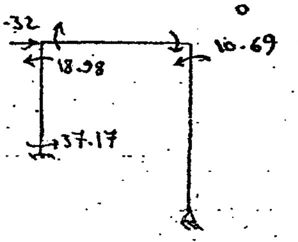
$$M_{ab} = M_{ba} = \frac{-6EI\Delta}{10^2} = -225$$

$$M_{ce} = M_{ec} = \frac{-6EI\Delta}{15^2} = -100$$

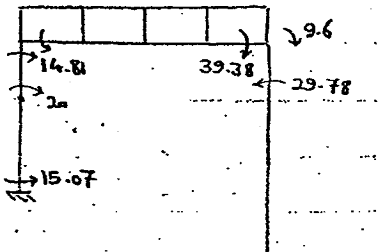

ba
bc
2/3
1/3
cb
ce
1/2
1/2
-225
0
0
-100
150
75
+50
12.5
25
25
-8.33
-4.17
37.5
-9.38
-18.75
-18.75
6.25
3.13
-2.08
0.52
1.04
1.04
-0.35
-0.17
1.56
-0.39
-0.78
-0.78
0.26
0.13
-0.08
-0.04
0.04
-77.17
77.17
43.45
-43.45
73.92
-225
-151.08
100
-100
0

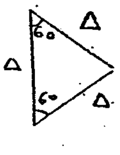

25.72
77.17
43.45
22.82
151.08
2.90

$$\times \frac{6.32}{25.72} = 0.246 \longrightarrow$$


6.32
18.98
10.69
37.17

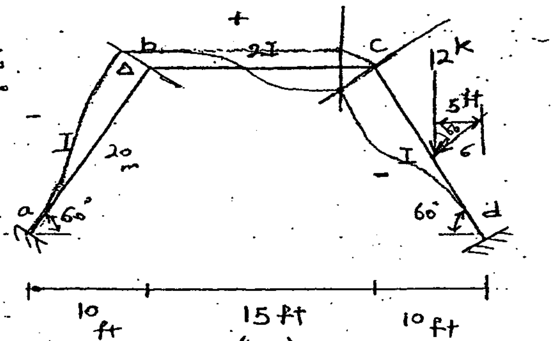
+ کراس $\longrightarrow$


9.6
14.81
39.38
29.78
20
15.07

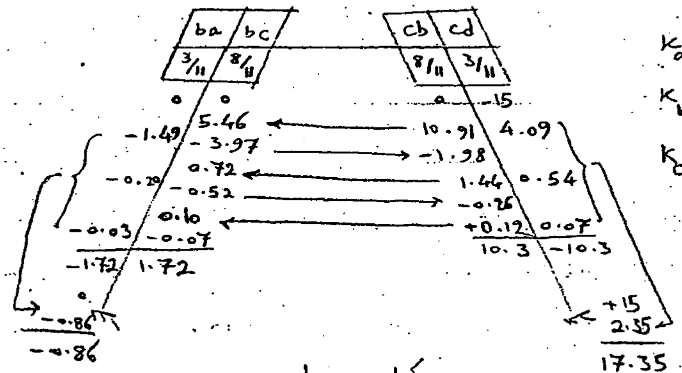


شیب B ← شیب A + کراس معمولی

$T_{DoF} = 1$


+
b
c
2I
12K
5ft
60
6
Δ
I
20 m
I
-
-
a
60°
60°
d
10 ft
15 ft
10 ft

(C)

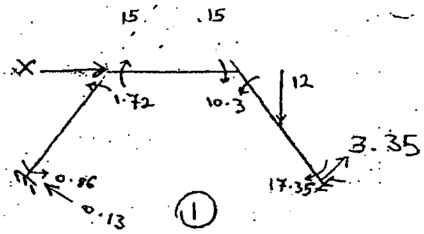

ba
bc
3/11
8/11
cb
cd
8/11
3/11
0
0
0
-15
5.46
10.91
4.09
-1.49
-3.97
-1.98
0.72
1.44
0.54
-0.20
-0.52
-0.26
0.10
+0.12
0.07
-0.03
-0.07
10.3
-10.3
-1.72
1.72
0
-0.86
-0.86
+15
2.35
17.35

کراس معمولی

$K_{ab} = \frac{I}{20} = \frac{3I}{60} = 3$

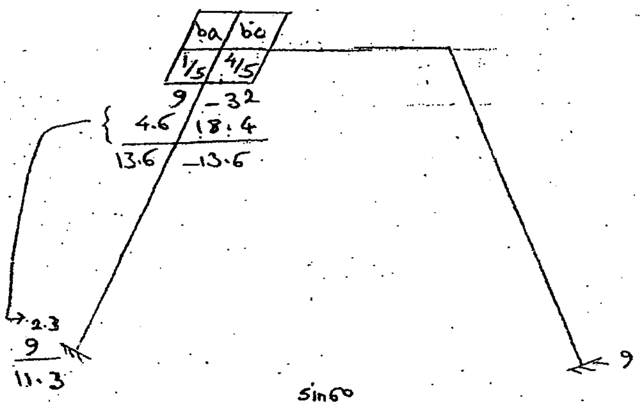
$K_{bc} = \frac{2I}{15} = \frac{8I}{60} = 8$

$K_{cd} = \frac{I}{20} = \frac{3I}{60} = 3$


15
15
X
1.72
10.3
12
3.35
0.86
0.13
17.35

①

$$+0.13 \times 35 - 0.86 - \overset{\sin 60}{15X} + 17.35 - 3.35 \times 35 + 12 \times \frac{25}{2} = 0 \rightarrow X = 4.14$$


ba
bc
1/5
4/5
9
-32
4.6
18.4
13.6
-13.6
2.3
9
11.3
9

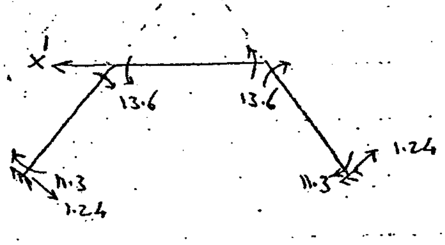
$M_{ab} = M_{ba} = +6\frac{EK\Delta}{L} = \frac{+3}{20} = \frac{9}{60} \approx 9$

$M_{bc} = M_{cb} = -6\frac{EK\Delta}{L} = \frac{-8}{15} = \frac{-32}{60} \approx -32$

$M_{cd} = M_{dc} = +6\frac{EK\Delta}{L} = \frac{+3}{20} = \frac{9}{60} \approx 9$

$K'_{ab} = K_{ab} = 3$

$K'_{bc} = \frac{3}{2}K_{bc} = 12$

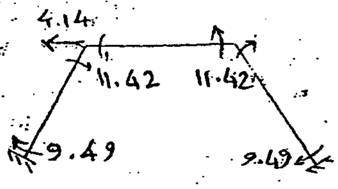

X'
13.6
13.6
1.24
11.3
1.24
11.3

$$-1.24 \times 35 + 11.3 + \overset{\sin 60}{15X'} + 11.3 - 1.24 \times 35 = 0$$

$\rightarrow X' = 4.94$

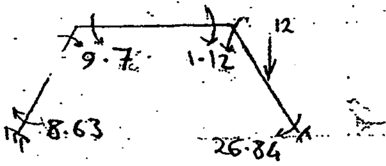
$\times \frac{4.14}{4.94} = 0.84$

$\longrightarrow$

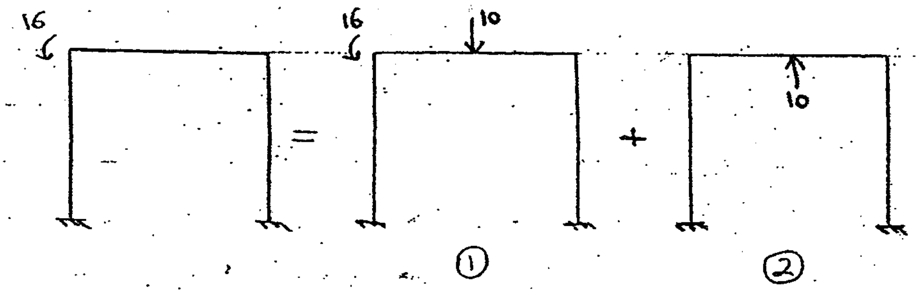

4.14
11.42
11.42
9.49
9.49

②

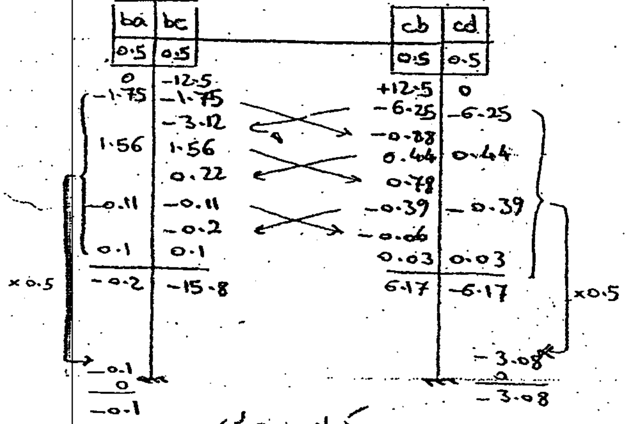
① + ② →

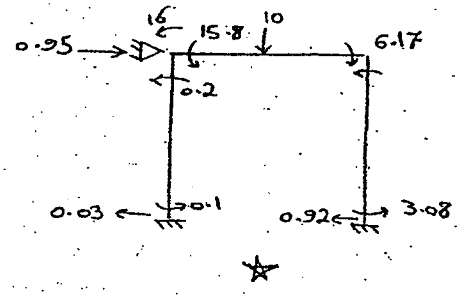

12
9.7
1.12
8.63
26.84

حل مسئله: 14-3

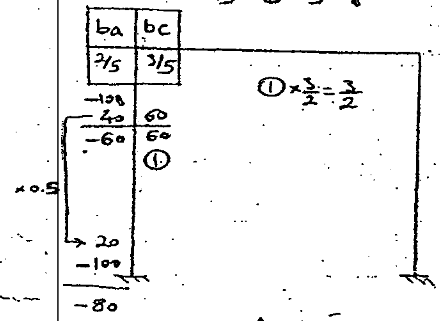

16
16
10
=
+
10
①
②

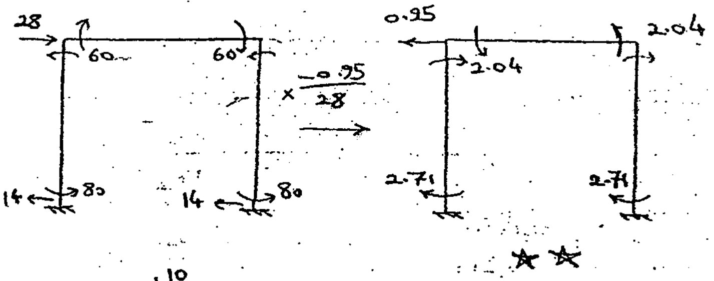
تحلیل سازه ①:


ba | bc | cb | cd
0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5
0 | -12.5 | +12.5 | 0
-1.75 | -1.75 | -6.25 | -6.25
-3.12 | -0.88
1.56 | 1.56 | 0.44 | 0.44
0.22 | 0.78
-0.11 | -0.11 | -0.39 | -0.39
-0.2 | -0.06
0.1 | 0.1 | 0.03 | 0.03
-0.2 | -15.8 | 6.17 | -6.17
×0.5
×0.5
-0.1
0
-0.1
-3.08
0
-3.08


16
15.8
10
6.17
0.95
0.2
0.03
0.1
0.92
3.08
☆

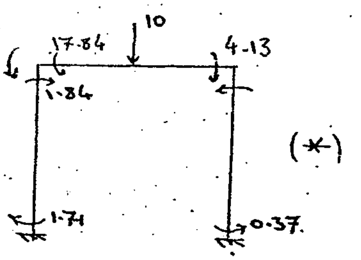
کراس تعریفی


ba | bc
2/5 | 3/5
①×3/2 = 3/2
-108
-40 | 60
-60 | 60
①
×0.5
20
-100
-80

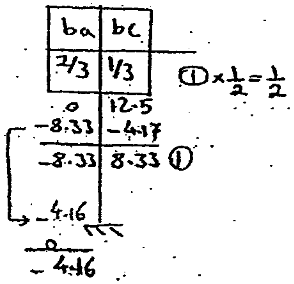

28
60
60
14
80
14
80
×(-0.95/28)
0.95
2.04
2.04
2.71
2.71
☆☆

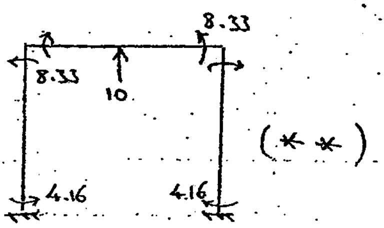
A شب

☆ + ☆☆ →

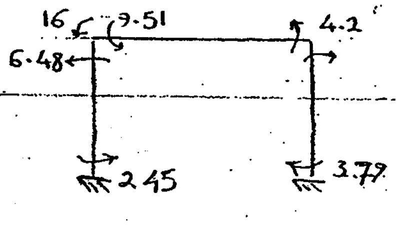

16
17.84
10
4.13
1.84
1.71
0.37
(*)

تحلیل سازه ②:

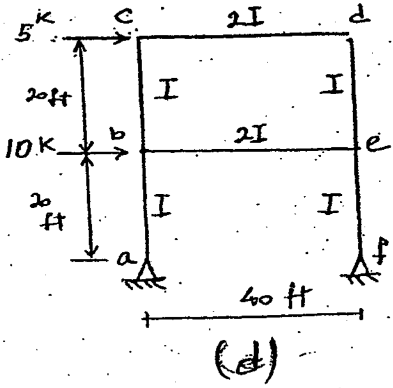

ba | bc
2/3 | 1/3
①×1/2 = 1/2
0 | 12.5
-8.33 | -4.17
-8.33 | 8.33 ①
-4.16
0
-4.16


8.33
8.33
10
4.16
4.16
(**)

(*) + (**) →


16
9.51
4.2
6.48
2.45
3.77

مسئله دارای دودرجه آزادی است. آن را بصورت جمع دو سازه با یک درجه آزادی می نویسیم.


5^K
c
2I
d
20 ft
I
I
10 K
b
2I
e
20 ft
I
I
a
f
40 ft

(d)

$K_{ab} = \frac{I}{20} = 1 \longrightarrow K'_{ab} = \frac{3}{4} \simeq 3$

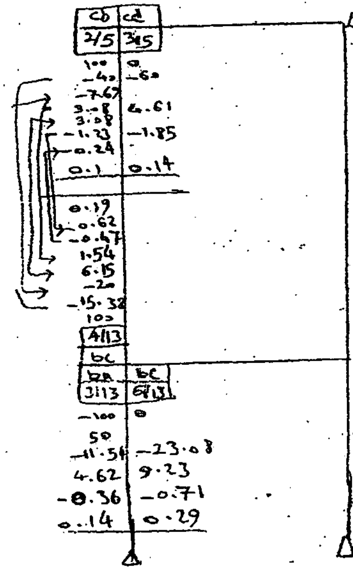
$K_{be} = \frac{2I}{40} = 1 \longrightarrow K'_{be} = \frac{3}{2} \simeq 6$

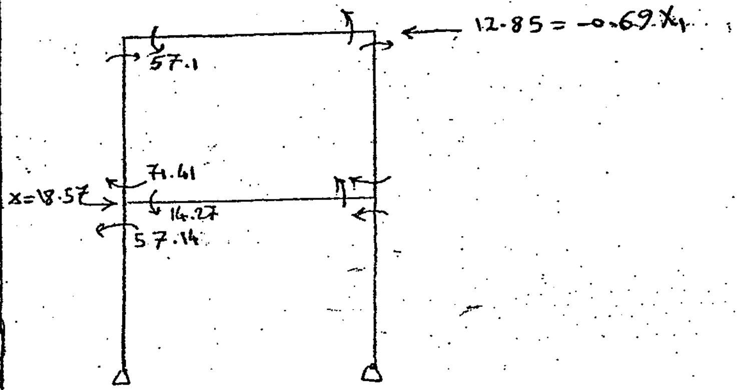
$K_{bc} = \frac{I}{20} = 1 \longrightarrow K'_{bc} = 1 \simeq 4$

$K_{cd} = \frac{2I}{40} = 1 \longrightarrow K'_{cd} = \frac{3}{2} \simeq 6$

$M_{ab} = M_{ba} = -\frac{6EK\Delta}{L^2} = -100$

$M_{bc} = M_{cb} = +\frac{6E\Delta K}{L^2} = 100$

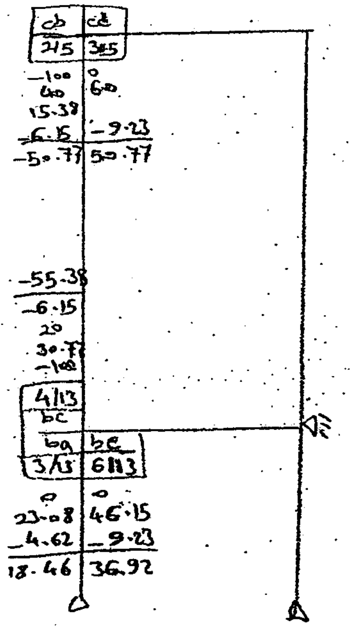

cb
cd
2/5
3/5
100
0
-40
-60
-7.67
3.08
4.61
3.08
-1.23
-1.85
-0.24
0.1
0.14
0.19
-0.62
-0.47
1.54
6.15
-20
-15.32
100
4/13
bc
ba
be
3/13
6/13
-100
0
50
-11.54
-23.08
4.62
9.23
-0.36
-0.71
0.14
0.29
0

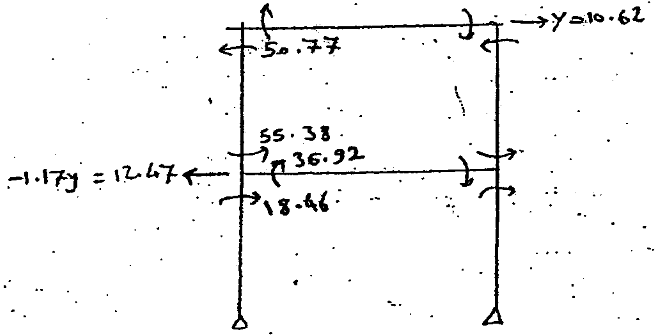

12.85 = -0.69 X_1
57.1
71.41
x = 18.57
14.27
57.14

$M_{ab} = M_{ba} = 0$

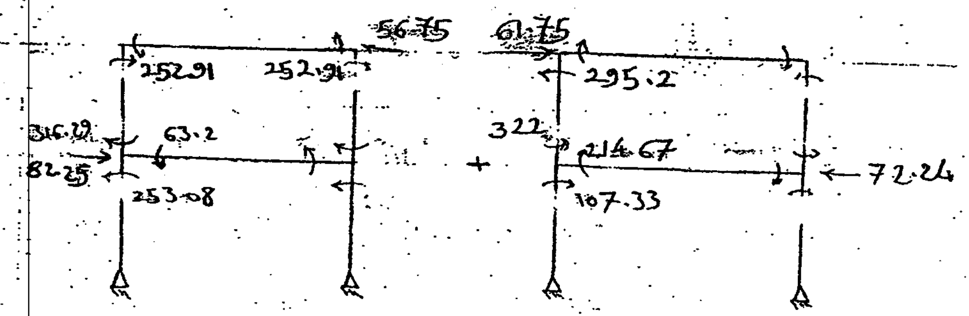
$M_{bc} = M_{cb} = -\frac{6EK\Delta}{L} = -100$

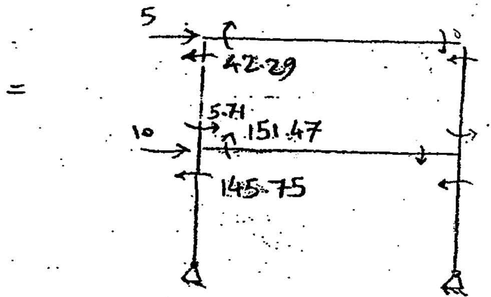
$M_{cd} = M_{dc} = 0$


cb
cd
2/5
3/5
-100
0
40
60
15.38
-6.15
-9.23
-50.77
50.77
-55.38
-6.15
20
30.77
-100
4/13
bc
ba
be
3/13
6/13
0
0
23.08
46.15
-4.62
-9.23
18.46
36.92


y = 10.62
50.77
55.38
36.92
-1.17y = 12.47
18.46

$$\begin{cases} -0.69X + Y = 5 \\ X - 1.17Y = 10 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X = 82.25 \\ Y = 61.75 \end{cases}$$


56.75
61.75
252.91
252.91
295.2
316.29
63.2
322
214.67
82.25
253.08
107.33
72.24
+


=
5
42.29
5.71
10
151.47
145.75

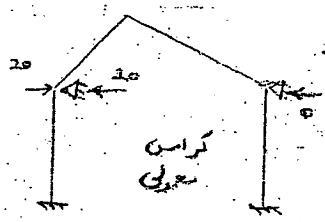
دردرجه آزادی ← دوتا یک درجه آزادی + گراس معرلی

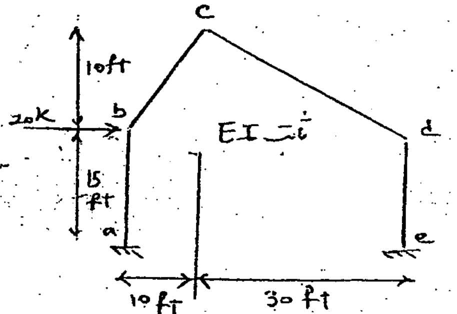
$K_{ab} = \frac{I}{15} = 2.108$

$K_{bc} = \frac{I}{10\sqrt{2}} = 2.236$

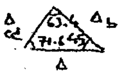
$K_{cd} = \frac{I}{10\sqrt{10}} = 1$

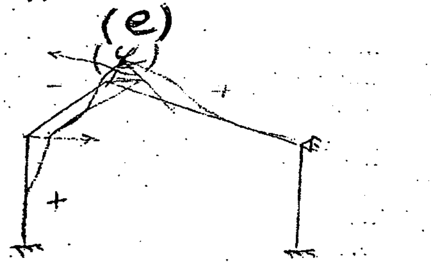
$K_{de} = \frac{I}{15} = 2.108$

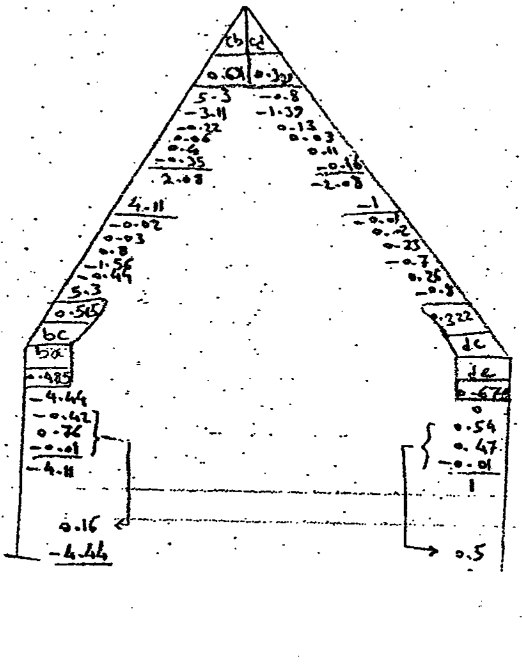

20
20
گراس
معرلی


c
10ft
20K
b
EI ثابت
d
15 ft
a
e
10 ft
30 ft

$\frac{\Delta}{\sin 63.4} = \frac{\Delta_{cd}}{\sin 45} = \frac{\Delta_{bc}}{\sin 71.6} \rightarrow \begin{matrix}\Delta_{cd} = 0.8\Delta \\ \Delta_{bc} = 1.06\Delta\end{matrix}$


Δ cd
63.4
71.6 45
Δ bc
Δ

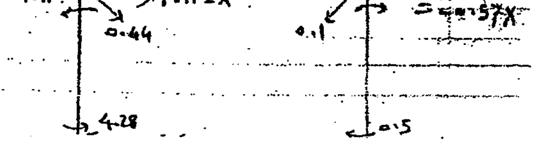



cb
cd
0.51
0.39
5.3
-0.8
-3.11
-1.39
-0.06
0.13
0.11
-0.35
-0.16
2.08
-2.08
4.11
-1
-0.02
-0.03
0.8
-0.23
-1.56
0.7
5.3
0.5
bc
ba
dc
de
0.485
0.678
-4.44
0.54
-0.42
0.47
0.76
-0.01
-0.01
1
-4.11
0.16
-4.44
0.5

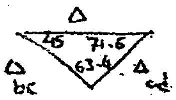
$M_{ab} = M_{ba} = \frac{-6EI\Delta}{225} = -4.44$

$M_{bc} = M_{cb} = +\frac{6EI(1.06\Delta)}{200} = 5.3$

$M_{cd} = M_{dc} = -\frac{6EI(0.8\Delta)}{1000} = -0.8$


2.08
4.11
1.11 = X
0.44
1
0.1
-0.64
= -0.57X
4.28
0.5

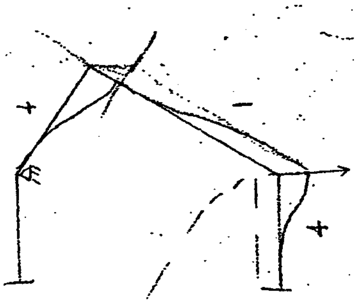
$$\frac{\Delta}{\sin 63.4} = \frac{\Delta_{bc}}{\sin 71.6} = \frac{\Delta_{cd}}{\sin 45} \longrightarrow \begin{array}{l}\Delta_{bc} = 1.1\Delta \\ \Delta_{cd} = 0.8\Delta\end{array}$$

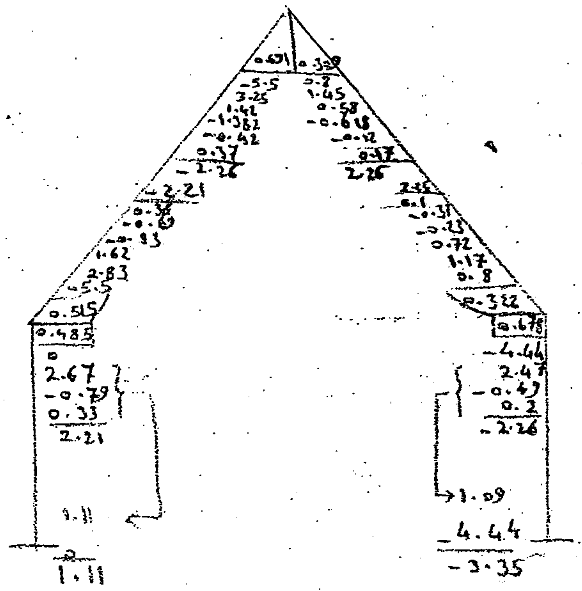

Δ
45
71.6
63.4
Δ bc
Δ cd

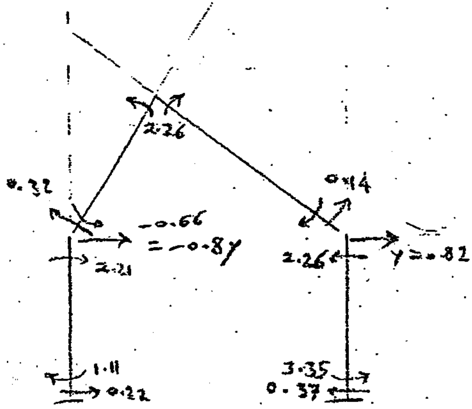
$$M_{cd} = -\frac{6EI\Delta}{15^2} = -4.44$$

$$M_{cd} = +\frac{6EI\,(0.8\Delta)}{1000} = 0.8$$

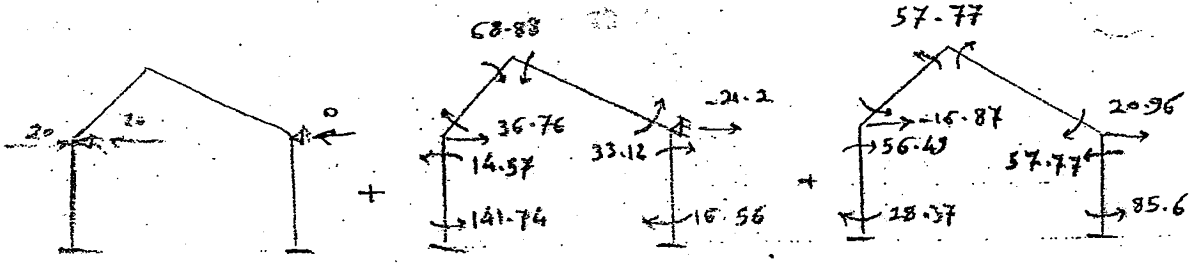
$$M_{bc} = -\frac{6EI(1.1\Delta)}{200} = -5.5$$

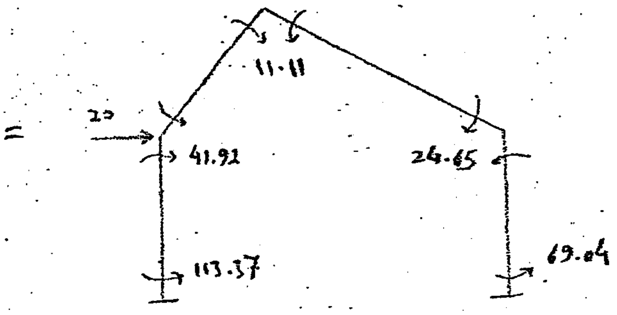



0.671
0.329
-5.5
3.25
1.42
-1.382
-0.42
0.37
-2.26
-2.21
-0.37
-0.69
-0.83
1.62
2.83
-5.5
0.515
0.485
0
2.67
-0.79
0.33
2.21
1.11
0
1.11
0.8
1.45
0.58
-0.618
-0.12
0.47
2.26
2.35
-0.1
-0.31
-0.23
-0.72
1.17
0.8
0.322
0.678
-4.44
2.47
-0.49
0.2
-2.26
1.09
-4.44
-3.35

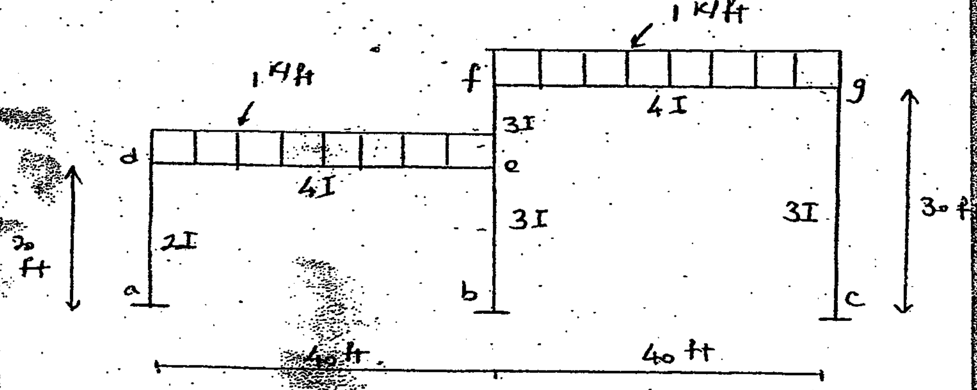

2.26
0.32
0.44
-0.66
= -0.87
2.21
2.26
Y = 0.82
1.11
0.22
3.35
0.37

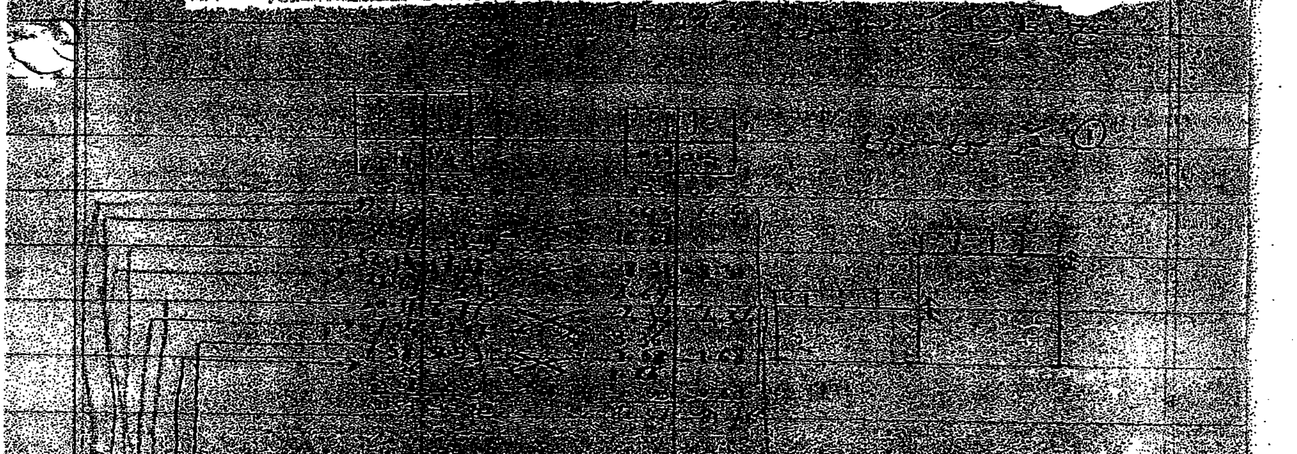
$$\begin{cases} -0.87Y + X = 20 \\ Y - 0.57X = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X = 36.76 \\ Y = 20.96 \end{cases}$$

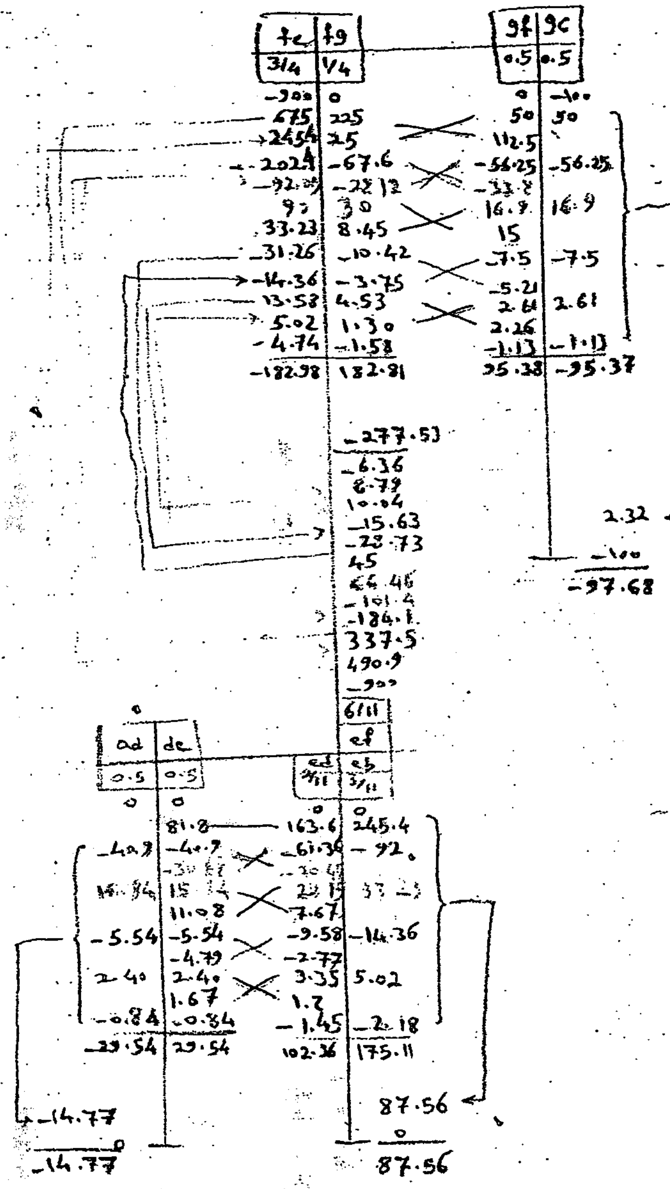

20
20
0
+
68.83
36.76
-21.2
14.57
33.12
141.74
16.56
+
57.77
-16.87
20.96
56.49
57.77
28.37
85.6

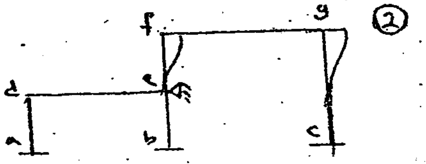

=
11.11
20
41.92
24.65
113.37
69.04

۱۴ قاب شکل (14-27) را با استفاده از روش پخش لنگر مورد تجزیه و تحلیل قرار دهید.


1 K/ft
1 K/ft
f
g
d
e
a
b
c
4I
4I
3I
3I
3I
2I
20 ft
30 ft
40 ft
40 ft

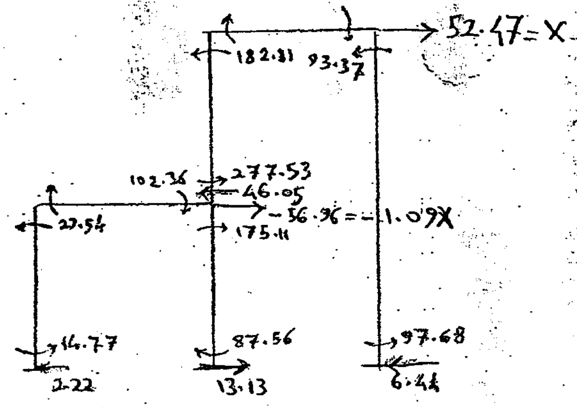



fe | fg
3/4 | 1/4
-900 | 0
675 | 225
245.4 | 25
-202.4 | -67.6
-92.05 | -22.12
90 | 30
33.23 | 8.45
-31.26 | -10.42
-14.36 | -3.75
13.58 | 4.53
5.02 | 1.30
-4.74 | -1.58
-182.98 | 182.81
gf | gc
0.5 | 0.5
0 | -100
50 | 50
112.5
-56.25 | -56.25
-33.8
16.9 | 16.9
15
-7.5 | -7.5
-5.21
2.61 | 2.61
2.26
-1.13 | -1.13
95.38 | -95.37
2.32
-100
-97.68
-277.53
-6.36
8.79
10.04
-15.63
-23.73
45
66.46
-101.4
-184.1
337.5
490.9
-900
6/11
ef
ad | de
0.5 | 0.5
0 | 0
0
81.8
-40.9 | -40.7
-30.67
15.34 | 15.34
11.08
-5.54 | -5.54
-4.79
2.40 | 2.40
1.67
-0.84 | -0.84
-29.54 | 29.54
ed | eb
5/11 | 3/11
0 | 0
163.6 | 245.4
-61.36 | -92.0
-30.45
23.15 | 33.23
7.67
-9.58 | -14.36
-2.77
3.35 | 5.02
1.2
-1.45 | -2.18
102.36 | 175.11
-14.77
0
-14.77
87.56
0
87.56

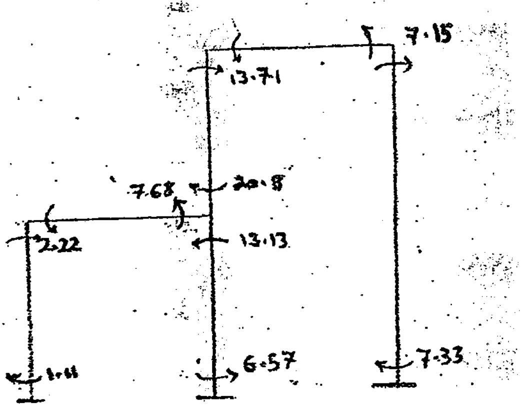


$$M_{ef} = M_{fe} = -\frac{6E(3I)\Delta}{100} = -900$$

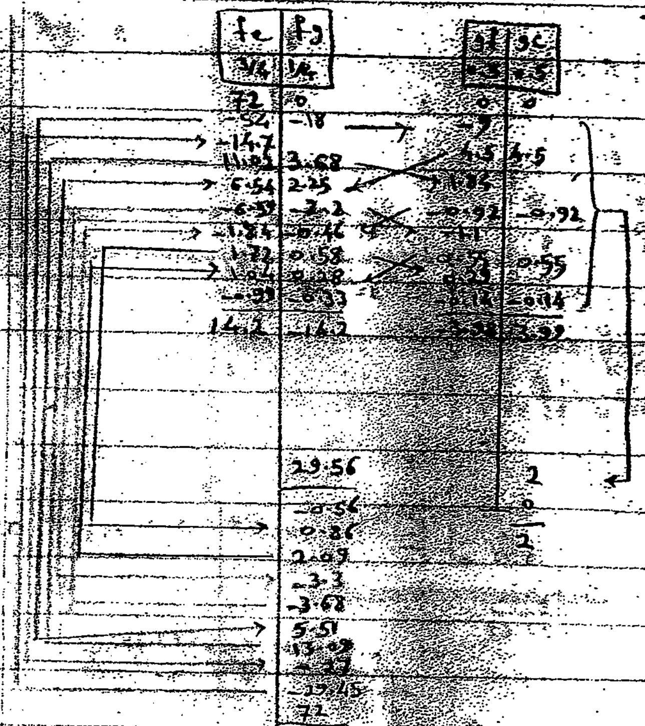
$$M_{gc} = M_{cg} = -\frac{6E(3I)\Delta}{900} = -100$$

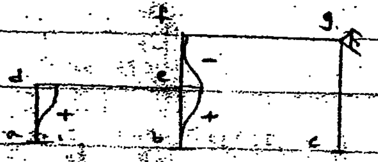

52.47 = X
182.31
93.37
102.36
277.53
46.05
-56.96 = -1.09X
27.54
175.11
14.77
87.56
97.68
2.22
13.13
6.44

$$\times \frac{-3.94}{52.47} = -0.075$$


7.15
13.71
7.68
20.8
2.22
13.13
1.11
6.57
7.33

③

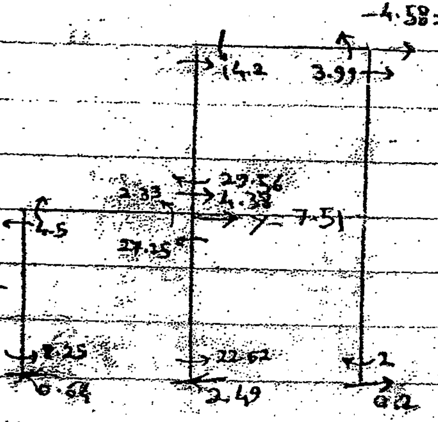

fe
fg
gf
gc
72
-18
29.56
-22.62
14.2
-14.2
3.99
-3.99

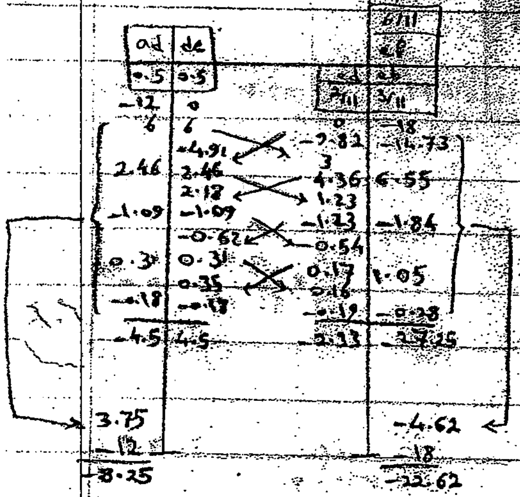


$M_{ad}=M_{da}=-12$

$M_{bc}=M_{cb}=-18$

$M_{ef}=M_{fe}=+72$

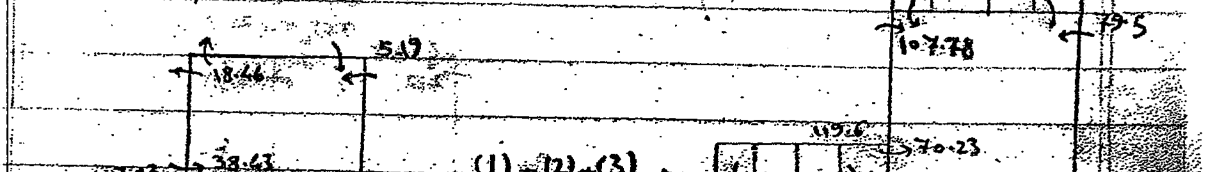

-4.58=-0.6y
14.2
3.99
29.56
4.38
7.51
4.5
2.33
27.25
8.25
6.64
22.62
2.49
2
0.2


ad
de
0.5
0.5
-12
-4.5
4.5
-2.33
-27.25
3.75
-12
-8.25
-4.62
-18
-22.62

معادلات سازگاری

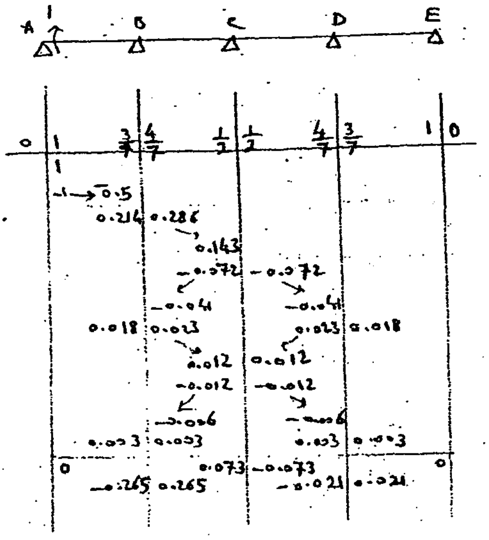
$$\begin{cases} 0.6y+x=1.93 \\ y-1.09x=-5.47 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-3.94 \\ y=-9.78 \end{cases}$$

$$\times\frac{9.78}{7.51}=-1.3$$

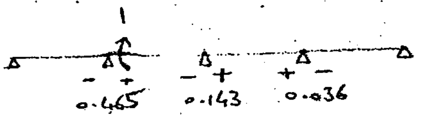

18.46
5.17
3.33
38.43
5.85
35.4
10.7
29.4
2.6
(1)+(2)+(3)
119.6
107.78
79.5
70.23
86.25
49.07
50.9
12.84

(3)

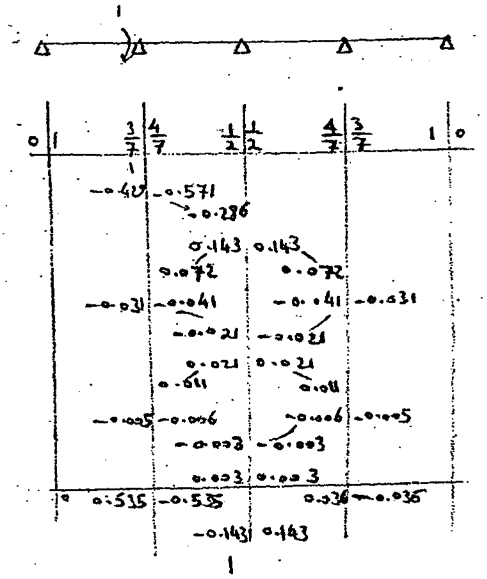
14-7 یک تیر سرتاسری چهار دهانه با مقطع ثابت را که طول هر دهانه آن ۲۴ft می باشد، در نظر بگیرید. عرض خط تأثیر مربوط به لنگر تکیه گاه وسط را در نقطه های ۶ فوتی محاسبه کنید.



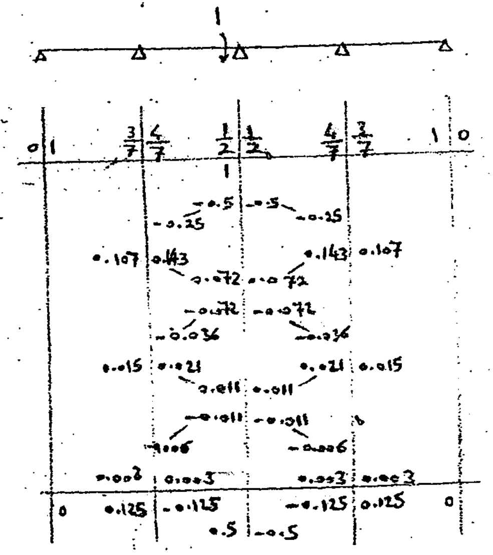
A
B
C
D
E
1
0
3/7
4/7
1/2
1/2
4/7
3/7
1
0
-0.5
0.214
0.286
0.143
-0.072
-0.072
-0.041
-0.041
0.018
0.023
0.023
0.018
0.012
0.012
-0.012
-0.012
-0.006
-0.006
0.003
0.003
0.003
0.003
0.073
-0.073
-0.265
0.265
-0.021
0.021



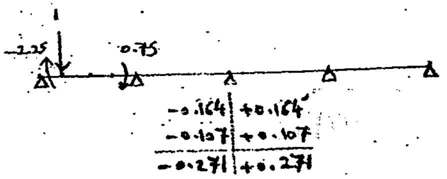
1
0.465
0.143
0.036



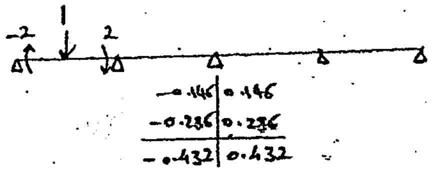
1
0
3/7
4/7
1/2
1/2
4/7
3/7
1
0
-0.429
-0.571
-0.286
0.143
0.143
0.072
0.072
-0.031
-0.041
-0.041
-0.031
-0.021
-0.021
0.021
0.021
0.011
0.011
-0.005
-0.006
-0.006
-0.005
-0.003
-0.003
0.003
0.003
0.535
-0.535
0.036
-0.036
-0.143
0.143



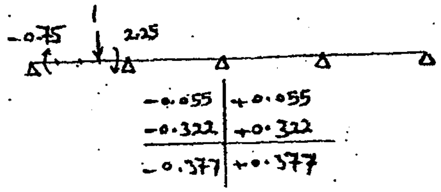
1
0
3/7
4/7
1/2
1/2
4/7
3/7
1
0
-0.5
-0.5
-0.25
-0.25
0.107
0.143
0.143
0.107
0.072
0.072
-0.072
-0.072
-0.036
-0.036
0.015
0.021
0.021
0.015
0.011
0.011
-0.011
-0.011
-0.006
-0.006
0.003
0.003
0.003
0.003
0.125
-0.125
-0.125
0.125
0.5
-0.5



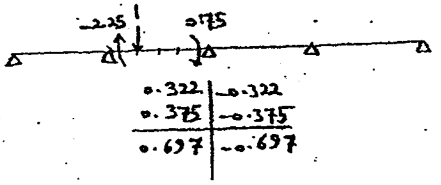
1
2.25
0.75
-0.164
+0.164
-0.107
+0.107
-0.271
+0.271



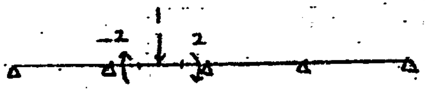
1
2
2
-0.146
0.146
-0.286
0.286
-0.432
0.432



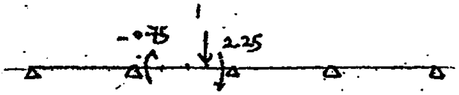
1
0.75
2.25
-0.055
+0.055
-0.322
+0.322
-0.377
+0.377



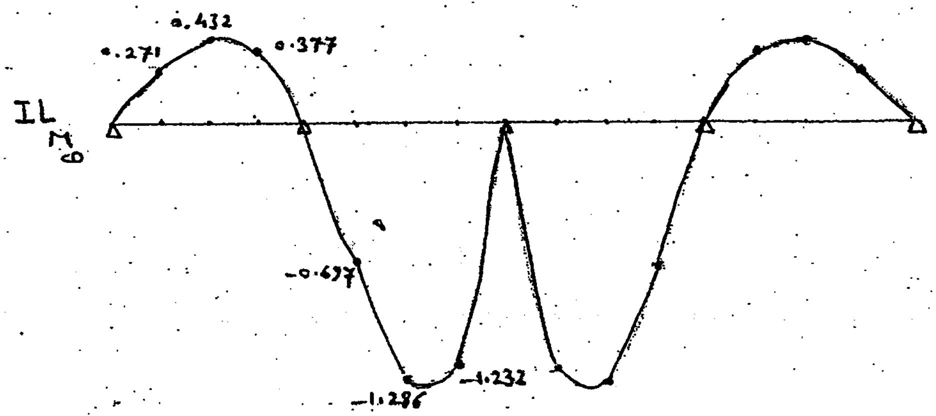
1
2.25
0.75
0.322
-0.322
0.375
-0.375
0.697
-0.697



0.286	-0.286
1	-1
1.286	-1.286



0.107	-0.107
1.125	-1.125
1.232	-1.232

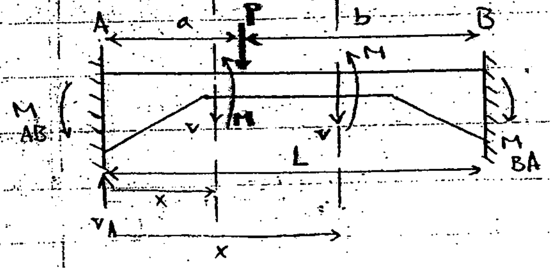

IL
M_{CD}
0.271
0.432
0.377
-0.697
-1.286
-1.232

« هو العلیم »

مصطفی صامتیان
88481272

سری چهارم
تحلیل تیرها و قاب‌های نامعین
متشکل از اعضاء با مقطع متغیر

15-1 تیری با مقطع متغیر، مطابق شکل 15-21 ، در دو طرف گیردار بوده و تحت اثر بار P قرار دارد. روابط لازم برای یافتن لنگرهای گیرداری را بدست آورید.



$$M+M_{AB}-V_AX=0\rightarrow M=-M_{AB}+V_AX\quad(0<X<a)$$

$$M+P(X-a)+M_{AB}-V_AX=0$$

$$\rightarrow M=-P(X-a)-M_{AB}+V_AX\quad(a<X<L)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^l\frac{M\,dx}{EI}=0\xrightarrow{E=cte}\int_0^a\frac{(-M_{AB}+V_AX)}{I}dx+\int_a^L\frac{[-P(x-a)-M_{AB}+V_Ax]\,dx}{I}=0\\&\int_0^l\frac{M\,x\,dx}{EI}=0\xrightarrow{E=cte}\int_0^a\frac{(-M_{AB}+V_AX)x}{I}dx+\int_a^L\frac{[-P(X-a)-M_{AB}+V_AX]\,x\,dx}{I}=0\end{aligned}\right\}$$

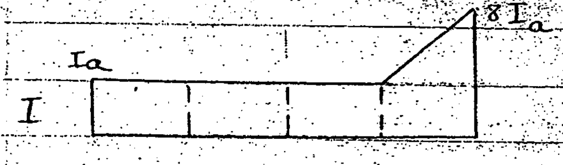
$$\rightarrow\begin{cases}-M_{AB}\int_0^a\frac{dx}{I}+V_A\int_0^a\frac{x\,dx}{I}+\int_a^L\frac{-P(x-a)\,dx}{I}-M_{AB}\int_a^L\frac{dx}{I}+V_A\int_a^L\frac{x\,dx}{I}=0\\-M_{AB}\int_0^a\frac{x\,dx}{I}+V_A\int_0^a\frac{x^2dx}{I}+\int_a^L\frac{-P(x-a)x\,dx}{I}-M_{AB}\int_a^L\frac{x\,dx}{I}+V_A\int_a^L\frac{x^2dx}{I}=0\end{cases}$$

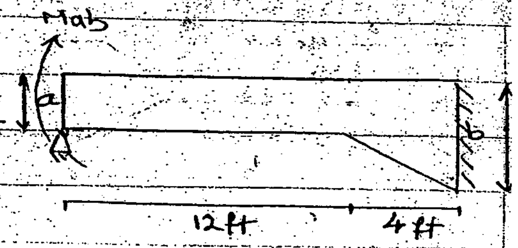
$$\xrightarrow{\frac{-\int_0^L\frac{x^2dx}{I}}{\int_0^L\frac{x\,dx}{I}}}\begin{cases}-M_{AB}\int_0^L\frac{dx}{I}+V_A\int_0^L\frac{x\,dx}{I}=\int_a^L\frac{P(x-a)\,dx}{I}\\-M_{AB}\int_0^L\frac{x\,dx}{L}+V_A\int_0^L\frac{x^2dx}{I}=\int_a^L\frac{P(x-a)\,x\,dx}{I}\end{cases}$$

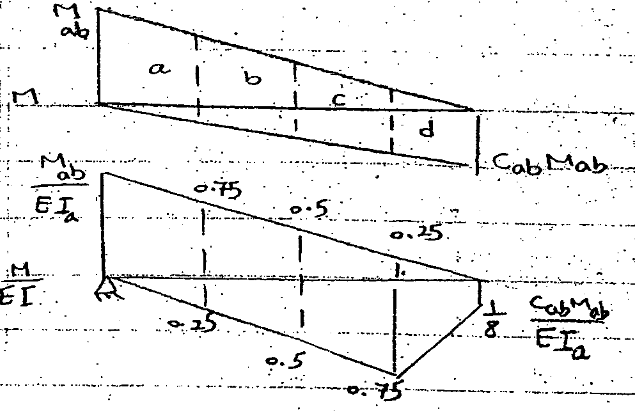
$$\rightarrow\boxed{M_{AB}=\frac{-\int_0^L\frac{x^2dx}{I}\int_a^L\frac{P(x-a)\,dx}{I}+\int_a^L\frac{P(x-a)x\,dx}{I}\int_0^L\frac{x\,dx}{I}}{\int_0^L\frac{x^2dx}{I}\int_0^L\frac{dx}{I}-\left(\int_0^L\frac{x\,dx}{I}\right)^2}}$$

$$\boxed{M_{BA}=\frac{-\int_0^L\frac{x^2dx}{I}\int_b^L\frac{P(x-b)\,dx}{I}+\int_b^L\frac{P(x-b)\,x\,dx}{I}\int_0^L\frac{x\,dx}{I}}{\int_0^L\frac{x^2dx}{I}\int_0^L\frac{dx}{I}-\left(\int_0^L\frac{x\,dx}{I}\right)^2}}$$

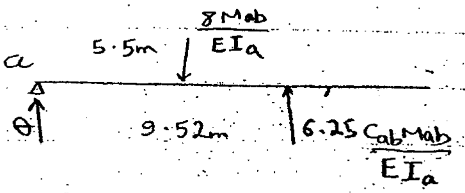
15 تیر با عمق متغیری که عرض مقطع آن ثابت می باشد مطابق شکل 22-15 مفروض است. مقادیر C_{ab}، C_{ba}، S_{ab} و S_{ba} را به روش عددی محاسبه کنید.




Mab
a
2 ft
b
12 ft
4 ft

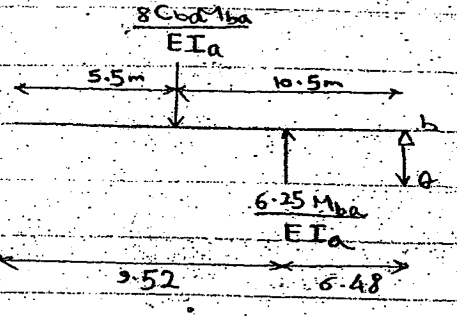

M_{ab}
a
b
c
d
M
$C_{ab}M_{ab}$
$\frac{M_{ab}}{EI_a}$
0.75
0.5
0.25
1
$\frac{M}{EI}$
0.25
0.5
0.75
$\frac{1}{8}\frac{C_{ab}M_{ab}}{EI_a}$

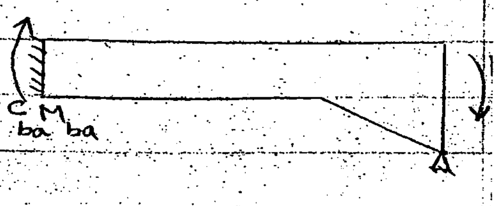
حوزه	X	①		②	
		سطح	لنگر	سطح	لنگر
a	2	3.5	7	0.5	1
b	6	2.5	15	1.5	9
c	10	1.5	15	2.5	25
d	14	0.5	7	1.75	24.5
		$\frac{8M_{ab}}{EI_a}$	$\frac{44M_{ab}}{EI_a}$	$6.25\frac{C_{ab}M_{ab}}{EI_a}$	$59.5\frac{C_{ab}M_{ab}}{EI_a}$


$\frac{8M_{ab}}{EI_a}$
a
5.5m
θ
9.52m
$6.25\frac{C_{ab}M_{ab}}{EI_a}$

$$\Sigma M_a=0 \longrightarrow 44\frac{\cancel{M_{ab}}}{\cancel{EI_a}}=59.5\frac{C_{ab}\cancel{M_{ab}}}{\cancel{EI_a}} \longrightarrow \boxed{C_{ab}=0.74}$$

$$\theta=1 \longrightarrow \Sigma F_y=0:\ 1+\frac{6.25\times0.74\,S_{ab}}{EI_a}=\frac{8\,S_{ab}}{EI_a} \longrightarrow \boxed{S_{ab}=\frac{EI_a}{3.375}=4.74\frac{EI_a}{L}}$$

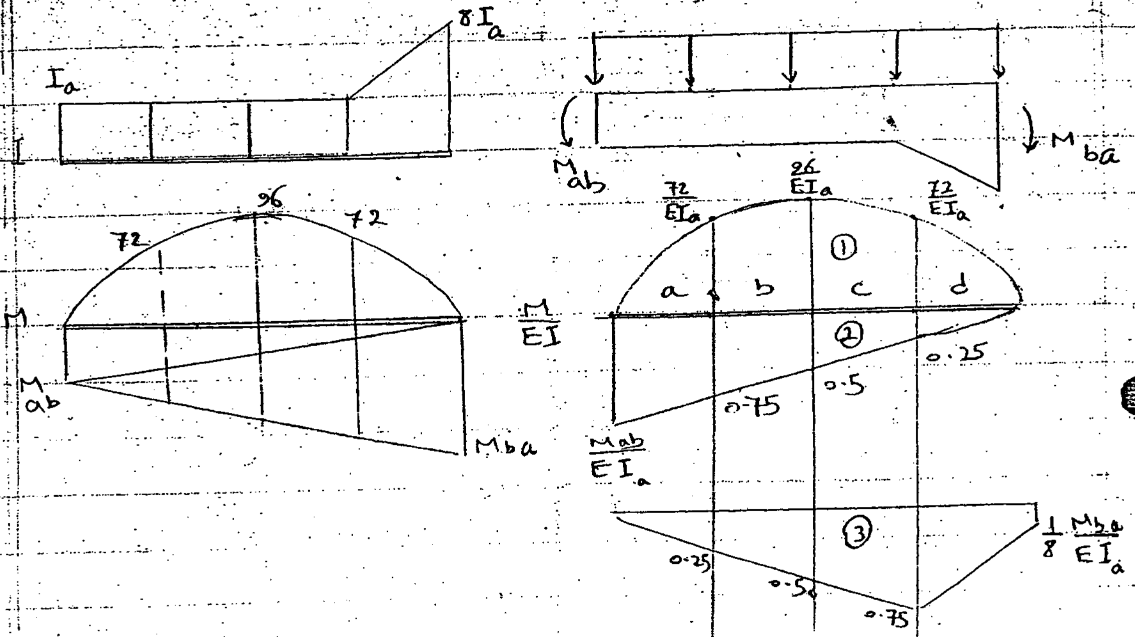

$\frac{8C_{ba}M_{ba}}{EI_a}$
5.5m
10.5m
b
θ
$\frac{6.25M_{ba}}{EI_a}$
9.52
6.48



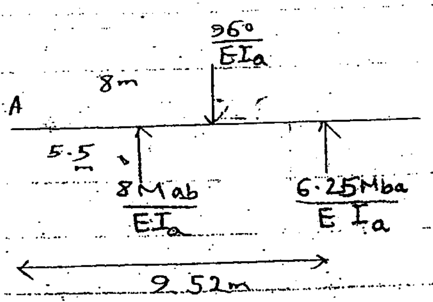
$$\Sigma M_b=0 \longrightarrow 10.5\ \frac{8C_{ba}M_{ba}}{EI_a}=6.48\ \frac{6.25\,M_{ba}}{EI_a} \longrightarrow \boxed{C_{ba}=0.48}$$

$$\Sigma F_y=0 \longrightarrow 1+\frac{8\times0.48\times S_{ba}}{EI_a}=\frac{6.25\,S_{ba}}{EI_a} \longrightarrow \boxed{S_{ba}=6.64\frac{EI_a}{L}}$$

15-3 با استفاده از روش عددی، لنگرهای گیرداری تیر شکل (22-15) را که تحت اثر بار گسترده با شدت 3 kips/ft قرار دارد محاسبه نمائید

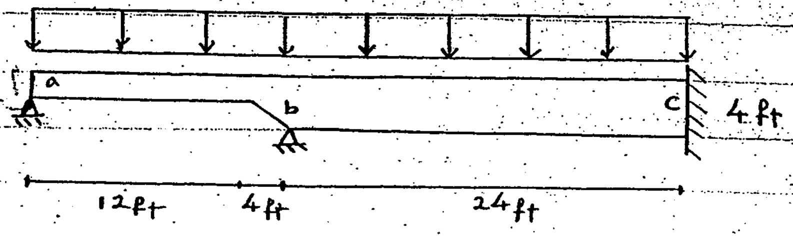

$8I_a$
I_a
M_{ab}
M_{ba}
96
72
72
M
M_{ab}
M_{ba}
$\frac{M}{EI}$
$\frac{72}{EI_a}$
$\frac{96}{EI_a}$
$\frac{72}{EI_a}$
①
a
b
c
d
②
0.25
0.5
0.75
$\frac{M_{ab}}{EI_a}$
③
$\frac{1}{8}\frac{M_{ba}}{EI_a}$
0.25
0.5
0.75

حوزه	X	① سطح	① لنگر	② سطح	② لنگر	③ سطح	③ لنگر
a	2	144	288	3.5	7	0.5	1
b	6	336	2016	2.5	15	1.5	9
c	10	336	3360	1.5	15	2.5	25
d	14	144	2016	0.5	7	1.75	24.5
		$\frac{960}{EI_a}$	$\frac{7680}{EI_a}$	$\frac{8M_{ab}}{EI_a}$	$\frac{44M_{ab}}{EI_a}$	$\frac{6.25M_{ba}}{EI_a}$	$\frac{59.5M_{ba}}{EI_a}$


$\frac{960}{EI_a}$
A
8m
5.5
$\frac{8M_{ab}}{EI_a}$
$\frac{6.25M_{ba}}{EI_a}$
9.52m

$$\sum_A M=0 \longrightarrow 7680 = 44M_{ab} + 59.5M_{ba}$$
$$\sum F_y=0 \longrightarrow 960 = 8M_{ab} + 6.25M_{ba}$$
$$\longrightarrow \begin{cases} M_{ab} = 45.37 \text{ ft.kips} \\ M_{ba} = 95.52 \text{ ft.kips} \end{cases}$$

15-4 با محاسبات مربوط به مسائل 2-15 و 3-15 را مورد استفاده قرار داده و با روش پخش لنگر، تیر شکل (23-15) را که تحت اثر بار گسترده‌ای به شدت $3\ \frac{kips}{ft}$ قرار دارد، حل کنید.



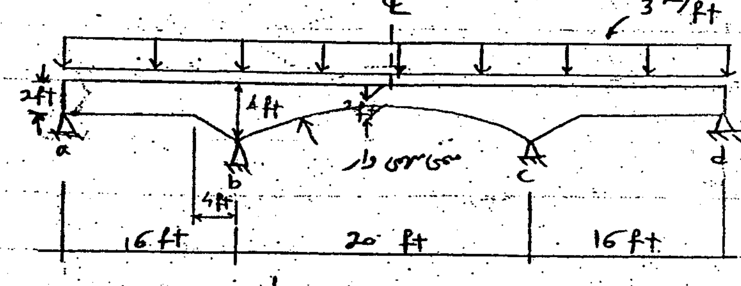
$$S_{ba} = 7.43\frac{EI_a}{16} \longrightarrow S'_{ba} = S_{bc}(1 - \overset{0.343}{\cancel{C_{ab}C_{ba}}}) = 7.43\frac{EI_a}{16}\, 0.657 = 0.305EI_a$$

$$S_{bc} = \cancel{4}\frac{EI_b}{\underset{6}{\cancel{24}}} = \frac{E}{6}8I_a = 1.333EI_a$$

$0.462 \leftarrow$ $0.743 \rightarrow$ $\overset{0.5}{\longleftrightarrow}$

$\frac{S'}{\Sigma S'}$	0	1	0.814	0.186	0	1
FEM		-50	96	-144	144	
		+50 $\longrightarrow$	37.15			
			8.83	2.02 $\longrightarrow$	1.01	
		0	141.98	-141.98	145	

15-6 با استفاده از محاسبات مسائل 2-15 و 3-15 و نمودارهای بخش 5-15، لنگر تکیه‌گاه b از تیر شکل (24-15) را بروش پخش لنگرها حل کنید.



$$S_{ba} = 7.43\frac{EI_a}{L} \longrightarrow S'_{ba} = S_{ba}(1 - C_{ab}C_{ba}) = 7.43\frac{EI_a}{16}(1 - 0.743 \times 0.462)$$

$$\longrightarrow \underline{S'_{ba} = 0.305EI_a}$$

$$S_{bc} = 12\frac{EI_c}{20} = 12\frac{EI_a}{20} \longrightarrow \underline{S'_{bc}} = S_{bc}(1 - \underset{0.7}{\cancel{C_{bc}}}) = \frac{12EI_a}{20} \times 0.3 = \underline{0.18EI_a}$$

$$M_{bc} = -0.1025 \times 3 \times 20^2 = -123$$

$\xrightarrow{0.743}$

o	1	0.63	0.37
	ab	ba	bc
FEM	-50	96	-123
	50 $\rightarrow$	37.15	
	0	-6.39	-3.76
	0	126.76	-126.76

15-7 با استفاده از معادلات کلی شیب - افت نتایج 6-15 را کنترل کنید.

$$M_{ab} = S_{ab}\left[\theta_a + C_{ab}\theta_b - \frac{\Delta}{L}(1+C_{ab})\right] \pm M^F_{ab} = 4.62\frac{EI_a}{16}\left[\theta_a + 0.743\theta_b\right] - 50$$

$$M_{ba} = S_{ba}\left[\theta_b + C_{ba}\theta_a - \frac{\Delta}{L}(1+C_{ba})\right] \pm M^F_{ba} = 7.43\frac{EI_a}{16}\left[\theta_b + 0.462\theta_a\right] + 96$$

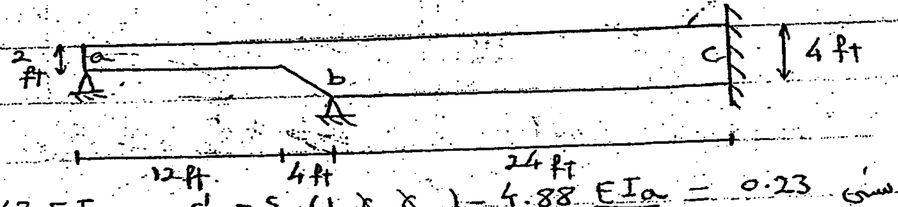
$$M_{bc} = \frac{12EI_a}{20}\left[\theta_b + 0.7(-\theta_b)\right] - 123 = \frac{3.6EI_a\theta_b}{20} - 123 \quad *$$

$$-\frac{0.215}{0.29}\begin{cases} M_{ab} = 0 \rightarrow 0.29\theta_a EI_a + 0.215\theta_b EI_a - 50 = 0 \\ M_{ba} + M_{bc} = 0 \rightarrow 0.64\theta_b EI_a + 0.215\theta_a EI_a - 27 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow 0.48\theta_b EI_a + 10.07 = 0 \rightarrow \theta_b = -\frac{21}{EI_a}$$

$$\xrightarrow{*} M_{bc} = \frac{12\cancel{EI_a}}{20}\,\frac{-6.3}{\cancel{EI_a}} - 123 = -126.78 \quad \text{ok}$$

15-5 با استفاده از روش پخش لنگر، لنگرهای تیر شکل (15-23) را که تکیه‌گاه b آن به اندازه 1 in نشست کرده باشد، محاسبه کنید. مقدار $E = 30{,}000\ \text{kips/in}^2$ و $I_a = 2000\ \text{in}^4$ هستند



$$S_{ba} = 7.43\frac{EI_a}{L_{ab}} \rightarrow S'_{ba} = S_{ba}(1 - \cancel{C_{ab}}\cancel{C_{ba}}) = 4.88\frac{EI_a}{16} = 0.23$$ نسبی

$0.743 \quad 0.462$

$$S_{bc} = \frac{4EI_b}{L_{bc}} = \frac{32EI_a}{24} = 1.33$$ نسبی

$$M^F_{ab} = \frac{-\Delta}{L} S_{ab}(1+C_{ab}) = -\frac{1/12}{16} 4.62 \frac{EI_a}{L}(1+0.743)$$

$$= -\frac{1/12}{16} 4.62 \times 30000 \frac{\text{kips}}{\text{in}^2} \times \frac{144\text{in}^2}{\text{ft}^2} \times 2000\text{in}^4 \times \frac{1\text{ft}^4}{12^4\text{in}^4} \frac{1.743}{16} = -1092 \text{ kips}$$

$$M^F_{ba} = \frac{-\Delta}{L} S_{ba}(1+C_{ba}) = -\frac{1/12}{16} 7.43 \frac{EI_a}{L}(1+0.462)$$

$$= -\frac{1/12}{16} \times 7.43 \times 30000 \times 144 \times 2000 \times \frac{1}{12^4} \times \frac{1.743}{16} = -1473 \text{ kips}\cdot\text{ft}$$

$$M^F_{bc} = \frac{6EI\Delta}{L^2} = 6 \times 30000 \times 144 \times 8 \times 2000 \times \frac{1}{12^4} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{24^2} = 2893.6 \text{ kips}\cdot\text{ft}$$

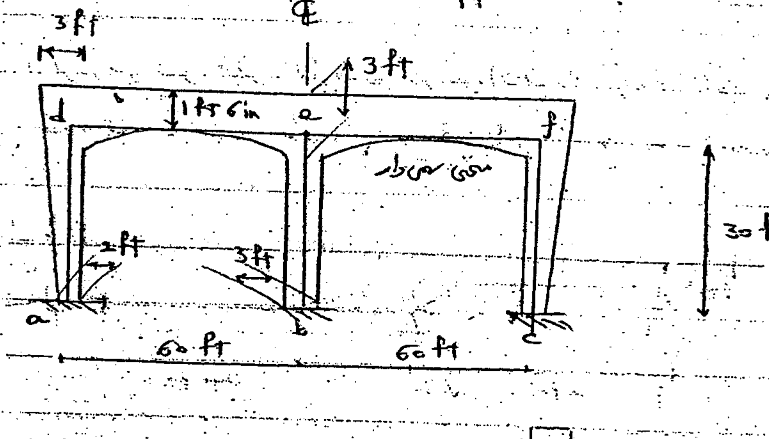
$\xleftarrow{0.462}$ $\xrightarrow{.743}$ $\xrightarrow{0.5}$

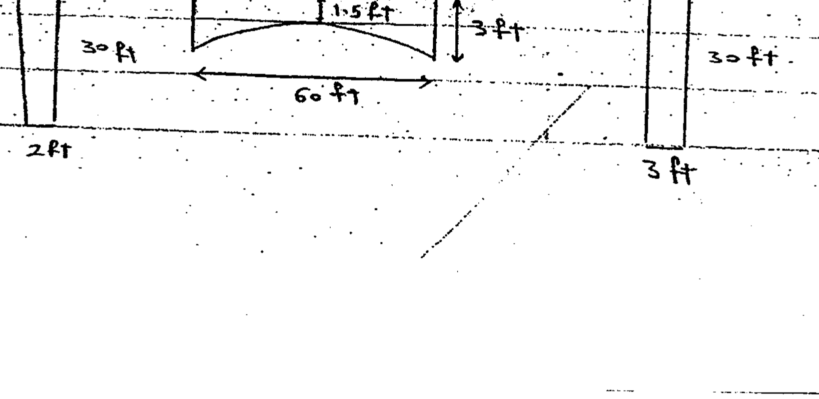
0	1	0.147	0.853	0	1
FEM	-1092	-1473	2893.6	2893.6	
	1092 →	811.36			
		-328.1	-1903.9 →	-951.9	
	0	-989.7	+989.7	1941.7	

15-8 با استفاده از اطلاعات مربوط به بخش های 3-15 و 5-15 و کاربرد روش پخش لنگر، لنگر های انتهای اعضای قاب شکل (25-15) را برای حالات زیر تعیین کنید.

1- بار گسترده‌ای که بر روی دهانه های d تا f به شدت $1\frac{\text{kips}}{\text{ft}}$ و به طرف پایین اثر می‌کند.

2- بار گسترده افقی به شدت $1\frac{\text{kips}}{\text{ft}}$ که از طرف راست روی تمام دهانه ad وارد می‌شود.





$S_{da} = S_{fc} = 10.1\,\frac{EI_a}{L} = 10.1\,\frac{E\left(\frac{b\times 2^3}{12}\right)}{30} = 0.224$ نسبی

$S_{de} = S_{ed} = S_{ef} = S_{fe} = 12\,\frac{EI_c}{L} = 12\,\frac{E\left(\frac{b\times 1.5^3}{12}\right)}{60} = 0.056$ نسبی

$S_{eb} = \frac{4EI}{L} = 4E\,\frac{\left(\frac{b\times 3^3}{12}\right)}{30} = 0.3$ نسبی

$C_{da} = C_{fc} = 0.369$ $\quad C_{de} = C_{ed} = C_{ef} = C_{fe} = 0.7 \quad C_{eb} = 0.5$

(1

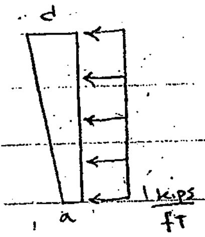
$M^F_{ad} = M^F_{be} = M^F_{cf} = 0 = M^F_{da} = M^F_{eb} = M^F_{fc}$

$M^F_{ed} = -M^F_{de} = M^F_{fe} = -M^F_{ef} = 0.1025\,wL^2 = 0.1025\times 1\times 60^2 = 369$ ft.kips

0.7 ↔ (de–ed) $\quad$ 0.7 ↔ (ef–fe)

	da	de	ed	eb	ef	fe	fc
$\frac{S}{\Sigma S}$	0.8	0.2	0.136	0.728	0.136	0.2	0.8
	0	-369	369	0	-369	369	0
	295.2	73.8	0	0	0	-73.8	-295.2
		0	+51.66		-51.66	0	
	295.2	-295.2	420.66	0	-420.66	295.2	-295.2
	0.369 ↓			0.5 ↓			↓ 0.369
	108.9			0			-108.9

(2 α حرکت جانبی گره‌ها دارد ← تیپ 1B ثبت (بار در عضو) ← کراس معمولی + تیپ A



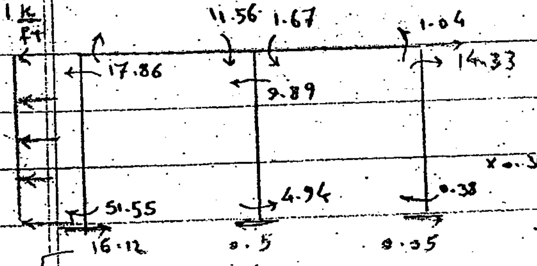
$M_{ad} = +0.0646\,wL^2 = 58.14$

$M_{da} = -0.105\,wL^2 = -94.5$

کراس

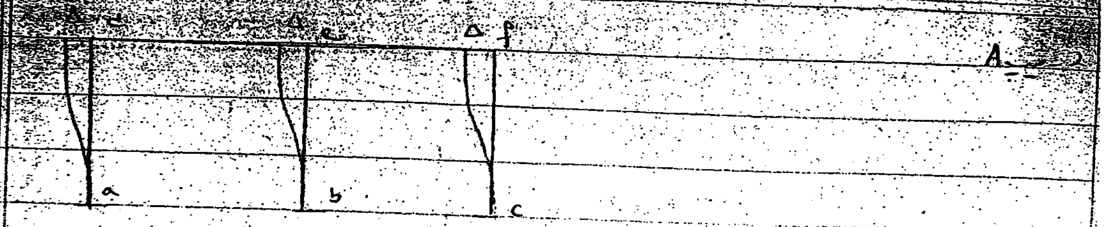
0.7 ↔ $\quad$ 0.7 ↔

da	de	ed	eb	ef	fe	fc
0.8	0.2	0.136	0.728	0.136	0.2	0.8
-94.5	0	0	0	0	0	0
75.6	18.9 →	13.23				
	-1.78 ←	-1.8	-9.63	-1.8 →	-1.26	
1.008	0.25 →	0.18		0.18 ←	0.25	1.008
	-0.04 ←	-0.05	-0.26	-0.05 →	-0.04	
0.03	0.01				0.01	0.03
-17.86	17.86	11.56	-9.89	-1.67	-1.04	1.04
×0.369 ↓			×0.5 ↓			↓ ×0.369
-6.59			-4.94			0.38
58.14			0			0
51.55			-4.94			0.38



$\rightarrow -17.86 + 51.55 - 30V + 30\times 15 = 0$

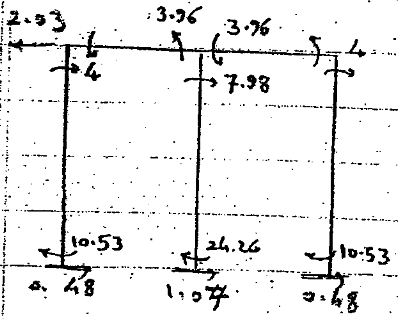
$\rightarrow V = 16.12$

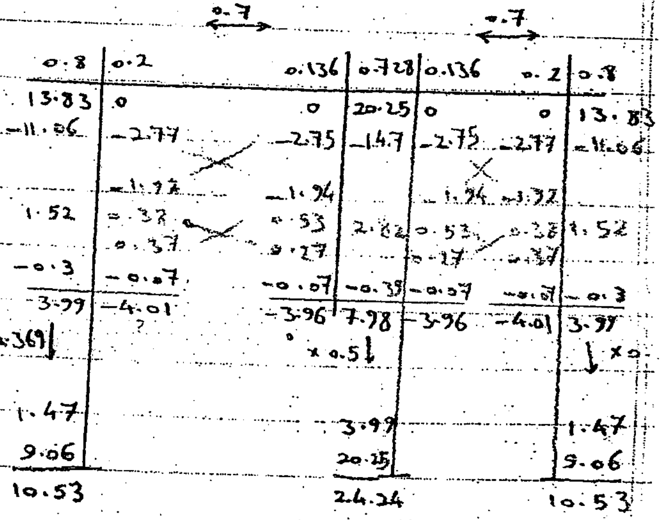

Δ d
Δ e
Δ f
a
b
c
A

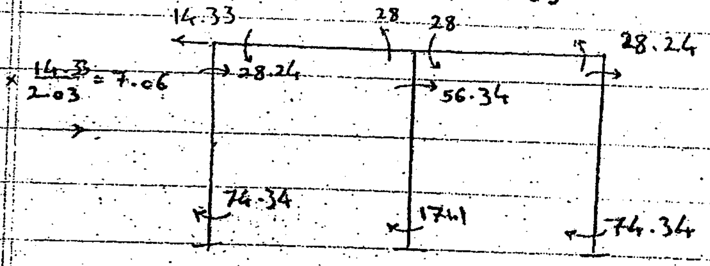
$$M_{ad} = \frac{\Delta}{L} S_{ad} (1 + C_{ad}) = M_{cf} = \frac{\Delta}{L} (5.41 \frac{EIa}{L})(1 + 0.675) = 9.06$$ سمي

$$M_{da} = M_{fc} = \frac{\Delta}{L} S_{da} (1 + C_{da}) = \frac{\Delta}{L} (10.1 \frac{EIa}{L})(1 + 0.369) = 13.83$$ سمي

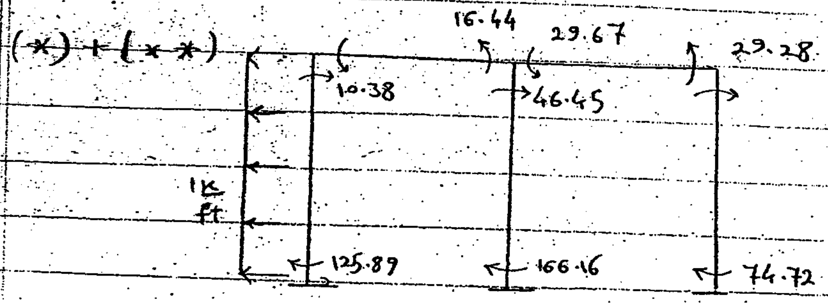
$$M_{be} = M_{eb} = \frac{6EI_b\Delta}{L^2} = \frac{6E(1.5^3 Ia)\Delta}{L^2} = 20.25$$ سمي


2.03
3.96
3.96
4
4
7.98
10.53
24.26
10.53
0.48
1.07
0.48


0.7
0.7
0.8
0.2
0.136
0.728
0.136
0.2
0.8
13.83
0
0
20.25
0
0
13.83
-11.06
-2.77
-2.75
-14.7
-2.75
-2.77
-11.06
-1.37
-1.94
-1.94
-1.37
1.52
0.38
0.53
2.82
0.53
0.38
1.52
0.37
0.27
0.27
0.37
-0.3
-0.07
-0.07
-0.39
-0.07
-0.07
-0.3
-3.99
-4.01
-3.96
7.98
-3.96
-4.01
3.99
× 0.369
× 0.5
× 0
1.47
9.06
10.53
3.99
20.25
24.24
1.47
9.06
10.53


14.33
28
28
28.24
$\frac{14.33}{2.03} = 7.06$
28.24
56.34
74.34
1741
74.34

** X


(*) + (**)
16.44
29.67
29.28
10.38
46.45
1k/ft
125.89
166.16
74.72

تحلیل II

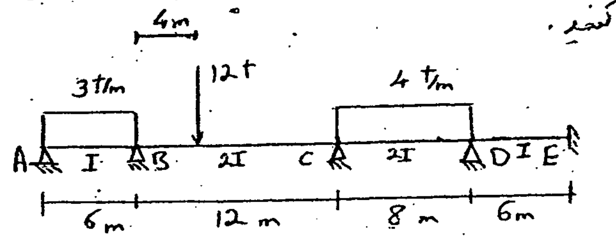
[illegible]

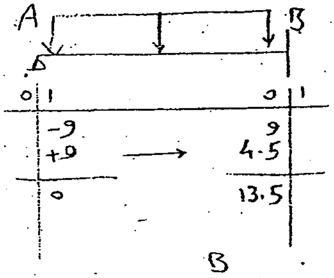
مصطفی ضامحیان
88481272

سری پنجم
روش کانی

سازه های زیر را بروش کانی مورد تحلیل قرار دهید. منحنی های لنگر خمشی، نیروی برشی و منحنی تغییر شکل آنها را رسم کنید.

16 - 1


4m
3 t/m
12 t
4 t/m
A
I
B
2I
C
2I
D
I
E
6m
12 m
8 m
6m

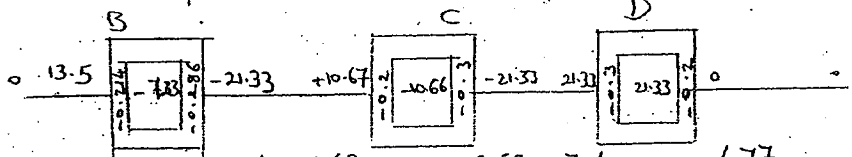

A
B
0
1
0
1
-9
+9
9
4.5
0
13.5

$K_{AB} = \frac{I}{6} \longrightarrow K'_{AB} = \frac{3}{4}\frac{I}{6} = \frac{I}{8}$

$K_{BC} = \frac{2I}{12} = \frac{I}{6}$

$K_{CD} = \frac{2I}{8} = \frac{I}{4}$

$K_{DE} = \frac{I}{6}$


B
C
D
0
13.5
-7.83
-21.33
+10.67
-10.66
-21.33
21.33
21.33
0

1.68	2.24	1.68	2.53	-7.16	-4.77
1.32	1.76	3.21	4.82	-7.86	-5.23
1.00	1.32	3.44	5.15	-7.94	-5.30
0.94	1.26	3.47	5.20	-7.96	-5.31
0.93	1.25	3.47	5.21	-7.96	-5.31

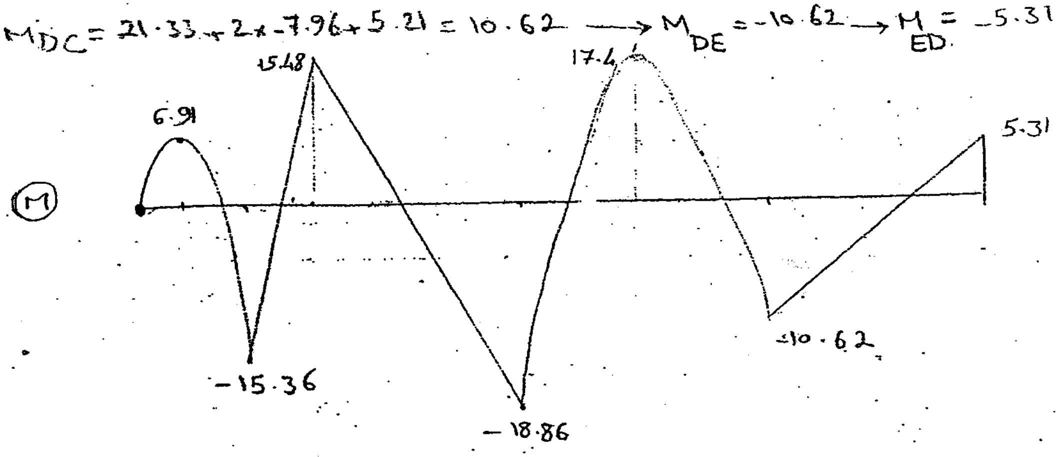
$M_{BA} = 13.5 + 2\times 0.93 + 0 = 15.36 \text{ t.m}$

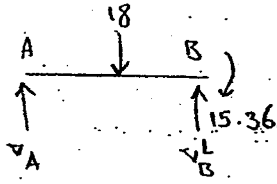
$M_{BC} = -21.33 + 2\times 1.25 + 3.47 = -15.36 \text{ t.m}$

$M_{CB} = +10.67 + 2\times 3.47 + 1.25 = 18.86$

$M_{CD} = -21.33 + 2\times 5.21 - 7.96 = -18.87$

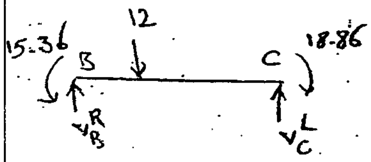
$M_{DC} = 21.33 + 2\times -7.96 + 5.21 = 10.62 \longrightarrow M_{DE} = -10.62 \longrightarrow M_{ED} = -5.31$


Ⓜ
6.91
15.48
-15.36
-18.86
17.4
5.31
-10.62


18
A
B
15.36
V_A
V_B^L

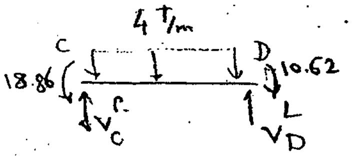
$15.36 - 18\times3 + 6V = 0 \longrightarrow V_A = 6.44\ t$

$6.44 + V_B^L = 18 \longrightarrow V_B^L = 11.56\ t$


12
15.36
18.86
B
C
V_B^R
V_C^L

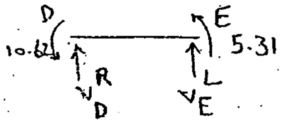
$18.86 - 12\times8 - 15.36 + 12V_B^R = 0 \longrightarrow V_B^R = 7.71\ t$

$7.71 - 12 + V_C^L = 0 \longrightarrow V_C^L = 4.29\ T$


4 t/m
C
D
18.86
10.62
V_C^R
V_D^L

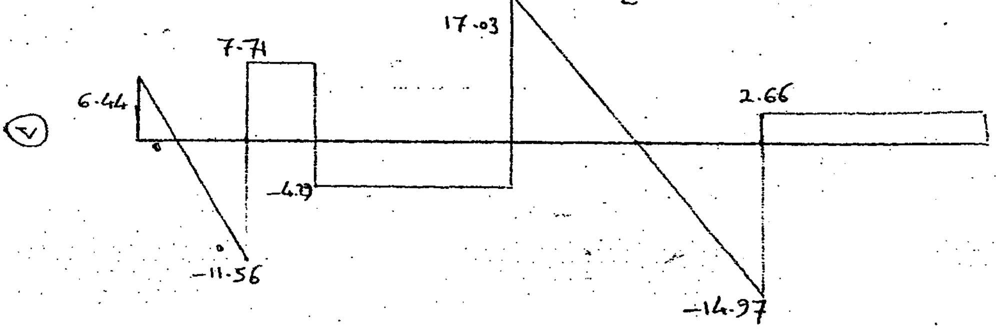
$10.62 - 32\times4 - 18.86 + 8V_C^R = 0 \longrightarrow V_C^R = 17.03\ T$

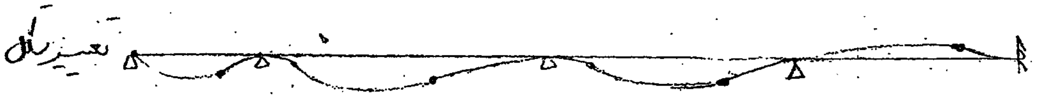
$17.03 - 32 + V_D^L = 0 \longrightarrow V_D^L = 14.97\ t$

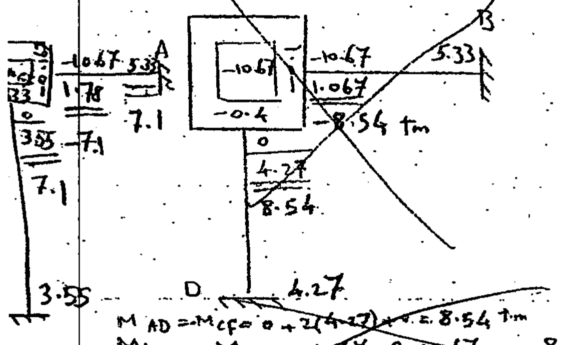

D
E
10.62
5.31
V_D^R
V_E^L

$-5.31 - 10.62 + 6V_D^R = 0 \longrightarrow V_D^R = 2.66\ t$

$2.66 + V_E^L = 0 \longrightarrow V_E^L = -2.66\ t$



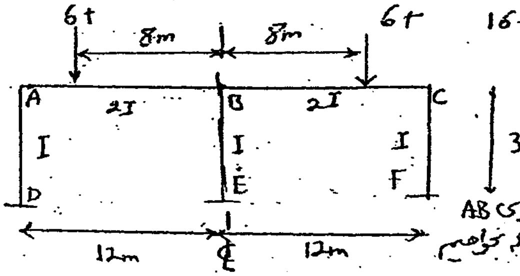



A
B
D
-10.67
5.33
1.78
7.1
0
3.55
-7.1
7.1
-10.67
-0.4
1
-10.67
1.067
-8.54 tm
5.33
0
4.27
8.54
3.55
4.27

~~$M_{AD} = -M_{CF} = 0 + 2(4.27) + 0 = 8.54\ t.m$~~

~~$M_{AB} = -M_{CB} = -10.67 + 2\times1.067 + 0 = -8.54\ t.m$~~

16-3


6t
6t
8m
8m
A
B
C
2I
2I
I
I
I
D
E
F
3m
12m
12m
℄

ر تقارن عضوی AB
ع نکرده است که بخواهیم
را اصلاح کنیم
سختی ها در دو
[illegible])
صفحه بعد

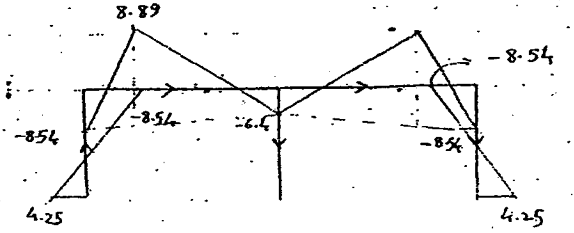
$K'_{AB} = \frac{2I}{12} \times \cancel{\frac{1}{2}} = \cancel{\frac{I}{12}}\ \frac{2I}{12}$

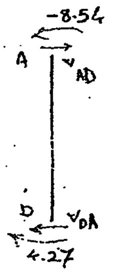
$K_{AD} = \frac{I}{3} = \frac{4I}{12}$

باید اصلاح بشه. این ها غلط

منحنی ها 16-3

Ⓜ


8.89
-8.54
-8.54
-8.54
-6.4
-8.54
4.25
4.25

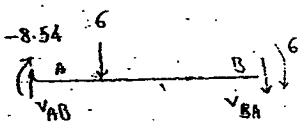

-8.54
A
V_{AD}
D
V_{DA}
4.27

$8.54+4.27+3V_{DA}=0$

$\longrightarrow \underline{V_{DA}=-4.27\,t}$

$V_{AD}+4.27=0$

$\longrightarrow \underline{V_A=-4.27\,t}$

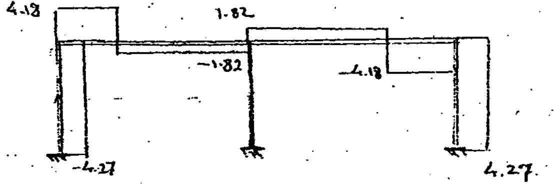

-8.54
6
6.4
A
B
V_{AB}
V_{BA}

$6.4-8.54+12V_{AB}-8\times6=0$

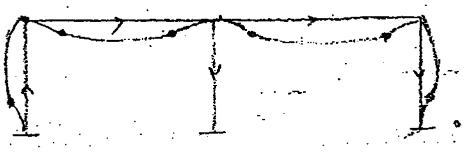
$\longrightarrow \underline{V_{AB}=4.18\ t}$

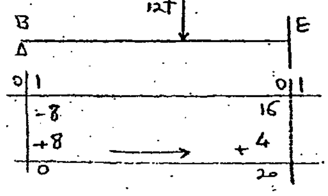
$4.18-6-V_{BA}=0 \longrightarrow \underline{V_{BA}=-1.82\,t}$

Ⓥ

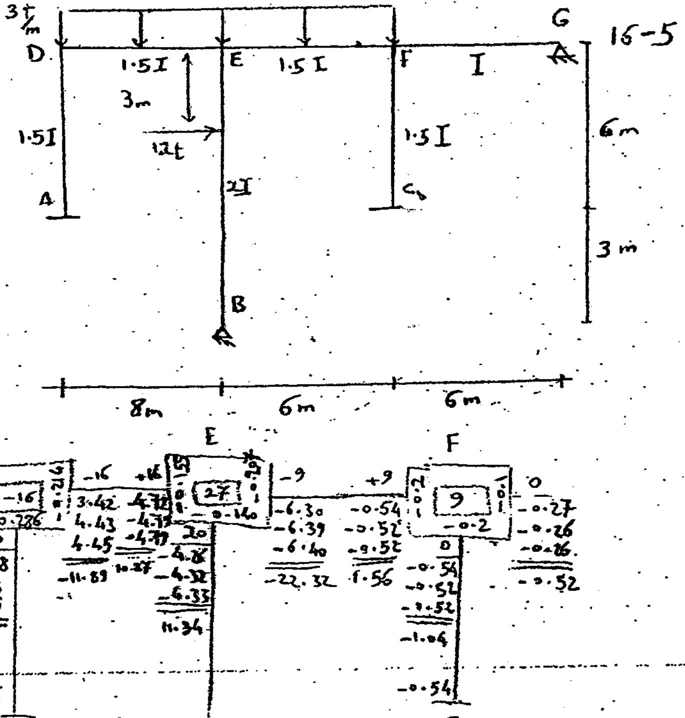

4.18
1.82
-1.82
-4.18
-4.27
4.27

تغییر شکل




B
12t
E
0 1
0 1
-8
16
+8
+4
0
20

16-5


3t/m
D
E
F
G
1.5I
1.5I
I
3m
12t
1.5I
1.5I
2I
A
C
B
6m
3m
8m
6m
6m

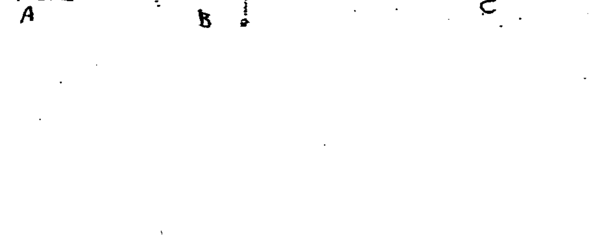
$k_{AD}=k_{CF}=\frac{1.5I}{6}=\frac{I}{4}$

$k_{DE}=\frac{1.5I}{8}$

$k_{EF}=\frac{1.5I}{6}=\frac{I}{4}$

$k'_{FG}=\frac{I}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{I}{8}$

$k'_{BE}=\frac{3}{2}\times\frac{2I}{3}=\frac{I}{6}$

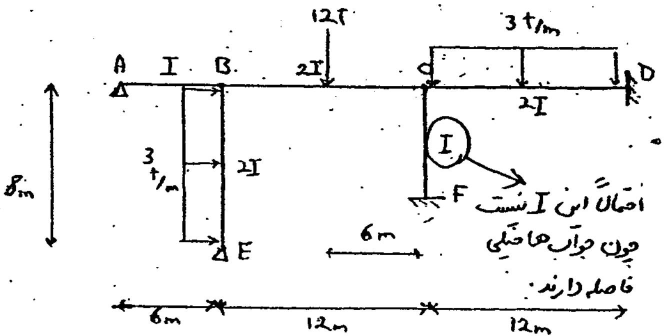

D
E
F
-16
-16
+16
27
-9
+9
9
0
-0.226
3.42
4.43
4.45
-11.89
-4.72
-4.79
-4.79
10.27
-0.160
20
-4.8
-4.32
-6.33
11.34
-6.30
-6.39
-6.40
-22.32
-0.54
-0.52
-0.52
1.56
-0.2
-0.27
-0.26
-0.26
-0.52
0
4.58
5.93
5.95
11.9
0
-0.54
-0.52
-0.52
-1.04
5.95
-0.54
A
B
C

(تغییر را اصلاح نکرده‌ام)

$K_{AB} = \frac{3}{4}\frac{1}{6} = \frac{1}{8}$

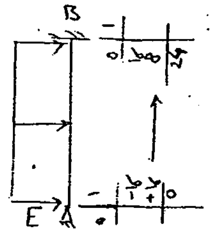
$\cancel{K_{AB}} = K_{BC} = K_{CD} = K_{FC} = \frac{1}{6}$

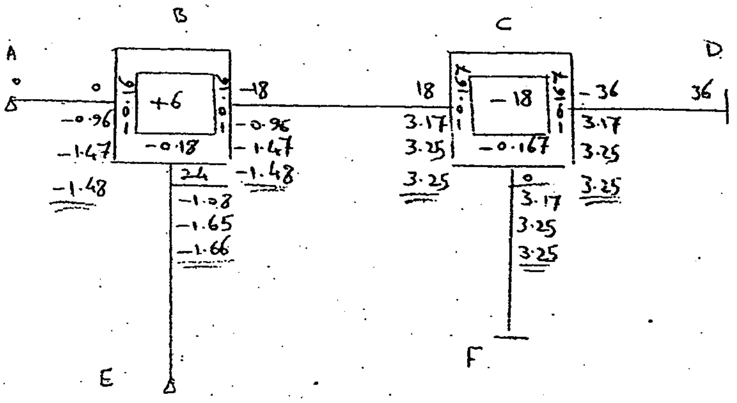
$K''_{EB} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{8} = \frac{3}{16}$

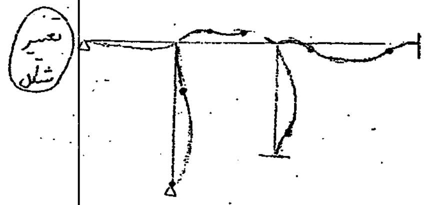

12t
3 t/m
A
I
B.
2I
C
D
2I
3 t/m
2I
8m
I
F
E
6m
6m
6m
12m
12m

احتمالاً این I نیست چون جواب‌ها خیلی فاصله دارند.

16-4




B
C
A
D
0
0
+6
-18
18
-18
-36
36
-0.96
-0.96
3.17
3.17
-1.47
-0.18
-1.47
3.25
-0.167
3.25
-1.48
-1.48
3.25
3.25
24
-1.08
-1.65
-1.66
0
3.17
3.25
3.25
E
F



$M_{BA} = 0 + 2(-1.48) + 0 = -2.96$ t.m

$M_{BE} = 24 + 2(-1.66) + 0 = 20.68$

$M_{BC} = -18 + 2(-1.48) + 3.25 = -17.71$

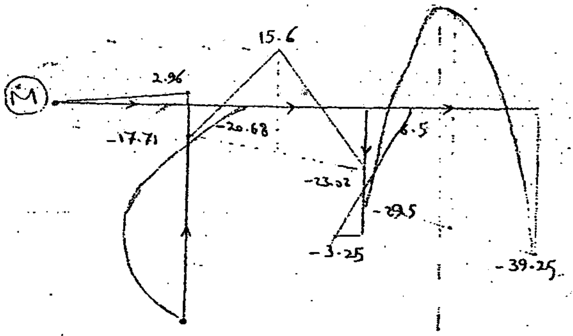
$M_{CB} = 18 + 2(3.25) - 1.48 = 23.02$

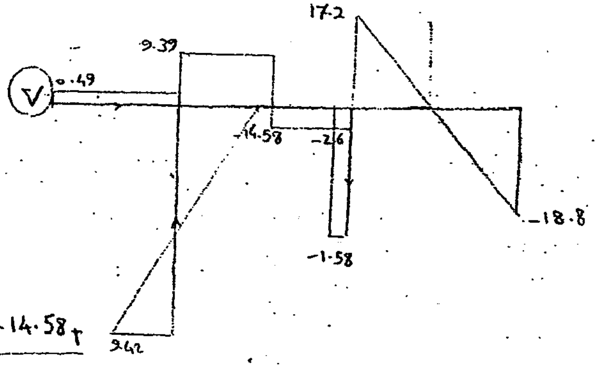
$M_{CF} = 0 + 2(3.25) + 0 = 6.5$

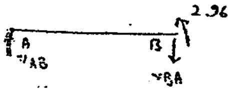
$M_{CD} = -36 + 2(3.25) + 0 = -29.5$

$M_{DC} = 36 + 2(0) + 3.25 = 39.25$

$M_{FC} = 0 + 2(0) + 3.25 = 3.25$

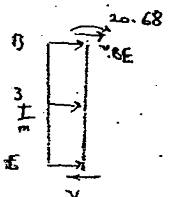

M
19.6
15.6
2.96
-17.71
-20.68
6.5
-23.02
-29.5
-3.25
-39.25


V
0.49
9.39
17.2
-14.58
-2.6
-1.58
-18.8
9.42


2.96
A
V_{AB}
B
V_{BA}

$V_{AB} = \frac{2.96}{6} = 0.49$ t

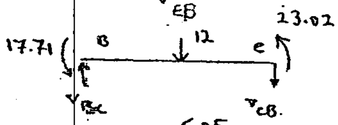
$V_{BA} = 0.49$ t


20.68
B
V_{BE}
3 t/m
E
V_{EB}

$20.68 - \frac{3 \times 8^2}{2} + 8V_{EB} = 0$

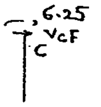
$\longrightarrow V_{EB} = 9.42$ t

$-9.42 + (3 \times 8) + V_{BE} = 0 \longrightarrow V_{BE} = -14.58$ t


17.71
B
12
C
23.02
V_{BC}
V_{CB}

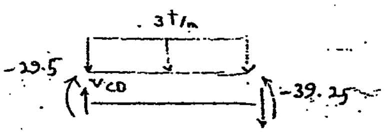
$23.02 + 12 \times 6 + 17.71 - 12V_{BC} = 0$

$\longrightarrow V_{BC} = 9.39$ t

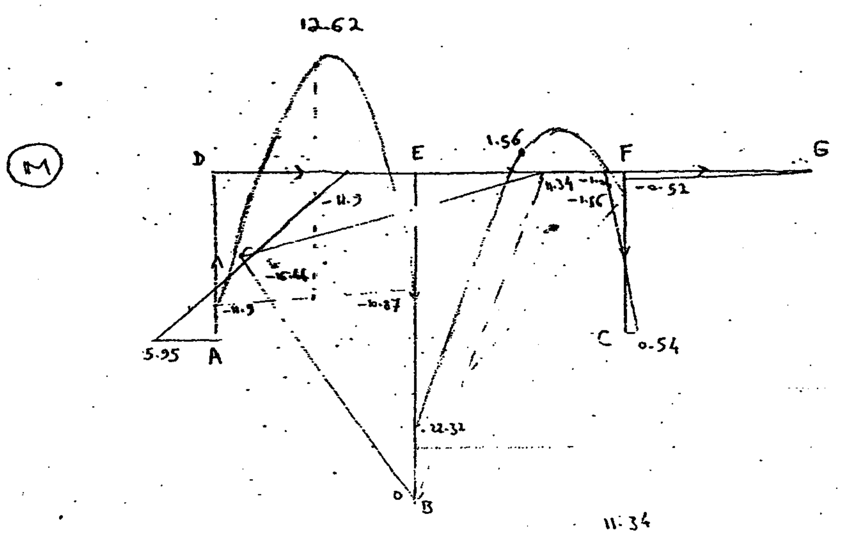


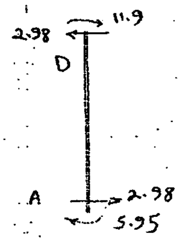
$9.39 - 12 - V_{CB} = 0 \longrightarrow V_{CB} = -2.6$ t

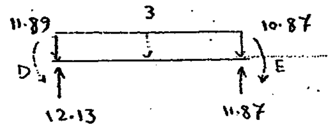
$3.25 + 6.25 + 6V_{CF} = 0 \longrightarrow V_{CF} = -1.58$ t

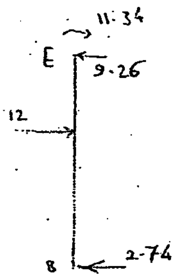

3 t/m
-29.5
V_{CD}
-39.25
V_{DC}

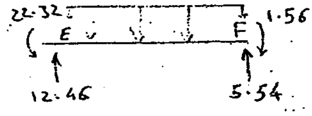
$-29.5 + \frac{3 \times 12^2}{2} + 39.25 + 12V_{DC} = 0 \longrightarrow V = -18.8$ t

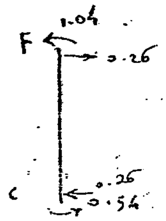

M
12.62
1.56
D
E
F
G
-11.9
11.34
-1.56
-0.52
-15.66
-11.9
-10.87
5.95
A
C
0.54
22.32
0
B

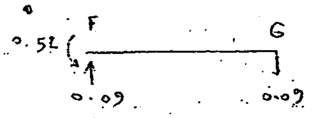

2.98
11.9
D
A
2.98
5.95

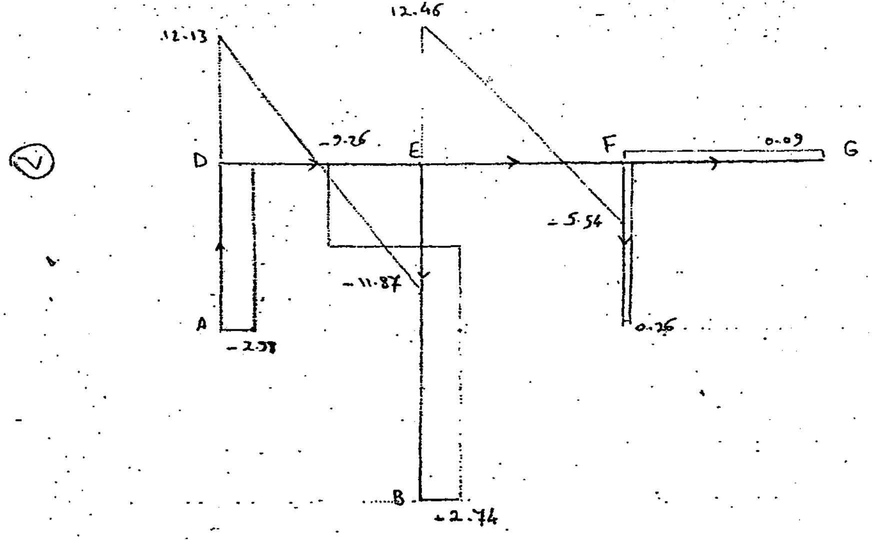

3
11.89
10.87
D
E
12.13
11.87

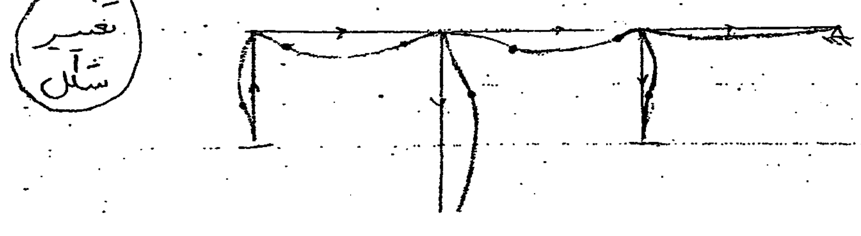

11.34
E
9.26
12
B
2.74


3
22.32
1.56
E
F
12.46
5.54


1.04
F
0.26
C
0.26
0.54


F
G
0.52
0.09
0.09


V
12.13
12.46
D
-9.26
E
F
0.09
G
-5.54
-11.87
A
-2.98
0.26
B
+2.74

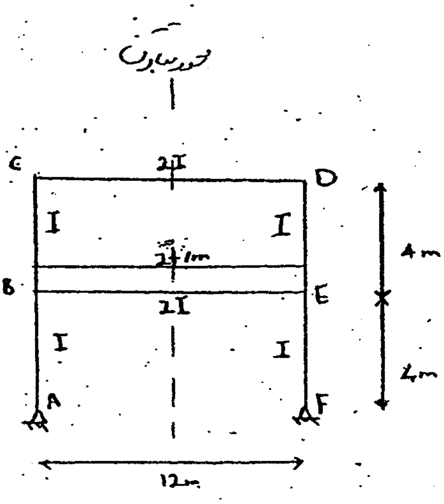

تغيير شكل

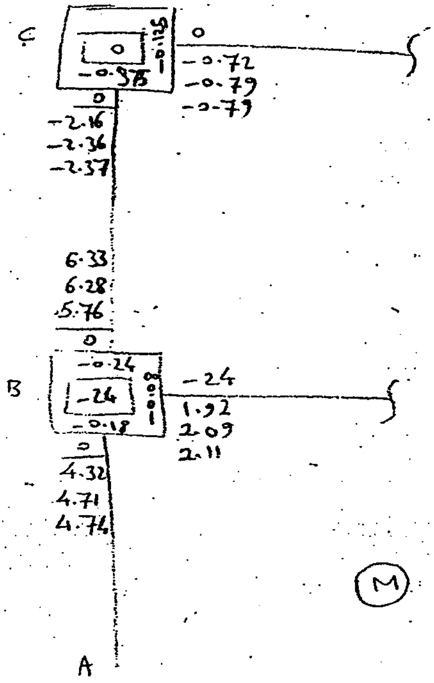
16-8

$K'_{AB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{I}{4} = \frac{3I}{16}$

$K_{BC} = \frac{I}{4}$

$K'_{CD} = K'_{BE} = \frac{2I}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{I}{12}$


محور تماثل
C
2I
D
I
I
2t/m
B
E
2I
I
I
4m
4m
A
F
12m


C
0
-0.375
0
-0.72
-0.79
-0.79
0
-2.16
-2.36
-2.37
6.33
6.28
5.76
B
0
-0.24
-24
-0.18
-24
1.92
2.09
2.11
0
4.32
4.71
4.74
A

$M_{AB} = -M_{FE} = 0$

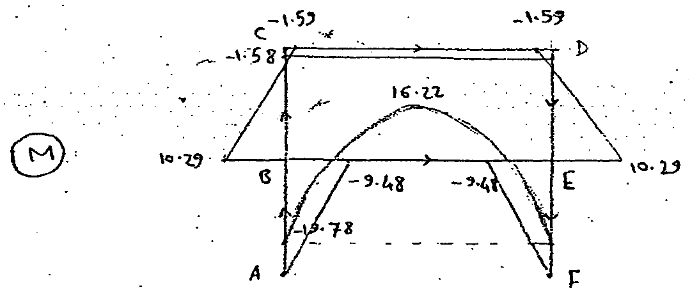
$M_{BA} = -M_{EF} = 9.48$ t.m

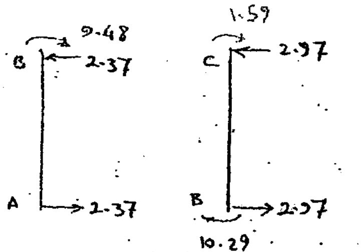
$M_{BE} = -M_{EB} = -19.78$

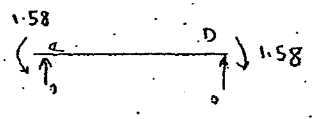
$M_{BC} = -M_{ED} = 10.29$

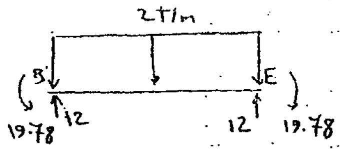
$M_{CB} = -M_{DE} = 1.59$

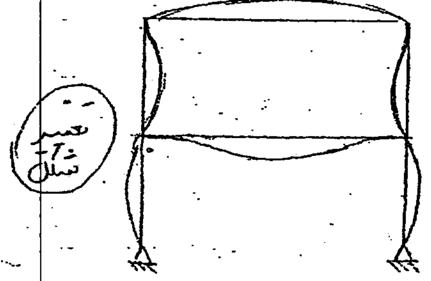
$M_{CD} = -M_{DC} = -1.58$

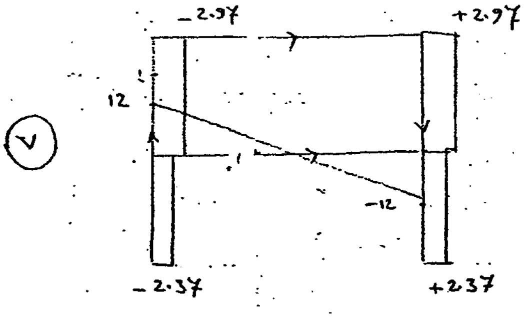

M
C
-1.59
-1.59
D
-1.58
16.22
10.29
10.29
B
-9.48
-9.48
E
-19.78
A
F


9.48
B
2.37
A
2.37
1.59
C
2.97
B
2.97
10.29

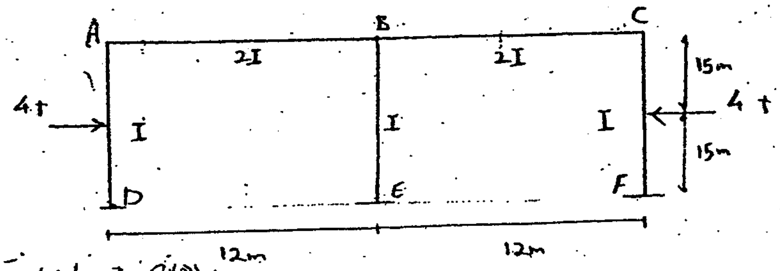

1.58
C
D
1.58
0
0


2t/m
B
E
19.78
12
12
19.78




V
-2.97
+2.97
12
-12
-2.37
+2.37

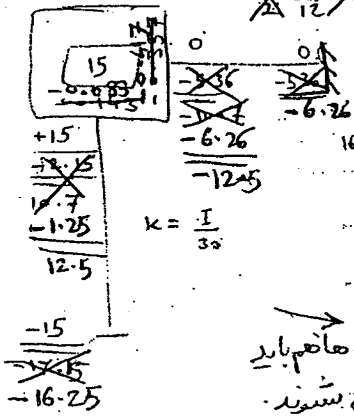
16-2



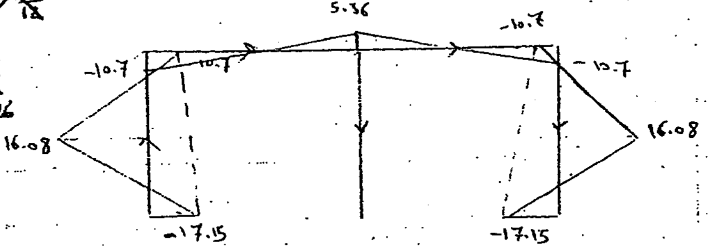
A
B
C
2I
2I
4t
4t
I
I
I
15m
15m
D
E
F
12m
12m

در دهانه زوج نباید سختی ها را اصلاح کرد.

$K' = \cancel{\frac{I}{2}}\ \frac{2I}{12}\ \cancel{\frac{I}{12}}$



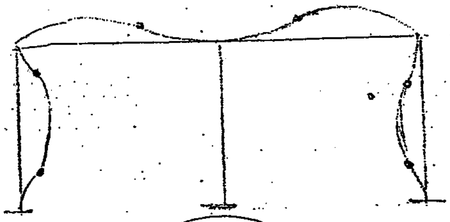
15
-0.083
-1.45
0
0
-5.36
-10.7
-6.26
-12.45
-5.36
-6.26
+15
-17.15
10.7
-1.25
12.5
k = I/30
-15
-17.15
-16.25



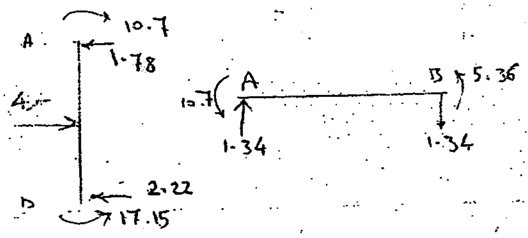
5.36
-10.7
-10.7
-10.7
-10.7
16.08
16.08
-17.15
-17.15

M

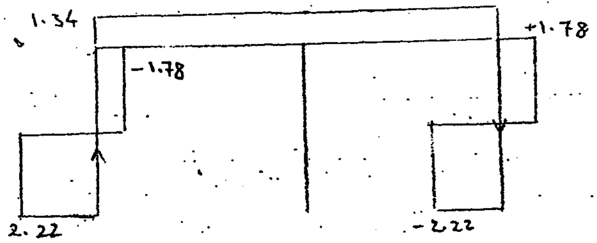
دیاگرام ها هم باید اصلاح بشوند.



تغییر شکل



A
10.7
1.78
4t
2.22
D
17.15
A
B
5.36
10.7
1.34
1.34

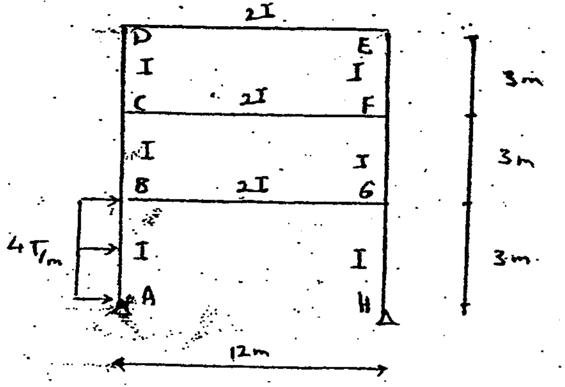


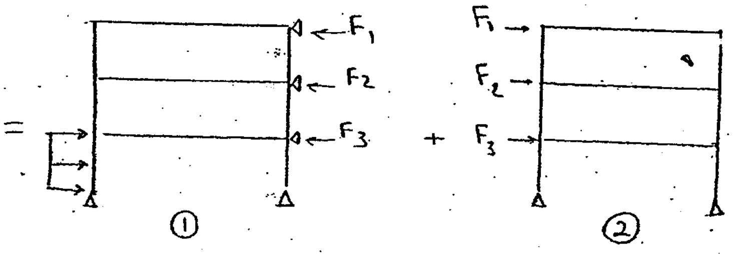
1.34
+1.78
-1.78
2.22
-2.22

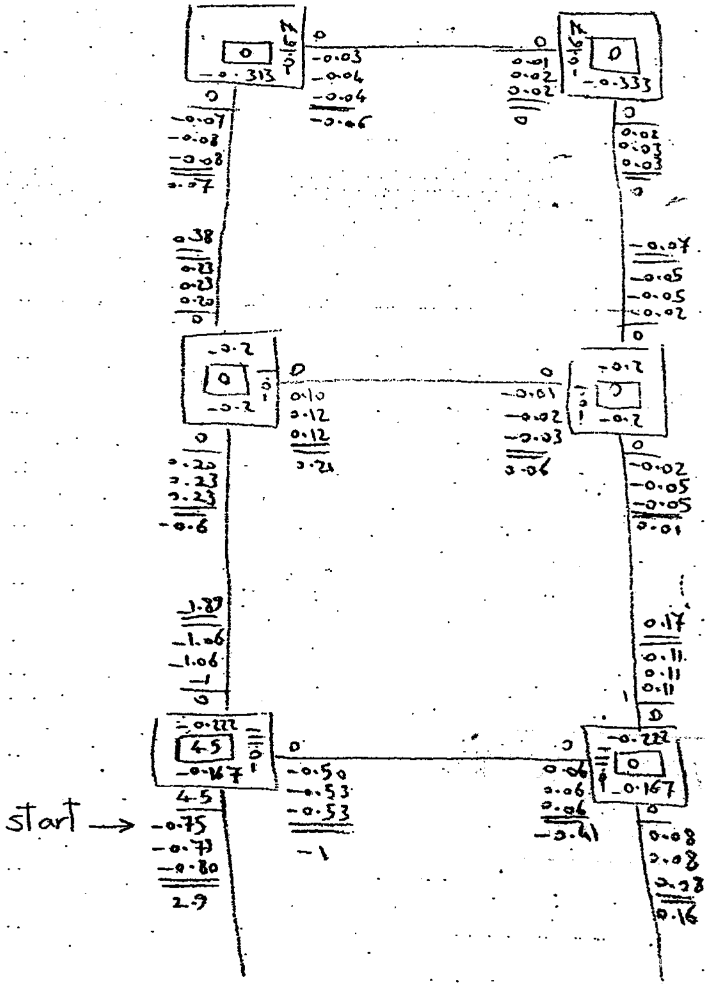
V

16-9

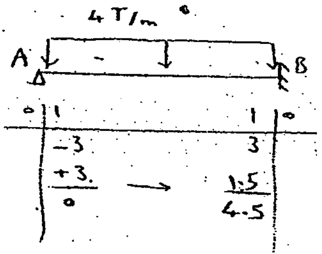
بار در وسط عضو
↓
جمع دو حالت:
1- قاب بدون حرکت جانبی
2- قاب با حرکت جانبی کت
عکس العمل ها تکیه گاه ها
حالت 1


2I
D
E
I
I
C
2I
F
I
I
B
2I
G
4T/m
I
I
A
H
3m
3m
3m
12m

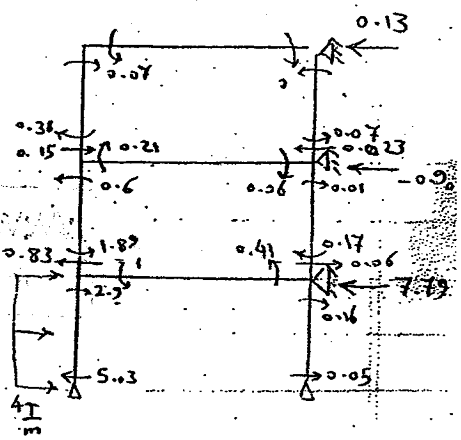

F1
F2
F3
=
+
F1
F2
F3
①
②


0
-0.313
0.167
0
-0.03
-0.04
-0.04
-0.06
0
0.01
0.02
0.02
0
0
0.167
-0.333
0
-0.07
-0.08
-0.08
0.07
0
0.02
0.03
0.03
0
0.38
0.23
0.23
0.20
0
-0.07
-0.05
-0.05
-0.02
0
-0.2
0
-0.2
0
0.10
0.12
0.12
0.21
0
-0.01
-0.02
-0.03
0.06
-0.2
0
-0.2
0
0.20
0.23
0.23
-0.6
0
-0.02
-0.05
-0.05
0.01
1.87
-1.06
-1.06
-1
0
0.17
0.11
0.11
0.11
0
-0.222
4.5
-0.167
0
-0.50
-0.53
-0.53
-1
0
0.06
0.06
0.06
-0.41
-0.222
0
-0.167
4.5
start →
-0.75
-0.73
-0.80
2.9
0
0.08
0.08
0.08
0.16

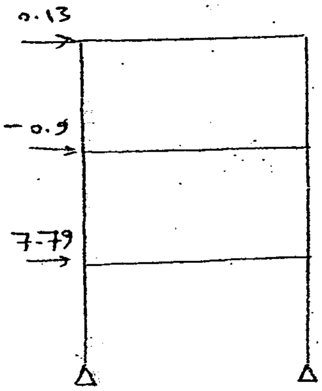
حالت ①:


4 T/m
A
B
0
1
1
0
-3
3
+3
1.5
0
4.5

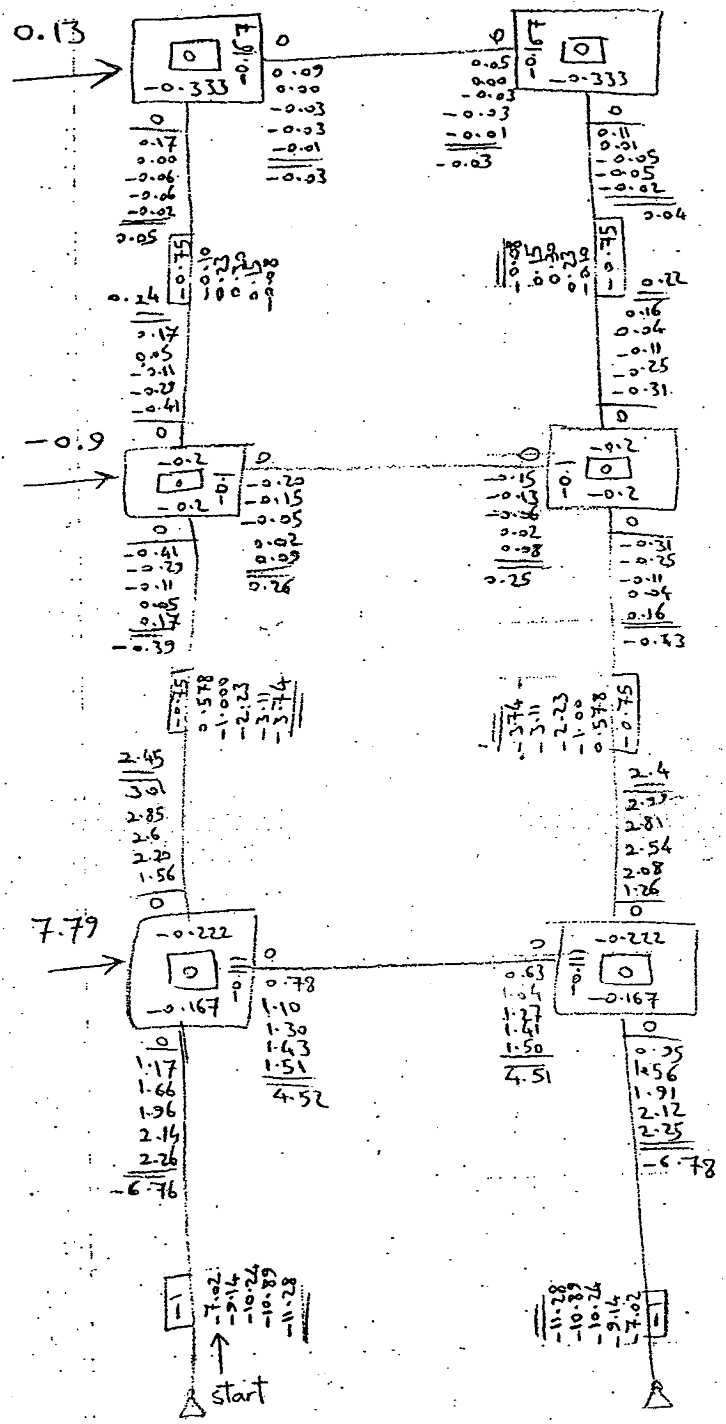
خلاصه


0.13
0.07
0
0.38
0.15
0.21
0.6
0.07
0.023
-0.9
0.06
0.01
0.83
1.89
2.9
0.41
0.17
0.06
7.79
0.16
5.3
0.05
4T/m

حالت ② :

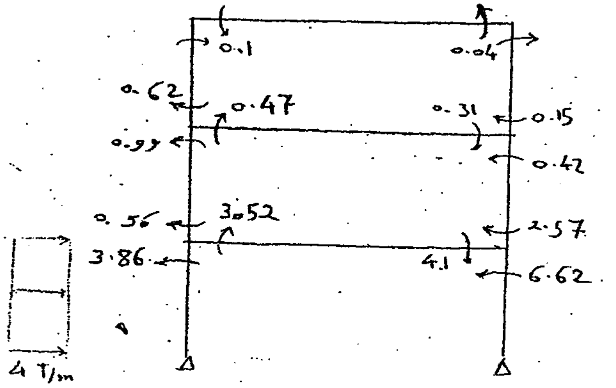


0.13
-0.9
7.79



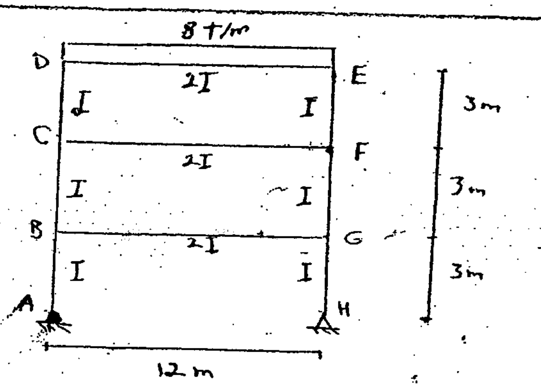
0.13
-0.333
-0.167
-0.9
-0.2
-0.75
7.79
-0.222
-0.167
4.52
4.51
-6.76
-6.78
-0.39
-0.43
start

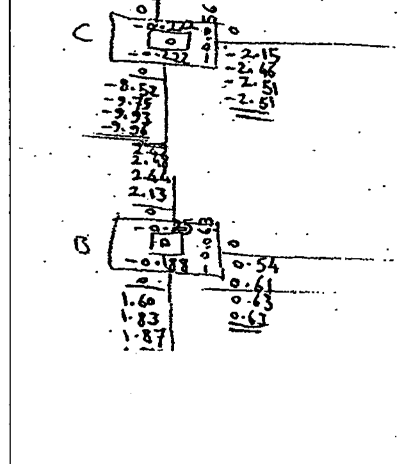
از جمع حالات ① و ② به شکل زیر می‌رسیم:


0.1
0.04
0.62
0.47
0.31
0.15
0.99
0.42
0.56
3.52
2.57
3.86
4.1
6.62
4 T/m

دیاگرام های برش، ممان و تغییر شکل همانند مسائل قبلی رسم می‌شوند.

16-10


8 t/m
D
E
2I
I
I
C
F
2I
I
I
B
G
2I
I
I
A
H
3m
3m
3m
12 m


D
-96
-0.4
-96
9.6
10.45
10.58
10.59
start
38.4
41.81
42.3
42.4
-9.96
-9.93
-9.75
-8.52
C
-0.222
-0.222
0
-2.15
-2.46
-2.51
-2.51
-8.52
-9.75
-9.93
-9.96
2.49
2.48
2.44
2.13
B
-0.25
-0.188
0
0.54
0.61
0.63
0.63
1.60
1.83
1.87

$$K'_{DE} = K'_{CF} = K'_{BG} = \frac{1}{2}\,\frac{2I}{12} = \frac{I}{12}$$

$$K'_{BA} = \frac{3}{4}\,\frac{I}{3} = \frac{I}{4}$$

$$K_{BC} = K_{CD} = \frac{I}{3}$$

$$M_{BA} = 0 + 2(1.87) + 0 + 0 = 3.74 \ \text{T.m} = -M_{GH}$$

$$M_{BG} = 0 + 2(0.63) + 0 + 0 = 1.26 = -M_{GB}$$

$$M_{BC} = 0 + 2(2.49) + (-9.96) + 0 = -4.98 = -M_{GF}$$

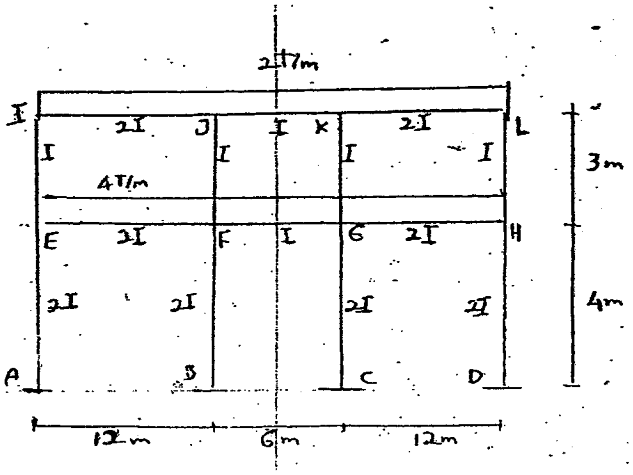
$$M_{CB} = 0 + 2(-9.96) + (2.49) + 0 = -17.43 = -M_{FG}$$

$$M_{CF} = 0 + 2(-2.51) + 0 + 0 = -5.02 = -M_{FC}$$

$$M_{CD} = 0 + 2(-9.96) + 42.4 + 0 = 22.48 = -M_{FE}$$

$$M_{DC} = 0 + 2(42.4) - 9.96 + 0 = 74.84 = -M_{EF}$$

$$M_{DE} = -96 + 2(10.59) + 0 + 0 = -74.82 = -M_{ED}$$


2 T/m
I
2I
J
I
K
2I
L
I
I
I
I
3m
4 T/m
E
2I
F
I
G
2I
H
2I
2I
2I
2I
4m
A
B
C
D
12m
6m
12m

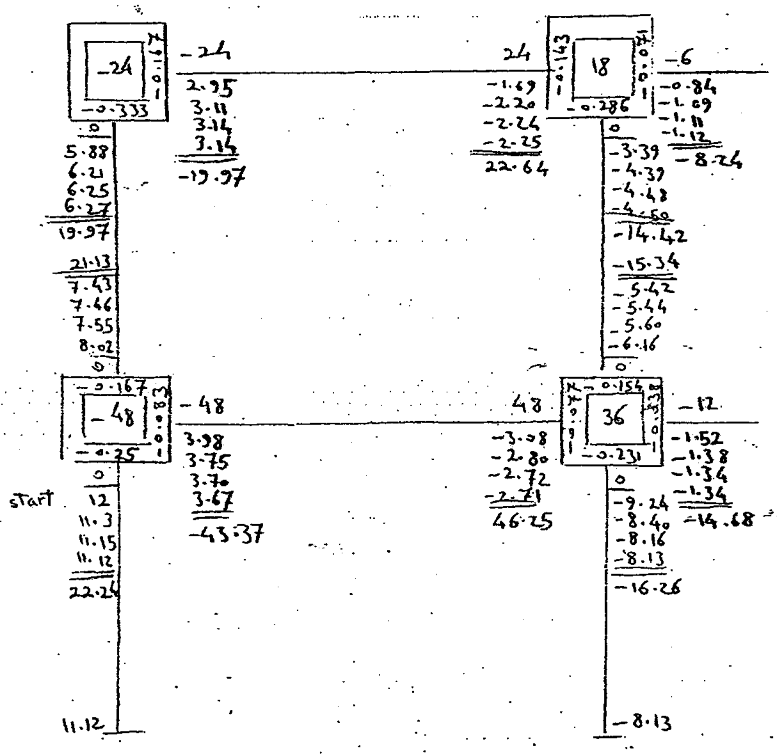
16 - 12

$K'_{JK} = K'_{FG} = \frac{1}{2}\frac{I}{6} = \frac{I}{12}$

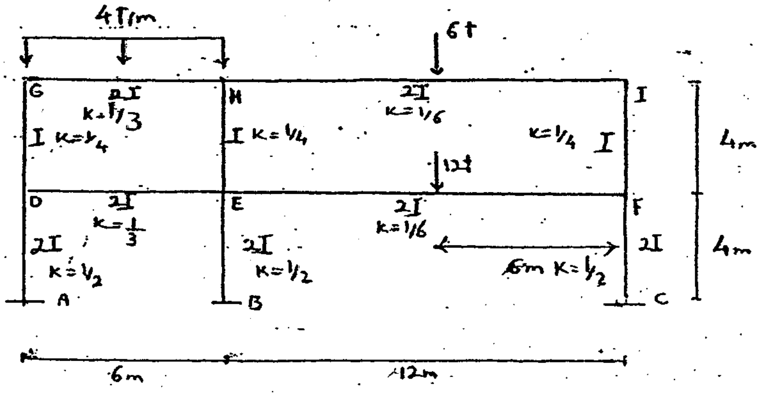
$K_{EI} = K_{FJ} = \frac{I}{3}$

$K_{IJ} = K_{EF} = \frac{2I}{12} = \frac{I}{6}$

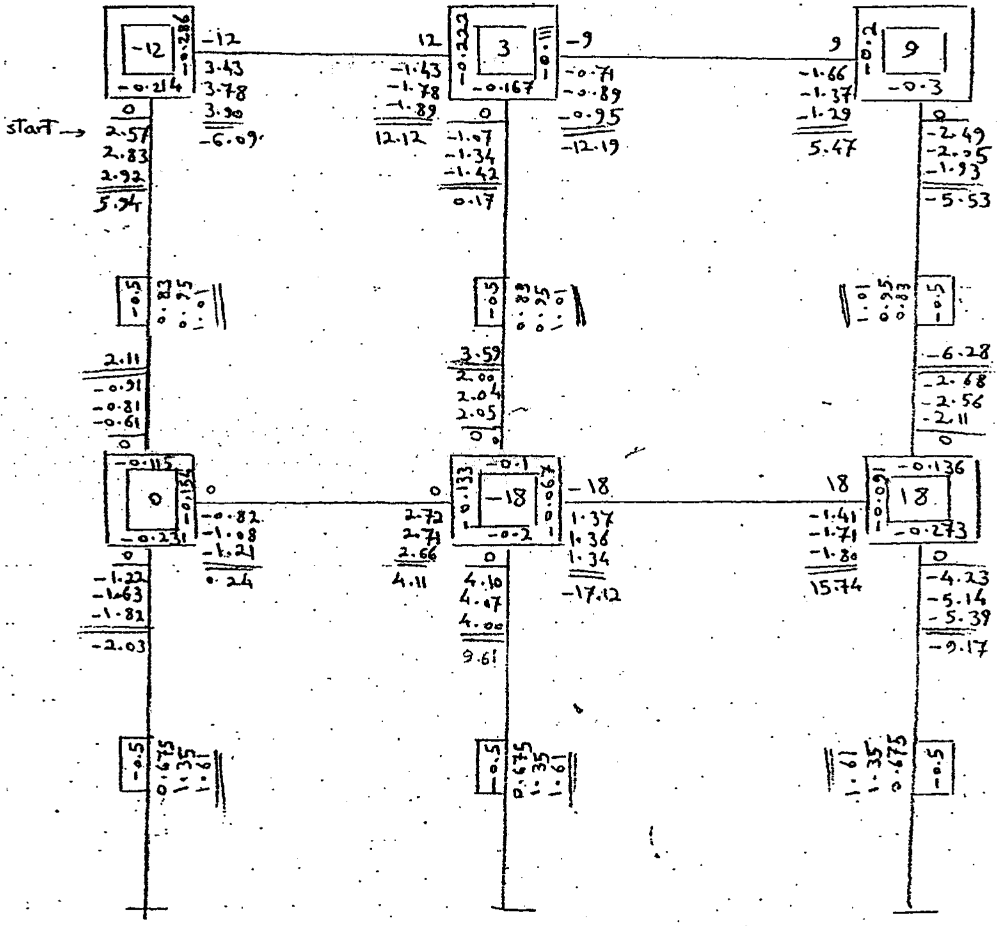
$K_{AE} = K_{BF} = \frac{2I}{4} = \frac{I}{2}$


-24
0.167
0
1
-0.333
-24
2.95
3.11
3.14
3.14
-19.97
0
5.88
6.21
6.25
6.27
19.97
21.13
7.43
7.46
7.55
8.02
0
24
-0.143
18
0.071
-0.286
-6
-1.69
-2.20
-2.24
-2.25
22.64
-0.84
-1.09
-1.11
-1.12
-8.24
0
-3.39
-4.39
-4.48
-4.50
-14.42
-15.34
-5.42
-5.44
-5.60
-6.16
0
-0.167
-48
0.083
0
1
-0.25
-48
3.98
3.75
3.70
3.67
-43.37
0
start
12
11.3
11.15
11.12
22.24
11.12
48
-0.077
-0.154
36
0.038
-0.231
-12
-3.08
-2.80
-2.72
-2.71
46.25
-1.52
-1.38
-1.34
-1.34
-14.68
0
-9.24
-8.40
-8.16
-8.13
-16.26
-8.13

16-13

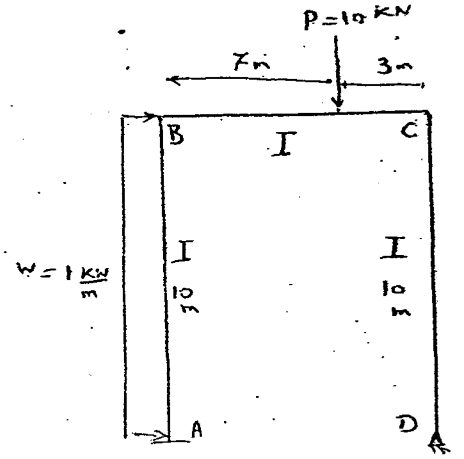


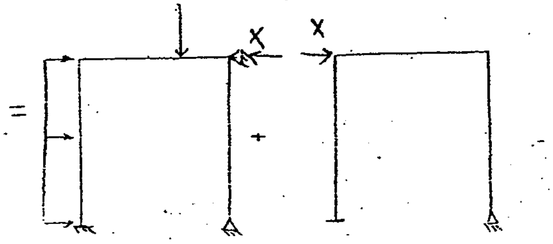
4T/m
6t
G
2I
K=1/3
I K=1/4
H
I K=1/4
2I
K=1/6
I
K=1/4 I
4m
12t
D
2I
K=1/3
E
2I
K=1/6
F
2I
K=1/2
2I
K=1/2
6m K=1/2
2I
4m
A
B
C
6m
12m



-12
-0.286
-0.214
-12
3.43
3.78
3.90
-6.09
start →
0
2.57
2.83
2.92
5.94
12
-1.43
-1.78
-1.89
12.12
3
-0.222
-0.111
-0.167
-9
-0.71
-0.89
-0.95
-12.19
0
-1.07
-1.34
-1.42
0.17
9
-1.66
-1.37
-1.29
5.47
9
-0.2
-0.3
0
-2.49
-2.05
-1.93
-5.53
-0.5
0.83
0.95
1.01
-0.5
0.83
0.95
1.01
1.01
0.95
0.83
-0.5
2.11
-0.91
-0.81
-0.61
0
3.59
2.00
2.04
2.05
0
-6.28
-2.68
-2.56
-2.11
0
0
-0.115
-0.154
-0.231
0
-0.82
-1.08
-1.21
0.24
0
-1.22
-1.63
-1.82
-2.03
0
2.72
2.71
2.66
4.11
-18
-0.133
-0.1
-0.067
-0.2
-18
1.37
1.36
1.34
-17.12
0
4.10
4.07
4.00
9.61
18
-1.41
-1.71
-1.80
15.74
18
-0.091
-0.136
-0.273
0
-4.23
-5.14
-5.39
-9.17
-0.5
0.675
1.35
1.61
-0.5
0.675
1.35
1.61
1.61
1.35
0.675
-0.5

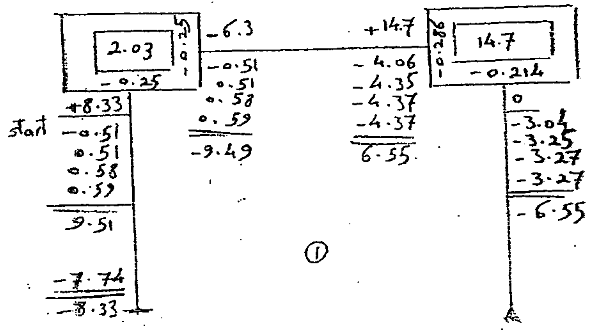
سوال سرکلاس ۱:

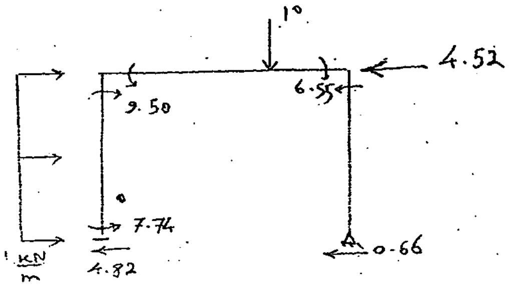

P=10 KN
7m
3m
B
C
I
I
I
W=1 KN/m
10 m
10 m
A
D

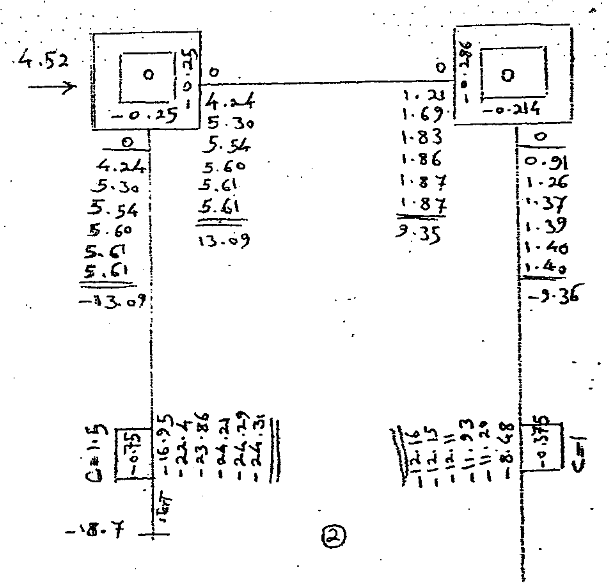


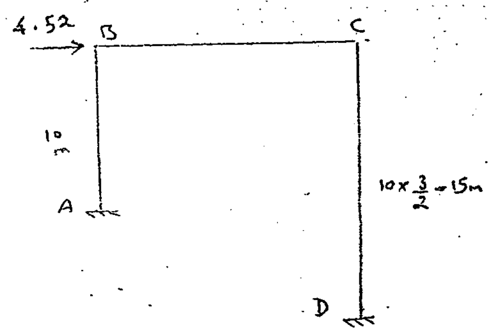
$K'_{DC} = \frac{3}{4}\frac{I}{10}$

$K_{AB} = K_{BC} = \frac{I}{10}$


2.03
-0.25
0.25
0
1
-6.3
-0.51
0.51
0.58
0.59
-9.49
+14.7
-4.06
-4.35
-4.37
-4.37
6.55
14.7
0.286
0
1
-0.214
+8.33
start
-0.51
0.51
0.58
0.59
9.51
-7.74
-8.33
0
-3.04
-3.25
-3.27
-3.27
-6.55
①


10
4.52
9.50
6.55
7.74
4.82
0.66
1 KN/m


4.52
0
0.25
0
1
-0.25
0
4.24
5.30
5.54
5.60
5.61
5.61
13.09
0
4.24
5.30
5.54
5.60
5.61
5.61
-13.09
0
1.21
1.69
1.83
1.86
1.87
1.87
9.35
0
0.286
1
-0.214
0
0.91
1.26
1.37
1.39
1.40
1.40
-9.36
C=1.5
-0.75
-16.95
-22.4
-23.86
-24.21
-24.29
-24.31
start
-18.7
-12.16
-12.15
-12.11
-11.93
-11.20
-8.48
-0.375
C=1
②


4.52
B
C
10 m
A
10x3/2=15m
D

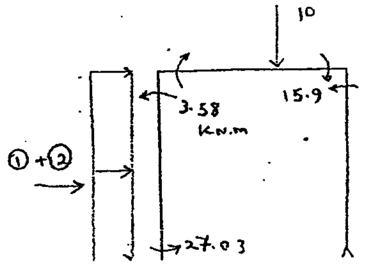
$$M'' = \frac{-3}{2}\,\frac{C_{ij}K_{ij}}{\sum C_{ij}^{2}K_{ij}}\left[\frac{Q_r h'_r}{3} + \sum_r C_{ij}(M'_{ij}+M'_{ji})\right]$$

$$C_{ij} = \frac{h'_r}{h_{ij}} \quad h'_r = 15 \quad C_{AB} = \frac{15}{10} = 1.5$$

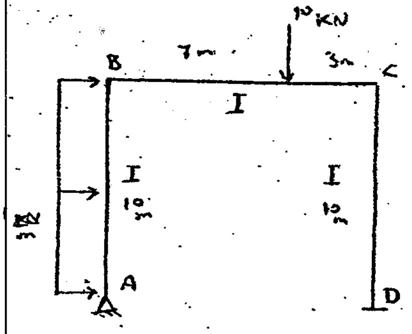
$$C_{DC} = \frac{15}{15} = 1$$

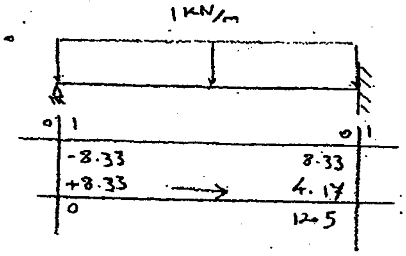
$$D'_{AB} = \frac{-3}{2}\,\frac{1.5\,\frac{1}{10}}{1.5^2\frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{3}{40}} = -0.75$$

$$D'_{CD} = \frac{-3}{2}\,\frac{1 \times \frac{3}{40}}{\frac{1.5^2}{10} + \frac{1^2 \times 3}{40}} = -0.375$$

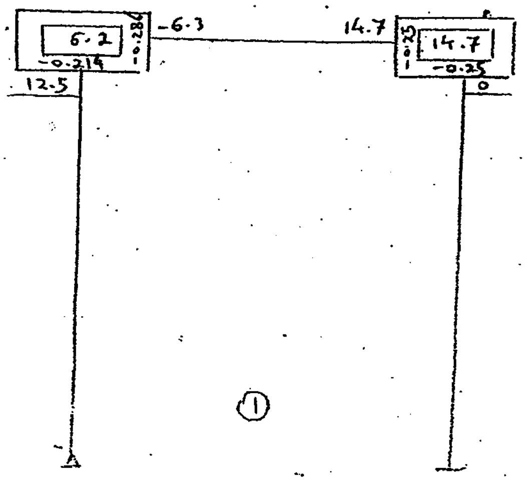

10
3.58
KN.m
15.9
①+②
27.03

سوال سر کلاس ۲ : : اینجا هم از superposition میریم.

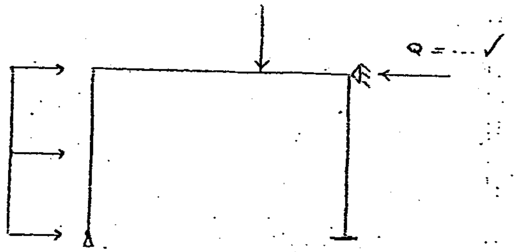

10 KN
B
7m
3m
C
I
I
10 m
I
10 m
A
D
3 KN

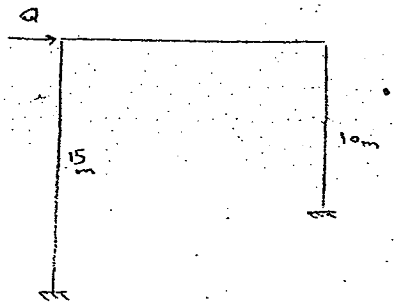

1KN/m
0
1
0
1
-8.33
8.33
+8.33
4.17
0
12.5

$K_{AB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{40}$ $K_{BC} = K_{CD} = \frac{1}{10}$

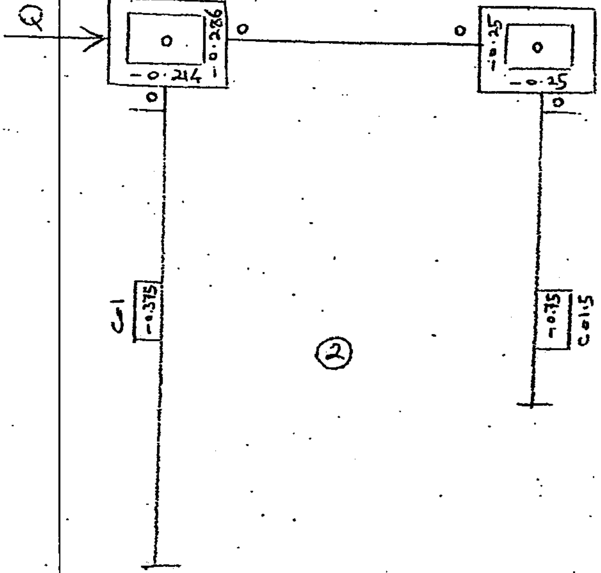

6.2
-0.214
-0.286
-6.3
14.7
-0.25
14.7
-0.25
12.5
0

①





مثل مسئله قبلی


Q
0
-0.286
-0.214
0
0
-0.25
0
-0.25
0
-0.375
-0.75

②

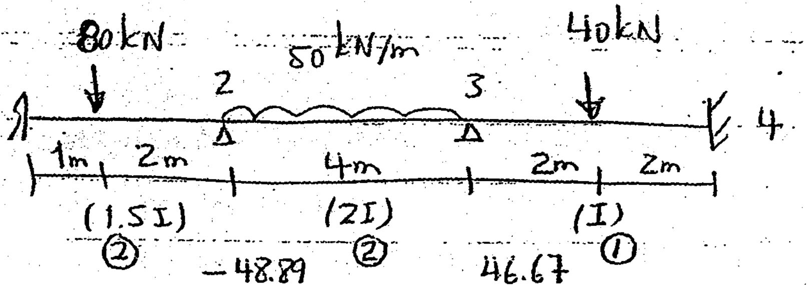
مجموع ممان‌های حالت‌ها ① و ② می‌شود
ممان‌های انتهایی نهایی اعضا

مثال اول

$\frac{.5I}{3} = \frac{I}{2}$ ②

$\frac{2I}{4} = \frac{I}{2}$ ②

$\frac{I}{4}$ ①


80kN
50 kN/m
40kN
1
2
3
4
1m
2m
4m
2m
2m
(1.5I)
②
(2I)
②
(I)
①

		-48.89			46.67		
-35.56	17.78	-0.25 2 -48.89 -0.25	-66.67	66.67	-1/3 3 46.67 -1/6	-20	+20
	12.22		12.22	-19.63		-9.82	
	17.13		17.13	-21.27		-10.63	
	17.66		17.66	-21.44		-10.72	
	17.58		17.58	-21.42		-10.72	
-17.98	52.94		-52.93	41.41		-41.42	9.29

$$M_{12}^F = -\frac{(80)(1)(2)^2}{(3)^2} = -35.56$$

$$M_{21}^F = \frac{(80)(1)^2(2)}{(3)^2} = +17.78$$

$$M_{23}^F = \frac{-(50)(4)^2}{12} = -66.67$$

$$M_{32}^F = +66.67$$

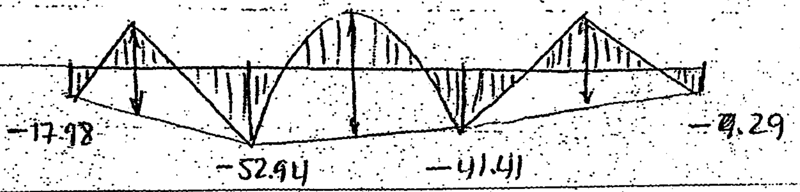
$$M_{34}^F = -\frac{40(4)}{8} = -20$$

$$M_{43}^F = +20$$

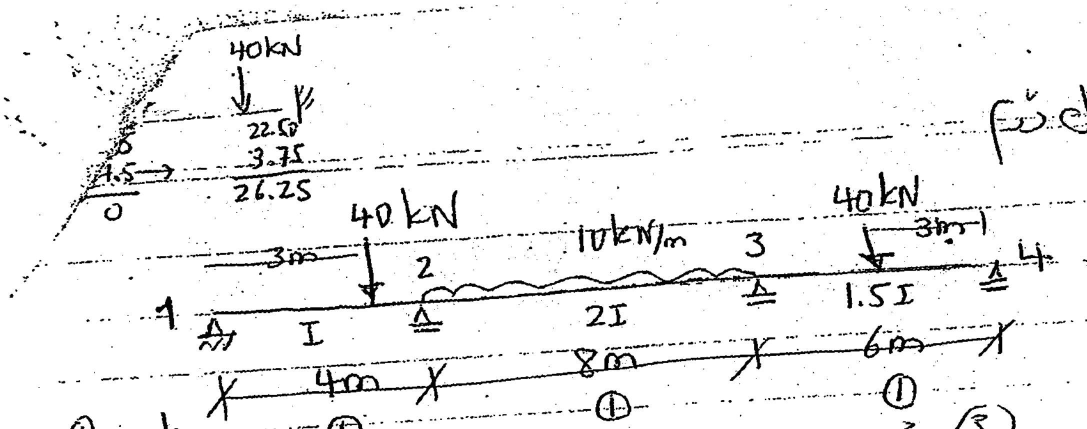
$$M'_{ij} = R_{ij}\left[M_i^F + \sum M'_{ji}\right]$$

$$M_{ij} = 2M'_{ij} + M'_{ji} \pm M_{ij}^F$$

$$R_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{k_{ij}}{\sum_j k_{ij}}$$


-17.98
-52.94
-41.41
-9.29

ص 28 حل تمرين


40kN
22.50
3.75
26.25
1.5
0
40 kN
3m
10kN/m
40kN
3m
1
2
3
4
I
2I
1.5I
4m
8m
6m

$\frac{I}{4}$ ①

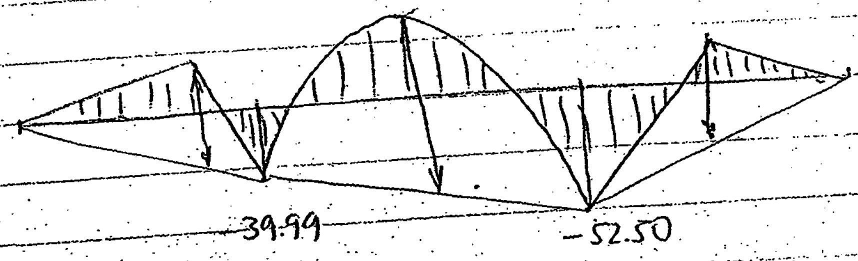
$\frac{2I}{8}=\frac{I}{4}$ ①

$\frac{1.5I}{6}=\frac{I}{4}$ ①

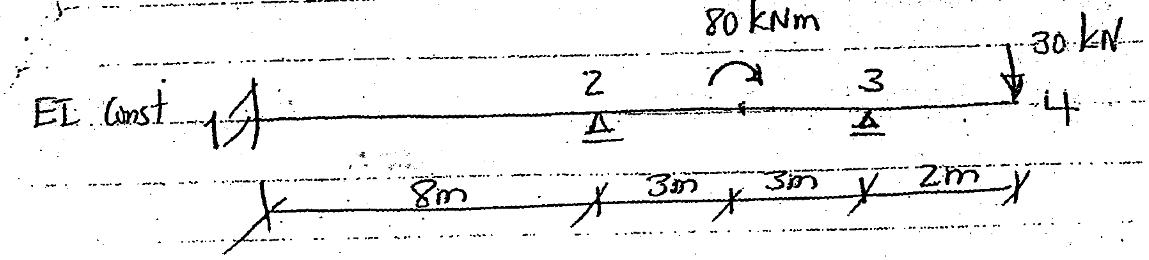
k ① ① ①

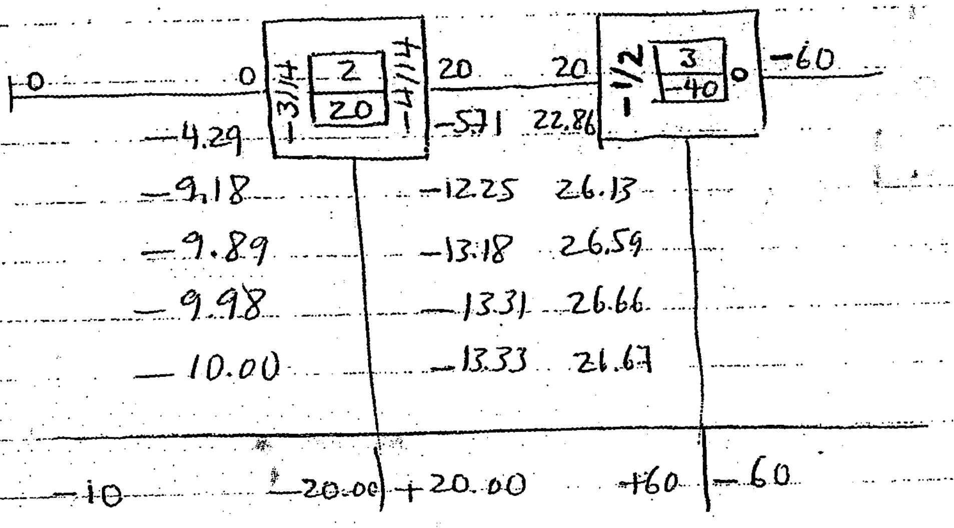
k' $1\times\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)$ ① $1\times\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)$

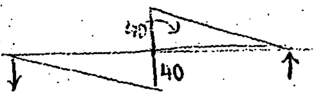
0	26.25	-0.21	2 -27.08	-0.29	-5333	5333	-0.29	3 8.33	-0.21	-45.00	0
	5.80				7.74	-4.59				-3.44	
	6.79				9.05	-4.97				-3.72	
	6.87				9.16	-5.00				-3.75	
	6.87				9.17	-5.00				-3.75	
C	39.99				-39.99	52.50				-52.50	0

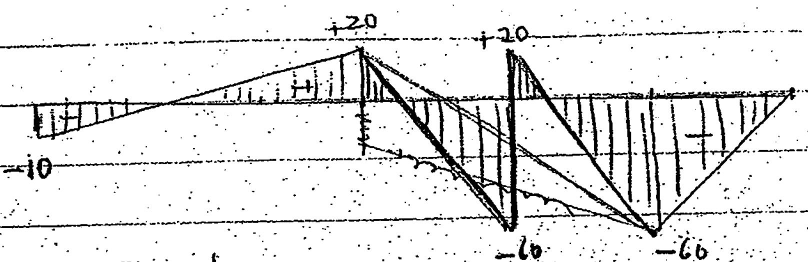


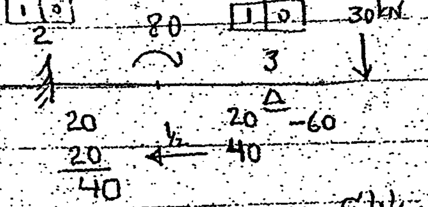
[illegible]


80 kNm
30 kN
EI Const
1
2
3
4
8m
3m
3m
2m


0
0
-3/14
-4/14
2
20
20
20
-1/2
3
-40
0
-60
-4.29
-5.71
22.86
-9.18
-12.25
26.13
-9.89
-13.18
26.59
-9.98
-13.31
26.66
-10.00
-13.33
26.67
-10
-20.00
+20.00
+60
-60




+20
+20
-10
-60
-60

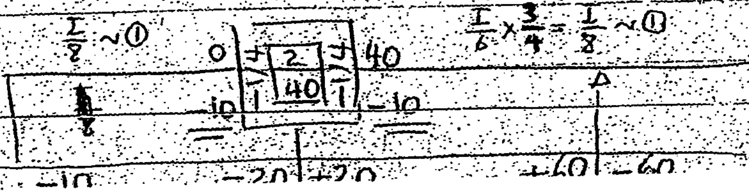

1 0
2
80
1 0
3
30kN
20
20
40
1/2
20
-60
40

روش تعدیل : k_{23} با $\frac{3}{4}$: باید شرایط تعدیل

باید 40 در 32 تقسیم شود تا گره 3 متعادل گردد

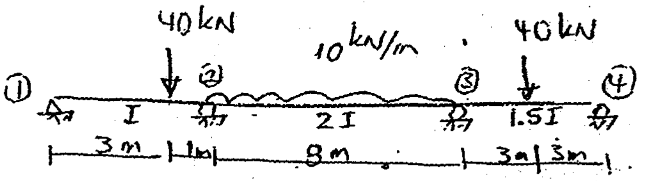
از 40 مقدار 20 به 2 منتقل می‌شود در نتیجه جای تعدیل را داریم

$\frac{I}{8} \sim ①$ $\qquad \frac{I}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{I}{8} \sim ①$


1/8
0
-1/1
2
40
-1/1
40
-10
-10
-10
-20
+20
+60
-60

LATERAL DISPLACEMENTS ARE KNOWN..

3PLE :



40 kN
10 kN/m
40 kN
①
②
③
④
I
2I
1.5I
3 m
1 m
8 m
3 m
3 m

Support 2 sinks by 10 mm. Determine the final Moments.

$E = 200 \times 10^6\ kN/m^2$ and $I = 80 \times 10^{-6}\ m^4$.

Fixed end Moments after considering simple supports

$$-\frac{6EI\Delta}{L^2} = \frac{6 \times 200 \times 10^6 (2 \times 80 \times 10^{-6}}{8 \times 8} = 3.$$

$M_{12}^F = 0 \quad M_{21}^F = +26.25$

$M_{34}^F = -45.00 \quad M_{43}^F = 0$

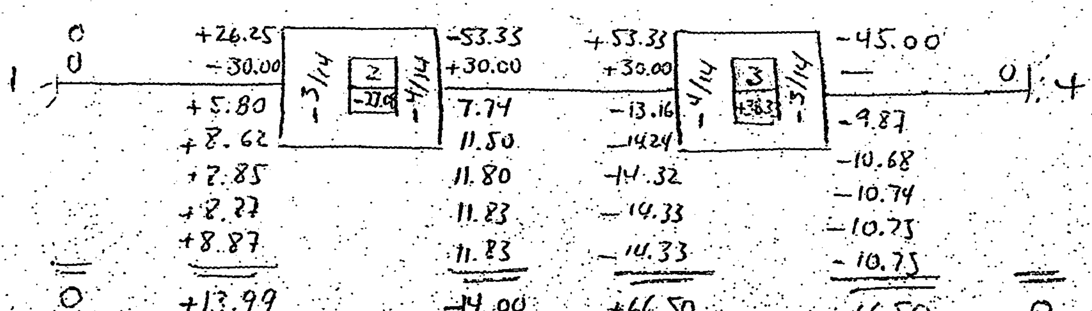
$M_{23}^F = -M_{32}^F = -\frac{10(8)^2}{12} = -53.33$

$M''_{21} = -\frac{3EI\Delta}{L^2} = -30.$

$M''_{23} = +30.00 = M.$

Now the fixed end moments due to the known settlement of supports are to be added to the above moments to arrive at net fixed end mom (written separa

Joint	Member	Rel. k	Σk	Rij
2	2-1	3/4 (I/4)	7/16 I	−0.21 = −3/14
	2-3	(2I/8)		−0.29 = −4/14
3	3-2	(2I/8)	7/16 I	−0.29
	3-4	3/4 (1.5I/6)		−0.21

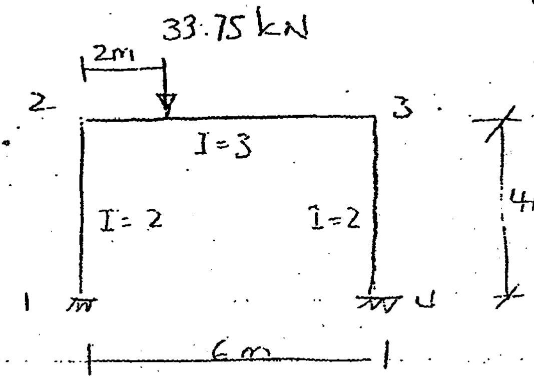


1
0
0
+26.25
−30.00
+5.80
+8.62
+7.85
+8.27
+8.87
+13.99
−3/14
2
−27.08
−4/14
−53.33
+30.00
7.74
11.50
11.80
11.83
11.83
−14.00
+53.33
+30.00
−13.16
−14.24
−14.32
−14.33
−14.33
+66.50
−4/14
3
+38.33
−3/14
−45.00
—
−9.87
−10.68
−10.74
−10.75
−10.75
−66.50
0
4
0
0

$M_{21} = M_{21}^F + 2M'_{21} + M'_{12} + M''_{21} = +26.25 + 2(8.87) + 0 + (-30) = 13.9$

$M_{23} = -53.33 + 2(11.83) + (-14.33) + (30.00) = -14.00$

LE 1:


33.75 kN
2m
2
3
I=3
I= 2
I=2
4m
1
4
6m

$M'_{ij} = R_{ij}[M_i^F + \Sigma M_{ji} + \Sigma$

$M''_{ij} = D_{ij}\{\Sigma_r M'_{ij} + \Sigma_r M'_{ji}$

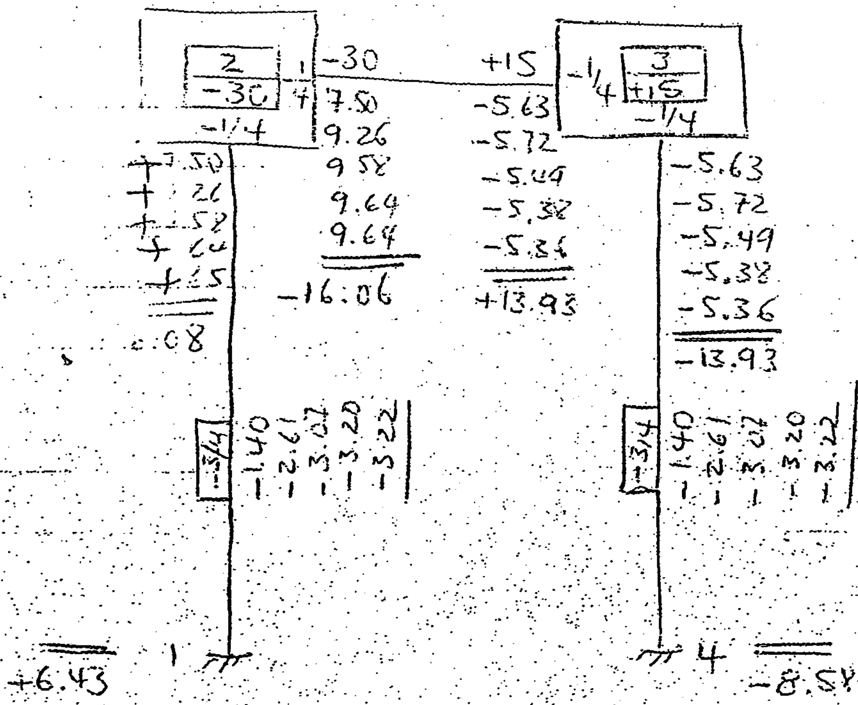
$M_{ij} = 2M'_{ij} + M'_{ji} + M''_{ij} \pm$

$$M_{23}^F = -\frac{33.75(2)(4)^2}{(6)^2} = -30 \qquad M_{32}^F = \frac{33.75(2)^2(4)}{(6)^2} = +15.0$$

$$k_{12} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = k_{34} \qquad k_{23} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$R_{21} = R_{23} = R_{32} = R_{34} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1/2}{1/2+1/2}\right) = -\frac{1}{4}$$

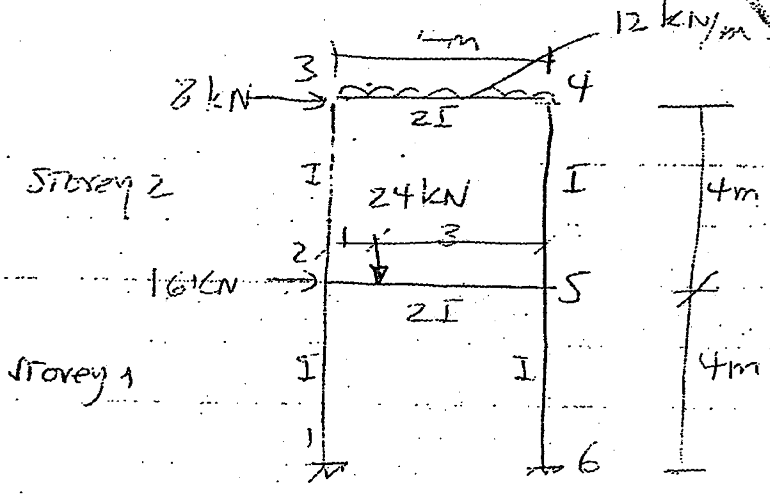
$$D_{12} = D_{34} = -\frac{3}{2}\;\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4}$$


2
-30
-1/4
-1/4
-30
7.50
9.26
9.58
9.64
9.64
-16.06
+15
-5.63
-5.72
-5.49
-5.38
-5.36
+13.93
-1/4
3
+15
-1/4
+7.50
+ 26
+ 58
+ 64
+ 65
.08
-5.63
-5.72
-5.49
-5.38
-5.36
-13.93
-3/4
-1.40
-2.61
-3.07
-3.20
-3.22
-3/4
-1.40
-2.61
-3.07
-3.20
-3.22
+6.43
1
4
-8.58

eq $M_{21} = 0 + 2(9.65) + (0) + (-3.22) = +16.08$

~~$M_{23} = -30 + 2(9.64) + (-5.36) + (0) = -16.06$~~

EXAMPLE 1 :


4m
12 kN/m
3
4
8 kN
2I
Storey 2
I
I
24 kN
1
3
2
16 kN
5
2I
Storey 1
I
I
4m
4m
1
6

Joint	Members	Rel. k	Σk	R_{ij}
2	2-1	I/4		$-1/8$
	2-3	I/4	I	$-1/8$
	2-5	I/2		$-1/4$
3	3-2	I/4	$\frac{3}{4}$I	$-1/6$
	3-4	I/2		$-1/3$

$$D_{ij} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{1+2} = -\frac{3}{4} \quad \text{for all columns}$$

$$M_{34}^{F} = -M_{43}^{F} = -\frac{12(4)^2}{12} = +16.00 \text{ kN.m}$$

$$M_{25}^{F} = -\frac{24(1)(3)^2}{(4)^2} = -13.50 \text{ kN.m}$$

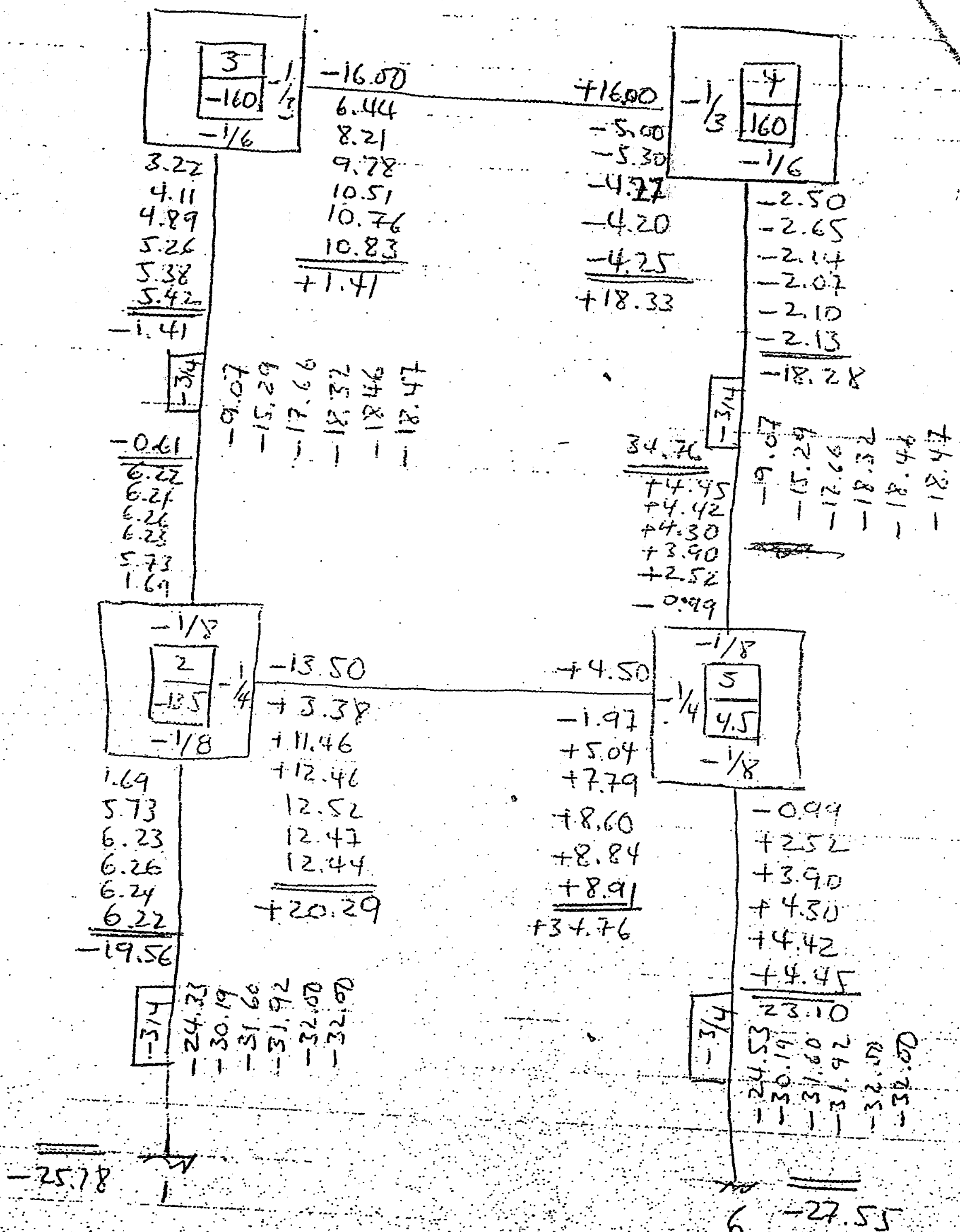
$$M_{52}^{F} = +\frac{24(1)^2(3)}{(4)^2} = +4.50 \text{ kN.m}$$

Storey Moments

Storey 2 $\quad Q_2 = +8 \text{ kN} \quad M_2 = \frac{8 \times 4}{3} = 10.67$

Storey 1 $\quad Q_1 = (8) + 16 = 24 \quad M_1 = \frac{24 \times 4}{3} = 32$

ORder of Joints for



3
-160
-1/3
-1/6
-16.00
6.44
8.21
9.78
10.51
10.76
10.83
+1.41
3.22
4.11
4.89
5.26
5.38
5.42
-1.41
-3/4
-9.07
-15.29
-17.66
-18.32
-18.46
-18.47
-0.61
6.22
6.21
6.26
6.23
5.73
1.69
4
160
-1/3
-1/6
+16.00
-5.00
-5.30
-4.27
-4.20
-4.25
+18.33
-2.50
-2.65
-2.14
-2.07
-2.10
-2.13
-18.28
-3/4
-9.07
-15.29
-17.66
-18.32
-18.46
-18.47
34.76
+4.45
+4.42
+4.30
+3.90
+2.52
-0.99
-1/8
2
-13.5
-1/4
-1/8
-13.50
+3.38
+11.46
+12.46
12.52
12.47
12.44
+20.29
1.69
5.73
6.23
6.26
6.24
6.22
-19.56
-3/4
-24.33
-30.19
-31.60
-31.92
-32.00
-32.00
-25.78
1
-1/8
5
4.5
-1/4
-1/8
+4.50
-1.97
+5.04
+7.79
+8.60
+8.84
+8.91
+34.76
-0.99
+2.52
+3.90
+4.30
+4.42
+4.45
23.10
-3/4
-24.53
-30.19
-31.60
-31.92
-32.00
-32.00
6
-27.55

خلاصه تحلیل II صافحیان ترم ۲

✓ * روش چولسکی برای ماتریس مربعی غیرویژه متقارن

$$S = LU = LL^T \longrightarrow S^{-1} = (LL^T)^{-1} = (L^T)^{-1} L^{-1} = (L^{-1})^T L^{-1} \xrightarrow{L^{-1}=R} S^{-1} = R^T R$$ که $RL = I$

✓ * محاسبه ماتریس وارون به طریق تقسیم‌بندی

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I & (2) \\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \longrightarrow B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} \; * \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0 & (1) \\ A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = I \xrightarrow{*} -A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} + A_{22}B_{22} = I \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} \xrightarrow{(2)} A_{11}B_{11} + A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} = I$$

~~$(2) \rightarrow A_{11}A_{21}A_{22}B_{21} + A_{12}B_{21} = I$~~

$$\longrightarrow B_{22} = \left[A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right]^{-1} \checkmark$$

$$\longrightarrow B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}\left[A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right]^{-1} \checkmark$$

$$\longrightarrow B_{11} = \left[A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right]^{-1} \xrightarrow{(1)} B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}\left[A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right]^{-1} \checkmark$$

* * قضیه بتی: در یک سازه الاستیک خطی، کار انجام شده توسط نیروهای Q_I در تغییر مکان‌های q_{II} برابر است با کار انجام شده توسط نیروهای Q_{II} در تغییر مکان‌های q_I (q_I و q_{II} به ترتیب تغییر مکان‌های ناشی از نیروهای Q_I و Q_{II} را نشان می‌دهند)

* * قضیه ماکسول:

$$w_{ij} = \frac{1}{2}\alpha_{ii}Q_i^2 + \alpha_{ij}Q_iQ_j + \frac{1}{2}\alpha_{jj}Q_j^2$$

$$w_{ji} = \frac{1}{2}\alpha_{jj}Q_j^2 + \alpha_{ji}Q_jQ_i + \frac{1}{2}\alpha_{ii}Q_i^2 \xrightarrow[w_{ij}=w_{ji}]{\text{با استفاده از بتی}} \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

درایه S_{ij}: نیروی بوجود آمده در نقطه i تحت اثر تغییر مکان واحد در مکان j
یا نیروی بوجود آمده در امتداد Q_i زمانی که $q_j=1$ و بقیه q_j ها صفر باشد.

✓ * ماتریس سختی متقارن است

با فرض برقرار بودن رفتار خطی، کار انجام شده توسط نیروهای وارده در تغییر شکل جسم به صورت زیر خواهد بود:

$$U = \frac{1}{2}(P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + \cdots + P_n\Delta_n) \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = \frac{1}{2}\left[P_1 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1}\Delta_1 + \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_1}\Delta_2 + \cdots + \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_1}\Delta_n\right)\right] \; *$$

بنا به قضیه اول کاستیلیانو

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i \xrightarrow{*} P_1 = \left[\frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1}\Delta_1 + \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_1}\Delta_2 + \cdots + \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_1}\Delta_n\right] \xrightarrow[\text{تعریف ماتریس سختی}]{\text{به طور کلی}} P_i = \left[\frac{\partial P_1}{\partial \Delta_i}\Delta_1 + \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_i}\Delta_2 + \cdots + \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_i}\Delta_n\right]$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_1} \\ \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_2} & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_2} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_n} & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_n} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}$$

بنا به قضیه اول کاستیلیانو

$$\begin{cases} S_{ij} = \dfrac{\partial P_i}{\partial \Delta_j} = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial \Delta_i}\right)}{\partial \Delta_j} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial \Delta_j \partial \Delta_i} \\ S_{ji} = \dfrac{\partial P_j}{\partial \Delta_i} = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial \Delta_j}\right)}{\partial \Delta_i} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \end{cases} \xrightarrow[\text{مهم نیست}]{\text{چون ترتیب دیفرانسیل‌گیری}} \frac{\partial P_i}{\partial \Delta_j} = \frac{\partial P_j}{\partial \Delta_i}$$

در نتیجه ماتریس سختی متقارن است.

✓ * ماتریس سختی یک ماتریس مثبت معین است زیرا پیش ضرب و پس ضرب آن با یک بردار غیر صفر، یک مقدار مثبت است.

Positive definite

اثبات: $P = K\Delta$ (K: ماتریس سختی نهایی)

$$U = \frac{1}{2}P^T\Delta = \frac{1}{2}\Delta^T K^T \Delta = \frac{1}{2}\Delta^T K \Delta$$ (K متقارن است) و $U>0$ و Δ اختیاری $\longrightarrow |K|>0$

* ماتریس سختی نواری

ماتریس سختی به صورت نواری است مشروط بر اینکه تمام گره‌ها به همدیگر متصل شده باشند و شماره‌گذاری طوری انجام شده باشد که بزرگترین فاصله بین دو شماره مشخص یک عضو به حداقل ممکن محدود شده باشد. اگر در این شماره‌گذاری دقت لازم نشود در این صورت این خصوصیت که باعث صرفه‌جویی در وقت و فضای کامپیوتری می‌گردد، از بین خواهد رفت.

✓ * در سوار کردن K باید به دو اصل اساسی سازگاری تغییر مکان‌ها و تعادل نیروها در گره‌ها توجه نمود. اصل اول بیانگر این واقعیت است که تغییر مکان‌های انتهای اعضای متصل به یک گره مخصوص برابر تغییر مکان آن گره است $\Delta_i = \Delta_{ij} = \Delta_{im} = \cdots = \Delta_{in}$.

بر اساس اصل دوم نیز، نیروهای انتهایی اعضای متصل به یک گره مخصوص، باید برابر نیروی خارجی مؤثر بر آن گره باشد $P_i = P_{ij} + P_{im} + \cdots + P_{in}$

✓* مقایسه روش های سختی و نرمی از جنبه‌های مختلف - کدام رو انتخاب کنیم؟

۱- درجات نامعینی استاتیکی وکینماتیکی را تعیین می کنیم. هر کدام که مجهولاتش کمتر بود، آن روش بهتر است.

ابعاد ماتریس نرمی ابعاد ماتریس سختی کوچک شده

2- ببینیم ماتریس ما مریض الحال است یا نه. اگر ماتریس نرمی مریض الحال باشد، قطعاً ماتریس سختی مریض الحال نیست و بالعکس

3- روش ماتریس سختی برای انجام دادن حل با کامپیوتر بهتر است.

✓* شکل شماتیک رابطه میان نیروها و تغییر مکان های گرهی و عضوی

$$\begin{tikzcd} F\text{ها} & Q\text{ها} \arrow[l, "{[A]}"'] \\ \delta\text{ها} \arrow[u, "{[S]}"] \arrow[r, "{[B]}"'] & q\text{ها} \arrow[u, "{[s]}"'] \end{tikzcd}$$

مفصلها برداری

δ : تغییر مکان های گرهی
q : تغییر مکان های عضوی
Q : نیروهای عضوی
F : نیروهای گرهی
B : ماتریس سازگاری تغییر مکان های عضو و گرهی
s : ماتریس سختی سوار نشده
A : ماتریس تعادل بین نیروهای عضوی و گرهی
S : ماتریس سختی سوار شده

$$F=AQ=A(sq)=As(B\delta)\rightarrow F=(AsB)\delta$$
$$\rightarrow S=AsB$$

✓* اثبات $S=B^TsB=AsA^T$

قضیه کار مجازی: انرژی داخلی سازه برابر است با کار انجام شده توسط نیروهای خارجی موثر بر سازه یا اگر سازه‌ای تحت اثر بارهای وارده در تعادل باشد آن زمان به ازای یک بار واحد کار انجام شده داخلی با کار انجام شده خارجی برابر است.

$W=\frac{1}{2}\delta^TF$ کار انجام شده

$U=\frac{1}{2}q^TQ$ انرژی داخلی $\xrightarrow[W=U]{\text{کار مجازی}}$ $\cancel{\frac{1}{2}}\delta^TF=\cancel{\frac{1}{2}}q^TQ$

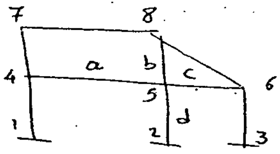
$F=AQ$

$q=B\delta\rightarrow q^T=\delta^TB^T$

$$\rightarrow \delta^T(A)Q=\delta^T(B^T)Q\rightarrow A=B^T\xleftrightarrow{\text{و بالعکس}}A^T=B$$
$$\rightarrow S=AsB=B^TsB=AsA^T$$

شبهه: آیا تنها ماتریس A کافیه؟ نیازی به B نیست؟ برای رسیدن به $S=AsA^T$ در ابتدا از B استفاده کرده‌ایم

✓ سوال: چرا $S=AsA^T$ معادل planting یا assenbling است؟



با یک مثال توضیح می‌دهیم. قاب روبرو را در نظر بگیرید. ماتریس سختی عضو a را $K_a=\begin{bmatrix}K_{44}&K_{45}\\K_{54}&K_{55}\end{bmatrix}$ در نظر بگیرید. (خود هرکدام از K ها یک زیرماتریس هستند از مرتبه α×α که α تعداد درجات آزادی هر گره است. مثلاً در خرپای دوبعدی α=2 و در قاب فضاکار α=6 است.) عمل AK_aA^T را انجام می دهیم.

$$\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\end{array}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_{44}&K_{45}\\K_{54}&K_{55}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&K_{44}&K_{45}&0&0&0\\0&0&0&K_{54}&K_{55}&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\4\\5\\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}&&&4&5&&&\end{array}\\\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&K_{44}&K_{45}&0&0&0\\0&0&0&K_{54}&K_{55}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

اما این ماتریس جزئی از ماتریس سختی کل سازه است. برای ساختن ماتریس سختی کل باید برای همین کار را برای تمامی اعضای دیگر هم کرد و آنها را باهم جمع کرد. طبیعتاً گره هایی مثل گره 5 که بین چهار عضو مشترک است، ۴ بار از ۴ ماتریس مختلف باهم جمع می شوند.

* روش های حل یک دسته از معادلات همزمان
- حذفی گوس
- چولسکی
- گوس سایدل
- ژاکوبی
- ماتریس نواری

- روش چولسکی به نظر می رسد که سریع ترین روشهای حذفی باشد.

- زمانی که دستگاه معادلات AX=B از مرتبه ۱۰ بوده و ماتریس ضرایب دارای درایه های صفر زیاد باشند، یک روش تکراری معمولاً برای حل ترجیح داده می شود.

---

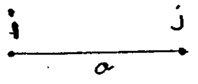
* سختی مستقیم و سختی عرضی

cross stiffness   direct stiffness

$$K_a = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}$$

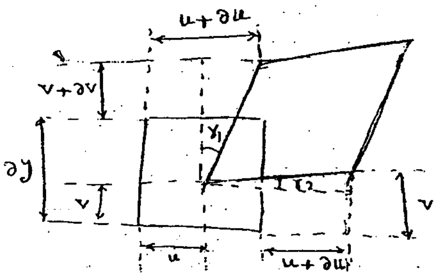
سختی عرضی

سختی مستقیم



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$



$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

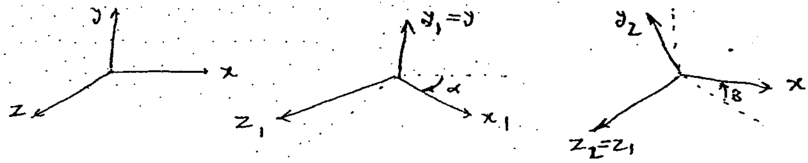
فرضیات
* γ_1 و γ_2 کوچک هستند.
* ∂v در برابر ∂y و ∂u در برابر ∂x کوچک هستند.

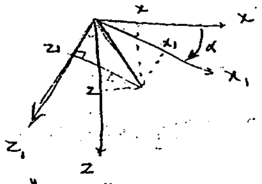
---

* روش های محاسبه ماتریس سختی
- هوک ← Bar element
- شیب افت یا کاستیگلیانو ← Beam element
- تابع تغییر شکل ← Rectangular / Triangular element

---

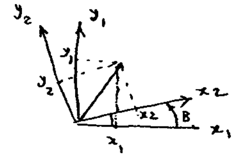
* ماتریس تبدیل T





$$z_1 = z\cos\alpha - x\sin\alpha$$
$$x_1 = z\sin\alpha + x\cos\alpha$$
$$y_1 = y$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



$$x_2 = x_1\cos\beta + y_1\sin\beta$$
$$y_2 = y_1\cos\beta - x_1\sin\beta$$
$$z_2 = z_1$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta & \cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \bar{X} = TX$$

ماتریس سختی تانسور درجه 2 است.

$$\bar{Q} = \bar{s}\,\bar{q} \rightarrow TQ = \bar{s}\,Tq \rightarrow Q = T^{-1}\bar{s}\,T\,q \rightarrow s = T^{-1}\bar{s}\,T$$

$$= \underline{T^{T}\bar{s}\,T}$$ (دستگاه محورها متعامد) در تانسور

یعنی برای تبدیل ماتریس سختی محلی به سیستم، باید آن را در ماتریس تبدیل و ترنسپوز ماتریس تبدیل، پس ضرب و پیش ضرب کنیم.

---

* معادله انرژی

$$q_i = \frac{\partial U}{\partial Q_i} \longleftarrow U = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\frac{S(x)^2}{EA} + \frac{M(x)^2}{EI} + \frac{V(x)^2}{AG} + \frac{T(x)^2}{GJ} \right] dx$$

S و M و V و T را برحسب Q ها می نویسید. مشتق زنجیره ای درداخل انتگرال می گیرید ← $q = \varphi Q$ ← $Q = \varphi^{-1} q$ ← $s = \varphi^{-1}$

✓ مراحل روش پاره سازه‌ها :

1- سازه را به تعدادی پاره سازه ریز می‌کنیم.
2- گره‌های مشترک میان پاره سازه‌ها را می‌بندیم.
3- تغییر مکان‌های گره‌های داخلی را محاسبه می‌کنیم.
4- عکس العمل‌های گره‌های مشترک را بدست می‌آوریم.
5- معکوس عکس العمل‌های گره‌های مشترک بعلاوه نیروهایی که مستقیماً به گره‌های مشترک وارد می‌شوند را به سازه مرز مشترک وارد می‌کنیم.
6- سازه مرز مشترک را آزاد می‌کنیم.
7- تغییر مکان‌های گره‌های مرز مشترک را حاصل می‌کنیم.
8- تغییر مکان‌های گره‌های داخلی را با جمع کردن تغییر مکان‌های گام‌های 3 و 7 بدست می‌آوریم.
9- با استفاده از ماتریس سختی اعضا و تغییر مکان‌های گام 8، نیروهای همه اعضا را بدست می‌آوریم.

معادلات ریاضی روش پاره سازه‌ها

$$Q^k = s^k q^k \longrightarrow \begin{bmatrix} Q_c^k \\ Q_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{cc}^k & s_{ci}^k \\ s_{ic}^k & s_{ii}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c^k \\ q_i^k \end{bmatrix} \quad \text{که} \quad \begin{bmatrix} Q_c^k \\ Q_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_c^{k\varphi} \\ Q_i^{k\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_c^{kp} \\ Q_i^{kp} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} q_c^k \\ q_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_c^{k\varphi} \\ q_i^{k\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_c^{kp} \\ q_i^{kp} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} R_c^{k\varphi} \\ Q_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{cc}^k & s_{ci}^k \\ s_{ic}^k & s_{ii}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q_i^{k\varphi} \end{bmatrix} \longrightarrow q_i^{k\varphi(1)} = s_{ii}^{k^{-1}} Q_i^k \rightarrow R_c^{k\varphi} = s_{ci}^k s_{ii}^{k^{-1}} Q_i^k$$

$$\longrightarrow Q_c^{kp} = Q_c^k - s_{ci}^k s_{ii}^{k^{-1}} Q_i^k$$

$$\begin{bmatrix} Q_c^{kp} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{cc}^k & s_{ci}^k \\ s_{ic}^k & s_{ii}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c^{kp} \\ q_i^{kp} \end{bmatrix} \longrightarrow q_i^{kp(2)} = -s_{ii}^{k^{-1}} s_{ic}^k q_c^{kp} \quad \text{و} \quad Q_c^{kp} = s_{cc}^k q_c^{kp} + s_{ci}^k q_i^{kp}$$

$$= s_{cc}^k q_c^{kp} + s_{ci}^k s_{ii}^{k^{-1}} s_{ic}^k q_c^{kp}$$

$$\longrightarrow Q_c^{kp} = \underbrace{\left[s_{cc}^k - s_{ci}^k s_{ii}^{k^{-1}} s_{ic}^k \right]}_{= s_c^k} q_c^{kp} \xrightarrow{\text{assembling}} Q_c^p = S_c q_c^p \longrightarrow q_c^p = S_c^{-1} Q_c^p$$

$$\longrightarrow q_i^k = q_i^{k\varphi} + q_i^{kp} = (1) + (2)$$

✓ * What is static condensation? ← همین ماتریس سختی s_c^k است که در حقیقت ماتریس سختی مرز مشترک از سوار کردن این s_c^k ها در یک ماتریس درست می‌شود.

✓ * ویژگی‌های یک سازه

- connectivity properties ← کدوم گره‌ها توسط کدوم اعضا به هم متصل اند.
- Geometrical " ← مختصات هر گره چقدر است
- mechanical " ← E: مدول الاستیسیته، ν ضریب پواسون و...

✓ * ماتریس سختی ویژه و غیر ویژه

ماتریس سختی کل یک سازه قبل از اعمال شرایط مرزی یک ماتریس ویژه است ($|S|=0$ ← حل نمی‌شود). در واقع بیان می‌کند که سازه بدون تکیه‌گاه از نظر سیستماتیکی ناپایدار است. (چون q های تکیه‌گاه‌ها را صفر نگذاشته بودیم.) اما با اعمال شرایط مرزی به ماتریس سختی کوچک شده می‌رسیم که یک ماتریس غیر ویژه است و بعد مسئله را حل می‌کنیم.

✓ * روش‌های اجرای شرایط مرزی

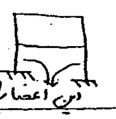
$$\begin{bmatrix} \times 10^{20} & \cdots \\ & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i = 0 \\ \\ \end{bmatrix}$$

1- درایه‌های قطری ماتریس سختی S که مربوط به مولفه‌های تغییر مکانی ثابت هستند، در یک عدد بزرگ مانند 10^{20} ضرب می‌شوند.

2- " " " " " " " " " " " " " واحد قرار داده شوند و بقیه درایه‌ها مربوط به این سطرها و ستون‌ها مساوی صفر گذاشته شوند.

$$\begin{bmatrix} \cdots 1 \cdots\cdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i = 0 \\ \\ \end{bmatrix}$$

3- از اول اعضایی که به تکیه‌گاه‌های ثابت وصلند در نظر گرفته نشوند یا اینکه اگر مثلاً به تکیه‌گاه مفصلی یا غلتکی متصل هستند، درجات آزادی مربوط به تغییر مکان‌های صفر حذف گردند.



این اعضا را حساب نکنیم.

✓ * اثبات روابط ماتریس نرمی:

$$\text{داریم} \begin{cases} I = B_0 Q + B_1 R = [B_0\ B_1]\begin{bmatrix} Q \\ R \end{bmatrix} \\ U = \frac{1}{2} I^T F I \end{cases} \longrightarrow U = \frac{1}{2} \Big([Q\ R] \underbrace{\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \end{bmatrix} \Big) \overset{\text{ماتریس نرمی سوار نشده}}{F} \Big([B_0\ B_1]}_{D} \begin{bmatrix} Q \\ R \end{bmatrix} \Big) = \frac{1}{2} [Q\ R] \begin{bmatrix} D_{QQ} & D_{QR} \\ D_{RQ} & D_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ R \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow U = \frac{1}{2} \left[QD_{QQ} + RD_{RQ} \quad QD_{QR} + RD_{RR} \right] \begin{bmatrix} Q \\ R \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left((QD_{QQ} + RD_{RQ})Q + (QD_{QR} + RD_{RR})R \right)$$

سازگاری

$$\frac{\partial U}{\partial R} = 0 \longrightarrow D_{RQ} Q + R D_{RR} = 0 \longrightarrow \boxed{R = -D_{RR}^{-1} D_{RQ} Q}$$

$$q = \frac{\partial U}{\partial Q} = D_{QQ} Q + D_{QR} R = D_{QQ} Q - D_{QR} D_{RR}^{-1} D_{RQ} Q = (D_{QQ} - D_{QR} D_{RR}^{-1} D_{RQ}) Q \rightarrow q = \alpha Q$$

* تعیین درجات نامعینی داخلی سازه های مختلف (DSI) internal degree of statical indeterminacy : A. Kaweh

الف) خرپای مستوی $\gamma(S) = \underbrace{\overset{\text{"S" Graph}}{N_i}(S)}_{\substack{\text{Nodes}\\ \text{internal}}} - \underbrace{M_c(S)}_{\substack{\text{Members}\\ \text{complementary}}}$ شکل داخلی

2 ① اثبات : اول اثبات می کنیم که اگر خرپا پر از مثلث بود (به غیر از مرز بیرونی) خواهیم داشت $\gamma(S) = N_i(S)$

فرمول اویلر
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\text{regions}}{R} - \overset{\text{members}}{M} + \overset{\text{nodes}}{N} = 2 \\ R = R_i + 1 \end{array}\right\} \rightarrow R_i = M - N + 1 \rightarrow 3R_i = 3M - 3N + 3$$

internal
$$\left.\begin{array}{l} 3R_i = 2M - M_e \\ M_e = N_e = N - N_i \end{array}\right\} \rightarrow 3R_i = 2M - N + N_i$$

Members of exterior boundary

$$\left.\begin{array}{l} M - 2N + 3 = N_i \\ \gamma = M - 2N + 3 \end{array}\right\} \rightarrow \gamma = N_i$$

کوشینکو (خرپای مستوی)

حال به هر تعداد که از عضوهای داخلی را بر داریم، به همان تعداد از درجات نامعینی کاسته می شود یعنی $\gamma = N_i - M_c$

ب) قاب مستوی $\gamma(S) = 3R_i(S)$ ✓

Proof: A tree structure is statically determinate For each addition of a chord the indeterminacy of the structure increases by 3, and therefore: $\gamma = 3[M - N + 1]$ کوشینکو (قاب مستوی)

Euler's formula: $\left.\begin{array}{l} R - M + N = 2 \\ R = R_i + 1 \end{array}\right\} \rightarrow R_i = M - N + 1$ $\Big\} \rightarrow \gamma = 3R_i$

ج) قاب سه بعدی $\gamma(S) = 6[\underbrace{R_i}_{\substack{\text{Region}\\ \text{internal}}}(S^P) - \underbrace{C}_{\text{Cross}}(\overset{\text{Planar}}{S^P})]$

Proof: $\gamma(S) = 6[M(S) - N(S) + 1]$ کوشینکو (قاب سه بعدی)

$$\text{* چون} \left.\begin{cases} M(S^P) = M(S) + 2C(S^P) \\ N(S^P) = N(S) + C(S^P) \end{cases}\right\} \rightarrow \gamma(S) = 6[M(S^P) - 2C(S^P) - N(S^P) + C(S^P) + 1] = 6[M(S^P) - N(S^P) + 1 - C(S^P)]$$

اویلر $\left.\begin{array}{l} R - M + N = 2 \\ R = R_i + 1 \end{array}\right\} \rightarrow R_i = [M - N + 1]$ $\Big\} \rightarrow \gamma = 6[R_i(S^P) - C(S^P)]$

د) خرپای فضایی $\gamma(S) = C(S^P) - M_c(S^P)$ هم داخلی هم مرز بیرونی

اثبات : به گراف S^P تعدادی عضو اضافه می کنیم که به صورت تمام مثلثی در بیاید تا به گراف S' برسیم

$$\left.\begin{array}{l} M(S') = M(S^P) + M_c(S^P) \\ \star\ M(S^P) = M(S) + 2C(S^P) \end{array}\right\} \rightarrow M(S') = M(S) + 2C(S^P) + M_c(S^P) \rightarrow M(S) = M(S') - 2C(S^P) - M_c(S^P)$$

$$N(S') = N(S^P) \underset{\star}{=} N(S) + C(S^P) \rightarrow N(S) = N(S') - C(S^P)$$

کوشینکو (خرپای فضایی) $\gamma(S) = M(S) - 3N(S) + 6$

$$\rightarrow \gamma(S) = M(S') - 2C(S^P) - M_c(S^P) - 3N(S') + 3C(S^P) + 6 = M(S') - 3N(S') + 6 + C(S^P) - M_c(S^P)$$

چون هر منطقه مثلثی سه تا عضو دارد و هر عضو در دو منطقه نشسته است (تمام مثلثی) $\rightarrow 3R(S) = 2M(S)$

اویلر $R - M + N = 2$

$$\rightarrow 2M(S) - 3M(S) + 3N(S) = 6 \rightarrow M - 3N + 6 = 0$$

$$\rightarrow \gamma(S) = C(S^P) - M_c(S^P)$$

---

* ماتریس نرمی یک تیر ✓

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix}}_{\text{با قرارداد مقاومت مصالح}}$$

قرارداد شیب افت

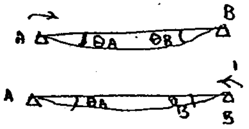
قرارداد مقاومت مصالح

$$M_A = 1 = 2E\frac{I}{L}(2\theta_A - \theta_B) \rightarrow 1 = 2E\frac{I}{L}(3\theta_B) \rightarrow \theta_B = \frac{L}{6EI} \rightarrow \theta_A = \frac{L}{3EI}$$

$$M_B = 0 = 2E\frac{I}{L}(-2\theta_B + \theta_A) \rightarrow \theta_A = 2\theta_B$$

$$M_A = 0 = 2E\frac{I}{L}(2\theta_A - \theta_B) \rightarrow \theta_B = 2\theta_A$$

$$M_B = -1 = 2E\frac{I}{L}(-2\theta_B + \theta_A) \rightarrow -1 = 2E\frac{I}{L}(-3\theta_A) \rightarrow \theta_A = \frac{L}{6EI} \rightarrow \theta_B = \frac{L}{3EI}$$



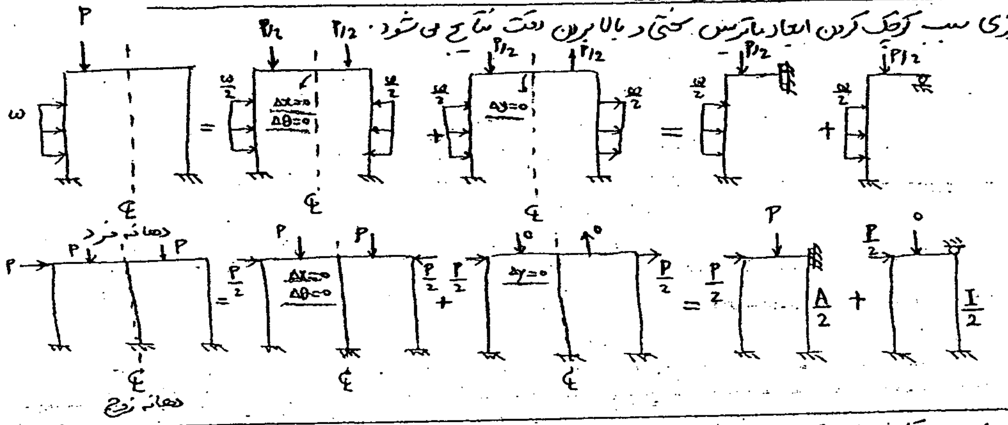
$$\rightarrow \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{L}{6EI} \\ \frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} \rightarrow F = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

✓* ماتریس بهینه شده تا دیشرکی دارد ⟨ well-structured خوش‌سازه ← حافظه کمتری از کامپیوتر اشغال کند. (sparse برمبنای L)
ill-conditioned ← اگر یکی از درایه‌هایش را عوض کنیم، جواب‌ها تغییر آنچنانی ای نکنند.

* طریقه بهینه کردن و نواری کردن ماتریس B_1 و B_0 و D در روش نرمی: سازه را به پاره سازه‌های محلی ریز کنیم.

✓* شرایط انتخاب مجهولات اضافی ⟨ سازه باقیمانده پایدار باشد.
تعداد کافی وجود داشته باشد.

✓* تقارن محوری و مرکزی سبب کوچک کردن ابعاد ماتریس سختی و بالا بردن دقت نتایج می‌شود.



✓* گام‌های روش المان محدود به قرار زیر است:

1- نوع مسئله را مشخص می‌کنیم. سیستم مختصات مناسبی انتخاب می‌کنیم. گره‌ها را شماره گذاری می‌کنیم.

2- یک تابع تغییر مکان انتخاب می‌کنیم. $\delta(x,y) = f(x,y)\,\alpha$

3- وضع تغییر مکان در هر نقطه را برحسب تغییر مکان‌های گرهی بدست می‌آوریم. $\delta(x,y) = f(x,y)\,A^{-1}\delta^e$

4- کرنش در هر نقطه را برحسب تغییر مکان‌های گرهی بدست می‌آوریم. $\varepsilon(x,y) = B\delta^e$

5- تنش در هر نقطه را به تغییر مکان‌های گرهی ربط می‌دهیم. $\sigma(x,y) = \underset{H}{DB}\,\delta^e$

6- نیروهای گرهی را به تغییر مکان‌های گرهی ربط می‌دهیم. $F^e = \int B^T D B\, dv \times \delta^e$

7- تنش در هر نقطه را بوسیله گام‌های 6 و 5 بدست می‌آوریم.

کنش اثر: وصل شده به و در حال در [illegible] بهم با صفحه‌ای شد
مثال: جان تیر I شکل

* هیچوقت روی قطر ماتریس سختی عدد صفر نمی‌بینیم چون هر گره به خودش متصل است.

* مسئله تنش مستوی: اگر تانسور تنش یک المان را داشته باشیم و درایه‌های دارای اندیس z صفر باشند، می‌گوییم المان تحت اثر تنش مستوی است.

* المان کرنش مستوی: 〃 〃 کرنش 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 کرنش 〃

مثال: دیوار حائل با طول زیاد، بند خاکی، لوله مدفون

* المان‌های برشی ← مانند بدنه هواپیما   * المان‌های برشته‌ای ← مانند دودکش‌ها و المان‌های دوار

✓* اثبات ماتریس سختی K برای حالت کلی در روش المان محدود: از اصل کار مجازی استفاده می‌کنیم.

$$W_{int} = \{\varepsilon(x,y)^*\}^T \sigma(x,y)$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon(x,y)^* = B\,\delta^{*e} \rightarrow \{\varepsilon(x,y)^*\}^T = \{\delta^{*e}\}^T B^T \\ \sigma(x,y) = DB\,\delta^e \end{array}\right\} \rightarrow \int^v W_{int}\, dv = \int^v \{\delta^{*e}\}^T B^T D B\,\delta^e\, dv$$

$$W_{ext} = \delta_1^{*e} F_1^e + \delta_2^{*e} F_2^e + \cdots + \delta_n^{*e} F_n^e = \{\delta^{*e}\}^T F^e$$

$$\rightarrow F^e = \int^v B^T D B\,\delta^e\, dv$$

$$\rightarrow F^e = \left[\int^v B^T D B\, dv\right] \delta^e$$

$$\rightarrow K^e = \int^v B^T D B\, dv$$

What is degree of freedom? It is the minimum number of component which completely specifies the deformation of structure ✓

✓ سوال: چرا در المان مثلثی برای ماتریس δ(x,y) فقط دو مولفه u و v کافی است؟ چون کرنش و تنش المان را با داشتن u و v می‌توانیم بدست بیاوریم. $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$، $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ و $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ ← تنش‌ها هم بدست می‌آیند.

سوال: زیبایی روش المان محدود نسبت به روش ماتریسی چیه؟ در روش المان محدود نیاز به تبدیل مختصات محلی به سیستم و برعکسش نیست.

روابط تنش کرنش (هوک)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx}$$

در مسئله تنش مستوی σ_x و σ_y و τ_{xy} داریم که $\sigma_z = 0$ است. ($\tau_{xz} = 0$، $\tau_{yz} = 0$)

در مسئله کرنش مستوی ε_x و ε_y و γ_{xy} و $\varepsilon_z = 0$ داریم.

سوال: چرا المان مثلثی را المان کرنش ثابت می‌گویند؟
با اثبات روابط ε_x و ε_y و γ_{xy} را هم اضافه می‌کنیم.

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y)}{\partial x}=\alpha_2=\text{ثابت}$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial(\alpha_4+\alpha_5x+\alpha_6y)}{\partial y}=\alpha_6=\text{ثابت}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial(\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y)}{\partial y}+\frac{\partial(\alpha_4+\alpha_5x+\alpha_6y)}{\partial x}=\alpha_3+\alpha_5=\text{ثابت}$$

سوال: اندازه المان‌ها را چطور انتخاب کنیم که جواب‌های خوبی دریافت نماییم؟ اول المان درشت را انتخاب می‌کنیم. سپس تغییر مکان مورد نظر را انتخاب می‌کنیم. بعد المان را ریزتر می‌کنیم و تغییر مکان مورد نظر را پیدا می‌کنیم. این روند را ادامه می‌دهیم تا با دقت خوبی جواب‌های مرحله Kام و K+1ام با هم برابر شوند
یا با تجربه

سوال: تفاوت a compatable state of deformation و deformation با هم چیه؟ در اولی تغییر شکل‌ها را بزرگ کرده‌ایم تا ببینیم
تغییر شکل‌ها به ازای حالت بارگذاری کلی است.

* فرضیات المان مسطحی برای خمش صفحه
ضخامت صفحه مورد بررسی در مقایسه با دیگر ابعادش کوچک‌تر است $\xleftarrow{\text{در غیر این صورت}}$ مسئله به صورت سه‌بعدی باید حل شود
خیز صفحه در مقایسه با ضخامت صفحه کوچک است $\xleftarrow{\text{در غیر این صورت}}$ نیروهای غشایی در امتداد صفحه بوجود می‌آیند که باید آنها را در نظر گرفت

* کاربردهای المان مسطحی برای خمش صفحه: 1- طراحی عرشه پل‌ها 2- طراحی دال‌های کف سازه‌ها

* تابع تغییر مکان (displacement function) چیست؟ تابعی است که وضعیت تغییر مکان‌ها در تمام نقاط المان را به طور منحصر به فردی تعریف می‌کند. (u,v)

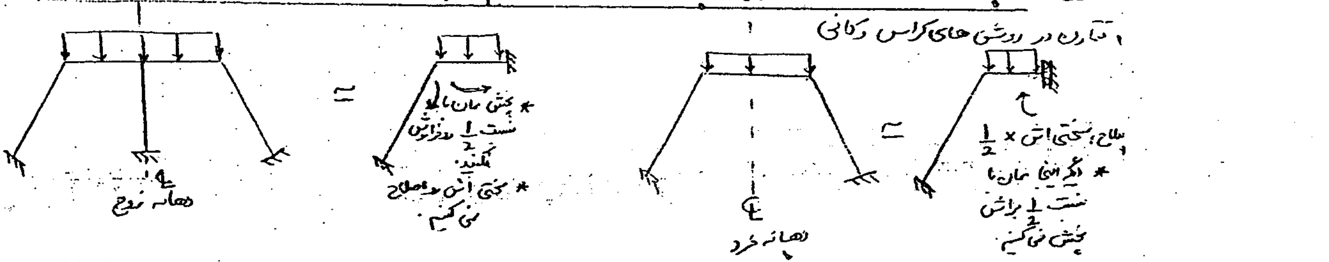
* چرا ماتریس B در Finite element مهم است؟ ماتریس B ماتریسی است که هر یک از درایه‌های آن یک shape function است. ماتریس B، کرنش در هر نقطه از المان را به تغییر مکان‌های گرهی مرتبط می‌کند. ($\varepsilon(x,y)=B\delta^e$) ← به ازای واحد کردن یک درجه آزادی از درجات آزادی گره‌های المان، المان به شکلی خاص تبدیل می‌شود معادله شکل این المان، درایه‌ای از ماتریس B را پر می‌کند

* در جواب‌ها، ماتریس سختی چه زمانی مریض الحال می‌شود؟ وقتی که proportional نباشد یعنی درایه‌های قطری، گران و کلفت باشند.
بهترین المان مسطحی ← مربع   بهترین المان مثلثی ← متساوی الاضلاع   ill condition

* در امتحان می‌گوید مسئله شیب افت را حل کنید (قاب دو بعدی) سپس در یک جای دلخواه می‌گوید Δ و θ و کرنش و تنش را محاسبه کنید.
جواب: با شیب افت δ^e یا همون Δ و θهای دو سر عضو مورد نظر را حساب می‌کنی، بعد تابع تغییر مکان را تشکیل می‌دهی و Δ و θ و کرنش و تنش را در هر نقطه بدست میاد

سوال: a compatable state of def. به چه دردی می‌خورد؟ Δها را هم مرتبط می‌کند (درجات آزادی کلی را کم می‌کند.)

تقارن در روش‌های کراس و کانی


دهانه زوج
≃
* خمش ستون‌ها را نسبت ½ در افزایش نکنید.
* سختی اش را اصلاح می‌کنیم.
دهانه فرد
≃
اصلاح سختی اش × ½
* اگر اینجا ستون با نسبت ½ برایش پخش می‌کنیم

سوال: کراس چرا همگرا می‌شه؟ چون ماتریس سختی مثبت معین است.

سوال: تفاوت روش کراس و کانی چیست؟ در کراس، عمل تکرار روی نمو مجهولات انجام میشه، در کانی روی خود مجهولات

سوال: شیب افت چرا روش سختی است؟ چند تا جمله بنویسید.

① در هر دو روش، ما سازگاری را فرض می‌کنیم و در نظر می‌گیریم و تعادل را ارضا می‌کنیم.
② در هر دو روش ابتدا تغییر مکان‌ها را بدست می‌آوریم و بعد نیروها را
③ در هر دو روش ما با درجات آزادی (یا درجات نامعینی کینماتیکی) سر و کار داریم.

۹ - روابط کانی در حالت های مختلف :

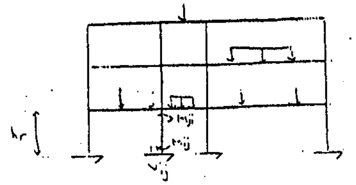
الف) قاب بدون حرکت جانبی با هرگونه بارگذاری ← فرضیات { ① بدون حرکت جانبی ← $M''_{ij} = M''_{ji} = 0$
② در گره ها لنگر خارجی نداشته باشیم. ← اگر لنگر خارجی هم وجود داشت، به جای صفر می گذاریم

معادله اصلی شیب افت $M_{ij} = M^F_{ij} + 2M'_{ij} + M'_{ji} + \cancel{M''_{ij}} \longrightarrow \sum_j M_{ij} = \sum_j M^F_{ij} + 2\sum_j M'_{ij} + \sum_j M'_{ji} = 0 \longrightarrow \sum_j M'_{ij} = \frac{-1}{2}\left[\sum_j M^F_{ij} + \sum_j M'_{ji}\right]$ فرض ۱، فرض ۲

$M'_{ij} = 4EK_{ij}\theta_{ij} \longrightarrow \sum_j M'_{ij} = \sum_j 4EK_{ij}\theta_{ij} \xrightarrow[\forall j:\ \theta_{ij} = cte]{\text{سازگاری گره کانی}} \frac{M'_{ij}}{\sum_j M'_{ij}} = \frac{K_{ij}}{\sum_j K_{ij}} \longrightarrow \sum_j M'_{ij} = M'_{ij}\frac{\sum K_{ij}}{K_{ij}}$

$$\longrightarrow M'_{ij} = \frac{-1}{2}\underbrace{\frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}}}_{R_{ij}\ \text{ضریب دورانی}}\Big[\underbrace{\sum_j M^F_{ij}}_{M^F\ \text{لنگر نامتعادل}} + \sum_j M'_{ji}\Big]$$

ب) قاب با حرکت جانبی با بارگذاری ثقلی ← فرضیات { ① با حرکت جانبی ← $M''_{ij} \neq 0,\ M''_{ji} \neq 0$
② در گره ها لنگر خارجی نداریم
③ بار جانبی نداریم.



معادله اصلی شیب افت $M_{ij} = M^F_{ij} + 2M'_{ij} + M'_{ji} + M''_{ij}$ هم‌سیست $\xrightarrow{\text{هم‌انداف}}$ $M'_{ij} = \frac{-1}{2}\frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}}\left[\sum_j M^F_{ij} + \sum_j M'_{ji} + \sum_j M''_{ij}\right]$

فرض ۳ $\sum F_x = 0$ $\sum V_{ij} = 0 \longrightarrow \sum \frac{M_{ij} + M_{ji}}{h_r} = 0 \longrightarrow \sum_r M^F_{ij} + \sum_r M^F_{ji} + 3\sum_r M'_{ij} + 3\sum_r M'_{ji} + 2\sum_r M''_{ij} = 0$ فرض ۳ — ستون های هر طبقه

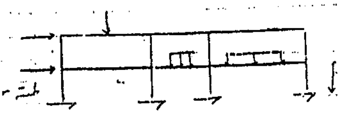
$\longrightarrow \sum M''_{ij} = \frac{-3}{2}\left[\sum_r M'_{ij} + \sum_r M'_{ji}\right]$

$M''_{ij} = -6\frac{EK\Delta}{L} \longrightarrow \sum M''_{ij} = \sum \frac{-6EK_{ij}\Delta_{ij}}{L} \xrightarrow[\Delta_{ij} = cte]{\text{سازگاری دورانی}} \frac{M''_{ij}}{\sum M''_{ij}} = \frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}}$

$$\longrightarrow M''_{ij} = \frac{-3}{2}\overbrace{\frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}}}^{\text{ضریب انتقالی}}\left[\sum_r M'_{ij} + \sum_r M'_{ji}\right]$$

ج) قاب با حرکت جانبی، بارگذاری ثقلی و جانبی (در گره ها) ← فرضیات { ① حرکت جانبی ← $M''_{ij} \neq 0,\ M''_{ji} \neq 0$
② بار های جانبی فقط در گره ها وارد می شوند

$M'_{ij} = \frac{-1}{2}\frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}}\left[\sum_j M^F_{ij} + \sum_j M'_{ji} + \sum_j M''_{ij}\right]$ ← رابطه اول است



$\sum F_x = 0 \longrightarrow \sum V_{ij} + Q_r = 0 \longrightarrow \sum \frac{M_{ij} + M_{ji}}{h_r} + Q_r = 0 \longrightarrow M''_{ij} = \frac{-3}{2}\frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}}\left[\sum_r M'_{ij} + \sum_r M'_{ji} + \overbrace{\frac{Q_r h_r}{3}}^{M_{hr}\ \text{لنگر طبقه}}\right]$ فرض ۲

د) قاب با حرکت جانبی، بارگذاری ثقلی و جانبی (در گره ها) و ارتفاع ستون ها متفاوت ← فرضیات { حرکت جانبی داریم
بار های جانبی بر روی ستون ها نداریم (در گره ها)

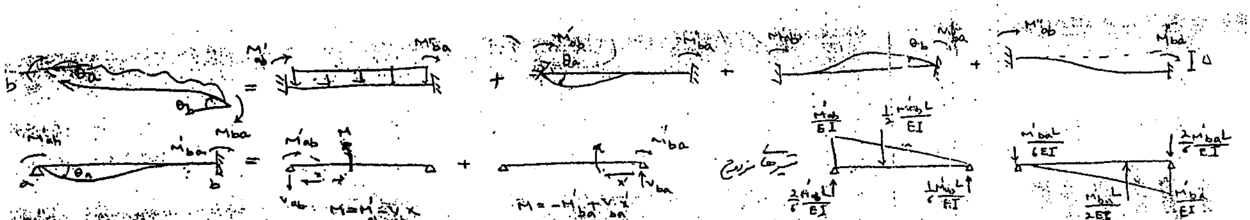
$M'_{ij} = \frac{-1}{2}\frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}}\left[\sum_j M^F_{ij} + \sum_j M'_{ji} + \sum_j M''_{ij}\right]$

$M''_{ij} = \frac{-3}{2}\frac{C_{ij}K_{ij}}{\sum C^2_{ij}K_{ij}}\left[\sum_r C_{ij}(M'_{ij} + M'_{ji}) + \frac{Q_r h_r}{3}\right]$ ، $C_{ij} = \frac{h'}{h_{ij}}$

تولید کننده بتن آماده و قطعات پیش ساخته و پیش تنیده بتنی
دفتر مرکزی: تهران، تجریش، نیاوران، خ شهید باهنر، نرسیده به پمپ بنزین، پلاک ۲۰۷، واحد ۱ - تلفن: ۵-۲۲۸۲۱۳۲۱-۰۲۱
کارخانه: کیلومتر ۲ جاده قدیم کرج به هشتگرد، تهرالدشت، بلوار ایران خودرو - تلفن: ۹-۴۵۲۵۴۷۰-۰۲۶۲-فکس: ۰۲۶۲۴۵۲۵۱۸۰
کارخانه کرج: جاده قزل حصار، روبروی پمپ بنزین، خیابان پارس لانه، کارخانه پارس لانه - تلفن: ۳۳۳۳۰۱۴۱-۰۲۶۱

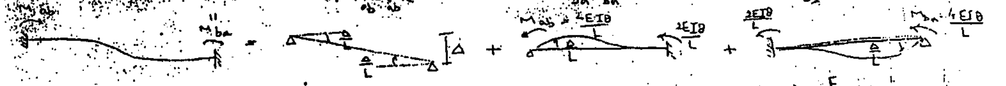
ضمیمه
تحلیل ۲
شیب افت
۱۳

۱- اثبات روابط شیب افت :


M'_{ab}
M_{ba}
θ_a
θ_b
M''_{ab}
M''_{ba}
Δ
$M = M'_{ab} - V_{ab}x$
$M = -M'_{ba} + V_{ba}x'$
$\frac{M'_{ab}L}{EI}$
$\frac{M'_{ba}L}{EI}$
$\frac{M'_{ba}L}{6EI}$
$\frac{2}{6}\frac{M'_{ba}L}{EI}$
$\frac{M'_{ba}L}{2EI}$

$$\frac{2M'_{ab}L}{6EI}-\frac{M'_{ba}L}{6EI}=\theta_a \xrightarrow{*} \frac{(4M'_{ba}-M'_{ba})L}{6EI}=\theta_a \rightarrow M'_{ba}=\frac{2EI\theta_a}{L} ★$$

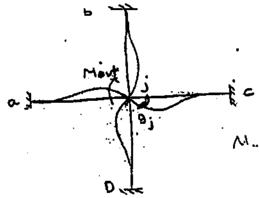
$$\frac{1}{6}\frac{M'_{ab}L}{EI}=\frac{2}{6}\frac{M'_{ba}L}{EI} \rightarrow M'_{ab}=2M'_{ba} * \xrightarrow{★} M'_{ab}=\frac{4EI\theta_a}{L}$$


$M''_{ab}=\frac{4EI\theta}{L}$
$\frac{2EI\theta}{L}$
$M_{ba}=\frac{4EI\theta}{L}$
$\frac{\Delta}{L}$
Δ

$$M''_{ab}=-\frac{4EI\theta}{L}-\frac{2EI\theta}{L}=-\frac{6EI\theta}{L}=-\frac{6EI\Delta}{L^2}=M''_{ba}$$

$$M_{ab}=M^F_{ab}+M'_{ab}+M'_{ab}+M''_{ab}=M^F_{ab}+\frac{4EI\theta_a}{L}+\frac{2EI\theta_b}{L}-6\frac{EI\Delta}{L^2}=2EK(2\theta_a+\theta_b-3R)\pm M^F_{ab}$$

۲- اثبات کراس

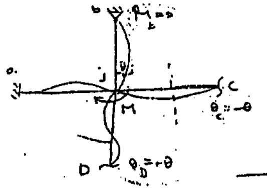

b
a
c
D
j
M_o
θ_j

$$\left.\begin{array}{l} M_{ja}=2M_{aj}=4EK_{ja}\theta_j \\ M_{jb}=2M_{bj}=4EK_{jb}\theta_j \\ M_{jc}=2M_{cj}=4EK_{jc}\theta_j \\ M_{jd}=2M_{dj}=4EK_{jd}\theta_j \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{گره}]{\text{شرط تعادل}} M_{ja}+M_{jb}+M_{jc}+M_{jd}=M_o \rightarrow 4E(\sum_i K_{ji})\theta_j=M_o \rightarrow \theta_j=\frac{M_o}{4E\sum_i K_{ji}} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} M_{ja}=2M_{aj}=\frac{K_{ja}}{\sum K_{ji}}\theta_j \\ M_{jb}=2M_{bj}=\frac{K_{jb}}{\sum K_{ji}}\theta_j \\ M_{jc}=2M_{cj}=\frac{K_{jc}}{\sum K_{ji}}\theta_j \\ M_{jd}=2M_{dj}=\frac{K_{jd}}{\sum K_{ji}}\theta_j \end{array}\right.$$

$M\ldots$

M_{ja} $4EK_{ja}\frac{M_o}{4E\Sigma K_{ji}}$; $\frac{K_{ja}M_o}{\Sigma K_{ja}}$

3- سختی‌های اصلاح شده


b
a
c
D
j
M
$M_b=0$
$\theta_c=-\theta$
$\theta_D=+\theta$

$$M_{ja}=2M_{aj}=4EK_{ja}\theta_j$$

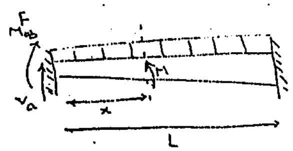
$$M_{bj}=2EK_{jb}(2\theta_b+\theta_j)=0 \rightarrow \theta_b=-\frac{\theta_j}{2} \rightarrow M_{jb}=2EK_{jb}(2\theta_j-\frac{\theta_j}{2})=4E(\frac{3}{4}K_{jb})\theta_j \rightarrow K'_{jb}=\frac{3}{4}K_{jb}$$

$$M_{jc}=2EK_{jc}(2\theta_j-\theta_j)=4E(\frac{K_{jc}}{2})\theta_j \rightarrow K'_{jc}=\frac{K_{jc}}{2}$$

$$M_{jD}=2EK_{jD}(2\theta_j+\theta_j)=4E(\frac{3}{2}K_{jD})\theta_j \rightarrow K'_{jD}=\frac{3}{2}K_{jD}$$

۴- لنگر گیرداری در تیرها با مقطع متغیر

C_{ab} ، α



$$\theta_a=0 \rightarrow \int_0^l \frac{M\,dx}{EI}=0 \xrightarrow{*} M^F_{ab}\int\frac{dx}{I}+V_a\int^l\frac{x\,dx}{I}-\frac{w}{2}\int^l\frac{x^2dx}{I}=0 \xrightarrow{\text{با حذف } V_a} M^F_{ab}=\frac{w}{2}\frac{\left(\int^l\frac{x^2dx}{I}\right)^2-\int^l\frac{x\,dx}{I}\int^l\frac{x^3dx}{I}}{\int^l\frac{dx}{I}\int^l\frac{x^2dx}{I}-\left(\int^l\frac{x\,dx}{I}\right)^2}$$

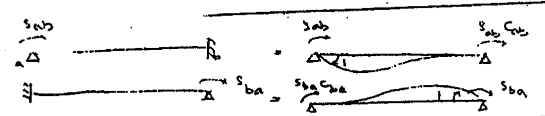
$$\Delta_a=0 \rightarrow \int_0^l\frac{Mx\,dx}{EI}=0 \xrightarrow{*} M^F_{ab}\int^l\frac{x\,dx}{I}+V_a\int\frac{x^2dx}{I}-\frac{w}{2}\int^l\frac{x^3dx}{I}=0$$

$$M=M^F_{ab}+V_ax-\frac{wx^2}{2} \quad *$$

5- رابطه بین سختی‌ها و ضرایب انتقال

قضیه بتی: در یک سازه الاستیک خطی، کار انجام شده توسط نیروی Q_I در تغییرمکان‌های q_{II} برابر است با کار انجام شده توسط نیروی Q_{II} در تغییرمکان‌های q_I

ab سختی عضو: S_{ab} ، S_{ba}


S_{ab}
$S_{ab}C_{ab}$
S_{ba}
$S_{ba}C_{ba}$
a
1

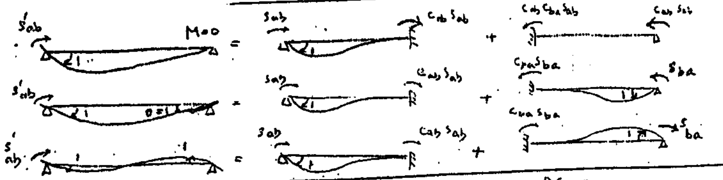
قضیه بتی $W_{12}=W_{21} \rightarrow S_{ba}C_{ba}(1)+S_{ba}(0)=S_{ab}(0)+S_{ab}C_{ab}(1) \rightarrow S_{ba}C_{ba}=S_{ab}C_{ab}$

۶- سختی‌های اصلاح شده برای تیرهای با مقطع متغیر:

الف) تکیه‌گاه b ساده باشد.

ب) عضو ab متقارن باشد:

ج) عضو ab متقارن مرکزی باشد.

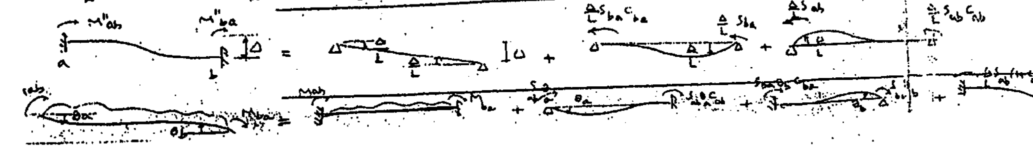

S'_{ab}
$M_{ba}=0$
S_{ab}
$C_{ab}S_{ab}$
$C_{ab}C_{ba}S_{ab}$
$C_{ba}S_{ba}$
S_{ba}
1

$$S'_{ab}=S_{ab}-C_{ab}C_{ba}S_{ab}=S_{ab}(1-C_{ab}C_{ba})$$

$$S'_{ab}=S_{ab}-C_{ba}S_{ba}=S_{ab}-C_{ab}S_{ab}=S_{ab}(1-C_{ab})$$

$$S'_{ab}=S_{ab}+C_{ba}S_{ba}=S_{ab}+C_{ab}S_{ab}=S_{ab}(1+C_{ab})$$

7- لنگرهای گیرداری ناشی از تغییرمکان نسبی گره‌های یک عضو برای تیرها با مقطع متغیر:


M''_{ab}
M''_{ba}
a
b
Δ
$\frac{\Delta}{L}$
$\frac{\Delta}{L}S_{ba}C_{ba}$
$\frac{\Delta}{L}S_{ba}$
$\frac{\Delta}{L}S_{ab}$
$\frac{\Delta}{L}S_{ab}C_{ab}$
θ_a
θ_b
$\frac{\Delta}{L}S_{ba}(1+C_{ba})$

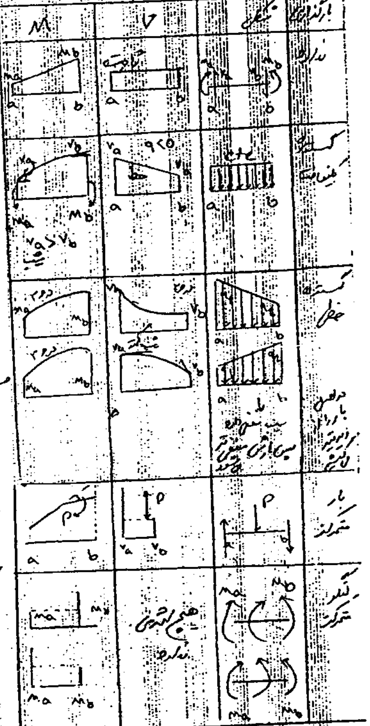
$$M''_{ab}=-\frac{\Delta}{L}S_{ba}C_{ba}-\frac{\Delta}{L}S_{ab}=-\frac{\Delta}{L}S_{ab}(C_{ab}+1)$$

$$M''_{ba}=-\frac{\Delta}{L}S_{ba}-\frac{\Delta}{L}S_{ab}C_{ab}=-\frac{\Delta}{L}S_{ba}(1+C_{ba})$$

8- معادله شیب افت در مورد تیرهای با مقطع متغیر:

بانک تجارت (شرکت سهامی عام)

[illegible] نقطه [illegible] شیب [illegible]
[illegible] برشی [illegible]
M_b [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] می‌رسند.



تعیین محل M_{max} ⟸ $V_x = 0$ ⟸ $\frac{dM}{dx} = 0$

[illegible] که در آن نیروی برشی [illegible] خط 0 را قطع کند، [illegible] و گشتاور خمشی [illegible] باشد [illegible] آن حائز اهمیت است.

$V_b = V_a + \int_a^b q_x\,dx$ [illegible] نیروی برشی در نقطه a است.
b برابر است با مقدار نیروی برشی در نقطه a به علاوه مساحت زیر نمودار بار گسترده در فاصله a تا b وجود دارد.

$M_b = M_a + \int_a^b V_x\,dx$ گشتاور خمشی در نقطه b برابر است با مقدار گشتاور خمشی در نقطه a به علاوه مساحت زیر نمودار یا دیاگرام برشی تیر در فاصله ab

مساحت [illegible] نیروهای برشی ab [illegible] b

خلاصه روش [illegible] جمع زدن:

در این روش پس از تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی برای رسم نیروهای برشی یک تیر از سمت چپ شروع کرده و جمع زدن نیروها بر اساس رابطه $V_b = V_a + \int q_x\,dx$ آغاز می‌شود.

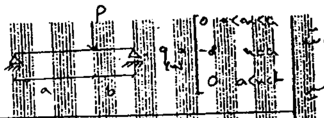
نقاطی که به عنوان نقاط باید نیروهای برشی آنجا محاسبه شوند. نقاط مهم نقاط زیر هستند.

محل تأثیر واکنش‌های تکیه‌گاهی، محل تأثیر نیروهای متمرکز، محل شروع یا خاتمه یک نوع بارگذاری، محل تغییر نوع بارگذاری.

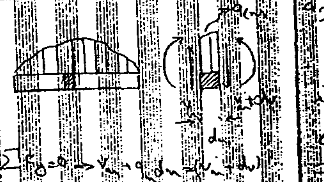
با وصل کردن نقاط به دست آمده از یکدیگر دیاگرام برشی با منحنی‌هایی که درجه و شیب آنها را از دستورالعمل‌های ذکر شده مشخص می‌نماییم کار جمع زدن نیروها تا منتهی الیه راست تیر به پایان می‌رسد.

مقدار نهایی نیروی برشی در انتهای تیر باید صفر شود. این موضوع را بسته شدن نمودار برشی مرسوم است. به منزله تعادل $\sum F_y$ تیر است. [illegible] نمودار بسته نشود [illegible] در محاسبات [illegible] ...

- [illegible] قبل از جمع زدن [illegible] تکیه‌گاهی [illegible] $\sum F_y$ [illegible]



$$q_{(x)} = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ -q & [illegible] \\ 0 & a < x < L \end{cases}$$



$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_x + q_x\,dx = (V_x + dV)$

$\Rightarrow \frac{dV}{dx} = q_{(x)} \Rightarrow V_x = \int q_x\,dx$

$\sum M = 0 \Rightarrow V_x\,dx + M_x + q\frac{dx}{2} = (M_x + dM)$

$\Rightarrow \frac{dM}{dx} = V_x \Rightarrow M_x = \int V_x\,dx$

$\int_a^b q_{(x)}\,dx = V_x\Big]_a^b = V_b - V_a$

$\Rightarrow V_b = V_a + \int_a^b q_x\,dx$ ⟶ تغییر نیروی برشی مساحت زیر سطح نمودار بار

$\int_a^b V_x\,dx = M_x\Big]_a^b = M_b - M_a$

$\Rightarrow M_b = M_a + \int_a^b V_x\,dx$

مساحت زیر نمودار برشی تیر در ناحیه ab

روش جمع زدن برای رسم نمودار نیروی برشی، خمشی تیرها:

1- شیب هر نقطه از نمودار نیروهای برشی یک تیر برابر است با شدت بارگذاری بر تیر در همان نقطه.

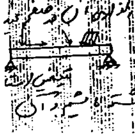
2- شیب هر نقطه از دیاگرام لنگر خمشی در هر نقطه برابر است با مقدار نیروی برشی در همان نقطه.

1- تفسیر $V_x = \int q_x\,dx$
درجه منحنی نمودارهای نیروی برشی یک تیر در هر فاصله همواره یکی بیشتر از درجه شدت بارگذاری بر تیر است.

2- تفسیر $M_x = \int V_x\,dx$
درجه منحنی دیاگرام لنگر خمشی در هر فاصله همواره یکی بیشتر است از درجه منحنی نیروهای برشی [illegible] دیاگرام [illegible] بیشتر است از درجه تابع شدت بارگذاری بر تیر

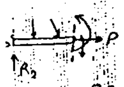
بانک تجارت (شرکت سهامی عام)

نمودارهای خمشی و برشی:



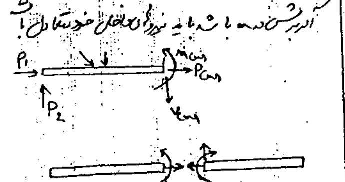
تیر هم مستقیم است و هم بارهایی که بر آن وارد می‌شوند [illegible] می‌توانند باشند.
[illegible] بارگذاری [illegible] تیر مستقیم [illegible]

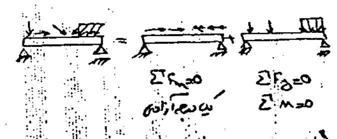
نیروهای داخلی:



اگر تیر کلاً تعادل داشته باشد
$\sum F_x = 0$
$\sum F_y = 0$
$\sum M = 0$
معادلات
پس هر بخش از آن معادلات تعادل را باید برای قسمت جدا شده محقق کند.

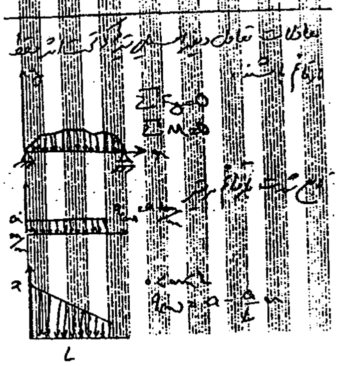
اگر برش زده باشد باید نیروهای داخلی خود تعادل را [illegible]





نتیجه‌گیری: بنابراین [illegible] معادلات تعادل [illegible] صفر تا بینهایت [illegible] فوق را [illegible] نتیجه‌گیری [illegible] که نیروهای برشی و لنگرهای خمشی در تیر [illegible] با [illegible] نیروهای [illegible] بر تیر وارد [illegible] و [illegible] نیروها [illegible] ارتباط [illegible] هستند.

معادلات تعادل [illegible] تیر [illegible] بارگذاری [illegible]



لازم به ذکر است که تغییرشکل تیر در حدود $\frac{1}{300}$ تا $\frac{1}{200}$ دهانه می‌باشد.

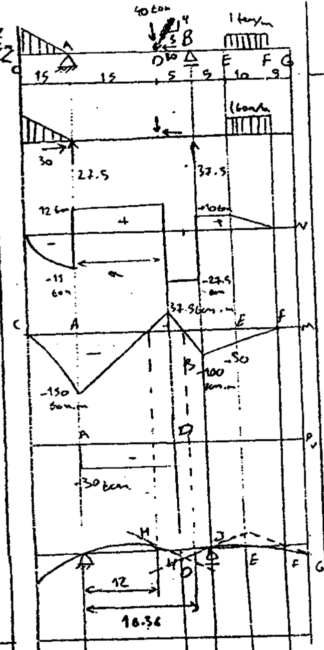
بهترین نقطه برای اتصال مفصل در تیر روبرو چیست؟

$$M = -\frac{1}{2}(15)(2)(x-5) + 27.5(x-15)$$

$$\Rightarrow x = 27 \Rightarrow 27-15 = 12$$

از نقطه A

$$M = -\frac{1}{2}(15)(2)(x-5) + 27.5(x-15) - 40(x-30) = 0 \Rightarrow x = 31.36$$

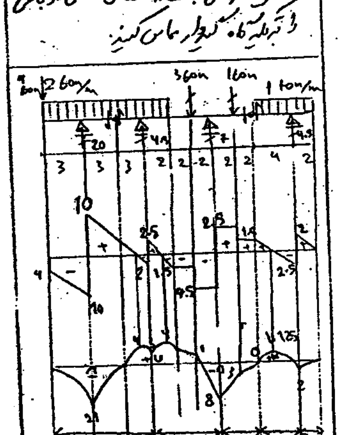

40ton
1ton/m
A
B
C
D
E
F
G
15
15
5
5
10
9
30
27.5
37.5
12ton
-11ton
-27.5ton
10ton
V
37.5ton.m
-150 ton.m
-100 ton.m
-50
M
-30ton
H
J
12
31.36

مراحل ترسیم طرح ظاهری منحنی تغییرشکل تیر ایزوستاتیک به صورت زیر خلاصه می‌شود:

۱- ابتدا نمودار تغییرات لنگر خمشی تیر را رسم کنید و در نواحی لنگر خمشی مثبت، علامت کاسه‌ای (∪) و در نواحی خمشی منفی علامت گنبدی (∩) قرار دهید.

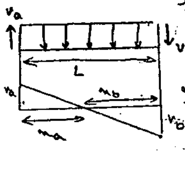
۲- در زیر نمودار تغییرات لنگر خمشی بدون احتساب تکیه‌گاه و با توجه به علامت کاسه‌ای، گنبدی به طور ظاهری منحنی تغییرشکل را رسم کنید.

۳- اگر تیر دارای دو تکیه‌گاه باشد با یک اتصال کلی، منحنی ارتجاعی را روی تکیه‌گاه‌ها قرار دهید و اگر تیر طره‌ای باشد انتهای منحنی ارتجاعی را به تکیه‌گاه گیردار مماس کنید.


9ton
2 6ton/m
36ton
16ton
1ton/m
20
41
7
9.5
3
3
3
2
2
2
2
2
4
2
10
2.5
23
1.5
2
2.5
9.5
10
8
کاسه‌ای
گنبدی

ادامه تعیین محل M_{max}:

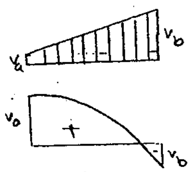
الف) بار گسترده یکنواخت:



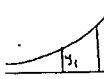
$$\frac{x_a}{L} = \frac{V_a}{|V_a|+|V_b|} = \frac{V_a}{q}$$

$$x_a = \frac{V_a \cdot L}{q}$$

ب)



یادآوری:



$$y_1 = a x_1^2$$

$$y_2 = a x_2^2$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$$

نمودار تغییرات لنگر خمشی و منحنی تغییرشکل:

از آنجا که لنگر خمشی باعث می‌شود که تیر به صورت مقعر (کاسه‌ای) یا محدب (گنبدی)، بر حسب علامت لنگر خمشی، تغییرشکل دهد، پس شکل تقریبی تغییرشکل یافته تیر را می‌توان از روی علامت لنگر خمشی به دست آورد.

شکلی که محور یک تیر در هنگام بارگذاری به خود می‌گیرد منحنی تغییرشکل نامیده می‌شود.

علامت لنگر خمشی در چند ناحیه تغییر می‌کند. در نواحی لنگر منفی، منحنی تغییرشکل گنبدی و در نواحی لنگر مثبت، منحنی تغییرشکل کاسه‌ای در می‌آید. چون تیر یکپارچه است این دو منحنی با یکدیگر تلاقی می‌کنند و خطوطی وجود دارند که بر هر دو منحنی مماس می‌باشند.

همچنین توجه کنید که انتهای آزاد FG تیر، مماس بر منحنی ارتجاعی در نقطه F است. هیچ گونه انحنای تغییرشکل در ناحیه FG وجود ندارد، زیرا در این ناحیه از تیر لنگر خمشی مساوی صفر است.

در منحنی تغییرشکل، نقاط انتقالی که در آن جهت تحدب منحنی عوض می‌شود (نقاط عطف) (H، J). و چون لنگر خمشی در نقاط عطف صفر می‌شود لنگر خمشی وارد بر تیر صفر است به همین علت مهندسین سعی می‌کنند وصله تیرها را در این نقاط قرار دهند.