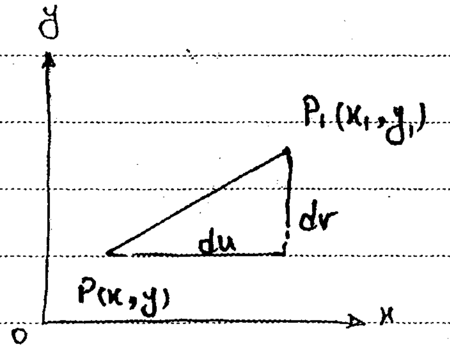
Subject:
Year. Month. Date. ( )

دکتر دانشجو

مقاومت مصالح ۲

کرنش "Strain"



- کرنش مستقیم (Direct):

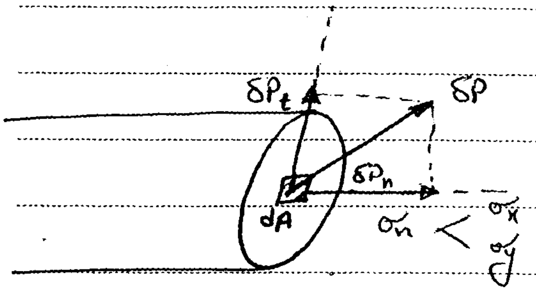
$$e_x = \frac{du}{dx} \qquad e_y = \frac{dv}{dy}$$

- کرنش برشی (Shear strain):

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}}_{\gamma_{xy}}\right)$$ کرنش برشی ریاضی

γ_{xy} کرنش برشی مهندسی

- تنش "Stress"



تنش مستقیم
Direct

$$\sigma_n = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta P_n}{\delta A}$$

$$\delta P_t \longrightarrow \tau_t$$ تنش برشی

$$\tau_{xy} = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta P_t}{\delta A}$$

* فرمول های تنش در دوران محورهای مختصات:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_y \cos^2\theta + \sigma_x \sin^2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta$$

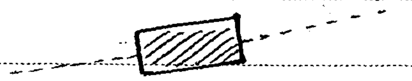
θ_p در تغییر اندازه $\longrightarrow e_I \,,\, \tau_I$: Principal axes
Critical axes
صفحات اصلی (بحرانی)

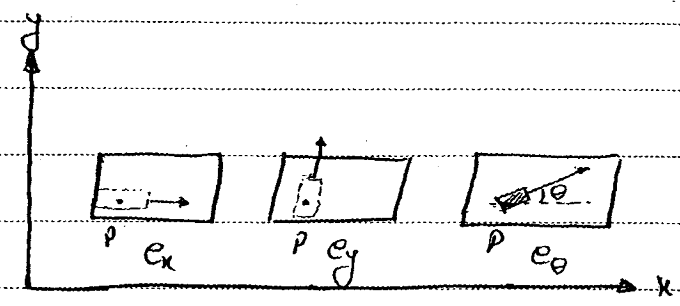
در محورهای اصلی کرنش و تنش برشی در آن راستا صفر است.
" " " مستقیم در آن راستا max و min است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

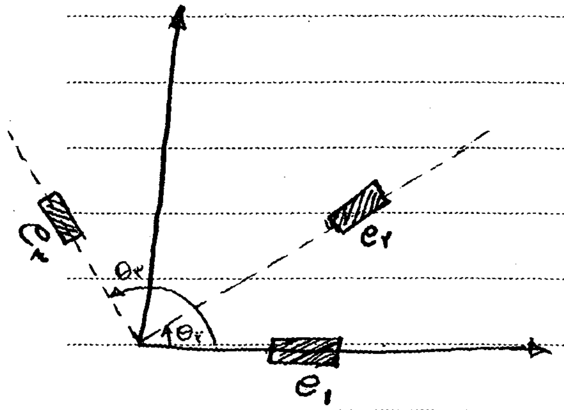
کرنش سنج:

کرنش سنج، کرنش را تحت محور خودش محاسبه می‌کند.
کرنش را در سطح سازه اندازه گیری می‌کند.





* مسئله: سه کرنش سنج مقادیر e_1، e_2، e_3 را نشان می‌دهند
مطلوبست e_x، e_y، e_{xy}.



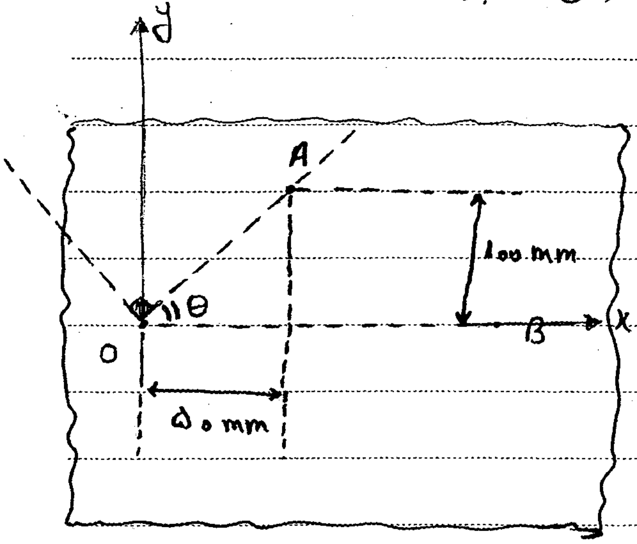
$$\boxed{e_\theta = e_x \cos^2\theta + e_y \sin^2\theta + e_{xy} \sin 2\theta}$$

$$e_1 \longrightarrow \theta = 0 \Rightarrow e_1 = e_x$$

$$e_2 \longrightarrow \theta = \theta_2 \Rightarrow e_2 = e_x \cos^2\theta_2 + e_y \sin^2\theta_2 + e_{xy} \sin 2\theta_2$$

Subject
Date

مثال: شکل زیر، سطح تحت تنش را نشان می دهد. کرنش ها عبارتند از:



در جهت OB : $0.1 \times 10^{-2} \rightarrow e_x$

در جهت $45°$ نسبت به OB : $0.2 \times 10^{-2} \rightarrow e_{45}$

در جهت $90°$ نسبت به OB : $0.05 \times 10^{-2} \rightarrow e_y$

مطلوبست کرنش در جهت OA و عمود بر آن.

$$e_{\theta=45°} = 0.1\times10^{-2} \times 1/2 + (0.05\times10^{-2}) \times 1/2 + e_{xy} \times 1$$

$$\rightarrow e_{xy} = 0.175 \times 10^{-2}$$

$$\theta = \tan^{-1} 2 = 63.43°$$

$$\cos^2\theta = 0.2$$
$$\sin^2\theta = 0.8$$
$$\sin 2\theta = 0.8$$

$$e_{\theta=63.43} = 0.1\times10^{-2}(0.2) + (-0.05\times10^{-2}(0.8) + 0.175\times10^{-2}(0.8)$$

$$e_{OA} = e_{63.43} =$$

$$e_{\perp OA} : \theta = 153.43° \longrightarrow e_{\perp OA} =$$

Subject
Date

۹۱۵۴۱۱۹۴ مصطفی جعفری پور

مسئله ۶: صفحه‌ی مربع شکل به ضخامت ۲/۵ mm و طول 100 mm بارگذاری می‌شود.

اعدادی که بر روی کرنش سنج ها نمایش داده شده‌اند عبارتند از:

کرنش سنج	۱	۲	۳
کرنش الکتریکی $\frac{\Delta R}{R}$	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۱۵	۰/۰۰۰۱۲

ضریب کرنش سنج $K = ۲$

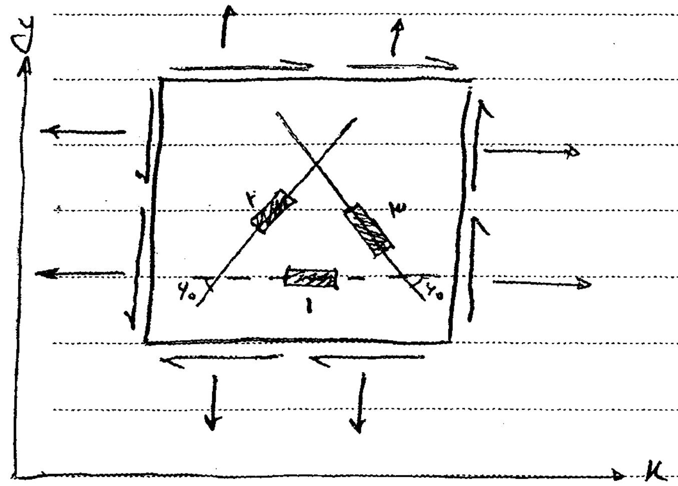
کرنش مکانیکی = کرنش الکتریکی $\times \frac{1}{K}$

	۱	۲	۳
کرنش مکانیکی	$۱/۵\times۱۰^{-۴}$	$۰/۷۵\times۱۰^{-۴}$	$۰/۶\times۱۰^{-۴}$

مطلوبست الف) e_x ، e_y ، e_{xy} .

ب) نیروهای F_x ، F_y

$E = ۶۸ \; GN/m^۲$



Subject
Date

Beams تیرها

روش های متفاوتی برای بدست آوردن خیز و شیب در تیرها استفاده می شود.

یکی از این روش ها، روش انتگرال دوگانه است که در مقاومت ۱ استفاده شد.

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \iint \longrightarrow C_1 , C_2$$

$$\text{شیب } \theta = \frac{dy}{dx} \doteq \theta(x) \longrightarrow C_1$$

$$\text{خیز } y = y(x) \longrightarrow C_1 , C_2$$

در اینجا روش های دیگر را برای بررسی و تحلیل تیرها مورد توجه قرار می دهیم:

۱) روش گشتاور سطح:

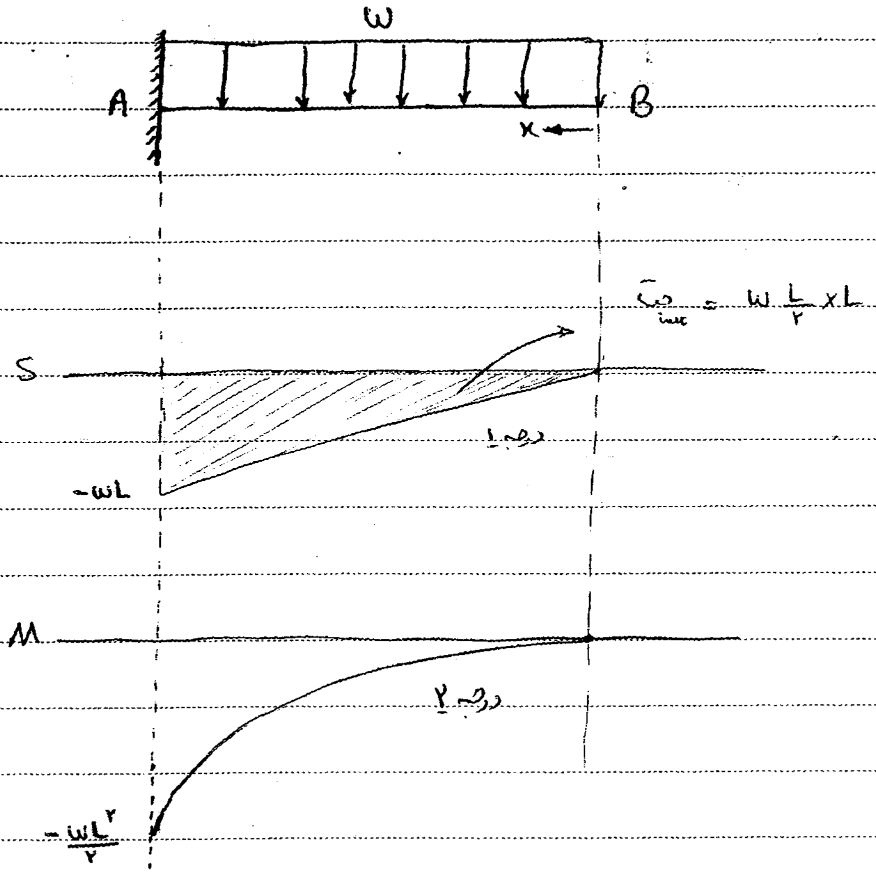
اما قبل از ورود به آن به این ۳ سوال پاسخ داده شود:

۱) تیرها بیشتر برای چه مواردی استفاده می شوند (از کدام خاصیت تیر بیشتر استفاده می شود)؟

Subject
Date

* بارگسترده با شدت ثابت:

* محور طولی x را از سر آزاد در نظر بگیرید.



$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

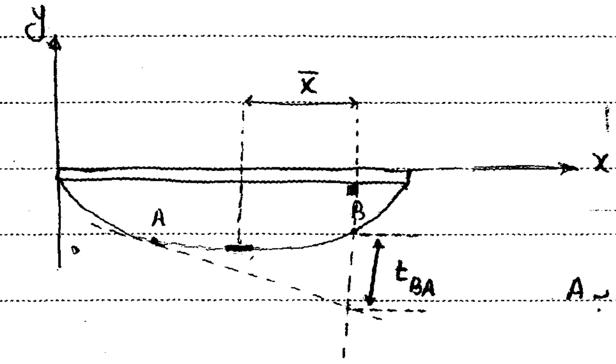
$$\int_A^B d\theta = \int \frac{M}{EI}\, dx$$

$$\theta_B - \theta_A = \frac{1}{EI} \int M dx$$

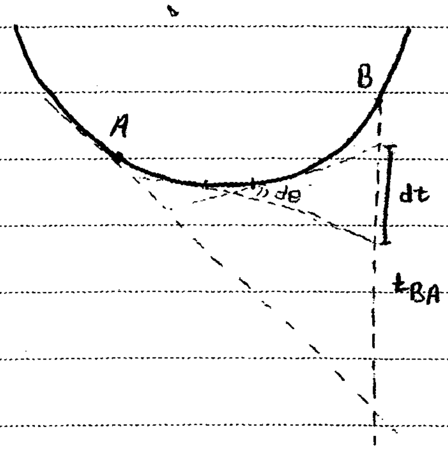
مساحت زیر دیاگرام $\frac{M}{EI}$ بین

دو نقطه‌ی B, A

* قضیه‌ی دوم گشتاور سطح



انحراف مماسی نقطه‌ی B نسبت به A



$$dt = d\theta \cdot \bar{x}$$

$$\int_A^B dt = \int d\theta\, \bar{x}$$

فاصله‌ی مرکز سطح تا نقطه B

$$t_{BA} = (\theta_B - \theta_A)\,\bar{x}$$

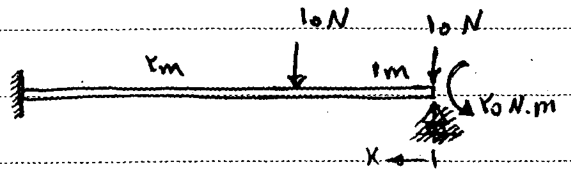
مساحت زیر دیاگرام بین نقطه B, A

$$t_{BA} = ①' \times \text{فاصله مرکز سطح تا } B + ①'' \times \text{فاصله تا } B$$

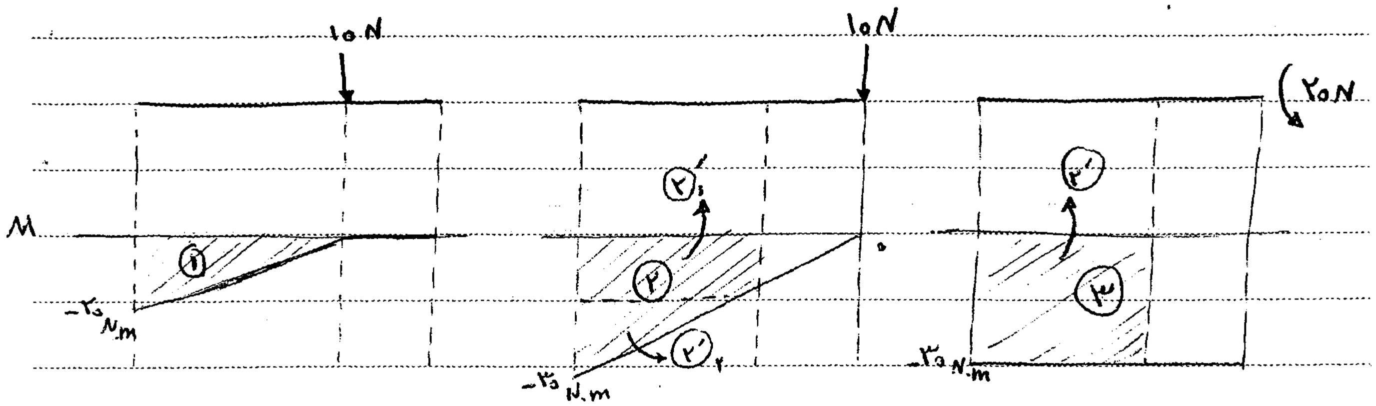
$$t_{BA} = -(۱۵ \times ۳) \times ۴٫۵ - (۱۵ \times ۱٫۵) \times ۲ = -\frac{۲۲۵}{۲EI}$$

$$t_{CA} = -\frac{۳۹۳٫۵}{EI}$$

مثال: رسم دیاگرام به روش تفکیکی



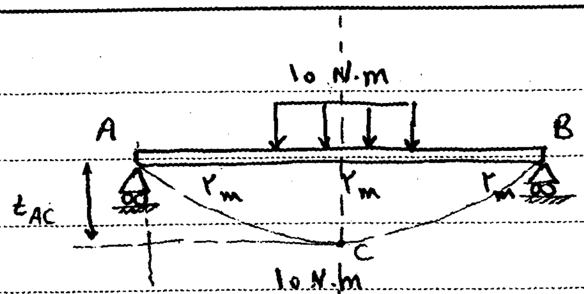
$\Theta_{BA} = ?$

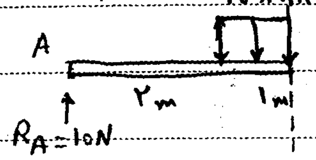


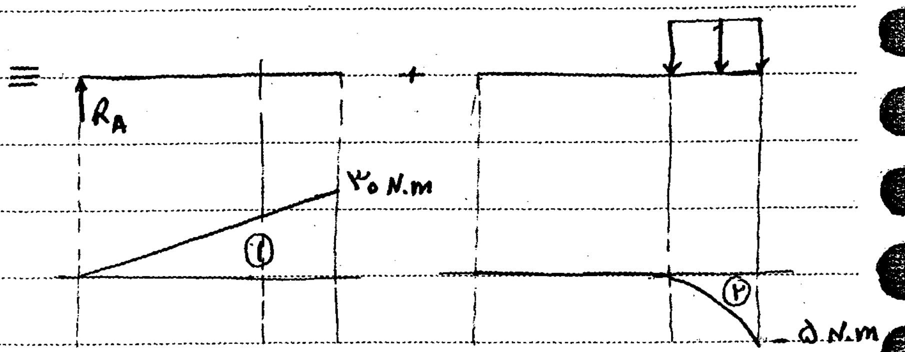
$$\Theta_{BA} = ① + ②' + ③'$$

$$t_{BA} = ① \times \frac{۴}{۳} + ②'_{۱} \times ۱ + ②'_{۲} \times \frac{۴}{۳} + ③' \times ۱$$

Subject
Date







$\theta_C = 0$

$y_c = y_{max}$

$$\theta_{CA} = \cancel{\theta_C}^{\text{صفر}} - \theta_A = ① + ② = 30 \times \frac{3}{2} + \left(-5 \times \frac{1}{3}\right) = 45 - \frac{5}{3}$$

$$\theta_A = -\theta_{CA} = -\frac{130}{3EI}$$

$$\theta_B = \frac{130}{3EI} \longleftarrow \text{چون شکل متقارن است}$$

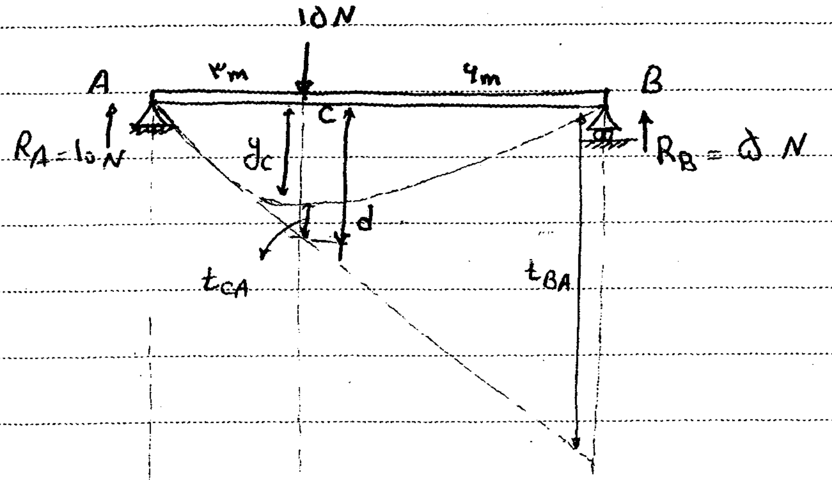
$$y_{max} = y_c = t_{AC} = ① \times 2 + ② \times \left(2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{305}{4EI}$$

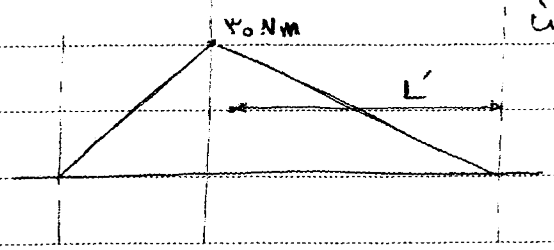
* برای به دست آوردن خیز نقطه‌ی D :

تشابه دو مثلث : $\frac{t_{BA}}{L} = \frac{d}{L_1}$

$d = y_D + t_{DA}$ ⟶ فاصله تا D × مساحت زیر دیاگرام $\frac{M}{EI}$

مثال : برای تیر نشان داده شده مطلوبست شیب و خیز نقطه‌ی C :





فاصله‌ی مرکز سطح تا B برای مثلث

$L' = \left(\frac{L + \text{فاصله‌ی راس تا B}}{3}\right)$

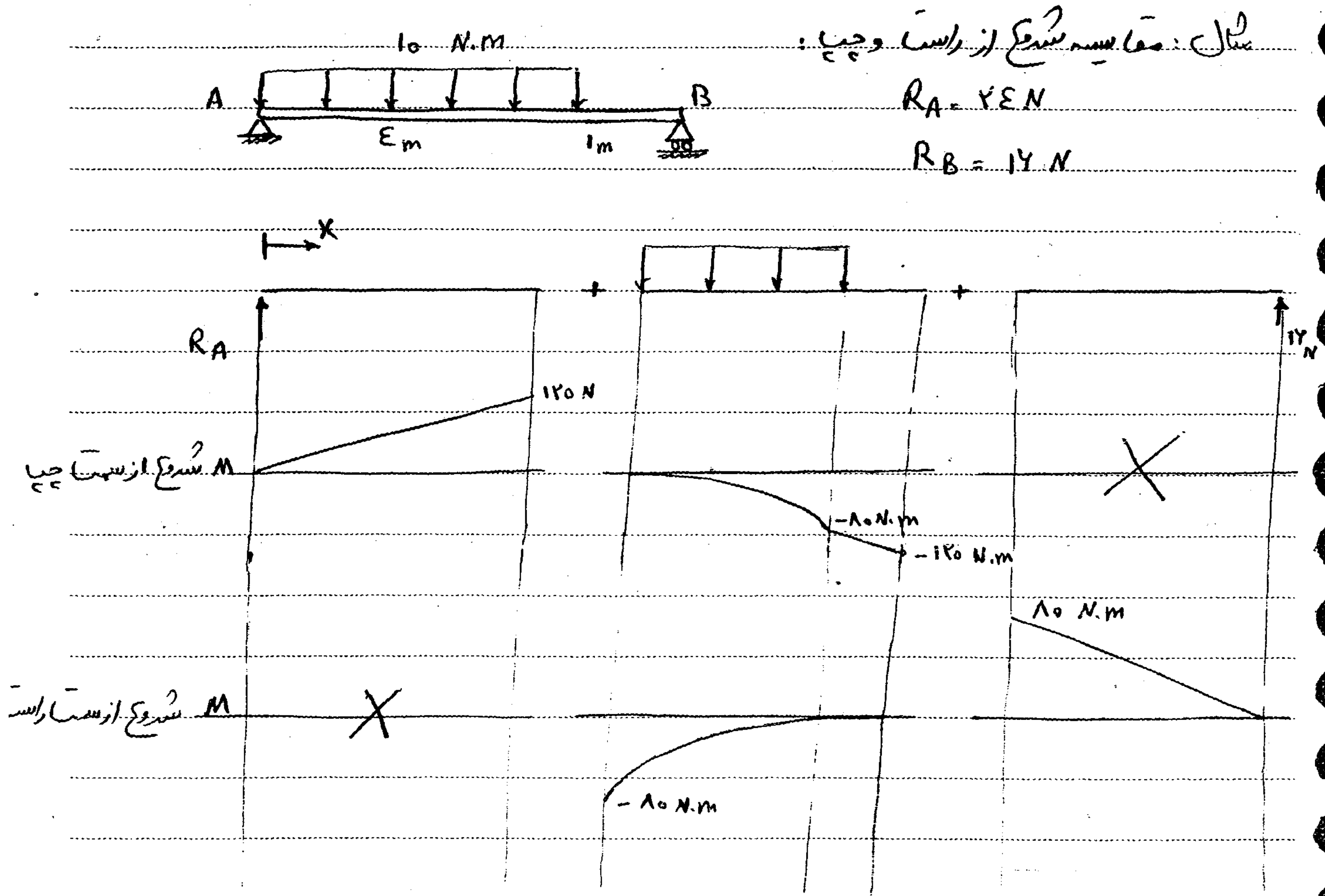
$t_{BA} = \left(\frac{30 \times 9}{2}\right)\left(\frac{9+6}{3}\right) = \frac{675}{EI}$

Subject
Date

مثال: مقایسه شروع از راست و چپ:

$R_A = ۲۴ N$

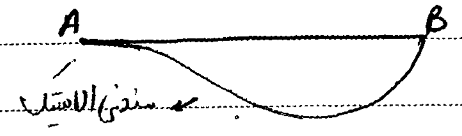
$R_B = ۱۶ N$



Subject

Date

معادله ٤ : با رسم منحنی الاستیک شروط یا معادلات مورد نیاز را از آن استخراج می کنیم:



$\longrightarrow t_{BA}=0$ شیب در A برابر صفر است:

$$t_{BA}=A_1\times 1+A_2\times \frac{4}{3}=0$$

$$=\underbrace{\left((5\times 2)\times 2/3\right)}_{A_1}\times \underbrace{1}_{\text{فاصله تا } B}+\underbrace{\left(-\frac{M_A\times 2}{2}\right)}_{A_2}\underbrace{\left(\frac{4}{3}\right)}_{\text{فاصله تا } B}=0$$

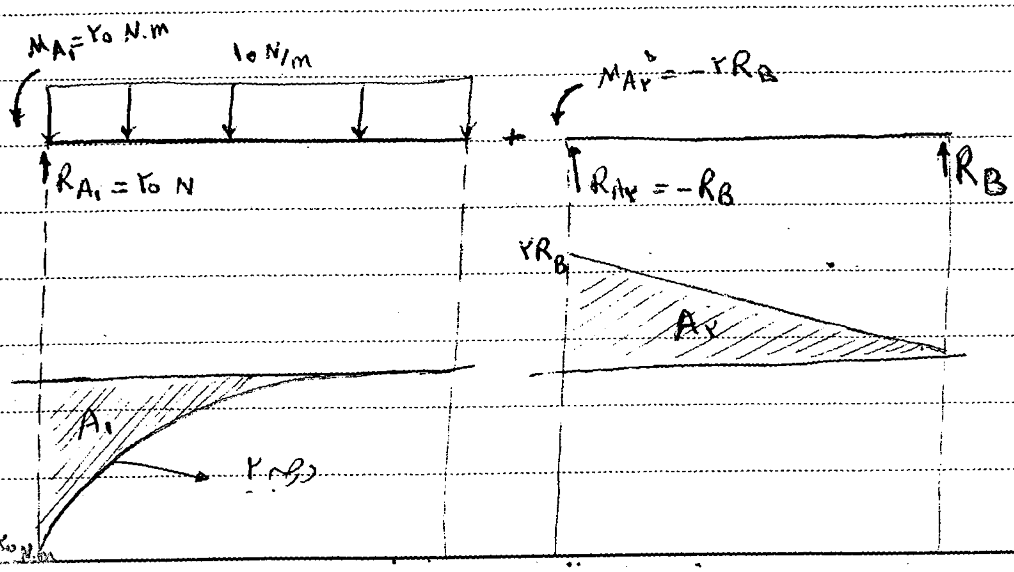
$$M_A=5\,N.m$$

$$R_A=R_{A_1}+R_{A_2}=10+\frac{5}{2}=12.5\quad N$$

$$R_B=R_{B_1}+R_{B_2}=10-\frac{5}{2}=7.5\quad N$$

مثال: در مسئله قبل با استفاده از روش گشتاور سطح، عکس العمل در تکیه گاه B را محاسبه کنید.

$\equiv$



Subject

Date

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1+L_2) + M_C L_2 = \frac{6A_1X_1}{L_1} + \frac{6A_2X_2}{L_2}$$

A_1 ← مساحت دیاگرام آزاد بین A و B

A_2 ← مساحت دیاگرام آزاد بین B و C

X_1 ← فاصله‌ی مرکز سطح A_1 از تکیه‌گاه A

X_2 ← فاصله‌ی مرکز سطح A_2 از تکیه‌گاه C

Subject
Date

تئوری کاستیلیانو :

$$\delta_i = \frac{dU}{dP_i}$$

U —— انرژی

P —— نیروی متمرکزی که در نقطه‌ی i وارد شده

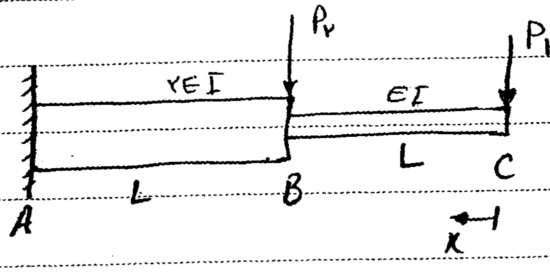
$$U = \int_0^L \frac{M^2}{EI}\, dx$$

خیز در یک نقطه $\delta_i = \int_0^L \frac{M}{EI}\left(\frac{dM}{dP_i}\right) dx$ کل طول تیر باید پوشش داده شود (L و 0)

شیب در یک نقطه $\theta_i = \frac{dU}{dM_i}$ ⟶ گشتاوری که در نقطه‌ی i وارد شده

$$\theta_i = \int_0^L \frac{M}{EI}\left(\frac{dM}{dM_i}\right) dx$$

مثال : با استفاده از تئوری کاستیلیانو خیز و شیب C را بدست آورید.



$$\delta_C = \frac{dU}{dP_1} = \int \frac{M}{EI}\left(\frac{dM}{dP_1}\right) dx$$

Subject
Date

– استفاده از تئوری کستیلیانو زمانی که نیرو وارد نشده یا M داده نشده:

اگر نیرو در نقطه‌ی i وارد نشده باشد برای استفاده از تئوری کستیلیانو باید در نقطه‌ی i نیروی فرضی $\bar{Q}$ را وارد نموده (در راستای جابجایی) بعد با استفاده از تئوری داریم:

$$\delta_i = \frac{du}{d\bar{Q}}$$

و با قرار دادن $\bar{Q}$ برابر با صفر می‌توان δi را به دست آورد.

برای به دست آوردن شیب در نقطه‌ی i نیز می‌توان $\bar{M}$ در نقطه‌ی i وارد نموده و با استفاده از $\theta_i = \frac{du}{d\bar{M}}$ شیب در نقطه‌ی i را با قرار دادن $\bar{M} = 0$ به دست آورید.

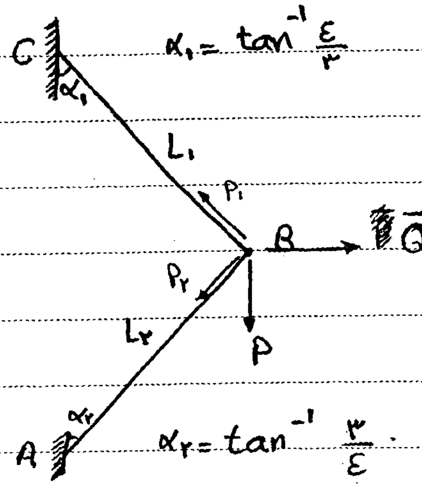
– $\bar{Q}$ ، $\bar{M}$ را بعد از مشتق گیری برابر صفر قرار دهید.

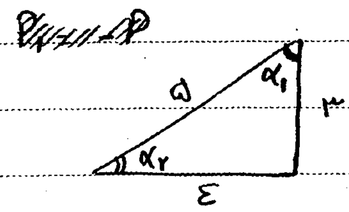
$$\delta_C = \int_0^L \frac{M}{EI} \left(\frac{dM}{d\bar{Q}} \right) dx$$

Subject
Date

مثال: برای خرپای نشان داده شده، جابجایی افقی و قائم نقطه‌ی B را محاسبه کنید:

ابتدا P_1 و P_2 را برحسب (با تجزیه‌ی) P و $\bar{Q}$ به دست می‌آوریم:





$$\sin\alpha_1 = \frac{4}{5} \qquad \cos\alpha_1 = \frac{3}{5}$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha_2 = \frac{4}{5}$$

$$P_1 = -0.6P + 0.8\bar{Q}$$

$$P_2 = -0.8P + 0.6\bar{Q}$$

$$\boxed{\delta_{B_{V}} = \sum \frac{P_j L_j}{AE}\left(\frac{dP_j}{dP}\right)}$$

عمودی

$$\delta_{B_V} = \frac{P_1 L_1}{EA}(0.6) + \frac{P_2 L_2}{EA}(0.8)$$

$$\delta_{B_H} = \sum \frac{P_j L_j}{EA}\left(\frac{dP_j}{d\bar{Q}}\right) = \frac{P_1 L_1}{EA}(0.8) + \frac{P_2 L_2}{EA}(0.6)$$

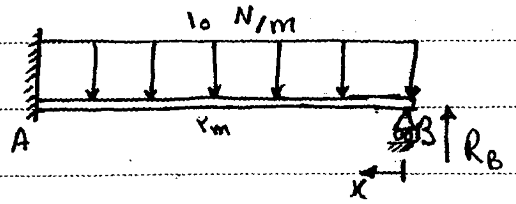
افقی

PAPCO

Subject
Date

- محاسبه‌ی عکس العمل ها با استفاده از تئوری کاستیلیانو (غیر استاتیکی):

مثال: مطلوبست عکس العمل در نقطه‌ی B برای تیر نشان داده شده.



- یک درجه نامعین

خیز در نقطه‌ی B $\delta_B = \int_0^۲ \frac{M}{EI}\left(\frac{dM}{dR_B}\right)dx$

می‌دانیم $\delta_B = ۰$ است چون تکیه‌گاه است:

$$\int_0^۲ \frac{M}{EI}\left(\frac{dM}{dR_B}\right)dx = ۰$$

$$M = +R_B x - ۵x^۲ \qquad \frac{dM}{dR_B} = x$$

$$\frac{1}{EI}\int_0^۲ (R_B x^۲ - ۵x^۳)\,dx = ۰$$

$R_B =$ ۷٫۵ N

$R_A =$ ۱۲٫۵ N

M_A

A

$\delta V_D = 0$ جابجایی عمودی در D

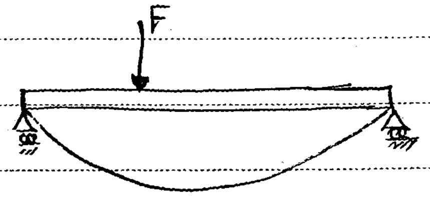
$$\sum \frac{P_i L_i}{EA}\left(\frac{dP_j}{dP_i}\right) = 0$$ کستیگلیانو

$$\frac{1}{EA}\left(4.33\,RL + 2.751\,FL\right) = 0$$

$$R = -0.56\,F$$

* اصل کار مجازی:

کار انجام شده در هر سازه‌ای برابر است با انرژی ذخیره شده درون آن سازه.



$$U = \int_0^l \sigma \varepsilon \, dv$$

w_e external work کار خارجی بیرونی

$$w_i = -\int \underbrace{\sigma}_{\text{تنش}} . \underbrace{\varepsilon}_{\text{کرنش}} . dv$$

$w_e + w_i = 0 \longrightarrow w_e = -w_i$ کار انجام شده توسط نیروی اعمال شده در جابجایی داده شده

Subject
Date

اگر سیستم نیروی مجازی در تعادل باشد $(\bar{P}=0)$:

$$\bar{P}_1\delta_1+\bar{P}_2\delta_2+\dots+\bar{P}_n\delta_n=0$$

$$\sum \bar{P}\delta=0$$

$$w_e=\bar{P}\delta=\bar{Q}\delta$$

$$-w_i=\int \bar{\sigma}\,\varepsilon\,dv$$

$w_e \longrightarrow$ external virtual work

$w_i \longrightarrow$ internal virtual work

Subject

Date

$$-\omega_i = \cancel{\int_0^1 \frac{P_1 \bar{P}_1}{EA} dx} + \int_0^1 \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI} dx + \int_0^3 \frac{P_2 \bar{P}_2}{EA} dx + \int_0^3 \frac{M_2 \bar{M}_2}{EI}$$

$$\mathrm{I} \qquad \mathrm{II} \qquad \mathrm{III} \qquad \mathrm{IV}$$

$$(\mathrm{II}) \longrightarrow = \frac{1}{EI} \int_0^1 10 \bar{Q} x^2 \, dx = \frac{10\bar{Q}}{3} \frac{1}{EI}$$

$$(\mathrm{III}) \longrightarrow = \frac{1}{EA} \int_0^2 10 \bar{Q} \, dx = \frac{20\bar{Q}}{EA}$$

$$(\mathrm{IV}) \longrightarrow = \frac{1}{EI} \int_0^2 10 \bar{Q} \, dx = \frac{1}{EI} \, 20\bar{Q}$$

$$-\omega_i = \bar{Q} \left(\frac{20}{EA} + \frac{70}{3EI} \right)$$

$$\omega_e + \omega_i = 0 \longrightarrow \omega_e = -\omega_i$$

$$\omega_e = \delta_{H_C} \cdot \bar{Q}$$

$$\delta_{H_C} \cdot \cancel{\bar{Q}} = \cancel{\bar{Q}} \left(\frac{20}{EA} + \frac{70}{3EI} \right)$$

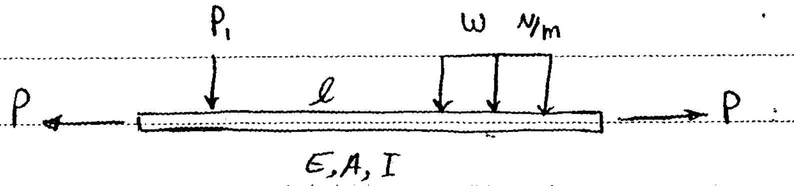
$$\delta_{H_C} =$$

$$-w_i = \int_0 \cancel{P_1 \bar{P}_1} + \int_0^1 \frac{10\bar{Q}x}{EI}\,dx + \int_0^2 \frac{\cancel{P_2 \bar{P}_2}}{EA}\,dx + \int_0^2 \frac{10\bar{Q}}{EA}\,dx$$

$$-w_i = \frac{25\bar{Q}}{EI}$$

$$w_e = \delta R_c \cdot \bar{Q}$$

$$w_e = -w_i \longrightarrow \delta R_c = \frac{25}{EI}$$



$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{P}}{A} + \frac{\bar{M}y}{I} \qquad \varepsilon = \frac{P}{EA} + \frac{My}{EI}$$

P.V.F:

$$-w_i = \int \bar{\sigma}\,\varepsilon\,\underbrace{dV}_{dA\,.\,dx}$$

$$= \iint \left(\frac{\bar{P}}{A} + \frac{\bar{M}y}{I}\right)\left(\frac{P}{EA} + \frac{My}{EI}\right) dA\,dx$$

Subject
Date

$$\bar{M}_\theta = -\bar{Q}R(1-\cos\theta)$$

$$dx = R\,d\theta$$

$$-w_i = \frac{\text{۲}\times}{EI}\int_0^{\pi/\text{۲}} (-wR\sin\theta)(-\bar{Q}R(1-\cos\theta))\,R\,d\theta$$

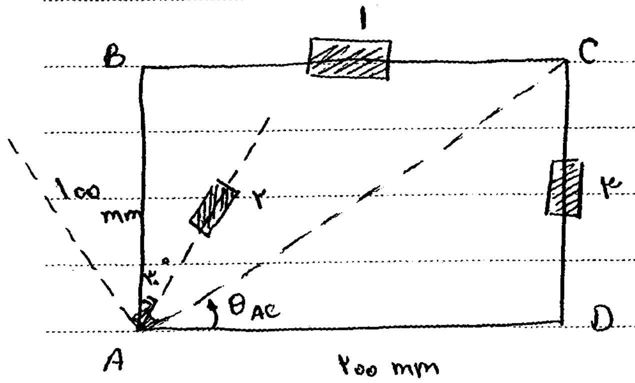
$$-w_i = \frac{\text{۲}\,w\bar{Q}R^{\text{۲}}}{EI}\int_0^{\pi/\text{۲}} (\sin\theta - \sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$w_e = -w_i$$

$$w_e = \bar{Q}\,\delta_{V_C} \longrightarrow \boxed{\delta_{V_C} = \frac{wR^{\text{۴}}}{\text{۲}EI}}$$

حل تمرین (جلسه ۱)

مثال: صفحه‌ی مستطیل شکل تحت تنش



$\Delta R/R$	6×10^{-4}	3×10^{-4}	2.4×10^{-4}
کرنش سنج	۱	۲	۳

ضریب کرنش سنج $K=2$

الف) کرنش در جهت AC و عمود بر آن

ب) جابجایی نقطه‌ی C را نسبت به A (مولفه‌های این جابجایی را در جهت AD و عمود بر آن).

کرنش متناظر: $e_1 = 3\times10^{-4}$ $\quad e_2 = 1.5\times10^{-4}$ $\quad e_3 = 1.2\times10^{-4}$

$$e_\theta = e_x \cos^2\theta + e_y \sin^2\theta + e_{xy}\sin 2\theta$$

$$\theta = 0 \longrightarrow e_1 = e_x = 3\times10^{-4}$$

$$\theta = 90 \longrightarrow e_3 = e_y = 1.2\times10^{-4}$$

$$\theta = 60^\circ \longrightarrow e_2 = 1.5\times10^{-4} = (3\times10^{-4}\times 1/4) + (1.2\times10^{-4}\times \frac{3}{4}) + e_{xy}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e_{xy} = -17\times10^{-5}$$

$$u = e_{x'} \cdot x = e_{x'} \cdot AD$$

$$v = e_{y'} \cdot y = e_{y'} \cdot AB$$

مؤلفه‌های جابجایی در راستای AD $\quad u_C = e_{AC} \cdot AD = ٠/٠۵ \text{ mm}$

$\perp AD$ $\quad v_C = e_{\perp AC} \cdot AB = ٠/٠١٧ \text{ mm}$

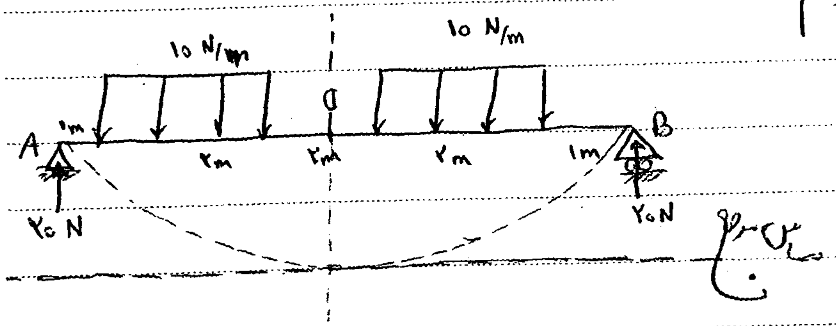
- کاربرد قضایای گشتاور سطح:

۱. تیر یک سرگیردار و تیرهای با بارگذاری متقارن

۲. تیرهای با بارگذاری نامتقارن

۳. تیرهای از نظر استاتیک نامعین

۱- شیب زیر تکیه‌گاه‌ها را صفر بدانیم:

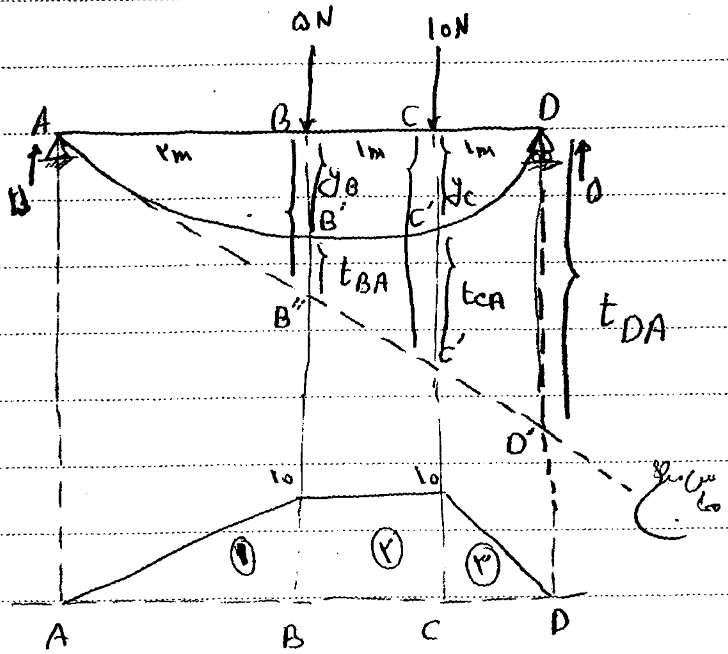


$$t_{CD} \neq t_{DC}$$

از C عمود

از D مماس

مثال از پست (۲) ← شیب و خیز در نقاط C و B :



مماس مرجع را A انتخاب می‌کنیم

$$\theta_A = -\frac{t_{DA}}{4}$$

$$t_{DA} = \left[A_1\left(\tfrac{2}{3}+2\right)\right] + \left[A_2 \times 1.5\right] + \left[A_3 \times \tfrac{2}{3}\right] = \checkmark$$

فاصله‌ی مرکز سطح تا نقطه‌ی D در نظر گرفته می‌شود

$$\theta_{BA} = \theta_B - \theta_A = A_1 \longrightarrow \theta_B = \checkmark$$

برای محاسبه‌ی y_B با استفاده از تشابه مثلثات داریم

$$y_B = \underbrace{B'B''}_{t_{BA}} - \underbrace{BB''}_{\frac{2}{4} t_{DA}} = \checkmark$$

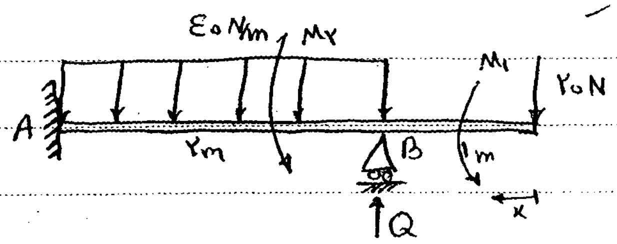
$t_{BA} \rightarrow A_1 \times \frac{2}{3}$

$y_C \longrightarrow = C'C'' - CC''$ به همین ترتیب ✓

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محاسبه‌ی عکس‌العمل‌ها در تیرهای استاتیکی نامعین با استفاده از "P.V.F"

مثال: برای تیر نشان داده شده عکس‌العمل در تکیه B را با استفاده از P.V.F محاسبه نموده سپس عکس‌العمل‌ها در تکیه‌گاه A را محاسبه کنید.



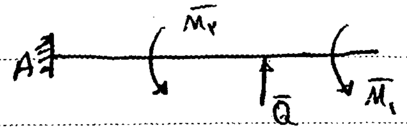
۱. درجه نامعینی ← ①

۲. عکس‌العمل خواسته‌شده را حذف کرده و به جای آن Q را به‌عنوان یک نیروی خارجی وارد می‌کنیم.

$M_1 = 20\,x \qquad 0<x<1$

$M_2 = 20\,x - Q\,(x-1) + \frac{40(x-1)^2}{2} \qquad 1<x<3$

۳. سیستم نیروی مجازی:



$\bar{M}_1 = 0$

$\bar{M}_2 = -\bar{Q}(x-1)$

چون نیروهای افقی وجود ندارد $(P=0)$ داریم:

$$-W_i = \int_1^3 \frac{M_2 \bar{M}_2}{EI}\,dx = \int_1^3 \Big(\qquad \Big)$$

انتگرال بالا برابر صفر می‌شود ← $W_i = 0$ ← $W_e - W_i = 0$ (تغییر مکان $W_e = 0$ نداریم؛ صفر) واژگونی

سپس Q را به‌دست می‌آوریم.

$\bar{P}_2 = -\bar{Q}_2$

$\bar{M}_2 = 2\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 x$

$$-w_i = \underbrace{\int_0^2 \frac{P_1\bar{P}}{EA}dx_1}_{I_1} + \underbrace{\int_0^2 \frac{M_1\bar{M}_1}{EI}dx_1}_{I_2} + \underbrace{\int_0^2 \frac{P_2\bar{P}_2}{EA}dx_2}_{I_3} + \underbrace{\int_0^2 \frac{M_2\bar{M}_2}{EI}dx_2}_{I_4}$$

$$I_1 = \frac{2Q_2\bar{Q}_2}{EA} \qquad I_2 = \frac{8}{3}\frac{Q_1\bar{Q}_1}{EI}$$

وقتی انتگرال ها انجام شد جواب را برحسب $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ بدست آوریم:

$$= \bar{Q}_1\left\{Q_1\left(\frac{8}{3EI}+\frac{2}{EA}\right)+Q_2\left(\frac{4}{EI}-\frac{200}{EA}\right)\right\} +$$

$$+\bar{Q}_2\left\{Q_1\left(\frac{4}{EI}\right)+Q_2\left(\frac{32}{EI}+\frac{2}{EA}-\frac{40}{EI}\right)\right\} = 0$$

ضرایب $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ مساوات(؟) ← دو معادله دو مجهول

$\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ از هم مستقل هستند:

$$Q_1 = \frac{300}{7}\ N$$

$$Q_2 = \frac{150}{7}\ N$$

$$x = 0 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow A = 0$$

$$x = l \longrightarrow y = 0 \longrightarrow B \sin \mu l = 0$$

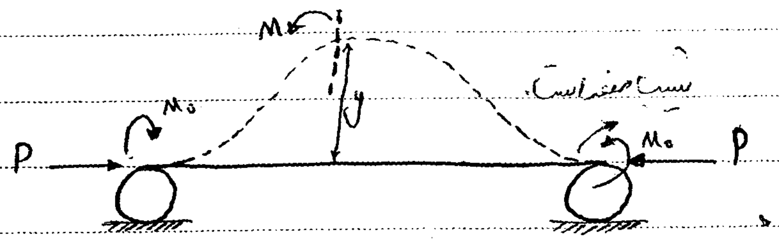
$$\sin \mu l = 0 \longrightarrow \mu l = n\pi$$

$$\mu = \frac{n\pi}{l} \longrightarrow \mu^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

$$\frac{P}{EI} = \mu^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \longrightarrow P = \frac{n^2\pi^2}{l^2} EI$$

$$\boxed{P_c = \frac{\pi^2}{l^2} EI}$$

مثال: معادله‌ی خیز نیروی بحرانی را برای میله‌ی نشان داده شده به دست آورید.



$$M + Py - M_0 = 0$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} + Py = M_0$$

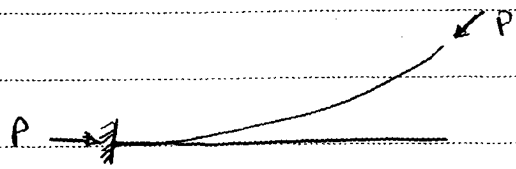
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mu^2 y = \frac{M_0}{EI} \quad , \quad \mu^2 = \frac{P}{EI}$$

تا زمانی که درجه طرف سمت راست از ضریب $\frac{d^2y}{dx^2}$ کمتر باشد!

$y_p = $ طرف راست / ضریب y

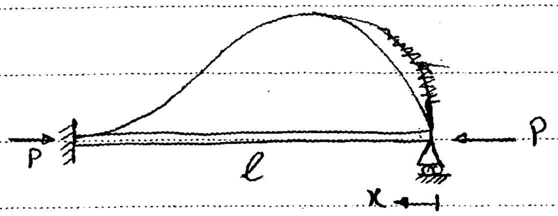
Subject:
Year. Month. Date. ( )

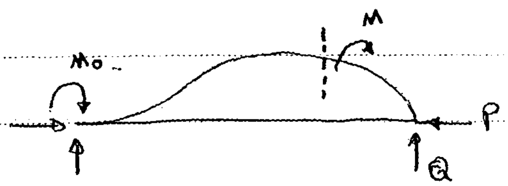
مثال: ثابت کنید اگر یک سر میله‌ی دوسرگیردار را آزاد کنیم مقدار بار بحرانی در کمانش ۱۶ برابر کاهش می‌یابد.



دوسرگیردار $P_c = \frac{4\pi^2}{l^2} EI$

مثال: معادله‌ی خیز را برای میله‌ی نشان داده شده بنویسید.





$\curvearrowright A: \quad Q = \frac{M_0}{l}$

$$M + Py - Qx = 0$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} + Py = \frac{M_0}{l} x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mu^2 y = \frac{Q}{EI} x \quad , \quad \mu^2 = \frac{P}{EI}$$

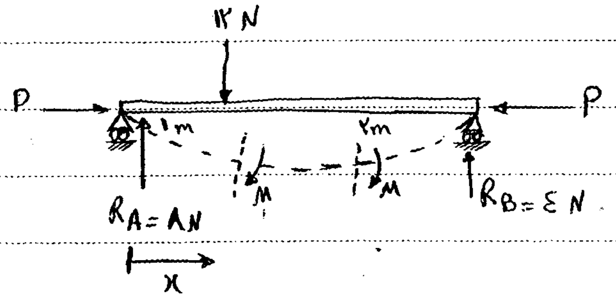
$$y = A\cos\mu x + B\sin\mu x + y_p$$

PAPCO

Subject:
Year ... Month ... Date ... ( )

* در بسیاری از موارد، علاوه بر نیروی فشاری (در طول محور)، بارگذاری در جهت عمود بر محور هم صورت می‌گیرد.

مثال: برای میله‌ی نشان داده شده معادله‌ی خیز را بنویسید.



$$0 \le x \le 1 \longrightarrow M + Py + 8x = 0 \qquad (1)$$

$$1 \le x \le 3 \longrightarrow M + Py + 8x - 12(x-1) = 0 \qquad (2)$$

$$(1) \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \mu^2 y = -\frac{8}{EI}x$$

$$(2) \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \mu^2 y = \frac{4x}{EI} - \frac{12}{EI}$$

$$y_1 = A\cos\mu x + B\sin\mu x - \frac{8}{P}x$$

$$y_2 = C\cos\mu x + D\sin\mu x + \frac{4x}{P} - \frac{12}{P}$$

عکس‌العمل B $\vec{B}$: $R_A = 14 - 2M_0$ (1)

$$M + 2y + (14 - 2M_0)x + 8M_0 - 8x\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mu^2 y = 2\mu^2 x^2 - \mu^2(8 - M_0)x - 4\mu^2 M_0 \quad (2)$$

$$y = A\cos\mu x + B\sin\mu x + y_p \quad (1) \quad (1)$$

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

$y_p' =$ $y_p'' =$

با جایگذاری در (1) $\longrightarrow$ $a = 2$
$b = M_0 - 8$ (3)
$c = -\left(4M_0 + \frac{4}{\mu^2}\right)$

شرایط مرزی (0.5) : $x = 0 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow A = \left(4M_0 - \frac{4}{\mu^2}\right)$ (1)

$x = 4 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow B = -\left(4M_0 + \frac{4}{\mu^2}\right)\mathrm{Cotg}\, 4\mu + \frac{4}{\mu^2}\sin 4\mu$ (2.5)

$y = \dots$ (1)

(1) نمره هم برای تشریح مسئله است

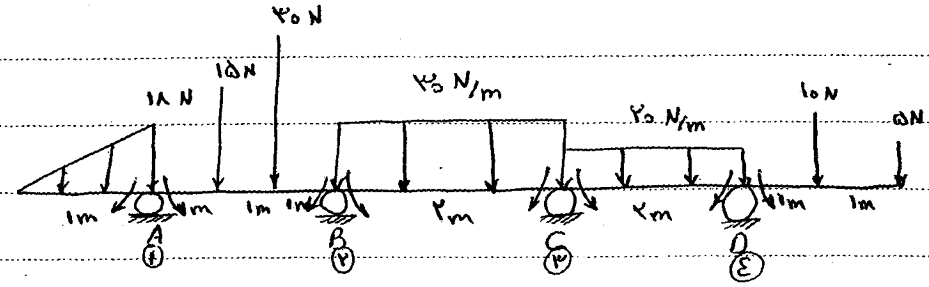
Subject:

Year.　　Month.　　Date.　( )

حل تمرین - جلسه‌ی دوم

مثال: تیر پیوسته ABCD مطابق شکل مفروض است. با استفاده از تئوری سه ممان

مطلوبست ممان‌های نقاط A, B, C, D. (EI ثابت).



$M_A = 18 \times 1/2 \times 1/3 = 3\ N.m$ (1)

$M_D = (5\times 2) + (10\times 1) = 20\ N.m$ (1)

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1+L_2) + M_2 L_2 = \Sigma Pab\left(1+\frac{a}{L}\right) + \Sigma \frac{wL^3}{4}$$

برای تیر ABC:

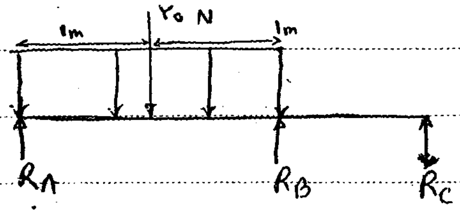
سمت چپ معادله: $M_A \times 3 + 2M_B(3+2) + M_C \times 2 =$

$= 3\times 3 + 10M_B + 2M_C = 9 + 10M_B + 2M_C$ (1,5)

سمت راست معادله: $\Sigma P_1 a_1 b_1 \left(1+\frac{a_1}{L_1}\right) + \frac{w_2 L_2^3}{4}$

$= 15\times 1\times 2(1+1/3) + 30\times 2\times 1(1+2/3) + \frac{35\times 2^3}{4} = 200$ (4)

$$\delta_A = \int \frac{M}{EI}\left(\frac{dM}{dR}\right)dx \xrightarrow{EI\ \text{ثابت}} \frac{1}{EI}\int M \frac{dM}{dR_A}\,dx$$



$$R_A + R_B + R_C = ۲۰$$

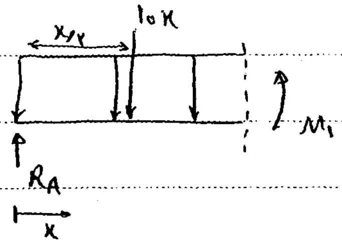
$$\Sigma M_C = ۰ \circlearrowleft^{+} \qquad ۳R_A + R_B - ۴۰ = ۰$$

$$R_B = ۴۰ - ۳R_A \qquad (۲)$$

$$\Sigma M_B = ۰ \circlearrowleft^{+} \qquad R_C - ۲R_A + ۲۰ = ۰$$

$$R_C = ۲R_A - ۲۰ \qquad (۱)$$

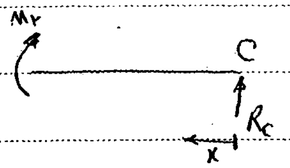
از A تا B :



$$x \leq ۲$$

$$M_۱ = R_A \times x - ۵x^۲ \longrightarrow \frac{dM_۱}{dR_A} = x$$

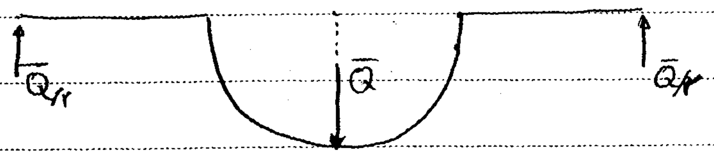
از B تا C :



$$M_۲ = R_C\,x \overset{(۱)}{=} (۲R_A - ۲۰)\,x \longrightarrow \frac{dM_۲}{dR_A} = ۲x$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* سیستم نیروی مجازی :



$$\bar{M}_x = \frac{\bar{Q}}{۲} x$$

$$\bar{M}_\theta = \frac{\bar{Q}}{۲} R (۲ - \cos\theta)$$

P.V.F : $$\left.\begin{aligned} &w_e + w_i = ۰ \\ &w_e = \bar{Q}\,\delta_c \end{aligned}\right\}$$ (۰٫۵)

$$-w_i = ۲\underbrace{\int_0^R \frac{M_x \bar{M}_x}{EI}\, dx}_{I} + \underbrace{\int_0^{\pi/۲} \frac{M_\theta \bar{M}_\theta}{EI}\, R\, d\theta}_{II}$$ dx_1 (۰٫۵) (۰٫۵)

$$I = \frac{۲}{EI}\int_0^R \frac{\omega}{۲} x \, \frac{\bar{Q}}{۲} x \, dx = \frac{\omega \bar{Q}}{۲EI}\left[\frac{x^۳}{۳}\right]_0^R \simeq ۰٫۱۶۷ \frac{\omega R^۳}{EI}\bar{Q}$$ (۱٫۵)

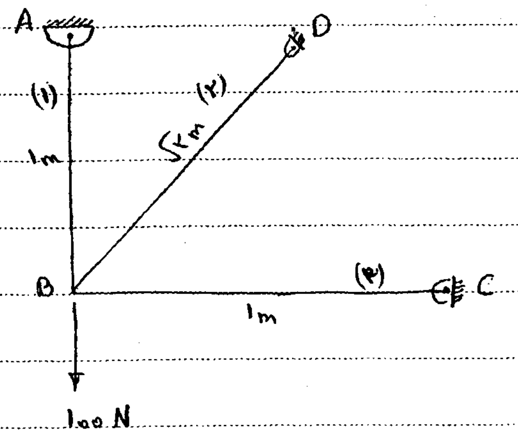
$$II = \frac{۲}{EI}\int_0^{\pi/۲} \frac{\omega}{۲} R (۲ - \cos\theta) \times \bar{Q}/۲ \, R (۲ - \cos\theta) \times \cancel{۲}\, R\, d\theta =$$

$$= \frac{\omega R^۳ \bar{Q}}{۲EI}\int_0^{\pi/۲} (۴ + \cos^۲\theta - ۴\cos\theta)\, d\theta$$

$$II = \left(\frac{۹}{۲} \times \frac{\pi}{۲} + \frac{۱}{۴} \times ۰ - ۴\right)\frac{\omega R^۳ \bar{Q}}{۲EI} \simeq ۱٫۵۳۴ \frac{\omega R^۳ \bar{Q}}{EI}$$ (۲٫۵)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: خرپای ABCD مطابق شکل مفروض است. با استفاده از P.V.F عکس العمل تکیه‌گاه D و همچنین نیرو در هر یک از اعضا را بدست آورید (سطح مقطع میله و خواص مکانیکی آنها یکسان است).



سیستم نیروی حقیقی

$$\text{در نقطه } B \begin{cases} P_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} Q = 100 \\ P_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} Q = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} P_1 = 100 - \frac{\sqrt{2}}{2} Q & (1) \\ P_2 = Q & (1) \\ P_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} Q & (1) \end{cases}$$

سیستم نیروی مجازی

$$-W_i = \sum \frac{P\bar{P}}{EA} L = 0 \quad (0.5) \longrightarrow \begin{cases} \bar{P}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{Q} \\ \bar{P}_2 = \bar{Q} \\ \bar{P}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{Q} \end{cases}$$

$$= \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{Q} \left(100 - \frac{\sqrt{2}}{2} Q\right) \times 1\right] + \left[\bar{Q}\, Q \sqrt{2}\right] + \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{Q} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) Q \ldots\right] \quad (2)$$

$$(1+\sqrt{2})\, Q = 50\sqrt{2} \quad (2)$$

$$Q = 29.3 \ N \longrightarrow \begin{cases} P_1 = \\ P_2 = \\ P_3 = \end{cases}$$