دینامیک سازه‌ها - دکتر امینی

مراجع:

1. Dynamics of structures R.W. clough

(ترجمه شده) $\frac{1}{4}$ ۳۰٪ مباحث درس از این کتاب است.

۲. structural Dynamics Theory and computation m.Paz

(کتاب بسیار راحت - نوع نگارش روان - $\frac{1}{3}$ کتاب قبلی حجم دارد - بخشی از صحبت‌ها از این کتاب است. توسط پژوهشگاه زلزله ترجمه شده) ۲۰٪ مباحث از این کتاب است.

۳. Dynamics of structures A.chopra

(جدید تر است - توسط چوپرا و همکارانش نوشته شده - جامعیت دارد - کتاب بسیار خوبی است چون حالت عمرانی دارد و در مورد مباحث عمران است - قسمت اعظم آن در دانشگاه امیرکبیر ترجمه شده) $\frac{1}{4}$ حدود ۲۰٪ مطالب درس از این کتاب است.

۴. seismic Design Hand Book F.Naeim

Hand Book

(این کتاب مباحث مختلف از نویسنده‌های مختلف در زمینه دینامیک را جمع آوری کرده و کتاب را تألیف کردند - مباحثی در این کتاب هست که در کتاب‌های دیگر شاید نباشد - روش مختصات تعمیم یافته که بعداً تدریس می‌شود از این کتاب است - این کتاب ترجمه شده است.)

Text book

۵. Structural Dynamics

کتابی خوب و مخصوص تدریس هست - مثال دارد.

۶. Theory of vibration with application W.Thomson

(بیشتر مکانیکی است - وقتی در مورد مدل‌های یک درجه آزادی صحبت می‌کنیم مثال هایی در این کتاب هست که مفید است. این کتاب ترجمه هست.)

۷. Dynamics of frame structures G.Rogers

(این کتاب قدیمی است - جالب است که مقایسه کنیم با کتاب‌های جدید و اینکه چه تفاوتی کرده‌اند.)

۸. Dynamics of structures J.L.Humar

(کم و بیش مثل کتاب چوپرا است - مثال دارد و توضیح زیاد دارد - تو کتابخانه هست کتاب خوبی است.)

استاد از هرکدام از کتاب‌های بالا یه تعدادی مثال خوب جدا کرده و در کلاس تدریس می‌کند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱ـ سرفصل ها:

sdof
- مبانی و تعاریف.
- مدل یک درجه آزادی سازه ها. (ارتعاش آزاد تحت شرایط اولیه)

single degree of freedom

- مدل یک درجه آزادی سازه ها. (ارتعاش اجباری) نیروهای هارمونیک ؟
  نیروهای غیرمشخص
  به علت نیرو
- روش کار مجازی.
- روش ریلی (تقریبی)
- روش دامنه فرکانسی ـ سری فوریه.

MDoF
- مدل چند درجه آزادی سازه ها ـ قاب برشی.
- مدل چند درجه آزادی سازه ها ـ حالت کلی.
- روش مختصات تعمیم یافته ـ جرم متمرکز نیست.
- ارتعاش قطعات با جرم پیوسته ـ بدون تقریب زدن یا مدل سازی.
- تحلیل طیفی.
- تحلیل غیرخطی.
- کنترل سازه ها.

هدف از بحث دینامیک سازه ها:

می خواهیم یه سازه ای را تحت بارهای دینامیکی قرار دهیم. عموماً بار دینامیکی در کشور ما زلزله است. اگرچه مبحثی که می کنیم برای هر نوع بار دینامیکی صادق است و تنش های داخلی در سازه را بدست آوریم. در دینامیک سازه ها بار ما دینامیکی است یعنی تابعی از زمان است. حال این بار را می خواهیم به سازه اثر بدهیم و رفتار سازه را بررسی کنیم. مکان را پیدا کنیم ـ تغییر شکل را پیدا کنیم ـ هر چیزی که لازم است برای طراحی پیدا کنیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال اگر اینطور نبود که در عمل هم اینطور نیست یعنی چند جرم داشته باشیم و هر کدوم هم چند جابه جایی داشته باشد (چند جابه جایی هم داشته باشند) ← تعداد معادلاتی را که باید حل کنیم تا جابه جایی ها محاسبه شوند زیادتر خواهد بود. این مدل را مدل چند درجه آزادی می نامند.

بحث دینامیک سازه‌ها به دو بخش تقسیم می‌شود.
۱- مدل یک درجه آزاد single degree of freedom SDOF
۲- " چند " " Multi degree of freedom

علت اینکه در مورد مدل SDOF صحبت می‌کنیم
۱- می‌توانیم با تقریب خوب مدل کنیم و نتایج خوبی و تقریباً واقعی بدست آوریم.
۲- از نتایج SDOF استفاده می‌کنیم و MDOF را حل می‌کنیم. به عبارت دیگر SDOF پیش نیاز MDOF است. MDOF شامل چند SDOF است.

مدل یک درجه.
پس SDOF اهمیت دارد.

هدف: هدف این است که بار دینامیکی را بیاریم و بدون اینکه کار ساده کاری غیر از مدلسازی انجام بدیم رفتار سازه را بررسی کنیم.

یه کار دیگر هم می‌توان انجام داد. به طور اجمالی در مورد روش صحبت می‌کنیم. این روش، روش استاتیکی معادل یا روش معادل استاتیکی است. به عبارت دیگر در این روش نیروی دینامیکی زلزله را با یک تقریب تبدیل می‌کنیم به یک نیروی استاتیکی و این نیروی استاتیکی را به سازه اثر می‌دهیم و استاتیکی هم آنالیز کنیم. این روش را استاتیکی معادل می‌گوئیم ← از این روش نمی‌رویم و این روش بحث ما نیست. ما می‌خواهیم نیروی خارجی که تابع زمان هست را به سازه اثر دهیم (طبق قوانین دینامیک نه طبق قوانین استاتیک) و رفتار سازه را بررسی کنیم.

ممکن است حرکت سازه تحت نیروی تابع زمان به ارتعاش درآید یا تحت شرایط اولیه. برای اینکه سیستم ما به ارتعاش در بیاید الزاماً نیروی خارجی تابع زمان نیاز نیست. یک سیستمی که حالت الاستیک داشته باشد، اگر آن را جابه جا کنیم و رها کنیم شروع به ارتعاش می‌کند. البته بعد از مدتی می‌ایستد ولی به هر حال یه ارتعاشی پیدا کرد. اگر تابع نیرو و حرکت داشته باشیم می‌گوئیم ارتعاش اجباری یعنی ارتعاش

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یا بازتاب یا پاسخ و ...

منظور از جواب هر چیزی می‌تواند باشد مثل جابه‌جایی، سرعت، شتاب، ممان و ...

مثلاً می‌گوییم زلزله‌ای به سازه اثر می‌کند حال با این روش حداکثر جابه‌جایی سازه در محل طبقات یا سختی چقدر را همین حداکثرها هستند که معیار طراحی ما هستند. ممکن است ما نیاز نداشته باشیم ببینیم این سازه در هر لحظه جابه‌جایی‌هایش و ... چقدر است و برای ما ماکزیمم‌ها فقط مهم باشند. این روش خیلی ساده و مهم است که بعداً درس داده می‌شود.

- تحلیل غیرخطی:

در مباحثی که تا به حال بیان شد فرض ما این است که رفتار سازه خطی است.

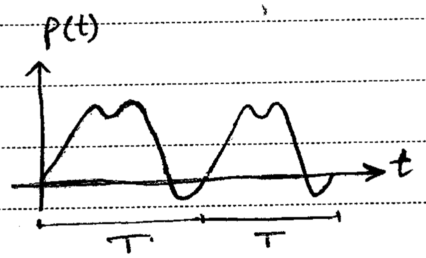
رفتار سازه خطی است یعنی اینکه رابطه کرنش و تنش خطی است و اگر نباشد در مبحث تحلیل غیرخطی صحبت می‌کنیم که بعداً درس داده می‌شود.

- کنترل سازه‌ها.

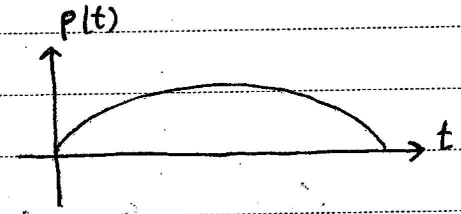
بخشی است که در مورد سازه‌های هوشمند یا کنترل سازه‌ها صحبت می‌کند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

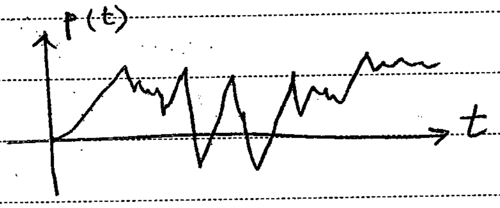
نیروی زلزله رکورد نمی شود بلکه شتاب زمین رکورد می شود و تبدیل به نیرو می شود.



← نیروی معین متناوب.



← نیروی معین غیر متناوب



← نیروی نامعین

- انواع ارتعاشات :

- اگر سازه تحت اثر نیرو به ارتعاش درآید اسم این ارتعاش را ارتعاش اجباری می گذاریم.

forced vibration ← یا ارتعاش تحت اثر نیرو

و اگر تحت شرایط اولیه ارتعاش پیدا کرد اسم این ارتعاش را ارتعاش آزاد می نامیم.

Free vibration =

منظور از شرایط اولیه جابه جایی اولیه (x_0) یا سرعت اولیه است $\dot{x}_0$ که یکی را بدهیم یا هر دو را بدهیم.
یعنی یا یه جابه جایی اولیه بدهیم یا یک سرعت اولیه بدهیم به سازه و یا هر دو را بدهیم.

از جلسه بعد ارتعاش آزاد را شروع می کنیم چون ← گرچه مورد نظر ما بیشتر ارتعاش اجباری است.

۱- ارتعاش آزاد پیش نیاز ارتعاش اجباری است و باید برای تحلیل ارتعاش اجباری حتما آن را بلد باشیم.
۲- ارتعاش آزاد مباحثی را باز می کند که این مباحث دیدمان را آشنا می کند به مشخصات دینامیکی یک سازه

Subject:
Year. Month. Date. ( )

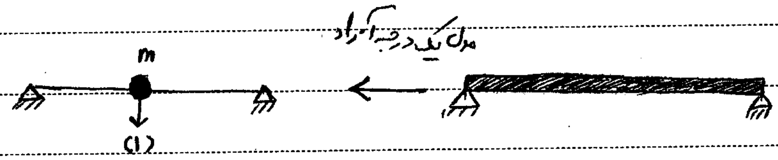
سازه دارد ۶ خودمان تعداد جابه جایی را برای جزء جرم های مدل شده درنظر می گیریم
البته در حالت ۳ بعدی ۶ جابه جایی داریم. اگر در حالت دو بعدی (صفحه) بررسی کنیم ۳ جابه جایی کلی داریم که با توجه به میزان دقت و اختیار خودمان مهمترین جابجایی ها را درنظر می گیریم.
با توجه به روابط شیب افت هر جابه جایی تأثیر روی ممان و نیروها و تنش های داخلی دارند و هر کدام را درنظر نگیریم روی میزان تنش های موجود در سازه تأثیرگذار است.

نتیجه: مدل سازی دارای ۲ مرحله است: ۱- جرم ۲- جابه جایی.
با توجه به میزان ساده سازی که چقدر بخواهیم عملیات ساده تر باشد و میزان دقت که چقدر بخواهیم جواب ها دقت داشته باشند سازه را مدل می کنیم

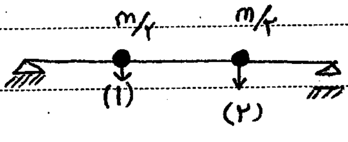
تعداد درجه آزادی: تعداد پارامترهای مستقل که ما انتخاب می کنیم که رفتار سیستم را مشخص کنیم.
منظور از مستقل، هندسی است.

در صفحه: ۲ انتقال + ۱ دوران.
در فضا: ۳ " + ۳ "
← جابه جایی

پس از این به بعد برای تشخیص تعداد درجه آزادی به سراغ تعداد پارامترهای مستقل هندسی می رویم:

مثال:


- اگر مدل یک درجه آزاد بالا خطایش قابل قبول باشد در انتها که جواب ها بدست آمد آن را قبول می کنیم وگرنه برای افزایش دقت باید تعداد درجات آزادی را بالا ببریم.
- در تیر بالا جرم متمرکز یک پارامتر مستقل هندسی دارد آن هم جابه جایی در جهت y است. مثلاً اگر بخواهیم دقت را بالا ببریم جرم گسترده را با دو جرم متمرکز مدل می کنیم و به این ترتیب دو جابه جایی مستقل در جهت y ایجاد می شود پس با مدل دو درجه آزادی روبرو هستیم



PAPCO

مدل دو درجه آزادی

۲_ میرایی اصطکاکی :

این میرایی ناشی از اصطکاک اتصالات بین قطعات است و اگر اتصال بین قطعات سازه تغییر کند در میرایی تأثیرگذار است مثلاً اگر یه اتصال را از حالت گیردار خارج کنیم و نیمه گیردارش کنیم میرایی‌اش بیشتر می‌شود یعنی یه اتصال کاملاً صلب را تبدیل به یه اتصال مفصلی + یه فنر پیچشی با سفتی پیچشی K کنیم. ؟ (۳)

۳_ میرایی خارجی (مقاومت هوا یا آب) :

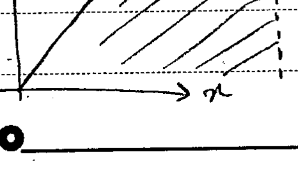
این میرایی ناشی از عوامل محیطی روی ارتعاش است. اثر مقاومت آب را در نظر می‌گیریم ولی اثر مقاومت هوا را به علت ناچیز بودن در نظر نمی‌گیریم. ولی اگر سازه مورد نظر خاص باشد آن را هم در نظر می‌گیریم.

۴_ میرایی پسماند : (۴) ؟

این میرایی وقتی به وجود می‌آید که سازمون رفتارش در ناحیه غیرخطی است. یعنی نیروها زیاد است و سازه وارد محدوده غیرخطی شده. وقتی سازه وارد ناحیه غیرخطی است (منظور از غیرخطی، غیرخطی مصالح است)، سازه می‌تواند جذب انرژی بکنه بدون اینکه خراب بشه تا اینکه خراب شود. این نیروی وارد شده که باعث ایجاد تغییر شکل می‌شود ایجاد مساحت در منحنی P-Δ که همان انرژی‌های جذب شده است می‌کند. این انرژی را انرژی پتانسیل یا strain enegy می‌نامند که در سیستم ذخیره می‌شود. هر چقدر سطح زیر منحنی P-Δ یا P-x بیشتر باشد خاصیت جذب انرژی سیستم بیشتره یا بیشتر در آن انرژی جذب شده. وقتی سازه غیرخطی شد سطحی پیدا می‌کند در زیر نمودار P-Δ که معرف جذب انرژی است. با توجه به این خاصیت اسم این میرایی را میرایی پسماند می‌گذاریم. یا خاصیت جذب انرژی در حالتی که سیستم وارد مرحله غیرخطی می‌شود.

رفتار غیرخطی سازه ← ناشی از مصالح ← رابطه تنش و کرنش خطی نیست.

رفتار غیرخطی سازه ← هندسی



$$\int \frac{M^2\,dx}{EI} = P$$ ← انرژی پتانسیل سیستم

این میرایی به علت خاصیت جذب انرژی در حالت غیرخطی است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

○ روش انرژی.

$\varphi + T = cte$

با استفاده از اصل بقای انرژی.

انرژی پتانسیل ، انرژی جنبشی

این مورد بیشتر در بحث مکانیک کاربرد دارد ولی جلسات بعدی در مورد این روش صحبت می‌شود.

○ روش کار مجازی.

$\delta w = 0$

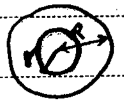
کار نیروهای وارد بر سیستم شامل نیروی اینرسی، گشتاور اینرسی و ... برابر صفر است.

لذا شبیه به استاتیک ولی در بحث دینامیک اینرسی ها هم وارد شدند.

تفاوت استاتیک و دینامیک اینرسی است حال یا نیروی اینرسی و یا گشتاور اینرسی یا اثر هر دو.

نتیجه: پس برای نوشتن معادله دیفرانسیل حرکت سیستم به سه روش می‌توانیم عمل کنیم.

نکته: I_{mo} برای یک دیسک دایره‌ای:



$$I_{mo} = \int_m dm\, r^2 = \int_V \rho\, dV\, r^2 = \int_A \rho\, dA \times 1\, r^2 = \int_0^R \rho\, 2\pi r\, r^2\, dr = 2\rho\pi \int_0^R r^3\, dr$$

$$= \frac{\rho\pi R^4}{2} = \frac{\rho\pi R^2 R^2}{2} \xrightarrow{A = \pi R^2} \frac{\rho A \times 1\, R^2}{2} \xrightarrow{m = \rho V = \rho \times A \times 1} \frac{mR^2}{2}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

گاهی کمیت های سرعت دورانی و بسامد زاویه ای به عنوان یک کمیت یکسان در نظر گرفته می شوند. ولی این دو کمیت با یکاهای مختلفی بیان می شوند. بسامد زاویه ای بیان کننده نرخ تغییرات زاویه بر واحد زمان بوده و در سامانه SI، بر حسب رادیان بر ثانیه بیان می شود. با توجه به اینکه هر دور کامل ۳۶۰ درجه یا ۲π رادیان است، سرعت دورانی و بسامد زاویه ای با استفاده از روابط زیر به یکدیگر قابل تبدیلند.

$$\omega_{cyc} = \omega_{rad}/2\pi$$

$$\omega_{cyc} = \omega_{deg}/360$$

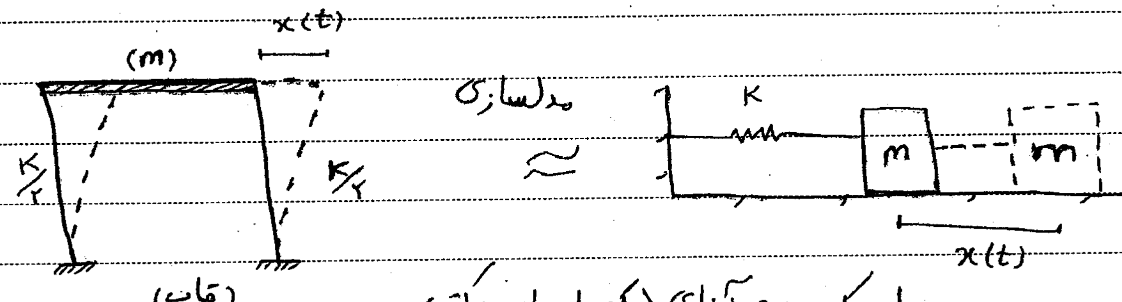
ω_{cyc} : سرعت دورانی بر حسب هرتز یا دور بر ثانیه است.

ω_{rad} : بسامد زاویه ای بر حسب رادیان بر ثانیه است.

ω_{deg} : بسامد زاویه ای بر حسب درجه بر ثانیه است.

به عنوان مثال یک موتوری که در هر ثانیه یک دور می چرخد، بسامد زاویه ای ۲π رادیان بر ثانیه یا ۳۶۰ درجه بر ثانیه دارد، در حالی که سرعت دورانی آن ۶۰ دور بر دقیقه یا همان یک دور بر ثانیه یا یک هرتز است.

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ ؛ واحد: rad/s یا deg/s یا rpm ⟸ دور بر دقیقه



مدل یک درجه آزادی (یک جابه جایی حرکت)

- ستون ها یک سختی دارند و عملاً یک فنر را دارند و در مقابل جرم m مقاومت نشان می دهند.
- جمع سختی دو ستون می شود K فنر.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حالت ۳: در صورتیکه ریشه‌های معادله دو عدد مختلط $\lambda = \alpha \pm iB$ باشند در این صورت جواب عمومی معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

$\longrightarrow$ جواب حالت نوسان دارد.

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \longrightarrow x = Ge^{st} \longrightarrow \dot{x} = Gse^{st} \longrightarrow \ddot{x} = Gs^2e^{st}$$

جایگذاری

$$\longrightarrow m\cancel{G}s^2\cancel{e^{st}} + K\cancel{G}\cancel{e^{st}} = 0 \longrightarrow ms^2 + K = 0 \longrightarrow s^2 = -\frac{K}{m} = -\omega^2$$

$$\longrightarrow s_1, s_2 = \pm i\omega$$

$$\frac{K}{m} = \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \longrightarrow$$

ω: فرکانس دایره‌ای طبیعی (فرکانس)
ω مثبت است.

مثبت

$$\longrightarrow x = G_1 e^{i\omega t} + G_2 e^{-i\omega t}$$

$$,\ e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i\sin(\omega t)$$

$$\longrightarrow x_{(t)} = G_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + G_2(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$

$$\longrightarrow x(t) = \underbrace{(G_1+G_2)}_{B}\cos\omega t + \underbrace{i(G_1-G_2)}_{A}\sin\omega t$$

$$\Rightarrow x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$t=0 \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} B = x_0 \\ \dot{x}_0 = A\omega \longrightarrow A = \dfrac{\dot{x}_0}{\omega} \end{cases} \longrightarrow A, B = \checkmark$$

سرعت اولیه

$$\Longrightarrow \boxed{x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t}$$

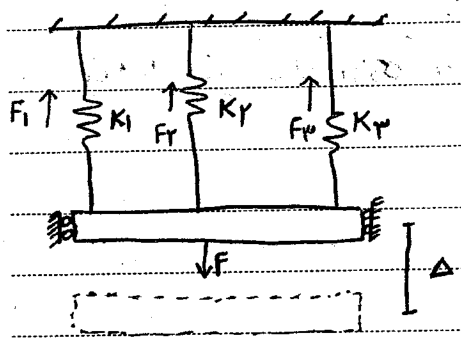
جواب

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

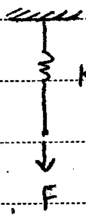
۲_ فنرهای معادل :

۱_ فنرهای موازی (Δ یکسان)



تعیین فنرهای معادل دو حالت خاص: (Δ یکسان)

* چندتا فنر داریم. نیروی F بگونه ای وارد می‌شود که Δ فنرها یکسان است. حال ۳ فنر را می‌خواهیم برداریم و یک فنر جاش بگذاریم و حال دنبال پیدا کردن سختی فنر معادل هستیم.



سختی فنر معادل

$F_1 = K_1 . \Delta$

$F_2 = K_2 . \Delta$

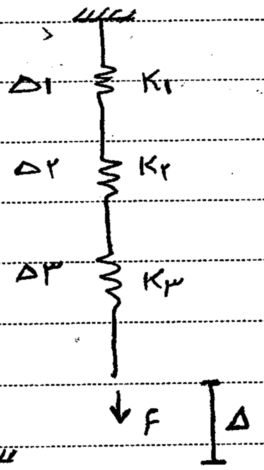
$\vdots$

$F = K^* . \Delta$ ②

$\sum F = F = (\sum K) . \Delta \longrightarrow F = (\sum K) . \Delta$ ①

$\xrightarrow{①,②} \boxed{K^* = \sum K}$

۲_ فنرهای سری (F یکسان)



$F = F_1 = K_1 \Delta_1 \longrightarrow \Delta_1 = \frac{F_1}{K_1} = \frac{F}{K_1}$

$F = F_2 = K_2 \Delta_2 \longrightarrow \Delta_2 = \frac{F_2}{K_2} = \frac{F}{K_2}$

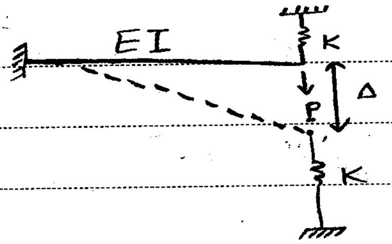
$\vdots$

$\Delta = \sum \Delta_i = F (\sum \frac{1}{K})$ ①

$F = K^* . \Delta$ ②

$\xrightarrow{①,②}$ ①: $\sum \frac{1}{K} = \frac{\Delta}{F}$ ②: $K^* = \frac{F}{\Delta}$ $\longrightarrow \boxed{\frac{1}{K^*} = \sum \frac{1}{K}}$

b)



$\Delta = cte$

$$K^* = K_1 + K_2 + K_3 = 2K + \frac{3EI}{l^3}$$

$$\longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2l^3K + 3EI}{l^3 . m}}$$

* سختی در یک نقطه خاص و در یک امتداد خاص باید مشخص شود.

* سری یا موازی بودن به نوع بارگذاری بستگی دارد. پس بهتر است Δ یکسان و F یکسان بلولیم

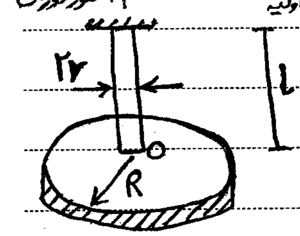
* در حالات بالا از دوران صرف نظر شده و فقط جابجایی قائم در نظر گرفته شده.

سختی برشی: سختی ناشی از حرکت عمود بر جسم (مقدار نیروی لازم برای جابجایی عمود بر جسم به اندازه واحد)

مثال ۲-۲:

حرکت دورانی: شتاب زاویه‌ای × تگر اینرسی جرمی نسبت به مرکز دوران = برآیند ممان‌های وارد بر سیستم

دیسکی تحت شرایط اولیه به ارتعاش در می‌آید. در صورتی که از وزن میله صرف نظر شود و جرم دیسک m باشد معادله ارتعاش و فرکانس آزاد سیستم را تعیین کنید. (دیسک در سطح افق حرکت می‌کند) (مدول الاستیسیته برشی میله G است). دیسک تحت اثر نیرو یا ممانی وارد حرکت می‌کند.



M_T: ممان مقاوم که از طرف میله به دیسک وارد می‌شود. پیچشی

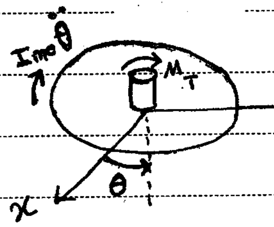
$$I_{mo} = \int_m r^2 dm = \frac{1}{2} mR^2$$

ممان اینرسی جرمی

J: ممان اینرسی قطبی میله نسبت به مرکز آن:

$J = \frac{\pi r^4}{2}$ — حرکت دورانی را بررسی می‌کنیم.

دیاگرام آزاد دینامیکی جسم:



$$\Sigma M_o = 0 \longrightarrow I_{mo}\ddot{\theta} + M_T = 0$$

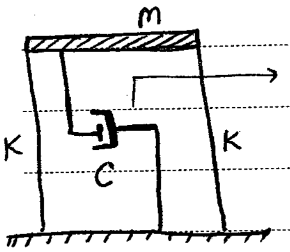
$$I_{mo} = \frac{1}{2} mR^2$$

$M_T = K_T . \theta$
سختی میله

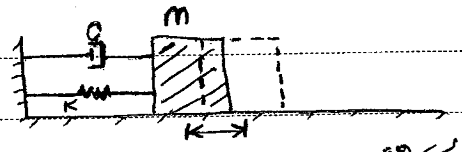
M_T - جلوگیری می‌کند از حرکت و مشابه فنر عمل می‌کند.

damping

۳- معادله ارتعاش با میرایی : جرم را تحت شرایط اولیه به حرکت وا می‌داریم:



مدلسازی



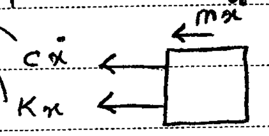
قاب یک درجه آزادی

منفی‌های نیروی اینرسی هم همواره خلاف جهت حرکت است.

دیاگرام آزاد دینامیکی جسم

نیروی میراگر همواره در خلاف جهت حرکت است.

همواره مقاومت فنر یا ستون خلاف جهت حرکت مقاومت می‌کند.



حرکت

جهت نیروی میراگر خلاف جهت حرکت است و باعث استهلاک سیستم می‌شود.

- با آزمایش روی پیستون پر از مایع ویسکوز به این نتیجه رسیده‌اند که میرایی با سرعت رابطه مستقیم دارد. این میراگرها ویسکوز نام دارند. مایع ویسکوز داخل پیستون است و مقاومت میله (نفت) در اثر برخورد با مایع ویسکوز داخل پیستون باعث استهلاک انرژی می‌شود.

- چون میزان نیروی میراگر (ویسکوز) متناسب با سرعت است پس مقدار آن برابر $c\dot{x}$ است.

- می‌توان میراگرهای دیگری استفاده کرد که مقدار نیروی آن با مثلاً $\dot{x}^2$ متناسب است و ... ولی ما به این صورت را انتخاب کردیم یعنی متناسب است با سرعت.

- اگر جهت حرکت عوض می‌شد ← جهت نیروها برعکس می‌شد.

$\Sigma F=0$

$m\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=0 \longrightarrow$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ و همگن

فرض $x = Ge^{st}$, s و G = اعداد ثابت $\longrightarrow$ اگر چند تا s بدست آوردیم باید جواب‌ها را جمع کنیم.

$\rightarrow mGs^2e^{st}+cGse^{st}+KGe^{st}=0$

ξ: نسبت میرایی. زتا (بدون بعد) $\xi=\frac{c}{2m\omega}$

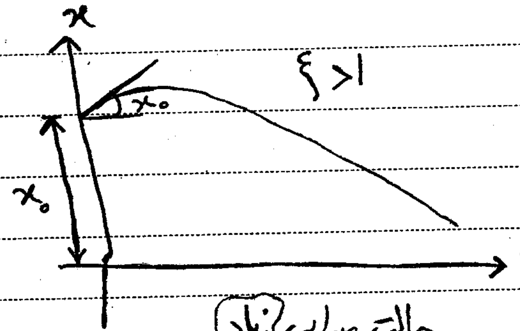
$\xrightarrow{\div m} s^2+\left(\frac{c}{m}\right)s+\overbrace{\left(\frac{K}{m}\right)}^{\omega^2}=0 \longrightarrow s^2+2\omega\xi s+\omega^2=0$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\xi\omega t}\left(G_1 e^{\omega^* t} + G_2 e^{-\omega^* t}\right)$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\xi\omega t}\left(A\sinh\omega^* t + B\cosh\omega^* t\right)$$

جواب در حالت میرایی زیاد

جمله $e^{-\xi\omega t}$ باعث استهلاک حرکت می‌شود. چون با افزایش t ، مقدار $x_{(t)}$ کم می‌شود.
اما این حرکت رفت و برگشتی نیست و به شکل زیر است.



جوابی که از آزمایشگاه بدست آورده بودیم ، حرکت رفت و برگشتی و مستهلک شونده بود پس این حالت جواب مسئله ما نیست.

حالت میرایی زیاد
over damping

منظور از زیاد یعنی بیشتر از یک است یا میرایی بالاتر از حد است.

۲- زیر رادیکال صفر باشد (میرایی حدی ، $\xi = 1$)

$$S_1 = S_2 = -\omega \longrightarrow x_{(t)} = G_1 e^{-\omega t} + G_2 t e^{-\omega t}$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\omega t}\left(G_1 + tG_2\right)$$

شرایط اولیه : $t=0$ $\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \begin{cases} G_1 = x_0 \\ G_2 = \dot{x}_0 + \omega x_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = e^{-\omega t}\left[x_0(1+\omega t) + \dot{x}_0 t\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

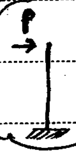
روابط مثلثاتی و هیپربولیک:

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

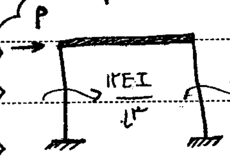
$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{x} = \sinh x + \cosh x \\ e^{-x} = \cosh x - \sinh x \end{cases}$$



$$K = \frac{3EI}{l^3} \rightarrow \Delta = \frac{Pl^3}{3EI}$$

نکته: سختی برشی یک قاب



$$\rightarrow \frac{12EI}{l^3} \rightarrow K_{\text{قاب}} = \frac{24EI}{l^3}$$

$$\rightarrow \Delta = \frac{P}{K} = \frac{P \times l^3}{24EI}$$

جواب در حالت میرایی کم:

$$x = e^{-\xi\omega t}\left(\frac{\dot{x}_0 + x_0\xi\omega}{\omega_D}\sin(\omega_D t) + x_0\cos(\omega_D t)\right)$$

شکل دیگر جواب:

$$x(t) = \rho\, \overbrace{e^{-\xi\omega t}}^{\text{حرکت مستهلک}}\, \overbrace{\cos(\omega_D t - \theta)}^{\text{حرکت رفت و برگشتی}}$$

$$\rho = \left[\left(\frac{\dot{x}_0 + x_0\xi\omega}{\omega_D}\right)^2 + x_0^2\right]^{1/2}, \quad \theta = \text{Arctan}\frac{\overbrace{\dot{x}_0 + x_0\xi\omega}^{\text{ضریب سینوس}}}{\underbrace{\omega_D x_0}_{\text{ضریب کسینوس}}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ضریب سینوس}}{\text{ضریب کسینوس}}$$

← این حرکت رفت و برگشتی و مستهلک شونده می‌باشد ← حرکت واقعی هم به همین صورت است

نتیجه: پس $\xi < 1$ باید باشد.

نکته: می‌توانیم $A\sin\theta + B\cos\theta$ را تبدیل به $P\cos\theta$ کنیم.

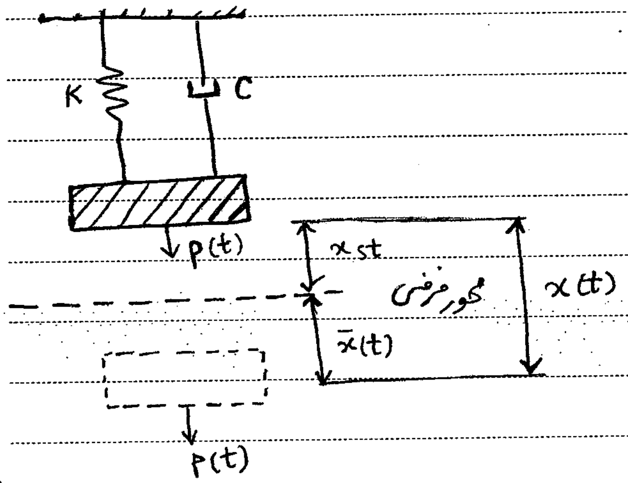
$$\rho = \sqrt{\left(\text{ضریب سینوس}\right)^2 + \left(\text{ضریب کسینوس}\right)^2}$$

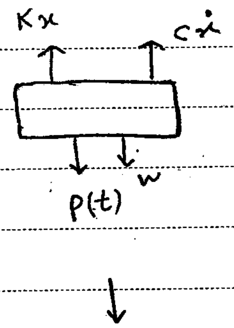
پس در نظر گرفتن میرایی باعث تفاوت ناچیز ω_n و ω_D می‌شود. به ξ^2 برای همین ما از کاهش مختصر فرکانس در اثر میرایی صرف نظر می‌کنیم و همان $\sqrt{\frac{K}{m}}$ را برای ω در نظر می‌گیریم.

وقتی می‌گوییم فرکانس ما همان $\sqrt{\frac{K}{m}}$ است ولی در اصل به مقداری بخاطر ξ تفاوت دارند با مقدار واقعی.

۴- اثر وزن در ارتعاش (اثر در نظر گرفتن وزن در معادله دیفرانسیل ارتعاش):

به بسیار زیبا





دیاگرام آزاد دینامیکی:

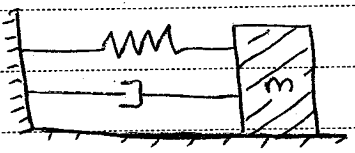
جهت حرکت.

نکته: $c\dot{x}$ و Kx و $P(t)$ و W نیروهایی هستند که وارد می‌شوند و قابل لمس هستند.

معادله دیفرانسیل حرکت: $-c\dot{x}-Kx+P(t)+W=m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=P(t)+W$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۲-۳: حرکت انتقالی آزاد:



$\omega = 5\ rad/s$

$\xi = 20\%$

$x_0 = 0$

$\dot{x}_0 = 20\ m/s$ → برای داشتن سرعت اولیه باید نیرو را به صورت ضربه وارد کنیم، اثر ضربه، سرعت اولیه می‌شود: $F \times t = m\Delta v$

* این مثال مربوط به قابی SDOF و یک طبقه است که به شکل جرم و فنر مدلسازی شده.

$\omega_D = ?$ ← نظیر حالت میرایی کم (زیرحد)

معادله ارتعاش = ?

* در جزوه صورت سؤال‌ها یه جدول هست که نسبت میرایی ξ برخی از سازه‌ها را آورده.

نکته: فرکانس طبیعی سازه ω نیست و ω_D است.

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 5\sqrt{1-(0.2)^2} = 4.9\ rad/s$$

$$\xrightarrow{\text{جایگزاری می‌کنیم}} x = e^{-\xi\omega t}\left(\frac{\dot{x}_0 + x_0\xi\omega}{\omega_D}\sin\omega_D t + x_0\cos\omega_D t\right)$$

$$\xrightarrow[\dot{x}_0=20]{\xi=0.2 \text{ و } x_0=0} x_{(t)} = 4.08\, e^{-t}\sin(4.9t)$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = e^{\xi\omega t_D} \rightarrow \ln\frac{x_1}{x_2} = \xi\omega\,\frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \simeq 2\pi\xi$$

$\simeq 1$

روش تجربی برای پیدا کردن ξ یک سیستم.

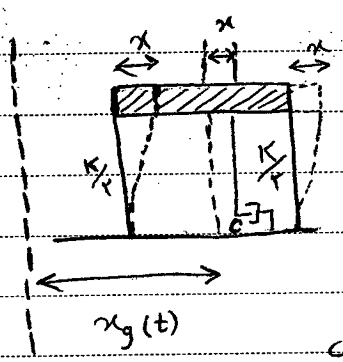
$$\rightarrow \boxed{\xi = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{x_1}{x_2}} \qquad \xi \simeq 2-3\%$$

بعضی وقتها برعکس عمل می‌کنیم مانند مثال ۴-۲. در این نوع مثال ها سیستم ها را شناسایی می‌کنیم که به این کار شناسایی سیستم ها می‌گویند و طریقه حل به این صورت است که رفتار سیستم را ما داریم و باید ماتریس سختی و میرایی و ... آن که از مشخصات سیستم هستند را بدست آوریم.
منظور از رفتار، جابجایی ها در واحد زمان، تنش ها و ... هستند.

حرکت آزاد SDOF تمام شد.

II ارتعاش اجباری: در این حرکت سیستم تحت اثر نیروی خارجی به ارتعاش در می‌آید. مانند زلزله یا نیروهای باد یا امواج یا حرکات ترافیک روی جاده و ...

۱- اثر زلزله:



محور ثابت؛ وضعیت محور قاب در لحظه $t=0$ (قبل از حرکت زمین)

زلزله باعث دو جابه جایی می‌شود: ۱- جابه جایی خود زمین ۲- جابه جایی محلی خود قاب.

① جابه جایی محلی قاب $x_{(t)}$

② جابه جایی زمین $x_g(t)$

جابه جایی کل: $x^t_{(t)} = x_g(t) + x(t)$

قاب نسبت به زمین حالت صلب کامل ندارد (الاستیک) ← تولید جابه جایی دیگری که مربوط به قاب است که با x نام گذاری می‌کنیم.

* اگر قاب نسبت به زمین صلب بود ← نیروی اینرسی $= m\ddot{x}_g(t)$

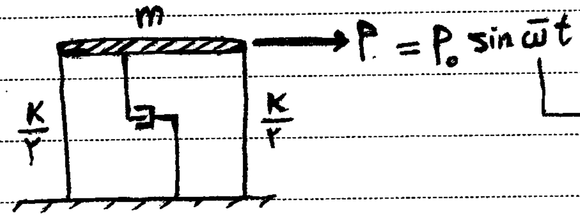
PAPCO

* همواره اینرسی برابر است با حاصل ضرب جرم × شتاب کل.

نیروی اینرسی $= m(\ddot{x}^t_{(t)}) = m(\ddot{x}_g(t) + \ddot{x}(t))$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲- بررسی نیروی سینوسی:



فرکانس نیروی خارجی

معادله دیفرانسیل حرکت: $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = P_0 \sin \bar{\omega} t$

جواب عمومی:

$$x = \underset{\text{جواب خصوصی}}{x_p} + \underset{\text{جواب عمومی}}{x_c} \longrightarrow x_c = e^{-\xi\omega t}\left(A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t\right)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{P_0}{m}\sin \bar{\omega} t$$

* می‌دانیم: $\xi = \frac{c}{2m\omega}$, $\frac{K}{m} = \omega^2$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{P_0}{m}\sin \bar{\omega} t \quad (I)$$

$$x_p = G_1 \sin \bar{\omega} t + G_2 \cos \bar{\omega} t \quad (II)$$ جواب خصوصی

با جایگذاری x_p در معادله فوق:

نسبت فرکانسها $= \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$

$$(I),(II) \longrightarrow \begin{cases} G_1 = \frac{P_0}{K} \cdot \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \\ G_2 = \frac{P_0}{K} \cdot \frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \end{cases}$$

غیرهمگن

حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت :

$y'' + ay' + by = f(x)$

جواب = $\underbrace{y_p}_{\text{جواب خصوصی}} + \underbrace{y_g}_{\text{جواب عمومی}}$

برای جواب عمومی ولی 6 $f(x)$ را برابر صفر قرار داده و مانند معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ همگن باضرایب ثابت حل می‌کنیم و جواب را بدست می‌آوریم.

y_p (جواب خصوصی) بستگی به $f(x)$ دارد. حالتهای زیر را برای $f(x)$ بررسی می‌کنیم و این حالتها را در قالب مثال توضیح می‌دهیم :

۱- معادله غیرهمگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت زیر را حل کنید.

$y'' - 2y' + y = 2x + 1$

برای حل ابتدا جواب همگن معادله را بدست می‌آوریم :

$y'' - 2y' + y = 0 \longrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \longrightarrow \Delta = 4 - 4 = 0$

$\longrightarrow m = 1 \longrightarrow$ ریشه مضاعف

$\longrightarrow y_g = c_1 e^x + c_2 x e^x$

حال جواب خصوصی را بدست می‌آوریم :

$f(x) = 2x + 1$

چون $f(x)$ یک چند جمله ای از درجه 1 است پس جواب خصوصی را بصورت $y_p(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم.

$y_p(x)$ را در معادله قرار می‌دهیم :

$m_{1,2}=\alpha\pm\beta i \rightarrow y_g = e^{\alpha x}(c_1\sin\beta x + c_2\cos\beta x)$

Subject:
Year. Month: Date. ( )

مثال ۳:

$y'' + y = \sin 2x$

جواب عمومی: $m^2+1=0 \rightarrow m=\pm i \rightarrow y = c_1\sin x + c_2\cos x$

$\alpha=0$
$\beta=\pm 1$

چون $f(x)=\sin 2x$ است. جواب خصوصی حالت غیرهمگن را به فرم کلی زیر در نظر می‌گیریم:

$y_p(x) = A\sin 2x + B\cos 2x$

$\rightarrow (A\sin 2x + B\cos 2x)'' + A\sin 2x + B\cos 2x = \sin 2x$

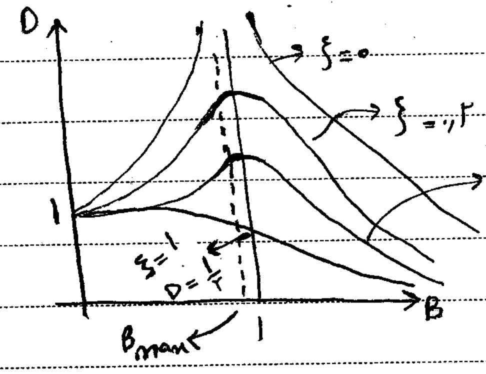
$\rightarrow -3A\sin 2x - 3B\cos 2x = \sin 2x$

$\rightarrow \begin{cases} -3A=1 \\ -3B=0 \end{cases} \rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{3}\sin 2x$

$\rightarrow$ جواب نهایی: $y = c_1\sin x + c_2\cos x - \frac{1}{3}\sin 2x$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



نکته: هرچه ξ کمتر شود، تأثیرات هگامی بیشتر است.

نکته: وقتی جرم سازه کم باشد، نمی‌توان راجع به ξ صحبت کرد. اتصالات بیشتر مؤثر است.

نکته: نیروی زلزله شامل مجموعه ای از نیروهای سینوسی با فرکانس های مختلف است که اگر یکی از این فرکانس های نیروی زلزله با یکی از فرکانس های سیستم نزدیک شود پدیده تشدید اتفاق می افتد. و همچنین ما زلزله ای که قرار است به سازه اثر کند را به درستی نمی شناسیم حال چطور می توانیم از پدیده تشدید جلوگیری کنیم.

می توانیم بگوییم رنج فرکانس های یک منطقه حدود ω^* است. و رنج فرکانس یک ساختمان هم که قرار است بسازیم ω^* است. حال باید بر اساس احتمال این دو را دور کنیم از هم.
فرکانس نیروی زلزله را نمی توانیم تغییر بدهیم ولی فرکانس سیستم را تا حدودی می توانیم تغییر بدهیم.
$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$. با تغییر سختی سازه یا تغییر جرم سازه می توانیم فرکانس را تغییر بدهیم. با انتخاب تعداد طبقات می توانیم تا حدودی m را تغییر بدهیم حتی ممکن است اون زلزله مورد نظر اتفاق نیفتد.
در کل این بحث بسیار مشکل است چون غیر قابل پیش بینی است. به همین دلیل ما سعی می کنیم تشدید رخ ندهد و به طور قطعی نمی توانیم نظر بدهیم. از ۴۰ سال پیش تا به حال سعی شده تا سیستم آنلاین بسازند یعنی مشخصات سیستم آنلاین تغییر می کند. مثلاً فرض کنید ۴ تا نبشی درون یک باکس باشد. ما طوری طراحی می کنیم که در هنگام زلزله مثلاً ۳ تا نبشی عمل کنند با یک سیستم الکترونیک یا مثلاً ۲ تا از نبشی ها عمل کند. این که ما بتوانیم به طور آنلاین سختی سیستم را عوض کنیم اولین بحثی است که در کنترل سازه ها مطرح شده.

می خواهیم بدانیم به ازای چه β، D ماکزیمم می شود. به ازای هگامی یا تشدید D ماکزیمم می شود. برای همین از D نسبت به β مشتق می گیریم و برابر صفر قرار می دهیم.

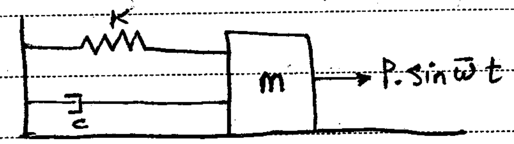
$$\frac{dD}{d\beta}=0 \longrightarrow \beta_{max}=\sqrt{1-2\xi^2} \longrightarrow D_{max}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

β ← نظیر D_{max} .

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جوابهای ما تابع هر تعداد فرکانس متناظر با درجات آزادی است که انتخاب کرده‌ایم. مثلاً اگر ۸ درجه آزادی داشتیم، ۸ فرکانس تشدید خواهیم داشت. یعنی اگر فرکانس نیروی زلزله با هرکدوم از این ۸ فرکانس برابر یا نزدیک باشد، پدیده تشدید رخ می‌دهد.

مثال ۱-۳: حرکت SDOF تحت اثر بار سینوسی:



(a) $\rho_{res} = ?$ → با هم متفاوتند

(b) $\rho_{max} = ?$

- قسمت دائم جواب را در نظر بگیرید.

$K = 45\ N/cm = 4500\ N/m$

$C = 60\ \frac{N.sec}{m}$ → واحد c $\quad c\dot{x} = F_D \to [c] = \frac{N}{m/s} = \frac{N.s}{m}$

$P_0 = 25\,N$

$W = 49\,N \to m = \frac{49}{9.8}\ kg$

a) $\rho_{res} = D_{res}\frac{P_0}{K} \to D_{res} = \frac{1}{2\xi}, \quad \xi = \frac{C}{2m\omega}$

برای بدست آوردن ω ← K باید برحسب m باشد.

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{4500}{49/9.8}} = 30\ rad/s$ جابه‌جایی دینامیکی ۲.۵ برابر جابه‌جایی استاتیکی است.

$C_{cr} = 2m\omega = 2\left(\frac{49}{9.8}\right)(30) = 300\ N.sec/m$

$\xi = \frac{60}{300} = 0.2 \to D_{res} = \frac{1}{2\times 0.2} = 2.5 \to \rho_{res} = 2.5\left(\frac{25}{45}\right) = 1.39\,cm$

در حالت تشدید

دامنه جواب

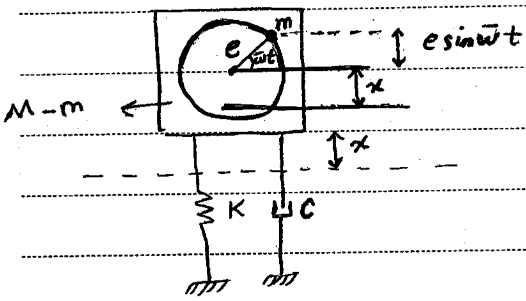
b)

$\rho_{max} = D_{max}\frac{P_0}{K}$

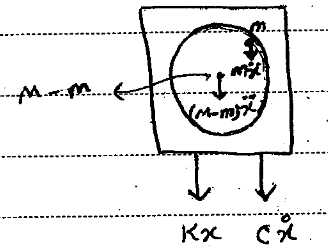
$D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{2\times 0.2\sqrt{1-0.2^2}} = 2.55 \to \rho_{max} = \frac{25}{45}\times 2.55 = 1.42\,cm$

(دوران جرم m)

در اثر حرکت موتور تیر به ارتعاش درمی‌آید. حال می‌خواهیم ماکزیمم جابه‌جایی را در وسط تیر بدست آوریم.



a: مدل



b: دیاگرام آزاد مدل

$x_1 = x + e\sin\bar{\omega}t$

جابه‌جایی تیر در یک لحظه: x و جابه‌جایی قائم جرم m در لحظه دلخواه t: x_1

$$\uparrow \sum F = 0 \longrightarrow (M-m)\ddot{x} + m\ddot{x}_1 + c\dot{x} + Kx = 0$$

$$x_1 = x + e\sin\bar{\omega}t \longrightarrow \ddot{x}_1 = \ddot{x} - e\bar{\omega}^2\sin\bar{\omega}t$$

$$\rightarrow \underbrace{(M-m)\ddot{x} + m(\ddot{x} - e\bar{\omega}^2\sin\bar{\omega}t)}_{\text{نیروهای اینرسی وارد بر تیر}} + c\dot{x} + Kx = 0$$

$$\rightarrow M\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = \underbrace{me\bar{\omega}^2}_{P_0}\sin\bar{\omega}t \rightarrow M\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = P_0\sin\bar{\omega}t$$

از روی معادله حرکت جابه‌جایی ماکس را پیدا می‌کنیم.

$$P = \frac{P_0}{K}\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]^{-1/2}$$

نکته: عدم انطباق مرکز جرم و مرکز سطح باعث بوجود آمدن نیروی $P_0\sin\bar{\omega}t$ شده.

* سیستم تحت نیروی سینوسی را قبلاً حل کردیم.

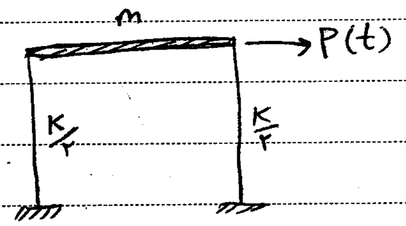
Subject:
Year. Month. Date. ( )

۳- نیروی غیر مشخص: نیرویی که غیر مشخص است و نتوان با رابطه ریاضی تعریف کرد

۱- اثر ضربه (بدون میرایی):

نکته: نیروی سینوسی نیز یک نیروی غیر مشخص بود ولی بخاطر اهمیت اول بررسی کردیم.

ضربه یک نیرویی است که در مدت بسیار کوتاه به سازه اعمال می‌شود.



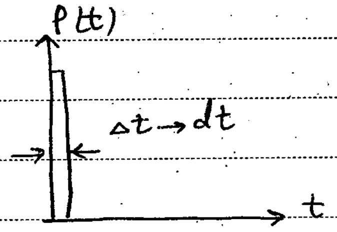
$$m\,(\Delta V) = P_{(t)}\,\Delta t$$

جرم × تفاضل دو سرعت قبل از ضربه و بعد از ضربه = شدت نیروی ضربه × مدت زمان اثر نیروی ضربه

اگر قبل از ضربه سیستم سرعتی نداشته باشد: $m\dot{x}_0 = P(t)\cdot\Delta t$

$\dot{x}_0$: سرعت پس از وارد شدن ضربه (سرعت اولیه) است.

$$\dot{x}_0 = \frac{P(t)\cdot\Delta t}{m}$$



فرض کنید در لحظه $t=0$

$x_0 = 0$ و $\dot{x}_0 = 0$

پس از اعمال ضربه حرکت آزاد است:

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t + \cancel{x_0}\cos\omega t$$

PAPCO

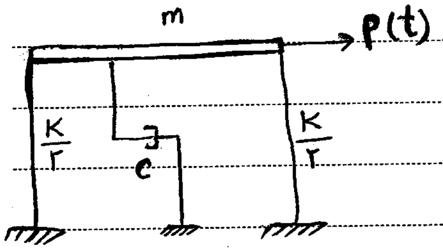
$$\Rightarrow x = \frac{P(t)\cdot\Delta t}{m\omega}\sin\omega t$$

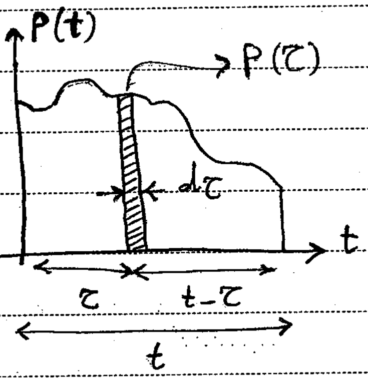
معادله حرکت آزاد

حداکثر دامنه حرکت

۳_ اثر بار غیر مشخص ، انتگرال دوهامل :

DUHAMEL Integral





$$x = \frac{P(t)\cdot\Delta t}{m\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sin\omega_D t$$: از حالت قبل داریم

نیروی غیر مشخص را تبدیل می کنیم به تعدادی ضربه . به عبارت دیگر مجموعه ای از ضربه های متوالی به سیستم وارد می شود .

حال یک از این ضربه ها که در زمان $\tau = t$ اتفاق افتاده را در نظر می گیریم . مقدار نیروی خارجی در این لحظه برابر $P(\tau)$ است . چون هر بار بیست و یک دیفرانسیلی از بار است جابجایی هم برابر dx است . در اثر یک ضربه جواب را داریم که در بالا نوشته ام .

این جواب یه مشکلی دارد . شکل این مثال با حالت قبل فرق دارد . در حالت قبل ما رابطه را برای وقتی بدست آوردیم که نیرو در لحظه صفر وارد شده بود . ولی الان در لحظه $\tau = t$ ضربه اثر کرده . برای همین باید از t ، τ را کم کنیم تا رابطه درست شود .

$$dx = \frac{P(\tau)\, d\tau}{m\cdot\omega_D} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)$$ (جواب در اثر $P(\tau)d\tau$)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جواب: می‌توانیم بجای انتگرال گیری روی کل زمان، سرعت و جابجایی را در $t=\tau$ بدست آورده و از لحظهٔ τ به بعد که سیستم شامل یک حرکت آزاد بعلاوه یک نیرو می‌شود را باهم در نظر بگیریم چون تا وقتی که جابجایی‌ها در ناحیه خطی است می‌توانیم از اصل جمع آثار استفاده کنیم. به عبارت دیگر از صفر تا τ جابجایی می‌شود $\frac{\dot{x}_0(\tau)}{\omega_D}\sin\omega_D t + x_{0(\tau)}\cos\omega_D t$ و از τ به بعد اثر ضربات متوالی را در نظر می‌گیریم یعنی:

$$dx = \frac{P(\tau)\,d\tau}{m\omega_D} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau) + \frac{\dot{x}(\tau)}{\omega_D}\sin\omega_D t + x(\tau)\cos\omega_D t$$

سؤال: حال اگر مثلاً چندتا ضربه وارد شود و جابجایی را بخواهیم باید چه کنیم؟

جواب: دو راه وجود دارد:

۱- مثلاً دو ضربه وارد شده در زمان‌های $t=2s$ و $t=3s$. حال جابجایی در $t=5s$ را می‌خواهد. ما باید اثر دو ضربه را جدا جدا بررسی کنیم و سپس جمع کنیم و در انتها زمان $5s$ را قرار دهیم. (قانون جمع آثار)

۲- اثر ضربه اول یک جابجایی و یک سرعت اولیه در $t=2s$ می‌دهد و از این به بعد حرکت آزاد است. به همین دلیل رابطه حرکت آزاد را می‌نویسیم حال در $t=3s$ تحت ضربه دوم قرار می‌گیرد که اثر ضربه دوم را هم جمع می‌کنیم.

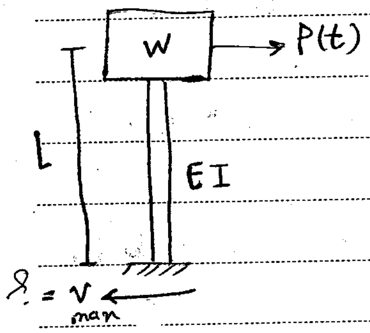
نکته: تفاوت نیروی ضربه‌ای و حالتی که نیرو به صورت استاتیکی گذاشته می‌شود و برداشته نمی‌شود این است که در هر صورت نیروی ضربه‌ای در یک بازه زمانی وجود دارد و در آخر اثرش برای ما مهم است که همان سرعت اولیه است ولی نیروی استاتیکی برداشته نمی‌شود و همواره هست و نیروی ضربه‌ای برداشته می‌شود بعد از t ثانیه

نتیجه: هروقت نیرو برحسب $\underbrace{t}_{\text{و بازه بدهد برای } t}$ بدهد باید از انتگرال دوهامل استفاده کنیم.

مثال ۴-۲ - حرکت SDOF اثر ضربه.

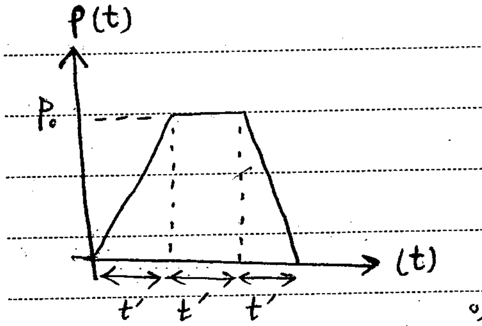
- حداکثر برش پایه = ؟

- کل نیرو را با یک ضربه مدل سازی کنید.



یه جرمی را در یک ارتفاعی قرار دادیم و به این جرم یک ضربه وارد می‌کنیم که شکل ضربه به ذوزنقه‌ای مانند شکل می‌باشد.

این ضربه در ۰٫۳ ثانیه اثر می‌کند.



$t' = 0.1\ s$

صورت سؤال گفته کل نیرو را یک ضربه در نظر بگیرید.
اگر یک ضربه در نظر بگیریم دیگر انتگرال نمی‌خواهد.

شتاب زلزله که به سازه از طریق زمین می‌دهد

$$\underbrace{m\ddot{x}}_{\text{نیروی اینرسی}} + \underbrace{Kx}_{\text{برش}} = 0$$

معادله دیفرانسیل حرکت آزاد بدون میرایی

$P_0 = 50\ KN$

$K = \frac{3EI}{L^3} = 51.1\ KN/cm$

$W = 5078\ KN \rightarrow m = \frac{5078}{9.81} = 517.6\ Kg$

از انتگرال استفاده نکردیم چون نیرو با یک ضربه مدل شد

$x = \frac{P(t) \cdot \Delta t}{m\omega} \sin \omega t \longrightarrow \max(x) = \frac{P(t) \cdot \Delta t}{m\omega}$

$\omega = \sqrt{\frac{51.1 \times 100}{57}} = 3.14\ rad/sec$

جابجایی ماکسیمم سیستم

برش پایه حاصل ضرب ماکزیمم x در سختی سازه است.

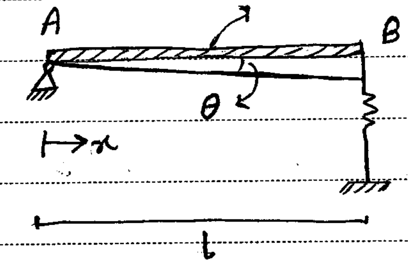
مساحت ذوزنقه

$\max(x) = \frac{50 \times (0.3 + 0.1) \times 0.5}{57.1 \times 3.14} = 0.00615\ m = 0.615\ cm$

$V \longrightarrow$ (حداکثر برش پایه) $= K \cdot x_{max} = 0.615 \times (51.1) = 31.4\ KN$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲ـ حل یک مثال با قانون نیوتن و کار مجازی :



ـ معادله دیفرانسیل حرکت برحسب θ = ?

* جرم واحد طول $= m$

● قانون نیوتن :

قانون نیوتن در حالتی که دوران را بررسی می‌کنیم

$\sum_A M = 0$

برآیند ممان های وارد بر یک سیستم برابر با : قانون نیوتن برای حرکات دورانی.

$I_{m_0}\ddot{\theta}$

برآیند نیروهای وارد بر یک سیستم برابر با : قانون نیوتن برای حرکات انتقالی

$\sum m\ddot{x}$

$I_{m_A}\ddot{\theta} + K(L^2\theta) = 0$

$\rho \times A \times 1 =$ جرم واحد طول

جرم واحد طول

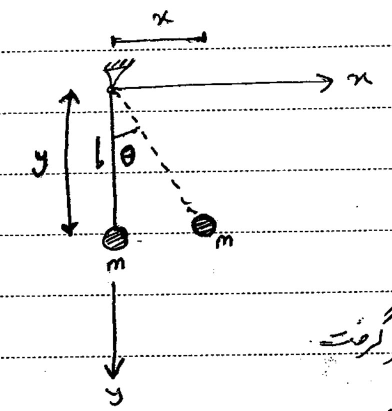
$I_{m_A} = \int_A r^2 dm = \int_0^L x^2 (m\, dx) = \frac{mL^3}{3}$

گشتاور اینرسی حرکت

$\longrightarrow \frac{mL^3}{3}\ddot{\theta} + KL^2\theta = 0 \longrightarrow \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + KL\theta = 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۳_ تعریف مختصات تغییرمکان و مختصات کلی :



$x = l\sin\theta$, $x^2+y^2=l^2$; (طول میله ثابت)

$y = l\cos\theta$

موقعیت

برای تعیین جرم m می‌توان x و y را انتخاب کرد و یا پارامتر θ را درنظر گرفت.

به x و y مختصات تغییرمکان یا محلی و به θ مختصات کلی گویند.

یا تعمیم یافته

بنابراین :

مختصات کلی حداقل تعداد پارامترهای (مستقل) لازم جهت تعیین موقعیت سیستم می‌باشد.

هدف از مختصات کلی کم کردن روابط و محاسبات است با یک تغییر متغیر.

مثلاً وقتی یک سیستم یک درجه آزاد است با چند تا جرم برای راحتی از مختصات کلی استفاده می‌کنیم.

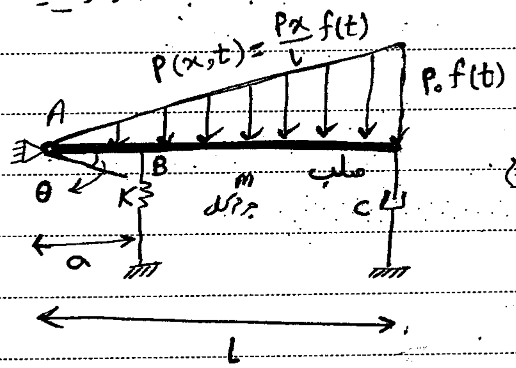
معادله دیفرانسیل

* هدف از * مقایسه با حالت قبل است.

$$m^*\ddot{x} + c^*\dot{x} + k^*x = P^*(t)$$

ام کوچک یا بزرگ و بخش می‌گیریم جرم در مختصات کلی — میرایی در مختصات کلی — سفتی در مختصات کلی — نیروی خارجی در مختصات کلی

مثال ۵_۱_ حرکت SDOF با پوشش بارهای معادله دیفرانسیل حرکت را برحسب θ بنویسید.



_ اثر خاک روی سیستم را با فنر مدل‌سازی می‌کنیم.

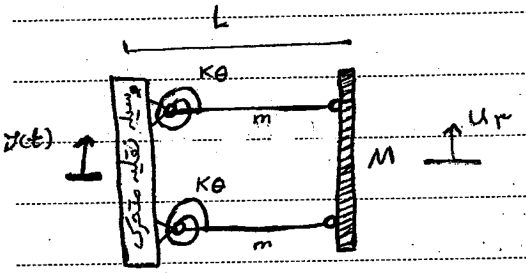
_ خاک دارای میرایی است. پس یک میراگر می‌گذاریم.

_ سازه روبرو یک سازه مدفون در خاک است.

$$m^* , c^* , k^* = ?$$

مثال: ۵-۲ حرکت SDOF _ روش کار مجازی

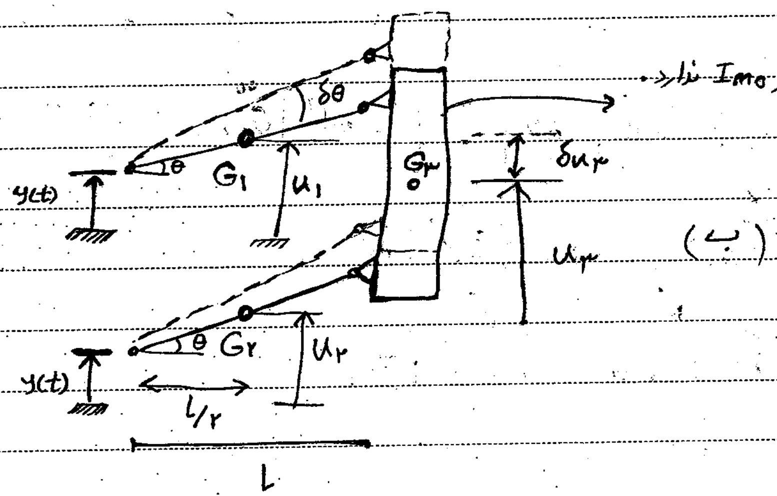
معادله دیفرانسیل حرکت جرم m را برای حرکت دورانی کوچک میله‌ها بنویسید. حرکت دورانی جرم m را ناچیز فرض کنید.



شکل روبرو شامل یک جرم است که به کمک های کابل جرثقیل متصل است

تغییرمکان وسیله نقلیه $y(t)$ معلوم فرض می‌شود. دو فنر پیچشی با سختی $K\theta$ در نقاط اتصال میله‌ها به بدنه وسیله نقلیه تعبیه شده‌اند. با صرف نظر کردن از نیروی جاذبه و نیروهای میرایی و با فرض اینکه تغییرمکان های میله‌ها به اندازه کافی کوچک هستند، معادله حرکت وسیله نقلیه را برحسب تغییرمکان $y(t)$ بدست آورید.

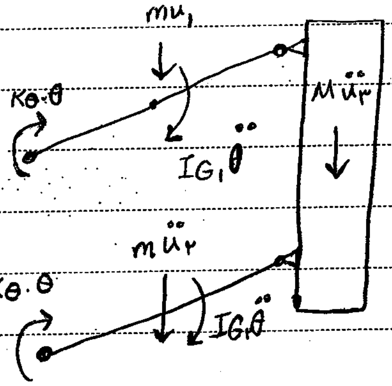
زاویه ای



* جرم متمرکز است و I_{mo} ندارد.

(ب)

$$
* \begin{cases}
u_1 = u_2 = y(t) + \frac{L}{2}\theta \\
\delta u_1 = \delta u_2 = \frac{L}{2}\delta\theta \\
u_3 = y(t) + L\theta \\
\delta u_3 = L\delta\theta
\end{cases}
$$



(ج)

نکته: تعداد فرکانس‌های یک سیستم به تعداد درجات آزادی سیستم است.

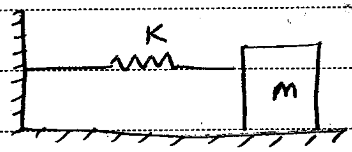
Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته: روش کار مجازی دقیقاً جوابهای نیوتن را می‌دهد و از نظر حجم عملیات که روش یکسان هستند. تنها در شرایطی که چند جرم در سیستم داریم احتمال اشتباه در روش کار مجازی کمتر است.

نکته: فرکانس اصلی، فرکانسی است که بیشترین تأثیر را در پاسخ داشته باشد. روش ریلی یک روش تقریبی برای تعیین فرکانس اصلی سیستم است. (با هر چند درجه آزادی)

۵- روش ریلی:

۱- روش انرژی برای تعیین معادله دیفرانسیل حرکت سیستم جرم فنر:



با استفاده از اصل بقای انرژی معادله دیفرانسیل حرکت نوشته می‌شود: $P+T=cte$

نکته: پس روش ریلی مقدار تقریبی فرکانس یک سیستم با هر درجه آزادی را می‌دهد.

P: انرژی پتانسیل $= \frac{1}{2} Kx^2$

$\longrightarrow P+T=cte \Rightarrow \frac{1}{2} Kx^2+\frac{1}{2} m\dot{x}^2=cte$

T: 〃 جنبشی $= \frac{1}{2} m\dot{x}^2$

یکبار مشتق می‌گیریم: $m\dot{x}\ddot{x}+Kx\dot{x}=0$

$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x}+Kx=0}$

PAPCO

را در روابط قرار می‌دهیم $\sin\omega t = 1$

$$P = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{(EI)^2(\psi''\sin\omega t)^2}{EI}\,dx$$

$$\rightarrow P_{max} = \frac{1}{2}\int_0^L EI\,\psi''^2\,dx$$

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \underbrace{(m\,dx)}_{\text{جرم}}\dot{u}^2 \quad , \quad \dot{u} = \omega\,\psi(x)\cos\omega t \rightarrow \dot{u}_{max} = \omega\,\psi(x)$$

$$T_{max} = \frac{1}{2}\int_0^L (m\,dx)(\psi\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2\int_0^L m\,\psi^2\,dx$$

وقتی $\cos\omega t = 1 \rightarrow T_{max}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^L EI\,\psi''^2\,dx = \frac{1}{2}\omega^2\int_0^L m\,\psi^2\,dx$$

$$P_{max} = T_{max} \Longrightarrow \omega^2 = \frac{\int_0^L EI\,\psi''^2\,dx}{\int_0^L m\,\psi^2\,dx}$$

جرم واحد طول ← m

* صورت تابعی از انرژی پتانسیل.
* مخرج " " " سینتیک
* انتگرال گیری باید در طول تیر انجام شود.

نکته: جواب فرکانس برای تابع شکل‌های متفاوت خیلی اختلاف زیادی ندارند.

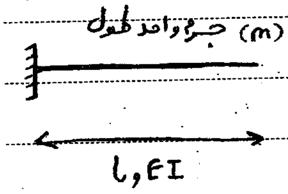
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$P_{max} = \frac{1}{2}(M_1 g)\, y_1 + \frac{1}{2}(M_2 g)\, y_2 = \frac{1}{2} g \sum M y$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} M_1 (\omega y_1)^2 + \frac{1}{2} M_2 (\omega y_2)^2 \longrightarrow \omega^2 = g \frac{\sum M y}{\sum M y^2}$$

نکته: اگر فنر هم داشته باشیم ← صورت باید با $\frac{1}{2}Kx^2$ جمع شود. (قبل از ساده کردن رابطه)

مثال ۶-۱: روش ریلی - جرم گسترده



فرض کنید:

$$(1)\quad \psi(x) = a\left[\frac{3}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

$\omega = ?$ ⇐

$$(2)\quad \psi(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$1)\quad \omega^2 = \frac{EI\int_0^l \psi''^2\, dx}{m\int_0^l \psi^2\, dx}$$

$$\psi' = a\left(\frac{3}{L^2}x - \frac{3}{2L^3}x^2\right) \longrightarrow \psi'' = a\left(\frac{3}{L^2} - \frac{3}{L^3}x\right)$$

$$\omega^2 = \frac{EI\int_0^L a^2\left(\frac{3}{L^2} - \frac{3}{L^3}x\right)^2 dx}{m\int_0^L a^2\left[\frac{3}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]^2 dx} = \frac{3EI/L^3}{\frac{33}{140}mL} = 12.72\,\frac{EI}{mL^4}$$

$$\longrightarrow \omega = 3.56\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

$$2)\quad \psi' = \frac{2x}{L^2} \longrightarrow \psi'' = \frac{2}{L^2}$$

$$\omega^2 = \frac{EI\int_0^l \left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx}{\int_0^l m\left(\frac{x}{L}\right)^4 dx} = \frac{20EI}{mL^4} \longrightarrow \omega = 4.47\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

PAPCO

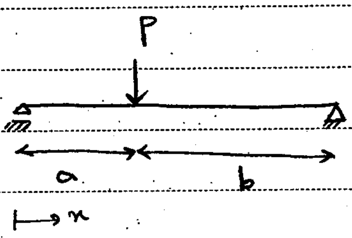
جواب کوچکتر به مقدار حقیقی $\omega = 3.52\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$ نزدیکتر است.

$$\omega^2 = 9.81 \frac{(2250 \times 1.0372 + 1350 \times 6.874)}{(2250 \times 1.0372^2 + 1350 \times 6.874^2)} EI = 1.046 \times 10^{-3} EI$$

نکته: چون جرم را برحسب N داده باید تقسیم بر ۹٫۸۱ کنیم تا برحسب kg بدست آید

$$\rightarrow \omega = 0.0323 \sqrt{EI}$$

محاسبه خیز تیر دو سر مفصل:



$$x < a \longrightarrow y = \frac{Pbx}{6EIL}(l^2 - x^2 - b^2)$$

$$x > a \longrightarrow y = \frac{Pa(l-x)(2lx - x^2 - b^2)}{6EIL}$$

$$x = l/2 \longrightarrow y = \frac{Pl^3}{48EI}$$

سفتی پیچشی:

$$\theta = \gamma = \frac{TL}{GJ} \longrightarrow \frac{TL}{GJ} = \frac{T}{K} \longrightarrow \boxed{K = \frac{GJ}{L}}$$

$$\theta = \frac{T}{K}$$

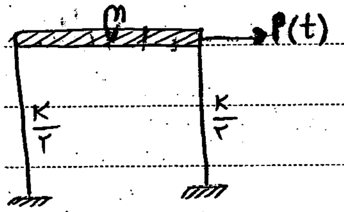
Subject:
Year. Month. Date. ( )

• حالت خاص:

* تابع فرد ← $P(-t) = -P(t)$ ← $a_0 = a_n = 0$

* تابع زوج ← $P(-t) = P(t)$ ← $b_n = 0$

۳- جواب SDOF در اثر بارهای تناوبی.



• بدون میرایی:

قسمت دائم جواب:

$$P = P_0 \cos \bar{\omega} t \rightarrow x = \frac{P_0}{K} \frac{1}{1-\beta^2} \cos \bar{\omega} t$$

توجه شود که $\xi = 0$ ←

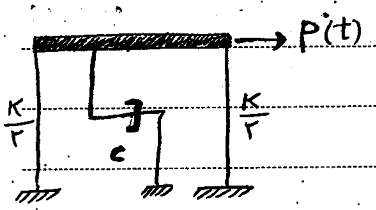
$$P = P_0 \sin \bar{\omega} t \rightarrow x = \frac{P_0}{K} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \bar{\omega} t$$

$$P = P_0 \rightarrow x = \frac{P_0}{K}$$

بنابراین:

$$x = \frac{1}{K}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_n^2)}\left(a_n \cos n\bar{\omega} t + b_n \sin n\bar{\omega} t\right)\right]$$

$$\beta_n = \frac{n\bar{\omega}}{\omega}$$



• با میرایی:

$$P(t) = P_0 \cos \bar{\omega} t \rightarrow$$

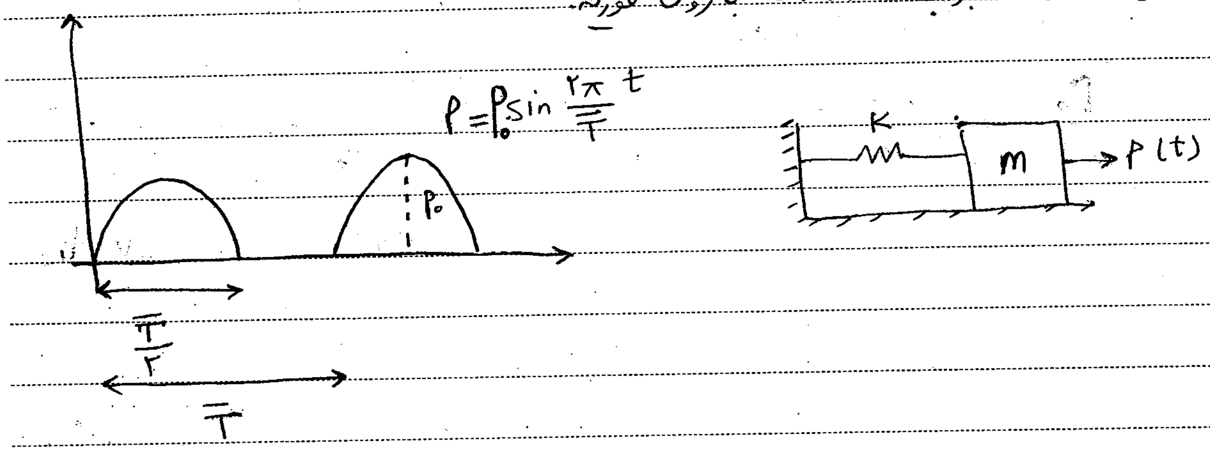
$$\rightarrow x = \frac{P_0}{K} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\left[2\xi\beta \sin \bar{\omega} t + (1-\beta^2) \cos \bar{\omega} t\right]$$

$$P(t) = P_0 \sin \bar{\omega} t \rightarrow x = \frac{P_0}{K} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2) \sin \bar{\omega} t - 2\xi\beta \cos \bar{\omega} t\right]$$

$$P(t) = P_0 \rightarrow x = \frac{P_0}{K}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۷-۲: جواب SDoF با روش فوریه



فرض: $\frac{T}{\bar{T}} = \frac{4}{3}$, $a_0 = \frac{1}{\bar{T}} \int_0^{\bar{T}} P(t)\, dt = \frac{1}{\bar{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} P_0 \sin \frac{2\pi}{T} t\, dt = \frac{P_0}{\pi}$

$a_n = \frac{2}{\bar{T}} \int_0^{\bar{T}} P(t) \cos n\bar{\omega} t\, dt = \frac{2}{\bar{T}} \int_0^{T/2} P_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left(t \cos \frac{2n\pi}{T} \right) t\, dt$

$= \begin{cases} 0 & n = \text{فرد} \\ \frac{P_0}{\pi} \cdot \frac{2}{1-n^2} & n = \text{زوج} \end{cases}$

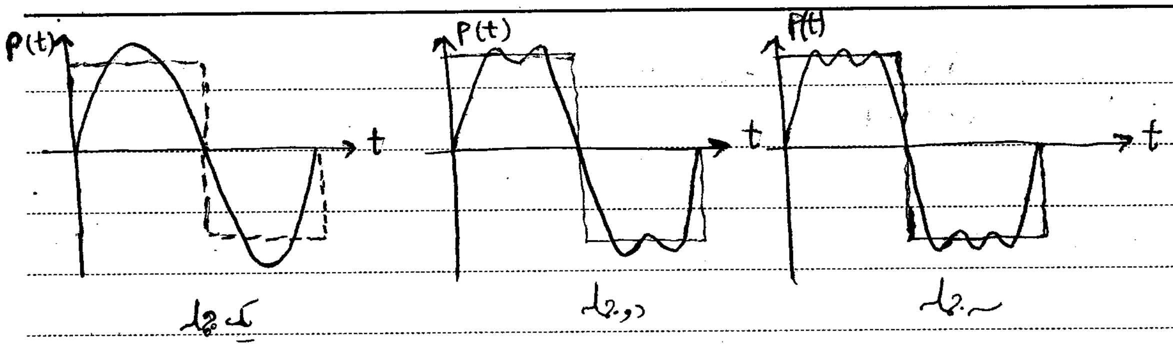
$b_n = \frac{2}{\bar{T}} \int_0^{\bar{T}} P(t) \sin n\bar{\omega} t\, dt = \frac{2}{\bar{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} P_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \sin \frac{2n\pi}{T} t\, dt$

$= \begin{cases} \frac{P_0}{2} & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$

$P(t) = \frac{P_0}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sin \bar{\omega} t - \frac{2}{3} \cos 2\bar{\omega} t - \frac{2}{15} \cos 4\bar{\omega} t - \dots \right)$

$\beta_1 = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{3}{4}$, $\beta_2 = \frac{2\bar{\omega}}{\omega} = \frac{3}{2}$, $\dots)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



جواب مطابق درس قبل:

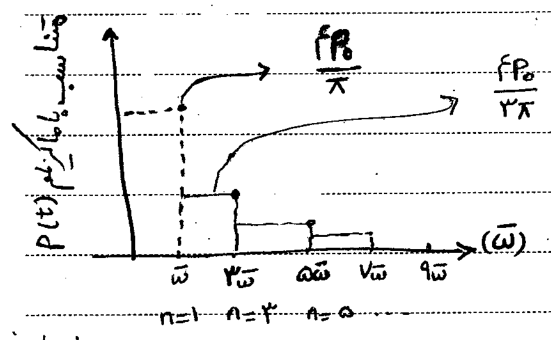
$$x=\frac{1}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{1-\beta_n^2}\sin n\bar{\omega}t=\frac{1}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{1-\beta_n^2}\sin n\bar{\omega}t$$

$$\rightarrow x=\frac{4P_0}{K\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\bar{\omega}t}{n(1-\beta_n^2)}\quad (n=\text{فرد})$$

$$P(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4P_0}{n\pi}\sin n\bar{\omega}t\longrightarrow P(t)=\sum_{n=1}^{\infty}P_n\sin n\bar{\omega}t$$

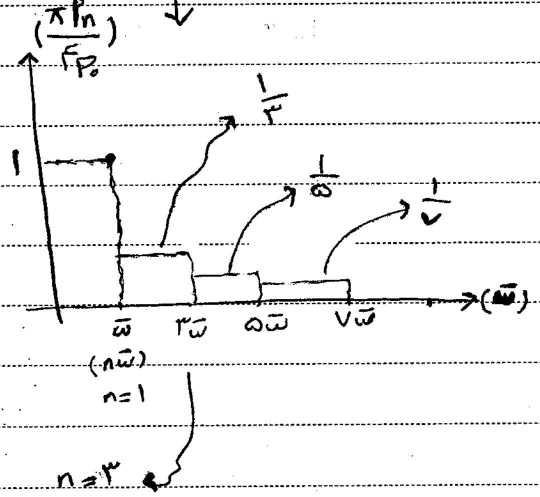
$$\Rightarrow P_n=\frac{4P_0}{n\pi}\longrightarrow\boxed{\frac{P_n\pi}{4P_0}=\frac{1}{n}}$$

این عبارت بخاطر این است که مرسوم است نمودار بدون بعد نوشته شود



n = اعداد فرد

(طیف نیروی خارجی)



Subject:
Year. Month. Date. ( )

۴- جواب SDOF در اثر بار تناوبی با استفاده از صورت نمایی سری فوریه:

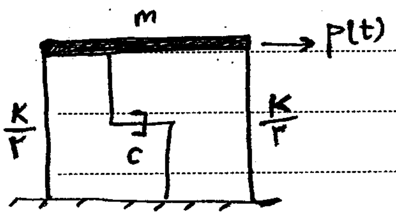
- با استفاده از روابط زیر (سری فوریه)، $P(t)$ را به صورت تابع نمایی می‌نویسیم:

$$\cos n\bar{\omega}t = \frac{1}{2}\left(e^{in\bar{\omega}t} + e^{-in\bar{\omega}t}\right)$$

$$\sin n\bar{\omega}t = \frac{i}{2}\left(e^{in\bar{\omega}t} - e^{-in\bar{\omega}t}\right)$$

شکل نمایی $p(t)$:

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\bar{\omega}t} \quad , \quad C_n = \frac{1}{T}\int_T P(t)\, e^{-in\bar{\omega}t}\, dt$$



$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n . e^{in\bar{\omega}t}$$

جواب در اثر یکی از جملات $p(t)$:

$$x = H(\bar{\omega})\, c\, e^{in\bar{\omega}t}$$

نتایج:

$$\begin{cases} x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, H(n\bar{\omega}) e^{in\bar{\omega}t} \\ H(n\bar{\omega}) = \dfrac{1}{K\left(n^2\beta_n^2 + 2in\beta_n\xi + 1\right)} \end{cases}$$

جواب = نیروی خارجی x تابع انتقال

ضریب

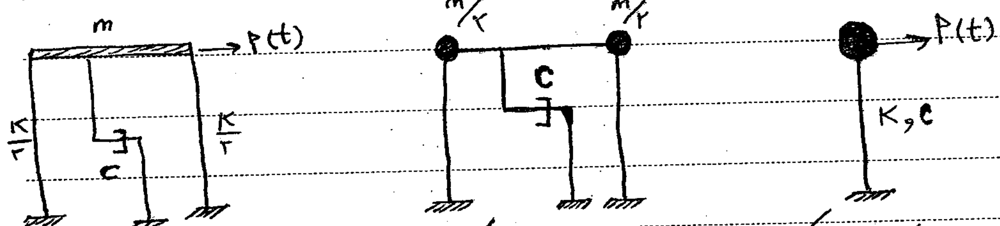
بخش ۲ مدل چند درجه سازه‌ها

Multi Degree of Freedom system (MDOF)

VIII - مدل چند درجه آزاد سازه‌ها حالت کلی.

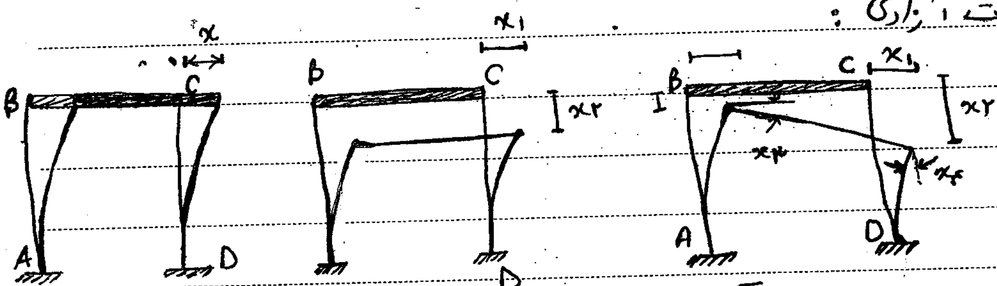
۱- برای بررسی حرکت MDOF مسائل زیر مطرح می‌شوند:

- مدلسازی جرم:



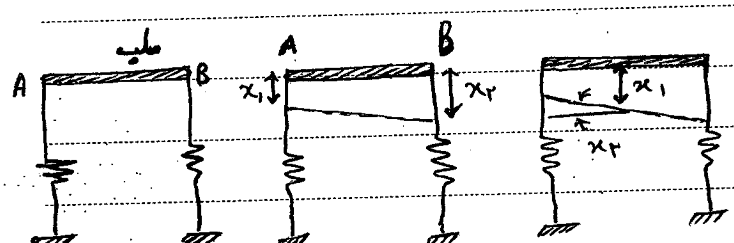
سازه — مدل دو جرم متمرکز — مدل یک جرم متمرکز

- انتخاب درجات آزادی:



یک درجه آزادی — دو درجه آزادی — چهار درجه آزادی

- انتخاب محل درجه آزادی:



دو درجه آزادی: جابه‌جایی دو انتهای AB

دو درجه آزادی: جابه‌جایی و دوران در وسط AB

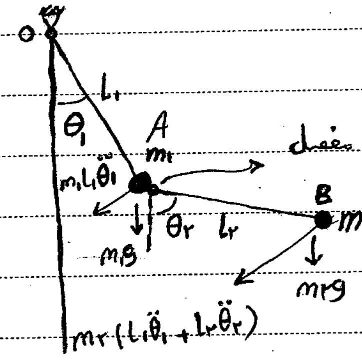
$m_i\ddot{x}$: نیروی لازم درنقطه i جهت شتاب دادن درنقطه (جهت x) .

$k_i x$: " " " " " " " جابجایی " " " " " .

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۸-۲: تشکیل معادلات حرکت جرم های متمرکز - حرکت دورانی ، معادله دیفرانسیل حرکت ؟

با فرض $m_1=m_2=m$ و $L_1=L_2=L$ جواب را ساده کنید.



نیروی اینرسی عمود است بر میله (به علت دوران) ولی برای سهولت جهت نیروی اینرسی m_2 را هم جهت با جهت نیروی اینرسی m_1 فرض می کنیم.

دوبار لنگر می گیریم. یکبار درنقطه A و یکبار درنقطه O .

در هر دونقطه به علت وجود مفصل لنگر صفر است. دو درجه آزادی

برای لنگر گیری درنقطه O نیروهای وارد بر m_2 را به نقطه A منتقل می کنیم. (لنگر درنقطه A به علت وجود مفصل صفر است)
درنتیجه جرم m با انتقالش ، لنگر انتقال نمی دهد.

$$\sum M_O=0 \xrightarrow{①} m_1L_1^2\ddot{\theta}_1+m_2(L_1\ddot{\theta}_1+L_2\ddot{\theta}_2)L_1+(m_1g+m_2g)L_1\theta_1=0$$

$\sin\theta_1\simeq\theta_1$

$$\sum M_A=0 \xrightarrow{②} m_2(L_1\ddot{\theta}_1+L_2\ddot{\theta}_2)L_2+m_2gL_2\theta_2=0$$

$$\begin{matrix} m_1=m_2=m \\ L_1=L_2=L \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} ①\ mL^2\ddot{\theta}_1+m(L\ddot{\theta}_1+L\ddot{\theta}_2)L+(mg+mg)L\theta_1=0 \\ ②\ m(L\ddot{\theta}_1+L\ddot{\theta}_2)L+mgL\theta_2=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div mL^2} \begin{cases} ①\ \ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+\frac{2g\theta_1}{L}=0 \\ ②\ \ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+\frac{g\theta_2}{L}=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+\frac{2g}{L}\theta_1=0 \\ \ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+\frac{g}{L}\theta_2=0 \end{cases}$$

به صورت ماتریسی

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{2g}{L} & 0 \\ 0 & \frac{g}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PAPCO

لزوماً ماتریس جرم قطری نیست

ماتریس سختی

وزن ها معادل فنر کار کردند

جابه‌جایی واحد نیست و x_1 و x_2 است ولی برای سهولت و تکنیک کار، واحد در نظر می‌گیریم و نیرو را بدست می‌آوریم. حال به ازای جابه‌جایی x_1 و x_2 نیرو را بدست می‌آوریم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اثر دینامیکی را بررسی می‌کنیم:

$K_{11} X_1 + K_{12} X_2 = A_1$ عکس‌العمل تکیه‌گاهی *

$K_{21} X_1 + K_{22} X_2 = B_1$ عکس‌العمل تکیه‌گاهی *

مروری خلاصه‌وار بر تحلیل ماتریس سختی در استاتیک بود.

نکته: به نیروهای دیگری نیز داریم که باید در سمت * قرار دهیم و آن نیروهای اینرسی هستند.

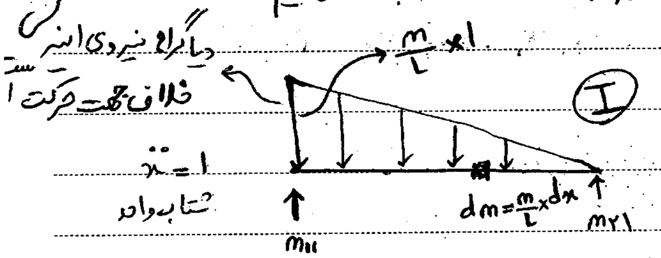
نکته: نیروی موجود در درجه آزادی‌های x_1 و x_2 باید برابر نیروی انتقال یافته $F(t)$ و $M(t)$ از وسط عضو به درجه آزادی‌ها باشد.

نقاط مربوط به

- در محل درجه آزادی X_1 و X_2 باید ببینیم چه نیروهای اینرسی ایجاد می‌شود.

- در این محل‌ها به علت ارتعاش شتاب موجود است $\ddot{x}_1$ و $\ddot{x}_2$ که نمی‌دانیم چقدر هستند.

- این شتاب‌ها را واحد فرض کرده و مثل صفحه قبل در دو حالت بررسی می‌کنیم:



$\frac{m}{L}$ — جرم واحد طول

نکته: نیروی اینرسی تابع جرم است و یک نیروی ذاتی است. ← $dF = dm \times$ شتاب در این نقطه

نیروی اینرسی = جرم × شتاب

نیروی اینرسی $= \frac{m}{L} \times$ شتاب واحد (1)

به ازای شتاب واحد

m_{21}: نیروی لازم در درجه آزادی 2 جهت شتاب واحد در درجه آزادی 1، هنگامی که درجات آزادی دیگر شتابی نداشته باشند (صفر باشد)

اگر شتاب $\ddot{x}_1$ باشد ←

نیروی اینرسی $= \frac{m}{L}\ddot{x}_1$ (جرم، شتاب)

حال نسبت به دو نقطه ممان می‌گیریم تا m_{21} و m_{11} بدست آیند.

جرم چون گسترده در هر نقطه جرم ما $\frac{m}{L}$ می‌باشد.

$$m_{11} L - \frac{1}{2}(L)\left(\frac{m}{L}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = 0 \to m_{11} = \frac{m}{3}$$

$$m_{21} L - \frac{1}{2}(L)\left(\frac{m}{L}\right)\left(\frac{L}{3}\right) = 0 \to m_{21} = m/6$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته: اگر ۱۰ درجه آزادی داشتیم ۹ یکی را باز می‌ذاریم و ۹ تای دیگر را می‌بندیم و به همین صورت که گفتیم می‌رویم و در انتها باید ۱۰ معادله بنویسیم.

$$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix} \rightarrow$$ ماتریس m قطری است.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{m_{11}}{3} & \frac{m_{12}}{6} \\ \frac{m_{21}}{6} & \frac{m_{22}}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P(t)}{2} - \frac{M(t)}{L} \\ \frac{P(t)}{2} + \frac{M(t)}{L} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P(t)}{2} - \frac{M(t)}{L} \\ \frac{P(t)}{2} + \frac{M(t)}{L} \end{bmatrix}$$

* در این مثال:
  * ماتریس جرم قطری نیست.
  * ” سختی قطری است.

* ماتریس سختی و ماتریس جرم همواره متقارن هستند.

نکته: تعداد معادلات = تعداد درجات آزادی.

$\sum F_y = 0 \rightarrow m_{11} = \frac{m}{L} \times L = m$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\sum M_o = 0 \rightarrow m_{21} = 0$

۲- قسمت دینامیک: بدست آوردن ماتریس جرم [m]:

$\ddot{x}=1$

درجه آزادی اول

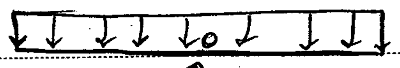
($\ddot{\theta} = 0$, $\ddot{x} = 1$) : 1

نمی‌گذاریم شتاب زاویه‌ای ایجاد شود.)

* دیاگرام نیروی اینرسی:

$m_{21}=0$

$\frac{m}{L}$



$\underset{\text{جرم}}{\frac{m}{L}} \times \underset{1}{\text{شتاب واحد}} = \frac{m}{L}$

نیروی اینرسی که ثابت است.

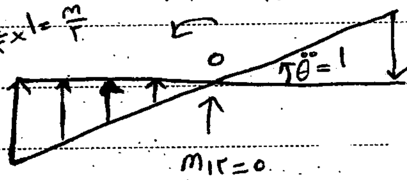
نیروی اینرسی = جرم × شتاب واحد

$m_{11}=m=\frac{m}{L}\times L$

درجه آزادی دوم

$m_{22}=\frac{mL^2}{12}$

$\frac{m}{L}\times\frac{L}{2}\times 1=\frac{m}{2}$



$\ddot{\theta}=1$

$m_{12}=0$

$\frac{m}{L}\times\frac{L}{2}\times 1=\frac{m}{2}$ شتاب

* نیروی اینرسی در انتها

($\ddot{\theta} = 1$, $\ddot{x} = 0$) : 2

نیروی اینرسی در انتها $= \frac{m}{2}$

جهت نیروی اینرسی خلاف جهت حرکت است

$$\Longrightarrow [m] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}$$

ماتریس جرم قطری شد.

$\sum F_y = 0 \rightarrow m_{12} = 0$

$\sum M_o = 0 \rightarrow m_{22} - \frac{m}{2}\times\frac{L}{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times\left(\frac{L}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{3}\right)\times 2 = 0$

بازو $= \left(\frac{L}{2}\right)\times\frac{2}{3}$

$\Rightarrow m_{22} = \frac{mL^2}{12}$

دیگر جابجا نکردیم. چون توی درجه آزادی اثر کرده.

معادله

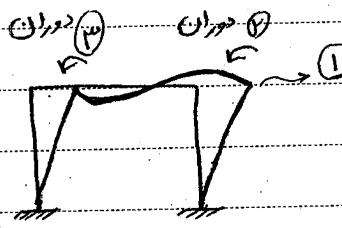
$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & (K_2-K_1)\frac{L}{2} \\ (K_2-K_1)\frac{L}{2} & (K_2+K_1)\frac{L^2}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P(t) \\ M(t) \end{Bmatrix}$$

* طی این دو مثال اثر اینکه درجه آزادی را کجا انتخاب کنیم روی معادلات دیدیم و هم تعمیم روش ماتریس سفتی از حالت استاتیک به حالت دینامیک را دیدیم.

Subject: درجات آزادی را تخفیف می‌دهیم.
Year. Month. Date. ( )

۲. تشکیل معادلات حرکت قاب‌ها (حالت کلی)

m_{ij}: نیروی لازم در درجه آزادی (نقطه) i جهت شتاب واحد در درجه آزادی j



مثال: قاب روبرو دارای ۳ درجه آزادی است: یکی جابه‌جایی افقی و دوتا دوران گره‌ها.

- می‌توانیم برای هر گره در صفحه ۳ درجه آزادی تعریف کنیم (جابه‌جایی افقی، جابه‌جایی قائم، دوران) و همچنین در فضا برای هر گره می‌توانیم ۶ درجه آزادی تعریف کنیم ۳ تا دوران و ۳ تا جابه‌جایی.

- تعداد درجات آزادی مشکلی برای حل مسأله ایجاد نمی‌کند و فقط حجم روند کار را افزایش می‌دهد.

- هدف این است که معادلات دیفرانسیل حرکت را برای یک سیستم که دارای چندین درجه آزادی است و اعضا هم حالت الاستیک دارند با جرم گسترده تشکیل بدهیم.

- برای بررسی قاب بالا ابتدا برای هر درجه آزادی حالت استاتیکی را در نظر می‌گیریم و بعد حالت دینامیکی را.

- ۳ حالت باید در نظر بگیریم که هر حالت هم دو قسمت دارد. یکی استاتیکی و دیگری دینامیکی. علت اینکه ۳ حالت در نظر می‌گیریم چون ۳ تا درجه آزادی داریم.

- در هر حالت یک درجه آزادی را در نظر می‌گیریم و درجات دیگری را محدود می‌کنیم.

- در شکل اول درجات آزادی ۲ و ۳ را محدود کردیم و درجه آزادی ۱ را آزاد کردیم و اجازه دادیم جابه‌جایی افقی به اندازه واحد برای هر دو گره اتفاق بیفتد. این جابه‌جایی واحد را اعمال می‌کنیم و در شکل ۲ درجه آزادی ۲ را فعال کردیم و دوتای دیگر را قفل کردیم و در شکل ۳ درجه آزادی ۳ را فعال کردیم و ۲ تای دیگر را محدود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای شکل ۱ مجموع نیروهای داخلی در درجه آزادی ۱ را برابر نیروهای خارجی در درجه آزادی ۱ قرار می‌دهیم.

$$K_{11} x_1 + K_{12} x_2 + K_{13} x_3 + m_{11} \ddot{x}_1 + m_{12} \ddot{x}_2 + m_{13} \ddot{x}_3 = P_1(t)$$

حال به صورت ماتریسی برای ۳ تا شکل داریم:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) = m\ddot{x}_g \\ P_2(t) = 0 \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

جابجایی‌ها اعم از جابجایی و دوران را با x نشان دادیم.

نکته: وقتی زمین می‌لرزد نیرو به صورت افقی به سازه وارد می‌شود که با داشتن شتاب زمین این نیرو را در جهت افقی می‌نویسیم. اگر درجه آزادی قائم هم داشتیم و شتاب هم داشتیم که به عنوان نیروی خارجی آن را هم وارد می‌کردیم.

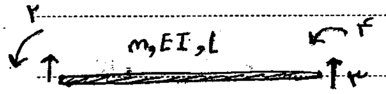
$$\longrightarrow [m]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{P(t)\}$$

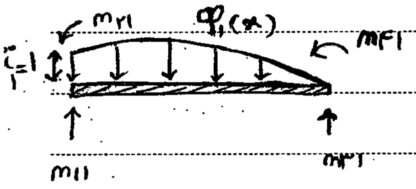
نکته: می‌توانیم ماتریس سختی عضوهایی که بر هم عمودند را به راحتی پیدا کنیم ولی برای اعضای مورب باید اسمبل کنیم.

نکته: ماتریس جرم مشابه ماتریس سختی تعیین می‌شود فقط به جای K_{ij} ، m_{ij} و به جای x_i ، $\ddot{x}_i$ قرار می‌دهیم. به چنین ماتریس جرمی، ماتریس سازگاری جرم می‌گویند.

PAPCO

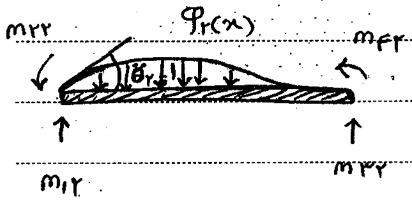
می‌دهیم این است که شکل این تیر تغییر یافته بخاطر شتاب واحد که در یک درجه آزادی ایجاد کردیم همون شکل استاتیک گرفته می‌شود. یعنی همون شکلی که ما در همون نقطه یک جابجایی واحد بدهیم و در اثرش شکلی ایجاد می‌شود که می‌توانیم رسمش کنیم و معادلش را بدست بیاوریم. به همین علت هم هست که این ماتریس جرمی که داریم پیداش می‌کنیم ماتریس جرم سازگار قرار دادیم. یعنی شکل تغییر یافته تیرمان بخاطر شتاب واحد سازگار گرفتیم (یکسان گرفتیم) با حالتی که جابجایی واحد داریم. می‌شود شکل دیگری انتخاب کرد که جواب دیگری می‌گیریم. اما آزمایشات نشان می‌دهد اگر همین شکلی که در استاتیک گرفتیم را در دینامیک هم بگیریم جواب‌های خوبی به ما می‌دهد.



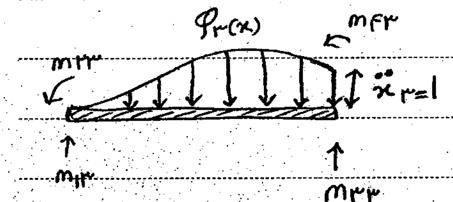


: $\ddot{x}_1 = 1 \xrightarrow{x_1=1} \varphi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$

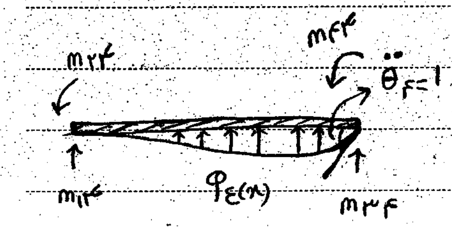
* $\varphi_1(x)$: شکل تیر در اثر جابجایی واحد در درجه آزادی 1 یعنی $x_1 = 1$.



: $\ddot{\theta}_2 = 1 \xrightarrow{\theta_2=1} \varphi_2(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$



: $\ddot{x}_3 = 1 \xrightarrow{x_3=1} \varphi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$



: $\ddot{\theta}_4 = 1 \xrightarrow{\theta_4=1} \varphi_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & \boxed{156} & \boxed{-22} \\ -13 & -3 & \boxed{-22} & \boxed{4} \end{bmatrix}$$

این قسمت را قرار می دهیم

$$\begin{array}{c|cccccc} f_i \downarrow \; \ddot{x}_i \rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 156+156 & -22+22 & 54 & -13 & & \\ 2 & -22+22 & 4+4 & 13 & -3 & & \\ 3 & 54 & 13 & 156+156 & -22+22 & 54 & -13 \\ 4 & -13 & -3 & -22+22 & -4+4 & 13 & -3 \\ 5 & & & 54 & 13 & 156 & -22 \\ 6 & & & -13 & -3 & -22 & 4 \end{array}$$

I, II, III

$$\Rightarrow M_{\text{سازه (تیر)}} = \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 13 & -3 & 0 & 0 \\ 54 & 13 & 312 & 0 & 54 & -13 \\ -13 & -3 & 0 & 8 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 54 & 13 & 156 & -22 \\ 0 & 0 & -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix}$$

$$* \quad m = 420 \;,\; L = 1 \longrightarrow \frac{mL}{420} = 1$$

$$\text{ماتریس جرم } M = \begin{bmatrix} 420 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 420 & & \\ & & & 210 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

با مدل جرم متمرکز و حذف اینرسی دورانی گره ها، جهت ساده سازی مسائل

?

نتیجه: اسم این دو درجه آزادی را درجه آزادی مهتر می‌گذاریم. یا اصلی.

نتیجه و هدف: برای اینکه حجم کار کم شود و دقت کار هم پایین نیاید در اکثر موارد می‌آییم در قسمت دینامیک (منظور ماتریس جرمی است) از اینرسی دورانی گره‌ها صرف نظر می‌کنیم یعنی تمام جاهایی که وابسته است به این دوران‌ها ← در ماتریس جرمی صفر می‌گذاریم ←
ماتریس جرمی می‌شود یک ماتریس 6×6 که فقط دو درایه دارد و بقیه صفر است.
این دو درایه یکی جرمی که در درجه آزادی ۱ حرکت انتقالی فعال و جرمی که در درجه آزادی ۲ فعال. جرم رابه

پس می‌توان در قسمت دینامیک تمام دو جرم متمرکز تبدیل کرد که دارای اینرسی انتقالی هستند اما در قسمت استاتیک (ماتریس سختی) این کار را نکنیم. چون دوران گره‌ها در استاتیک مؤثر است. حالا چقدر مؤثر است بستگی به سختی اعضا دارد.

$$[m]=\begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_2 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [K]=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & \\ \vdots & & & \\ K_{61} & K_{62} & \cdots & K_{66} \end{bmatrix}$$

← از اینرسی‌های دورانی صرف نظر شده.

← هیچ کدام حذف نمی‌شوند در حالت استاتیک همه را در نظر می‌گیریم.

* با این روش اول حجم عملیات یه مقدار جمع و جور تر می‌شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روش سوم: بدست آوردن ماتریس سفتی با عکس کردن ماتریس نرمی.

ابتدا ماتریس نرمی را پیدا کنیم ← تعداد المان هایش هست ← جابجایی در نقطه i وقتی بار واحد در نقطه j اثر کند. ← ماتریس نرمی را تشکیل بدیم و سپس عکسش کنیم.

برای بدست آوردن ماتریس نرمی باید بار واحد قرار بدیم و جابجایی ها را پیدا کنیم ← به این ترتیب المان های ماتریس نرمی پیدا می شود ← عکس ماتریس نرمی می شود ماتریس سفتی استاتیکی.

نکته: روش دوم و سوم را می شود ادغام کرد یعنی یا ماتریس سفتی اصلاح شده را پیدا کنیم و کار کنیم و یا ماتریس نرمی را پیدا کنیم و سپس عکسش کنیم که می شود ماتریس سفتی.

ماتریس سختی یا ماتریس سختی اصلاح شده؟

Subject: این روش است برای انقباض ماتریس سفتی برای کاهش حجم عملیات بدون اینکه چیزی را از قلم بیندازیم

Year. Month. Date. ( )

$$\begin{bmatrix} m_R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_R \\ \ddot{x}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{RR} & K_{Ro} \\ K_{oR} & K_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_R \\ x_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ماتریس ۴×۴

ماتریس ۴×۱

* باید صفر باشد یعنی جرم دیگر نباشد.

ضرب را انجام می‌دهیم

$$\overset{2\times 2}{m_R}\, \underset{2\times 1}{\ddot{x}_R} + K_{RR}\, x_R + K_{Ro} . x_o = P_R$$

جایگذاری

$$\underset{4\times 4}{} K_{oR}\, x_R + K_{oo}\, x_o = 0 \rightarrow x_o = -K_{oo}^{-1}\, K_{oR}\, x_R$$

$$\rightarrow \overset{2\times 2}{m_R}\, \overset{2\times 1}{\ddot{x}_R} + (\overset{2\times 2}{K_{RR} - K_{Ro}\, K_{oo}^{-1}\, K_{oR}})\, x_R = P_R$$

$$\rightarrow m_R\, \ddot{x}_R + (\underbrace{K_{RR} - K_{oR}^{T}\, K_{oo}^{-1}\, K_{oR}}_{K_{con}})\, x_R = P_R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m_R\, \ddot{x}_R + K_{con}\, x_R = P_R}$$

K_{con} : ماتریس سفتی متراکم شده.

هدف این بود که بین ماتریس K_{RR} و x_R رابطه پیدا کنیم. و بدین ترتیب K_{con} پیدا می‌شود.

K_{RR} و K_{oR} و K_{Ro} و K_{oo} تکه‌های مختلف یک ماتریس سفتی هستند.

چون ماتریس سفتی اصلاح شده

$$m_R . \ddot{x}_R + K_{con} . x_R = P_R$$

ماتریس جرم ۲×۲ شامل m_1 و m_2

بردار شتابی که می‌خواهیم نگه‌ش داریم.

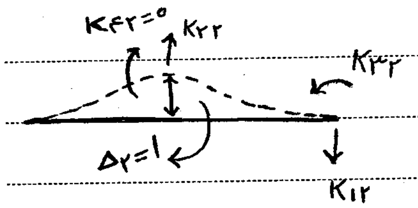
جابه‌جایی جرم x_1 و x_2.

PAPCO

* همهٔ سختی‌های زیر در جدول سختی هست.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

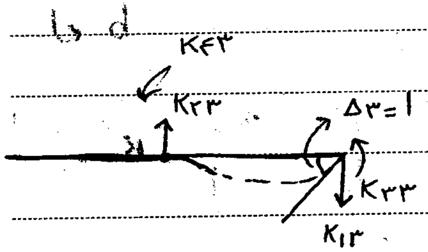


$$K_{12} = \frac{12EI}{(L/2)^3} = \frac{8\times 12EI}{L^3}$$

$$K_{22} = \frac{12EI}{(L/2)^3}\times 2 = \frac{8\times 24EI}{L^3}$$

$$K_{32} = \frac{6EI}{(L/2)^3} = 8\times 3\,\frac{EI}{L^3}$$

$$K_{42} = 0$$

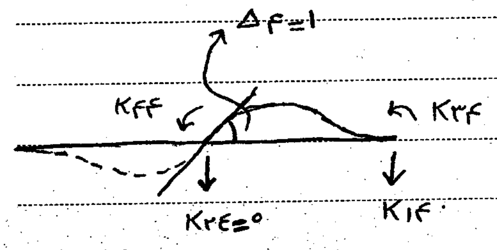


برش $K_{13} = \frac{6EI}{(L/2)^2} = 24\frac{EI}{L^2}$

برش $K_{23} = \frac{24EI}{L^2}$

ممان $K_{33} = \frac{4EI}{L/2} = \frac{8EI}{L}$

ممان $K_{43} = \frac{4EI}{L}$



برش $K_{14} = \frac{6EI}{(L/2)^2} = \frac{24EI}{L^2}$

$K_{24} = 0$

واحد
← دوران در وسط تیر.

ممان $K_{34} = \frac{2EI}{L/2} = \frac{4EI}{L}$

ممان $K_{44} = \frac{4EI}{(L/2)}\times 2 = \frac{16EI}{L}$

* یادت باشد وقتی یک درجه آزادی را باز می‌کنیم درجات آزادی دیگر را باید قفل کنیم.

Δ_{12} : جابجایی در نقطه ۱ به ازای بار واحد در نقطه ۲ .

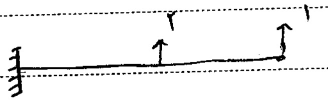
Subject:

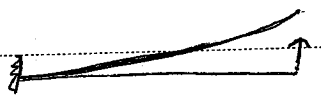
Year. Month. Date. 〃 〃 جابجایی 〃 〃 ۱ 〃 〃 نیرو : K_{12}

حل b :

$$\Delta_{ij} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix}$$

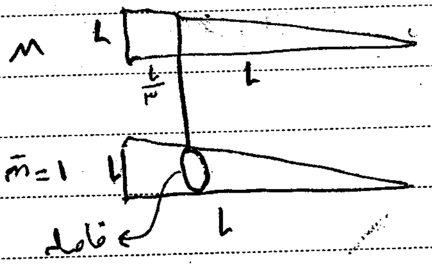
$\Delta_{11} = ?$





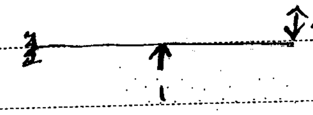
$1 \to EI = 1 \to \Delta = ?$

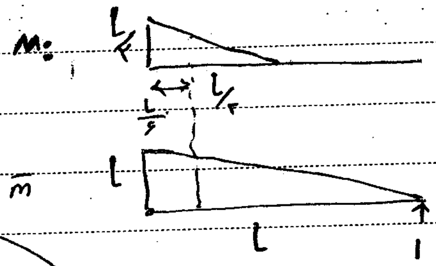
$M = x$



$$\Delta_{11} = S \times \text{فاصله مرکز جرم} = \frac{L^2}{2} \times \frac{2L}{3} = \frac{L^3}{3EI}$$

Δ_{12} : جابجایی نقطه ۱ در اثر بار واحد در نقطه ۲

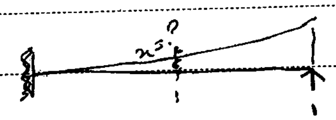


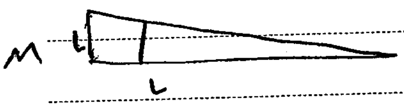


$$S = \frac{L^2}{4 \times 2} = \frac{L^2}{8}$$

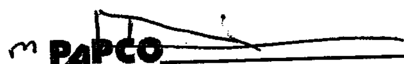
$$\frac{L}{L} = \frac{x}{\frac{5L}{6}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{5L}{6}} \to \Delta = \frac{L^2}{8} \times \frac{5L}{6} \times \frac{1}{EI} = \frac{5L^3}{48EI}$$

Δ_{21} = جابجایی در نقطه ۲ در اثر بار واحد در نقطه ۱



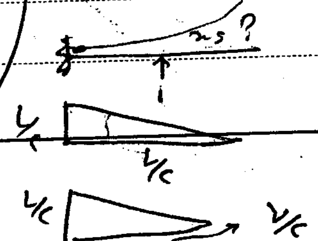


$\to x = \frac{5L}{6} \to \Delta = \frac{5L^3}{48EI}$



$S = \frac{L^2}{8}$

Δ_{22} :

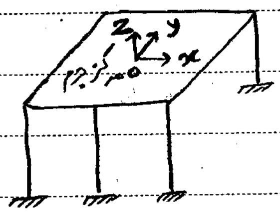


$$\Delta = \frac{L^2}{8} \times \frac{2}{3} \times \frac{L}{2} = \frac{L^3}{24EI}$$

۵- بررسی حرکت پیچشی (قاب یک طبقه با پلان نامتقارن دو محوره)

(سه درجه آزادی Δx و Δy و θ_z را برای یک طبقه مقابل در نظر می‌گیریم)

نکته: یکی از درجات آزادی که در ایجاد تنش‌ها مؤثر است حرکت سقف قاب حول محور قائمش است.
(اصطلاحاً حرکت پیچشی یا مد پیچشی می‌گویند.)



نکته: پیچش باید حول محور قائم قابل توجه باشد و یکی از درجات آزادی اصلی باشد.

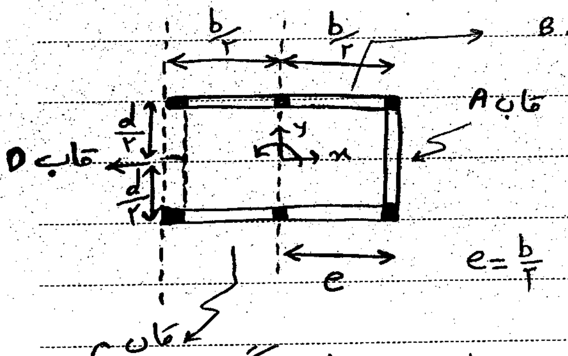
نکته: نیروی زلزله ناشی از جرم سازه در شتاب زمین است که به مرکز جرم سازه اثر می‌کند. اگر جرم گسترده است باید مرکز جرم را در هر طبقه پیدا کرد. نیروی زلزله به این نقطه وارد می‌شود.

نکته: مرکز سختی هر طبقه را می‌توان پیدا کرد. کل سختی یک طبقه را در یک نقطه قرار می‌دهیم که معادل یک ستون در آن نقطه است.

نکته: اگر مرکز سختی و مرکز جرم هر طبقه منطبق نباشند نیروی زلزله به مرکز جرم وارد می‌شود و سازه تمایل پیدا می‌کند که حول مرکز سختی طبقه دوران کند.

نکته: در اثر پیچش مد پیچشی اتفاق می‌افتد یعنی زاویه‌ای که اتفاق می‌افتد به علت اینکه مرکز جرم و مرکز سختی بر هم منطبق نباشند. هرچه فاصله این دو بیشتر باشد مد پیچشی بیشتر است.

حال قابی را در نظر بگیرید که دارای ۳ درجه آزادی است: ۱- جابه‌جایی افقی و عمودی و دوران حول محور قائم.



K_A : سختی برشی قاب A

K_B : سختی برشی قاب B

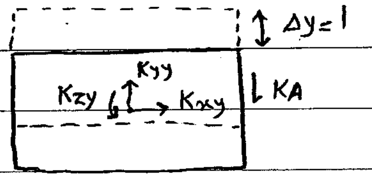
K_C : سختی برشی قاب C

K_A : مجموعه $\frac{12EI}{L^3}$ ستون‌ها مربوط سختی قاب A در راستای y و در راستای x را ناچیز می‌گیریم.

K_B : 〃 〃 〃 〃 〃 B 〃 〃 x 〃 〃 y 〃 〃

K_C : 〃 〃 〃 〃 〃 C 〃 〃 x 〃 〃 y 〃 〃

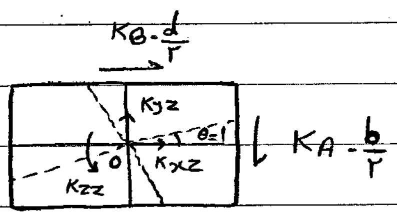
Date: Subject:



$\sum F_y = 0 \longrightarrow K_{yy} = KA$

$\sum F_x = 0 \longrightarrow K_{xy} = 0$

$\sum M_o = 0 \longrightarrow K_{zy} = KA \cdot \frac{b}{2}$



$\sum F_x = 0 \longrightarrow K_{xz} = (K_C - K_B)\frac{d}{2}$

$\sum F_y = 0 \longrightarrow K_{yz} = \left(KA \cdot \frac{b}{2}\right)$

$\sum M_o = 0 \longrightarrow K_{zz} = (K_C + K_B)\frac{d^2}{4} + KA\frac{b^2}{4}$

$$K = \begin{bmatrix} K_B + K_C & 0 & (K_C - K_B)\cdot\frac{d}{2} \\ 0 & KA & KA \cdot \frac{b}{2} \\ (K_C - K_B)\frac{d}{2} & KA \cdot \frac{b}{2} & (K_B + K_C)\frac{d^2}{4} + KA\frac{b^2}{4} \end{bmatrix}$$

← ماتریس سفتی متقارن است.

حالت خاص 1: تقارن سفتی در یک امتداد: $K_B = K_C = K_x$

$$K = \begin{bmatrix} 2K_x & 0 & 0 \\ 0 & KA & \frac{b}{2}KA \\ 0 & \frac{b}{2}KA & K_x \cdot \frac{d^2}{2} + KA \cdot \frac{b^2}{4} \end{bmatrix}$$

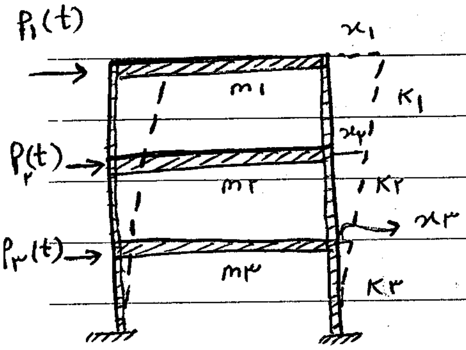
بنابراین حرکت قاب در امتداد x مستقل از دو حرکت دیگر می‌باشد. (چون $K_{xy} = K_{xz} = 0$)

مفهوم این است که یک معادله دیفرانسیل که وابسته به x است را حل می‌کنیم و مشابه SDOF است.

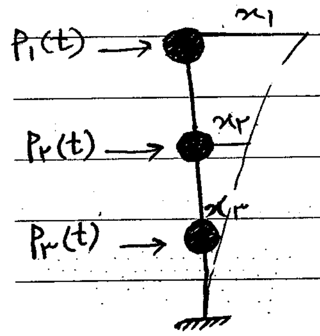
$m\ddot{u}_x + 2K_x u_x = -m\ddot{u}_g(x)$

II - مدل چند درجه آزاد سازه ها - قاب برشی. (باز هم می خواهیم ساده تر کنیم)

۱- معادلات دیفرانسیل حرکت قاب برشی (بدون میرایی)



* از دوران چه در استاتیک و چه در دینامیک صرف نظر می کنیم. اگر این کار را کنیم مشابه یک قاب برشی کار کردیم.



$$\left(K_i = \frac{12EI}{l_i^3}\right)$$

قاب برشی: قابی که دارای ویژگی های زیر است:

۱- کف ها به اندازه کافی صلب هستند به طوری که دوران گره ها ناچیز باشد.

۲- جرم سازه را عمدتاً در محل طبقات می توان متمرکز فرض کرد.

۳- سختی ستون ها نسبت به سختی کل طبقه کم و ناچیز است ← کف کم و بیش صلب ← دیافراگم صلب است.

نکته: در قاب های برشی از درجات دورانی صرف نظر می شود. (دینامیکی و استاتیکی)

نکته: در قاب برشی سقف ها به اندازه کافی صلب هستند ← سختی آنها در برابر بارهای جانبی از جمله زلزله زیاد است.

نکته: سقف های معمولی از جمله تیرچه بلوک و کامپوزیت و همچنین قاب های خمشی که در مقابل بار جانبی مقاومت می کنند را می توان قاب برشی در نظر گرفت.

Date: Subject:

$\longrightarrow [m]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{P(t)\}$ حرکت اجباری

حرکت آزاد : $[m]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \longrightarrow$ حال باید این را حل کنیم.

n معادله که همگی به هم وابسته هستند (همزمان)

فعلاً حرکت آزاد را حل می‌کنیم.

$\{x\} = \{a\} \sin(\omega t+\theta)$

ریاضیات می‌گوید که جواب این معادلات به این شکل است.

$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$ بردار دامنه ارتعاش

n بردار ثابت

$\{\ddot{x}\} = -\omega^2\{a\} \sin(\omega t+\theta)$

$-[m]\omega^2 \{a\} \sin(\omega t+\theta) + [K]\{a\} \sin(\omega t+\theta) = \{0\}$

سینوس‌ها حذف شد $\longrightarrow \left[[K] - \omega^2[m]\right]\{a\} = \{0\}$

معادله فرکانس‌ها : $\left|[K] - \omega^2[m]\right| = 0 \longrightarrow \omega = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{Bmatrix}$ بردار فرکانس‌ها

n تا ω پیدا شد ← گام بعدی aها را پیدا می‌کنیم.

چون بعد دترمینان n است

فرض کنیم که دو معادله داریم :

$\begin{cases} 2a_1 - 3a_2 = 0 \\ 4a_1 - 6\lambda a_2 = 0 \end{cases}$

سؤال : طرف دوم تساوی صفر است حال مجهولات را بدست آورید.

به عبارت دیگر λ را آنچنان حساب کنید که جواب‌های این دو معادله غیرصفر باشد.

حل: در یک صورت امکان پذیر است، که دترمینان ضرایب مجهولات صفر باشد. اگر دترمینان صفر باشد جواب غیرصفر برای a_1 و a_2 پیدا می‌کنیم اما

Raz

Date: Subject:

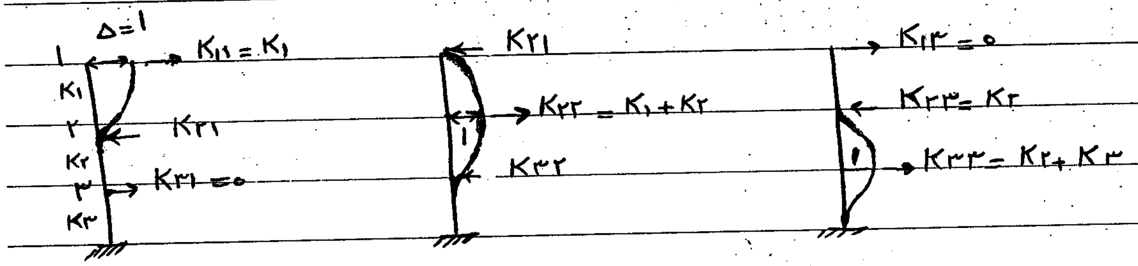
$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

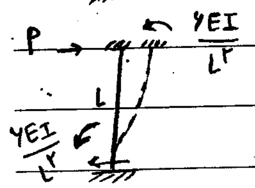
یک ماتریس قطری و شامل جرم متمرکز طبقات

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2+K_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 1800 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 \end{bmatrix}$$

* برای قاب ۳ طبقه ۳ بردار ω و ۳ بردار ϕ باید بدست آوریم.





$$K = \frac{12EI}{L^3}$$

Raz

Date: Subject:

۳ـ ماتریس شکل حالت‌های ارتعاش یا ماتریس مودال $[\phi]$

(Modal shape Matrix)

ودراب حرکت آزاد قاب برشی.

$$\Big[[K] - \omega^2[m]\Big]\{a\} = \{0\}$$

$$\rightarrow \Big[\underbrace{[m]^{-1}[K]}_{A} - \underbrace{\omega^2}_{\lambda}[I]\Big]\{a\} = \{0\} \rightarrow \Big[[A] - \lambda[I]\Big]\{a\} = 0$$

$$\rightarrow [A]\{a\} = \lambda\{a\}$$

$$[A][A]^{-1} = [I]$$

برحسب تعریف $\lambda = \omega^2$ مقادیر ویژه ماتریس A و $\{a\}$ بردار ویژه ماتریس A می‌باشد:

$$\omega = \omega_1 \rightarrow \{a\} = \{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{n1} \end{Bmatrix} \rightarrow$$ بردار مودال برای مود اول

وقتی ω_1 را در رابطه قرار می‌دهیم

* اندیس دوم ϕ_{ij} یعنی j معرف شماره مد می‌باشد.

* مود یعنی حالت.

$$\omega = \omega_2 \rightarrow \{a\} = \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{n2} \end{Bmatrix}$$

مود اول ← مود دوم ←

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} = \Big[\{\phi\}_1 \ \{\phi\}_2 \cdots\Big]$$ ماتریس مودال

Raz

Date: Subject:

مثال ۲-۹) ماتریس مودال.

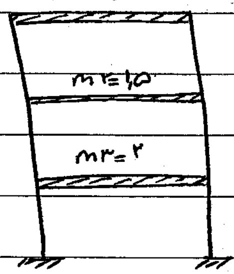
a) ماتریس شکل حالت های ارتعاش $[\Phi] = ?$

b) رسم مدها $= ?$

c) جواب $= ?$

$\lambda = \dfrac{\omega^2}{600}$

$m_1 = 1 \ kg \ sec^2/cm$



* دو نفر که جواب را بدست آورند ممکن است ϕها و A های متفاوتی بدست آورند ولی جواب آخر یکی است.

* ϕ از جنس طول است.

$$a)\ \left[[K] - \omega^2 [m]\right]\{a\} = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-2\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 0.351 \longrightarrow \omega_1 = 14.5 \ rad/sec \longrightarrow$ حال می‌دانیم تو رابطه و مقادیر a را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1-0.351 & -1 & 0 \\ -1 & 3-0.35\times1.5 & -2 \\ 0 & -2 & 5-0.35\times2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} 0.649 a_1 - a_2 = 0 \\ -a_1 + 2.474 a_2 - 2a_3 = 0 \\ -2a_2 + 4.298 a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.649 \\ 0.3 \end{Bmatrix}$$

نکته: این ۳ معادله مستقل از هم نیستند و ۲ معادله مستقل داریم. برای همین یکی از aها را باید بدلخواه انتخاب کنیم و a_2، a_3 را بدست آوریم. فرض کردیم $a_1 = 1 \leftarrow a_2, a_3 = ✓$

Raz

نکته: اگر در زمان صفر جابجایی اولیه داشته باشیم پس اختلاف فاز یا همان θ داریم ولی اگر جابجایی نداشته باشیم اختلاف فاز بین زمان و مکان صفر است.

Date: Subject:

$$x_1(t) = A_1 \sin(14.5t+\theta_1) + A_2 \sin(31.1t+\theta_2) + A_3 \sin(46.1t+\theta_3)$$

$$x_2(t) = A_1(0.649)\sin(14.5t+\theta_1) + A_2(-0.601)\sin(31.1t+\theta_2) + A_3(-2.57)\sin(46.1+\theta_3)$$

$$x_3(t) = A_1(0.3)\sin(14.5t+\theta_1) + A_2(-0.676)\sin(31.1t+\theta_2) + A_3(2.47)\sin(46.1+\theta_3)$$

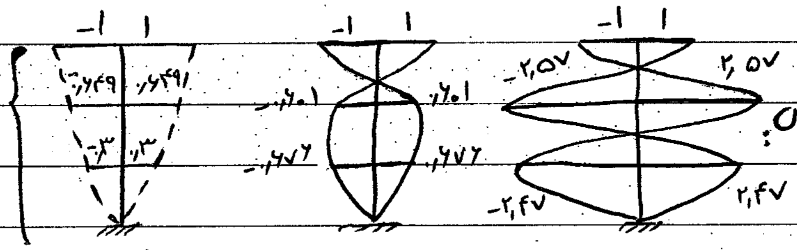
(b

اگر در طبقه بالا اول جابجایی باشد در طبقه دوم ۰٫۶۴۹ و در طبقه اول ۰٫۳ است.

و یا " " " " ۲ " " " " " " " ۲x " " " " ۲x " .

با ۳ تا فرکانس ارتعاش می‌کند چون ۳ تا sin دارد.

مودهای ارتعاش:



mode1

mode 3

فقط وسطی را در نظر گرفتیم.

mode 2

که اگر اصطلاحاً گفته شود از مود دوم و سوم صرف نظر کنید یا از w_2 و w_3 صرف نظر شود یعنی دو جمله آخر x_2 و x_3 حذف شود حال اگر به جابجایی نگاه کنیم چنین شکلی را مشاهده می‌کنیم.

نکته: در عمل کل شکل ارتعاش سازه بصورت ترکیب همه مودها می‌باشد ولی در ریاضی برای سهولت محاسبات مودهای اصلی را فقط در نظر می‌گیریم.

Date: Subject:

اثبات دو رابطه صفحه قبل:

$$\left[[K]-\omega^2[m]\right]\{\emptyset\}=\{0\}$$

$$\begin{cases} [K]\{\emptyset\}_n=\omega_n^2[m]\{\emptyset\}_n & (1) \\ [K]\{\emptyset\}_m=\omega_m^2[m]\{\emptyset\}_m & (2) \end{cases}$$

حال دو طرف رابطه (۱) را در $\{\emptyset\}_m^T$ ضرب می‌کنیم: $\{\emptyset\}_m^T[K]\{\emptyset\}_n=\omega_n^2\{\emptyset\}_m^T[m]\{\emptyset\}_n$ ⟵ تساوی را ترانسپوز می‌کنیم

$$\longrightarrow \{\emptyset\}_n^T[K]\{\emptyset\}_m=\omega_n^2\{\emptyset\}_n^T[m]\{\emptyset\}_m \quad (3)$$

رابطه (۲) را در $\{\emptyset\}_n^T$ ضرب می‌کنیم: $\{\emptyset\}_n^T[K]\{\emptyset\}_m=\omega_m^2\{\emptyset\}_n^T[m]\{\emptyset\}_m \quad (4)$

با مقایسه رابطه (۳) و (۴) داریم:

$$(\omega_n^2-\omega_m^2)\left(\{\emptyset\}_n^T[m]\{\emptyset\}_m\right)=0$$

اگر $m\neq n \Leftarrow \omega_n\neq\omega_m \Leftarrow \omega_n^2-\omega_m^2\neq 0 \Leftarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{\emptyset\}_n^T[m]\{\emptyset\}_m=0 \\ \{\emptyset\}_n^T[K]\{\emptyset\}_m=0 \end{cases}$$

$[\emptyset]^T$: ترانهاده ماتریس مودال.

نتیجه: بردار مودال n ام را ترانسپوز کنیم و در $[m]$ ضرب کنیم و در بردار مودال برای مود m ام ضرب کنیم برابر صفر می‌شود. حال برای ماتریس سختی هم همین را می‌توان نوشت.

Date: Subject:

نکته : ستون های ماتریس مودال منحصر به فرد نیستند و می توان در عددی ضرب و یا تقسیم کرد.

به همین ترتیب :

$$[K] = [\phi]^T [K] [\phi] = \begin{bmatrix} K_1 & & \\ & K_2 & \\ & & \ddots \\ & & & K_n \end{bmatrix}$$

که در آن :

$$K_i = \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_i$$

$$K_i = \omega_i^2 M_i$$

۵ـ نرمال کردن ماتریس مودال ، ماتریس نرمال مودال $[\bar{\phi}]$:

ـ بردارهای نرمال مودال را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$\{\bar{\phi}\}_1 = \left\{ \frac{\{\phi\}_1}{\sqrt{M_1}} \right\}$$

$$\{\bar{\phi}\}_2 = \left\{ \frac{\{\phi\}_2}{\sqrt{M_2}} \right\}$$

$$\vdots$$

$$\{\bar{\phi}\}_n = \left\{ \frac{\{\phi\}_n}{\sqrt{M_n}} \right\}$$

ماتریس نرمال مودال ← $[\bar{\phi}] = [\{\bar{\phi}\}_1, \{\bar{\phi}\}_2, \ldots, \{\bar{\phi}\}_n]$

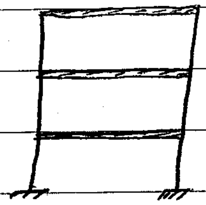
ماتریس $[\bar{M}]$ را با رابطه زیر تعریف و محاسبه می کنیم :

$$[\bar{M}] = [\bar{\phi}]^T [m] [\bar{\phi}]$$

Raz

مثال ۳-۹ : همان مثال ۲-۹ را در نظر بگیرید. تشکیل ماتریس نرمال مودال قاب برشی.

ماتریس نرمال شکل حالتهای ارتعاش $[\bar{\phi}] = ?$ ← ماتریس نرمال شکل حالتهای ارتعاش یک قاب برشی سه طبقه.



$$\{\bar{\phi}_i\} = \left\{\frac{\phi_i}{\sqrt{M_i}}\right\}$$

← برای نرمال کردن ماتریس مودال

1 $[M] = [\phi]^T [m][\phi]$

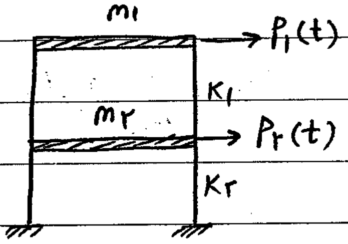
$$\Rightarrow [M] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.0 & 0.649 & 0.3 \\ 1.0 & -0.601 & -0.676 \\ 1.0 & -2.57 & 2.47 \end{bmatrix}}_{[\phi]^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{[m]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.649 & -0.601 & -2.57 \\ 0.3 & -0.676 & 2.47 \end{bmatrix}}_{[\phi]} = \begin{bmatrix} 1.801 & 0 & 0 \\ 0 & 2.455 & 0 \\ 0 & 0 & 23.10 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{\phi}] = \left\{\left\{\frac{\phi_1}{\sqrt{M_1}}\right\}, \left\{\frac{\phi_2}{\sqrt{M_2}}\right\}, \ldots, \left\{\frac{\phi_3}{\sqrt{M_3}}\right\}\right\}$$

$$\Rightarrow [\bar{\phi}] = \begin{bmatrix} \frac{1.0}{\sqrt{1.801}} & \frac{1.0}{\sqrt{2.455}} & \frac{1.0}{\sqrt{23.10}} \\ \frac{0.649}{\sqrt{1.801}} & \frac{-0.601}{\sqrt{2.455}} & \frac{-2.57}{\sqrt{23.10}} \\ \frac{0.300}{\sqrt{1.801}} & \frac{-0.676}{\sqrt{2.455}} & \frac{2.47}{\sqrt{23.10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.745 & 0.638 & 0.208 \\ 0.480 & -0.384 & -0.535 \\ 0.223 & -0.432 & 0.514 \end{bmatrix}$$

Date: Subject:

۶- حرکت اجباری قابهای برشی (بدون میرایی)



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

← معادلات دیفرانسیل حرکت بامیرایی.

← این معادلات همزمان هستند. (وابسته‌اند)

معادلات همبسته:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + K_{11}x_1 + K_{12}x_2 = P_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + K_{21}x_1 + K_{22}x_2 = P_2(t) \end{cases}$$

برای منفرد کردن معادلات فوق مختصات تعمیم یافته را با رابطه روبرو تعریف می‌کنیم:

بردار جابجایی ← $\{x\} = [\emptyset]\{y(t)\}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم

$\underbrace{\{y(t)\}}_{\text{مختصات تعمیم یافته}}$ ← تابع زمان

برای منفرد شدن این معادلات باید دو طرف را در $[\emptyset]^T$ ضرب کنیم.

جایگذاری ← $[m][\emptyset]\{\ddot{y}\} + [K][\emptyset]\{y\} = \{P(t)\}$

طرفین را در $[\emptyset]^T$ ضرب می‌کنیم. ← $\underbrace{[\emptyset]^T[m][\emptyset]}\underbrace{\{\ddot{y}\}} + \underbrace{[\emptyset]^T[k][\emptyset]}\underbrace{\{y\}} = \underbrace{[\emptyset]^T\{P(t)\}}$

$$[M]\{\ddot{y}\} + \{K\}\{y\} = \{P(t)\}$$

← قطری است ← از خاصیت تعامد مودها استفاده کردیم.

← قطری است

Raz

نکته: به y مختصات تعمیم یافته هم می‌گویند.

$y_1(0)$ و $\dot{y}_1(0)$ از رابطه $\{x(t)\} = [\bar{\phi}]\{y(t)\}$ بدست می‌آیند.

$$\{y(t)\} = [\bar{\phi}]^{-1}\{x(t)\}$$

$$[\bar{\phi}]^T[m]\{x(t)\} = [\bar{\phi}]^T[m][\bar{\phi}]\{y(t)\} = \underbrace{[\bar{M}]}_{[I]}\{y(t)\}$$

از طریق دیگر:

$$\{y(t)\} = \overset{[I]}{\cancel{[M]}}^{-1}[\bar{\phi}]^T[m]\{x(t)\}$$

مثال ۱۰-۱) جواب حرکت آزاد قاب برشی (ادامه مثال ۹-۳)

$$m = \begin{bmatrix} 1/0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad K = 600\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{\phi}] = \begin{bmatrix} 0/745 & 0/628 & 0/208 \\ 0/48 & -0/384 & -0/535 \\ 0/223 & -0/432 & 0/514 \end{bmatrix} \quad , \quad \omega = \begin{Bmatrix} 14/5 \\ 31/1 \\ 46/1 \end{Bmatrix} \ rad/sec$$

حال شرایط اولیه را خودمان اعمال می‌کنیم که به شرح زیر است:

$$t=0: \ \{x(0)\} = \begin{Bmatrix} x_1(0) = 0/5 \\ x_2(0) = 0/4 \\ x_3(0) = 0/3 \end{Bmatrix} cm \quad , \quad \{\dot{x}(0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 9 \\ \dot{x}_3(0) = 0 \end{Bmatrix} cm/s$$

Date: Subject:

$$x(t) = [\bar{\phi}]\{y(t)\} = \begin{bmatrix} 0.745 & 0.638 & 0.208 \\ 0.480 & -0.384 & -0.535 \\ & & \\ 0.223 & 0.432 & 0.514 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0.447 \sin 14.5t + 0.794 \cos 14.5t \\ -0.147 \sin 31.1t - 0.171 \cos 31.1t \\ \\ -0.157 \sin 46.1t + 0.091 \cos 46.1t \end{bmatrix} = \ldots$$

Date: Subject:

$\rightarrow [m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{P(t)\}$

درصورتی می‌توان معادلات هم بسته فوق را منفرد کرد که :

$[\phi]^T[c][\phi] =$ یک ماتریس قطری باشد.

و این درصورتی است که : رابطه خطی بین جرم و سختی ←

$[c] = \alpha[m] + \beta[K]$

α و β اعداد ثابت هستند. در این صورت :

$[\phi]^T[m][\phi]\{\ddot{y}\} + \underbrace{[\phi]^T[c][\phi]}_{\text{ماتریس میرایی قطری شده}}\{\dot{y}\} + [\phi]^T[K][\phi]\{y\} = [\phi]^T\{P(t)\}$

$= [C]$ که C بزرگ

$$[C] = [\phi]^T[c][\phi] = \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & c_2 & \\ & & c_3 \end{bmatrix} = [2\xi_i M_i \omega_i]$$

* هر کدام از پارامترها مشابه SDOF بدست می‌آیند.

$M_1\ddot{y}_1 + C_1\dot{y}_1 + K_1 y_1 = P_1(t)$

$M_2\ddot{y}_2 + C_2\dot{y}_2 + K_2 y_2 = P_2(t)$

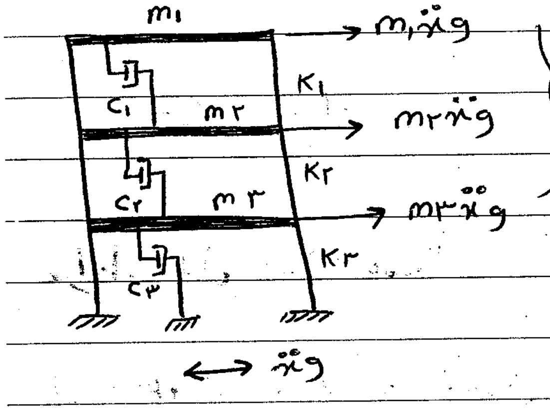
$\rightarrow \{y\} = \checkmark \rightarrow \{x\} = [\phi]\{y\} = \checkmark$

$\vdots$

$M_n\ddot{y}_n + C_n\dot{y}_n + K_n y_n = P_n(t)$ $C_i = 2M_i\omega_i\xi_i$

Raz

۸- تحلیل تاریخچه زمانی (تحلیل لحظه‌ای) - اثر زلزله Time history Analysis



نیروهای اینرسی که از طرف زمین وارد می‌شوند و ناشی از شتاب هستند.

$$\{P_e(t)\} = \begin{Bmatrix} m_1\ddot{x}_g \\ m_2\ddot{x}_g \\ m_3\ddot{x}_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{\{i\}} \ddot{x}_g$$

P مؤثر زلزله

$$\rightarrow \{P_e(t)\} = [m]\{i\}\ddot{x}_g$$

$$\{P_e(t)\} = \underbrace{[\phi]^T[m]\{i\}}_{\{L\}}\ddot{x}_g \longrightarrow \boxed{P_{e_i}(t) = L_i\ddot{x}_g}$$

P مؤثر زلزله

طرفین را قبلاً در $\{\phi\}^T$ ضرب کرده بودیم

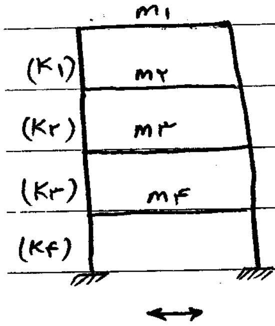
* بردار مشارکت $\{L\} = [\phi]^T[m]\{i\}$ و
* ضریب مشارکت $L_i = \{\phi\}_i^T[m]\{i\}$

- i امین معادله منفرد شده به صورت روبرو نوشته می‌شود: $M_i\ddot{y}_i + C_i\dot{y}_i + K_i y_i = L_i\ddot{x}_g$

و یا: $\rightarrow \ddot{y}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{L_i}{M_i}\ddot{x}_g$

Date: Subject:

۱۰ـ مقایسه برش پایه در تحلیل لحظه ای و روش طیف آئین نامه ۲۸۰۰.



به ازای معادله منفرد شده:

$$M_i \ddot{y}_i + C_i \dot{y}_i + K_i y_i = L_i \ddot{x}_g$$

$$y_i = \frac{L_i}{M_i \cdot \omega_D^i} \underbrace{\int_0^t \ddot{x}_g \, e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin\omega_{Di}(t-\tau)\, d\tau}_{Q_i(t)}$$

نکته: در آنالیز لحظه ای وقتی انتگرال دوهامل را حل می کنیم در هر لحظه جواب را می گیریم.

$$\rightarrow y_i = \frac{L_i \, Q_i(t)}{M_i \cdot \omega_D^i} \quad (۱)$$

قبلاً معادله دیفرانسیل حرکت SDOF در اثر زلزله را بصورت زیر نوشتیم:

شتاب طبقه — شتاب زمین

$$\underbrace{m(\ddot{x} + \ddot{x}_g)} + Kx = 0 \longrightarrow m\ddot{\bar{x}} + Kx = 0 \longrightarrow \ddot{\bar{x}} = \omega^2 x$$

$\ddot{\bar{x}}$: شتاب کل یا مطلق

به همین ترتیب برای هر یک از معادلات منفرد شده می توان نوشت:

$$\ddot{\bar{y}}_i = \omega_i^2 y_i \quad (۲)$$

همین رابطه را می توان برای x نوشت

رابطه x و y خطی است.

(بدون درنظر گرفتن علامت منفی)

$$\{x\} = [\phi]\{y\} = \{\phi\}_1\{y\}_1 + \{\phi\}_2\{y\}_2 + \cdots$$

اگر فقط مود iام را در نظر بگیریم:

$$\{x\}_i = \{\phi\}_i \cdot y_i$$

Date: Subject:

می‌توان نشان داد:

وزن مرحله

$$\frac{L_i^2}{M_i} = \frac{1}{g}\,\frac{\left(\sum_j W_j \cdot \phi_{ji}\right)^2}{\sum_j W_j (\phi_{ji})^2} = \frac{W_{ei}}{g}$$

وزن مؤثر برای مود i ام

از جنس جرم

جرم مؤثر

L را به توان ۲ رساندیم و تقسیم بر M کردیم.

چون وزن است بر g تقسیم کردیم. اگر جرم بود نیازی به تقسیم نبود.

$$\rightarrow V_i = \frac{W_{ei}}{g}\, w_i\, Q_i(t) \longrightarrow$$ برش پایه کل $$V = \frac{1}{g}\sum_i W_{ei}\, w_i\, Q_i(t)$$

اثبات رابطه بالای صفحه:

$$L_i = \{\phi\}_i^T [m] \{1\} = \begin{Bmatrix}\phi_{1i} & \phi_{2i} & \phi_{3i}\end{Bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} =$$

$$\Rightarrow L_i = m_1\phi_{1i} + m_2\phi_{2i} + m_3\phi_{3i} = \frac{W_1\phi_{1i}}{g} + \frac{W_2\phi_{2i}}{g} + \frac{W_3\phi_{3i}}{g}$$

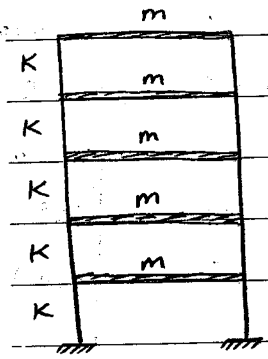
$$L_i^2 = \left(\frac{\sum_j^n W_j\phi_{ji}}{g}\right)^2 = \frac{1}{g^2}\left(\sum_j^n W_j\phi_{ji}\right)^2$$

$$M_i = \{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_i = \phi_{1i}^2 m_1 + \phi_{2i}^2 m_2 + \phi_{3i}^2 m_3$$

$$\Rightarrow M_i = \sum_j^n \frac{\phi_{ji}^2 W_j}{g}$$

Date: Subject:

مثال: توزیع جرم مؤثر مودال. (تحت زلزله السنترو)



$M_i^* = ?$, $\{s\}_i = ?$

V_{bi} را برای هر مود رسم کنید.

$m = 0.259\ ton$

$K = 31.54\ KN/m$

$\xi = \%5$

$\omega_1 = 3.142$ $\qquad \omega_2 = 9.170$

$\omega_3 = 14.457$ $\qquad \omega_4 = 18.573$ $\qquad \omega_5 = 21.186$

$$\{s\}_i = \gamma_i [m]\{\phi\}_i , \quad \gamma_i = \frac{L_i}{M_i} , \quad L_i = \{\bar{\phi}\}_i^T [m]\{i\}$$

$$L_1 = \{0.334 \quad 0.641 \quad 0.895 \quad 1.078 \quad 1.173\}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} m = 1.067$$

$L_2 = -0.336$, $L_3 = 0.177$, $L_4 = -0.099$, $L_5 = 0.045$

$\gamma_1 = \frac{L_1}{M_1} = 1.067$, $\gamma_2 = -0.336$, $\gamma_3 = 0.177$, $\gamma_4 = -0.099$, $\gamma_5 = 0.045$

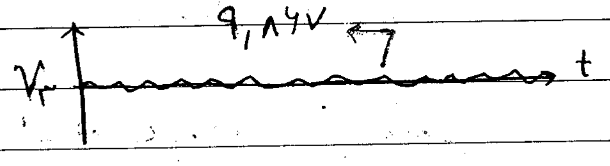
$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = 1$

$$\{s\}_1 = 1.067\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.334 \\ 0.641 \\ 0.895 \\ 1.078 \\ 1.173 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.356 \\ 0.684 \\ 0.956 \\ 1.150 \\ 1.252 \end{Bmatrix} m$$

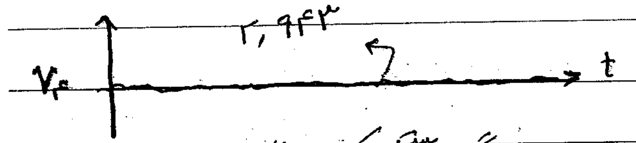
به همین ترتیب $\{s\}_2$ و ... و $\{s\}_5$ بدست می‌آید.

Raz

Date: Subject:

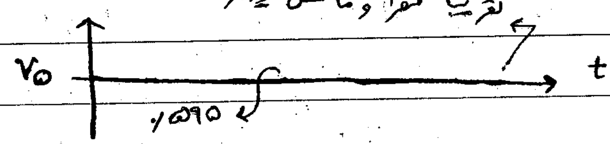


Mode 3



Mode 4

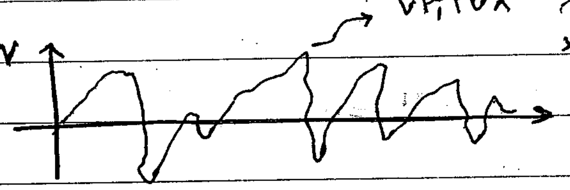
تقریباً صفر و ماکس ۴/۰



Mode 5

این عدد جمع اعداد بالا نیست

چون ماکزیمم های مودها در یک نقطه اتفاق نمی افتد



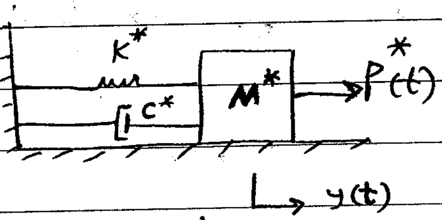
برش پایه کل :

نتیجه: مود اول دخالت بسیار دارد، مود دوم کمتر و مودهای بعدی خیلی کمتر.

نکته: اگر بخواهیم شکل مود دوم را داشته باشیم ابزارهایی قرار می دهیم تا نیروهای خارجی اعمال کند و سازه را وادار کنیم که با مود دوم ارتعاش کند.

Date: Subject:

$m(x)$: جرم واحد طول تیر



$EI(x)$: ضریب سفتی تیر

به صورت SDOF مدل شد: ← جابجایی مدل را معادل کنیم که $y(t)$ است.

در این روش فرض می‌شود:

$u(x,t) = \phi(x)\, y(t)$

به حاصلضرب دو ترم، یک تابع x، یک تابع t

$y(t)$ ← بیشترین جابجایی تیر

نکته: اگر توزیع جرم و سفتی یکنواخت باشد و تابع شکل مناسب انتخاب شود ← جوابهای نسبتاً خوبی پیدا می‌شود.

نکته: از این روش به عنوان یک روش مقدماتی (تقریبی) می‌توان کمک گرفت.

تابع شکل (به دلخواه انتخاب می‌شود): $\phi(x)$

مختصات تعمیم یافته: $y(t)$

• تعیین M^*:

تابع زمان

$T_{\text{تیر}} = \frac{1}{2}\int_L (m\,dx)(\phi \dot{y})^2 = \frac{1}{2}\dot{y}^2 \int_L m\phi^2\,dx$

$T_{\text{مدل}} = \frac{1}{2} M^* \dot{y}^2$

Date: Subject:

• تعیین c^* :

$c^* = 2\xi M^* \omega^*$

برای مدل سیستم یک آ.ت.ا

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}}$$

معادله حرکت در مختصات تعمیم یافته:

$$M^*\ddot{y} + C^*\dot{y} + K^*y = P^*$$

مدل

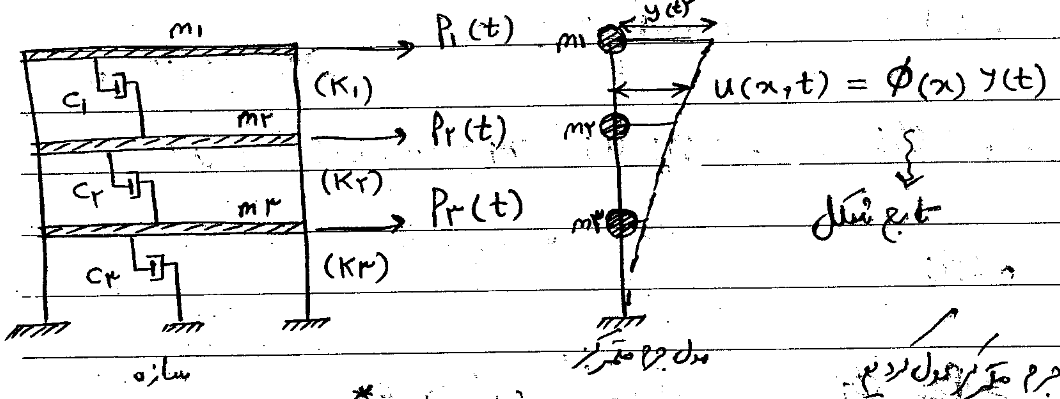
نکته: در این روش اگر تابع شکل را خوب انتخاب کنیم جواب های خوبی می دهد. (می تواند تا ۹۰٪ جواب شبیه روش مودال باشد.)

با حل معادله فوق y و از رابطه $u = \phi . y$ ، u بدست می آید.

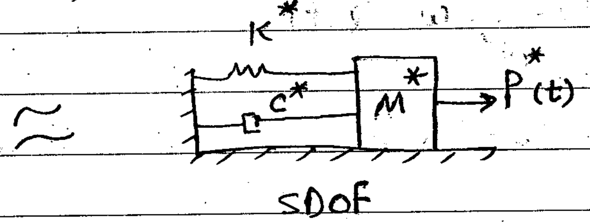
ϕ را داریم و y را نداریم که باید بدست آید.

Date: .... Subject: ....

۴ـ قاب متمرکز با چند جرم متمرکز (قاب برشی)



قبلاً به جرم متمرکز مدل کردیم.



حال به روش مختصات تعمیم یافته می‌خواهیم مدل کنیم به یک جرم.

$$M^*: \quad \sum \frac{1}{2} m_i (\phi_i \dot{y})^2 = \frac{1}{2} M^* \dot{y}^2 \longrightarrow M^* = \sum m_i \phi_i^2$$

به همین سادگی برای K^* و P^* نیز انجام می‌دهیم:

$$K^*: \quad \sum \frac{1}{2} \underbrace{K_i}_{\text{سفتی برشی}} (\underbrace{\Delta\phi_i \cdot y}_{\text{Drift طبقه}})^2 = \frac{1}{2} K^* y^2 \longrightarrow K^* = \sum K_i \Delta\phi_i^2$$

نکته: حال اگر دو یا چند فنر نیز اضافه شود باید انرژی ناشی از آنها نیز درنظر گرفته شود.

$$P^*: \quad \sum P_i (\phi_i \delta y) = P^* \delta y \longrightarrow P^* = \sum P_i \phi_i$$

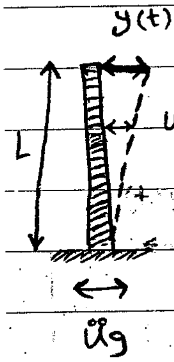
$$C^* = 2 M^* \omega^* \xi$$

Raz

Date: ………… Subject: …………

مثال 11-1) معادلات دیفرانسیل حرکت با روش مختصات تعمیم یافته (جرم پیوسته)

فرکانس و معادله دیفرانسیل حرکت در مختصات تعمیم یافته = ?



جرم واحد طول : m

$u(x,t) = \phi(x)\, y(t)$

فرض کنید : $\xi = 10\%$ و $EI = cte$, $\phi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$

$$M^* = \int_0^L m\phi^2\,dx = \int_0^L m\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.226\, mL$$

$$K^* = \int_0^L EI\,\phi''^2\,dx = EI\int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2}\right)^2 \cos^2\frac{\pi x}{2L}\,dx = 3.04\,\frac{EI}{L^3}$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{3.04\, EI/L^3}{0.226\, mL}} = 3.66\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

$$C^* = 2\xi M^*\omega^* = 2\times 0.1\times 0.226\, mL\times 3.66\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} = 0.165\, mL\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

$$L = \int_0^L m\phi\,dx = m\int_0^L \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) dx = 0.364\, mL$$

$$P_e^* = L\ddot{u}_g = 0.364\, mL\,\ddot{u}_g$$

$$\rightarrow 0.226\, mL\,\ddot{y} + 0.165\, mL\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}\,\dot{y} + 3.04\,\frac{EI}{L^3}\,y = 0.364\, mL\,\ddot{u}_g$$

$$\rightarrow \ddot{y} + 0.73\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}\,\dot{y} + 13.45\,\frac{EI}{mL^4}\,y = 1.61\,\ddot{u}_g$$

Date: Subject:

وزن کل مرده طبقه پشت بام = ۱۷۳۵ KN ,

۳,۲ 〃 〃 〃 〃 و ۲ = ۱۹۸۰ KN

۱ 〃 〃 〃 〃 = ۱۹۹۰ KN

$E = ۲۴,۸ \times ۱۰^{۶}\ KN/m^{۲}$

$m_1 = \frac{۱۹۹۰}{۴ \times ۹,۸۱} = ۵۰,۷۱\ ton \quad , \quad m_2 = m_3 = \frac{۱۹۸۰}{۴ \times ۹,۸۱} = ۵۰,۴۶\ ton$

$m_4 = \frac{۱۷۳۵}{۴ \times ۹,۸۱} = ۴۴,۲۲\ ton$

$K_{\text{یک ستون}} = ۱۲ \frac{EI}{L^{۳}}$

$I = \frac{(۳۵)^{۴}}{۱۲} \times ۱۰^{-۸} = ۱۲۵۰۰,۵ \times ۱۰^{-۶}\ m^{۴}$

$K_{12} = K_{23} = K_{34} = \frac{۲ \times ۱۲ \times (۲۴,۸ \times ۱۰^{۶})(۱۲۵۰۰,۵ \times ۱۰^{-۶})}{۳,۲^{۳}} = ۲۷۵۷۹\ KN/m$

$K_{01} = \frac{۲ \times ۱۲ \times (۲۴,۸ \times ۱۰^{۶})(۱۲۵۰۰,۵ \times ۱۰^{-۶})}{۳,۵۰^{۳}} = ۲۵۴۰۹\ KN/m$

a) $\phi(x) = \sin \frac{\pi x}{۲h}$

$M^* = \Sigma m_i \cdot \phi_i^{۲} \quad , \quad K^* = \Sigma K_i \cdot \Delta\phi_i^{۲}$

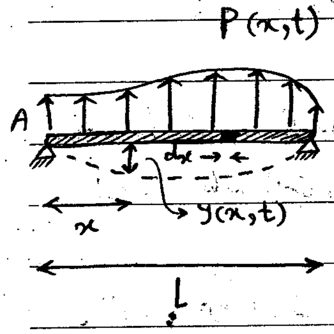
Raz

Date: .... Subject: ....

مثال ۱۲-۱۸

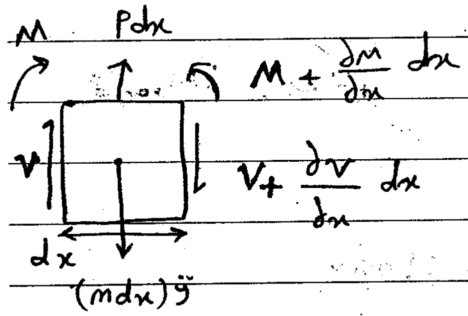
* ارتعاشات قطعات با جرم پیوسته.

۱- ارتعاش یک تیر با جرم پیوسته.



$y(x,t)=?$

$m(x)$, $EI(x)$ → جرم و ضریب سختی



$$\sum F_y = 0 \rightarrow V - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x}dx\right) - (m\,dx)\ddot{y} + P\,dx = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial x} = P$$

می‌دانیم
$$\begin{cases} M = EI\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ V = \dfrac{\partial M}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow m\ddot{y} + EI\,y^{(4)} = P$$

مشتق چهارم نسبت به x

$$y = \phi(x)\,f(t)$$

تابع شکل ، تابع زمان

جواب :

$$\phi(x) = A\sin ax + B\cos ax + C\sinh ax + D\cosh ax$$

Date: Subject:

$$(1) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B + D = 0 \\ \qquad\qquad \Rightarrow B = D = 0 \\ -B + D = 0 \end{array} \right. \leftarrow (2)$$

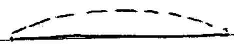
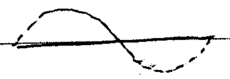
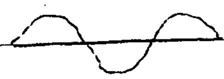
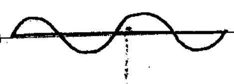
$$\xrightarrow{(3)} \left\{ \begin{array}{l} A \sin aL + C \sinh aL = 0 \\ \qquad\qquad \longrightarrow 2C \sinh aL = 0 \longrightarrow C = 0 \\ -A \sin aL + C \sinh aL = 0 \end{array} \right. \xleftarrow{(4)}$$

a که با این ارتباط‌ها دارای یک جواب منحصر به فرد نیست

$$A \sin aL = 0 \rightarrow \sin aL = 0 \rightarrow a_n L = n\pi \rightarrow a_n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$ ω ها پیدا شدند.

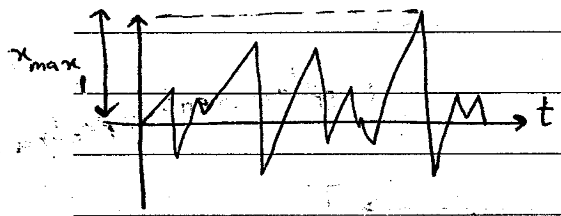
$$\Rightarrow \phi(x) =$$

n	$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$	$\phi(x)$	شکل مود
1	$\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$	$\sin \frac{\pi}{L} x$	
2	$4\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$	$\sin \frac{2\pi}{L} x$	
3	$9\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$	$\sin \frac{3\pi}{L} x$	
4	$16\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$	$\sin \frac{4\pi}{L} x$	

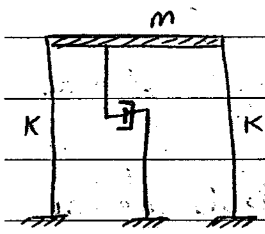
نکته: مطلب جرم پیوسته را همین جا تمام می‌کنیم چون در عمل در رشته سازه خیلی کاربرد ندارد و بیشتر در مکانیک کاربرد دارد. برای قطعات خاصی که جرم گسترده دارند و تحت ارتعاش قرار دارند.

Date: Subject:

$$1)\begin{cases}\omega=\omega_1\\ \ddot{x}_g,\xi\end{cases}\longrightarrow x=\frac{-1}{\omega_{1D}}\int_0^t \ddot{x}_g\, e^{-\xi\omega_1(t-\tau)}\sin\omega_{1D}(t-\tau)\,d\tau$$



نکته: $\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$ حال برای $x_{max_2} \leftarrow \omega$ را عوض می‌کنیم یعنی K و یا m را تغییر می‌دهیم به عبارت دیگر قاب را عوض می‌کنیم. به عبارت دیگر هر بار همون زلزله و همون میرایی با قاب دیگر آزمایش می‌شود و x_{max} محاسبه می‌شود.

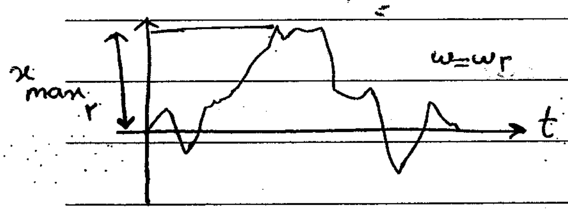


SDOF

قاب تحت یک زلزله به خصوص

$\ddot{x}$

$$2)\begin{cases}\omega=\omega_2\\ \ddot{x}_g,\xi\end{cases}\longrightarrow x=\frac{-1}{\omega_{2D}}\int_0^t \ddot{x}_g\, e^{-\xi\omega_2(t-\tau)}\sin\omega_{2D}(t-\tau)\,d\tau$$



Raz

Date: Subject:

نکته: پریود زیاد یعنی سازه نرم تر است.

بنابراین با در دست داشتن طیف های جواب با یک ترانس می توان حداکثر جواب را بدست آورد.

● رسم سه طیف جواب در یک دیاگرام.

در یک برگه آچار می خواهیم هر سه نمودار را رسم کنیم.

با ترتیب خوبی می توان سه نمودار طیف را در یک دیاگرام لگاریتمی نشان داد.

- رابطه شتاب و جابه جایی (بدون درنظر گرفتن میرایی):

شتاب مطلق

$m\ddot{x} = Kx \rightarrow \ddot{x} = \omega^2 x$ (بدون درنظر گرفتن علامت منفی)

← شتاب مطلق ω^2 برابر جابه جایی است.

اگر حداکثر شتاب مطلق را (بدون درنظر گرفتن میرایی) با PSA (شبه شتاب) نمایش دهیم:

$$\underbrace{PSA}_{\text{شبه شتاب طیفی}} = \omega^2 \underbrace{SD}_{\text{ماکزیمم جابه جایی}} \qquad (1)$$

نکته: وقتی می گوییم شتاب طیفی منظور شتاب مطلق است.

نکته: رابطه (1) الزاماً درست نیست چون اولاً میرایی را درنظر نگرفتیم ثانیاً ماکس ها الزاماً مساوی نیستند ولی فرض کردیم که مساوی اند.

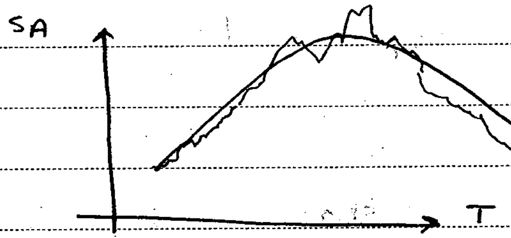
$$x = \frac{1}{\omega_D}\underbrace{\int \ddot{x}_g\, e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D (t-\tau)\, d\tau}_{\text{شبه سرعت}} = \frac{\text{شبه سرعت}}{\omega_D} \text{ جابه جایی}$$

شبه سرعت ← از نظر دیمانسیون این سرعت است.

۲_ طیف طرح (Design Response spectra)

طیف طرح از ادغام چند طیف اصلاح شده برای تعدادی زلزله بدست می‌آید.

بعنوان مثال:



طیف شتاب مربوط به یک زلزله مشخص

پس از رسم چند طیف اصلاح شده برای چند زلزله اتفاق افتاده در یک ساختگاه، آنها را به شیوه مناسبی ادغام می‌کنیم تا طیف طرح بدست آید.

نتیجه: برای هر پارامتری چه سرعت و چه جابجایی و چه شتاب اگر خواستیم برای یک منطقه طیف طرح را رسم کنیم باید طیف مربوط به آن پارامتر مشخص مثلاً جابجایی را برای انواع زلزله رسم کنیم. سپس بعد طیف ها را اصلاح کنیم به این صورت که منحنی های شکسته را صاف کنیم برای اینکه ما احتمال را برای زلزله‌های بعدی می‌خواهیم بدهیم و دقیقاً مثل این زلزله مشخص که ما طیف آن را داریم نیست. سپس برای طیف طرح از بین این منحنی های صاف یکی را ارائه می‌دهیم. طیف‌های مربوط به یک زلزله با انواع میرایی در جزوه تمرین های استاد رسم شده. (زلزله السنترو)

توجه شود که در نمودار مربوط به طیف شتاب زلزله السنترو در جزوه استاد باید اعداد قرائت شده را در g ضرب کنیم چون این اعداد درصدی از g هستند.

نکته: SD و SV و SA مربوط به مدل یک درجه آزادی است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۴- مراحل روش آنالیز طیفی: مهم

۱) $\{\omega\}$ ، $[\phi]$ و $[M]$ را حساب می‌کنیم

۲) $\{L\}=[\phi]^T[m]\{i\}$ را حساب می‌کنیم

۳) با استفاده از طیف مناسب SD_i ، SV_i و SA_iها را به ازای مقادیر مختلف ω_n قرائت می‌کنیم.

۴) مقادیر $\frac{L_i}{M_i}$ را تعیین می‌کنیم

۵) $Y_{i\,max}=\frac{L_i}{M_i}SD_i$ را برای مودهای مختلف حساب می‌کنیم

۶) حداکثر جابه‌جایی‌ها و یا حداکثر برش پایه را از روابط داده شده محاسبه می‌کنیم

$$SD=\frac{Q_{max}}{\omega_D\simeq\omega}\rightarrow Q_{max}=SD.\omega$$

SD از نمودار بدست می‌آید. فقط کافی است ضربدر ω کنیم تا Q_{max} پیدا شود. حال Q_{max} را ضربدر ω می‌کنیم تا SA پیدا شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

با استفاده از نمودار جزوه استاد:

n	$T=\frac{2\pi}{\omega}$	S_D
۱	۰/۴۷	۰/۶۰
۲	۰/۲۱	۰/۱۴
۳	۰/۱۵	۰/۰۷
۴	۰/۱۱	۰/۰۳

برای $\xi=$ ۵٪

$$y_{i\,max}=\frac{L_i}{M_i}S_{Di}$$

$$[L]=[\phi]^T\{m\}\{1\}=\begin{bmatrix} ۱/۰۰۰۰ & ۰/۷۷۹۱ & ۰/۴۹۶۵ & ۰/۲۳۵۱ \\ ۱/۰۰۰۰ & -۰/۰۹۹۶ & -۰/۵۳۹۹ & -۰/۴۳۷۶ \\ -۰/۹۰۱۴ & ۱/۰۰۰ & -۰/۱۵۸۶ & -۰/۷۰۸۰ \\ ۰/۱۵۴۴ & -۰/۴۴۸۲ & ۱/۰۰۰۰ & -۰/۶۳۶۹ \end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱/۰۰۰۰ & ۱/۵۵۸۲ & ۰/۹۹۳۰ & ۰/۷۰۵۳ \\ ۱/۰۰۰۰ & -۰/۱۹۹۲ & -۱/۰۷۹۸ & -۰/۳۲۱۸ \\ -۰/۹۰۱۴ & ۲/۰۰۰۰ & -۰/۳۱۷۲ & -۲/۱۲۴۰ \\ ۰/۱۵۴۴ & -۰/۸۹۶۴ & ۲/۰۰۰۰ & -۱/۹۱۰۷ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix} ۴/۲۵۶۵ \\ -۱/۵۹۱۸ \\ -۱/۳۴۲۶ \\ -۰/۶۵۲۷ \end{Bmatrix}$$

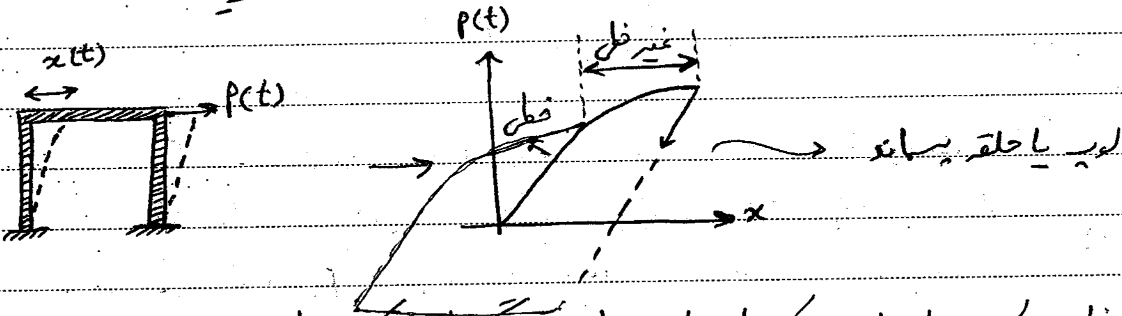
تحلیل دینامیکی غیرخطی :

۱_ انواع رفتار غیرخطی :

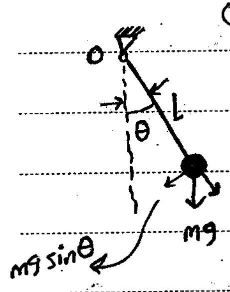
● غیرخطی مصالح Material Nonlinearty

● غیرخطی هندسی Geometric Nonlinearty

غیرخطی مصالح زمانی است که رابطه نیرو ـ تغییرمکان بعلت آنکه مصالح از محدوده الاستیک خارج شده، خطی نیست . در اینصورت f_s (نیروی برشی ستون ها) در هر لحظه تغییر می کند.



غیرخطی هندسی زمانی است که جابه جایی ها بقدری بزرگ است که رابطه نیروی مقاوم f(s) و جابه جایی خطی نمی باشد. بعنوان مثال :



$mg\sin\theta$: نیروی اینرسی حول O

$$\sum M_O = 0 \rightarrow mL^2\ddot{\theta} + mg\sin\theta \cdot L = 0$$

$$\rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta - \frac{g}{6L}\theta^3 + \dots = 0$$

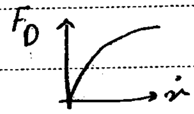
* آونگ را تحت شرایط اولیه به ارتعاش در آوردیم.

نکته : $\sin\theta$ را نمی توانیم θ بگذاریم چون جابه جایی ها بزرگ است ولی می توانیم برحسب θ ، θ^3 ، θ^5 و ... بنویسیم.

مبحث غیرخطی که استاد درس می دهد غیرخطی هندسی است نه مصالح.

Subject:
Year. Month. Date.

x_i یعنی x در لحظه t_i

نمودار  یعنی ساختار میراگر طوری ساخته شده که با سرعت رابطه خطی ندارد و غیر خطی است. واین واقعیت را نشان می‌دهد.

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$
$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$
$$\Delta \dot{x} = \dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i$$
$$\Delta \ddot{x} = \ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i$$

هدف: می‌خواهیم معادله دیفرانسیل را در حالت غیر خطی هندسی تشکیل بدیم و سپس حل کنیم. دیگر نمی‌توان از انتگرال دوهامل استفاده کرد چون انتگرال دوهامل شامل مجموعه ای ضربه است و ما از جمع آثار رفتیم. جمع آثار هم در حالت خطی صادق است ولی الان که غیر خطی است باید از روش مستقیم برویم.

معادله دیفرانسیل حرکت را برای هر لحظه $t=t_i$ و $t=t_{i+1}$ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} F_I(t_i) + F_D(t_i) + F_S(t_i) = P(t_i) \longrightarrow \text{معادله در زمان } t_i \\ F_I(t_{i+1}) + F_D(t_{i+1}) + F_S(t_{i+1}) = P(t_{i+1}) \longrightarrow \text{معادله در زمان } t_{i+1} \end{cases}$$

هدف این است که در انتها منحنی x برحسب t را پیدا کنیم. ابتدا یک رابطه بین نیروها در یک فاصله Δt می‌نویسیم بنام رابطه جزئی یعنی رابطه ای که در یک زمان کوتاه صادق است.

این دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

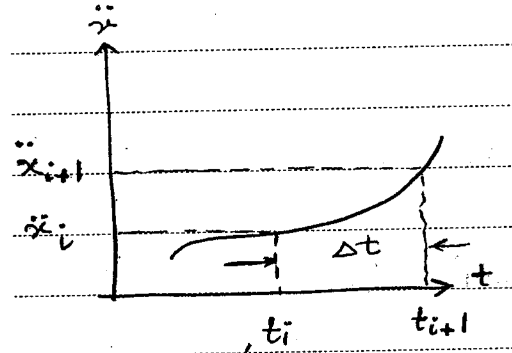
$$\underbrace{F_I(t_{i+1}) - F_I(t_i)}_{\Delta F_{Ii}} + \underbrace{F_D(t_{i+1}) - F_D(t_i)}_{\Delta F_{Di}} + \underbrace{F_S(t_{i+1}) - F_S(t_i)}_{\Delta F_{Si}} = \underbrace{P(t_{i+1}) - P(t_i)}_{\Delta P_i}$$

تغییرات نیروی اینرسی — تغییرات نیروی میرایی — تغییرات نیروی سختی — تغییرات نیروی خارجی

Subject:
Year. Month. Date:

۳ـ روش گام به گام با فرض شتاب ثابت.

در این روش در فاصله زمانی کوتاه $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ مقدار شتاب ثابت فرض می‌شود. این مقدار ثابت را می‌توان میانگین $\ddot{x}_{i+1}$ و $\ddot{x}_i$ در نظر گرفت:



τ: متغیر زمان در فاصله Δt

$t_i \longmapsto \tau$

$t = t_i$
$\tau = 0$

نمودار شتاب

فرض شتاب ثابت: (1) $\ddot{x}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1})$

انتگرال می‌گیریم

(2) $\dot{x}(\tau) = A + \frac{\tau}{2}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1})$

هدف: دنبال رابطه‌ای مستقیم بین دو نقطه متوالی برای جابجایی و سرعت و شتاب و وقتی بدست آوردیم برویم سراغ نقاط بعدی و روش گام به گام را شروع کنیم.

$\tau = 0 \; (t = t_i) \longrightarrow \dot{x}(0) = \dot{x}_i \longrightarrow A = \dot{x}_i$

$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_i + \frac{\tau}{2}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1})$ ؛ (3)

رابطه اخیر را برای لحظه $\tau = \Delta t$ ، $(t = t_{i+1})$ می‌نویسیم.

$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1})$ (4)

سمت راست‌شان برابرات ← سمت چپ هم باید برابر باشد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

با مقایسه این رابطه (۱۱) و رابطه (۴):

تغییرات سرعت ← $\Delta \dot{x}_i = \frac{2}{\Delta t}(\Delta x_i - \dot{x}_i \Delta t)$ (۱۲)

$\rightarrow \Delta \dot{x}_i = \frac{2}{\Delta t}\Delta x_i - 2\dot{x}_i$ (۱۳)

نکته: تغییرات جابه‌جایی را هنوز نداریم. تغییرات شتاب و سرعت برحسب تغییرات جابه‌جایی است و باید تغییرات جابه‌جایی را پیدا کنیم.

نکته: اگر Δx_i و $\Delta \dot{x}_i$ و $\Delta \ddot{x}_i$ را پیدا کنیم ← ارتباط بین دو نقطه پیدا شده ← به روش گام به گام جابه‌جایی و شتاب و سرعت نقاط دیگر را پیدا می‌کنیم.

$\Delta \dot{x}_i$ (تغییرات سرعت) و $\Delta \ddot{x}_i$ (تغییرات شتاب) را از دو رابطه اخیر در رابطه جزئی تعادل قرار می‌دهیم:

$$m\left(\frac{4}{\Delta t^2}\Delta x_i - \frac{4}{\Delta t^2}\dot{x}_i . \Delta t - 2\ddot{x}_i\right) + c_i\left(\frac{2}{\Delta t}\Delta x_i - 2\dot{x}_i\right) + K_i \Delta x_i = \Delta P_i$$

و یا:

$$\underbrace{\Delta x_i \left(K_i + \frac{2c_i}{\Delta t} + \frac{4m}{\Delta t^2}\right)}_{K_i^*} = \underbrace{\Delta P_i + \dot{x}_i\left(\frac{4m}{\Delta t} + 2c_i\right) + 2m\ddot{x}_i}_{\Delta P_i^*}$$

$$\rightarrow K_i^* . \Delta x_i = \Delta P_i^* \rightarrow \Delta x_i = \frac{\Delta P_i^*}{K_i^*}$$

نکته: با داشتن تغییرات جابه‌جایی ← تغییرات سرعت و شتاب بدست می‌آیند ← حال می‌توانیم با داشتن سرعت و شتاب و جابه‌جایی در لحظه t_i ← سرعت و شتاب و جابه‌جا لحظه t_{i+1} را هم بدست آوریم ← حال به سراغ Δt های بعدی می‌رویم.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\ddot{x}_0 = \frac{1}{m}\left(P_0 - C_0\dot{x}_0 - K_0 x_0\right) = \frac{1}{0.2}(10) = 50\ m/s^2$$

$$K_i^* = K_i + \frac{2C_i}{\Delta t} + \frac{4m}{\Delta t^2} = K_i + \frac{4(0.2)}{(0.05)^2} = K_i + 320$$

$$\Delta P_i^* = \Delta P_i + \left(\frac{4m}{\Delta t}\right)\dot{x}_i + 2m\ddot{x}_i = \Delta P_i + 16\dot{x}_i + 0.4\ddot{x}_i$$

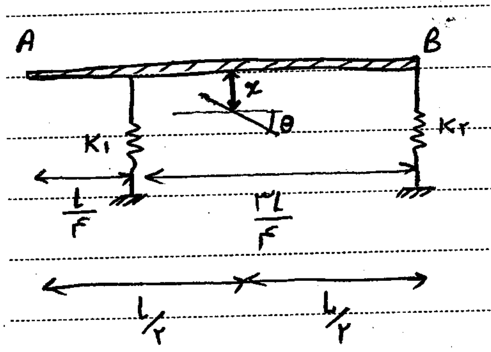
$$\Delta\dot{x}_i = \frac{2}{\Delta t}\Delta x_i - 2\dot{x}_i = 40\Delta x_i - 2\dot{x}_i$$

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{m}\left(P_i - C_i\dot{x}_i - K_i x_i\right) = 5\left(P_i - F_{S_i}\right), \quad \begin{cases} x_{i+1} = \Delta x_i + x_i \\ \dot{x}_{i+1} = \Delta\dot{x}_i + \dot{x}_i \end{cases}$$

Subject:
Year.　Month.　Date.　( )

تمرین های سری ۸ .

۸-۱ : میله صلب AB با جرم واحد طول m می تواند در امتداد قائم حرکت انتقالی و دوران حول مرکز جرمش نقطه O داشته باشد. معادلات دیفرانسیل حرکت را بنویسید.

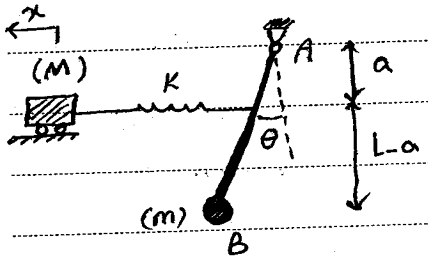


PAPCO

تمرین های سری ۸

Subject:

Year. Month. Date. ( )



۸-۳) یک دستگاه زلزله‌نگار به شکل مقابل مدل شده است. میله AB صلب و بدون وزن فرض می‌شود. معادلات دیفرانسیل حرکت را بنویسید. θ = کوچک