جزوه پدیده‌های انتقال

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject: پدیده‌های انتقال (سیدر)
Year. Month. Date. ( )

I) انتقال مومنتوم (عامل حرکت): عامل آن اختلاف مومنتوم است.
که چیزی منتقل می‌کند تغییر رفتار می‌دهد

II) انتقال حرارت: عامل آن اختلاف و تفاوت دما است.

III) انتقال جرم: به علت اختلاف غلظت باعث جابجایی می‌شود.
علم مطالعه [illegible] وارده به یک توده‌ی جرم است.
این سه مورد در کنار هم از قوانین مشابه استفاده می‌کنند برای همین در کنار هم پدیده انتقال نامیده می‌شوند.

به علت شبیه بودن این سه مورد است که معمولاً چیزی در مقابل آن‌ها مقاومت می‌کند.

I) در مورد سیالات و حرکت آن‌ها از استاتیک سیالات استفاده می‌کنیم (Fluid Static)

بلکه وارد حرکت دینامیک می‌شویم (رژیم جریان آرام) و بعد از آن استخراج معادلات ناویر استوکس

که تقریباً غیرقابل حل بوده‌اند و شرایط خاص باعث حل آن‌ها خواهد شد.

رژیم حرکت در سیالات:
آرام — laminar flow
مغشوش — turbulent flow

حرکت سیال در داخل یک سیستم با سیالی توزیع مختلفی دارد که مغشوش‌ترین آن برخورد [illegible]

است.

بشر تاکنون فقط توانسته توزیع جریان آرام را به دست آورد و توزیع جریان آشفته نامشخص

است. حرکت ما و حرکت سیالات در یک جریان آشفته است.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جریان آرام مانند شیر آبی است که آرام باز شود و جریان آب شکل یکنواخت از آن خارج می‌شود

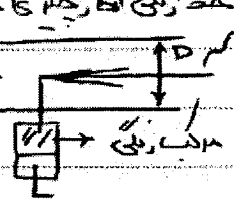
و از دور اصلاً جریان آن را حس نمی‌کنیم و لحظه‌ای که شیر را بیشتر باز می‌کنیم جریان دیگر مستقیم نیست

و درهم حرکت است آن جا می‌شود که این حالت برای جریان آشفته است.

خط رنگی اگر چیزی جابجا می‌شود جریان آنجا برقرار است (خط جریان)

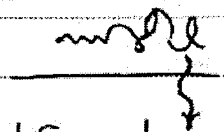
لوله‌ی شیشه‌ای شفاف

Laminar flow



اگر جریان شیر بیشتر شود.

Turbulent flow جریان آشفته



به علت وجود گردابه‌های عمود بر مسیر حرکت، مثل اینکه موجی بر موج دیگر سوار شده است. عوامل هم

دودی که از دودکش کارخانه خارج می‌شود، دود سیگار، جوی آب، کناره‌های دریا است.

– هوا ساکن است و هواپیما حرکت می‌کند اما ما برعکس فرض می‌کنیم پس هوایی که از روی هواپیما

عبور می‌کند جریان آشفته است.

چون نمی‌توانیم جریان آشفته را مدل‌سازی می‌کنیم ولی مشکل ما آن است که هر مدلی که به دست

آوردیم هرجایی نتوانستیم استفاده کنیم (مثل جهان شمول universe پیدا نشد).

عامل حرکت در سیالات ① اختلاف فشار است ← از نقطه پر فشار به نقطه کم فشار حرکت

نیروی عمود بر سطح ← *driving force*

به وجود می‌آید.

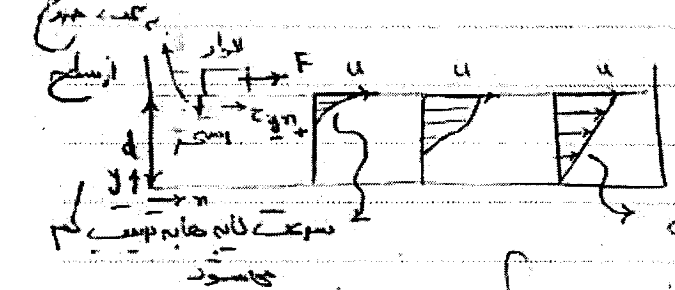
Subject:
Year. Month. Date.

② اختلاف چگالی (هوای اطراف را با خود به دوران در می‌آورد، تنش به طرف بالا می‌رود) ← عامل دورانی ←

اختلاف دما باعث تغییر چگالی هم داریم.

③ وزن (روی سطح شیب‌دار ثابت نمی‌ماند) ← فشار همه جا فشار عمودی است

④ نیروهای دائمی اصطکاک (به جای عمل کردن عمود بر سطح، مماس بر سطح عمل می‌کنند)



$\tau \propto u/d \Rightarrow \tau = \eta \, du/dy$

تنش برشی

لزجت به سرعت بستگی به کم شدن می‌شود

لزوم دیفرانسیل گیری " توزیع خطی

لزوم

اگر است در جهت مماسی باشد تنش برشی عمل می‌کند و الوارها روی هم سر می‌خورند.

وقتی شروع حرکت کرد اختلاف سرعت با لایه‌های زیرین خواهد داشت و باعث ایجاد نیروی مماسی می‌شود. — تنش برشی و نیروی وارد بر سطح دو عامل مهم هستند.

نیروی مماسی را به ازای واحد سطح به عنوان تنش سطحی می‌گویند می‌تواند عامل حرکت باشد.

— اگر سیال را از داخل میدان مناسب عبور دهیم نیروی الکترومغناطیسی باعث حرکت می‌شود که

عبور الکترومغناطیسی پیوسته نیاز به مانع حرکت می‌باشد که مانند الکترومغناطیسی ... می‌شود.

نیرو اساسی ← چون سیستم دینامیکی روی این کره است و بدون حرکت نیرو عقب است.

آنچه نیرو دینامیک ← سیال را حرکت کند

این نیرو دینامیک ← که آنها را حرکت می‌دهد

اساسی و دینامیک سیال

www.vep... .com
Publish ... Mino

Subject:
Year. Month. Date.

دینامیک گازها: سیال از مایع به گاز تبدیل شده است. اتفاق مهم آن است که تراکم پذیر می شود.

سیال حقیقی که مایع است تراکم ناپذیر است.

سیالی که تحت تأثیر فشار و حرارت دانسیته اش تغییر کند تراکم پذیر است.
(سرعت صوت) اگر سرعت گاز از یک حدی بالاتر برود ← مایع تراکم ناپذیر است چون حجم کاهش نمی یابد.
سیالی که تحت تأثیر فشار و حرارت دانسیته آن ثابت باشد تراکم ناپذیر است ← دانسیته بستگی به فشار

علم مکانیک: بررسی نیروهای وارده به یک توده جرمی و تغییر وضعیت آن توده ی جرمی

توده جرمی اگر جرم جامد باشد ← طراحی جامدات / اگر مایع باشد $\text{Mach} = \frac{V}{\text{سرعت صوت}}$ محلی
← سیال تراکم ناپذیر

توده ی جرمی اگر سیال باشد ← مکانیک سیالات

سیال ایده آل: سیالی که ویسکوزیته نداشته باشد (نمی تواند لایه ای به لایه ی دیگر نیروی خاصی خود را منتقل کند) و اصطکاک وجود ندارد.

ویسکوزیته خاصیت fluidity (سیال) است و در هر دو جریان آرام و آشفته موثر است.

مایعات ویسکوزیته بالاتری نسبت به گازها دارند.
ویسکوزیته در مایعات با افزایش دما کاهش می یابد. شکل ظرف به خود می گیرد ←
فرق جامد و سیال: نیروی بین مولکولها در مورد جامدات بسیار قوی است اما در سیال ضعیف تر
به حدی بالا که شکل خود را حفظ می کند
است. در مورد گازها به مراتب ضعیف تر از مایعات است.
کل حجم را پر می کند

سیالات غیر نیوتنی

مایعات دارای سطح آزاد خواهند بود در صورتی که گازها سطح آزاد ندارند.

جامد در مقابل تنش برشی مقاومت می کند ولی سیالات تحمل بسیار پایینی دارند.

حرکت سیالات تغییر فرم است. سیالات نیوتنی دارای ویسکوزیته هستند.

جامد دارای حالت الاستیک است (با حذف نیرو به حالت اول برمی گردد) ولی سیالات تغییر فرم الاستیک ندارند. (جای شان دیگر برنمی گردد)

جامدات در مقابل تنش های کششی و فشاری و برشی مقاومت می کنند ولی سیالات در مقابل تنش فشاری مقاومند اما در مورد کششی و برشی نیستند و گازها در مقابل هیچ یک مقاوم نیستند.

واحد سرعت صوت ماخ نامیده است. عدد ماخ اگر از ۰/۳ بالاتر باشد رفتار گازها رفتار سیال تراکم پذیر خواهد بود.

در کوره های قوس الکتریک در اثر قوس الکتریکی بین الکترودها جریان الکتریکی زیادی به وجود می آید که موجب ذوب می شود. قوس بین الکترود و جامد مذاب باعث ایجاد جریان پلاسمایی می شود که دما ۲۰۰۰ K (خیلی بالا) و سرعت پرحجمی بالاست. بین الکترود و دیواره کوره و سطح مذاب جریان چرخشی به وجود می آید و مشکل ایجاد شده به علت ساییدن دیواره کوره است.

www.vepub.com
Publish Your Mind

$\frac{Kgm}{s^2} = N$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در حل عددی جواب تقریبی به دست می‌آید و جواب مربوط به نقاط گسسته است امّا در حل آنالیتیک جواب دقیق و برای همه مقادیر وجود خواهد داشت.

جریان آرام: به صورت لایه‌ای است و ملکول‌ها لایه‌ای حرکت می‌کنند و از لایه‌ای به لایه‌ی دیگر نمی‌روند. لایه‌ها به صورت موازی با هم حرکت می‌کنند.

جریان آشفته: به صورت لایه‌ای نیست بلکه mix می‌شود و بلافاصله مخلوط می‌شوند.
mixing خیلی بالایی دارد.
هم زدن چای مثال این است که جریان آرام به آشفته تبدیل شود.
برای تبدیل جریان آرام به آشفته باید disterbance ایجاد کنیم.

natural convection (جریان طبیعی) — force convection (جریان اجباری)

آرام باز کردن شیر در داخل لوله باعث تغییر سرعت می‌شود. سرعت تابع زمان است ولی شیر اگر باز باشد دیگر تغییر نمی‌کند سرعت با زمان دیگر فرق نمی‌کند.

حرکت‌ها می‌توانند مستقل از زمان یا مربوط به آن باشند. سرعت تابع مکان است ولی تابع زمان نیست تا زمانی که شرایط بیرونی تغییر کند.

steady state flow → (متغیرات نسبت به زمان صفر) مستقل از زمان، جریان پایدار

unsteady state flow → جریان ناپایدار

میزان آب‌دهی $\boxed{\dot{m} = \rho Q}$

دبی حجمی: حجم عبوری در واحد زمان (Q) $\left[\frac{m^3}{sec}\right]$

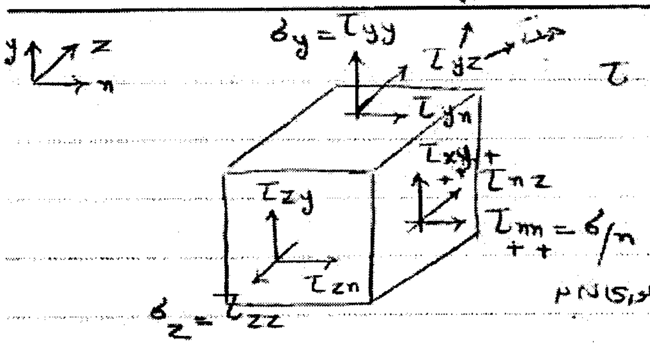
دبی جرمی: جرم عبوری در واحد زمان $(\dot{m})$ $\left[\frac{Kg}{sec}\right]$

دبی: عبور در واحد زمان

مرتبط با جریان ناپایدار ... زمانی تغییر می‌کند

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.



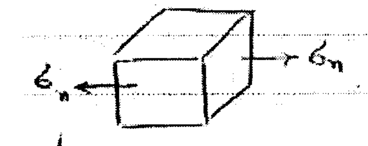
تنش : نیرو به ازای واحد سطح — برشی τ / نرمال σ

برای نوشتن اندیس τ : اولی مولفه محوری که بر صفحه‌ای عمود است و دومی مولفه جهت بردار تنش است.

در مجموع ۹ مولفه تنش داریم که دو به دو با هم برابرند. عملاً ۶ تا را که داشته باشیم همه را داریم.

وقتی دو اندیس یکسان باشند نرمال است و در غیر اینصورت مماسی است.

خاصیت تنش های برشی: $\tau_{yx} = \tau_{xy}$



σ عمود بر سطح به سمت داخل فشاری است $\left(\frac{N}{m^2}\right)$

(از سطح به سمت بیرون باشد + و کششی و اگر فشاری بود −)

برای دقیق + و − ابتدا بردار عمود بر سطح به سمت خارج در نظر می‌گیریم و جهت به علامت قرار داد نگاه می‌کنیم. در تنش های برشی اگر هر دو اندیس ها علامت یکسانی داشته باشند + و اگر مخالف باشند −.

ماتریس ۳×۳ متقارن (نسبت به قطر متقارن):

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

جملات های روی قطر ۳×۳ ، ۲×۲ و یک عضوی ۱×۱

نرمال ها

هیدرواستاتیک:

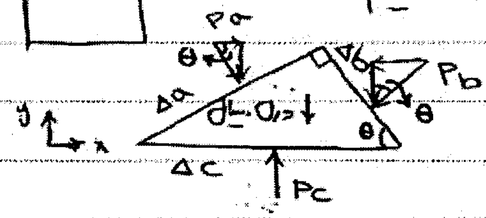
$760\ mmHg \times 13{,}6 = 10$

در دمای ۱۵°C سطح دریا فشار هوا فشار استاندارد می‌شود. $P_0 = 1{,}01325 \times 10^5\ Pa$

فشار در هر نقطه مستقل از جهت است و اسکالر : برای اثبات این قضیه حجم کوچکی را در نظر می‌گیریم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

از سیالی ساکن آب داریم. یک المان به عمق m انتخاب می‌کنیم.



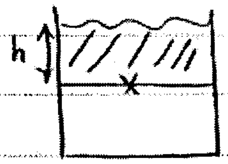
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow P_a \, \Delta a \, \Delta z \cos\theta - P_b \, \Delta b \, \Delta z \sin\theta = 0 \xrightarrow[\sin\theta\cos\theta]{\div} \boxed{P_a = P_b}$

فشار سطح عمق

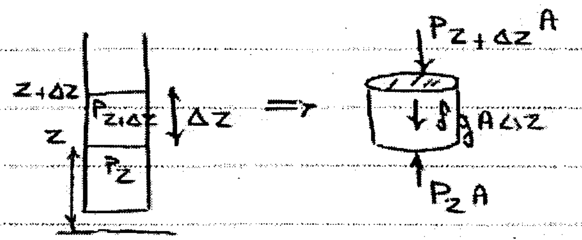
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow P_a \, \Delta a \, \Delta z \sin\theta + P_b \, \Delta b \, \Delta z \cos\theta - P_c \, \Delta C \, \Delta z + \rho g \underbrace{\tfrac{1}{2} \Delta a \Delta b \Delta z}_{\text{حجم مثلث}} = 0$

$\rightarrow P_a \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} - P_c + \rho g \tfrac{1}{2} \dfrac{\Delta a \Delta b}{\Delta C} = 0$

$\rightarrow \boxed{P_a = P_b = P_c}$ فشار یکسانی داریم برای واحد سطح



$P = \dfrac{F}{A} = \dfrac{\rho g \, V}{A} = \dfrac{\rho g A h}{A} = \rho g h$ فشار حاصل از وزن سیال



$P_{z+\Delta z} A + \rho g A \Delta z - P_z A = 0 \rightarrow P_{z+\Delta z} - P_z = -\rho g \, \Delta z \xrightarrow{\div \Delta z}$

$\dfrac{P_{z+\Delta z} - P_z}{\Delta z} = -\rho g \rightarrow \dfrac{dP}{dz} = -\rho g$ تغییرات فشار نسبت به ارتفاع

در حالت استاتیکی و ساکن

$\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta P}{\Delta z}$

$P = -\rho g z + C$

برای مایعات و گازها کاربرد دارد.

از رو کاسر ... مرجع ... خواهد

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.

هوا گاز کامل است:

$PV = nRT \rightarrow \frac{PM}{RT} = \frac{m}{V} = \rho$, $n = m/M$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{PMg}{RT} \rightarrow \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT}\int_{z=0}^{z} dz \xrightarrow[\text{ثابت باشد}]{\text{اگر دما تغییر نکند g نیز}}$$

$$\ln P - \ln P_0 = -\frac{Mg}{RT} z \rightarrow \ln \frac{P}{P_0} = -\frac{Mg}{RT} z \rightarrow P = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

$P = 1.01325 \times 10^{5} e^{-1.181\times10^{-4} z}$ — ۲۱٪ اکسیژن $M_{O_2} = 0.032 \frac{kg}{mol}$

$P_z =$ ۲۰۰۰۶ ۸۰۰۰۴ pa — ۷۹٪ نیتروژن $M_{N_2} = 0.028\ kg/mol$

$P_z =$ ۴۵۰۰ ۶۵۹۵۵۴ pa

$$\frac{Mg}{RT} = 1.181\times10^{-4} \left\{ \begin{array}{l} M_{\text{هوا}} = 0.21\times0.032 + 0.79\times0.028 = 0.02884 \\ \text{ثابت گازها} \quad R = 8.3144\ J/mol\,K \\ T = 288\,K \leftarrow 15^\circ C \\ g = 9.807\ m/s^2 \end{array} \right.$$

به ازای هر 1km که از سطح دریا بالا میرویم ۶٫۵ دما کم میشود: $T = 288 - 0.0065z$

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R}\int_{z=0}^{z} \frac{dz}{288-0.0065z} \rightarrow \ln \frac{P}{P_0} = \frac{Mg}{0.0065R} \times$$

$$\ln \frac{288-0.0065z}{288} \rightarrow P = P_0 \left(\frac{288-0.0065z}{288}\right)^{\frac{Mg}{0.0065R}} \quad 5.245$$

$P_0 = 1.01325\times10^{5}$

$P_z =$ ۲۰۰۰۰ ۴۷۹۵۲۵
$P_z =$ ۴۵۰۰۰ ۴۵۷۷۷۸
→ تصحیح دما در ارتفاع

در سطح دریا $z = 0$ چون $g = 9.8$

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\frac{M}{R}\int_{z=0}^{z} \frac{9.8067\times6388^2\, dz}{(288-0.0065z)(6388+z)^2} \rightarrow g = 9.8067\left(\frac{6388}{6388+z}\right)^2$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

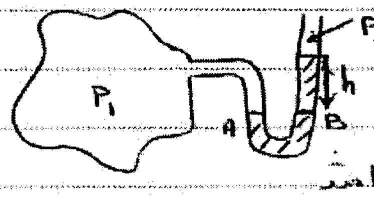
1atm = 760 mmHg حال اگر بر حسب آب بخواهیم جای ۱۳٫۶ به ۱ باید بگذاریم پس عدد

۷۶۰ تا ۱۳٫۶ برابر می‌شود ← آب 1atm = 10 m حدوداً $\rho_{\text{جیوه}} = 13.6\times10^{3}$

psi ← واحدهای دیگر 1atm = 14.7 psi $\frac{\text{پوند}}{in^2}$ ← اینچ

اگر مخزنی پر از گاز داشته باشیم فشار در همه نقاط آن یکسان است.

برای اندازه‌گیری فشار از مانومتر استفاده می‌کنیم که درون آن جیوه است و با استفاده از اختلاف ارتفاع محاسبه می‌کنیم.



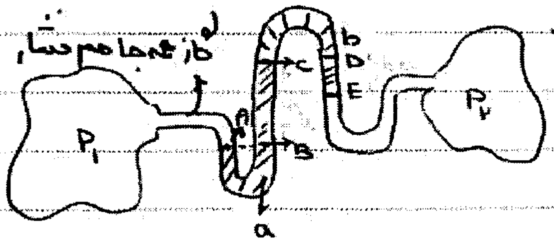
$P_A = P_B$

$P_1 = P_0 + \rho g h$

هر دو نقطه که در داخل یک سیال قرار بگیرند و ارتفاع آن برابر باشد فشار آن‌ها نیز برابر است.

$\underset{\text{فشار مطلق}}{P_1} - P_0 = \rho g h \rightarrow \underset{\text{فشار نسبی}}{P_1'} = \rho g h$

اگر با دو گاز فشار طرفین را بخواهیم باید دو گاز داشته باشیم که دارای دو فشار است.



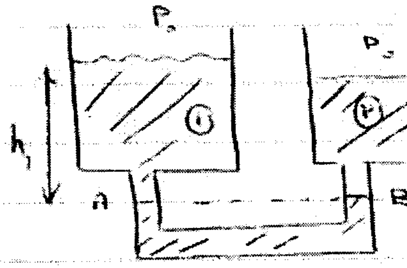
$P_1 = P_A = P_B$

$P_C = P_1 - \rho_a g h_a = P_D$

$P_E = P_D + \rho_b g h_b = P_1 - \rho_a g h_a + \rho_b g h_b$

www.vepub.com
Publish Your Mind

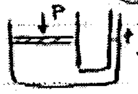
Subject:
Year. Month. Date.



$P_A = P_B$

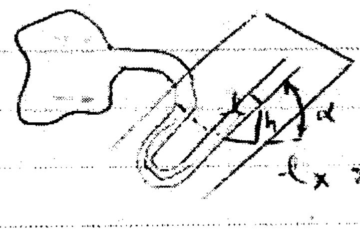
$\cancel{P_0} + \rho_1 g h_1 = \cancel{P_0} + \rho_2 g h_2 \to \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$

$h_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2$



و یا فشار گازها در حوضچه مایل باشد ←

اگر ارتفاع موجود در مانومتر خیلی کم بود برای تشخیص بهتر می‌توان بجای سیال، سیال دیگری جایگزین



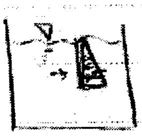
کل یا مانومتر را روی سطح شیب‌دار قرار دهیم.

برای داشتن یک h ثابت هرچه $\sin\alpha$ کوچکتر باشد، L باید بزرگتر باشد.

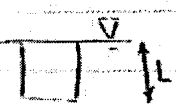
$L \times \sin\alpha = h$

نیروی وارد از طرف سیال به جسم؟

اگر کف ظرف دارای زاویه باشد و نیرویی وارد به کف ظرف را بخواهیم ← $P_1 A$ خواهد بود چون فشار ثابت است؛ اگر به جای گاز مایع باشد $\rho g h A$. حال اگر نیروی وارد بر دیواره را بخواهیم (روی دیواره‌ی عمودی فشار متغیر است اما روی کف ظرف فشار ثابت است) از روش انتگرال‌گیری حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم صفحه‌ای مستطیلی شکل را درون مخزن آب وارد می‌کنیم



واحد عرض برای این صفحه داریم



L واحد عمق استفاده می‌کنیم

در اینجا باید انتگرال بگیریم.

$P = \rho g h$

$\int_0^F dF = P\,dA = \int_0^L \rho g h\, w\, dh \to F = \rho g w \int_0^L h\,dh = \rho g w \frac{L^2}{2}$

نیروی Net صفر است زیرا یکدیگر را خنثی می‌کنند. ← →

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

کره‌ی کامل $\frac{4}{3}\pi R^3 L\, \rho g$

اگر با فشار مطلق حل می‌کنیم $p=\rho g h + p_0 \rightarrow \int_0^F dF = p\,dA = \int \rho g h\,\omega\,dh + \int p_0\,dA$

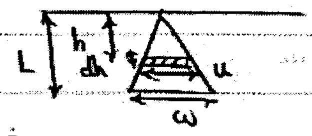
و کلاً ما همیشه از نسبی‌ها می‌رویم. $F=\rho g\omega \frac{L^2}{2} + p_0 A$

- اگر صفحه به دیواره بچسبد، از داخل فشار $\rho g\omega \frac{L^2}{2} + p_0 A$ و از خارج $p_0 A$ خواهد بود و $p_0 A$ هم حذف می‌شود و $\rho g h$ در این شکل می‌ماند (Net می‌شود)

فشار متوسط $\bar{P}=\frac{F}{A}=\frac{\rho g\omega L^2/2}{\omega L}=\rho g L/2$

اگر فشار را در نقطه‌ی خاص ($L/2$) داشته باشیم و در سطح ضرب کنیم نیرو به دست می‌آید.

اگر صفحه مثلث باشد: $F=\int_0^L \rho g h\,\underbrace{dA}_{u\,dh}$



$F=\rho g\frac{\omega}{L}\int_0^L h^2\,dh$

* لازم نیست همیشه انتگرال

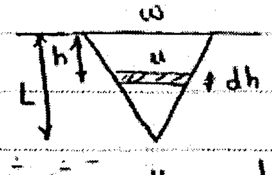
تشابه مثلث: $\frac{u}{\omega}=\frac{h}{L}$

$\rightarrow u=\frac{\omega}{L}\cdot h$

$F=\rho g\omega \frac{L^2}{3}$

بلکه می‌توانیم مرکز هندسی سطح را به دست آورده و فشار را پیدا می‌کنیم.

$\bar{P}=\frac{F}{A}=\frac{\rho g\omega L^2/3}{\omega L/2}=\rho g\,\frac{2L}{3}$ مرکز هندسی مثلث



$F=\int P\,dA \rightarrow F=\rho g\frac{\omega}{L}\int_0^L (L-h)\,h\,dh=\rho g\frac{\omega}{L}\underbrace{\left(\frac{L^3}{2}-\frac{L^3}{3}\right)}_{L^3/6}$

تشابه مثلث: $\frac{u}{\omega}=\frac{L-h}{L}$

$\rightarrow u=\frac{\omega}{L}(L-h)$

$F=\rho g\omega \frac{L^2}{6}$

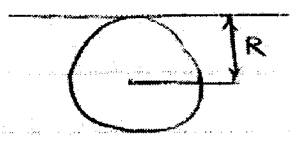
$\bar{P}=\frac{\rho g\omega L^2/6}{\omega L/2}=\rho g\,\frac{L}{3}$ مرکز هندسی سطح

به فاصله‌ی $L/3$ از سطح بالای قرار گرفته است.

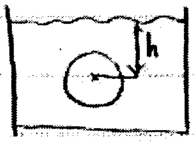
اگر فشار در مرکز هندسی را به دست آوریم، فشار متوسط را به دست آورده‌ایم.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year: Month: Date:

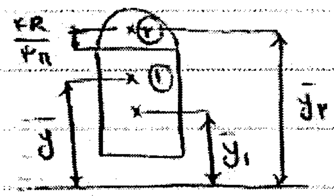


$F = \rho g R \pi R^2$



$\rho g h \pi R^2$

- در یک صفحه‌ی افقی فشار همه‌ی قسمت‌ها با فشار مرکز هندسی برابر است با $\rho g h$.



$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

اگر حجمی کم بشود
علامت + به - تبدیل می‌شود.

$$\bar{y} = \sum \bar{y}_i A_i / \sum A_i$$

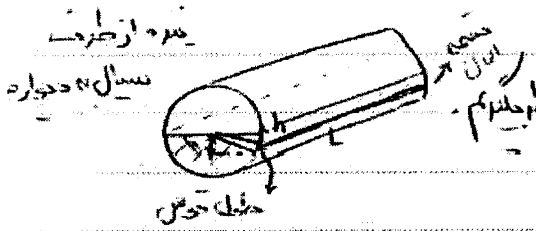
$$\boxed{F = P_{CG_1} A}$$

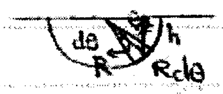
فشار مرکز هندسی
مساحت

رابطه‌ی کلی نیرو برای سطوح مسطح:

سطح منحنی:

استوانه و فشار نیروهایی که وارد را به دست می‌آوریم.
جهت نیروها با هم متفاوت است و جمع برداری باید انجام بدهیم.
المان جسم باید دارای ارتفاع ثابت باشد (h).





$dA = R d\theta . L$

$P = \rho g h$

$h = R . \sin\theta$

$$F_x = \int_0^{\pi} \underbrace{\sin\theta \cos\theta \, d\theta}_{1/2 \sin^2\theta} \left[\rho g R^2 L\right] = 0$$

$$\left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\pi}$$

از آنجایی که ... تقارن ... نیروها ... صفر است

$dF = P dA = \rho g R \sin\theta . R L d\theta$

$dF_y = dF . \sin\theta = \rho g R^2 L \sin^2\theta \, d\theta$

$dF_x = dF . \cos\theta = \rho g R^2 L \sin\theta \cos\theta \, d\theta$

$$F_y = \rho g R^2 L \int_0^{\pi} \underbrace{\sin^2\theta \, d\theta}_{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \rho g \frac{\pi R^2}{2} L$$

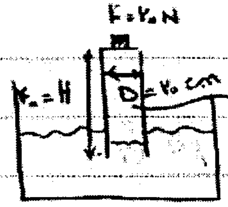
$$\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یک مخزن پر از آب

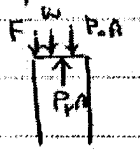
$F = 20\,N$ $\quad \omega = 10\,N$ $\quad P_0 = 101000\ pa$



$$P_2 = P_A = P_B = P_0 + \rho g (y_2 - y_1) \rightarrow \boxed{P_2 = P_0 + \rho g (y_2 - y_1)} \ (1) \rightarrow y_2$$

$$P_1 V_1 = nRT_1 \rightarrow \frac{P_1 V_1}{T_1} = nR = \frac{P_2 V_2}{T_2} \ (\text{ایزوترم یا هم دما}) \rightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2$$

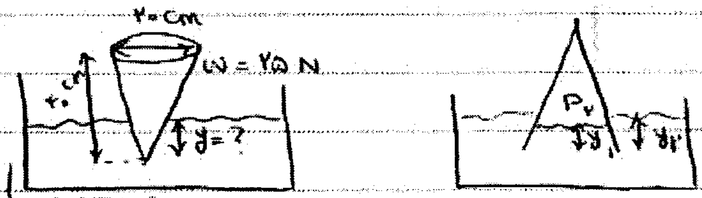
$$\boxed{P_0 \frac{\pi D^2}{4} \times H = P_2 \frac{\pi D^2}{4} (H - y_1)} \ (2) \rightarrow y_1$$



$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow \boxed{\omega + F + P_0 \frac{\pi D^2}{4} - P_2 \frac{\pi D^2}{4} = 0} \ (3) \rightarrow 20 + 10 + 101 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} (0.2)^2 = P_2 \times \frac{\pi}{4} (0.2)^2$$

$P_2 = 101954\ pa$ $\quad y_1 = 3.75\ mm$ $\quad y_2 = 13.11\ mm$

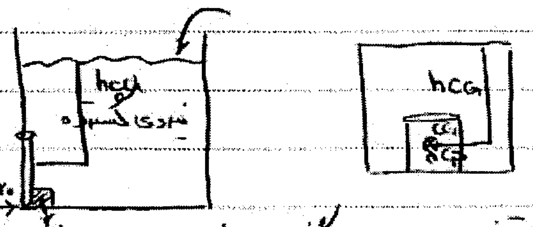
مخروط با قاعده ی باز



« فشار در داخلش تغییر می کند »

دریچه درون مخزن

$F = \rho g h_{CG} A$



$\rho g h_{CG}$

فشار ارتفاع ← درون فشار داخل و خارج را هم ستون

$F_{\text{فشار}} = 20 \times 2 = 40$

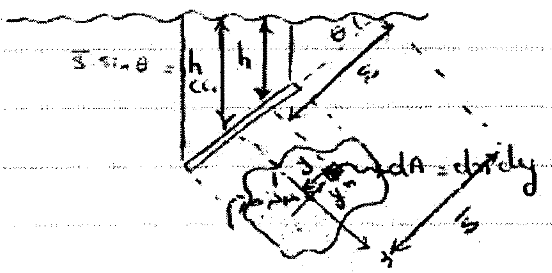
مرکز فشار (CP) محل اثر نیروی برآیند

در حالت افقی CP و CG بر هم منطبق هستند.

www.vepub.com
Publish Your Mind

نیروی سطح مایل

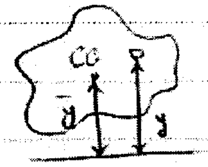
$dF = \rho g h \, dA$



$$\int dF = \int_A (\rho g h + P_0)\, dA$$

$$F = P_0 A + \int \rho g \underset{\downarrow \; S\sin\theta}{h}\, dA$$

$$F = P_0 A + \rho g \sin\theta \underbrace{\int S \, dA}_{\bar{S}A}$$



$$\int_A y \, dA = \bar{y} A$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int y \, dA$$

$$\bar{S} = \frac{1}{A}\int S \, dA$$

$$F = P_0 A + \rho g \underbrace{\sin\theta \, \bar{S}}_{h_{CG}} A$$

$$F = \cancel{P_0 A} + \rho g h_{CG} A$$

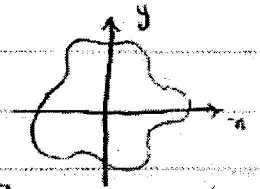
محل برآیند نیروها گشتاور حول محور x

$$\int_A (\rho g h + P_0)\, dA \cdot y = F \cdot y_{cp} \rightarrow y_{cp} = \frac{1}{F}\int (\rho g h + P_0)\, y \, dA$$

$$\int_A (\rho g h + P_0)\, dA \, x = F \cdot x_{cp}$$

$$\int_A (\rho g \underset{\downarrow \; S\sin\theta}{h})\, y \, dA + P_0 \cancel{\int_A y \, dA} = I$$

$* \int y \, dA = \bar{y}A$ ، اگر محور از مرکز جرم عبور کند $= 0$ ، $\int x \, dA = 0$



$$I \rightarrow \rho g \sin\theta \int \underset{(\bar{S}-y)}{S}\, y \, dA = \rho g \sin\theta \left[\bar{S}\cancel{\int_A y \, dA} - \int_A y^2 \, dA\right] = -\rho g \sin\theta \int_A y^2 \, dA$$

$$\rightarrow -\rho g \sin\theta \, I_{xx} = y_{cp} \overbrace{\rho g h_{CG} A}^{F}$$

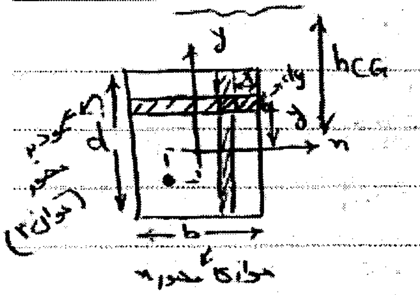
$$\boxed{y_{cp} = \frac{-I_{xx}\sin\theta}{h_{CG} A}}$$

$$\boxed{x_{cp} = \frac{-I_{xy}\sin\theta}{h_{CG} A}}$$

اگر سطح افقی باشد $\sin\theta = 0$ پس x_{cp} و y_{cp} صفر است، مرکز جرم و مرکز فشار یکی هستند.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )



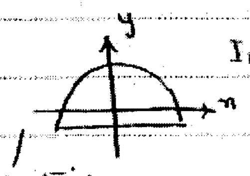
$$I_{xx} = \int y^2 dA = b\int_{-d/2}^{d/2} y^2 dy = b\,\frac{y^3}{3}\Big]_{-d/2}^{d/2} = \frac{bd^3}{12}$$

$$I_{yy} = \frac{db^3}{12}$$

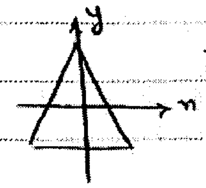
$$I_{xy} = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-d/2}^{d/2} xy\,dx\,dy = \int_{-b/2}^{b/2} x\,dx \int_{-d/2}^{d/2} y\,dy = 0$$

$$\tfrac{1}{2}x^2\Big]_{-b/2}^{b/2} \Rightarrow \text{صفر} \qquad \tfrac{1}{2}y^2\Big]_{-d/2}^{d/2} \Rightarrow \text{صفر}$$

هر وقت محوری را انتخاب کنیم که شکل نسبت به آن محور متقارن باشد (حداقل یکی از دو محور x و y) $\therefore I_{xy} = 0$



$I_{xy} = 0$

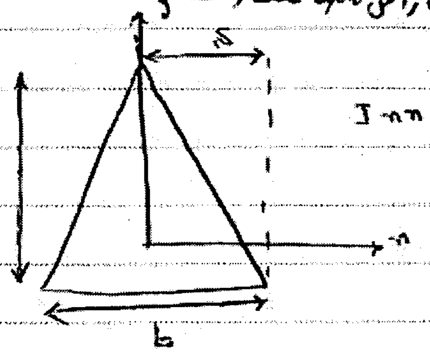


$I_{xy} = 0$

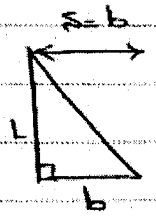
پایین‌تر از مرکز جرم

$$y_{cp} = \frac{-\,bd^3/12 \times 1}{h_{CG}\cdot(bd)} \qquad \left(|y_{cp}| + d/2\right) \times \rho g\, h_{CG}\,(bd)$$

فاصله راس تا امتداد ضلع است

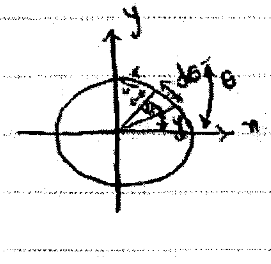


$$I_{xx} = \frac{bL^3}{36} \qquad I_{xy} = \frac{b(b-2S)L^2}{72}$$



$I_{xx} \rightarrow$ ثابت

$I_{xy} \rightarrow$ تغییر

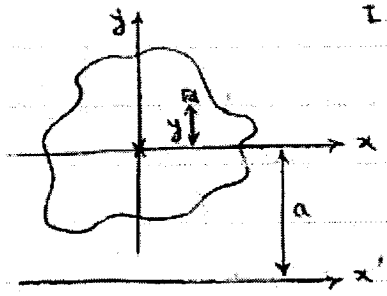


$$I_{xx} = \int y^2 dA = \int_A y^2\, r\,d\theta\,dr = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R r^2 \sin^2\theta\, r\,dr\,d\theta =$$

$$\int_0^R r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}\, d\theta = \frac{R^4}{4}\underbrace{\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}}_{\pi} = \frac{\pi R^4}{4}$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.



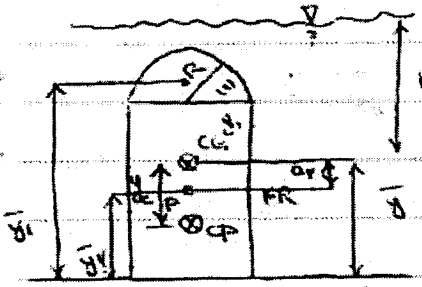
$I_{xx} = \int y^2 dA$

انتقال I_{xx} به محوری موازی محور قبلی

$I_{x'x'} = \int_A y'^2 dA = \int_A (y+a)^2 dA$

$\int_A (y^2 + 2ay + a^2)\, dA = \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_{xx}} + 2a \underbrace{\int y\, dA}_{\bar{y}A} + a^2 A$

$$\boxed{I_{x'x'} = I_{xx} + a^2 A}$$



$\bar{y}(A_1 + A_2) = \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_1 A_1 \rightarrow \frac{\pi R^2}{2}$

$2R \quad (\frac{4R}{3\pi} + 4R)$

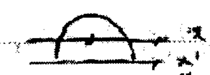
$4R \times 2R$

بدون تقارن ← تقارن $I_{xy} = 0 \rightarrow x_{cp} = 0$

$y_{cp} = \frac{-I_{xx} \sin\theta^{1}}{h_{CG} \cdot A} \quad A \rightarrow A_1 + A_2$

$I_{xx} = I_{xx_1} + I_{xx_2}$

نیم دایره



$I'_{x'x'} = \frac{\pi R^4}{8}$

$I_{xx} = \frac{\pi R^4}{8} - a^2 A \rightarrow \frac{\pi R^2}{2}$

$(\frac{4R}{3\pi})^2$

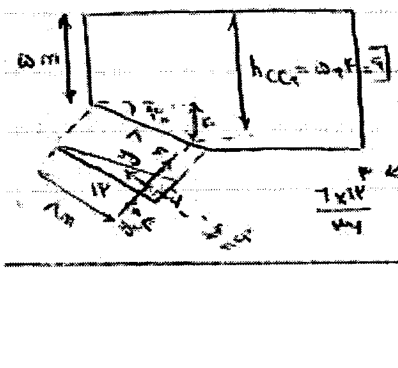
$I_{xx_1} = I_{x''x''} = I_{xx} + a'^2 A$

$I_{xx_2} = \frac{bd^3}{12} + a^2 A = \frac{2R(4R)^3}{12} + a_2^2 (2R)(4R)$

$\lambda(\bar{y} - 2R)$

مستطیل

مثال



$F = \rho g h_{CG} A = 800 \times 9.8 \times 9 \times \frac{12 \times 6}{2} = 2.54 \times 10^6\ N$

$y_{cp} = \frac{-(I_{xx}) \sin\theta}{(h_{CG} A)} = -0.444$

$\frac{6 \times 12^3}{36}$

$9 \leftarrow \frac{12 \times 6}{2}$

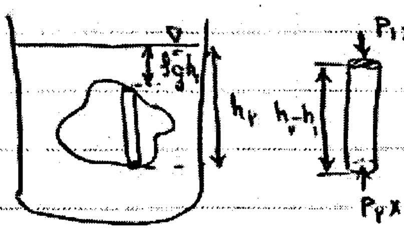
www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$x_{cp} = \frac{-I_{xy}\sin\theta}{h_{CG}A} = +0.111$$

$$I_{xy} = \frac{6(9-2\times9)(3)^2}{72} = -72$$

جسم غوطه ور در یک سیال g

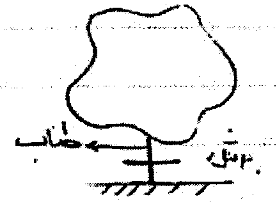


$$dF = (P_2-P_1)\,dA = \rho g(h_2-h_1)\,dA$$

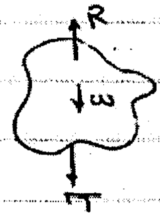
$P_2\times dA$ نیروی ارشمیدس $= \rho g\, dV_{جسم}$

$$F = R = \int_V \rho g\, dV = \rho_{سیال}\, g V$$

$$W = \rho_s g V_{جسم}$$



در داخل حالتی که ما هلیوم داریم $P = 2.25\times10^5\ Pa$, $m = 40\ kg$



نیروی کشش طناب

$$R = W + T \rightarrow T = R - W = \rho_{\ell} g V - \rho_s g V$$

هوای اطراف — هلیوم

$$\rho_\ell = \rho_{air}\Big|_{\substack{T=15^\circ C \\ P=P_0=101325\,Pa}} = 1.224\ \frac{kg}{m^3}$$

$$= 1.224\times9.81\times159.6 - 40\times9.81 = \boxed{1342}\ N$$

$$PV = \frac{mRT}{M} \rightarrow V = \frac{mRT}{PM} = \frac{40\times8.3144\times288}{2.25\times10^5\times4\times10^{-3}} = 159.6\ m^3$$

برحسب kg/mol

هر چه بالاتر می رویم فشار هوا کم شده پس دانسیته نیز کم می شود ← نیروی ارشمیدس کم می شود.

حداکثر ارتفاع زمانی است که نیروی ارشمیدس آنقدر کم شود که با وزن برابر باشد. $(R' = W)$.

Subject :
Year : Month : Date : ( )

$R' = W \rightarrow \rho'_{air}\, g \forall = \rho_s\, g \forall \rightarrow \rho'_{air} \times \underset{\downarrow\, 159.6}{\forall} = 60 \rightarrow \rho'_{air} = 0.376\ kg/m^3$

برای هوا $\rho = \dfrac{PM}{RT} \rightarrow \dfrac{P}{\rho T} = \dfrac{R}{M}$ مقدار ثابت $\rightarrow \dfrac{P_1}{\rho_1 T_1} = \dfrac{P_2}{\rho_2 T_2}$

$P_1 \rightarrow P_0$ ، $\rho_1 \rightarrow 1.233$ ، $T_1 \rightarrow 288$ ، $\rho_2 \rightarrow 0.376$ ، $T_2 \rightarrow 288 - 0.0065Z$

$P_2 \rightarrow P_0 \left(\dfrac{288 - 0.0065Z}{288} \right)^{5.245}$

$\rightarrow \boxed{Z = 10810\ m}$

ازنجا تشخیص میدهیم که جریان آرام است یا آشفته؟ از طریق آزمایش (مثلاً آزمایش اول جزوه)

محدوده ی انتقالی و محدوده خیلی کوچکی هستش از این جریان آرام و بعد از آن آشفته است

می توانیم به جای تغییر دادن سرعت، سرعت را ثابت نگه داشته و قطر لوله را تغییر دهیم. چون دیدیم می شود

که با تغییر D رابطه مستقیم دارد و به خواص سیال (دانسیته و ویسکوزیته) نیز بستگی دارد آرام یا آشفته بودن.

عدد بدون بعد رینولدز $Re = \dfrac{\rho V D}{\eta}$ * عدد انتقال جریان برای لوله هم بود

فقط برای internal

در داخل لوله عدد Re زمانی که کوچکتر از ۲۱۰۰ باشد جریان حتماً آرام است. اگر Re از ۲۷۰۰

۲۰۰۰ تا ۴۰۰۰ ~

در لوله های معمولی بیشتر باشد جریان حتماً آشفته است. بین ۲۱۰۰ تا ۲۷۰۰ محدوده انتقالی است.

اگر سطح داخلی لوله را صیقلی کنیم (زبری کاهش یابد) بین آرام و آشفته بودن کشمکش برقرار می گردد.

برای تبدیل جریان آرام به آشفته به یک اغتشاش بیرونی نیاز است ولی در جریان آشفته

دیگر هیچ کم اغتشاشی را از هم جریان دیگر آرام نمی شود. (هر Re بیشتر از ۲۰۰۰) اگر Re<۲۰۰۰ باشد

جریان می‌تواند جوجره آرام شود. دیدگاه لاگرانژی

اصل بقای جرم: $\frac{dm}{dt} = 0$ ← جرم داخل یک سیستم بسته ثابت است.

اصل بقای مومنتوم: $\frac{d(mV)}{dt} = m\frac{dV}{dt} = \sum F = m.a$

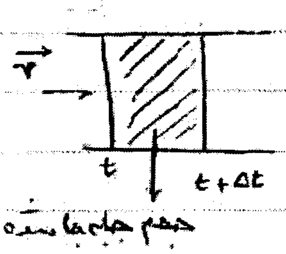
ثابت بنا به اصل بقای جرم

- مثال یک سیستم بسته نیست. برای کاربرد این فرمول‌ها باید حجم کنترل فرض کنیم. حجم کنترل یک انگاره در فضا فرض شده می‌باشد.

دیدگاه اولری

در دیدگاه لاگرانژی محورهای مختصات را روی حجم قرار می‌دهیم ولی در دیدگاه اولری محورهای مختصات را در یک جای ثابت قرار می‌دهیم.

$\dot{m} = \rho Q$



$$Q = \frac{A(x_2 - x_1)}{\Delta t} = A\frac{\Delta x}{\Delta t} = A.V$$

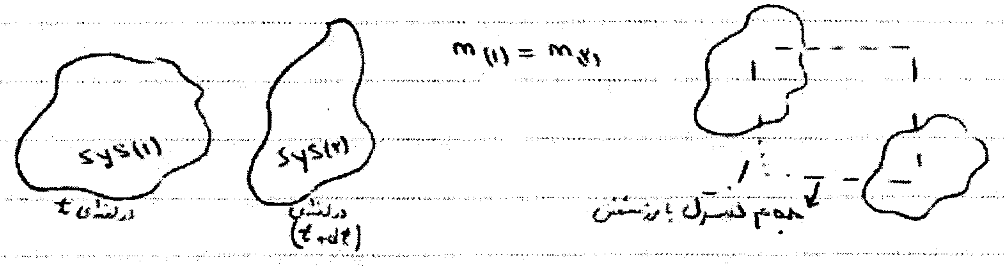
دبی حجمی — سرعت متوسط

اگر V سرعت ثابتی باشد این رابطه قابل استفاده است. اگر

V ثابت نبود: $\int dQ = \int V.dA \rightarrow Q = \int V\,dA$

انتگرال در حقیقت جایی می‌گیرم که A سرعت در آن ثابت است و سطح مقطع مثلاً براساس R را جایگذاری می‌کنیم.

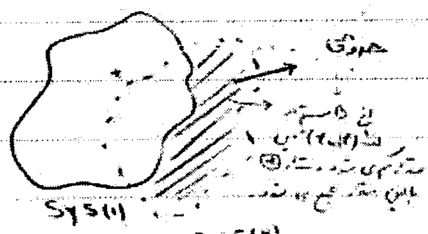
$m_{(1)} = m_{s_1}$



www.vepub.com
Publish Your Mind

V = سرعت

در ابتدا حجم (۱) Sys را منطبق بر حجم کنترل می‌گیریم.



B یک خاصیت عمومی مثل جرم و مومنتوم است.

مشتق: $\frac{dB}{dm} = \beta$

β تغییرات B به ازای واحد جرم

$$\int_{cv} dB = \int_{cv} \beta\, dm \longrightarrow B_{cv} = \int_{cv} \beta \rho\, d\forall$$

Control Volume ; $dm = \rho\, d\forall$

$$\frac{dB_{cv}}{dt} = ? \rightarrow \frac{dB_{cv}}{dt} = \frac{B_{cv}(t+dt) - B_{cv}(t)}{dt} = \frac{1}{dt}\Big[B_{sys}(t+dt) - \underbrace{(\beta\rho\forall)_{out}}_{\text{خروجی}} + \underbrace{(\beta\rho\forall)_{in}}_{\text{وارد شده}} - B_{sys}(t)\Big]$$

$\frac{dB_{sys}}{dt}$

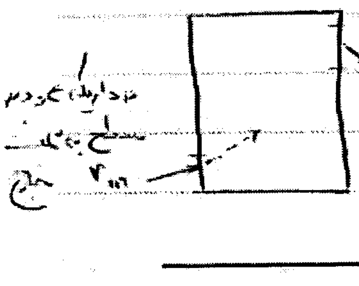
$$\frac{B_{sys}(t+dt) - B_{sys}(t)}{dt} - \frac{\overbrace{(\beta\rho d\forall)_{out}}^{\text{دبی جرمی } (\rho\beta Q)_{out}}}{dt} + \frac{\overbrace{(\beta\rho d\forall)_{in}}^{\text{دبی جرمی } (\rho\beta Q)_{in}}}{dt} =$$

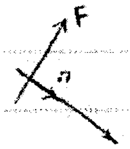
$$\frac{dB_{sys}}{dt} - (\beta\rho AV)_{out} + (\beta\rho AV)_{in} \longrightarrow$$

$\int_A (\vec{V}\cdot\vec{n})\beta\rho\, dA$ (+ ، حرکت خارج)

$$\boxed{\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{dB_{cv}}{dt} + (\beta\rho AV)_{out} - (\beta\rho AV)_{in}}$$ معادله انتقال رینولدز

$$\frac{d}{dt}\int_{cv}\beta\rho\, d\forall = \int_{cv}\frac{\partial(\rho\beta\, d\forall)}{\partial t}$$





$\vec{F}\cdot\vec{n}$

$$-(\beta\rho AV)_{in} = \int(\vec{V}\cdot\vec{n})_{in}\rho\beta\, dA$$

$$+(\beta\rho AV)_{out} = \int(\vec{V}\cdot\vec{n})_{out}\rho\beta\, dA$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year: Month: Date: ( )

اصل بقای جرم در حجم کنترل ؟ $B = m$

$\beta = \frac{dB}{dm} = \frac{dm}{dm} = 1$

اصل بقای جرم $\frac{dm}{dt} = 0 \rightarrow$

$\frac{dm_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{cv} \rho\, d\forall + \int_A (\vec{V} \cdot \vec{n})\, \rho\, dA = 0 \rightarrow \frac{dm_{sys}}{dt} = \frac{dm_{cv}}{dt} + (\rho Q)_{out} - (\rho Q)_{in} = 0$

$\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} d\forall + \iint (\vec{V} \cdot \vec{n})\, \rho\, dA = 0$

- اگر جریان پایدار باشد چون مستقل از زمان است $\partial/\partial t$ صفر است.

$(\rho Q)_{in} = (\rho Q)_{out}$ اگر این جمع را برابر صفر قرار دهیم بیان شده اصل بقای جرم ✓

- اگر سیال تراکم ناپذیر باشد $\partial/\partial t$ باز هم صفر است.

اصل بقای جرم برای جریان پایدار با سیال تراکم پذیر $\rightarrow$ $\boxed{\dot{m}_{out} = \dot{m}_{in}} \leftarrow$ $(\rho A V)_{out} - (\rho A V)_{in} = 0$

$\downarrow$

فقط برای سیال تراکم ناپذیر $\boxed{Q_{out} = Q_{in}} \xleftarrow[\rho \text{ همان است}]{\rho \text{ ثابت باشد}}$ $(\rho Q)_{out} = (\rho Q)_{in}$

اصل بقای مومنتوم ؟ $B = m\vec{V}$ $\quad \sum F_x = \frac{d(mV_x)}{dt}$

$\beta = \frac{dB}{dm} = \frac{d(m\vec{V})}{dm} = \vec{V}$ $\quad B = mV_x \rightarrow \beta = V_x \rightarrow$

$\sum F_x = \frac{d(mV_x)}{dt} + (\rho V_x Q)_{out} - (\rho V_x Q)_{in} = \frac{d(\rho V_x \forall)}{dt}$

$\frac{d(m\vec{V})_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{cv} (\vec{V} \rho\, dA) + \int_A (\vec{V} \cdot \vec{n})\, \vec{V} \rho\, dA$ $\quad \boxed{\sum F_x = (\dot{m} V_x)_{out} - (\dot{m} V_x)_{in}}$ ✓

$\sum F_x = \iiint \partial/\partial t (\rho V_x)\, d\forall + \iint (\vec{V} \cdot \vec{n}) V_x \rho\, dA$

$\sum F_y = \iiint \frac{\partial (\rho V_y)}{\partial t} d\forall + \iint (\vec{V} \cdot \vec{n}) V_y \rho\, dA$

اگر حرکت پایدار باشد ترم اول وجود ندارد ولی اگر تراکم ناپذیر باشد ترم اول فقط خیلی ساده می‌شود.

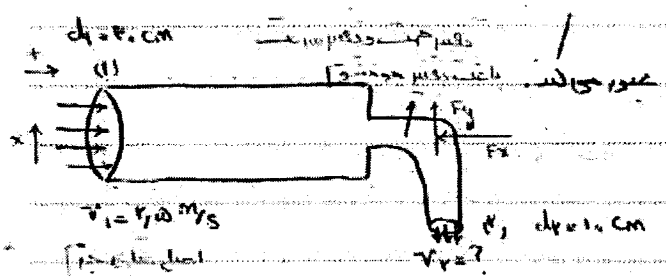
www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.

جریان اگر پایدار باشد:

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma F_x &= (V_x \underbrace{\rho Q}_{\dot m})_{out} - (V_x \underbrace{\rho Q}_{\dot m})_{in} \\ \Sigma F_y &= (V_y \dot m)_{out} - (V_y \dot m)_{in}\end{aligned}}$$

آب با سرعت متوسط $2.5\ m/s$ از مقطع (1) عبور می‌کند.



$Q_2 = Q_1 \rightarrow A_2 V_2 = A_1 V_1 \rightarrow \pi/4\,(d_2)^2\, V_2 = \pi/4\,(d_1)^2\, V_1 \rightarrow$

$(0.1)^2\, V_2 = (0.3)^2\,(2.5) \rightarrow \underline{V_2 = 22.5}\ m/s$

$(\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2)$

اگر $p_1 = 3\times10^5\ N/m^2$ باشد و $p_2 = 2\times10^5\ N/m^2$ باشد:

$$-F_x + \underbrace{p_1}_{3\times10^5} \overbrace{A_1}^{\pi/4\,(0.3)^2} = (\dot m V_x)_{out} - (\dot m V_x)_{in} \rightarrow F_x = \dots$$

$$\underbrace{\rho Q = 1000 \times \pi/4\,(0.3)^2\,(2.5)}_{\dot m} \times (+2.5)$$

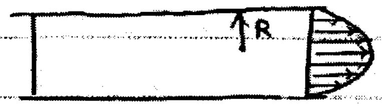
$$F_y + p_2 A_2 = (\dot m V_y)_{out} - (\dot m V_y)_{in} \quad (-22.5)$$

$$1000 \times \pi/4\,(0.1)^2\,(22.5)$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مقدار c چه قدر است؟ $V = c(R^2 - r^2)$

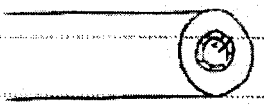


$$Q = \int_A V\,dA = \int_0^R c(R^2 - r^2)\, 2\pi r\,dr =$$

$Q = 1000\ cm^3/sec \to R$ برحسب cm

$R = 2.5\ cm$

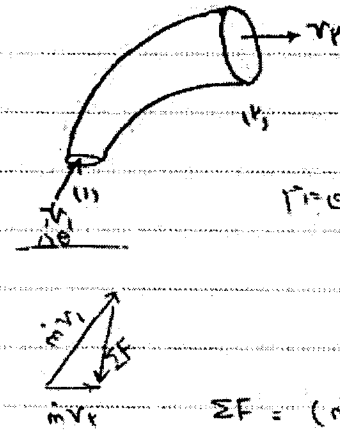
$$2\pi c \int_0^R (R^2 r - r^3)\,dr = 2\pi c\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi c R^4}{2}$$



$2\pi r\,dr$

$$1000 = \frac{\pi c R^4}{2} = \frac{\pi c (2.5)^4}{2} \to \boxed{c = \dots}\ cm$$

نیرو های وارده چیست؟



$$A_2 / A_1 = 2 \to \frac{V_1}{V_2} = 2$$

– هر دو سیال از نقاط (۱) و (۲) به دست آوریم

هر دو معلوم است!!

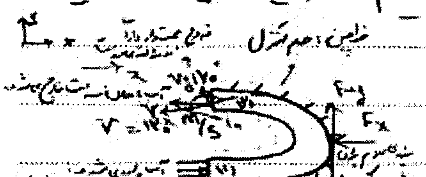
$\dot m_1 = \dot m_2$ اصل های ۳

$$(\dot m \vec V)_{out} = \dot m V_2$$

$$(\dot m \vec V)_{in} = \dot m V_1$$

$$\Sigma F = (\dot m \vec V_2) - (\dot m \vec V_1) \quad (\text{برحسب } dA)$$

جایی که سیال در تماس با جسم باشد، لحظه ای شتاب نداریم پس اثر جسم نداریم و حجم کنترل سیال داخل است.



$V = 120\ m/s$

$V_2 = 120\ m/s$

$A_1 = 0.001\ m^2$

در حالت پایدار شتاب نداریم.

$$Q_1 = Q_2 \to \dot m_1 = \dot m_2$$

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \xrightarrow{V_1 = V_2} A_1 = A_2$$

$$\dot m_1 = \dot m_2 = \rho V A = 10^3 \times 0.001 \times 120 = 120\ kg/s$$

نیروی لوله را به طرف بیرون در نظر می گیریم F را نیروهای اعمالی می دانیم

$$-F_x = (\dot m V_x)_{out} - (\dot m V_x)_{in} = -(120 \times 120) + (120 \times (-120 \cos 10)) = \boxed{28.6}\ KN$$

$$F_y = (\dot m V_y)_{out} - (\dot m V_y)_{in} = (120 \times (120 \sin 10)) - (120 \times 0) = \boxed{2.5}\ KN$$

V_y صفر است

Subject:

Year. Month. Date.

اگر دو مساوی بوده و با سرعت $70\ m/s$ به ... است ... نیرو را حساب کنید.

حل:

در این صورت ... $V_2 = V_1 = 70 - 30 = 40\ m/s$

$\dot m_1 = \dot m_2 = \rho A V = 10^3 \times 0.001 \times 40 = 40\ kg/sec$

$-F_x = (\dot m V_x)_{out} - (\dot m V_x)_{in} = (40 \times (-40\cos 10)) - (40 \times 40) = \boxed{3.175}\ kN$

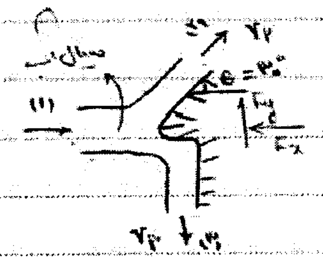
$F_y = (\dot m V_y)_{out} - (\dot m V_y)_{in} = (40 \times (40 \sin 10)) - (0 \times 40) = \boxed{0.277}\ kN$

کاربرد این مسئله در آسیاب یا ... است.

[illegible]

[illegible]

[illegible]



$Q_1 = Q_2 + Q_3$

$V_1 = V_2 = V_3 = V \quad (I)$

$A_1V_1 = A_2V_2 + A_3V_3 \quad (II)$

$\boxed{A_1 = A_2 + A_3} \quad (III)$

$|F_x| = 2F_y$

$\dfrac{Q_2}{Q_3} = ?\ \dfrac{A_2V}{A_3V} = \dfrac{A_2}{A_3} = k$

مومنتم: $-F_x = (\dot m_2 V_{x_2} + \dot m_3 V_{x_3})_{out} - (\dot m_1 V_{x_1})_{in}$

$-F_x = (\rho A_2 V \times V\cos\theta + \rho A_3 V_{x_3}) - (\rho A_1 V \times V)$

$\boxed{-F_x = \rho V^2 (A_2\cos\theta - A_1)}$

$F_y = (\dot m_2 V_{y_2} + \dot m_3 V_{y_3})_{out} - (\dot m_1 V_{y_1})_{in} = (\rho A_2 V \times V\sin\theta + \rho A_3 V \times (-V))$

$\boxed{= \rho V^2 (A_2\sin\theta - A_3)}$

www.vepub.com
Publish Your Mind

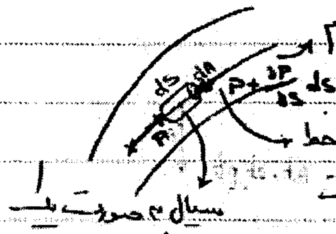
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$F_x = 2F_y \rightarrow \rho V^2(-A_2\cos\theta + A_1) = 2\rho V^2(A_2\sin\theta - A_3)$$

$$\xrightarrow{(\mathrm{II})} \frac{A_2 + A_3 - A_2\cos\theta}{A_3} = \frac{2(A_2\sin\theta - A_3)}{A_3}$$

$$K + 1 - K\cos\theta = 2(K\sin\theta - 1) \longrightarrow K = \frac{-3}{1 - \cos\theta - 2\sin\theta} \xrightarrow{\theta = 30^\circ} \boxed{K = 3{,}46}$$

مهم‌ترین عامل حرکت تغییر سرعت و فشار است. برای اعمال فشار، المان ما باید حتماً حجم داشته باشد.



خط جریان، اگر جریان آرام باشد

فشار در نقاط مختلف روی خط متفاوت است

سیال به صورت یک المان استوانه ای

قانون دوم نیوتن: $\Sigma F = m.a = m\frac{dV}{dt}$

فرض می‌کنیم سیال بدون اصطکاک است.

$$(PdA) - \left(P + \frac{\partial P}{\partial s}ds\right)dA - \rho g\, ds\, dA\cos\theta = \underbrace{\rho\, ds\, dA}_{m}\ \frac{dV}{dt}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } \rho\, ds\, dA} \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial s} - g\cancel{\cos\theta}\ \frac{dz}{ds} \qquad \left(dz \rightarrow \cos\theta = \frac{dz}{ds}\right) *$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{dt}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s}\cdot V + \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial V}{\partial s}\cdot V + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} = 0$$

فرض می‌کنیم حرکت پایدار باشد $\leftarrow \left(\frac{\partial V}{\partial t} = 0\right)$

انتگرال نسبت به s: $\frac{V^2}{2} + \int \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial s} + gz = cte$

فرض می‌کنیم سیال تراکم ناپذیر باشد $\leftarrow$ (ρ با فشار تغییر نمی‌کند)

رابطه برنولی $\boxed{\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = cte}$ رابطه بین فشار و سرعت

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.

به جای پیدا کردن مقدار ثابت هر جمله، این رابطه را برای دو حالت می‌نویسیم. یعنی:

$$\boxed{\frac{V_1^2}{2}+\frac{P_1}{\rho}+gz_1=\frac{V_2^2}{2}+\frac{P_2}{\rho}+gz_2}$$

ضرب رابطه بالا در ρ: $\underbrace{\frac{1}{2}\rho V_1^2}_{\text{فشار دینامیکی}}+\underbrace{P_1}_{\text{فشار استاتیکی}}+\underbrace{g\rho z_1}_{\text{فشار پتانسیل}}=cte$

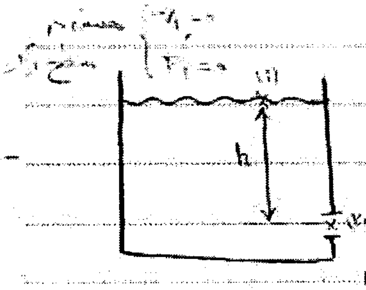
فشار استاتیکی: اندازه‌گیری توسط مانومتر

زمانی که حرکت نداشتیم $P+\rho g h$ بود حالا پارامتر $\frac{1}{2}\rho V^2$ هم اضافه شده است.

این فشارها امکان تبدیل به یکدیگر را دارند اما مجموعشان همیشه ثابت است.

تقسیم بر ρg: $\frac{V_1^2}{2g}+\underbrace{\frac{P_1}{\rho g}}_{\text{متر}}+z_1=cte$

تبدیل فشار به متر: به نام هد است.



سطح آزاد: $V_1=0$، $P_1=0$

$$\frac{V_1^2}{2}+\overbrace{\frac{P_1}{\rho}}^{\frac{P_0+P_1'}{\rho}}+gz_1=\frac{V_2^2}{2}+\overbrace{\frac{P_2}{\rho}}^{\frac{P_0+P_2'}{\rho}}+gz_2$$

چون از فشار مطلق یا نسبی استفاده کنیم هیچ فرقی نمی‌کند، پس حذف می‌کنیم.

از این به بعد از فشارهای نسبی استفاده می‌کنیم، پس در صورت صحبت نکردن از نوع فشار باید فشار نسبی مدنظر باشد.

$A_1 > A_2 \to V_1 < V_2$

$$\frac{V_2^2}{2}=g(z_1-z_2)$$

(۲) در تماس با هوای آزاد است $P_2=0$

$$V_2=\sqrt{2g(z_1-z_2)}=\sqrt{2gh}$$

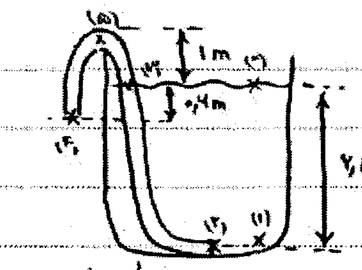
چون این معادله را برای حالت steady state نوشتیم، ضریبی اضافه می‌کنیم:

$$V_2=C_D\sqrt{2gh}$$

C_D: ضریب Drag یا تخلیه

www.vepub.com

Subject:
Year. Month. Date. / /



یک باک بنزین داریم و با سیفون آن را تخلیه می‌کنیم. $D=5cm$

- دبی را بدست آورید.

$$\frac{\cancel{P_0}}{\rho}+\frac{\cancel{V_0^2}}{2}+gz_0=\frac{P_i}{\rho}+\frac{V_i^2}{2}+gz_i$$

* سرعت در داخل سیفون ثابت است.

$$\text{if}: \; i=4 \rightarrow P_4=P_{atm} \rightarrow P'_4=0$$

$$gz_0=\frac{V_4^2}{2}+gz_4 \longrightarrow V_4=\sqrt{2g(\underbrace{z_0-z_4}_{\text{اختلاف ارتفاع صفر و چهار}})}$$

$$=\sqrt{2\times9.81\,(0.6)}=\boxed{3.43}\ m/s$$

* اصل بقای جرم را بین دو مقطع نوشت؛ و در هر مقطع سیفون A یکسان است پس V در کل سیفون یکسان است!

$$A_4V_4=A_5V_5 \longrightarrow V_4=V_5$$

دبی: $Q=A_4V_4=\frac{\pi}{4}(0.05)^2\times3.43=\boxed{6.735}\ lit/sec$

(1) در امتداد دهانه‌ی سیفون ولی چون در آن محدوده‌ای که ما گفتیم در آن جا سرعتی وجود ندارد.

* مثل حالت هیدرواستاتیک = $i=1:\ V_1=0 \qquad gz_0=\frac{P_1}{\rho}+gz_1 \longrightarrow P_1=\rho g(\underbrace{z_0-z_1}_{h})=10^3\times9.81\times2.5=\boxed{24525}\ Pa$

انگار سیال ساکن است.

نسبی است، برای بدست آوردن خود P باید با فشار اتمسفر آن را جمع کنیم.

$$i=2 \rightarrow gz_0=\frac{P_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2 \longrightarrow \frac{P_2}{10^3}=g(\underbrace{z_0-z_2}_{2.5})-\frac{(\overset{\rightarrow 3.43}{V_2})^2}{2} \longrightarrow$$

* با اینکه (1) و (2) هم ارتفاع اند، در نقطه (2) فشار استاتیکی از (1) کمتر است.

$$P_2=\rho g(2.5)-\rho\frac{(3.43)^2}{2}=\boxed{18642}\ Pa$$

$$\tfrac12\rho V_1^2=\tfrac12\rho V_3^2+\rho gh$$

* در نقطه (3) مقداری از فشار استاتیکی به دینامیکی تبدیل شده و کمتر از نقطه (0) است پس منفی می‌شود.

$$i=3 \rightarrow gz_0=\frac{P_3}{\rho}+\frac{V_3^2}{2}+gz_3 \longrightarrow P_3=-\tfrac12\rho V_3^2=-\tfrac12\times1000\times(3.43)^2=$$

$$\boxed{-5882}\ Pa$$

* در نقطه (3) سوراخی ایجاد کنیم هوا به داخل لوله کشیده می‌شود و جریان را قطع می‌کند بنابراین در لوله نباید هوا باشد.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

[illegible] (۵) [illegible]
[illegible] از [illegible]

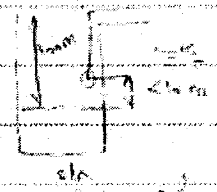
$i = \text{ٍ۵} \rightarrow g z_0 = \frac{P_{۵}}{\rho} + \frac{V_{۵}^2}{۲} + g z_{۵}$

$\rightarrow \frac{۱۰^۳}{g}\left[-\frac{(۲,۴۴)^۲}{۲} + g(z_0 - z_{۵})\right] = P_{۵} \rightarrow P_{۵} = \boxed{-۱۵۸۰۰}\ Pa$

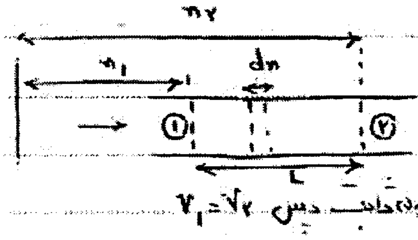
۹,۸۱

* [illegible] فشار [illegible]
[illegible] فشار [illegible]

– [illegible]
[illegible]



* [illegible]
[illegible] سطح [illegible]
[illegible]
* [illegible] (cavitation)



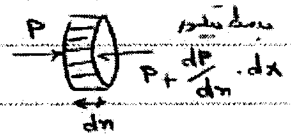
منظور از (۱) و (۲) مقطع است

معادله برنولی: $\frac{P_1}{\rho} + g z_1 + \frac{V_1^2}{۲} = \frac{P_۲}{\rho} + g z_۲ + \frac{V_۲^2}{۲}$

$V_1 = V_۲$ [illegible] دبی [illegible]

حذف [illegible] $\rightarrow P_1 = P_۲$ *

برای [illegible] جریان باید $P_1 > P_۲$ باشد.



P_1 باید به اندازه‌ای از $P_۲$ بیشتر باشد که اصطکاک را جبران کند.

افت [illegible] جزء از اصطکاک [illegible] اتفاق [illegible] است.

$\Sigma F = 0$

چون سرعت [illegible] است [illegible] دارد [illegible]

$P.A - \left(P + \frac{dP}{dx}.dx\right)A - \tau_0 \times S \times dx = 0$

$\xrightarrow{\div dx} -\frac{dP}{dx}.A - \tau_0.S = 0 \rightarrow \frac{dP}{dx} = -\tau_0.S/A = -\frac{\tau_0.S}{A}$

تنش برشی [illegible] سطح مقطع دایره

Subject.
Year. Month. Date. ( )

$$\int_{P_1}^{P_2}\frac{dP}{dx}\,dx = -\int_{x_1}^{x_2}\frac{\tau_0 S}{A}\,dx \to P_2-P_1 = -\frac{\tau_0 S}{A}\,\underbrace{(x_2-x_1)}_{L}$$

$$\xrightarrow{\div \rho} \frac{P_2}{\rho}-\frac{P_1}{\rho} = -\frac{\tau_0 S L}{A\rho} \to \frac{P_1}{\rho} = \frac{P_2}{\rho} + \boxed{\frac{\tau_0 S L}{A\rho}}$$ * مقدار ثابت

قطر لوله باید ثابت باشد

$$\frac{\tau_0 S L}{A\rho} = \frac{4\tau_0 L}{4A/S\,\rho} = \frac{4\tau_0 L}{D\rho} = \frac{4f(\frac{1}{2}\rho V^2)L}{D\rho} = 4f\frac{L}{D}\times\frac{V^2}{2}$$

سطح مقطع جریان

D_h : دایره : $\frac{4A}{S} = \frac{4\pi R^2}{2\pi R} = 2R = D$ (برای مقاطع مختلف ...)

قطر هیدرولیکی — محیط در تماس سیال و جداره

بدون بعد عبارتی بی‌بعدی

$f \propto (Re, \frac{\varepsilon}{D})$

زبری لوله

قرارداد : $\tau_0 = f(\frac{1}{2}\rho V^2)$

ضریب اصطکاک بین جداره و سیال — انرژی جنبشی

جریان مغشوش ، $f \propto (V, D, \rho, \eta, \varepsilon)$

اگر نیرو بخواهد : $F = f(\frac{1}{2}\rho V^2)\,A$ — سطح مشخص

[* مقدار ثابتی نیست]

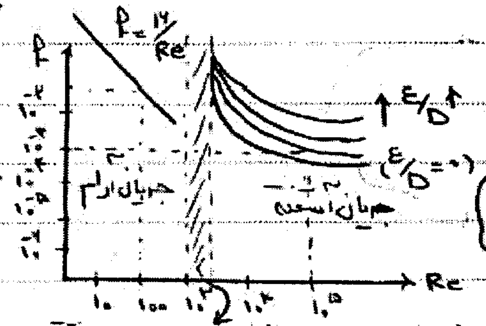
جریان آرام : $f \propto (V, D, \rho, \eta)$ — افت فشار

$f \propto Re = \frac{\rho V D}{\eta}$

$$\xrightarrow{\times\rho} \frac{P_1}{\rho} + gz_1 + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + gz_2 + \frac{V_2^2}{2} + 4f\frac{L}{D}\times\frac{V^2}{2}$$

جریان آرام

$$\boxed{f = \frac{16}{Re}}$$



دیاگرام → Moody

حالت انتقالی transition (2000, 3000)

$$f^{-1/2} = -3.6\log\left[\left(\frac{\varepsilon}{3.7D}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re}\right]$$

$5\times10^3 < Re < 10^8$ ، $10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$

$$f = 0.0791\,Re^{-1/4}$$ (لوله صاف)

رابطه بلازیوس $[3\times10^3 < Re < 10^5]$

اگر قطر لوله عوض شود :

$$\int_1^3 + \int_3^2$$

منظور از (1) و (2) طول است.

$$4f_1\frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2} + 4f_2\frac{L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2}$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

(۳۱)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قطر هیدرولیکی در مقطع مستطیل که عرض آن در مقایسه با طول خیلی کم باشد:

$$D_h = \frac{4ab}{2(a+b)} = 2b \qquad Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\eta} \leftarrow D_h \qquad \bar{V} = \frac{\int_A V\,dA}{A}$$

میزان زبری ε:

لوله کشیده شده : $\varepsilon = 0.0015$ mm

لوله فولادی تجاری : $\varepsilon = 0.046$ mm

لوله آهن چکش‌خوار : $\varepsilon = 0.046$ mm

لوله فولاد گالوانیزه : $\varepsilon = 0.15$ mm

لوله چدنی ریخته‌گری : $\varepsilon = 0.259$ mm

لوله بتنی : $\varepsilon = 0.3 - 3$ mm

معمولاً ... استفاده می‌شود

واحدی است ... $f \rightarrow Re \rightarrow \frac{\text{دبی}}{\text{سطح مقطع}} = \text{سرعت}$

مسائل: ۱) دبی را داریم و به دنبال افت فشار هستیم (اختلاف فشار). ۲) Δp معلوم است و دبی مجهول است. (شیب هیدرولیکی یا ...)

۳) Δp و دبی معلوم باشد و قطر لوله D مجهول باشد. (معمولاً ... Re ...) $\frac{Re\,f^2}{\ldots D}$?

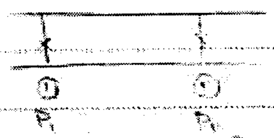
(۱) افت فشار داریم برای عبور آب در دمای $300\,K$ ⟸ $\left\{\rho = 997\ \frac{kg}{m^3},\ \eta = 8.57 \times 10^{-4}\ Pa.s\right\}$ از یک لوله‌ی صیقلی افقی که

$L = 300$ m

$D = 0.05$ m

$Q = 1.5\ \frac{lit}{s}$

قطر داخلی آن 0.05 m است با دبی $1.5\ \frac{lit}{s}$ عبور می‌کند را به دست آورید.



$$\frac{P_1}{\rho} + gz_1 + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + gz_2 + \frac{V_2^2}{2} + 4f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2}$$

$$\Delta P = P_1 - P_2 = 4f\frac{L}{D}\rho\frac{V^2}{2} \quad (1)$$

$\Delta P = P_1 - P_2 = ?$

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{1.5 \times 10^{-3}\ m^3/s}{\frac{\pi}{4}(0.05)^2} = 0.764\ m/s$$

$$Re = \frac{\rho V D}{\eta} = \frac{997 \times 0.764 \times 0.05}{8.57 \times 10^{-4}} = 4.444 \times 10^{4}$$ جریان مغشوش است

$$f = 0.0791\,Re^{-1/4} = 0.0791\,(4.444 \times 10^4)^{-1/4} = 5.4 \times 10^{-3}$$ (لوله صیقلی)

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

① $\rightarrow \Delta P = 4 \times 5.448\times10^{-3} \times \frac{300}{0.05} \times 997 \times \frac{(0.764)^2}{2} = 3.0822\times10^{4} = \boxed{0.308\times10^{5}}$ atm

* اگر اطلاعات مسئله در دمای مورد نظر در دسترس نبود. $\begin{cases} \rho = 10^{3} \\ \mu = 10^{-3} \end{cases}$

ویسکوزیته سینماتیکی $\nu = \mu/\rho = \frac{10^{-3}}{10^{3}} = 10^{-6}$ $\qquad Re = \frac{VD}{\mu/\rho} = \frac{VD}{\nu} = 10^{6}\underbrace{VD}_{\text{کمتر از } 3000}$, $\rightarrow$ جریان آشفته.

(۲) جریان آب در دمای $25°C$ $\Leftarrow \left.\begin{matrix} \rho = 997 \ kg/m^3 \\ \mu = 8.57\times10^{-4} \ Pa.s \end{matrix}\right\}$ در یک لوله صیقلی افقی و قطر آن 2cm می‌باشد.

افت فشار به ازای واحد طول $125 \ N/m^2$ است. $\frac{\Delta P}{L} = 125 \ \frac{Pa}{m}$

$$\frac{P_1}{\rho} + g z_1 + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + g z_2 + \frac{V_2^2}{2} + 4f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2}$$

$$\frac{\Delta P}{\rho} = \frac{P_1 - P_2}{\rho} = 4f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2} \rightarrow \frac{\Delta P}{L} = 4f\frac{\rho}{D}\times\frac{V^2}{2} \rightarrow 125 = 4f\left(\frac{997}{0.02}\right)\times\frac{V^2}{2}$$

فرض می‌کنیم جریان آرام باشد:

$f = 16/Re = \frac{16\mu}{\rho V D}$ جایگذاری

$$125 = 4\left(\frac{16\mu}{\rho V D}\right)\times\frac{V^2}{2} \Rightarrow V = \boxed{22.33} \ m/s$$

$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{997\times22.33\times0.02}{8.57\times10^{-4}} = \underbrace{1.82\times10^{6}}_{\text{آشفته}} \longrightarrow$ فرض غلط است

$f = 0.0791\, Re^{-1/4} = 0.0791\left(\frac{\mu^{0.25}}{\rho^{0.25} V^{0.25} D^{0.25}}\right)$ $\Leftarrow$ جریان آشفته و لوله صیقلی:

$$125 = 4(0.0791)\frac{(8.57\times10^{-4})^{0.25}}{(997)^{0.25}(0.02)^{0.25}}\times\frac{997}{(0.02)}\times\frac{V^{1.75}}{2} \Rightarrow V = 0.0648 \ m/s$$

$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{997\times0.0648\times0.02}{8.57\times10^{-4}} = \underbrace{5.28\times10^{4}}_{\text{آشفته}} \rightarrow$ فرض درست است

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.

$$Q = V \cdot A = 0.648 \left(\frac{\pi}{4}\right)(0.07)^2 = 2.49 \ \frac{lit}{s}$$

مسئله (1) در صورتی که لوله دارای زبری نسبی $(\varepsilon/D = 0.002)$ باشد:

حال راه حل قبلی را تکرار می‌کنیم فقط f از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f^{-1/2} = -3.6 \log\left(\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re}\right) = -3.6 \log\left[\left(\frac{0.002}{3.7}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{4.44\times10^{4}}\right] = 6.647\times10^{-3}$$

$$\Delta P = 4f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2} = 4 \times 6.647\times10^{-3} \times \frac{300}{0.015} \times 997 \times \frac{(0.794)^2}{2} = \boxed{4.64\times10^{4}}$$

مسئله (2) در صورتی که لوله زبر بوده و $\varepsilon/D = 0.002$ باشد:

$$V = \frac{Re\,\mu}{\rho D}$$

$$\frac{\Delta P}{L} = 4f\frac{\rho}{D}\cdot\frac{V^2}{2} \rightarrow 125 = 4f\frac{997}{0.02}\times\frac{V^2}{2} \rightarrow 125 = 4f\frac{997}{0.02}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{Re^2\mu^2}{\rho^2 D^2}\right)$$

ابتدا حل معادله به طریق حدس می‌گیریم جریان آرام باشد. سپس مقدار Re را به دست آورده جریان را مشخص می‌کنیم

و همچنین f عوض می‌شود در:

$$f^{-1/2} = -3.6 \log\left[\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re}\right]$$

← حدس اولیه را Re می‌گیریم و V را حساب می‌کنیم و در معادله (2) قرار می‌دهیم و f به دست می‌آید و ...

معادله (1) ... و معادله (1) ... با V جدید محاسبه می‌کنیم تا ... درست ... حدس ...

V به دست آمده را عوض می‌کنیم ...

حدس: $Re = 10^{4} \xrightarrow{(2)} f = 8.385\times10^{-3} \xrightarrow{(1),f} Re = 3.485\times10^{4}$

حدس دوم: $Re = 3.485\times10^{4} \xrightarrow{(2)} f = 6.823\times10^{-3} \xrightarrow{(1),f} Re = 3.863\times10^{4}$

حدس سوم: $Re = 3.863\times10^{4} \xrightarrow{(2)} f = 6.75\times10^{-3} \xrightarrow{(1),f} Re = 3.881\times10^{4}$

$$\boxed{Re = 3.886\times10^{4}} \qquad V = \frac{3.886\times10^{4}\times8.9\times10^{-4}}{997\times0.02} = \boxed{0.1736}$$

$$Q = VA = 0.1734\times\frac{\pi}{4}(0.02)^2 = 0.05 \ \frac{lit}{s}$$

* همانطور که V و Re را بدست آوردیم

- یعنی از جواب حدس جواب نهایی بدست -

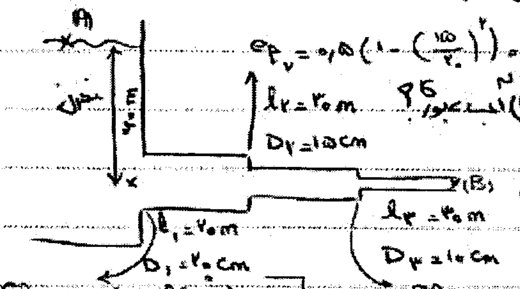
Subject:
Year. Month. Date. / /

تنها عیب در مسائل خنثی کردن افت ناشی از اصطکاک است.

$$\frac{P_1}{\rho}+gz_1+\frac{V_1^2}{2}=\frac{P_2}{\rho}+gz_2+\frac{V_2^2}{2}+4f\frac{l}{D}\frac{V^2}{2}-\omega f$$

اگر کل متغیرها را به g تقسیم کنیم در این صورت هد عیب را باید بدانیم.

③ آب از یک مخزن از طریق سه لوله به صورت سری جریان دارد.



$e_{f_2}=0.5\left(1-\left(\frac{15}{20}\right)^2\right)=\boxed{0.21875}$

$l_2=30\,m$, $D_2=15\,cm$

همه لوله‌ها از جنس چدن گالوانیزه هستند. دبی حجمی (Q) آب عبوری؟

$l_3=40\,m$, $D_3=10\,cm$

$l_1=20\,m$, $D_1=20\,cm$

(I) $\frac{P_A}{\rho}+gz_A+\frac{V_A^2}{2}=\frac{P_B}{\rho}+gz_B+\frac{V_B^2}{2}+\sum f\frac{l}{D}\frac{V^2}{2}$

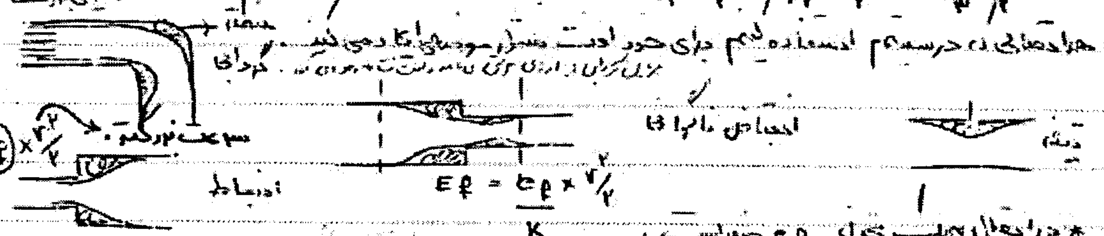
$e_{f_1}=0.5\left(1-\frac{A_s}{A_L}\right)=\boxed{0.5}$

$e_{f_3}=0.5\left(1-\left(\frac{10}{15}\right)^2\right)=\boxed{0.278}$

$$4f_1\frac{l_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2}+4f_2\frac{l_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2}+4f_3\frac{l_3}{D_3}\frac{V_3^2}{2}+e_{f_1}\frac{V_1^2}{2}+e_{f_2}\frac{V_2^2}{2}+e_{f_3}\frac{V_3^2}{2}$$

$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=0.259\ mm$ چدن گالوانیزه

* هر جا تغییری در سیستم ایجاد کنیم برای جبران افت ... گرداب



$E_f = e_f \times \frac{V^2}{2}$ ← سرعت خروجی

$E_f = e_f \times \frac{V^2}{2}$ (e_f: K)

* در اتصال ثابت کل e_f صفر است.

انقباض $e_f=0.5\left(1-\frac{A_s}{A_L}\right)$

انبساط $e_f=\left(1-\frac{A_s}{A_L}\right)^2$

برای راحتی از اصول معادل استفاده می‌شود.

$$Q_1=Q_2=Q_3$$

$$A_1V_1=A_2V_2=A_3V_3 \Rightarrow V_1=V_3\cdot\frac{A_3}{A_1}=V_3\left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2=0.25V_3$$

$$V_2=V_3\left(\frac{A_3}{A_2}\right)=V_3\left(\frac{D_3}{D_2}\right)^2=0.444V_3$$

$$\xrightarrow{(I)} 9.81\times40=\frac{V_3^2}{2}\left(1+25f_1+157.7f_2+1600f_3+0.3574\right)$$

$$\boxed{784.8=V_3^2\left(1.3574+25f_1+157.7f_2+1600f_3\right)}\quad ①$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject.
Year. Month. Date.

$$\begin{cases} \varepsilon_1/d_1 = \dfrac{0.259}{300} = 0.00086 \\ \varepsilon_2/d_2 = \dfrac{0.259}{150} = 0.00172 \\ \varepsilon_3/d_3 = \dfrac{0.259}{100} = 0.00259 \end{cases}
\qquad (2)\begin{cases} Re_1 = \dfrac{\rho V_1 D_1}{\eta} = \dfrac{1\times10^{3}\times0.3\times(0.25V_3)}{1\times10^{-3}} = 0.75\times10^{5}\,V_3 \\ Re_2 = \dfrac{1\times10^{3}\times0.15\times(0.444V_3)}{1\times10^{-3}} = 0.666\times10^{5}\,V_3 \\ Re_3 = \dfrac{10^{3}\times0.1\times V_3}{10^{-3}} = 1\times10^{5}\,V_3 \end{cases}$$

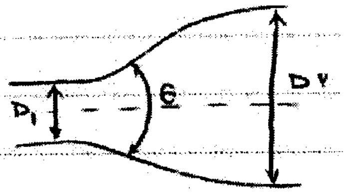
$$(3)\quad f^{-1/2} = -1.8\log\left[\left(\frac{\varepsilon/d}{3.7}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re}\right]$$

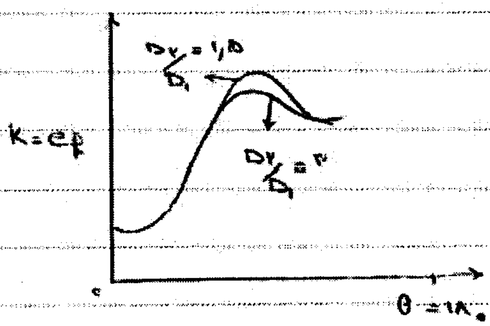
[illegible] V_3 [illegible]

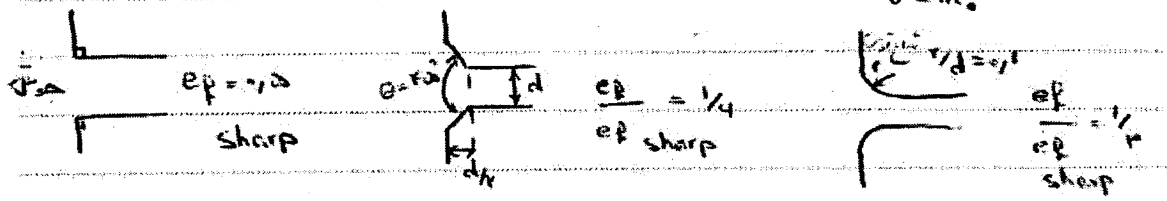
$$\text{حدس اول } V_3 = 2\ m/s \xrightarrow{(2)} \begin{cases} Re_1 = 1.5\times10^{5} \\ Re_2 = 1.332\times10^{5} \\ Re_3 = 2\times10^{5} \end{cases} \xrightarrow{(3),\ \varepsilon/d} \begin{cases} f_1 = [illegible] \\ f_2 = [illegible] \\ f_3 = [illegible] \end{cases} \xrightarrow{(1)} V_3 = [illegible]$$

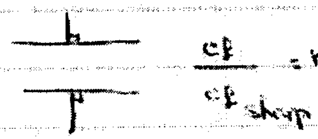
$$\text{حدس دوم } V_3 = [illegible]\ m/s \xrightarrow{(2)} \begin{cases} Re_1 = [illegible] \\ Re_2 = [illegible] \\ Re_3 = [illegible] \end{cases} \xrightarrow{(3),\ \varepsilon/d} \begin{cases} f_1 = [illegible] \\ f_2 = [illegible] \\ f_3 = [illegible] \end{cases} \xrightarrow{(1)} V_3 = \boxed{[illegible]}\ m/s$$

انبساط تدریجی





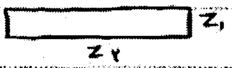




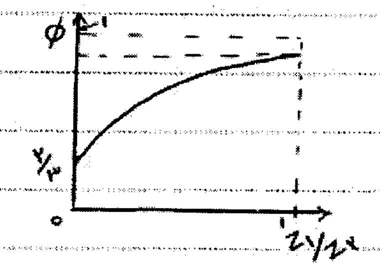
www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جریان آشفته: $f(\varepsilon/d, Re)$ $\quad D_h = \frac{4A}{S}$ $\quad \varepsilon/d = \frac{\varepsilon}{D_h}$, $Re = \frac{\rho V D_h}{\eta}$

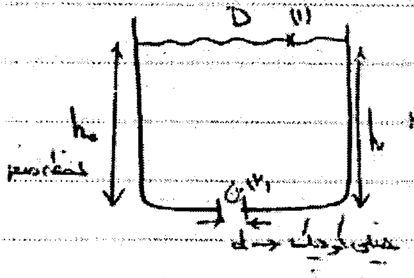


جریان آرام: $f = \frac{16}{Re}$ $\quad f = \frac{16}{\phi Re}$



$$\begin{cases} \text{if } z_2 \ggg z_1 \Rightarrow \phi = 2/3 \rightarrow f = 24/Re \\ D_h = \frac{4A}{S} = \frac{4 z_1 z_2}{2(z_1+z_2)} = 2 z_1 \end{cases}$$

- محاسبه زمان کامل خالی شدن مخزن unsteady است. * معمولاً در کتاب نیامده است.



از رابطه برنولی می‌توان نقطه به نقطه استفاده کرد چون steady است. اگر h آهسته و به تدریج کم می‌شود.

البته لحظه‌ای باشد.

$P_1 = P_2 = 0$

h در حال تغییر است.

$$V_2 = C_D \sqrt{2gh}$$

اصل بقای جرم: $A_1 V_1 = A_2 V_2 \rightarrow V_1 = V_2 \times \frac{A_2}{A_1} = V_2 \left(\frac{d}{D}\right)^2 \Rightarrow V_1$ خیلی کوچک

$V_1 = -\frac{dh}{dt}$ h کم می‌شود

$$-\frac{dh}{dt} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \times C_D \sqrt{2gh} \rightarrow \int_{h_0}^{h} \frac{-dh}{\sqrt{h}} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \times C_D \times \sqrt{2g} \int_0^t dt$$

$$2\sqrt{h}\Big]_{h_0}^{h} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \times C_D \times \sqrt{2g}\, t$$

$$2(\sqrt{h} - \sqrt{h_0}) = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \times C_D \times \sqrt{2g}\, t$$

اگر $h = 0$ باشد زمان کامل خالی بدست می‌آید.

$$\boxed{t = \frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{h}}{C_D \sqrt{g/2} \left(\frac{d}{D}\right)^2}}$$

اگر $h = h_0/2$ باشد زمان نیمه خالی بدست می‌آید.

ادامه

Subject:
Year.　　Month.　　Date.　( )

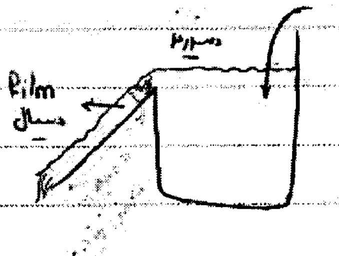
زمان کلی تخلیه‌ی نیمه‌ی اول و دوم متفاوت است برای نیمه اول $h = h_0/2$ می‌باشد و برای نیمه دوم از h تا صفر بدست می‌آوریم و از مقدار نیمه‌ی اول کم می‌کنیم.

اگر هم خم داشتیم و هم زانویی، L_e/D را جمع کرده با توجه به تعداد زانوها باشد جمع می‌کنیم.

اتصالات	L_e/D
زانویی ۴۵°	۱۵
زانویی ۹۰° با شعاع استاندارد	۳۱
زانویی ۹۰° با شعاع متوسط	۲۶
زانویی ۹۰° با شعاع طویل	۲۰
زانویی ۹۰° چهارگوش	۶۵
سه راهی [illegible]	۹۰
سه راهی [illegible]	۶۵
خم بازگشت ۱۸۰°	۷۵
شیر اطمینان	۷۷
شیر دروازه‌ای باز	۷
شیر دروازه‌ای ¼ بسته	۴۰
شیر دروازه‌ای ½ بسته	۱۹۰
شیر دروازه‌ای ¾ بسته	۸۴۰
شیر کروی کاملاً باز (گلاب)	۳۴۰
شیر زاویه‌ای کاملاً باز	۱۷۰

شیرآلات

www.vepub.com
Publish Your Mind

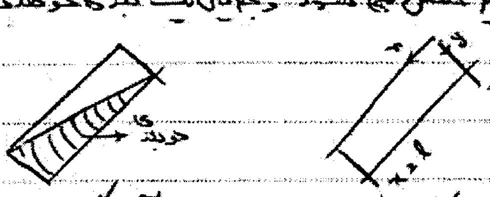


نمونه‌ای جریان سیال وارد سطح شیب‌دار شود سه‌بعدی است و

وقتی از ورود فاصله بگیریم جریان آرام از سه‌بعدی به دوبعدی

تبدیل می‌شود و در انتهای سطح شیب‌دار نیز جریان سه‌بعدی است.

اگر عرض را زیاد کنیم تنش برشی حاصل از دیواره دیگر حس نمی‌شود و جریان یک بعدی خواهد بود.

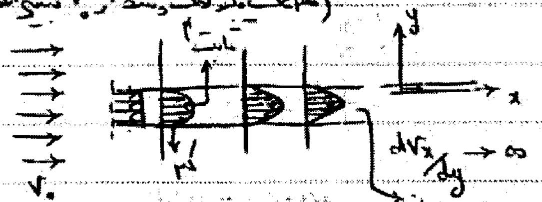


(مؤلفه‌ی موازی با سطح)

در مقابل صفحه یک سرعت یکنواخت وجود دارد. حال اگر یک لوله که باز را مقابل این جریان بگیریم هوا به محض

رسیدن به لوله no sleep condition است یعنی اولین سرعت صفر است و چون در لایه‌های بالا
(سرعت یکنواخت وسط از v_0 بیشتر است)

جریان ما فعلی توسعه یافته است.

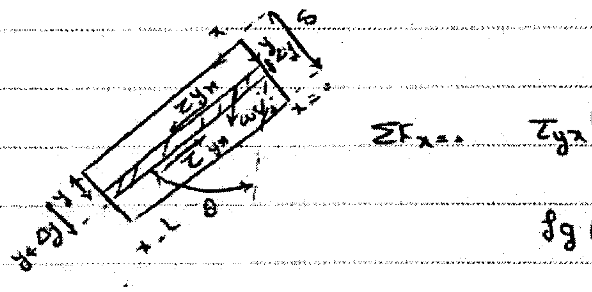


$\frac{dv_x}{dy} \to \infty \qquad \tau = -\eta\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^n$ — $n<1$ سیال غیرنیوتنی

v_z حذف — v_y حذف

از ابتدا و انتها صرف‌نظر می‌کنیم و عرض را زیاد می‌گیریم و جریان آرام و steady state و فقط v_x

عامل حرکت وزن است.



داریم:

$$\sum F_x = 0 \qquad \tau_{yx}\big|_y \times \underbrace{(L\times w)}_{\text{سطح}} - \tau_{yx}\big|_{y+\Delta y}(L\times w) + \rho g \underbrace{(L.w.\Delta y)}_{\text{حجم}}\times\cos\theta = 0 \xrightarrow{\div (L.w.\Delta y)}$$

عرض = w

$$\frac{-\tau_{yx}\big|_{y+\Delta y} + \tau_{yx}\big|_y}{\Delta y} + \rho g\cos\theta = 0$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

$$\lim \Delta y \to 0 \quad \frac{d\tau_{yx}}{dy} = \rho g \cos\theta \xrightarrow[y]{\text{انتگرال نسبت به}} \tau_{yx} = \rho g \cos\theta\, y + c_1$$

تنش برشی همیشه در سطح مشترک گاز و مایع صفر است.

« سرعت سیال در دیواره هم سرعت دیواره »

$$\begin{cases} y=0 \\ \tau_{yx}=0 \ * \end{cases} \Rightarrow c_1 = 0$$

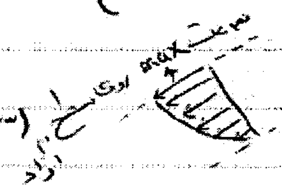
فرض می‌کنیم سیال نیوتنی است: $\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy}$

$$-\eta \frac{dv_x}{dy} = \rho g \cos\theta\, y \xrightarrow{\div(-\eta)} \frac{dv_x}{dy} = -\frac{\rho g \cos\theta}{\eta} y \xrightarrow[y]{\text{انتگرال نسبت به}}$$

$$v_x = -\rho g \cos\theta \left(\frac{y^2}{\eta(2)}\right) + c_2$$

$$\begin{cases} y=\delta \\ v_x=0 \end{cases} \text{no sleep condition} \Rightarrow c_2 = \frac{\rho g \cos\theta}{2\eta}\delta^2$$

$$\boxed{v_x = \frac{\rho g \cos\theta}{2\eta}(\delta^2 - y^2)}$$

(شکل ۳) 

$$\boxed{v_{x\,max} = \frac{\rho g \cos\theta}{2\eta}\cdot\delta^2}$$

Re<25 جریان آرام است.

شیب سرعت $\frac{dv_x}{dy}$ است که گاهی اطلاعات آن را می‌دهند.

هر تنشی که از سیال به هوا منتقل می‌شود برابر تنشی است که از هوا به سیال منتقل می‌شود و غیر صفر هستند.

$$\tau_{yx\,\text{هوا}} = \tau_{yx\,\text{سیال}} = -\eta \frac{dv_x}{dy}$$ (گرادیان سرعت باید داده شود)

* چون در سطح آزاد تنش برشی صفر است. (چون عدد خیلی کوچک است)

در سطح دیواره نیز معمولاً تنش برشی صفر است. (در صفحه وسط کانال کوچکتر ← ماکزیمم)

زیرا از دو طرف گرادیان‌ها مانند برابر با هستند ولی در یک طرف مثبت + و طرف دیگر منفی − است پس صفر می‌شود.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.

- اگر سرعت را داشته باشیم نسبت به y مشتق می‌گیریم و در η ضرب می‌کنیم که تنش به دست آید.

$$Re = \frac{\rho \bar{v} D_h}{\eta} \qquad D_h \to 4\delta\, x$$

عرض کانال را w می‌گیریم.

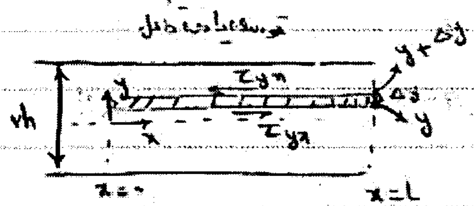
$$\bar{v}_x = \frac{Q}{A}$$

$$Q = \int_A v_x\, dA = \int_0^\delta \frac{\rho g\cos\theta}{2\eta}(\delta^2 - y^2)\underbrace{w\, dy}_{dA} = \frac{\rho g\cos\theta}{2\eta}\, w \int_0^\delta (\delta^2 - y^2)\, dy =$$

$$\frac{\rho g\cos\theta}{2\eta}\, w \left(\underbrace{\delta^2 y - \frac{y^3}{3}}_{2\delta^3/3}\right)\Big]_0^\delta = \frac{\rho g\cos\theta}{3\eta}\, w\, \delta^3$$

$$\bar{v}_x = \frac{\frac{\rho g\cos\theta}{3\eta}\cdot w\,\delta^3}{w\,\delta} = \boxed{\frac{\rho g\cos\theta}{3\eta}\,\delta^2} \qquad \bar{v}_x = \tfrac{2}{3}\, v_x^{max}$$

توسعه یافته کامل



اگر در $x=0$ مبدأ بگیریم تا $x=L$ باشد جریان داریم.

همه شروط مثل را داریم.

جریان فقط در جهت x، v_x داریم و کانال جهت کاملاً مشخص است.

τ_{yx} بالا و پایین را داریم مشخص.

چون توسعه یافته کامل است v_x تابعی از x نیست پس $m v_x$ in ورودی و $m v_x$ خروجی با هم برابرند و حذف می‌شوند.

نیروی وزن در کانال شیب‌دار به صورت ρg_x وجود دارد که g_x صفر نمی‌شود و فقط در اینجا اضافه می‌شود.

$$\rho g_x \cdot \Delta y \cdot w \cdot L$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \tau_{yx}\big|_y (L\cdot w) - \tau_{yx}\big|_{y+\Delta y}(L\cdot w) + P_0(\Delta y\cdot w) - P_L(\Delta y \cdot w) + \rho g_x \Delta y\, wL = 0$$

$$\xrightarrow{\div(L\cdot w\cdot\Delta y)} -\frac{\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y}{\Delta y} - \frac{(P_L - P_0)}{L} + \rho g_x = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y}{\Delta y} = -\frac{(P_L - P_0)}{L} + \rho g_x \xrightarrow{\lim \Delta y \to 0} \frac{d\tau_{yx}}{dy} = -\frac{(P_L-P_0)}{L} + \rho g_x$$

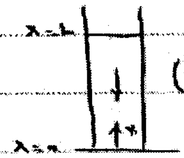
$$\tau_{yx} = \left(-\frac{P_L - P_0}{L} + \rho g_x\right)h + C_1$$

$$\begin{cases} y = 0 & \text{سطح تقارن} \\ \tau_{yx} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0 \qquad \tau_{yx} = -\mu\frac{dv_x}{dy}$$

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_L - P_0}{L} - \rho g_x\right)y \rightarrow v_x = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{P_L - P_0}{L} - \rho g_x\right)y^2 + C_2$$

$$\begin{cases} y = \pm h \\ v_x = 0 \end{cases} \rightarrow C_2 = \frac{-1}{2\mu}\left(\frac{P_L - P_0}{L} - \rho g_x\right)h^2$$

$$\boxed{v_x = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{P_L - P_0}{L} - \rho g_x\right)[y^2 - h^2]}$$



$\left(\frac{dp}{dx} \underbrace{- \rho g_x}_{+\rho g}\right)$

حرکت به سمت بالا ← اگر منفی باشد v_x مثبت خواهد بود

اگر $\frac{dp}{dx}$ بزرگتر از ρg بود منفی نشده ← v_x مثبت خواهد بود

اگر حاصل برابر صفر شد v_x صفر است

جریان لایه‌ای و اختلاف فشار ثابت باشد یک حالت تثبیت شده داشته باشیم اگر $Re<2000$ باشد جریان آرام است.

$$D_h = \frac{4 \times w \times 2h}{2(w+2h)} = 4h = 2(2h)$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y=0 \rightarrow v_x^{max} = -\frac{1}{2\eta}\left(\frac{P_L-P_0}{L}-\rho g_x\right)(h^2)$$

$$\bar{v}_x = \frac{2}{3} v_x^{max}$$

یک سیال از جنس روغن با ویسکوزیته سینماتیکی $\nu = \frac{\eta}{\rho} = 2\times10^{-4}\ m^2/s$ و دانسیته $0{,}8\times10^{3}\ kg/m^3$ از

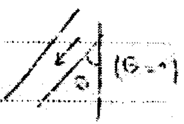
روی یک دیواره‌ی عمودی $(\theta=0)$ به پایین حرکت می‌کند. شدت جریان جرمی روغن برای لایه ضخامت

$\delta = 2{,}5\,mm$ را بدست آورید. $(w=1\,m)$

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \rho g\cos\theta$$

$$-\eta\frac{dv_x}{dy} = \tau_{yx} = \rho g\cos\theta\, y + \cancel{C_1} \longrightarrow v_x = \frac{\rho g\cos\theta}{2\eta}(\delta^2-y^2)$$

$$v_x^{max} = \frac{\rho g\cos\theta\,\delta^2}{2\eta} \qquad \bar{v}_x = \frac{\rho g\cos\theta\,\delta^2}{3\eta}$$



$$Q = \frac{\rho g\cos\theta\,\delta^2}{3\eta}(\delta . w) \longrightarrow \dot m = \frac{\rho^2 g\cos\theta\,\delta^3}{3\eta}(\delta . w)$$

عرض کانال

$$\dot m = \frac{0{,}8\times10^{3}\times 9{,}81\times 1\times((2{,}5)\times10^{-3})^{3}}{3\,(2\times10^{-4})}(1) = \boxed{0{,}204}\ kg/s$$

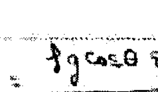
* با Re، اعلام کنیم

$$Re = \frac{\rho \bar{v} D}{\eta} = \frac{\bar{v}.D}{\nu} \qquad \dot m = \rho.\bar{v}.A \rightarrow \bar{v} = \frac{\dot m}{\rho A} \quad (1)$$

$\downarrow (1)$

$$Re = \frac{\dot m \overset{4\delta}{\cancel{D}}}{\rho A \eta} = \frac{0{,}204\times4\times2{,}5\times10^{-3}}{0{,}8\times10^{3}\times2{,}5\times10^{-3}\times1\times2\times10^{-4}} = \boxed{5{,}1} < 25$$

جواب درست است ⇐

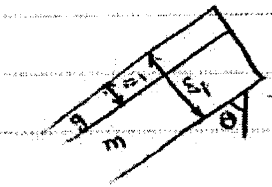


$$D_h = \frac{4A}{S} = \frac{4\delta w}{w} = 4\delta$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فرض کنید روی یک سطح شیب دار با زاویه‌ی θ دو سیال در حال عبور هستند که با هم مخلوط نمی‌شوند. ضخامت لایه‌ی سیال g، δ_1 و ضخامت لایه‌ی سیال m، δ_2 است (جریان آرام بوده و طول صفحه L بوده و فرضیات قبلی صادق است)



$$-\eta_g \frac{dv_x}{dy} = \tau_{yx_g} = \rho_g g \cos\theta \, y + c_1$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \tau_{yx_g} = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = 0$$

$$\boxed{v_{x_g} = \frac{-\rho_g g \cos\theta}{2\eta_g} y^2 + c_2}$$ [illegible]

$$-\eta \frac{dv_x}{dy} = \tau_{yx_m} = \rho_m g \cos\theta \, y + c_3 \longrightarrow$$ [illegible]

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{-\rho_m g \cos\theta}{\eta_m} y - \frac{c_3}{\eta}$$

$$\boxed{v_{x_m} = \frac{-\rho_m g \cos\theta}{2\eta} y^2 - \frac{c_3}{\eta} y + c_4}$$

$$\begin{cases} y = \delta_2 \\ v_{x_m} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-\rho_m g \cos\theta}{2\eta} \delta_2^2 - \frac{c_3}{\eta} \delta_2 + c_4 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = \delta_1 \\ v_{x_m} = v_{x_g} \end{cases} \Rightarrow \quad (2)$$ [illegible]

$$\begin{cases} y = \delta_1 \\ \tau_{yx_g} = \tau_{yx_m} \end{cases} \Rightarrow \rho_g g \cos\theta \, \delta_1 = \rho_m g \cos\theta \, \delta_1 + c_3$$

$$\rightarrow \boxed{g \cos\theta \, \delta_1 (\rho_g - \rho_m) = c_3}$$

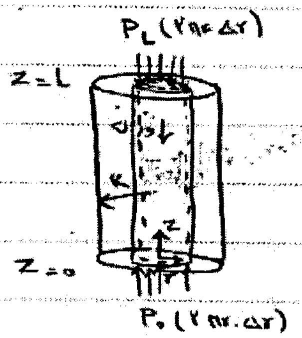
[illegible]

www.vapub.com

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جریان در داخل یک لوله:

از ابتدا و انتهای لوله صرف نظر می‌کنیم. چون لوله متقارن است از θ ، v_z و v_r و v_θ خواهیم داشت. عملاً در داخل یک لوله جریان دو بعدی است. اگر از v_r صرف نظر کنیم و لوله افقی باشد فقط v_z داریم. در لوله افقی عامل حرکت گرادیان فشار است و در لوله‌ی عمودی علاوه بر گرادیان فشار، گرادیان باید آنقدر زیاد باشد که وزن سیال را خنثی کند.



یک پوسته‌ی استوانه‌ای توخالی در نظر می‌گیریم:

$$\text{وزن} = \rho g(2\pi r\Delta r\cdot L)$$

$$\sum F_z = 0 \longrightarrow (\tau_{rz}\underbrace{2\pi r\cdot L}_{\text{سطح جانبی}})\Big|_r - (\tau_{rz}\cdot 2\pi r L)\Big|_{r+\Delta r} + P_0(2\pi r\Delta r) - P_L(2\pi r\Delta r) -$$
$$\rho g(2\pi r\Delta r L) = 0$$

$$\xrightarrow[\lim]{\div(2\pi\Delta r L)} -\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} + \frac{P_0-P_L}{L}\cdot r - \rho g r = 0 \rightarrow$$

$$\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = \underbrace{\left(\frac{P_0-P_L}{L} - \rho g\right)}_{\alpha} r \xrightarrow[r]{\text{انتگرال نسبت}} r\tau_{rz} = \alpha\frac{r^2}{2} + c_1$$

محور تقارن $\begin{cases} r=0 \\ \tau_{rz}=0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 0 \rightarrow r\tau_{rz} = \alpha\frac{r^2}{2} \rightarrow \tau_{rz} = \alpha\frac{r}{2}$

سیال نیوتنی است پس:

$$-\eta\frac{dv_z}{dr} = \tau_{rz} = \alpha\frac{r}{2} \rightarrow \frac{dv_z}{dr} = \frac{-\alpha}{2\eta}r$$

$$\rightarrow v_z = -\frac{\alpha}{4\eta}r^2 + c_2$$

شرایط مرزی دیواره $\begin{cases} r=R \\ v_z=0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{c_2 = \frac{\alpha}{4\eta}R^2}_{v_z^{max}} \rightarrow v_z = \frac{\alpha}{4\eta}(R^2-r^2)$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.

$$\boxed{v_z = \frac{1}{4\eta}\left(\frac{P_0 - P_L}{L} - \rho g\right)(R^2 - r^2)}$$

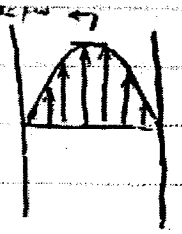
توزیع سرعت به شکل سهمی است.

اگر $P_0 = P_L$ باشد یک v_z منفی خواهیم داشت و از بالا به پایین است. اگر $\frac{P_0 - P_L}{L} = \rho g$ باشد کلاً

جریان نداشته و ساکن است. اگر $\frac{P_0 - P_L}{L} > \rho g$ به سمت بالا حرکت می‌کند.

$$\frac{P_0 - P_L}{L} = \frac{-P_L + P_0}{L} = \frac{-dP}{dz} \Rightarrow + \rho g_z - \frac{dP}{dz}$$

جهت g مثبت است



در اینجا Re باید کوچکتر از ۲۱۰۰ باشد.

$$\bar{v}_z = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A}\int_A v_z\, dA = \frac{1}{A}\int \frac{\alpha}{4\eta}(R^2 - r^2)\cdot 2\pi r\, dr =$$

$$\frac{2\pi}{A}\cdot\frac{\alpha}{4\eta}\int_0^R (R^2 - r^2) r\, dr = \frac{2\pi}{\pi R^2}\cdot\frac{\alpha}{4\eta}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R =$$

$$\frac{\alpha}{2R^2\eta}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{\alpha R^2}{8\eta} \rightarrow \bar{v}_z = \frac{R^2}{8\eta}\left(\frac{P_0 - P_L}{L} - \rho g\right)$$

$$Re = \frac{\rho \bar{v}_z \cdot \cancel{D}\, 2R}{\eta}$$

$$Q = \bar{v}_z \cdot A = \frac{R^2}{8\eta}\alpha \cdot \pi R^2 = \frac{\pi R^4}{8\eta}\left(\frac{P_0 - P_L}{L} - \rho g\right)$$

$$\dot{m} = \rho Q = \frac{\rho \pi R^4}{8\eta}\left(\frac{P_0 - P_L}{L} - \rho g\right)$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

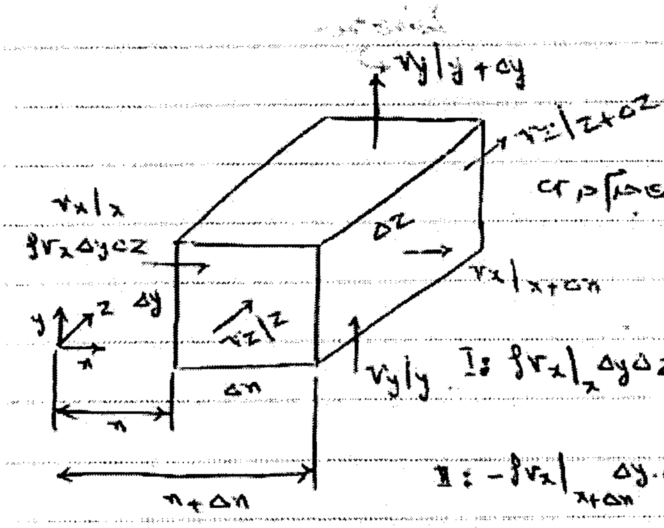
$$\bar{v}_z = \frac{R^2}{8\mu L}(\Delta P)$$ در لوله افقی $\rho g = 0$ است پس:

$$\rightarrow \Delta P = \frac{\bar{v}_z \cdot 8\mu L}{R^2}$$

$$4f \frac{L}{\cancel{D}_{2R}} \cdot \frac{v^2}{2}\rho = \frac{\bar{v}_z \cdot 8\mu L}{R^2} \rightarrow f v \rho = \frac{8\mu}{\frac{D}{2}} = \frac{16\mu}{D} \rightarrow f = \frac{16\mu}{\rho v D} = \frac{16}{Re}$$

از τ_z مشتق گرفته در $r=R$ که در دیواره به دست آید و بعد تنش برشی را به دست می‌آوریم و در سطح ضرب می‌کنیم که نیرو به دست آید.

معادله پیوستگی:



نرخ جرم ورودی − نرخ جرم خروجی = نرخ تجمع جرم در CV ($\dot{m}$)

I: $\rho v_x|_x \Delta y \Delta z + \rho v_y|_y \Delta x \Delta z + \rho v_z|_z \Delta x \cdot \Delta y$

II: $-\rho v_x|_{x+\Delta x} \Delta y \cdot \Delta z - \rho v_y|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z - \rho v_z|_{z+\Delta z} \Delta x \cdot \Delta y$

$$\text{III}: \frac{\rho_{t+\Delta t}\, \Delta x \Delta y \cdot \Delta z - \rho_t\, \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z}{\Delta t} = \frac{\Delta \rho}{\Delta t} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

$$\text{III} = \text{I} + \text{II} \xrightarrow{\div \Delta x \Delta y \Delta z} \frac{\rho v_x|_x}{\Delta x} + \frac{\rho v_y|_y}{\Delta y} + \frac{\rho v_z|_z}{\Delta z} - \frac{\rho v_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} -$$

$$\frac{\rho v_y|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{\rho v_z|_{z+\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta \rho}{\Delta t} \rightarrow -\frac{\Delta(\rho v_x)}{\Delta x} - \frac{\Delta(\rho v_y)}{\Delta y} - \frac{\Delta(\rho v_z)}{\Delta z} = \frac{\Delta \rho}{\Delta t}$$

سیال تراکم‌ناپذیر فرض می‌شود که ثابت ρ داشته باشیم.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\rightarrow \lim \Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t \rightarrow 0$

فرم دیفرانسیلی اصل بقای جرم
معادله‌ی پیوستگی

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0}$$

در سیال تراکم‌ناپذیر باشد $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ صفر است، اگر جریان پایا باشد $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ صفر است.

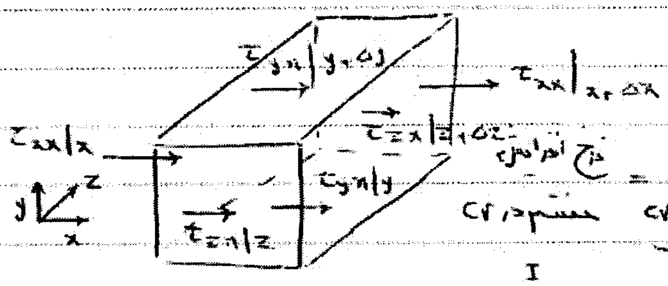
ضرب نقطه‌ای یک درجه پایین می‌آورد و اسکالر می‌شود ولی $\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0$

ضرب خارجی order را یک درجه بالا می‌برد. $\underset{div}{\vec{\nabla}} \cdot \vec{v} = 0$

$$\vec{\nabla} = \partial/\partial x\,\vec{i} + \partial/\partial y\,\vec{j} + \partial/\partial z\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

حجم کنترل برای مومنتم جهت x



$$\underset{\mathrm{I}}{\text{نرخ تغییرات مومنتم در CV}} = \underbrace{\text{نرخ مومنتم ورودی به CV} - \text{نرخ مومنتم خروجی از CV}}_{\mathrm{II}} + \underset{\mathrm{III}}{\text{مجموع نیروهای وارد بر سیستم}}$$

$$\mathrm{I}: \frac{(mv_x)|_{t+\Delta t} - (mv_x)|_t}{\Delta t} = \frac{(\rho v_x)|_{t+\Delta t} - (\rho v_x)|_t}{\Delta t} \cdot \Delta x \Delta y \cdot \Delta z = \frac{\Delta(\rho v_x)}{\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

مومنتم هم خودش دارد منتقل می‌شود طی جابجایی و مولکولی.

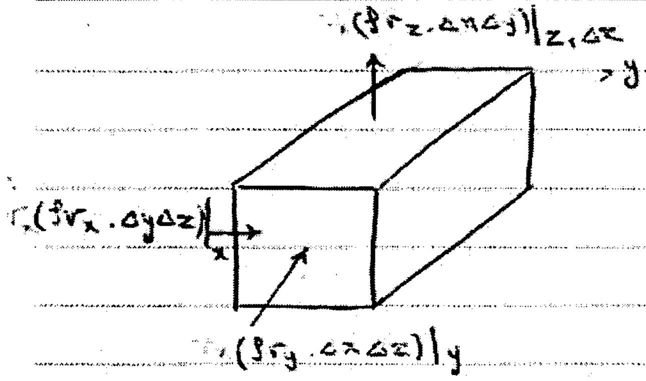
چون مولکولی داریم در همه سطوح تنش داریم ولی فقط در جهت x در نظر می‌گیریم.

(مولکولی) انتقال . $\mathrm{II}: \tau_{xx}|_x \Delta y \cdot \Delta z - \tau_{xx}|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z + \tau_{yx}|_y \Delta x \Delta z -$

$\tau_{yx}|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z + \tau_{zx}|_z \Delta x \Delta y - \tau_{zx}|_{z+\Delta z} \Delta y \Delta x$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )



هر صفحه‌ای هم مومنتوم در جهت x، هم در جهت y و هم در جهت z دارد.

مومنتوم جابجایی II: $(\rho v_x v_x \Delta y\Delta z)|_x - (\rho v_x v_x \Delta y\Delta z)|_{x+\Delta x} + (\rho v_y v_x \Delta x\Delta z)|_y$

$- (\rho v_y v_x \Delta x\Delta z)|_{y+\Delta y} + (\rho v_x v_z \cdot \Delta x\Delta y)|_z - (\rho v_z v_x \Delta x\Delta y)|_{z+\Delta z}$

نیروها: ۱) نیروهایی که بر سطح اثر می‌کنند ۲) نیروهای داخلی (به علت فشار)

III: $P|_x \Delta y\Delta z - P|_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z + \rho g_x \cdot \Delta x\Delta y\Delta z$

نیروی ناشی از g_x و g_z صفر است چون در جهت y است. (در این شکل)

جایگذاری و تقسیم بر حجم و حد وقتی $\Delta x\Delta y\Delta z \to 0$:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zx})}{\partial z}\right] - \left[\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z}\right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

معادله مومنتوم در جهت x ←

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

معادله ناویر استوکس

اگر η ثابت ← $\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) = \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در سیال تراکم ناپذیر دایورژانس صفر می‌شود.

$$\tau_{yx} = -\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = \tau_{xy} \qquad \tau_{xx} = -2\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \frac{2}{3}\eta\,\overbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \qquad \tau_{yy} = -2\eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \qquad \tau_{zz} = -2\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$$

سه معادله‌ی مومنتوم ناویر استوکس نامیده می‌شود.

سطح شیبدار با استفاده از معادله‌ی

$$\underbrace{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}}\right) = 0 \longrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0}_{\text{پیوستگی با دانسیته ثابت}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} = 0 \ , \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) = 0$$

v_y و v_z صفر است و سیال تراکم ناپذیر است.

فشار نداریم چون به خاطر فشار حرکت نمی‌کند.

v_x تابع z نیست چون عرض W را خیلی زیاد گرفتیم $\rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \rho g\cos\theta = 0 \longrightarrow \eta\frac{d^2 v_x}{dy^2} + \rho\cos\theta\, g = 0$$

$$\longrightarrow \frac{d^2 v_x}{dy^2} + \frac{\rho g\cos\theta}{\eta} = 0 \xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{dv_x}{dy} = -\frac{\rho g\cos\theta}{\eta}y + c_1$$

$$v_x = -\frac{\rho g\cos\theta}{2\eta}y^2 + c_1 x + c_2 \qquad \begin{cases} y = \delta \\ v_x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ \frac{dv_x}{dy} = 0 \end{cases} \longrightarrow c_1 = 0$$

$$\downarrow$$
$$c_2 = ?$$

در مختصات استوانه‌ای r و θ و z معادله‌های ناویر استوکس کاربرد است و به دست آوردن v_z در مختصات r

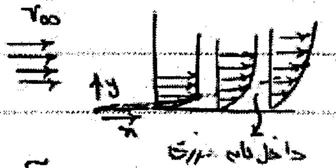
است برای یک لوله. (معمولاً در جهت z)

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date

جریان‌های خارجی نیز از این معادلات پیروی می‌کنند.

جریانی با سرعت ثابت (v_∞) وقتی به نقطه‌ی اول یک صفحه‌ی تخت مسطح می‌رسد سرعت صفر است. کاهش سرعت



$\frac{dv_x}{dy}$ = گرادیان <<< خیلی بزرگ

تنش خیلی بالا

آرام آرام به لایه‌های بالایی می‌رسد.

*با فاصله از اینجا سرعت ثابت است و به آن سرعت مقیم جریان لایه مرزی گویند.

در داخل لایه‌ی مرزی سرعت دو بعدی است $v_x, v_y \neq 0$ ولی در خارج لایه‌ی مرزی فقط v_x داریم که برابر v_∞ است.

معادله‌ی ناویر استوکس برای داخل لایه مرزی در صورت جریان پایدار:

$$\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

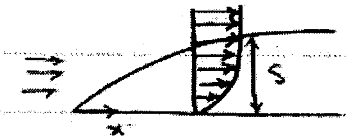
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = 0$$ پیوستگی

از طریق آنالیز ابعادی می‌توان از بعضی از این ترم‌ها صرف‌نظر کرد.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ضخامت لایه مرزی δ

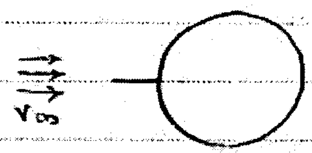


(1) $\boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}}$ $Re = \frac{\rho v x}{\eta}$

δ با $x^{1/2}$ ارتباط دارد.

(2) $\begin{cases} y = \delta \\ v_x = v_\infty \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y = \delta \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$

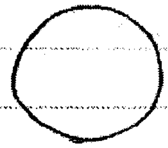
کره



جریان اگر سرعتش از آرام هم خیلی کم باشد جریان خزشی است.

(جدایش نداریم) $\boxed{F_D = 4\pi\eta v_\infty \cdot R}$

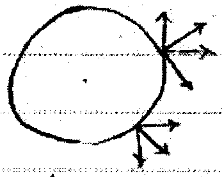
(تقریباً تا ۰٫۹ هم) $Re = \frac{\rho v_\infty D}{\eta} < 0.1$: (شرایط ایجاد Drag)



سرعت زیاد دارای جدایش است ←

$\tau_{r\theta} = -\eta\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$ مماس بر سطح ← عمود بر سطح

از معادلات کروی در جهت های r و θ و φ می توان v_r و v_θ و فشار را هم بدست آورد.



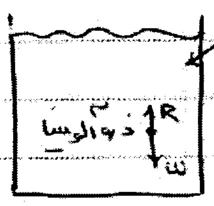
نیروی حاصل از فشار { مولفه عمودی حساب می شود / ولی مولفه افقی مهم است. }

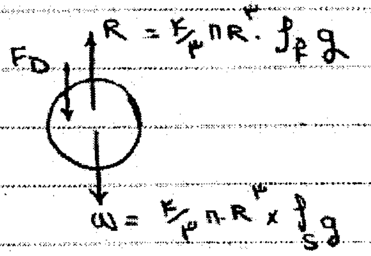
برای تنش مماسی هم همین رابطه بالا صادق است. (جمع دو مولفه عمودی)

از حرکت جریان روی کره علاوه بر سرعت یک نیروی اصطکاک روی سطح کره جریان ایجاد می شود که به آن نیروی Drag می گویند.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.





چون حرکت به سمت بالا ایجاد می‌شود $\rho_s < \rho_f$ نیروی درگ به سمت پایین (Drag) به وجود می‌آید.

F_D با بالا رفتن سرعت زیاد می‌شود پس آنقدر زیاد می‌شود که $\omega + F_D$ برابر نیروی ارشمیدس R به سمت بالا شود. این سرعت حدنهایی را سرعت حد می‌گویند.

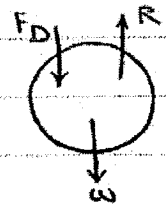
اول حرکت شتاب‌دار است و بعد به سرعت ثابت می‌رسیم.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \times \rho_s g + \underbrace{F_D}_{6\pi\eta R v_t} = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \rho_f g \leftrightarrow \omega + F_D = R$$

سرعت حد $\boxed{v_t = \frac{2R^2 g(\rho_f - \rho_s)}{9\eta}}$

می‌توان این ذره در کف مذاب باشد که با داشتن h و v_t می‌توان زمان رسیدن به سطح را حساب کرد.

اگر با خلاء روی سطح مذاب تشکیل شود، $\omega = F_D + R$



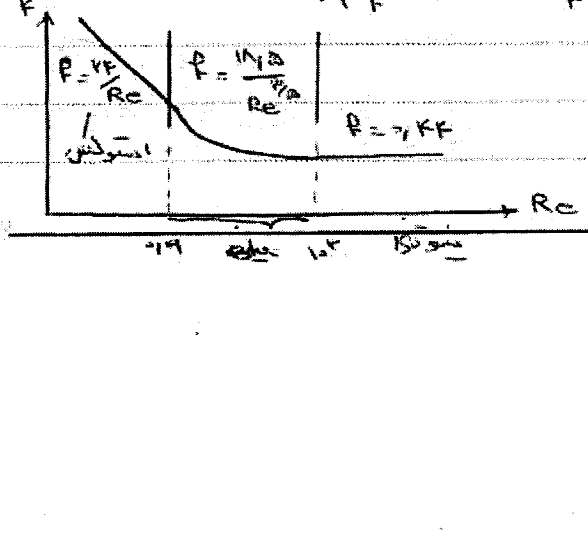
$$\omega + F_D = R$$

$$F_D = f \times (\tfrac{1}{2}\rho_f v_t^2) \times \pi R^2$$

$$f\,(\tfrac{1}{2}\rho_f v_t^2) \times \pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_f - \rho_s)$$

$$f \times \tfrac{1}{2}\rho_f v_t^2 \times \pi R^2 = 6\pi R v_t \eta$$

(استوکس) $\boxed{f = \frac{24}{Re}}$



Subject:
Year. Month. Date.

برای حل مثال ها، بر اساس این حدس بزنیم که در کدام ناحیه بوده است، سپس v_t را محاسبه کنیم.

مثلاً فرض کنیم استوکس است $\frac{24\eta}{\rho v_t (2R)} \times \frac{1}{2}\rho_f v_t^2 \times \pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 g\,(\rho_p - \rho_s)$

$\to v_t \to Re = \frac{\rho_f v_t D}{\eta}$ « اگر در محدوده درست است »

این حدس برای مثال های دیگر هم (استوکس) هم وجود دارد.

مثال) با فرض اینکه ... ذرات فولادی ... نمی‌توانند از عمق ۵ میلیمتر در مدت ۲۰ دقیقه ته‌نشین شوند، اندازه ذرات را محاسبه کنید.

$\rho_p = 7140 \ kg/m^3$ فولاد

$Al_2O_3 \quad \rho_s = 3980 \ kg/m^3$

* خاصیت ... ۲۰ درصد ...

$\eta_f = 0.0061 \ kg/m.s$ دانسیته

$v_t = \frac{x}{t} = \frac{1.5}{20\times 60} = \boxed{1.25\times 10^{-3}} \ m/s$

فرض می‌کنیم در محدوده استوکس باشیم $\to$ $R^2 = \frac{9\eta v_t}{2(\rho_p - \rho_s)g} = \frac{9(0.0061)(1.25\times 10^{-3})}{2(7140-3980)(9.81)} = \boxed{1.1\times 10^{-9}} \ m^2$

$\to R = \boxed{3.32\times 10^{-5}} \ m = 33.2 \ \mu m$

$Re = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{7140 \times 1.25\times 10^{-3} \times 6.64\times 10^{-5}}{0.0061} \simeq \boxed{0.1}$ ✓

پس ذرات با قطر ۶۶٫۴ میکرومتر ... ته‌نشین نمی‌شوند.

Subject:

Year. Month. Date.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year 90 Month 11 Date 17

شبیه سازی در فرآیندهای مواد

۱۰ نمره مربوط به پروژه و تکالیف و Term paper امتحان پایان ترم 30-40 و تلاش و پشتکار

10-20٪.

پیش نیازها: درس پدیده های انتقال، برنامه نویسی Fortran، آشنایی با یک نرم افزار به زبان Fortran

شبیه سازی: ۱) ریاضی (عددی) کامپیوتری: حل معادلات حاکم بر فرآیند با روش عددی با استفاده از کامپیوتر

۲) شبیه سازی فیزیکی

90/11/24

دکتر ابوطالبی

روش حجم محدود روش جانشانی برای حل معادلات نفوذ، جابجایی و ... و سایر معادلات دیفرانسیل است. بیان مسئله بصورت ریاضی همان ظاهر شدن معادلات دیفرانسیلی است. معادلات دیفرانسیل بر اساس فیزیک مسئله است. در حل معادلات دیفرانسیل سیر خواهد شد. بهینه کردن شبیه سازی فرآیند برای رسیدن به نقطه مطلوب فرآیندها و مواد یکی از اهداف این درس است. خروجی هر فرآیند وابسته به ورودی های کیفیت آنهاست.

شبیه سازی یک فرآیند باعث صرفه جویی در وقت، انرژی و هزینه می شود.

Projects:

۱) حل مسئله ی دو بعدی انتقال حرارت با شرایط مرزی خاص، نفوذ حرارت در حالت دو بعدی در حالت پایدار

۲) ~ ~ ~ ~ ~ در حالت ناپایدار

Subject:
Year. Month. Date. ( )

www.vepub.com

Refrences:

- "Numerical heat transfer and fluid flow", Patankar. (PDF)
  Finite-volume method
  فصل ۲ و ۵

- "Mathematical and physical modeling of materials processing operation", Ilegbusi, Iguchi, Wahnsidler (کتابخانه).

- "The mathematical and physical modeling of primary metal processing operations", Szekely, Evans, Brimacombe (PDF)
  فصل ۱،۲

- "Modeling of Materials Processing".

روش‌های مدل‌سازی فرآیندها:
- مدل‌سازی ریاضی
- مدل‌سازی فیزیکی

- Pilot plant: کوچک شده‌ی فرآیند اصلی را Pilot گوییم. bench کوچکتر از Pilot است و فرآیند شبیه به واقعیت است ولی با مقیاس متفاوت.

مدل ریاضی:
تشکیل شده از مجموعه‌ای از معادلاتی که بین پارامترهای یک فرآیند ارتباط برقرار می‌کند و با حل آنها می‌توان ارتباطی صریح بین متغیرها را بدست آورد. معادلات فیزیکی حاکم بر فرآیند را نشان می‌دهد. خروجی یک مدل ریاضی، رابطه‌ای کمی و صحیح است که پارامترها را با هم ترکیب می‌کند و امکان پیش‌بینی تغییرات را به ما می‌دهد. یعنی بدون انجام تست ببینیم ورودی‌ها چه تأثیری روی خروجی‌ها دارند.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month Date

مدل فیزیکی:
یک شبیه سیستم واقعی است که بصورت فیزیکی یا ساخته می شود ولی دو تفاوت بین مدل و سیستم واقعی وجود دارد: ۱)

مقیاس ۲) مواد سایز ممکن است up / down باشد. مثل شبیه سازی جریان خون در رگ انسان. مثلاً

اگر دیواره رگ رسوب کند روی جریان خون چه تأثیری دارد؟ خروجی مدل فیزیکی یا ریاضی ممکن است

صد در صد منطبق به واقعیت نباشد فقط باعث می شود بدانیم در رگ ها چه فرآیندی رخ می دهد ولی سیستم اصلی به صورت سازی

مهم است که به صورت کمی بتوانیم به خروجی برسیم. برای شبیه سازی جریان مذاب در یک کانال می توان از آب

به عنوان مدل استفاده کرد چون از لحاظ سیالیت و ویژگی های سیالی به هم شبیه هستند.

Pilot Plant: در develope کردن فرآیندها مرحله بسیار اهمیت دارد. از داشتن یک مدل فیزیکی یا ریاضی هدف را در مقیاس کوچک.

مدل ریاضی:

1) Mechanistic models (fundamental or)
2) semi-emprical models
3) Emperical or statistical models

① : مبتنی بر یک سری اصول فیزیکی و شیمیایی هستند و اصطلاحاً pure fundamental هستند.

گاهی از روابط تجربی کمک می گیریم و تنها با اصول فیزیکی و شیمیایی بسنده نمی کنیم که به مدل های semi-emprical هستند و از آنها

برای تکمیل کار از روابط تجربی استفاده می کنیم. اغلب مدل ها در مواد این گونه هستند. در مدل emprical

بر اساس تجربه مدل را می سازیم مثل fit کردن یک منحنی بر یک سری داده ولی یک محدودیت را در دو نقطه

Subject:

Year. Month. Date.

روش‌ها آزمایش با صادق است ولی ... بیشتری دارد:

www.vepdf Publish Your Mind

مراحل مدل‌سازی ریاضی:

- تعریف مسئله: مهم‌ترین مرحله است. با بیشتر مدل‌سازی فرآیند در این مرحله مشخص می‌شود.

- انتخاب متغیرها فرآیند (متغیرها هم باید شناسایی شوند تا رابطه بین آنها در مدل مشخص شود یا پارامترها اصلی وابسته)

- فرمول‌بندی کردن معادلات حاکم (رابطه بین پارامترها مشخص شده برای مسئله ما گویا شده، بر اساس اصول کلیه یا معادلات پایه‌ای (از کارهای دیگران کمک می‌گیریم)

- حل معادلات که معمولاً دیفرانسیلی هستند ممکن است درجات مختلف داشته باشد.

حل معادلات دیفرانسیلی دو روش دارد: ۱) روش تحلیلی: برای مسائل ساده شده ۲) روش جایگزینی عددی: بیشتر در مدل‌سازی استفاده می‌شود.

روش‌های عددی برای حل معادلات از روش‌ها finite کمک می‌گیرد.

- تست مدل و جواب‌ها: مطمئن شدن از اینکه جواب‌ها با مدل سازگار است.

- اصلاح نتایج به دست آمده توسط چک کردن فرضیات و راه‌حل‌ها و در نهایت به دنیا قابل استفاده در عمل منتشر شود.

معادلات حاکم بر جریان سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر را در یک cavity (دوبعدی) در حالت ناپایدار (گذرا) با ... با توجه به اصل بقاء مومنتوم به دست آورید.

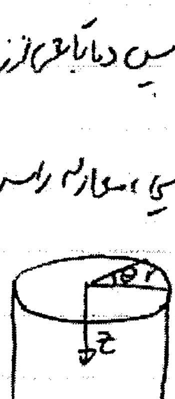
معادله انرژی را برای حالت سه‌بعدی سیالی که در حال حرکت تراکم‌ناپذیر است به دست آورید.

www.vepub.com
Publish Your Mind

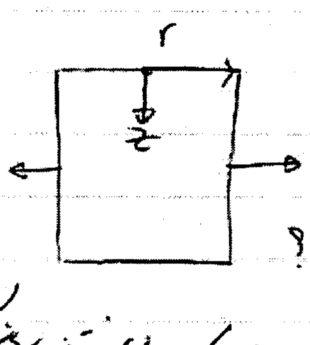
Subject:
Year. Month. Date.

- مشورت، بررسی، آنالیز ... مسائل تا مسئله کاملاً روشن شود.
- باید سیستم را که ۱ بعدی، 2 بعدی یا 3 بعدی است را بررسی کنیم
- باید حالت stady state را بررسی کنیم.

فرض کنیم می‌خواهیم فولاد کم کربن را عملیات سختکاری کنیم وقتی از لحاظ دما یکنواخت شد در محیط خنک کننده سرد کنیم و ساختار را تا عمق مورد نظر سخت کنیم. با استفاده از مدل سازی (ریاضی) با شرایط سختکاری، عمق سرد تئوری را پیش بینی کنیم. اولین قدم فیزیک قضیه است دانستن چه عواملی در سختکاری اثر دارد. سرعت سرد کردن از دمای معین و در یک دوره‌ی معین است. می‌خواهیم سرعت را در نقاط مختلف بررسی کنیم، پس دما تابعی از زمان و مکان می‌شود. شرایط مرزی محیط سرد کردن را باید داشته باشیم. برای سرد کردن نمونه استوانه‌ای، معادله را سه بعدی



در نظر بگیریم و مختصات قطبی است. گاهی در جهت مثلاً θ تغییرات قابل صرف‌نظر کردن است و فقط 2 بعد می‌ماند. پس مسئله را دو بعدی در نظر می‌گیریم (در جهت θ یکسان است) و شرایط تقارن این را می‌گوید. پس داریم:



زمان

$T = f(z, r, t)$

پس دما برحسب سه پارامتر به دست می‌آید: نقش تحولات فازی در نوع عملیات چه می‌شود؟

در اثر تحولات (مثلاً بینیت) با تغییرات دما و آزاد شدن یا گرفتن گرما همراه است. باید تحلیل کرد و اثر نقش تحولات را [illegible] نداشتن آن را انکار نمی‌کنیم. باید بگوییم چرا دو بعدی از سه بعدی به وجود آمده و باید مسئله را Justify کرد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر یک طرف را با هوا دیگر طرف را با آب ... تا بتوان هم ... و آنگاه θ را باید وارد کرد

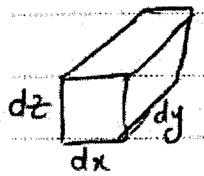
و مسئله را سه بعدی حل کرد. k و ρ و c ... باید با تغییرات دمای خاص ضمن تغییرات قابل توجهی ندارد

باید ارجاع داد به مطالبی که این را اثبات کرده‌اند و ما آن (فرض) را در تئوری پذیرفته‌ایم.

نوشتن معادله بر اساس اصول بقا: $\left\{ \begin{array}{l} \text{جرم} \\ \text{انرژی} \\ \text{مومنتوم} \end{array} \right.$

$$\begin{bmatrix}\text{rate of}\\ \text{accumulation}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{rate of}\\ \text{input}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{rate of}\\ \text{output}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{rate of}\\ \text{generation}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{rate of}\\ \text{consump}\end{bmatrix}$$

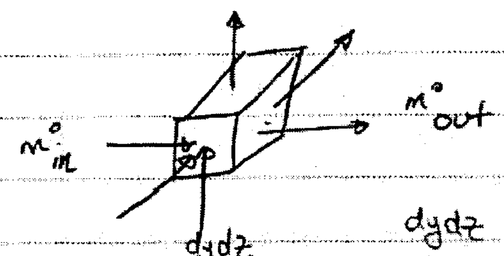
مقدار انباشته در سیستم — نرخ ورودی — نرخ خروجی — نرخ تولید — نرخ مصرف



المان خاص

گاهی مخلوطی از material وارد سیستم می‌شود، در این حالت: اصل بقا باید در مورد کل اجزا و تک تک اجزا برقرار شود.

در مورد جرم ورودی و خروجی:



سطح در جهت x: dydz

$$\underbrace{\rho v_x A_x\Big|_x}_{\text{نرخ ورود در جهت } x} - \underbrace{\rho v_x A_x\Big|_{x+\Delta x}}_{\text{نرخ خروج در جهت } x} = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{\text{ذخیره}} = dx\,dy\,dz\,\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \rho v_x\Big|_{x+dx} = \left[\rho v_x\Big|_x + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx\right] \cdot A_x \quad ?$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

فرم برداری: $\nabla(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

حاصل اعمال اصل بقای جرم کلی است

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year: Month: Date:

اگر جرم ثابت باشد پس: $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \Rightarrow \nabla(\rho . v)=0$

همین معادله را می‌توان برای مومنتوم نوشت: $\frac{\text{نرخ تغییرات جرم}}{\text{حجم}} : \frac{\partial \rho}{\partial t}$

$$\underbrace{\partial/\partial t(\rho v)}_{\text{unsteady ترم}} + \underbrace{\nabla.(\rho v v)}_{\text{انتقال مومنتوم به واسطه شار}} = \underbrace{-\nabla.\tau}_{\text{مومنتوم سودی شار}} \underbrace{-\nabla p}_{\text{نیروی تنشی}} + \underbrace{F_b}_{\text{نیروی حجمی}} + \underbrace{F_v}_{\text{بر شار بعد}}$$

ترم دیسکوز در واحد ...

این معادله مومنتوم را می‌توان در سه جهت x و y و z بیان کرد.

Navier stokes equation:

نیروها در تنسور نوشته شده اند و جهت ثابت شده تنها در جهت x ثابت شده باشد. $\tau = -\mu \nabla v$ ثابت سیوزنی

μ - سرعت در جهت x
y ~ ~ - v
z ~ ~ - u

$$\partial/\partial t(\rho u) + div(\rho v u) = div(\mu grad . u) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

The energy equation:

$$\underbrace{\partial/\partial t(\rho h)}_{\text{تغییرات انرژی در واحد حجم}} + \underbrace{div(\rho v h)}_{\text{جریان حرارت به واسطه جابجایی}} = \underbrace{div(k \, grad T)}_{\text{جریان حرارت به واسطه سرد}} + \overset{\text{ترم دارایی } \phi}{S_h}$$ ← نرخ تولید حرارت بر واحد حجم

flux: نرخ تغییرات در واحد سطح باید باشد. $q=-k\,grad\,T \Leftarrow$ قانون فوریه

conservation of chemical species: در مورد بقای جرم در

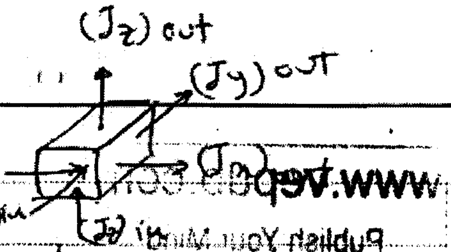
$$\partial/\partial t(\underbrace{\rho m_I}_{\text{mass fraction}}) + div(\rho v m_I + \overset{\text{فلاکس نفوذی}}{J_I}) = R_I$$ ← سرعت تولید species در واحد حجم

$J_l = -\Gamma_l \, grad\, m_l \Leftarrow$ قانون فیک

متغیر وابسته برای depended variable:
جرم ← غلظت (m)
مومنتوم ← سرعت (v)
انرژی ← آنتالپی یا دما (h or T)

$\rho\phi$: پارامتر در واحد حجم ← ϕ هر متغیر
$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}$ rate of accumulation

Subject:
Year. Month. Date.



www.vepdf.com
Publish Your Mind

$J_{in} \longrightarrow J_{out}$

در راستای x :

$$\begin{bmatrix}\text{The net} \\ \text{e flux}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{out put} \\ \text{flux}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{In put} \\ \text{flux}\end{bmatrix} = area\left[\left(J_x|_{out}\right) - \left(J_x|_{in}\right)\right]$$

flux: جابجایی ← در اثر سرعت باعث انتقال می‌شود $(\rho \Phi v)$
نفوذ ← در اثر 〃 〃 〃

$$J_x = \underbrace{[\rho u \Phi]}_{\text{جابجایی}} + \underbrace{\left[-\Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]}_{\text{نفوذ}}$$

Γ_φ: ضریب نفوذ

بسط سری تیلور: $(J_x)_{out} = (J_x)_{in} + \left(\frac{\partial J_x}{\partial x}\right)_{in} dx + \dots$

به طور کلی در سه جهت:
$$J = \rho \bar{u} \phi - \Gamma_\phi \underbrace{\nabla}_{grad} \phi$$

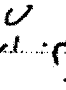
u: سرعت در جهت x
v: سرعت در جهت y
w: 〃 〃 z

معادله کلی انتقال φ:
$$\partial/\partial t(\rho\varphi) + \underbrace{\nabla\cdot(\rho\bar{u}\varphi)}_{\text{جابجایی}} - \underbrace{\nabla(\Gamma_\varphi\cdot\nabla\varphi)}_{\text{نفوذ}} = S_\varphi$$

$$\Rightarrow \underbrace{\partial/\partial t(\rho\varphi)}_{\text{سرعت تغییر φ در هر واحد حجم}} + \underbrace{div(\rho\bar{u}\varphi)}_{\text{انتقال φ با مکانیزم جابجایی}} = \underbrace{div(\Gamma_\varphi\cdot grad\,\varphi)}_{\text{انتقال φ با مکانیزم نفوذی}} + \underbrace{S_\varphi}_{\text{نرخ تولید φ در واحد حجم}}$$

S_φ در سیال مختلف فرق می‌کند

φ ← می‌تواند غلظت، سرعت یا دما... باشد.

حتی اگر در معادله ۲ φ اسکالر باشد، با از ترم سرعتی داریم که مربوط به مومنتوم و حرکت است پس یک مجهول نیست، پس سه معادله سرعت دیگر و یک معادله پیوستگی هم اضافه می‌شود و ۴ مجهول را در کنار هم باید داشته باشیم. اگر  را در نظر بگیریم ← خود بابک ساکن است و اگر سیال اطراف را در نظر بگیریم پس H (آنتالپی) و یا دما را داریم و سرعت نداریم.

- If the continuity equation were to be regarded as a special case...

$$\underbrace{\partial/\partial t}_{\text{یک قرارداد}}(\rho\varphi) + div(\rho\bar{u}\varphi) = div[\Gamma_\varphi\, grad\,\varphi] + S_\varphi$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.

- write the unsteady heat ...

بعد از حل مسأله در اسلایدها می‌توان در نهایت داشت:

$$\partial/_{\partial t}(\rho h) = div\left(\frac{k}{\varphi}\nabla h\right) + S_h$$

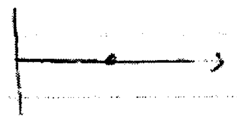
معادلات حاکم که در سیستم بسته با نرم معین تعیین می‌شوند و φ متأثر از تغییرات اطرافش است. با داشتن

شرایط مرزی مسئله قابل حل است.

Equilibriam problems

Marching problems

دارای زمان هستند و مرزهای باز دارند



در راستای افزایش زمان پیش می‌رویم.

t=0

دو تا شرط می‌خواهیم { شرط اولیه / شرط مرزی

معادلات Elliptic و Parabolic که در مهندسی مواد مورد استفاده اند.

$$(J_x)_{out} - (J)_x in = J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x} dx - J_x = \frac{\partial J_x}{\partial x} dx$$ در دو سطح

The net efflux $= \frac{\partial J_x}{\partial x} dx\,dy\,dz$

با در نظر گرفتن جهات y و z:

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} dx\,dy\,dz + \frac{\partial J_y}{\partial y} dx\,dy\,dz + \frac{\partial J_z}{\partial z} dx\,dy\,dz$$

در واقع $e = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = div(J) = \nabla \cdot J$

Subject:

Year. Month. Date.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Element of Numerical Prediction:

معادلاتی که از این طریق بدست می‌آید، معادله دیفرانسیل جزئی است. حل معادلات می‌تواند به دو طریق صورت گیرد:

۱) تحلیلی: برای مسائل ساده، برای شرایط مرزی ساده و فرضیات ساده‌شونده‌ی زیاد بکار می‌رود ولی معمولاً معادلاتی را که این شرایط را ندارند با روش تحلیلی قابل حل نیستند. ۲) روش تقریبی: روش‌های عددی هستند که برای حل معادلات ریاضی امروزه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

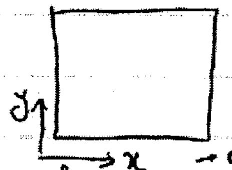
روش عددی:

میدان پتانسیل را بصورت گسسته درمی‌آوریم (از حالت پیوسته مسئله را خارج می‌کنیم و آن را به حالت گسسته درمی‌آوریم)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

(مسئله‌ی حالت پایدار) معادله‌ی لاپلاس که در فضای دوبعدی نوشته شده $\varphi = f(x,y)$

متغیر اصلی در اینجا φ است و φ به صورت تابعی از x و y بصورت تحلیلی بدست می‌آید و با تغییر x و y در حل معادله φ تغییر می‌کند. اگر به روش تحلیلی بخواهیم برسیم میدان پتانسیل را بصورت زیر فرض می‌کنیم



شرایط مسئله را لازم داریم تا φ را برحسب x و y در میدان تعیین کنیم و بسته به درجات مشتق نیاز به شرایط مرزی داریم یعنی چهار شرط مرزی لازم داریم که به چهار ضلع مربع مربوط می‌شود. اگر شرایط مرزی ساده نباشد حل بسیار مشکل یا ناممکن خواهد بود. در روش عددی نیاز به فرض کردن نداریم و در روش حل تقریبی یا خطا وارد می‌شود و از دقت آن استفاده می‌کنیم. کار ما این است که تقریب را به حداقل برسانیم. در روش عددی تا حدود نقطه موجود در فضا را به نقاط

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.

محدود تبدیل می‌کنیم. انتخاب نقاط با توجه به شرایط مسئله ... حل را محدود به همان نقاط می‌کنیم و از

حالت بینهایت خارج می‌کنیم و معادلات جبری آن را می‌نویسیم. معادلات جبری مقادیر φ را در آن نقاط به نقاط مربوط می‌کند.

در این حالت مقدار φ فقط برای نقاطی که مشخص کردیم بدست می‌آید. این مسیر دو مرحله مشخص دارد: ۱) گسسته کردن

میدان و معادله ۲) حل معادلات با توجه به ضرایب و ثوابت ظاهر شده در معادله ← حل معادله به روش عددی

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v} \varphi) = \operatorname{div}(\Gamma_\varphi \operatorname{grad}\varphi) + S_\varphi$$

معادله جابجایی از φ استفاده می‌کند

پیچیدگی مسئله را زیاد می‌کند.

نشان از پایا یا ناپایا بودن سیستم

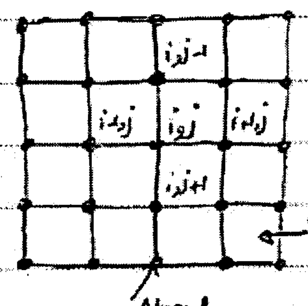
سرعت سیال در هر نقطه از سیستم که می‌تواند متغیر باشد.

حل معادله وابسته به مشخص بودن میدان سرعت است یعنی باید معادله حرکت هم در سیستم حل شود تا v از آن بدست آید.

روش‌های Discretization شامل روش‌های عددی‌سازی است - FEM، BEM، FV و روش‌های تفاضلی

Discrete کردن است تا به معادلات جبری برسیم و پس از آن حل کردن مسئله را به روش‌ها معلوم داریم.

نحوه مش‌بندی به نوع مسئله برمی‌گردد، یکنواخت بودن، فواصل و ...



مثال: i,j = 3,3

هرچه تعداد grid یا مش بیشتر شود حجم محاسبات بالا می‌رود. سه روش جاافتاده

برای این کار وجود دارد: ۱) Finite Difference Method (FDM)

۲) Finite Element Method (FEM)

۳) Finite volume method (FVM)

یکی از ویژگی‌های FEM این است که برای میدان‌های نامنظم مناسب است ولی FDM و FVM منظم

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year: Month: Date:

بر FEM برای هندسه‌ها پیچیده، اشکال دارند. وقتی مرزها معین باشه این دو روش کارائی خوبی دارند.

حل معادلاتی که به این دو روش بدست می‌آیند مشکل‌تر است.

FDM:

اختلاف محدود روشی عمومی آن براساس تعریف مشتق و مشتقات تک تک متغیر بیان شده و شکل گرفته است.

$\lim_{\text{فاصله} \to 0} \frac{\text{اختلاف در نقطه}}{\text{فاصله}}$ = مشتق ≈ اختلاف محدود → منشأ ورود خطا

- استفاده از بسط سری تیلور در حدود نقطه
- فرض کردن یک Polynomial به عنوان منحنی تغییرات
- control-volume approach

FEM: المان‌ها

تقسیم کردن میدان به المان‌ها توضیح که بسته به ابعاد میدان (چند بعدی بودن) که صور مختلفی در می‌آید. بدست آوردن معادلات جبری برای مش‌ها. با فرض تابعی که بین اجزای سیستم حاکم است، معادله‌ی دیفرانسیل را به معادله‌ی جبری تبدیل می‌کند.

FVM:

مبنای حل معادلات مختلف دیفرانسیلی قرار گرفته و خیلی از محققین از آن استفاده می‌کنند و در کتاب Patankar هم توسعه یافته است.

FDM: $\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x}$

$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(i+1, j) - u(i,j)}{\Delta x}$ $\qquad$ $\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u(i, j+1) - u(i,j)}{\Delta y}$ $\qquad$ Δx و Δy می‌توانند متفاوت باشند یعنی

Δx و Δy بین نقاط مختلف متفاوت باشد یعنی grid یکنواخت نداشته باشیم.

forward

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) =$ central

backward

$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) = \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2$

Subject: $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$ central

Year. Month. Date. / /

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\Big|_{i,j} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{i+1,j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{i,j}}{\Delta x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

می‌توان از بسط سری تیلور هم استفاده کرد

$$u(x_0+\Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0 \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_0 \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \cdots + \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}\Big|_0 \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\Big|_0 \frac{\Delta x^n}{n!}$$

Trancation error خطای ناشی از Discrete کردن است،

Trancation error $\le K \cdot \Delta x$ (Δx خطا order)

استفاده از بسط تیلور حدود خطا را برای ما مشخص می‌کند.

خطا کمتر ← دقت بیشتر ← Δx

Forward Difference = نقطه اصلی - نقطه جلوی

backward " = نقطه عقبی - نقطه اصلی

$\frac{\partial u}{\partial x}$ می‌توان بسط تیلور را به جای $+\Delta x$ با $-\Delta x$ بنویسیم و در عبارت $+\Delta x$ را از $-\Delta x$ کم کنیم

$\Delta x - (-\Delta x) = 2\Delta x$

$2\Delta x$ می‌شود. در این جا T.E کمتر از حالت backward و forward می‌شود چون Δx^2 داریم که Δx در

سری تیلور مقدار کمی است و به توان ۲ آن به مراتب کوچکتر است.

استخراج $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ از بسط تیلور: در اینجا مشتق اول حذف می‌شود و مشتق مرتبه ۲ و مراتب بالاتر باقی می‌ماند

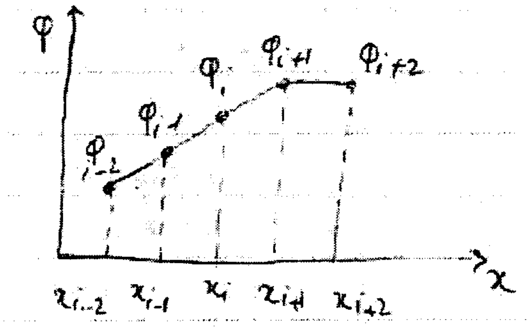
order خطا در این حالت Δx^2 است (اگر حالت forward داشته باشیم).

* فصل سوم کتاب computational fluid Mechnics and heat transfer by Dale A Anderson, John C Tann, Richard M Pletcher که است به صورت E-book موجود *

www.vepub.com
Publish Your Mind

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{\varphi_{i,j+1}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i,j-1}}{\Delta y^2}=0$$

FDM - Polynomial Fittings



$$\varphi(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\dots+\alpha_n x^n$$

بسته به درجه Polynomial تعداد عبارت‌هایی که باید بنویسیم تا جواب به دست آید متفاوت است.

مسائل آخر فصل ۳ کتاب Anderson: ۳-۲، ۳-۴، ۳-۵، ۳-۱۲، ۳-۱۷

15، 12، 90

دکتر سعیدین

base ریاضی FEM از روش‌های دیگر پیچیده‌تر است. مزیت اصلی آن این است که برای اشکال پیچیده می‌توان از آنها استفاده کرد. در FDM باید محورها و خطوط را داشته باشیم پس شکل پیچیده با این روش قابل حل نیست. در FEM شکل مش‌ها می‌توانند متفاوت باشند و لزومی ندارد نقاط دقیق باشد. می‌خواهیم ببینیم یک معادله دیفرانسیل جزئی را چگونه می‌خواهیم با روش FEM حل کنیم. (حالت stady state)

هر بردار در فضا دارای سه جهت x و y و z است. که بردارهای اصلی یا base vector هستند.

$$\vec{F}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$$

$\vec{F}\cdot\vec{i}=0$ مشتق F در جهت x صفر است.

$\vec{F}\cdot\vec{j}=0$ 〃 〃 〃 y 〃 〃

$\vec{F}\cdot\vec{k}=0$ 〃 〃 〃 z 〃 〃

هر تابعی را با ابعاد مشخص که داشته باشیم می‌توانیم آن را در فضای Function توسط base function ها آن را تعریف کنیم.

لاپلاس $L(U)=0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial U}{\partial x}+U+x=0$$ معادله لاپلاس:

اگر U را پیدا کنیم در داخل $L(U)=0$ بگذاریم جواب صفر می‌شود ولی هر جواب تقریبی یک باقی‌مانده غیر صفر به ما می‌دهد.

جواب تقریبی را U_a فرض می‌کنیم

$L(U_a)\neq 0=R$ باقی‌مانده

if $R=0 \Rightarrow U_a=U$ ، U_a جواب واقعی است.

R وقتی صفر است که ضرب داخلی آن در یک base function صفر باشد.

از حاصل جمع خطی base function ها ، U بدست می‌آید. فرض کنیم base function ها به صورت زیر باشد:

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \Rightarrow U_a=\sum_{j=1} a_j\cdot\varphi_j$ $\quad U_a=a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+a_3\varphi_3+\dots$

a_1 و a_2 و a_3 یک ضریب عددی است و φ_1 و φ_2 و φ_3 مثل k ها در F ها است که تابع مبنا هستند و بر اساس

آنها هر تابعی قابل تعریف است. پس اول باید تابع مبنا را بشناسیم و U_a را تعریف کنیم، داخل لاپلاس بگذاریم

و R را بدست آوریم و ضرب داخلی کنیم $\quad$ ضرب داخلی R, φ_1

$$(R,\varphi_1)=\int_0 (R\cdot\varphi_1\, dx)$$

مفهوم ضرب داخلی در اینجا انتگرال است.

www.vepub.com
Publish Your Mind

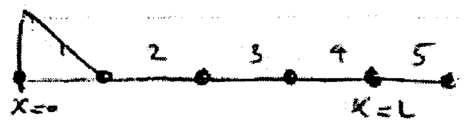
Subject:
Year. Month. Date.

φ_j تابع مبنا است و φ_i تابع ضریب وزنی است. (R و φ_i) سه باقی‌مانده $\times$ ضریب وزنی

اگر تابع ضریب وزنی و تابع مبنا یکی بود روش المان محدود گالرکین است. $\varphi_j = \varphi_i$

ساده‌ترین تابع مبنا، تابع درجه یک و تابع خطی است و خیلی از Polynomial درجه یک است. می‌توانند مثل

sin باشند polynomial ساده‌ترین شکل است و اگر خطی باشد بسیار ساده‌تر است.

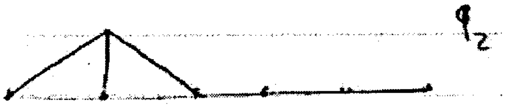


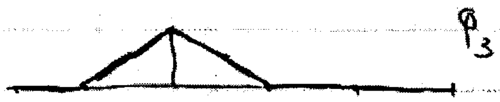
در مثلی که به صورت خطی مان است.

۱) دامنه را به تعدادی المان تقسیم می‌کنیم.

۲) تعداد نود برای هر المان تعیین می‌کنیم که ساده‌ترین نوع آن این است که دو نود ابتدا و انتها باشد (چون خطی است از ۲ تا استفاده می‌کنیم)

۳) φ_1 را طوری تعریف می‌کنیم که در ابتدای المان یک مقدار و اندازه داشته باشد و تا انتهای المان با مقدار آن صفر برود.





به تعداد node ها base fun. داریم و تعریف همه به یک صورت است.

۴) U_a را بدست می‌آوریم. $U_a = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots$

می‌خواهیم بدانیم در نقطه شماره ۱ مقدار U_a چقدر است.

$U_1 = a_1 \times 1 + a_2 \times 0 + \dots = a_1$

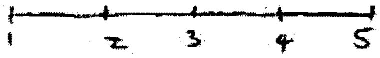
$U_2 = 0 \times a_1 + 1 \times a_2 + \dots = a_2 \quad , U_3 = a_3 \quad , \dots , U_n = a_n$

پس ضرایب‌ها همان مقدار U در node هاست پس به جای a از خود U استفاده می‌کنیم

$U_a = \sum U_j \varphi_j$

Subject:

Year. Month. Date. ( )



طول المان‌ها ثابت و یکسان در تو[illegible]

www.vepub.com
Publish Your Mind

مثال:

$-u''+u-x=0 \qquad 0<x<1$ شرط مرزی $u(0)=u(1)=0$

۴ المان و ۵ node داریم. طول هر المان را با h نشان می‌دهیم. $h=\frac{1}{4}$

φ_1	φ_1'	x
$1-x/h$	$-1/h$	$0<x<h$
0	0	$x>h$

φ_2	φ_2'	x
x/h	$1/h$	$0\leq x\leq h$
$2-x/h$	$-1/h$	$h\leq x\leq 2h$
0	0	$x>2h$

φ_3	φ_3'	x
0	0	$x<h$
$x/h-1$	$1/h$	$h\leq x\leq 2h$
$3-x/h$	$-1/h$	$2h<x<3h$
0	0	$x>3h$

بطور کلی:

$$\begin{cases} \varphi_j=0 & \text{if} \quad x\leq x_{j-1} \\ \varphi_j=\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & x_{j-1}<x<x_j \quad \text{شیب مثبت} \\ \varphi_j=1 & x=x_j \\ \varphi_j=\dfrac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} & x_j<x<x_{j+1} \quad \text{شیب منفی} \\ \varphi_j=0 & x>x_{j+1} \end{cases}$$

$u_a=\sum u_j\varphi_j \longrightarrow$ در رابطه‌ی بالا قرار می‌دهیم.

www.vepub.com
Publish Your Mind

$$R = -v_a'' + v_a - x \neq 0$$

$i=1 \quad \int_0^1 \varphi_1 \cdot R \, dx = 0 \implies$ یک معادله بدست می آید

$i=2 \quad \int \varphi_2 \cdot R \cdot dx = 0$ به تعداد nodeها معادله بدست می آید. که در اینجا ۵ معادله داریم و مجهول ها v_1 تا v_5 است.

$\vdots$

تا اگر vها بدست آیند باید با نادره توسط آنها صفر شود و vها جواب واقعی هستند.

$i=n$

چون معادله را درجه یک فرض کردیم مشتق دوم صفر می شود و یک خطای بزرگ وارد محاسبات می شود پس از قاعده ی مشتق زنجیره ای استفاده می کنیم.

$$-v'' \cdot \varphi_1 = -\frac{d}{dx}(v' \cdot \varphi_i) + v' \cdot \frac{d\varphi_i}{dx}$$

vها و φها به صورت زیر بدست می آید:

$$v_a' = \sum v_j \cdot \varphi_j'$$

چون خطی است مشتق دوم ندارد

$$\int_0^1 (-\varphi_i v_a'' + v_a \varphi_i - x \varphi_i) dx = \int_0^1 \left(-\frac{d}{dx}(v_a' \cdot \varphi_i) + v_a' \cdot \varphi_i' + v_a \varphi_i - x \varphi_i\right) dx =$$

$$-v_a' \cdot \varphi_i \Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\sum v_j \cdot \varphi_j'\right) \cdot \varphi_i' \cdot dx + \int_0^1 \left(\sum v_j \cdot \varphi_j\right) \cdot \varphi_i \cdot dx - \int_0^1 x \varphi_i \cdot dx = 0$$

$\text{if } (i=1) \implies v_a'(0) = -v_a' \cdot \varphi_i \Big|_0^1$

$i=2 \implies -v_a' \cdot \varphi_i \Big|_0^1 = 0$

$\vdots \qquad = 0$

$\vdots \qquad = 0$

$i=5 \implies -v_a' \cdot \varphi_i \Big|_0^1 =$

$$-v_a'(x=1) \cdot \delta_{in} + v'(x=0)\,\delta_{i1} + \sum \underbrace{v_j}_{\text{مقدار ثابت}} \int_0^1 \varphi_j' \varphi_i' \, dx + \sum v_j \int \varphi_j \varphi_i \, dx + \int x \varphi_i \, dx = 0$$

اگر اندیس های δ دو تاشان یکی بود مقدارش یک است وگرنه مقدارش صفر است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

شرط مرزی بطور اتوماتیک در روش FEM ارضا می‌شود. یکی از مزیت‌ها استفاده از مشتق زنجیره‌ای است. با توجه به معادله ضعیف مشتق توابع مبنا یعنی φ_1 و φ_2 و ... را هم لازم داریم.

$$a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3=d_1$$
$$a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3=d_2$$
$$a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3=d_3$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & j=1 \\ i=1 & \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1n}\\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2n}\\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3n}\\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & \cdots & K_{4n}\\ \vdots & & & & \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdots & K_{nn}\end{bmatrix}}_{K_{ij}} \end{array}\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\\ \vdots\\U_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\\ \vdots\\F_n\end{bmatrix}$$

به ازای هر بار محاسبه‌ی آخر یک معادله از درایه‌ها بالا بدست می‌آید.

$$\boxed{K_{12}=\int_0^1\varphi_2'\varphi_1'\,dx+\int_0^1\varphi_2\varphi_1\,dx=K_{21}}$$

اگر همه ضرایب را بیابیم ماتریس ضرایب را داریم و با معکوس گرفتن آنها U ها بدست می‌آید.

$$\underline{K}\cdot\underline{U}=\underline{F}$$

معلوم — مجهول

$$\underbrace{\underline{\underline{K}}^{-1}\cdot\underline{\underline{K}}}_{1}\cdot\underline{U}=\underline{\underline{K}}^{-1}\cdot\underline{F}\Rightarrow\underline{U}=\underline{\underline{K}}^{-1}\cdot\underline{F}$$

U_1 و U_2 و U_3 و ... یعنی جواب مسأله در نقاط 1 و 2 و ...

$$K_{13}=K_{31},\ \ldots,\ K_{1n}=K_{n1}$$

$$K_{12}=\int_0^h\left(\frac{1}{h}\right)\left(-\frac{1}{h}\right)dx+\int_0^h\left(1-\frac{x}{h}\right)\left(\frac{x}{h}\right)dx=-\frac{1}{h^2}(h-0)+\frac{(h^2-0)}{2h}-\frac{(h^3-0)}{3h^2}$$

دو نقطه را انتخاب کرده
φ_1 و φ_2 مقدار دارند

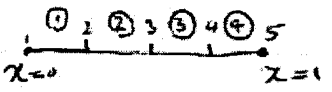
www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.

$$-\frac{1}{h}+\frac{h}{2}-\frac{h}{3}=\left(-\frac{1}{1/4}+\frac{1/4}{2}-\frac{1/4}{3}\right)=\left(-4+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)=k_{21}$$

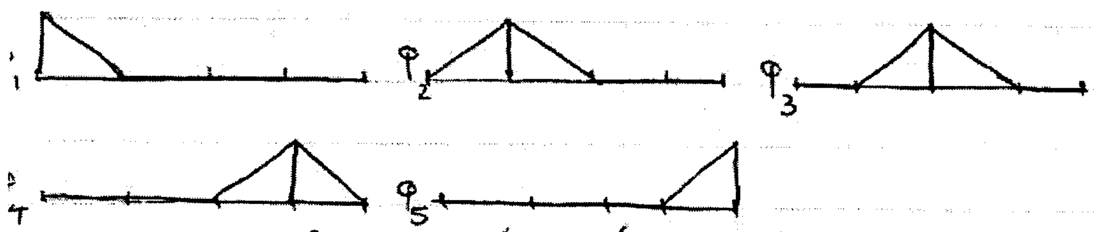
" 91/1/21 "

$$-v''+v-x=0$$



$v(0)=0$
$v(1)=0$

base function: $\varphi_1, \dots, \varphi_5$



جداول مربوط به φها را تشکیل برای هر base function می‌کشیم تا 'φها را داشته باشیم:

φ_4	φ_4'	x	φ_5	φ_5'	x
0	0	$x \le 2h$	0	0	$x \le 3h$
$x/h - 2$	$1/h$	$2h \le x \le 3h$	$x/h - 3$	$1/h$	$3h \le x \le 4h$
$4 - x/h$	$-1/h$	$3h \le x \le 4h$			

$$v_a=\sum v_j\varphi_j=v_1\varphi_1+v_2\varphi_2+v_3\varphi_3+v_4\varphi_4+v_5\varphi_5$$

$v=a$ چون مقدار تغییرات بین ۰ تا ۱ بوده و φ در این بازه تغییر کرده.

می‌توان در نقاط بین گره‌ها هم v_a را حساب کنیم که کافی است در رابطه مقادیر بازه‌ای مربوطه به جای x مقدار را که بین گره‌هاست را قرار دهیم و v_a را بدست آوریم. مقدار v_a بدست آمده را در معادله اصلی قرار می‌دهیم که یک باقی

$$R=-v_a''+v_a-x$$ طرف

$$(R\cdot\varphi_1)=\int_0^1(-v_a''+v_a-x)\cdot\varphi_1=0 \xrightarrow{\text{گلرکین}} R\cdot\varphi_1=0$$

Subject:
Year. Month. Date.

$$-\int_0^1 v_a'' \cdot \varphi_i \, dx + \int_0^1 v_a \cdot \varphi_i \, dx - \int_0^1 x \cdot \varphi_i \, dx = 0$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

v' را از اینجا حساب نمی‌کنیم چون صفر می‌شود و از تابع‌های مشتق جزئی استفاده می‌کنیم.

$$v_a' = \sum v_j \varphi_j'$$

Cte

$$\int_0^1 \Big(\underbrace{-\frac{d}{dx}(v_a' \cdot \varphi_i) + v_a' \cdot \frac{d\varphi_i}{dx}} \Big) + \int_0^1 v_a \cdot \varphi_i \, dx - \int_0^1 x \cdot \varphi_i \, dx = 0$$

$$-v_a' \cdot \varphi_i \Big|_0^1 + \int_0^1 v_a' \cdot \varphi_i' \, dx + \quad 0 \quad - \quad \sim \quad = 0$$

$$-v_a' \cdot \varphi_i \Big|_0^1 + \sum v_j \int_0^1 \varphi_j' \cdot \varphi_i' \, dx + \sum v_j \int_0^1 \varphi_j \cdot \varphi_i \, dx - \int_0^1 x \varphi_i \, dx = 0$$

$$\sum v_j \int_0^1 (\varphi_j' \cdot \varphi_i' + \varphi_j \cdot \varphi_i) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot \varphi_i + \underbrace{v_a' \cdot \varphi_i \Big|_0^1}$$

برای گره‌های غیر از اول تا آخر این صفر

if $i=1$ $\quad \sum v_j \left(\int_0^1 \varphi_j' \varphi_1 + \varphi_j \cdot \varphi_1 \right) = \int_0^1 x \cdot \varphi_1 - v_a'(x=0)$ شرط مرزی

محدوده انتگرال با توجه به اینکه φ_1 در آن‌ها مقدار دارد مشخص می‌شود که $0 \le x \le h$ می‌شود.

if $i=2$ $\quad \sum v_j \left(\int_0^1 \varphi_j' \varphi_2 + \varphi_j \cdot \varphi_2 \right) = \int_0^1 x \cdot \varphi_2$

$0 \le x \le 2h \Rightarrow$ باید در دو محدوده تفکیک شود

$i=3$

$\vdots$

$i=5$ $\quad \sum v_j \left(\int_{3h}^{4h} \varphi_j' \cdot \varphi_5 + \varphi_j \varphi_5 \right) = \int_{3h}^{4h} x \cdot \varphi_5 + v_a'(x=1)$

۵ معادله به دست آمد با حل این معادلات φ_1 تا φ_5 را به دست می‌آوریم.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.

$i=2 \quad U_1\left(\int_0^{2h} \varphi_1'\cdot\varphi_2' + \varphi_1\varphi_2\right) + U_2\int_0^{2h}\left(\varphi_2'\cdot\varphi_2' + \varphi_2\cdot\varphi_2\right) + U_3\int_0^{2h}\left(\varphi_3'\cdot\varphi_2' +\right.$

$\left.\varphi_3\cdot\varphi_2\right) + U_4\left(\int_0^{2h}\varphi_4'\cdot\varphi_2' + \varphi_4\cdot\varphi_2\right) + U_5\left(\int_0^{2h}\varphi_5'\cdot\varphi_2' + \varphi_5\cdot\varphi_2\right) = \int_0^{2h} x\cdot\varphi_2$

$$k_{21}U_1 + k_{22}U_2 + k_{23}U_3 + k_{24}U_4 + k_{25}U_5 = F_2$$

$$k_{11}U_1 + k_{12}U_2 + k_{13}U_3 + k_{14}U_4 + k_{15}U_5 = F_1$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \overset{0}{\cancel{k_{13}}} & \overset{0}{\cancel{k_{14}}} & \overset{0}{\cancel{k_{15}}} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \overset{0}{\cancel{k_{24}}} & \overset{0}{\cancel{k_{25}}} \\ \overset{0}{\cancel{k_{31}}} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & \overset{0}{\cancel{k_{35}}} \\ \overset{0}{\cancel{k_{41}}} & \overset{0}{\cancel{k_{42}}} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ \overset{0}{\cancel{k_{51}}} & \overset{0}{\cancel{k_{52}}} & \overset{0}{\cancel{k_{53}}} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}$$

$$k\cdot U = F \qquad \underbrace{k^{-1}\cdot k}_{I}\cdot U = k^{-1}\cdot F$$

در امتحان‌ها FEM باید ماتریس را معکوس کرد که شدنی نبود. پس این یک ایراد است. اگر یک بعدی باشد

با در نظر گرفتن معادله $i=2$ می‌بینیم که k_{24} و k_{25} مقدار صفر دارند. در معادله‌ی $i=1$، k_{13} و k_{14} و k_{15}

صفر است. به همین صورت برای معادله‌های سوم و چهارم و پنجم بعضی مقادیر صفر می‌شوند. در نتیجه یک ماتریس

سه قطری داریم که نیاز به معکوس کردن نداریم و از یک تکنیک استفاده می‌کنیم.

$$U(0) = 0 \longrightarrow U_1 = 0$$
$$U(1) = 0 \longrightarrow U_5 = 0$$

باید در ماتریس این شرایط را اعمال کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{بصورت بالا} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Subject:

Year. Month. Date. / /

مراحل در صورتی که شرط مرزی با
آن شرط مرزی با بود

هم $\begin{cases} K_{21} \neq K_{12} \\ K_{54} \neq K_{45} \end{cases}$

در غیر این صورت $K_{21}=K_{12}$ است ولی چون اگر شرط مرزی باشد K_{21} را هم حذف کنیم ولی برای K_{23} ... $K_{24}=K_{42}$ بود.

www.vspub.com
Publish Your Mind

$K_{25}=K_{24}$ قانون تقارن صادق است.

$$K_{21}=\int_0^h \varphi_2'\cdot\varphi_1'+\varphi_2\cdot\varphi_1+\int_h^{2h}\varphi_2'\cdot\varphi_1'+\varphi_2\cdot\varphi_1$$

چون φ_1 فقط در $x<h$ مقدار دارد پس فقط قسمت اول را در نظر می‌گیریم.

$$K_{21}=\int_0^h \left(-\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right)+\left(1-\frac{x}{h}\right)\left(\frac{x}{h}\right)dx=-\frac{x}{h^2}+\frac{x^2}{2h}-\frac{x^3}{3h^2}\Big]_0^h$$

$$-\frac{1}{h}+\frac{h}{6}\xrightarrow{h=1/4}-\frac{95}{24}=K_{21}\quad , K_{12}=0$$

$$K_{22}=\int_0^{2h}(\varphi_2'\cdot\varphi_2'+\varphi_2\cdot\varphi_2$$

$$K_{22}=\int_0^h\left[\left(\frac{1}{h^2}\right)+\frac{x^2}{h^2}\right]dx+\int_h^{2h}\left[\left(\frac{1}{h^2}\right)+\left(2-\frac{x}{h}\right)^2\right]dx=\frac{2}{h}+\frac{2h}{3}$$

$$\xrightarrow{h=1/4} K_{22}=\frac{196}{24}$$

$$K_{23}=K_{32}=\int_0^{2h}(\varphi_2'\cdot\varphi_3'+\varphi_2\cdot\varphi_3)dx=\int_h^{2h}+\cancel{\int_0^h}=\int_h\varphi_2'\cdot\varphi_3+\varphi_2\cdot\varphi_3$$

$$=\int_h^{2h}\left[\left(-\frac{1}{h^2}\right)+\left(2-\frac{x}{h}\right)\cdot\left(\frac{x}{h}-1\right)\right]dx=-\frac{1}{h}+\frac{h}{6}=-\frac{95}{24}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{95}{24} & \frac{196}{24} & -\frac{95}{24} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{95}{24} & \frac{196}{24} & -\frac{95}{24} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{95}{24} & \frac{196}{24} & -\frac{95}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cancel{u_1}^{0} \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \cancel{u_5}_{0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \Rightarrow 1/16 \\ F_3 \Rightarrow 2/16 \\ F_4 \Rightarrow 3/16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject :
Year . Month . Date .

$$F_2=\int_0^{2h} x\cdot\varphi_2=\int_0^{h}(x\cdot x/h)\,dx+\int_h^{2h}\left(x(\cancel{2}-x/h)\right)dx=h^2=1/16$$

$$F_3=\int_h^{2h} x\cdot\varphi_3+\int_{2h}^{3h} x\cdot\varphi_3=\int_h^{2h} x(x/h-1)+\int_{2h}^{3h}\left(x(-x/h+3)\right)dx=2h^2=2/16$$

$$F_4=3/16$$

(q.)

$$U=\begin{bmatrix}0\\0.0353\\0.0569\\0.0505\\0\end{bmatrix}$$

جواب آخر

$$\boxed{U_a=0.0353\,\varphi_2+0.0569\,\varphi_3+0.0505\,\varphi_4}=$$

برای هر x می‌توان U_a را حساب کرد که در هر بازه φ_2، φ_3، φ_4 ممکن است یا

خودشان یا مشتقشان مقدار داشته باشند.

$$\boxed{U_e=x-0.425(e^{x}-e^{-x})}$$ exact جواب

اختلاف در جواب خطای حل عددی می‌شود.

خطا $e_x=U_e(x)-U(x)$

$$x=0.3\Rightarrow e(0.3)=0.0415-0.03962=1.53\times10^{-3}$$

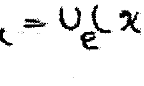
$$x=0.1\Rightarrow e(0.1)=0.01412-0.014858=7\times10^{-4}=0.000738$$

در نقاط نزدیک به مرز خطا کم و هر چه از مرز دور می‌شویم مقدار خطا بیشتر خواهد شد. اگر مقدار خطا قابل قبول نبود با

تعداد المان‌ها را افزایش دهیم تا خطا کاهش یابد

mesh independency (با افزایش مش‌ها از تعدادی مستقل می‌شود)

برای برنامه‌نویسی FEM از یک تابع transfer استفاده می‌کنند که به سازه‌ی بین φها بوجود آورند



با هر مش دو مقدار داریم که یکی شیب منفی و یکی شیب مثبت دارد. می‌توان

برای تمام مش‌ها همین نوع Function را به حساب آورد و فقط φ_i و φ_{i+1} را به دست آوریم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حالت stady state را در نظر گرفتیم یا مخصوصی که با هم جمع می کنند.

www.vepdf.co.cc
Publish Your Mind

اگر بخواهیم دو بعدی باشیم باید یک ماتریس ... را حل کنیم و جزء ها را به دست آوریم - از آن ها به دست آمده باز هم

به دست می آوریم این روال را تکرار می کنیم تا تغییرات ماتریس به حداقل برسد. ⟸ روش تکرار

در صفحه دیگر

$-U'' + U' - x = 0 \Leftarrow$ حل شود $U(0) = U(1) = 0$

۹۱/۱/۲۸

FVM:

شناخت فرآیند اولین و مهم ترین قدم است و از نظر فیزیکی لیک که باشیم که چگونه است و قوانین ریاضی حاکم بر آن

را بدانیم. انتقال حرارت یک بعدی را در فضای کارتزین در نظر می گیریم. مثل یک سیم که دور آن

عایق بندی شده و تنها انتقال حرارت در یک بعد بود و در جهت ۲ انتقال حرارت بیشتر از محور است در جهت محور قابل

صرف نظر کردن است. یک شش با مقطع مربع و طول بزرگ در نظر بگیریم و اگر یک بعدی باشد یعنی دور تا دور عایق بندی

شده است. نیاز به شرط مرزی در ابتدا و انتها داریم. چون جای دیگر وجود ندارد چون شش عایق است و انتقال حرارت

فقط از طریق نفوذ یا هدایت است.

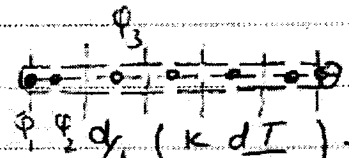
گسسته کردن و ساخت دومین (به تعدادی حجم کنترل تقسیم می کنیم) فرض می کنیم ابعاد در راستای z و y واحد باشد تقسیم بندی ها

را به صورت Δx در نظر می گیریم. نباید هیچ فضای خالی یا overlap وجود داشته باشد. به هر حجم کنترل نقطه

www.vepub.com
Publish Your Mind

معادله حاکم را روی آن انتگرال گیری می‌کنیم. یک پروفیل یا یک معادله را برای تغییرات متغیر وابسته انتخاب می‌کنیم.

به دست آوردن مقادیر معادله که به تعداد حجم کنترل‌ها هستند. این معادلات جبری هستند که با هم حل شوند، چرا؟



$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+S=0$$

جا به جایی و تغییر با زمان در این معادله حذف شده.

دو روش برای تقسیم بندی وجود دارد: ۱) typeA و ۲) type B

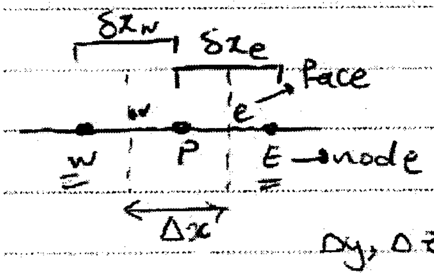
در type B حجم کنترل‌ها مشخص می‌شود. بین هر دو فضای یک نقطه در وسط قرار می‌دهیم که معرف حجم کنترل است. در ابتدا و انتها هم node قرار می‌دهیم که یک حجم کنترل برای آن در نظر نگرفتیم. به اصطلاح face هم می‌چسبند.

در typeA ابتدا نقاط را قرار می‌دهیم مثل FDM و بین هر دو node یک face قرار می‌دهیم که هر دو face یک حجم کنترل می‌شود.

$\Delta x = \delta x_e = \delta x_w$

اگر Δx uniform باشد هر دو روش یکی است ولی اگر non uniform بود متفاوتند.

typeB فیزیک‌ها را بهتر نشان می‌دهد پس از آن در FVM استفاده می‌کنیم.



اگر دو بعدی بود N و S در بالا و پایین داریم و اگر سه بعدی بود T top و B bottom داریم.

$\Delta y, \Delta z = 1$

از معادله حاکم روی این حجم کنترل انتگرال گیری می‌کنیم.

$\Delta v = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = \Delta x$

فرض می‌کنیم K متغیر است و باید از آن انتگرال گیری شود.

$$\int\left[\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+S\right]dv=0$$

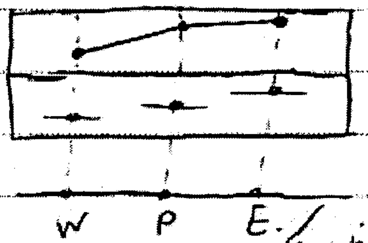
$$\int \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)dx+\int S\,dx=0 \rightarrow \left(k\frac{dT}{dx}\right)_e-\left(k\frac{dT}{dx}\right)_w+\int S\,dx=0$$

K — فرض می‌کنیم فعلاً k ثابت است.

www.vepub.com
Publish Your Mind

باید گرادیان دمایی در face ها را بدانیم ولی نداریم پس فرض می‌کنیم:

$\frac{T_P - T_W}{\delta x_w}$ $\frac{T_E - T_P}{\delta x_e}$



مشتق روی مرز تعریف ندارد
پس ما چاره‌ای جز از بالایی استفاده کنیم

اولین فرض: source ثابت است در انتگرال‌گیری
زیرا بعضی ترم‌ها را از پایینی استفاده می‌کنیم.

با فرض حالت بالا:
$$k\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e}\right) - k\left(\frac{T_P - T_W}{\delta x_w}\right) + \bar{S}(\overbrace{\delta x_e - \delta x_w}^{\Delta x}) = 0$$

$$\frac{kT_E}{\delta x_e} - \frac{kT_P}{\delta x_e} - \frac{kT_P}{\delta x_w} + \frac{kT_W}{\delta x_w} + \bar{S}\Delta x = 0$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b$$

$$\boxed{a_W = \frac{k_W}{\delta x_w}, \quad b = \bar{S}\Delta x, \quad a_E = \frac{k_E}{\delta x_e}, \quad a_P = a_E + a_W}$$

اگر صد node، uniform داشته باشیم همه a_E و a_W ها یکی می‌شوند. اگر uniform نبود برای هر کدام
البته غیر از گره‌های روی مرزها
باید Δx خود را قرار دهیم و مسئله را حل کنیم.

$\overset{\bullet}{39}$ $\overset{\bullet}{40}$ $\overset{\bullet}{41}$ دمای نقطه 40 وابسته به دو نقطه اطراف است

صد معادله، صد مجهول، ماتریس ضرایب سه‌قطری است حالا چگونه حل کنیم؟

$$a_P T_P - a_E T_E - a_W T_W = b$$

برای گره‌های اول و آخر فقط تابع یک نقطه اطراف خود که داخل سیستم هستند می‌شوند.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.

φ_1 فقط تابع φ_2 و ... و φ_n فقط تابع φ_{n-1} است. φ_1 از معادله اول و دوم حذف می‌شود و φ_2 برابر جمع φ_3 داریم می‌شود قدم بعدی صورت ... از حل حالات 2 و 3، φ_2 حذف می‌شود و به همین ترتیب جلو می‌رویم و معادله آخر φ_n بدست می‌آید. که روش forward elimination نام دارد. حالا φ_n معلوم را در معادله قبل قرار می‌دهیم و φ_{n-1} بدست می‌آید و به بالا برمی‌گردیم تا تمام φها را بدست آوریم backward substitution بنابراین به معکوس کردن ماتریس ضرایب نداریم چون ماتریس جای سه قطری بود و تمام ضرایب بالا و پایین این قطرها صفر بودند. در FD و FV به معکوس کردن ماتریس نیاز نداریم ولی در FE هم نقطه در یک المان نیاز به معکوس کردن ماتریس داریم.

حالا فرض می‌کنیم k متغیر باشد که اکثر مواقع به این صورت است چون تغییرات روی k خیلی زیاد است که نمی‌توان k را ثابت در نظر گرفت و k تابع T مجهول است و معادله‌ی ما غیرخطی می‌شود. پس می‌توان از ابتدا aها را حساب کرد چون در آنها k داریم که الان تابع مجهول یعنی T است. وقتی می‌گوییم معادله خطی است که تمام ضرایب ما مثل a_E، a_W، a_P و b تابع مجهول‌ها نباشد و به راحتی قابل محاسبه باشد. اگر چه یکی از این شرط‌ها نقض شود دیگر معادله خطی نیست. اگر S هم عدد ثابت نباشد باز هم معادله غیرخطی می‌شود مثلاً S تابع T است. شرط مرزی هم می‌تواند مثلاً غیرخطی شدن معادله باشد. شرط مرزی تابشی غیرخطی است پس فرآیند غیرخطی

www.vepub.com
Publish Your Mind

است. اگر ضرایب h ثابت باشد معادله خطی است و h تابع T است پس غیرخطی می‌شود.

اگر k متغیر بود بر اساس مسئله یک راه برای حل این جواب‌هایی است که اگر جواب خیلی پرت باشد مثلاً $25^\circ C$

یک مقدار برای تمام نقاط حدس می‌زنیم و برای هر نقطه k را پیدا می‌کنیم حالا ضرایب مشخص می‌شوند و معادله را

حل می‌کنیم حالا برای هر نقطه دما داریم که $25^\circ C$ نیست. دمای حاصل را به عنوان حدس دوم استفاده می‌کنیم.

این عمل را آنقدر تکرار می‌کنیم تا از یک حل به حل دیگر تغییرات در جواب بسیار کم باشد. که این حد را

Iteration

user تعیین می‌کند که این روش تکراری گویند. اگر k باشد طوری یا فلاکس حرارتی هم متغیر باشد باید

آن را خطی کرد سپس حل می‌کنیم. تعداد دفعات تکرار معقول و زیاد باعث می‌شود حافظه زیادی از کامپیوتر بگیریم پس از

باقی‌مانده استفاده می‌کنیم. یعنی اگر باقی‌مانده غیر صفر بود دوباره باید حل شود اگر در رنج قابل قبول بود حل متوقف

می‌شود. $Re = a_P T_P - a_E T_E - a_W T_W - b$

تعداد گره‌ها n

صد نقطه و صد باقی‌مانده داریم که آنها را با هم جمع می‌کنیم.

$$\sum_{i=1}^{n} |Re| = \varepsilon$$

برای اینکه مثبت و منفی‌ها همدیگر را خنثی نکرده باشند از قدر مطلق استفاده می‌کنیم مجموع آن‌ها را ε می‌نامیم که

باید از یک مقداری کمتر باشد تا قابل قبول شود.

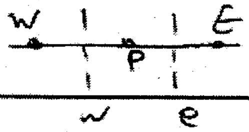
اگر source term ها به صورت غیرخطی با T رابطه داشته باشند باید آن را خطی کنیم تا قابل استفاده باشد.

$S = \underbrace{S_c}_{\text{غیر ثابت}} + S_p T_P \rightarrow$ معادلات جبری به دست آمده در اینجا باز هم خطی است و بدون استفاده از روش

تکرار قابل حل است ولی اگر ترم‌های [illegible] از این باشد سیستم غیرخطی می‌شود.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$\int_w^e S\,dx = \int_w^e (S_c + S_p T_p)\,dx = \int_w^e S_c\,dx + \int_w^e S_p T_p\,dx = S_c(\Delta x) + S_p \cdot T_p\,\Delta x$$

در داخل حجم کنترل بارها T_p است که داخل حجم کنترل ثابت است یعنی حالت

بیشینی (حالت پله‌ای) را در نظر بگیریم.

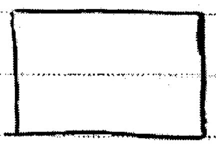
$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + \underset{\Downarrow}{b}$$
$$S_c(\Delta x) + S_p T_p \Delta x$$

$$\Rightarrow (a_P - S_p \Delta x) T_P = a_E T_E + a_W T_W + \underbrace{S_c \Delta x}_{b}$$

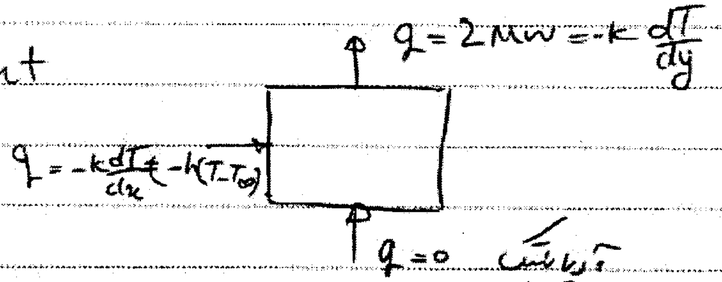
a_P را از تعادل مقدار را ارائه کنیم که نشان داده شده که آمده است

شرط مرزی:

1) $\varphi = \text{constant}$



2) $Q = \text{constant}$

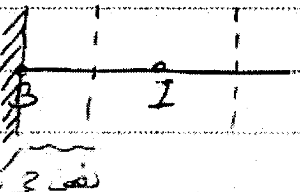


3) ضریب انتقال حرارت (h) معلوم باشد $\Longrightarrow$ هم دما و هم مشتق دما در معادله وجود دارد.

$$q = -k\frac{dT}{dx} = -h(T - T_\infty)$$

شرط مرزی معلوم:

type A



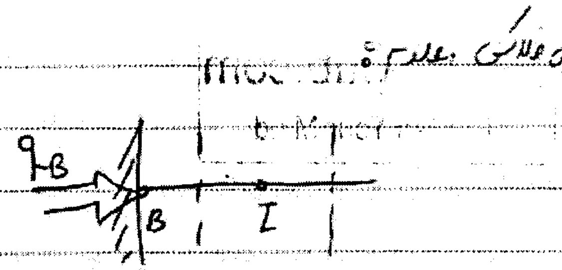
اگر دمای مرز معلوم باشد $\underbrace{T_B = 800°C}_{\text{شرط مرزی}}$ که باید در کنار معادلات دیگر حل شود.

نصف حجم کنترل

$\frac{1}{2}\Delta x = \Delta n$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

شرط مرزی فلاکس معلوم:



$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+S=0$$

$$\int\left[\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)\right]dx+\int[S]\,dx=0 \quad \left(k\frac{dT}{dx}\right)_I-\underbrace{k\left(\frac{dT}{dx}\right)_B}_{\substack{\text{شرط مرزی}\\ q_B}}+(S_c+S_pT_p)\Delta x=$$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_I=\frac{T_I-T_B}{\delta x_B}$$

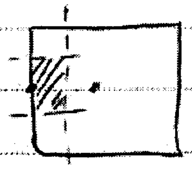
$$a_BT_B=a_IT_I+b \qquad \begin{cases} a_I=\dfrac{k_I}{\delta x_B}\\ a_B=a_I-S_p\Delta x\\ b=S_c\Delta x+q_B \end{cases}$$

در typeB حجم کنترل مرز صفر است و $\Delta x=0$ است پس $S_c\Delta x$ حذف شود و $S_p\Delta x$ هم حذف می‌شود.

پس معادله source term در type B نیستیم که بگیریم type B است.

اگر دو بعدی بود:

در type A



سه صفحه ظاهر می‌شود
راست، بالا، پایین

در type B

سطح بالا و پایین صفر است پس ظاهر نمی‌شود
این مزیت type B است ⟸ که نقطه روی مرز و نقطه داخل بین نقطه ظاهر می‌شود

شرط مرزی h معلوم و
و type A

$$\left(k\frac{dT}{dx}\right)_I-\underbrace{\left(k\frac{dT}{dx}\right)_B}+(S_c+S_pT_p)\Delta x=0$$

$$-\left(k\frac{dT}{dx}\right)_B=q_B=-h(T_B-T_\infty)$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$(\frac{k}{\delta x_B}+h$ ...

۹۱/۲/۴ پیدا کردن k یا Γ در face ها: (ضریب حرارتی) یا (ضریب انتشار)

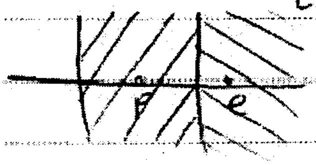
اگر k ثابت باشد روی face هم همان مقدار است ولی اگر k ثابت نباشد برای هر face یک k داریم که باید یک مقداری تعیین کنیم بیان یا پیدا کنیم که دو روش داریم: اگر face دقیقاً وسط باشد - type A - k های دو گره را جمع و تقسیم بر ۲ می‌کنیم ولی در B-type که نقطه وسط در face نیست باید از قاعده‌ی دوم استفاده کنیم

1) Arithmetic mean

اشکال این روش

اگر عایقی داشته باشیم حرارت از آن عبور نمی‌کند یعنی $K=0$ یا عدد بسیار کوچک

$K_e=0$



$a_pT_p=a_ET_E+a_wT_w+b$

a_e = هیچ تاثیری از T_E نمی‌گیرد

پس a_e از سمت راست ارتباط حرارتی قطع شود

$a_e=\frac{k_e}{\delta x_e}$

اگر $k_e=0$ یعنی a_e هم باید صفر شود.

ولی a_e صفر نمی‌شود پس این میانگین‌گیری خطا دارد.

میانگین حسابی برای جاهایی که اختلاف k بسیار زیاد باشد خطای زیادی دارد

2) Harmonic mean

باید هدفمان برای انتقال حرارت وجود داشته باشد. فرض کنیم face را در e داشته باشیم. پس از قانون فوریه برای انتقال حرارت

شار بین e و P بنویسیم: درست است $\frac{K_e(T_E-T_e)}{\delta x_{e+}}$

K_e مقداری که باید پیدا کنیم

K_E k در نقطه E معلوم است

K_p در نقطه P معلوم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حالت خاص وقتی که Face ... بوجود می‌آید.

www.vepub.com
Publish Your Mind

در اینجا اگر k_e یا k_P صفر باشد (عایق باشد): k_e صفر می‌شود پس شکل سهمی تیزی را نداریم.
ما باید بین ملاس‌ها خواص در Face ها هارمونیک داشته باشیم.

دستگاه معادلات باید پروفیل‌ها مسطح باشند که اگر بین دو نقطه تغییرات دما خطی باشد شکلی داریم داخل نرم‌ها

بهتر است ولی اگر تغییرات دما را دقیق بگیریم (درجات بالاتر) آنگاه جمله ۲ در نظر بگیریم که باید سه نقطه را در نظر

بگیریم P و E و EE و شیب دیگری را بدست آوریم. سطح اگر P و E و W را داریم که شیب متفاوت باشد

پس باید کنترل کنیم که شرط ۱ برقرار شود. می‌توان خطی بگیریم و تعداد نقاط را زیاد و فواصل را کم کنیم تا مشکلات بالا را

نداشته باشیم و همواره شرط اول برقرار باشد.

۲) ضرایب a_W و a_E و a_P باید هم علامت باشند.

$W \quad P \quad E$

افزایش دمای E باعث افزایش دمای P شود که باید a_E و a_P هم علامت باشند. a_W و a_P هم به همین صورت

باید هم علامت باشند ⇐ a_P و a_E و a_W باید تماماً هم علامت باشند.

$a_E = \frac{k_E}{\delta x_E} \rightarrow$ همیشه مثبت ⇐ a_E باید همیشه مثبت باشد.

اگر جوابی برای a_E یا هر a منفی بدست آمد اشتباه است یا جواب‌هایی دقیق نیست و خطا دارد.

۳) وقتی source term داریم $S = S_c + S_p \cdot T_p$ ، S_p باید کوچکتر از صفر باشد.

$$\int S\,du = \int_w^e S\,dx = \int (S_c + S_p \cdot T_p)\,dx = S_c + S_p \cdot T_p(\Delta x)$$

$$\underbrace{S_c \cdot \Delta x}_{b} + S_p \cdot \Delta x \cdot T_p \Rightarrow -S_p \cdot \Delta x \cdot T_p = b$$

$$\Rightarrow a_p = \overbrace{\sum a_{\text{همسایه}}}^{>0} - S_p \cdot \Delta x$$

اگر a_n . s_p بیشتر از جمله اول باشد a_p منفی می‌شود که شرط قبل نقض می‌شود پس باید s_p منفی باشد تا این شکل پیش نیاید.

if: $S = 4 - 5T^2$

$S = S_c + S_p . T_p$

$S = \underbrace{4}_{S_c} - \underbrace{5T}_{S_p}(T)$ $\Rightarrow$ چون s_p تابعی از T است باید اول یک T حدس بزنیم و با روش تکرار مسأله را حل کنیم.

if: $S = \underbrace{4 + 5T^2}_{S_c} + \underbrace{0}_{S_p}$

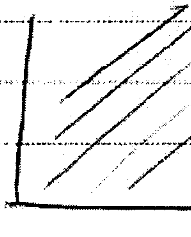
چون اگر مثل بالا حل کنیم s_p مثبت می‌شود باز هم از حدس زدن یک T و روش تکرار مسأله را حل می‌کنیم.

اگر بتوانیم s_p داشته باشیم تکرار کمتری برای رسیدن به جواب نیاز داریم.

۴) حاصل جمع ضرایب همسایه‌ها با a_p برابر باشد.

$\frac{d}{dx}(k\frac{dT}{dx}) + S = 0$

مشتق اول داریم که شیب تغییرات دمایی است و ظاهر می‌شود. پس خطوط بالاتر یا پایین‌تر که شیب یکسانی داشته باشند باید در معادله صدق کند پس نقطه شیب مهم است نه دما. پس اگر T یک مقداری اضافه یا کم کنیم باز هم باید یکسان شود. پس هم T جواب است و هم T+C در معادله را از هم کم کنیم



شرط برابری source term نداشته باشیم $\Rightarrow a_p = a_E + a_W$

اگر S.T داشته باشیم یک چیزی به a_p اضافه می‌شود

همیشه $a_p = \sum a_{\text{همسایه‌ها}}$

وقتی به روش تکرار معادله را حل کنیم یعنی معادلات غیرخطی باشند ملاک convergence criteria چیست؟ تغییر خیلی کم باشد (تغییرات دمایی قبل و بعد را بدست آوریم و همه را با هم جمع کنیم البته با قدر مطلق) این مقدار از دقتی که مدنظر ما هست باید کمتر باشد.

Subject :
Year .   Month .   Date .   ( )

و در این کار دو مشکل دارد (۱) نیاز به دو ... مقدار اولیه داریم یک بخش برا جواب ... و دیگری برا جواب جدید.

www.vepub.com
Publish Your Mind

۲) خود اختلاف ممکن است به ظاهر کوچک باشد مثل 0.001 ولی جواب متغیر مورد بررسی order کوچک

داشته باشد (10^{-5}) که ... ابر این 10^{-5} خیلی بزرگ است. می‌توان دیتا را برای هر نقطه نسبی کنیم دیتا / دیتای نقطه

تا این مشکل حل شود

از روش دیگر برا تعیین ملاک استفاده می‌کنیم:

$a_P\phi_P - \sum a_{nb}\phi_{nb} + b = 0$

اگر دقیق بود حاصل صفر است و گرنه یک باقی مانده داریم دارایی به بعد ملاک ما باقی‌مانده است.

حدس اولیه

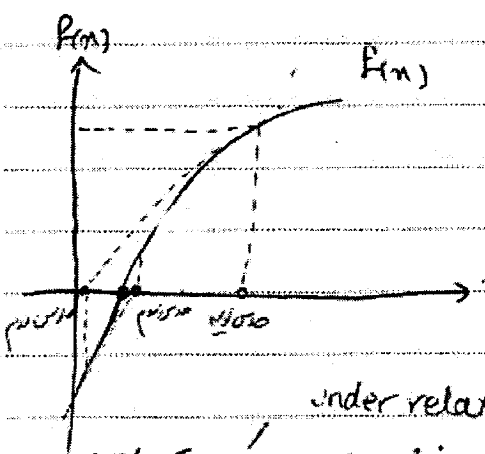
ضرایب توابعی از x هستند: a

$a x_1 + b = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \begin{matrix} a(x) = a' \\ b(x) = b' \end{matrix} \qquad a' x_1 + b' = R \Rightarrow x_2 = ?$

آنقدر ادامه می‌دهیم که $R \to 0$.

$\begin{matrix} a = 2x \\ b = -6x \end{matrix} \quad \left\{ \begin{matrix} a = 2 \\ b = -6 \\ x = 1 \end{matrix} \right. \rightarrow ax + b = -4$

$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow a = 6 , b = -54 \Rightarrow 6x_p^3 - 54 = R$



مقدار R بزرگتر شد پس داریم از جواب دور می‌شویم.

یا واگرا (diverge) یا ... اشتباه

پس از روش under relax استفاده می‌کنیم

$\boxed{\text{روش نیوتن رافسون}}$

$x_{new} = x_{old} + \Delta x$

$\Delta x = x_1 - x_2$

به جواب فعلی نزدیک under relax: $\Delta x \cdot \alpha + x_{old} = x_{new}$

می‌شویم. باید از ضریب استفاده کنیم که در هر ... جواب باشد ولی تضمین داریم که در محدوده جواب بکاهد تا ما ... (به عدد کوچکتر از $\frac{1}{2}$)

نتوانیم در محدوده ببینیم. می‌توان α را 0.8 ... در نظر گرفت و اگر واگرا شد در هر دفعه عدد را تا 0.6 کم کنیم. under relax

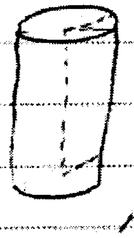
اگر α خیلی ... باشد مقدار تکرار کمتر می‌شود ولی اگر کوچکتر باشد احتمال در محدوده جواب بودن بیشتر می‌شود.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date.

2-D Steady-state Diffusion-type problems

فرآیندهایی که از نظر شکل هندسی متقارن دارند و شرایط مرزی هم متقارن باشد فرض می‌کنیم دو بعدی فرض شود.



در جهت θ متقارن است و یک صفحه را از این استوانه در نظر می‌گیریم.

اگر شش سطح مقطع $20\times20\,cm^2$ باشد و طول $12\,m$ باشد بیرون شش بطور صفحه 0.5
در هر صفحه $20\times20\,cm^2$ با عرض دادار

تا به انتقال حرارت سه بعدی باشد در غیر از آنجا انتقال حرارت دو بعدی می‌شود.

اگر در یک شش طولانی را دقیق بندی کنیم، انتقال حرارت یک بعدی می‌شود. هر چه تعداد بعدها کمتر باشد حل

مسائل راحت‌تر می‌شود.
تقریب خطا کمتر داریم ?

در typeA هر واره دو نقاط در وسط یک face قرار می‌گیرند و در typeB این طور نیست.

در typeB نقطه P در مرکز وسط است ولی در typeA این طور نیست. در این نوع نقطه P معرف حجم کنترل است

که در وسط آن قرار است. گرادیان‌ها در typeA در وسط نیست ولی در typeB هست که تقریب را دارد؟

کل face خطا کمتری دارد. شرایط مرزی در typeB ضعیف‌تر است دارد که نقطه A را کنار نگذاریم و از B استفاده کنیم

۹۱/۲/۱۸

حالت پایدار دو بعدی:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+S=0$$

انتقال حرارت در صفحه x-y دو بعدی است. در جهت z فلاکس نداریم بین صفحه‌ها موازی عمود بر صفحه

Subject:

Year. Month. Date. ( )

غیر از صفحه ی ابتدا و انتهاست را نیز با [illegible]

Publish Your Mind

در typeB روی مرز حجم کنترل داریم که معادله حل شود است. در صورتی که در typeA مرز از نقاط مرزی مرز حجم کنترل

نصف حجم کنترل داخلی درون است.

$dv = dx . dy . dz = dx . dy$

فرض می کنیم ترم داخل انتگرال ثابت است بتوان از جهت سوم هم انتگرال بگیریم.

بطور کلی $a_e = \frac{k_e . Area}{\delta x_e}$ → نقطه ی مرزی face نصف داریم { یک بعدی $Area = 1$ ؛ دو بعدی $Area = \Delta y$

δx_e فاصله بین نقاط E و P

$\xRightarrow{\text{دو بعدی}} a_e = \frac{k_e . \Delta y}{\delta x_e}$

$a_p = \sum a_{\text{همسایه ها}} - S_p \Delta v$

آدیاباتیک $q = cte = 0$

$h = constant$ → φ دیگر از بیان φ وارد شرایط مرزی شود

در حالت T معلوم نیازی به انتگرال گیری نداریم چون خود $T = cte$ مقدار مرزی است. در typeA نقطه ی B که مرز است در واقع همان نقطه ی P است که قبلاً در مرکز بود در شکل در بعدی نقطه ی B تابع سه نقطه است یکی نقطه ی داخلی و دو تا نقاط همسایه و ضریب. علامت حرارت منفی برای خنک کاری است. اگر بخواهیم علامت حرارت + داشته باشیم باید $T_\infty > T_B$ پس برای آنکه $h(T_B - T_\infty)$ با یک منفی مثبت گذاریم.

در typeB چون source term در Δx ضرب می شود و $\Delta x = 0$ پس source term ها در اینجا حذف می شود.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در دو بعدی کردن type B باید انتگرال در جهت y هم بگیریم که $k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_N - k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_S$ است و ثابت

مشتق گرفته می‌شود و از انتگرال بیرون می‌آید و dx باقی می‌ماند که متناظر آن Δx می‌شود که در این نوع $\Delta x=$

نیست. پس مشکل این است که جا دو بعدی ریک بعد انتگرال می‌گیریم. اگر سه بعدی بود هم همینطوری شد.

به جای $k\left(\frac{dT}{dx}\right)$ در هر face با فرض خطی بودن تغییرات دما می‌توانیم $\frac{T_1 - T_2}{\text{فاصله}}$ را قرار دهیم.

شرایط آدیاباتیک $q=0$ یعنی گرادیان دمایی بین دو نقطه نداریم حس نزدیکی که برای انتقال نداریم و در نقطه

باید صفر باشند: $\frac{h\,\delta x_{IB}}{k_B} = \frac{h}{\frac{k_B}{\delta x_{IB}}}$ = Biot number ← جابجایی نسبت به هدایت بیشتر است.

در سیال

سطح جامد

عدد بایوت = نسبت انتقال حرارت به طریقه‌ی جابجایی به انتقال حرارت به طریقه‌ی هدایت.

عدد ناسلت هم داریم که $\frac{h \cdot \text{طول مشخصه}}{k_{\text{هوا}}}$ است و در فاز سیال انتقال حرارت جابجایی و هدایت بررسی می‌کنیم.

در سیال

نسبت در سیال مورد استفاده

معادله‌ی h معلوم بدست آمده در یک بعدی و سه بعدی به همین صورت است.

شرط مرزی حالت چهارم: تشعشع

$$q = \sigma\varepsilon\left(T^4 - T_\infty^4\right)$$

ضریب صدور

$$q = \sigma\varepsilon\left(T^2 - T_\infty^2\right)\left(T^2 + T_\infty^2\right) = \sigma\varepsilon\left(T - T_\infty\right)\left(T + T_\infty\right)\left(T^2 + T_\infty^2\right)$$

$$= \underbrace{\sigma\varepsilon\left(T^2 + T_\infty^2\right)\left(T + T_\infty\right)}_{h_{rad}}\left(T - T_\infty\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. / /

صورت ادامه

شرط مرزی تشعشع معادله را غیر خطی می‌کند بر حسب T

$$q = \sigma\varepsilon(T_B^{+2} + T_\infty^2)(T_B + T_\infty)(T_B^* - T_\infty) = h_{rad}(T_B - T_\infty)$$

www.fardapaper.com

تکرار: ما ادامه می‌دهیم تا تغییرات کم بشود و بعد یک h_{rad} بدست آمده آن را در معادله قرار می‌دهیم.

اگر تشعشع و جابجایی داشته باشیم: $h = h_{convection} + h_{rad}$ بعد از جابجا کردن و کدام آنها را با هم جمع می‌کنیم.

ضریب $\begin{cases} \text{under relax} < 1 & \text{کند کردن سرعت رسیدن به جواب} \\ \text{over relax} > 1 & \text{سریع در رسیدن به جواب} \end{cases}$

مجبوریم برای کاهش خطا از under استفاده می‌کنیم.

حدس جواب ← حل معادله ← بدست آوردن جواب دیگر ← اختلاف دو جواب

حدس T_p^* → جدید T_p

$T_p = T_p^* + (\delta T \cdot \alpha)$ → $\alpha < 1$ under

نیاز به دو حافظه برای T_p و T_p^* داریم.

اگر با تصحیح ضرایب قبل از حل، T را آنچنان تغییر دهیم که بعد از حل T، under بدست بیاید صرفه‌جویی در حافظه نیاز نداریم، حال چه تغییری باید به ضرایب داد؟

$$a_p \varphi_p = \sum a_{nb}\varphi_{nb} + b \Rightarrow \underbrace{\varphi_p}_{\text{نیست under}} = \frac{\sum a_{nb}\varphi_{nb} + b}{a_p}$$

$$\varphi_p = \varphi_p^* + \alpha \underbrace{\Delta\varphi}_{(\varphi_p - \varphi_p^*)} \Rightarrow \varphi_p = \varphi_p^* + \alpha\left(\left(\frac{\sum a\varphi + b}{a_p}\right) - \varphi_p^*\right)$$

به شکل under آمد

www.vepub.com
Publish Your Mind

$$\frac{a_p}{\alpha}\varphi_p = \sum a_{nb}\,\varphi_{nb} + b + \underbrace{\frac{a_p}{\alpha}(1-\alpha)\,\varphi_p^*}_{\text{به مقدار b تعلق اضافه}}$$

تاثیرش φ_p بیشتر می‌شود — تاثیرش — $0<\alpha<1$ — جمع شود

با تاثیرات ایجاد شده φ_p جدید under relax بدست می‌آید.

over را در هیچکدام از FEM، FDM، FVM استفاده نمی‌کنیم و فقط در حل دستگاه معادلات جبری استفاده می‌کنیم. در روش گاوس سایدل برای حل دستگاه اول برای متغیرها یک جواب حدس می‌زنیم. بعد در معادله اول x را محاسبه می‌کنیم با y و z حدس زده را می‌دهیم ← پیدا کردن x جدید (جایگزین حدس x).

در معادله دوم برای این کار را می‌کنیم ← y جدید و ... ← بدست آمده است. اگر over relax بشود در روش گاوس زودتر به جواب می‌رسیم. از $\alpha>1$ استفاده می‌کنیم.

convergence criteria:

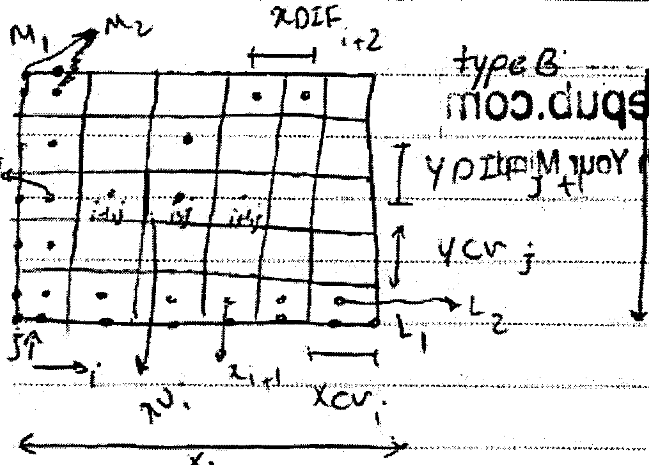
برای اینکه تصمیم بگیریم به جواب رسیدیم از باقی‌مانده استفاده می‌کنیم (R) که وقتی مقدارش بسیار کم یا صفر شد به جواب می‌رسیم. حاصل جمع قدر مطلق همه node ها را بدست می‌آوریم و اگر از مقدار تعیین شده کمتر بود به جواب رسیدیم.

computer programming:

part I: نیاز به تغییر برای هیچ برنامه‌ای ندارد

فقط برای استوانه‌ای و ابعاد هندسی و شرایط مرزی و ... در part II اعمال می‌شود. اگر برای (r,z) بخواهیم به جای (x,y) استفاده کنیم باید در دو قسمت تغییرات را اعمال کنیم.

Subject:
Year. 91 Month. 3 Date. 1



ابعاد و شکل هندسی

تعداد node ها در جهت x و y: L_1 و M_1

اول باید Face حجم کنترل را مشخص کنیم که در جهت x با XU و در جهت

F (152, 82)

با YV نشان داده شده است. اگر نقطه داشتیم شماره‌ی نقطه‌ی آخر

حداکثر 152 نقطه در جهت x (L_1) — حداکثر 82 نقطه در جهت y (M_1)

نقطه داشتیم شماره‌ی نقطه‌ی بعد را استفاده می‌کنیم.

x و y در خود نقاط هستند: XDIF و YDIF فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی متوالی است.

xcv = Δx طول control volume = ycv

L_2 و M_2 یک نقطه قبل از نقطه‌ی آخر. XL و YL طول و عرض دامین

GAM ضریب γ، RHO ضریب دانسیته. Sc و Sp source term است.

شماره‌ی ایتریشن	ITER	اولین نقطه‌ی محاسبه	IFIRST, JFIRST
شماره‌ی شروع " "	ITSRT	نقطه‌ی مرجع	IREF, JREF
ماکزیمم " "	MAXIT	ضریب under relax است.	Relax
	MXTDMA	که تا اینجا چند بار بزنیم جواب به ترسیم موفق شود	

LSOLVE
- False: معادله حل نشود — کلید خاموش شدن
- true: آن معادله حل شود

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. / /

CONVGE ⟨ F اگر converge نکرده باشد / T اگر converge کرده باشد

~~PCOEFF~~

RES باهم جمع می‌شوند تا به یک عدد تبدیل شود که به مقدار معادلات است ... باقی‌مانده چون همه معادلات باید باهم converge کنند

ان ها و M_1 و X_L و Y_L را مشخص بکنیم و شبکه‌بندی براساس type B مشخص کرده‌ایم

Y_{VJ} ← فاصله نقطه‌ی محور تا مبدأ

subrotin GRID ... user نتواند تغییر پارامترها را تغییر دهد.

SET up: قسمت تعیین ابعاد هندسی x و y و XCV و XDIF و YCV و YDIF

طول شکننده یا فاصله داده شود.

part (I) → نیاز نیست user آن را تغییر

www.vepub.com
Publish Your Mind

DEFVAL: مقدار Default داده می‌شود. همه‌ی LSOLVE ها False هستند و اگر خواستیم معادله‌ای حل شود باید آن را True کنیم که در start در part(II) است

مهم‌ترین بخش هم در strat است و شروع برنامه از این جاست. بعد وارد loop اصلی می‌شویم. دستورکاری

2.10

uniform XU_2 XU_3 → XU_{L1} ، XU_1 نداریم

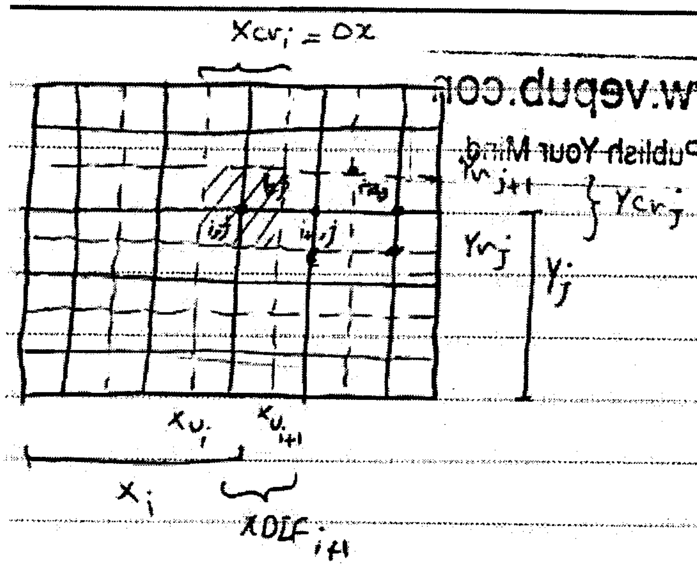
صفحه‌ی 11 :

هرچه از یک سمت به سمت دیگر برویم اختلاف nonuniformity بیشتر می‌شود.

XU

Subject:

Year. Month. Date. ( )



Subroutine PHIs

www.vepub.com
Publish Your Mind