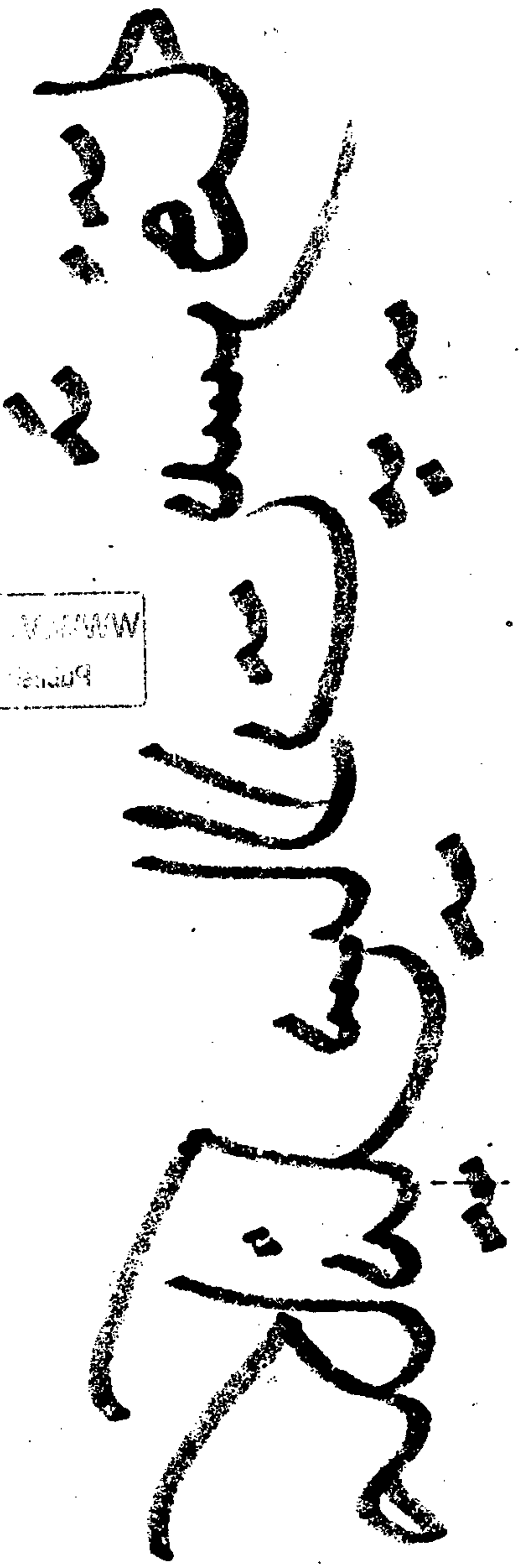
مکانیک سیالات پیشرفته



فهرست

HW #1: 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.10

سیالات پیشرفته

سه‌شنبه ۲۰/۱۱/۸۸

تمرین های زوج فصل ۹

فصل ۷ PaPa ← ۲،۴،۵

■ بخش اول: معادلات حاکم بر جریان

سیال ساختار ذره‌ای دارد ولی ما فرض می‌کنیم سیال یک محیط پیوسته است.

1μm □ ⟶ $10^{15} - 10^{18}$ تعداد ملکول ها

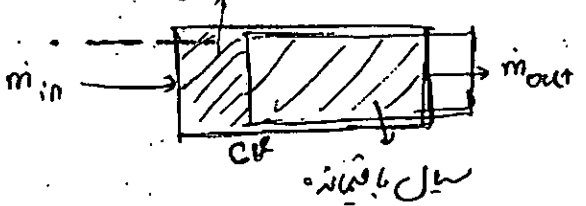
★ انتقال حرارت ← بررسی نمی‌شود.

★ اثرات تراکم پذیری ← بررسی نمی‌شود.

■ فرم دیفرانسیلی معادلات پیوستگی ← پیشرفته (لیسانس) / ← پیشرفته (فوق لیسانس)

■ 〃 〃 〃 مستقیم

Reynolds Transport Theorem: قضیه انتقال رینولدز:



t = 0 ⟶

t = δt

اگر B یک خاصیت مادی باشد

$$\frac{\partial}{\partial t}(B)_{cv} = ? = \dot{B}_{in} + \dot{B}_{\text{سیال باقی مانده}}$$

$$\downarrow$$

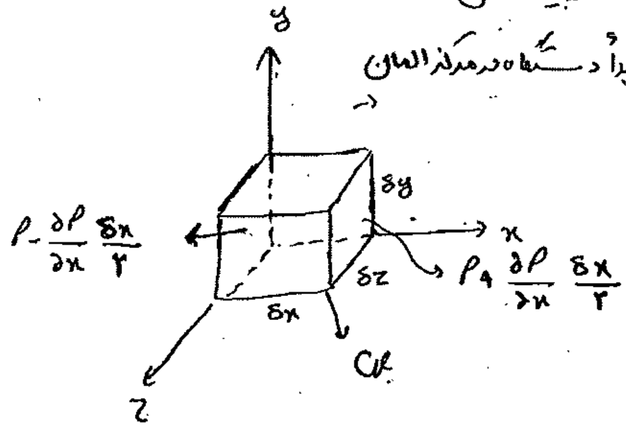
$$= \frac{d}{dt}(B)_{sys} - \dot{B}_{out}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt}(B)_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}(B)_{cv} + \sum \dot{B}_{out} - \sum \dot{B}_{in}$$

$\downarrow$
مشتق مادی

قوانین طبیعت ـــ ماهیت لاگرانژی دارند.

بدست آوردن فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی:



$$\begin{cases} \rho = \rho(x,y,z,t) \\ u = u(\quad) \\ v = v(\quad) \\ w = w(\quad) \end{cases}$$

در مرکز المان

در قضیه انتقال رینولدز به جای B ، m قرار می دهیم:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(m)_{cv} + \sum \dot{m}_{out} - \sum \dot{m}_{in} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} \times \delta x \delta y \delta z +$$

$$(\dot m_{in})_x = \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y\,\delta z$$

$$(\dot m_{out})_x = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y\,\delta z$$

$$\Rightarrow (\dot m_{out})_x - (\dot m_{in})_x =$$

1) $$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \vec V) = 0$$ → فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی

(هم تراکم پذیر - هم تراکم ناپذیر)

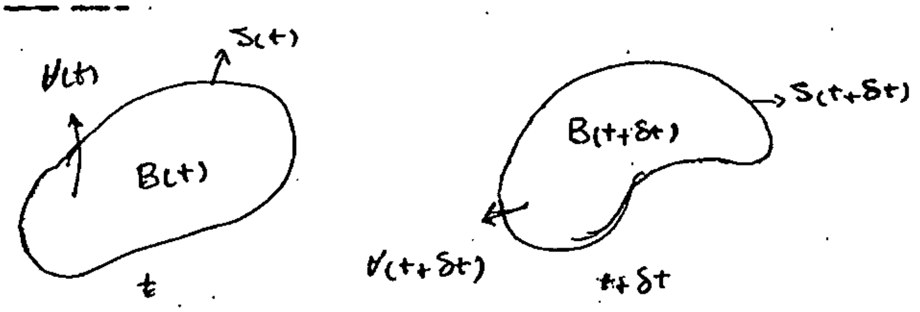
steady state $\longrightarrow \nabla\cdot(\rho \vec V) = 0$

غیرقابل تراکم $\longrightarrow \nabla\cdot V = 0$

$\rho = Const$

به دست آوردن معادله پیوستگی ← فرم فوق کلاسیک

حجم کنترل ← شکل متغیر، متحرک، همواره از ذرات یکسان پر شده است.



B ـ خاصیت اکتدالی ـ هر ذره یک B دارد.

$$\frac{D}{Dt}\left(\int_{\forall} B\, d\forall\right) = ? \qquad = \int_{\forall}\left[\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla\cdot(B\vec{V})\right] d\forall$$

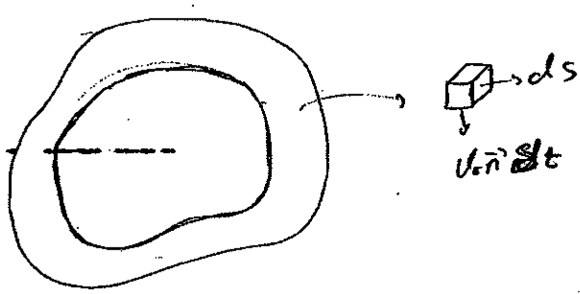
$$\frac{D}{Dt}\left(\int B\, d\forall\right) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t}\left\{\int_{\forall(t+\delta t)} B(t+\delta t)\, d\forall - \int_{\forall(t)} B(t)\, d\forall\right.$$

$$\left. + \int_{\forall(t)} B(t+\delta t)\, d\forall - \int_{\forall(t)} B(t+\delta t)\, d\forall \right\}$$

$$= \int_{\forall(t)} \frac{\partial B}{\partial t}\, d\forall + \overset{①}{\int_{S(t)}} B(t)\, \vec{V}\cdot\vec{n}\, ds$$

$$① = \lim \frac{1}{\delta t}\left\{\int_{\forall(t+\delta t) - \forall(t)} B(t+\delta t)\, d\forall\right\} \qquad ③$$

$$d\forall = \vec{V}\cdot\vec{n}\, ds\,.\,\delta t$$



۰۶/۱۱/۷۷

$$\Rightarrow \int_{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) \right] dV = 0$$

چون حجم کنترل دلخواه بود پس داخل انتگرال صفر است:

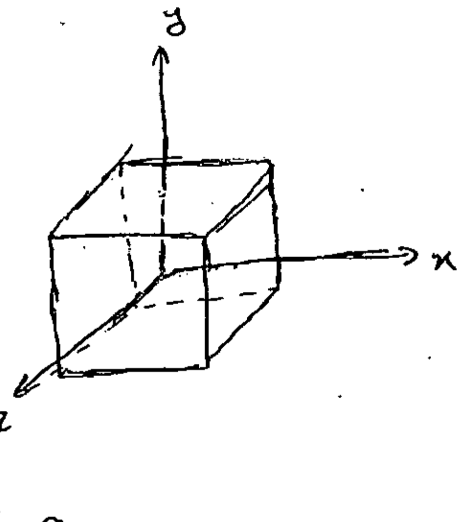
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

بدست آوردن معادلات مومنتوم:

یک ذره سیال را در نظر می‌گیریم و در مرکز المان فرض می‌کنیم مقادیر زیر را داریم:

$$\begin{cases} \tau_{xx} \ , \ \tau_{yy} \ , \ \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \quad \tau_{yx} \\ \tau_{xz} \quad \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \quad \tau_{yz} \end{cases}$$

P فشار



$$\sum dF_x = \delta m \cdot a_x$$

قضیه مشتق مادی:

$$B = B(x, y, z, t)$$

$$dB = \frac{\partial B}{\partial t}dt + \frac{\partial B}{\partial x}dx + \frac{\partial B}{\partial y}dy + \frac{\partial B}{\partial z}dz$$

زیبایی قضیه مشتق مادی ← بدون دنبال کردن ذره شتاب آن را می‌توان بدست آورد.

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\sum dF_x = \underbrace{\left(\sum dF_x\right)_b}_{\text{body force}} + \underbrace{\left(\sum dF_x\right)_s}_{\text{surface force}}$$

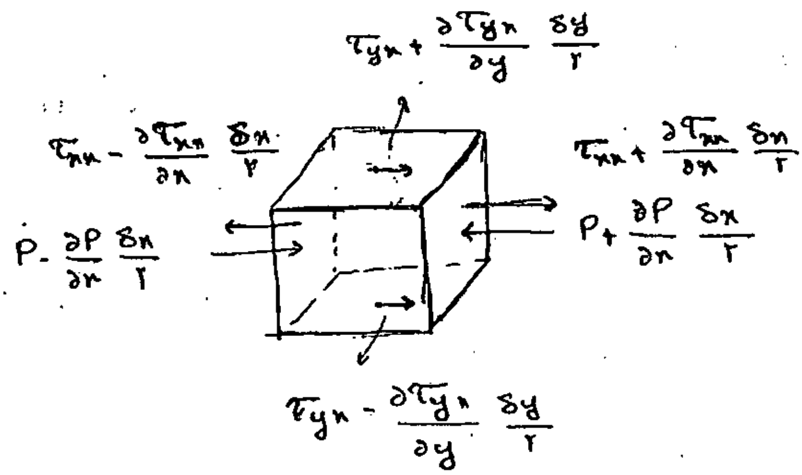
Body force ← مربوط به دانسیته ماده ← $\vec{f}$ نیروی جرمی به ازای واحد جرم

ثقلی ← $\vec{f} = \rho g / \delta V$?

$$(dF_x)_b = \rho f_x \, \delta x \, \delta y \, \delta z$$

$(dF_x)_s$ → تنش برشی

→ تنش قائم (مثل فشاری)



$$-P + \tau_{xx} = \sigma_{xx}$$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla P} + \nabla\cdot\overline{\overline{\tau}} + \rho \vec{f}}$$ معادلات حرکت کوشی

$$\left\{\begin{array}{lll} \rho, & u, v, w & \\ \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \\ P & & \end{array}\right.$$ مجهولات.

سه‌شنبه ۸۸/۱۱/۲۷

فرم دیفرانسیلی معادلات بقاء:

1) Continuity: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$

$\rho = Const \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

2) Momentom:

$$\rho a_x = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

$\downarrow$

Cauchy

$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho a_x \longrightarrow$ ترم های اینرسی

$$= \rho\Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{زمانی (Temporal)}} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{جابجایی (Convectiv)}}\Big)$$

P: (فشار ترمودینامیکی (فشار استاتیکی)) $\rightarrow$ چون می‌توانیم به دما ربط دهیم

$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \longrightarrow$ ترم های ویسکوز یا تنش های اضافی

Deviatoric

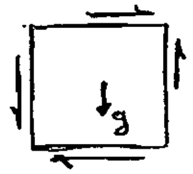
چرا اسم فشار ترمودینامیکی مناسب نیست؟ حالت تعادل ترمودینامیکی برقرار نیست به خاطر Viscous heating

۳)

۳) فرم دیفرانسیلی قانون بقای مومنتوم زاویه‌ای :

به تقارن تانسور تنش را نتیجه خواهد داد.

سیالات Polar تقارن تانسور تنش نداریم :



۴)

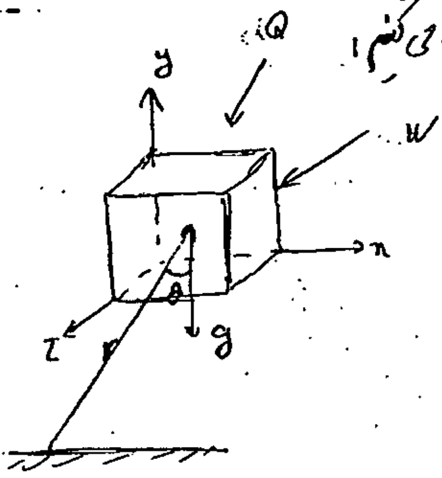
۴) فرم دیفرانسیلی قانون بقای انرژی :

دیدگاه
- حجم کنترلی (اویلری)
- ذره‌ای (لاگرانژی)

$$\frac{DE}{Dt}\bigg|_{system} = \frac{\partial}{\partial t}(\dot{E})_{cv} + \sum \dot{E}_{out} - \sum \dot{E}_{in}$$

$$B \rightarrow E = m\hat{u} + \tfrac{1}{2} m|V|^2 + mgz$$

ما در اینجا از دیدگاه لاگرانژی استفاده می‌کنیم.



$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz$$

$$dE_t = dQ + dW$$

$$dE_t = dm\,\hat{u} + \tfrac{1}{2}dm|V|^2 + dm\,\underbrace{g z}_{\vec{g}\cdot\vec{r}}$$

$$E = \frac{dE_t}{dV} = \rho\left(\hat{u} + \tfrac{1}{2}V^2 + \vec{g}\cdot\vec{r}\right)$$

$$= \rho\left(e + \tfrac{1}{2}V^2 + \vec{g}\cdot\vec{r}\right) = Q + W$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{Dt} = \rho\left(\frac{De}{Dt} + V\frac{DV}{Dt} + \vec{g}\cdot\vec{V}\right) = \frac{DQ}{Dt} + \frac{DW}{Dt} \quad (1)$$

فرض می کنیم Q از نوع حرارت باشد:

heat flux ← بردار ← $\vec{q}$

$$q_x \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx$$

$$\cancel{\frac{dQ}{dt}} \quad \frac{DQ}{Dt} = -\nabla\cdot\vec{q} = -\nabla\cdot\left(K\vec{\nabla T}\right) \quad (2)$$

$$W_x \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow W_x + \frac{\partial W_x}{\partial x}dx$$

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

$$\sigma_{xx} = -P + \tau_{xx}$$

$$\dot{W}_x = \sigma_{xx} u + \sigma_{yx} v + \sigma_{zx} w$$

$$\frac{\partial \dot{W}_x}{\partial x} = (-Pu + \tau_{xx} u + \tau_{yx} v + \tau_{zx} w) \qquad (۳)$$

Eq Cauchy $\Rightarrow \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \tau_{ij} + \rho \vec{g}$

$$= \nabla \cdot \sigma_{ij} + \rho \vec{f} \qquad (۴)$$

(۱)، (۲)، (۳)، (۴) $\Rightarrow$

?

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (K \nabla T) + \nabla \cdot (\vec{V} \cdot \sigma_{ij}) - \vec{V} (\nabla \cdot \sigma_{ij})$$

$$\sigma : \nabla \vec{V} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

۷ معادله ، ۱۷ مجهول.

$$\rho = \rho(P, T)$$

$$e = e(P, T)$$

مجهولات : $u, v, w, P, T \rightarrow$ ۵

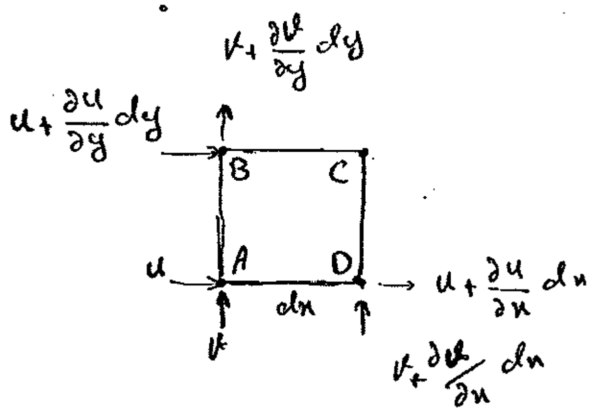
$q_x, q_y, q_z \rightarrow$ ۳

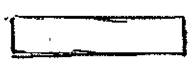
$\sigma_{ij} \rightarrow$ ۹

در سیالات غیر نیوتنی واقعاً ممکن است با ۱۷ مجهول برخورد کنیم.

$\tau_{ij} \longrightarrow$ میدان سرعت $\longrightarrow L_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$

$$L_{ij} \Rightarrow \underset{\approx}{L} = \begin{bmatrix} \partial u/\partial x & \partial v/\partial y & \partial u/\partial z \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{bmatrix}$$

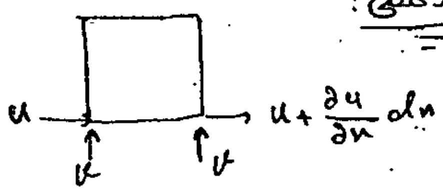


$\tau_{xx}\ \tau_{yy}\ \tau_{zz} \leftarrow$  خطی ← تغییر شکل

$\tau_{xy}\ \tau_{xz}\ \tau_{yz} \leftarrow$  زاویه‌ای

هردو : ترکیبی از این دو

فقط خطی:



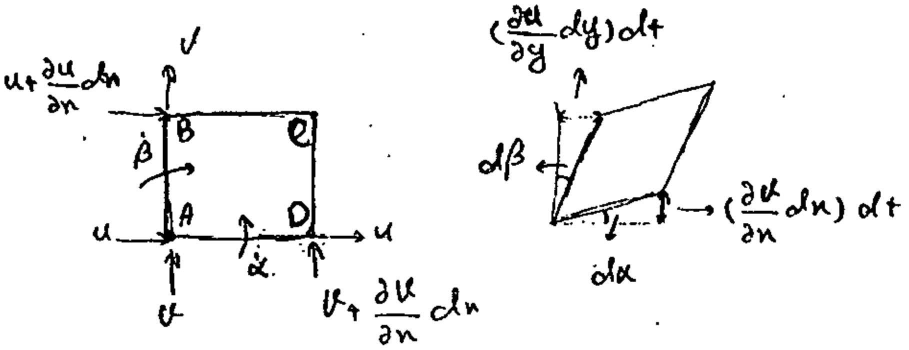
$$dx' = dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dt$$

$$V_1 = dx\,dy\,dz$$

$$V' = dx'\,dy'\,dz'$$

$$\frac{V'-V}{V\,dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla\cdot\vec{V}$$

فقط زاویه‌ای:



$$tg(d\alpha) = d\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}dt \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$tg(d\beta) = d\beta = \frac{\partial u}{\partial y}dt \rightarrow \frac{d\beta}{dt} = \dot{\beta} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$\dot{\alpha}$ ← سرعت زاویه‌ای چرخش ضلع AD ← مثبت

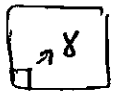
$\dot{\beta}$ ← سرعت زاویه‌ای « « AB ← منفی.

$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ سرعت زاویه‌ای المان در جهت مثبت

مثلثاتی ← $\frac{1}{2}$ ← طبق تعریف (قرارداد)

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{V})$$

$$\gamma_1 = \pi/2$$



$$\gamma_2 = \gamma_1 - (d\alpha + d\beta)$$

$$\Rightarrow \gamma_1 - \gamma_2 = d\gamma = d\alpha + d\beta$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \dot{\gamma}_{xy}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(\dot{\gamma}_{xy}) \rightarrow$$ تابعی

$$\tau_{ij} \rightarrow L_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= \frac{1}{2} D_{ij} + \frac{1}{2} W_{ij}$$

$\underset{\approx}{W}$ ← چرخش ← vorticity

$\underset{\approx}{D}$ ← تانسور گرادیان نرخ تغییر شکل

رابطه $F = Kx$ یک رابطه اساسی و نباید با چرخش ناظر یا دستگاه مختصات عوض شود.

$D_{ij} \rightarrow$ Rate-of-deformation Tensor

$$\tau_{ij} \rightarrow d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

ساده‌ترین ارتباط بین τ و d یک خطی است:

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij}$$

$$\Rightarrow \tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$ سیال نیوتنی.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

سیالات نیوتنی ← هوا و آب

$$\begin{cases} \tau_{xx} = 2\mu \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{xy} = \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \tau_{xz} = \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \tau_{yz} = \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \end{cases}$$

یکشنبه ۱۳۸۸/۱۲/۲

■ سیالات نیوتنی

■ سیالات استوکسی

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Phenomenological $\rightarrow$ دارای اثبات دقیق ریاضی نیستند.

$$\text{Cauchy}: \rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \rho g_z .$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$\downarrow$$

$$\mu = \mu(x, y, z)$$

در بعضی سیالات (گازها) رابطه فوق برای τ_{ij} صادق نیست و بصورت زیر است:

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\underbrace{(\nabla\cdot\vec{V})}_{\frac{\partial u_k}{\partial x_k}}$$

$\lambda \rightarrow$ second viscosity coefficient

= Volumetric viscosity

= Dilatational

ترم $\lambda(\nabla\cdot v)$ ← قبلاً در شوک انفجار

λ و μ پارامترهای مستقل از هم هستند.

مشاهده استوکس برای برخی گازها (تک اتمی) ← $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$

$\mu = \mu(P, T, t)$

نیوتنی ← $\mu = \mu(P, T)$

فشار مکانیکی: $\bar{P} = \frac{1}{3}(\sigma_{ii})$

$$\sigma_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda(\nabla\cdot u)$$

$$\sigma_{xy} = -P + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\bar{P} = P - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla\cdot v)$$ ← فشار مکانیکی

اگر سیال تراکم ناپذیر باشد و یا گاز تک اتمی باشد $\bar{P} = P$

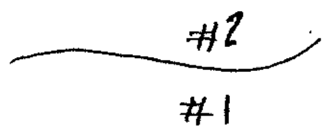
شرط‌های مرزی مناسب:

① در دیواره صلب
- عدم لغزش ← $u = u_{wall}$ ← اگر صافی سطح در مقیاس نانو باشد آنگاه این شرط صادق نیست.
- شرط نفوذ ناپذیری ← $v = 0$ ↓ مستقل از μ

② در مرز P و T و V ← اطلاعات را داریم.

نزدیک مقاطع ورودی و خروجی.

③ در Interface بین دو سیال



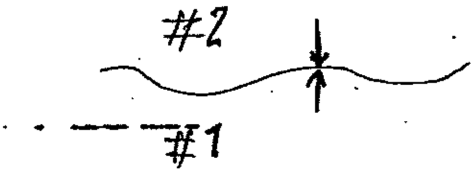
الف) $\tau_1 = \tau_2$ ← حالت خاصی که در آن یک سیال گاز، آنگاه $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$

شروط دینامیکی

ب) $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ← $\Delta\sigma$ وجود دارد.

کشش سطحی $\Delta\sigma = \frac{\pi}{2}$

ج) $V_1 = V_2$ ← سطح مشترک همواره از ذرات یکسانی تشکیل شده است.



معادلات Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} - \rho \vec{g}$$

* غیرقابل تراکم، μ ثابت، T ثابت

* فقط برای سیالات نیوتنی

* این معادلات هم برای جریان laminar و هم Turbulence صادق است.

* در این معادلات μ و ρ می توانند متغیر باشند.

معادلات حاکم { Navier-Stokes ، پیوستگی

حل استوکس به سقوط قطره کوچک وسبک به حرکت خزشی

$\rightarrow F_D = 3\pi \mu U_\infty d$

$Re \leqslant 1/5$

* حل های دقیق N-S :

که از هیچ تقریبی استفاده نمی کنیم به در هر Re قابل استفاده است.

از هیچ ترمی در مقابل ترم دیگر صرف نظر نمی کنیم.

ولی برای آن حل ← ممکن است حل تحلیلی را نداشته ← ODE ← PDE
دقیق می‌گویند.   باشد.

■ Couette Flow :

■ انواع مسائل (براساس مکانیزم حرکت)

۱) از نوع (کوئت) Drag flow ← حرکت سیال در اثر حرکت دیواره سیال ← به خاطر شرط عدم لغزش ← احتیاج به گرادیان فشار داخلی ندارد.

۲) از نوع Pressure-driven ← (جریان پوازیی)

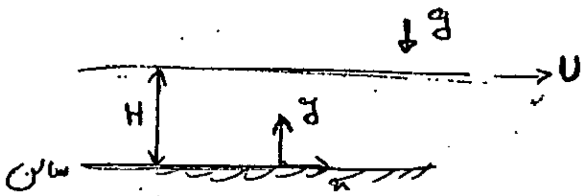
جریان داخل لوله ← یک بعدی،

duct ← دو بعدی.

۳) از نوع gravity driven .

جریا

Couette Flow:



بعد از گذراندن حالت گذرا و رسیدن به سرعت حد: ← فرض دما ثابت

$u = u(y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = Cte \rightarrow v = 0$$

چون در دیواره ها $v = 0$

$$\underline{x \text{ mom}}: \quad u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}^{=0} + \cancel{v}^{=0}\frac{\partial u}{\partial y} = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}^{=0} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \Rightarrow \underline{u = A + By}$$

$$\begin{cases} y = 0 \rightarrow u = 0 \Rightarrow A = 0 \\ y = H \Rightarrow u = U \Rightarrow B = \dfrac{U}{H} \end{cases} \Rightarrow \underline{u = \frac{U}{H} y}$$

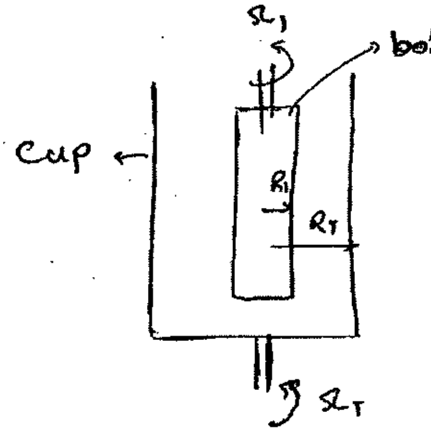
* اگر دما ثابت نباشد ⇐ ?

$\mu = \mu(y) \rightarrow$ پروفیل غیر خطی

جریان کوئت چرخشی : Circular Teylor-Couette

جریان لزج، تراکم ناپذیر، دائم، بین دو استوانه طویل و هم مرکز

مختصات کروی و استوانه‌ای ← Panton



$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \rightarrow \qquad z \gg R_1, R_2$

$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \rightarrow$ تقارن محوری

$$\begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta \neq 0 \\ V_z = 0 \end{cases}$$

tangential $\rightarrow V_\theta = V_\theta(r) \rightarrow$ یک بعدی

$$\begin{cases} r\ \text{mom}: -\rho \dfrac{V_\theta^2}{r} = -\dfrac{dP}{dr} \Rightarrow & (1) \\[2ex] \theta\ \text{mom}: \dfrac{d^2 V_\theta}{dr^2} + \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{V_\theta}{r}\right) = 0 & (2) \\[2ex] z\ \text{mom}: \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\gamma \Rightarrow \end{cases}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow P = P(r, z)$$

$(2) \Rightarrow V_\theta = Ar + \frac{B}{r}$

$r = R_1 \Rightarrow V_\theta = \Omega_1 R_1$

$r = R_2 \Rightarrow V_\theta = \Omega_2 R_2$

$\Rightarrow V_\theta(r) = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2}\Big[$

$$V_\theta(r) = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2}\left[(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)\, r - (\Omega_2 - \Omega_1)\frac{R_1^2 R_2^2}{r}\right] \quad ③$$

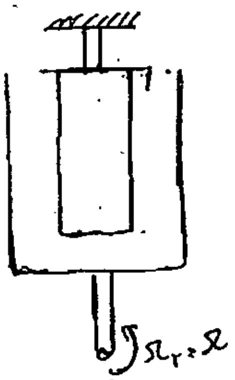
①, ③ ⇒

$$P(r) = \frac{\rho}{(R_2^2 - R_1^2)^2}\left\{\frac{(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)}{2} r^2 - 2(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2 \times (\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)\ln r - (\Omega_2 - \Omega_1)^2 \frac{R_1^4 R_2^4}{2 r^2}\right\} + C$$

▪ از حل معادلات N.S فشار معادله بصورت یک معادله خواهد بود.

این حل در محدوده خاصی Re قابل مشاهده است.

▪ ارزش مهندسی : Couette Viscometer



$$\tau_{r\theta} = 2\mu d_{r\theta} = 2\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \tau_{r\theta} = 2\mu r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)$$

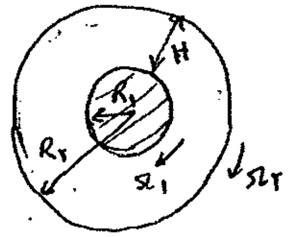
$$\tau_{r\theta} = 2\mu \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)}\,\Omega\left(1/r^2\right)$$

تورک $T = \int \tau_{r\theta}\Big|_{r=R_1} (2\pi R_1^2\, dz) \Rightarrow$

$$T = 4\pi\mu \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega L$$

$$\Rightarrow \mu = k \frac{T}{\Omega}$$

یکشنبه ۱۳۸۸/۱۳/۹



حالت خاص

$\Omega_1 = 0 \qquad \Omega_2 = \Omega$

$$\Rightarrow \tau_{r\theta} = 2\mu \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \Omega \times 1/r^2$$

$$\tau_{r\theta}\Big|_{\substack{r=R_1 \\ r=R_2}} \Rightarrow M = 4\pi\mu \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega L$$

$$\Rightarrow \mu = k \frac{M}{\Omega}$$

بنابه دلایلی فاصله H در مورد ویسکومترهایی که در بازار یافت می‌شوند کم است.

$R_1 \to$ ۵cm $\quad H =$ ۱mm

← کم شدن H ⇐ $M\uparrow$ ⇐ اندازه‌گیری راحت‌تر

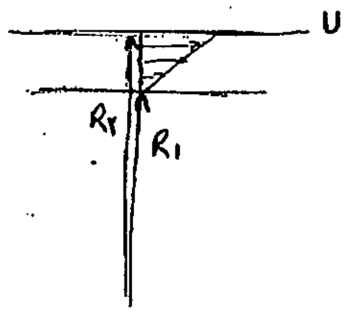
← کم شدن حجم سیال

$$v_\theta = \frac{R_2^2 \Omega}{R_2^2 - R_1^2}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)$$

$$= \frac{R_2^2 \Omega}{(R_2 - R_1)(R_2 + R_1)} \cancel{\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)} \frac{(r - R_1)(r + R_1)}{r}$$

$$= \frac{R^2 \Omega}{H \times 2R} \times \frac{y \times 2R}{R}$$

$$= \frac{R\Omega}{H} y \Rightarrow v_\theta \simeq \frac{U}{H} y$$



H کم وقتی استفاده می‌شود سیال لزجت کمی دارد.

H زیاد ← برای سیال های خیلی لزج.

حالت خاص دوم :

$R_2 \longrightarrow \infty \quad \Omega_2 = 0$

استوانه خارجی وجود ندارد.

$r \to \infty \Rightarrow U = 0 \Rightarrow A$

$$U_\theta = Ar + B/r \Rightarrow U_\theta = B/r \Rightarrow U_\theta = \frac{R_1^2 \Omega}{r}$$

$$P(r) = -\frac{1}{2} \rho R_1^4 \Omega_1^2 / r^2 + P_\infty$$

$$\tau_{r\theta}(r) = 2\mu R_1 \Omega / r^2$$

$$M = 4\pi\mu R_1^2 \Omega L$$

حالت خاص سوم :

$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$

حالت خاص چهارم: استوانه داخلی وجود ندارد.

$R_1 \longrightarrow 0$

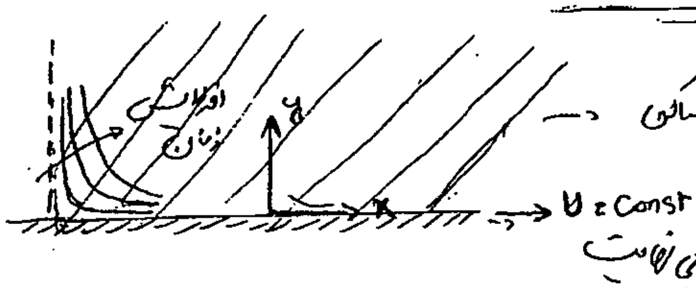
$$V_\theta(r) = r\Omega$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

$$P(r) = 1/2 \, \rho r^2 \Omega^2 + C$$

Rigid Body Rotation

مسئله شماره ۱ استوکس :



$U = U(y, t)$

سیال نیوتنی غیر قابل تراکم

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

پیوستگی $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = Cte$

$$\Rightarrow v = 0$$

y mom: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\gamma \Rightarrow P = -\gamma y$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

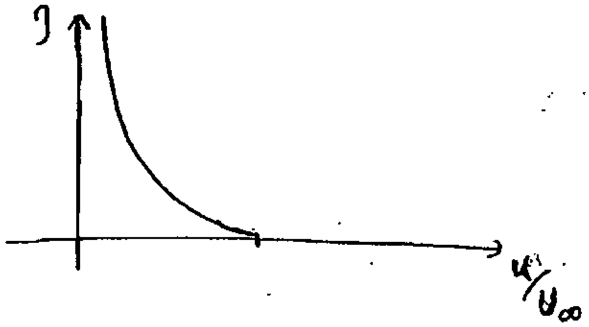
x mom: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (1)

$u \rightarrow y, t, \nu, U$

$$\frac{u}{U_\infty} = f\left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}\right)$$

آنالیز ابعادی

$\dfrac{y}{\sqrt{\nu t}} = \eta \rightarrow$ متغیر تشابهی



پروفیل های سرعت در زمان های مختلف با هم فرق نکنند.

روش حل تشابهی

$$\frac{u(y,t)}{U_\infty} = f\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \rightarrow$$ حل پیشنهادی

خود استوکس گذاشته

$$\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \checkmark \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \checkmark \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \checkmark$$

$$f'' + 2\eta f' = 0 \qquad \rightarrow f' = \frac{df}{d\eta}$$

$$\eta = 0 \rightarrow f = 1$$

$$\eta = \infty \rightarrow f = 0$$

ص ۲۷ ← دو شرط مرزی

۱ شرط اولیه

$$\begin{cases} u(0,t) = U \\ u(y,0) = 0 \\ u(\infty,t) = 0 \end{cases}$$

شرط مرزی

$\rightarrow$ (finite یا)

$\rightarrow$ Collapse

$\mathrm{erf}(\eta)$

$$\frac{u}{U_\infty} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\zeta^2} d\zeta$$

$$\frac{u}{U_\infty} = 1 - \mathrm{erf}(\eta)$$

$$\eta = \frac{y}{\alpha t^n} \longrightarrow$$ پیدا کردن η

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\mu f'(0) U}{2\sqrt{\nu t}}$$

@ $t = 0 \longrightarrow \tau_w \to \infty \Rightarrow$ نیروی زیادی لازم است

@ $t \to \infty \longrightarrow \tau_w = 0$

سؤال: آیا می‌توان از یک جایی به بالاتر اثر لایه‌های بالاتر را درنظر نگیریم؟

$\frac{u}{U_\infty} \leqslant ۰/۰۴$

$$۱/۵ = \frac{\delta}{۲\sqrt{\nu t}} \rightarrow \delta = ۳\sqrt{\nu t} \rightarrow \begin{cases} \delta \sim \sqrt{t} \\ \delta \sim \sqrt{\nu} \end{cases}$$

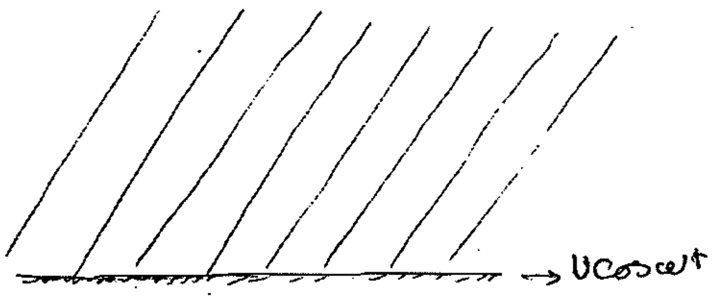
ضریب پخش مفتوم.

هرچه ν بیشتر ← δ بیشتر.

δ ← به سرعت دیواره بستگی ندارد.

مسئله شماره ۲ استوکس:

$U_w = U\cos\omega t$

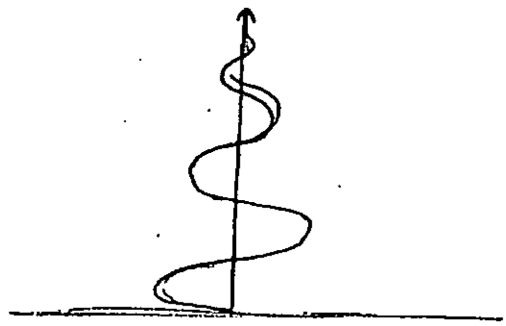


$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u = u(y,t) = f(y) * e^{i\omega t} \rightarrow$$ قسمت $Re\{a\}$ را با معنی می‌دانیم

$$\Rightarrow \frac{d^2 f}{dy^2} - i\frac{\omega}{\nu} f = 0$$

$$\frac{u(y,t)}{U} = \exp\left\{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y\right\} \cos\left[\omega t - \underbrace{\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y}_{\text{phase shift}}\right]$$



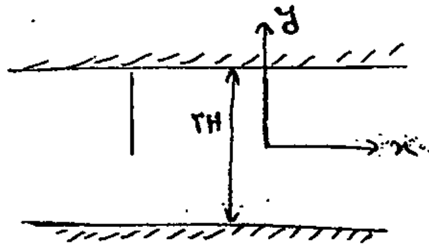
$$\delta = 2\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \quad \rightarrow \quad y: \frac{1}{e^2} \quad \rightarrow$$

بعد از این اثرات
لایه های بالاتر کم می شوند

سه شنبه ۱۱،۱۳، ۱۳۸۸

■ جریان موازی ← (با اعمال گرادیان فشار خارجی)

■ Plane Poiseuille Flow



فرضیات:

○ جریان دائم، غیرقابل تراکم، توسعه یافته

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0$$

○

پیوستگی: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=0 \Rightarrow v=\text{Const}=0$

$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \Rightarrow u=u(y)$

y mom: $\Rightarrow P=-\gamma(y-H)+f(x)$

x mom: $\rho\left(u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}^{=0}+\cancel{v}^{=0}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{=0}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

$\Rightarrow \mu\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{\partial P}{\partial x}=G \rightarrow cte$

سمت چپ تساوی تنها تابعی از y است و سمت راست تنها تابعی از x است

پس هر دو مساوی یک عدد ثابت G هستند:

پس فشار در جهت x بصورت خطی تغییر می‌کند:

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dy^2}=\frac{G}{\mu}$

$\Rightarrow \frac{du}{dy}=\frac{G}{\mu}y+C_1 \longrightarrow C_1=0 \rightarrow$ تقارن

$\Rightarrow u=\frac{G}{2\mu}y^2+C_2$

@ $y=\pm H \Rightarrow u=0 \Rightarrow u=\frac{G}{2\mu}(y^2-H^2)$

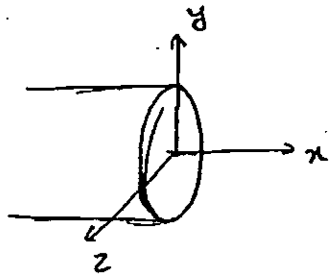
$$\frac{Q}{W} = \int_{-H}^{H} u \, dy \Rightarrow Q = -\frac{2}{3}\frac{GH^3}{\mu} > 0$$

اگر $G < 0$

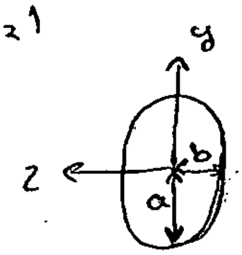
۱) جریان در کانالی با مقطع بیضی

۲) " " " " مستطیلی

فرضیات ← دائم، غیرقابل تراکم، توسعه یافته



$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$



$u = u(y, z)$

$v = 0 = w$

$$x \text{ mom}: \quad 0 = \overset{G}{-\frac{\partial P}{\partial x}} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{G}{\mu} \longrightarrow$$ ① معادله پواسون

Poisson

با توجه به B.C. می‌توان به دنبال حلی گشت که شرط مرزی روی دیواره را ارضاء می‌کند:

$$u(y,z) = \alpha \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) \quad (۲)$$

α ← عدد ثابت فرض می‌شود.

$$(1),(2) \Rightarrow \alpha = \frac{G}{2\mu} \left(\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2} \right) \quad (۳)$$

$$Q = \iint u \, dy \, dz$$

$$Q = \pi a b \left(-\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow G<0$$

$$\frac{Q}{A} = u_{av} \Rightarrow u_{av} = -\frac{\alpha}{2}$$

فرض کنید می‌خواهیم Q را max کنیم: ← a و b متغیر اما πab ثابت باشد:

$$Q = u_{av} \times \underbrace{A}_{\text{ثابت}}$$

با فرض G و A و μ ثابت $\Rightarrow$

$(۳) \Rightarrow a^2+b^2 \rightarrow$ min شود

$$\Rightarrow a=b$$

پس با G و A و μ ثابت مقطع دایره‌ای شکل دبی بیشتری از خود رد می‌کند.

$$u(y,z) = \frac{G}{2\mu}\left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-1\right)$$

$a = b = R$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{G}{4\mu}\left(r^2-R^2\right) \rightarrow$$ برای دایره

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{G}{\mu}$$ حل دوم برای معادله پواسون

$$u(y,z) = u^{(P)} + u^{(H)}$$

می دانیم لازم نیست $u^{(P)}$ شرط مرزی را ارضا کند

و $u^{(H)}$ معادله لاپلاس را ارضا می کند.

$u^{(P)} = C_1 y^2 + C_2 z^2 \rightarrow$ با توجه به B.C.

$$\hookrightarrow 2C_1 + 2C_2 = G/\mu \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{G}{2\mu} \quad (1)$$

C_1 و C_2 علاوه بر شرط (1) باید شرط مرزی را نیز ارضا کنند.

$$u(y,z) = u^{(H)} + C_1 y^2 + C_2 z^2$$

$$y^2 + \frac{a^2}{b^2} z^2 = a^2 \longrightarrow u = 0$$

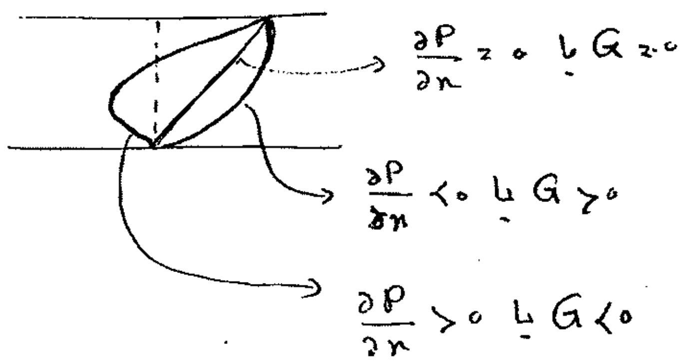
$\Rightarrow$ روی دیواره $\rightarrow u^{(H)} + C_1\left(y^2 + \frac{C_2}{C_1} z^2\right) \quad (2)$

$$\text{if } \frac{C_2}{C_1} = \frac{a^2}{b^2} \Big\} \quad (3)$$

$$0 = u^{(H)} + Ga^2 \Rightarrow u^{(H)} = -Ga^2$$

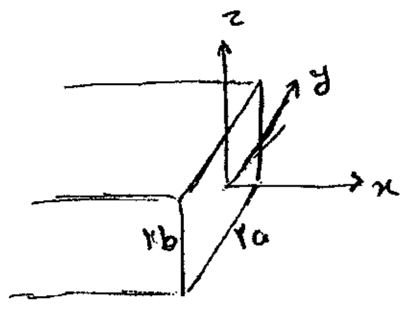
① و ③ $\Rightarrow c_1, c_2 \rightarrow$ مطابق حل قبل.

■ برای تشخیص علامت G بهتر است از دبی بروید. چون اگر صفحات حرکت کننده پروفیل های زیر ممکن هستند



پس ممکن است دبی صفر شود.

■ جریان درون کانال Duct :



دائم، توسعه یافته، تراکم ناپذیر.

$u = u(y,z)$

$v = w = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = G/\mu$$

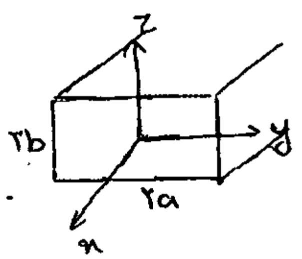
$$u(y,z) = u^{(P)} + u^{(H)}$$

$$u^{(P)} = -\frac{G}{2\mu}(b^2 - z^2)$$

توضیحات پروژه ۱:

یکشنبه ۱۶/۱۲/۱۳۸۸ :

• جریان آرام در یک کانال مستطیلی (Duct):



$$0 = -\overset{G}{\frac{\partial P}{\partial x}} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$u(y,z) = u^{(P)} + u^{(H)}$$

$$u^{(P)} = -\frac{G}{2\mu}(b^2 - z^2) \longrightarrow y = \pm a$$ شرط مرزی را در ارضا نمی‌کند

$$u^{(H)} = u^{(H)}(y,z) = u'(y,z)$$

$$\Rightarrow u(y,z) = u^{(P)} + u'$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{G}{\mu} \\
u(y=\pm a, z) = 0 \\
u(y, z=\pm b) = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\nabla^2 u' = 0 \\
u'(y, z=\pm b) = 0 \quad (1) \\
u'(y=\pm a, z) = \dfrac{G}{2\mu}(b^2 - z^2) \quad (2)
\end{cases}
$$

Pozrikidis

$$u'(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \cos\left(\alpha_n \frac{z}{b}\right) \quad (3)$$

$\alpha_n = (n - \tfrac{1}{2})\pi \quad \rightarrow$ شرط ① خود به خود ارضا می‌شود.

چرا cos نوشتیم؟ به علت وجود تقارن در مسئله

$$\nabla^2 u' = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n'' - \frac{\alpha_n^2}{b^2} f_n\right) \cos\left(\alpha_n \frac{z}{b}\right) = 0$$

$$\Rightarrow f_n'' - \frac{\alpha_n^2}{b^2} f_n = 0$$

$$\Rightarrow f_n(y) = A_n \cosh\left(\frac{\alpha_n}{b} y\right) + B_n \sinh\left(\frac{\alpha_n}{b} y\right)$$

$B_n = 0 \Leftarrow$ تقارن نسبت به y

$$u'(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \cos\left(\alpha_n \frac{z}{b}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh\left(\alpha_n \frac{y}{b}\right) \cos\left(\alpha_n \frac{z}{b}\right)$$

$$@\ y = \pm a \Rightarrow u' = \frac{G}{2\mu}\left(b^2 - z^2\right)$$

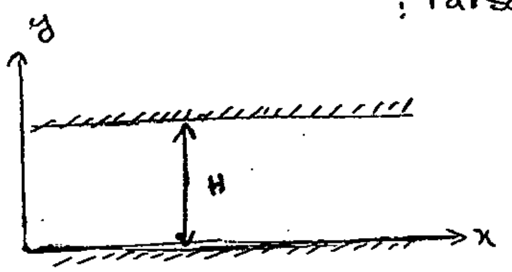
$$\Rightarrow A_n = \frac{G}{2\mu \cosh\left(\alpha_n \frac{a}{b}\right)} \underbrace{\frac{4b^2}{\alpha_n^3} (-1)^n}$$

HW #1 $\longrightarrow$ بخش ۷ $\rightarrow$ $\underbrace{1, 2, 3, 4, 10}$

۰/۵ نمره تشویقی $\longrightarrow$ ۸۹/۱/۱۷

• از این مسائل ← یکی در امتحان • از ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ نیز یکی در امتحان.

• جریان ضربانی Pulsatile flo :



$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = -G \sin\omega t = iG\, e^{i\omega t} \\ x \text{ mom: } \rho \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

$$F(y,t) = u(y,t) + i\,v(y,t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{iG}{\rho} e^{-i\omega t} + \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \rightarrow$$ بخش حقیقی به دردمان می‌خورد.

$$F(y,t) = f(y)\, e^{-i\omega t} \rightarrow$$ حل $= Re\{F(y,t)\}$

$$\Rightarrow f'' + \frac{i\omega}{\nu} f = -\frac{iG}{\mu}$$

$$f = f^{(P)} + f^{(H)}$$

$$f^{(P)} = -\frac{G}{\rho\omega}$$

$$f^{(H)} = A \cos\sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}\, y + B \sin\sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}\, y$$

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow u=0 \\ y=H \Rightarrow u=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A, B \checkmark$$

$$\begin{cases} \Rightarrow f(y) = \dfrac{G}{\rho\omega}\left\{ \dfrac{\cos k(y - H/2)}{\cos(k H/2)} - 1 \right\} \\ k = (1+i)\alpha \\ \alpha = \sqrt{\dfrac{\omega}{2\nu}} \end{cases}$$

$$u(y,t) = \mathrm{Re}\left\{ f(y) e^{-i\omega t} \right\}$$

$$u(y,t) = a(y)\cos\omega t + b(y)\sin\omega t$$

$$a(y) = \frac{G}{\rho\omega}\left\{ \frac{\cosh(\alpha y)\cos\alpha(H-y) + \cos(\alpha y)\cosh(\alpha(H-y))}{\cosh(\alpha H)+\cos(\alpha H)} - 1 \right\}$$

$$b(y) = \frac{G}{\rho\omega}\left\{ \frac{\sinh(\alpha y)\sin\alpha(H-y)}{\cosh(\alpha H)+\cos(\alpha H)} + \frac{\sin(\alpha y)\sinh\alpha(H-y)}{\cosh(\alpha H)+\cos(\alpha H)} \right\}$$

$$u = U\sin(\omega t + \varphi)$$

$$U = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{a}{b}$$

مرجع ← کتاب Panton

تمرین:

Plot ← $\omega \to 0$, $\omega \to \infty$

$$Wo = \text{Womersley} = L\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

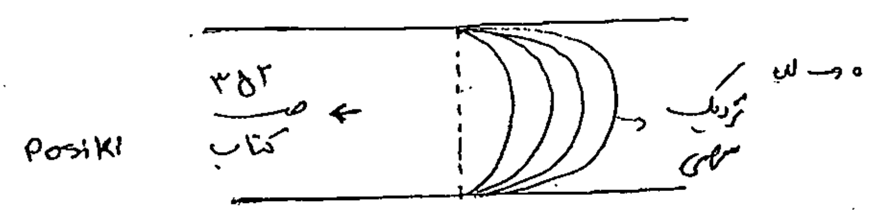
عدد بدون بعد جریان

L ← طول مشخصه که در این مسئله H.

عدد Womersley ←

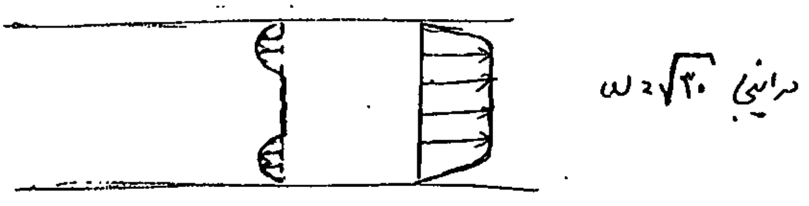
$$W_0 = \sqrt{\frac{\rho \frac{\partial u}{\partial t}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}} = \frac{H}{\sqrt{\nu/\omega}} = \frac{H}{\delta_{diffusion}}$$

$$\begin{cases} \omega \to 0 \Rightarrow W_0 \to 0 \\ \omega \to \infty \Rightarrow W_0 \to \infty \end{cases}$$

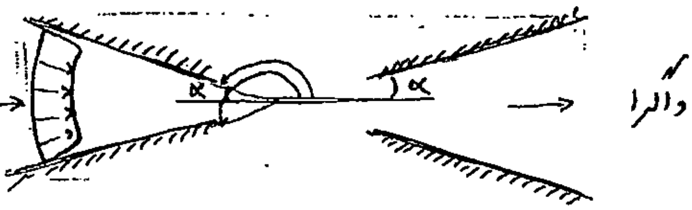


$\omega \to 0 \to$ ترم diffusion مهم خواهد بود

$\omega \to \infty$



■ جریان درکانال های همگرا و واگرا : Jeffrey + Hamel



(r, θ)

$v_r(r,\theta)$

$v_\theta = 0$

پیوستگی : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = 0 \Rightarrow v_r \propto \frac{\overset{\nu}{1}}{r}$

r mom: $v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}\right\}$

θ mom: $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu\left(\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$

$v_r = R(r)F(\theta) = \frac{\overset{\nu}{1}}{r}F(\theta)$ $\qquad \nu \to \frac{m^2}{s} \qquad \mu \to \frac{kg}{m.s}$

اگر $v_r = \frac{\nu}{r}F(\theta)$ گرفته شود ← $F(\theta)$ بدون بعد خواهد شد.

r mom →
θ mom → P حذف → را پیشنهادی ①

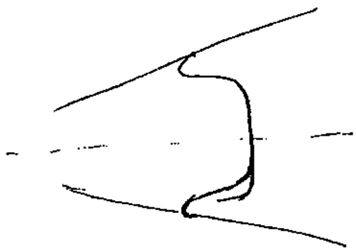
* Page ٤٣ → ① ⇒ $F^{(3)} + 4F' + 2FF' = 0$

شرط مرزی : $F(\pi - \alpha) = 0$

$F(\pi + \alpha) = 0$

$F'(\pi) = 0$

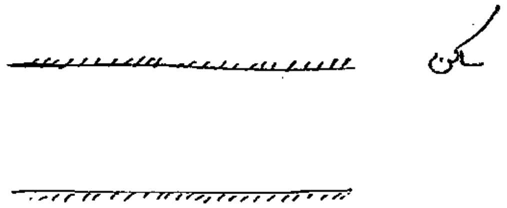
به نظر می‌رسد شرط مرزی‌ها کافی نیستند.



سه‌شنبه ۱۸/۱۲/۱۳۸۸

▪ دینامیک حباب گازی در یک سیال نیوتنی: مبحث امروز

▪ جریان ضربانی :



$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -G \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial u}{\partial t} = G \sin \omega t + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1)$$

$$u(y,t) = b(y) \sin \omega t + a(y) \cos \omega t \qquad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t \qquad (3)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a'' \cos \omega t + b'' \sin \omega t \qquad (4)$$

$$(1),(3),(4)$$

$$\Rightarrow (-\rho a\omega - G - \mu b'') \sin \omega t + (\rho b\omega - \mu a'') \cos \omega t = 0 \qquad (5)$$

(5) باید تساوی زمانها برقرار باشد پس:

$$\begin{cases} -\rho a\omega - G - \mu b'' = 0 & (6) \\ \rho b\omega - \mu a'' = 0 & (7) \end{cases}$$

$$f(y) = a(y) + i b(y) = a + ib \qquad (8)$$

$$\mu f'' + i\rho\omega f = -iG \qquad \Leftarrow (8),(7),(6)$$

$$\Rightarrow f'' + \frac{i\omega}{\nu} f = -\frac{iG}{\mu}$$

$$f(y) = \frac{G}{\rho\omega}\left[\frac{\cos k(y - H/2)}{\cos\left(\frac{kH}{2}\right)} - 1\right] \qquad \begin{cases} k = (1+i)\alpha \\ \alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \end{cases}$$

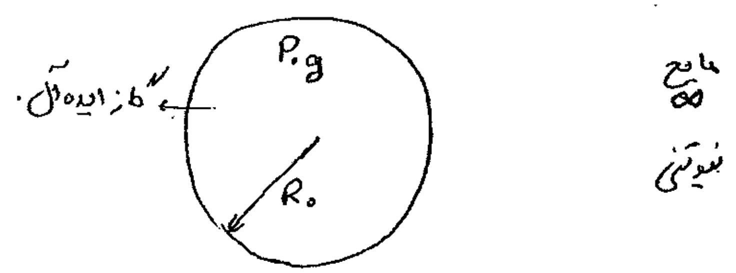
$$f(y)e^{i\omega t} = (a+ib)(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

$$= \underbrace{(a\cos\omega t + b\sin\omega t)}_{u(y,t)} + i\,(b\cos\omega t + a\sin\omega t)$$

$$Re\left\{f(y)e^{-i\omega t}\right\} = u(y,t)$$

■ دینامیک حباب گازی در یک سیال نیوتنی:

Rayleigh - Plesset $\qquad P_\infty$



∞ ← مثلاً ۱۰ برابر شعاع

ابتدا فرض می‌شود ← حباب در حال تعادل

اعمال میدان آکوستیک ← ارتعاش حباب.

Free Oscillation → ← ارتعاش هنگام منبسط شدن

مثلاً تغییر ناگهانی P_∞ به P_∞ ۱٫۱

1

Force Oscillation $\rightarrow$ نوسانات میدان آکوستیک.

فرض اساسی $\rightarrow$ حباب همواره کروی است.

$V_\theta = 0 = V_\phi$

$V_r = V_r(r,t)$

پیوستگی: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) = 0$ — برای سیال بیرونی

$$\Rightarrow r^2 V_r = A \Rightarrow V_r = \frac{A(t)}{r^2}$$

$$V_r\Big|_{r=R} = \dot{R} = \frac{A(t)}{R^2} \Rightarrow A(t) = R^2\dot{R}$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{R^2\dot{R}}{r^2}$$

r mom:

پیوستگی

$$\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left(\frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2 V_r)}\right) \dots$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{\partial P}{\partial r} = \rho\Big\{\frac{2\dot{R}^2R^4}{}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} = \rho\left\{\frac{2\dot{R}^2R^4}{r^5} - \frac{R^2\ddot{R}}{r^2} - \frac{2R\dot{R}^2}{r^2}\right\} \rightarrow$$

انتگرال می‌گیریم

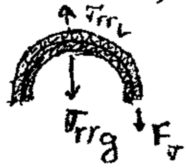
$$\frac{P(r)}{\rho} = -\frac{\dot R^2}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4 + \frac{\ddot R R^2 + 2R\dot R^2}{r} + B$$

$$B:\ r \to \infty \Rightarrow P = P_\infty \Rightarrow B = \frac{P_\infty}{\rho}$$

$$\Rightarrow P(r) = \rho\left\{-\frac{\dot R^2}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4 + \frac{R^2\ddot R + 2R\dot R^2}{r}\right\} + P_\infty$$

$$r = R \Rightarrow P_L = P(R) = P_\infty + \rho\left(R\ddot R + \frac{3}{2}\dot R^2\right)$$

شرط مرزی در interface:



بدست آوردید. بسیار سخت

$$(\tau_{rr})_g = (\tau_{rr})_L - \frac{2\sigma}{R}$$

$$-P_g + \underbrace{\cancel{(\tau_{rr})_g}}_{\simeq 0} = -P_L + (\tau_{rr})_L - \frac{2\sigma}{R} \qquad @\ r = R$$

$\mu_g \ll \mu_L$ چون $\leftarrow (\tau_{rr})_g \simeq 0$

$$\Rightarrow \tau_{rr}\Big|_{r=R} = 2\mu d_{rr} = 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{4\mu\dot R}{R}$$

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & v_r/r & 0 \\ 0 & 0 & v_r/r \end{bmatrix}$$

Pardon → اشتباهاتی

$$\Rightarrow \rho\left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2\right) = P_g - P_\infty - \frac{4\mu\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{R}$$

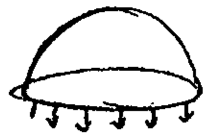
Reyleigh-Plesset Eq.

$$P_{0g}V_{0g}^{K} = P_g V^{K} \Rightarrow P_g = P_{0g}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3K}$$

R_0 ← شعاع حباب در حالت استاتیک.

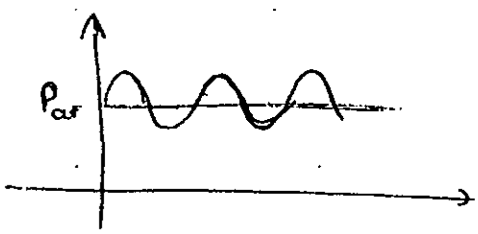
$R = R_0 \quad \dot{R} = 0 = \ddot{R}$

$$\Rightarrow 0 = P_{0g} - P_\infty - \frac{2\sigma}{R_0} \Rightarrow R_0 = \frac{2\sigma}{P_{0g} - P_\infty}$$



P_∞ می‌تواند تابعی از زمان باشد.

$$P_\infty(t) = P_{at}\left[1 - \delta \sin\omega t\right]$$



دما هم می‌تواند تابعی از زمان باشد.

توضیحات پروژه ۲۵ :

پیوستگی : $v_r = \frac{R^2 \dot R}{r^2}$

$$r \text{ mom} : \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{rr}) - \left(\frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi} - 2\tau_{rr}}{r} \right)$$

$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r}$

$\tau_{\theta\theta} = \tau_{\phi\phi}$

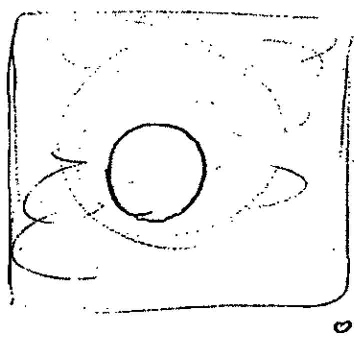
انتگرال از $r=R$ تا $r=\infty$

$$\Rightarrow \rho \left(R\ddot R + \frac{3}{2}\dot R^2 \right) = P_g - P_\infty - \frac{2\sigma}{R} - 12 R^2 \dot R \int_R^\infty \frac{\mu(r)}{r^4} dr$$

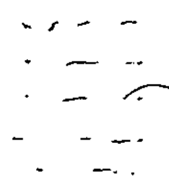
$$P_g \rightarrow P_{0g}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3k}$$

تیکسوتروپ

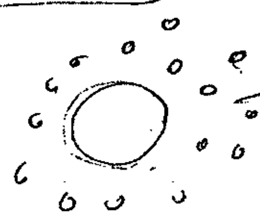
Thixotrop



نانو



$\mu = \mu_{min}$



μ_{max}

حل ← بدون بعد کردن.

چون interface حرکت می‌کند تغییر متغیر $y = r^3 - R^3(t)$

← دستگاه مرتبه اول غیرخطی ← Runge-Kutta

Allen → Paper →

یکشنبه ۱۳۸۹/۱/۱۵

حل دقیق:

۱) جریان با نقطه سکون (2D) stagnation flow

۲) جریان ثقلی

۳) جریان در بالای یک صفحه متخلخل

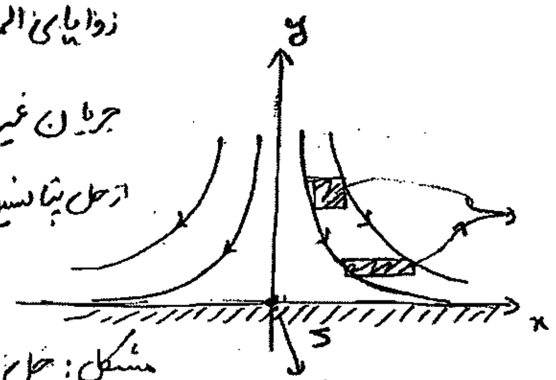
*۴) جریان در بالای دیسک دوار.

جریان نزدیک نقطه سکون 2D:

• از حل موجود می‌توان برای جریان غیرلزج (پتانسیل) ← حل لزج

Hiemenz

زوایای المان‌ها تغییر نمی‌کنند پس
جریان غیرچرخشی است و می‌توان
از حل پتانسیل بکار برد:



غیرچرخشی

نقطه سکون

مشکل: حل پتانسیل با شرط مرزی لد
دیواره را ارضاء نمی‌کند.

$$x: \quad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$y: \quad u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

پیوستگی: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \nabla^2\phi = 0 \rightarrow u = ax$, $v = -ay$

کتاب $2U$ منظور سرعت نسبت

مجهولات ← u و v و P

خطوط جریان خمیده ← میدان فشار داریم.

$$\left.\begin{array}{l}\mu = 0\\ \rho = \text{Const}\end{array}\right\} \rightarrow$$ سیال ایده‌آل ← جریان ایده‌آل

← جریان غیرچرخشی ←

$\Rightarrow \vec{V} = \nabla\phi$

پیوستگی $\nabla\cdot\vec{V} = 0 \Rightarrow \nabla^2\phi = 0$

آیا ϕ بدست آمده در N-S صدق می‌کند؟ بلی:

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \rightarrow \nu \nabla^2 \vec{V} = \nu \nabla^2(\nabla\phi)$$

$$= \nu \nabla(\nabla^2\phi) = 0$$

• مشکل ← شرط مرزی ←

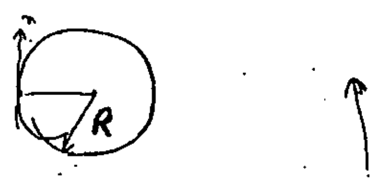
$u = 2K \cdot x$

$v = -2Ky$

• K ← یک متغیر سینماتیکی

در جریان حول استوانه $K = \dfrac{U_\infty}{R}$

$U = 2U_\infty \sin\theta$



$\theta \ll \quad \theta \approx 0 \Rightarrow U = 2U_\infty \theta = 2\dfrac{U_\infty}{R} x$

$\underline{u = 2Kx f'(y)}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow -\frac{\partial v}{\partial y} = 2K f'(y) \Rightarrow \underline{v = -2K f(y)}$$

$@\ y=0 \rightarrow u=0 \Rightarrow f'(0)=0$

$\qquad\qquad\ \ v=0 \Rightarrow f(0)=0$

$y \to \infty \Rightarrow f(\infty) = y$

x mom: $4K^2 x f'^2 - 4K^2 x f f'' = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + 2K\nu x f'''$ ①

y mom: $4K^2 f f' = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} - 2K\nu f''$ ②

y mom $\longrightarrow$ انتگرال $\Rightarrow P(x,y)$ ✓

$P(x,y) = -2\rho K^2 f^2 - 2\rho K\nu f' + g(x)$ ③

$\to$ ثابت انتگرال

جریان پتانسیل : برنولی $P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_s + \frac{1}{2}\rho \cancel{V_s^2}$

البته چون جریان غیرچرخشی است پس استفاده از برنولی مجاز است. $\Rightarrow P_s = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$

$U_\infty^2 = u^2 + v^2 = (2Kx)^2 + (-2Ky)^2 = 4K^2(x^2+y^2)$

$y \to \infty \Rightarrow P \to P_\infty = P_s - 2K^2\rho(x^2+y^2)$ ④

③,④ $\Rightarrow y \to \infty \Rightarrow P_\infty = -2K^2 y^2 - 2\rho K\nu + g(x)$ ⑤

④,⑤ $\Rightarrow g(x) = P_s - 2\rho K^2 x^2 + 2\rho K\nu$ ⑥

③,⑥ $\Rightarrow P(x,y)$ ✓

$$\Rightarrow x\ mom:\quad \frac{\nu}{2K} f''' + f f'' - (f')^2 + 1 = 0 \qquad (7)$$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 0$

$f'(\infty) = 1$

(7) ← تغییر متغیر ← برای رهایی از وجود خواص سیال (ν) و خواص سینماتیکی K

$$\eta = \sqrt{\frac{2K}{\nu}}\, y$$

$$F(\eta) = \sqrt{\frac{2K}{\nu}}\, f(y) \qquad (8)$$

$$(7) \Rightarrow F''' + F F'' - (F')^2 + 1 = 0$$

$F(0) = 0$

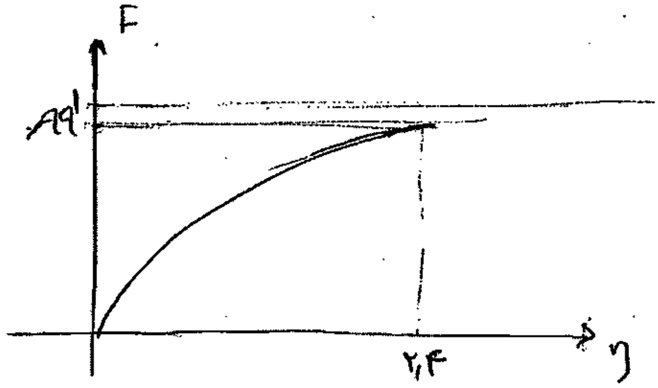
$F'(0) = 0$

$F'(\infty) = 1$

$F \longrightarrow \psi$

$F' \longrightarrow u$

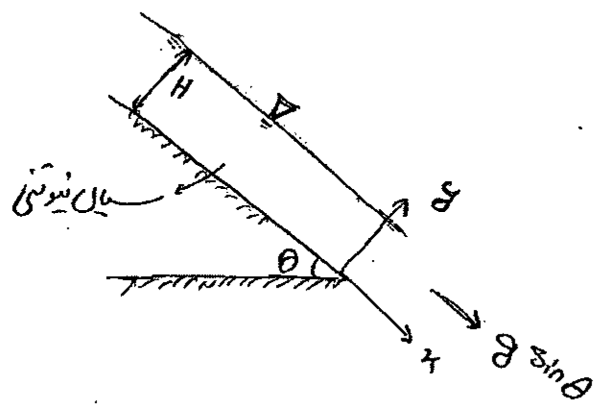
$F'' \longrightarrow \tau_w$



ماهیت [illegible] لایه مرزی ← اثرات لزجت محدود به یک لایه نازک

$$\delta = 2.4\sqrt{\frac{\nu}{2k}}$$

جریان ثقلی :



$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow v_2 \ \text{ثابت} = 0$$

چون روی دیواره صفر است

$$x\text{-mom}: \quad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + g\sin\theta$$

$$\Rightarrow \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g\sin\theta \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g}{\nu}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{g}{\nu}\sin\theta\, y + C_1 \qquad (1)$$

$$y = H \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{g}{\nu}\sin\theta(y - H)$$

$$u = -\frac{g}{\nu}\sin\theta\left(\frac{y^2}{2} - Hy\right) + C_2$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow u = -\frac{g}{\nu}\sin\theta\left(\frac{y^2}{2} - Hy\right)$$

(1)

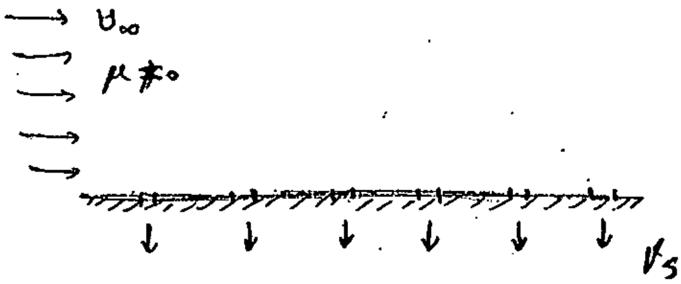
اگر H را دو برابر کنیم ← τ_w تغییر می‌کند

اگر ρ را تغییر دهیم ← با τ_w نسبت مستقیم دارد.

$$\tau_w = \gamma H \sin\theta$$

■ جریان در بالای صفحه متخلخل:

Flow over a prous wall:



$u = u(x,y)$

$v = v(x,y)$

فرض می‌کنیم ← $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ← چرا؟ سوال نکنی.

پیوستگی : $\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v =$ ثابت

$v = -v_s$ → سرعت تخلیه

$$x \text{ mom}: \quad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1)$$

$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ ← اگر مکش ضعیف باشد خمیدگی خطوط جریان ناچیز بوده و $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$

فرض خوبی است ← $\frac{v_s}{U_\infty} < 0.001$

$$(1) \Rightarrow -v_s\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(y) = U_\infty\left(1 - e^{-\frac{v_s}{\nu}y}\right)$$

@ B.C.s: $y = 0 \rightarrow u = 0$

$y = \infty \rightarrow u = U_\infty$

این جریان هم ماهیت لایه مرزی دارد.

$$\frac{u}{U_\infty} = 1 - e^{-\eta} \longrightarrow y = \delta \Rightarrow \delta = 2\frac{\nu}{V_s}$$

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \rho U_\infty V_s \longrightarrow$$

به ویسکوزیته ربطی ندارد.

تأثیر غیرمستقیم دارد ← تعیین پروفیل سرعت.

سه‌شنبه ۱۳۸۹/۰۱/۱۷

سه‌شنبه ۱۳۸۹/۱/۱۷

بخش ۹ : حل‌های تقریبی

■ انواع تقریبات معادلات N-S

۱) تقریب اولر ← از کلیه ترم‌های لزجت در مقابل اینرسی صرف نظر می‌شود

← برای پیش‌بینی F_D خوب نیست $F_D \approx ?$

← برای محاسبه نیروی لیفت تا وقتی جدایش اتفاق نیافته خوب است.

۲۹ شیمی

۲) تقریب استوکس ← از کلیه نیروهای اینرسی صرف نظر می‌شود (در مقابل لزجت)

ـ ← ترم‌های convective.

~~تقریب~~

۳) تقریب Oseen:

Re بسیار کم

غیرخطی ← $u\frac{\partial u}{\partial x}$ → $U_0\frac{\partial u}{\partial x}$ خطی

از تقریب استوکس بهتر است.

۴. تقریب پرانتل (فقط از بعضی از ترم‌های اینرسی صرف نظر می‌شود)

تقریب اولر و تقریب پرانتل ← Re بسیار زیاد $Re \gg 1$

تقریب استوکس و Oseen ← Re بسیار کم $Re \ll 1$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla \vec{P} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

$$\Rightarrow \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}}_{\text{غیرخطی}} \right] = -\nabla \vec{P} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

$Re = \dfrac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{لزجت}} \ll 1 \rightarrow Re < 0/1$ از آزمایش

$\Rightarrow$ می‌توان از نیروی اینرسی صرف نظر کرد.

$\Rightarrow \underline{\nabla \vec{P} = \mu \nabla^2 \vec{V}} \Big\} \rightarrow$ معادله تقریب استوکس

منشأ ناپایداری ← ترم‌های غیرخطی ⇐ معادله استوکس پایدار است

Jeffrey - Hamel → جریان در کانال‌های همگرا و واگرا

$$V_r(r, \theta) = f(R) F(\theta) = \frac{\nu}{r} F(\theta)$$

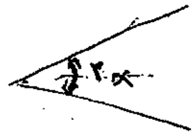
$$F''' + 4FF' + 2FF' = 0$$

$2FF'$ ← ناشی از ترم‌های غیرخطی ⇐

$$\text{if } Re \ll 1 \Rightarrow FF' = 0$$

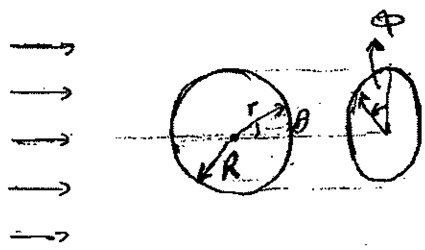
$$\Rightarrow \underline{F''' + 4F' = 0} \Big\} \rightarrow$$ تحلیلی ← $\left\{ \begin{array}{l} \text{بدست} \\ \text{آوردیم} \end{array} \right.$

$$V_r = \frac{\nu}{r}\,\frac{\cos 2\theta - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos\alpha} \quad ?$$



جریان Re کم ← جریان خزشی (Creeping flow) یا همان Stokes flow

جریان خزشی لزج در اطراف یک کره: آزمایش ← $Re < 0.1$



$V_r,\ V_\theta,\ V_\phi$

$$\begin{cases} V_\phi = 0 & \rightarrow \text{فرض می‌کنیم جریان در جهت } e_\phi \text{ سرعت ندارد} \\ \partial/\partial\phi = 0 & \\ \text{تراکم ناپذیر + دائم} & \end{cases}$$

$V_r = V_r(r,\theta)$

$V_\theta = V_\theta(r,\theta)$

$$\rho\left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r}\right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2 v_r)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\right\} \qquad \leftarrow : r \text{ mom}$$

θ mom:
$$\rho\left\{v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r}\right\} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$$

$$+ \mu\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \sin\theta)\right)\right.$$

$$\left. + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right\}$$

Continuity:
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) = 0$$

شرایط مرزی : $@\ r = R \Rightarrow v_r = 0 \quad v_\theta = 0$

$@\ r = \infty \Rightarrow v_r = U_\infty \cos\theta$

$v_\theta = U_\infty \sin\theta$

بی‌بعدسازی: .... - ---

$r^* = s = r/R$

$v_r^* = v_r / U_\infty$

$v_\theta^* = v_\theta / U_\infty$

$$P^* = \frac{P}{\frac{\mu U_\infty}{R}} \qquad \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \;\text{ یا }\; \frac{\mu U_\infty}{R}$$

بی‌بعد سازی P با $\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$ بی معناست ← چون ترم های انرژی v بی تأثیرند.

$$\Rightarrow \frac{\rho U_\infty R}{\mu}\ [\text{ترم های انرژی}] = (\text{ترم های لزجت} + \text{فشار})$$

$\frac{\rho U_\infty R}{\mu} \rightarrow Re$

$Re \ll 1 \Rightarrow$ سمت چپ $= 0$

$$\Rightarrow r\ mom:\ -\frac{\partial P}{\partial s} + \left\{ \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}(s^2 v_r) + \frac{1}{s^2 \sin\theta} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right) \right\} = 0 \qquad (1)$$

$$\theta\ mom:\ -\frac{1}{s}\frac{\partial P}{\partial\theta} + \left\{ \frac{1}{s^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(s^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial s}\right) + \right. \qquad (2)$$

$$\left. + \frac{1}{s^2}\left\{ \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta \sin\theta)\right] + \frac{2}{s^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} \right\} \right. = 0$$

که همه متغیرهای بی‌بعدند.

با توجه به شرایط مرزی در ∞ داریم:

$$\begin{cases} v_r = F(s)\cos\theta \\ v_\theta = G(s)\sin\theta \end{cases} \rightarrow \text{جدائی متغیرها}$$

بینوشتگی $\Rightarrow F(s) + \frac{3}{2}\frac{dF}{ds} + G(s) = 0 \Big\} \Rightarrow$ ③ سازگار است.

ترم فشار را از معادلات r mom و θ mom حذف می‌کنیم :

$$s^4 F'''' + 8 s^3 F''' + 8 s^2 F'' - 8 s F' = 0 \Big\} \quad \Leftarrow ③, ②, ①$$ ④

معادله اویلر

$$\Rightarrow F = s^n$$

$$@\ s = 1 \Rightarrow F(1) = 0 \qquad G(1) = 0 \overset{③}{\Rightarrow} F'(1) = 0$$ ⑤

$$@\ s = \infty \Rightarrow F(\infty) = 1 \qquad G(\infty) = -1 \overset{③}{\Rightarrow} F'(\infty) = 0$$

$$④ \Rightarrow s^n \Big\{ -8n + 8n(n-1) + 8n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3) \Big\} = 0$$

به ازای تمامی s ها $\Leftarrow$

$$\begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \\ n = 2 \\ n = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(s) = a s^{-3} + b s^{1} + c s^{0} + d s^{2}$$ ⑥

$$⑤, ⑥ \Rightarrow a = \tfrac{1}{2} \qquad c = 1$$

$$b = -\tfrac{3}{2} \qquad d = 0$$

$$\begin{cases} F(s) = 1 - \dfrac{3}{2s} + \dfrac{1}{2s^3} \\[2ex] G(s) = -1 + \dfrac{3}{4s} + \dfrac{1}{4s^3} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_r(r,\theta)}{U_\infty} &= -\frac{1}{2}\cos\theta \left\{ \left(\frac{R}{r}\right)^3 - 3\left(\frac{R}{r}\right) + 2 \right\} \\ \frac{V_\theta(r,\theta)}{U_\infty} &= \frac{1}{4}\sin\theta \left\{ -\left(\frac{R}{r}\right)^3 - 3\left(\frac{R}{r}\right) + 4 \right\} \end{aligned}\right\}$$

تجزیه verify کردن: بدست آوردن میدان تنش

F_D ✓

$$\tau_{r\theta} = 2\mu d_{r\theta} = \mu \left\{ r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right\} *$$

$$\tau_{r\varphi} = 2\mu d_{r\varphi} = 0$$

$$\tau_{\theta\varphi} = 2\mu d_{\theta\varphi} = 0$$

$$\tau_{r\theta}\Big|_{r=R} = -\frac{3}{2}\,\frac{\mu U_\infty}{R}\sin\theta$$

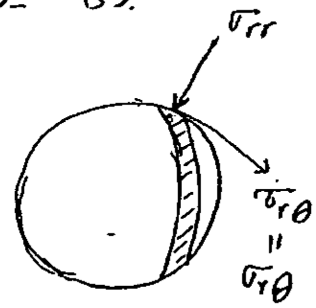
$$\tau_{rr} = 2\mu d_{rr} = 2\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) = \frac{3\mu V_\infty}{R}\cos\theta\left\{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - \left(\frac{R}{r}\right)^4\right\}\Big|_{r=R} = 0$$

$$\tau_{\theta\theta} = 0 \qquad \tau_{\theta\theta} = -\tfrac{1}{2}\tau_{rr}$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = 0 \qquad \tau_{\theta\varphi} = -\tfrac{1}{2}\tau_{\varphi r}$$

چون تنش های normal صفر هستند ← سیالات نیوتنی را سیال غیر الاستیک می گویند.

در ~~ـــــ~~ برای سیال غیر نیوتنی تنش های نرمال صفر نمی شوند ← غیر الاستیک.



$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=R} = -P + \cancel{\tau_{rr}}^{\,=0} = -P(r,\theta)\Big|_{r=R}$$

از معادله θ mom فشار را بدست می آوریم:

$$P(r,\theta) = P_\infty - \frac{3}{2}\frac{\mu V_\infty}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^2\cos\theta$$

$$P(R,\theta) = P_\infty - \frac{3}{2}\frac{\mu V_\infty}{R}\cos\theta$$

$$\min \rightarrow \theta = 0 \Rightarrow P_{min} = P_\infty - \tfrac{3}{2}\frac{\mu V_\infty}{R} \rightarrow v_r, v_\theta = 0$$

$$\max \rightarrow \theta = \pi \Rightarrow P_{max} = P_\infty + \tfrac{3}{2}\frac{\mu V_\infty}{R} \rightarrow v_r, v_\theta = 0$$

$$F_D = \int (-\sigma_{rr}\cos\theta + \tau_{r\theta}\sin\theta)\, dA$$

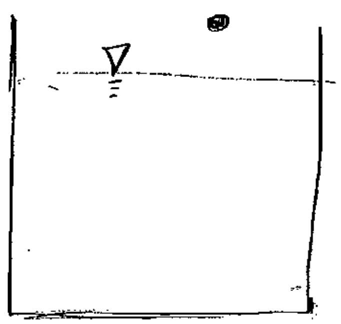
$$dA = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta \qquad 0<\theta<\pi$$

$$\underbrace{F_D = 6\pi\mu V_\infty R}$$

$$\underbrace{(F_D)_{P} = \frac{1}{3}(F_D)_{\text{کل}}}$$

$(F_D)_p = 1/3\,(F_D)_{total}$

آزمایش:



$$\mu = \frac{W}{6\pi V_\infty R}$$

$Re<0.1$ ← خیلی خوب

$Re<0.5$ ← خوب

یکشنبه ۸۹/۱/۲۴ :

پروژه حباب ←

$$\frac{D\lambda}{Dt} = \underbrace{A(1-\lambda)}_{\text{Buildup}} - \underbrace{B\lambda \dot{e}^{1/2}}_{\text{distraction}}$$

$\omega = 10\ MHZ$

$\delta = 7\Delta$

اثر A و B را بررسی کنید.

$\sin(2\pi\omega t)$ یا $\sin(\omega t)$

ادامه جریان خزشی :

جریان خزشی در اطراف کره :

$\vec{\nabla P} = \mu \nabla^2 \vec{v}$

$\Rightarrow \nabla \times \vec{\nabla P} = \nabla \times (\mu \nabla^2 \vec{v})$

$\Rightarrow 0 = \mu \nabla^2 (\nabla \times \vec{v}) \Rightarrow \mu \nabla^2 \omega^{?} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \omega = 0}$

بردار Vorticity → ω

برای مسئله استوکس

$\nabla^2 \omega_\phi = 0 \qquad , \omega_\theta = 0 \ , \ \omega_r = 0$

$$\nabla^2 \omega_\phi = 0$$

$$\omega_\phi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \qquad (۱)$$

پیوستگی: $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) = 0 \qquad (۲)$$

در دو بعد و مختصات کارتزین داریم:

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \quad \longrightarrow u = \psi_y \quad v = -\psi_x \\ P_x = \mu(u_{xx} + u_{yy}) \\ P_y = \mu(v_{xx} + v_{yy}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0 \rightarrow \nabla^4 \psi = 0$$

$d\psi = 0 \longrightarrow \psi$ ثابت

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi = cte} = \frac{v}{u} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{خطوط جریان}} \Rightarrow$$ خطوط ψ را تابع جریان می‌نامیم.

$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$ ۳

ψ فوق معادله ② صفحه ۷۵ را ارضا می‌کند.

$$\omega_\phi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2\psi = 0 \Rightarrow \nabla^4\psi = 0$$

$\Rightarrow \psi(r,\theta)$ ✓

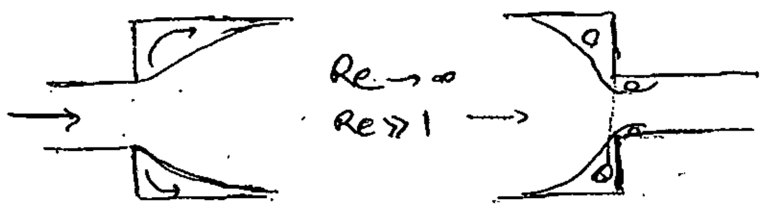
زیباست چون خطی است.

$\nabla^2\psi = 0 \to$ دو بعدی $\to$ $\nabla^2\phi = 0 \to$ جریان پتانسیل

استوانه: $\phi(r,\theta) = U_\infty r\cos\theta\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)$

یکنواخت   دابلت

$$\psi(r,\theta) = U_\infty r\sin\theta\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)$$



Expantion

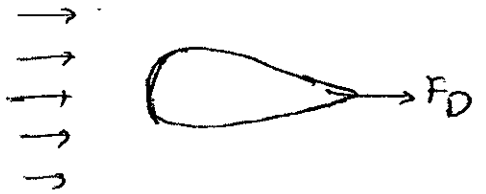
$$\vec{\nabla} P = \mu \nabla^2 \vec{V}$$

$$\nabla \cdot \vec{\nabla} P = \mu \nabla \cdot (\nabla^2 \vec{V})$$

$$\Rightarrow \nabla^2 P = \mu \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{V}) \Rightarrow \underline{\nabla^2 P = 0}$$

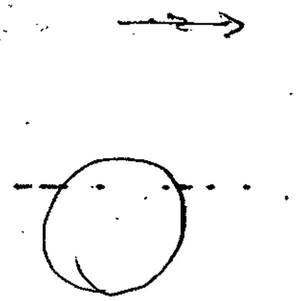
پس در جریان خزشی میدان فشار نیز خطی است.

جریان خزشی راحت تر است یا جریان پتانسیل؟



$Re \gg 1 \longrightarrow$

جریان F_D در کدام حالت بیشتر است؟ چرا؟



$\psi(r,\theta)$

$r \to \infty \Rightarrow \psi_\infty = \frac{1}{2} V_\infty r^2 \sin^2\theta$

$V_r = V_\infty \cos\theta$

$V_\theta = V_\infty \sin\theta$

$\nabla^4 \psi = 0$

$r = R \to \psi = 0$

$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2\psi=0$$

$$\Rightarrow [E^2]^2\psi=0 \Rightarrow E^2(E^2\psi)=0$$

$$\psi(\infty,\theta)=\tfrac{1}{2}U_\infty r^2\sin^2\theta$$

$$\psi(R,\theta)=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}(R,\theta)=0 \quad V_\theta=0 \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\theta}(R,\theta)=0 \rightarrow V_r=0$$

$\psi(r)=f(r)\sin^2\theta$ با توجه به شرط مرزی در $r=\infty$

$$E^2\psi=E^2(f(r)\sin^2\theta)=\sin^2\theta\underbrace{\left(f''-\frac{2f}{r^2}\right)}_{g(r)}$$

$$E^2(E^2\psi)=\sin^2\theta\left(g''-\frac{2g}{r^2}\right)$$

$$=\sin^2\theta\left(f''''-4\frac{f''}{r^2}+8\frac{f'}{r^3}-\frac{8f}{r^4}\right)=0$$

$$\Rightarrow f''''-4\frac{f''}{r^2}+8\frac{f'}{r^3}-\frac{8f}{r^4}=0 \quad \ldots$$

$$f=r^n$$

$$f(r)=\frac{A}{r}+Br+Cr^2+Dr^4$$

$$\Rightarrow f(r)=U_\infty r^2\left[\frac{1}{2}-\frac{3R}{4r}+\frac{R^3}{4r^3}\right]$$

$$\psi(r,\theta) = U_\infty r^2 \sin^2\theta \left[\frac{1}{2} - \frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3}\right]$$

جریان حول استوانه :

$E^2(E^2\psi)=0 \rightarrow$ byharmonic

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

کتاب: papanastasiou

$\hookrightarrow$ CH4 → نوشته ~~...~~ ← E^2 را برای حالت‌های مختلف

شرایط مرزی: $\psi(\infty) = U_\infty r\sin\theta \rightarrow \begin{cases} v_r = U_\infty\cos\theta \\ v_\theta = -U_\infty\sin\theta \end{cases}$

$\psi(r=R)=0$

$\frac{\partial\psi}{\partial r}(r=R)=0$

$\psi(r,\theta)=f(r)\sin\theta$

$E^2(E^2\psi)=0$

$$\Rightarrow f(r) = \underset{=0}{A} r^3 + \underset{=0}{B} r \ln r + \underset{U_\infty}{C} r + D/r$$

$$\Rightarrow f(r) = U_\infty r + D/r$$

$$V_r = \frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad \Rightarrow \qquad \psi(r,\theta)\big|_{r=R} = 0 \longrightarrow D \neq D \quad \text{تناقض}$$

$$V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial r}(r,\theta)\big|_{r=R} = 0 \longrightarrow$$

$$D = -U_\infty R^2$$
$$D = +U_\infty R^2$$
$\longrightarrow$ Stokes paradox

- نزدیک دیواره ترم اینرسی << ترم لزجت
- در دوردست ← ترم اینرسی و ترم لزجت هم ارز هستند.

$$\psi(r,\theta) = \psi_0 + \underset{\epsilon}{Re}\,\psi_1 + Re^2 \psi_2 + \cdots$$

البته همین تناقض باید در حل کره نیز اتفاق می افتاد اما به طور کاملاً تصادفی چنین نشد. چون معادلات Stokes دارای Singularity در بی نهایت هستند.

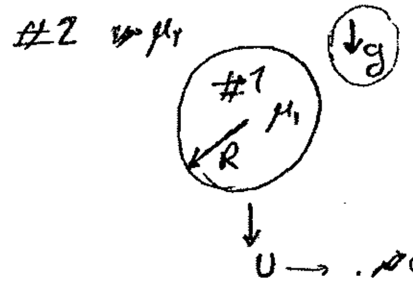
در نزدیکی دیواره ترم اینرسی کم و ترم لزجت زیاد است اما در بی نهایت دو ترم لزجت و اینرسی هم ارز هستند. یعنی در بی نهایت باید از معادلات N-S استفاده شود.

HW # 8.2.

یکشنبه ۲۹/۱/۱۳۸۹ :

جریان خزشی در اطراف یک قطره ← مسئله ۸.۳

■ جریان خزشی در اطراف یک قطره :



$\lambda = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}$

U → سرعت حد.

• فرض ① قطره کروی است و کروی باقی می ماند.

$$Re_1 = \frac{RU}{\nu_1} \ll 1$$

$$Re_2 = \frac{RU}{\nu_2} \ll 1$$

فرض ②

$$\begin{cases} \vec{\nabla} P = \mu_i \nabla^2 V_i - \rho_i \vec{g} \\ \nabla \cdot V_i = 0 \end{cases} \qquad i = 1, 2$$

فرض ③ ← تقارن محوری را می پذیریم

$$\psi \Leftarrow \text{دو بعدی} \leftarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \phi} = 0 \\ V_\phi = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} V_r &\to q_r \\ V_\theta &\to q_\theta \end{aligned}\right\} \rightarrow$$ نگارش روسی و انگلیسی.

پس جریان دو بعدی است و می‌توان از ψ بهره برد.

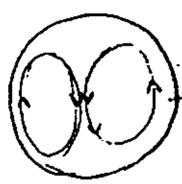
$$u_i = (V_r)_i = -\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi_i}{\partial\theta} \qquad i=1,2$$

$$v_i = (V_\theta)_i = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_i}{\partial r}$$

r mom: $$\frac{\partial P_i}{\partial r} = -\frac{\mu_i}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(E^2\psi_i) - \rho_i g\cos\theta$$

θ mom: $$\frac{1}{r}\frac{\partial P_i}{\partial\theta} = \frac{\mu_i}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(E^2\psi_i) + \rho_i g\sin\theta$$

$E^2 =$

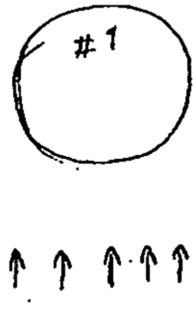


→ Circulation → چرا؟

☒ پدیده را از دید ناظری که روی قطره نشسته است دنبال می‌کنم. چرا؟

#2

O'Neal



$r\to\infty$; $|V_2| = U_\infty$

$r\to 0$; $|V_1|$ = Bounded

$r=R$; $(\tau_{r\theta})_1 = (\tau_{r\theta})_2$

$r=R$; $(\tau_{rr})_2 - (\tau_{rr})_1 = \frac{2\Gamma}{R}$ → کشش سطحی

$\sigma_{rr} = -P + \tau_{rr}$

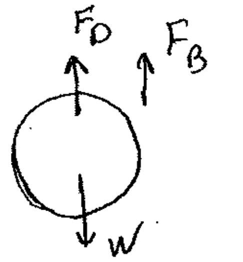
$r \to \infty ;\ |V_r| = U_\infty \longrightarrow \psi_2 \big|_{r=\infty} = \frac{1}{2} U_\infty r^2 \sin^2\theta$

$r = R ;\ \begin{cases} (V_r)_1 = (V_r)_2 = 0 \\ (V_\theta)_1 = (V_\theta)_2 \longrightarrow \text{شرط عدم لغزش} \end{cases}$

Tritton → کتاب کاملاً فیزیکی

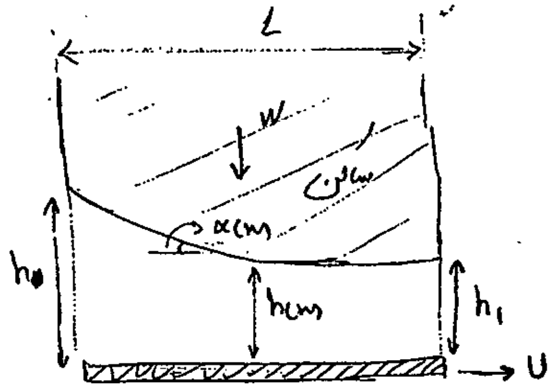
physical fluid dynamic.

$\lambda \to \infty \Rightarrow$ کره.



■ تقریب روغنکاری : Lubrication Approximation

• که برقرار

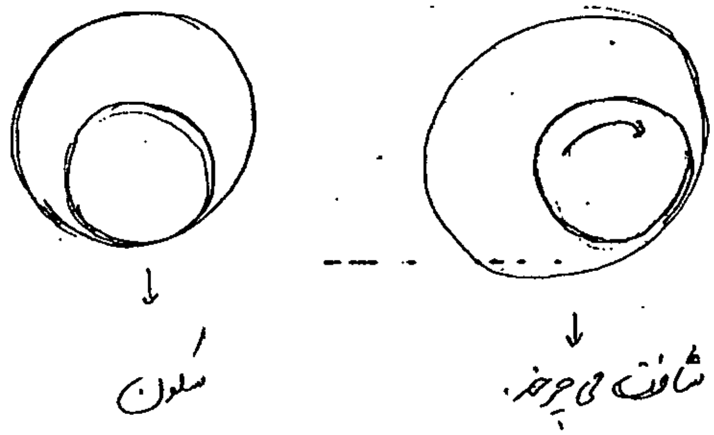


فرض ها → $h_0 \ll L$

$h_1 \ll L$

$\alpha \ll 1 \rightarrow \alpha < 5^\circ$

■ کاربرد → Journal Bearing



$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\[2ex] x \text{ mom: } u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\[2ex] y \text{ mom: } u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \end{cases}$$

ابتدا معادلات را بی بعد می کنیم:

$$x^* = \frac{x}{L}$$

$$y^* = \frac{y}{\alpha L} \longrightarrow \alpha = \alpha(x)$$

$$u^* = \frac{u}{U}$$

$$v^* = \frac{v}{\alpha U} \longrightarrow \text{پیوستگی} : \frac{U}{L} + \frac{\partial v}{\alpha L} = 0$$

$$P^* = \frac{P}{\mu\left(\frac{U}{\alpha^2 L}\right)} \longrightarrow$$ x mom با مراجعه به

$$x \text{ mom: } \rho\left(\frac{U}{L^2} + \frac{U}{L^2}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{U}{L^2} + \frac{U}{\alpha^2 L^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{P}{L} \sim \frac{\mu U}{\alpha^2 L^2}$$

x mom: $\alpha Re \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \right) + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$

y mom: $\alpha^3 Re \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \alpha^4 \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} \right) + \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$

$\alpha \ll 1 \Rightarrow$ x mom: $-\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \simeq 0$

y mom: $-\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow P = P(x)$

پس فشار فقط تابعی از x است:

پیوستگی: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$$\begin{cases} -\frac{dP}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

شرایط مرزی:

$y = 0 \rightarrow u = U$

$y = h \rightarrow u = 0$

$\Rightarrow u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (yh - y^2) + U \left(1 - \frac{y}{h}\right)$

$h = h(x)$

$$Q = \int u\,dA = -\frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}\frac{h^3}{6} + \frac{hU}{2} \qquad (1)$$

$$\boxed{\frac{dQ}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left(h^3\frac{dP}{dx}\right) = 6U\frac{dh}{dx}} \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{dP}{dx} = \frac{6\mu U}{h^2} - \frac{12\mu Q}{h^3} \longrightarrow$$ انتگرال گیری

$$\Rightarrow P(x) = P_0 + 6\mu U\int_0^x \frac{dx}{h^2} - 12\mu Q\int_0^x \frac{dx}{h^3}$$

$$P_0 = P\Big|_{x=0}$$

$$@\ x = L \rightarrow P = P_L$$

$$P(L) = P_0 + 6\mu U\int_0^L \frac{dx}{h^2} - 12\mu Q\int_0^L \frac{dx}{h^3}$$

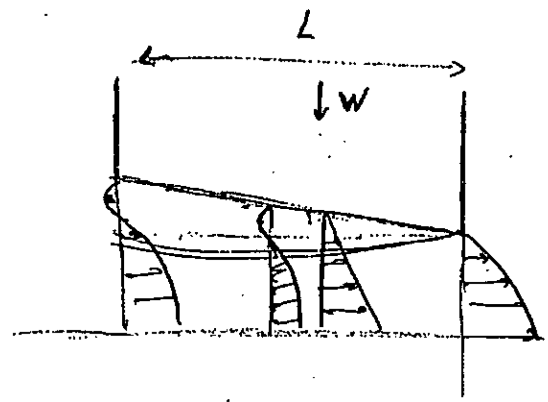
$$\Rightarrow Q\ \checkmark$$

اگر $P_L = P_0$ باشد $\Leftarrow$

$$Q = \frac{U}{2}\,\frac{\int_0^L dx/h^2}{\int_0^L dx/h^3}$$

حالت خاص : $h(x) = h_0 - \alpha x$

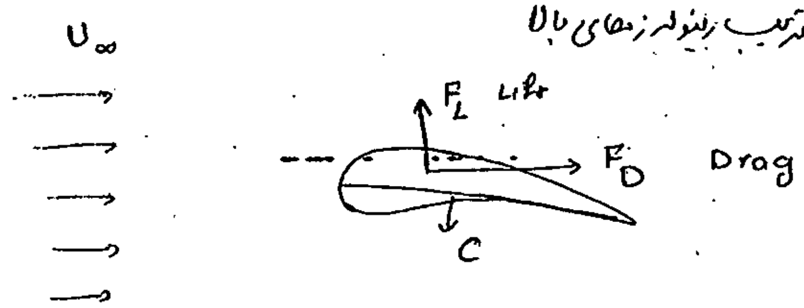
Sliping Pad Bearing :



HW ← ① میدان فشار ② انتگرال فشار ← ۶ صفحه

فصل ۹ : تقریب لایه های مرزی ≡ تقریب پرانتل.

≡ تقریب رینولدزهای بالا



نیروی درگ ← ناشی از تنش های برشی روی سطح ایرفویل

و ناشی از گرادیان فشار.

$$F_D = (F_D)_\tau + (F_D)_p$$

$$F_L = (F_L)_\tau + (F_L)_p$$

پس باید میدان فشار و میدان تنش را بدست آوریم ← N-S Eq

↳ ناشی از میدان سرعت.

فرضیات : ★ دو بعدی

★ سیال غیرقابل تراکم ← اگر $M < 0.3$ می توان از اثرات تراکم پذیری صرف نظر کرد.

اگر از μ هوا صرف نظر کنیم ← معادلات اویلر:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \cancel{\mu \nabla^2 \vec{V}}$$

$\Rightarrow \begin{matrix} u, v \\ P \end{matrix} \Rightarrow F_L \neq 0 \rightarrow$ به واقعیت نزدیک است

$F_D = 0$ --- تا زمانی که جدایش اتفاق ~~نیفتاده~~ نیفتاده باشد.

↳ پارادوکس دالامبر

چون در نیروی F_L ، میدان فشار تاثیر گذاری بیشتری دارد

در نیروی F_D ، تنش برشی تاثیر گذارتر است

$\mu=0$ ← جریان غیرچرخشی ← جریان پتانسیل

$\vec{V} = \nabla \Phi$

$\nabla \cdot \vec{V} = 0$

برنولی

$\nabla^2 \varphi = 0 \Rightarrow \varphi \checkmark \Rightarrow u, v \checkmark \Rightarrow |\vec{V}| \checkmark \Rightarrow P$ میدان فشار.

$$\text{x mom: } \overbrace{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}}^{U_\infty^2/L} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Big(\overbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{U_\infty/L^2} + \overbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}^{U_\infty/\delta^2}\Big)$$

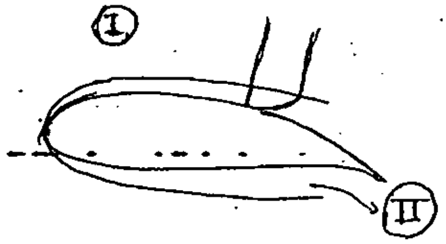
$$\text{y mom: } \cancel{u\frac{\partial v}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Big(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{U_\infty\delta/L^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{U_\infty/\delta L}\Big)$$

$$\text{continuity: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

شرط مرزی ← $y=0 \rightarrow u=0 \;,\; v=0$

$y \rightarrow \infty \;;\; u \rightarrow U_\infty$

تقریب پرانتل :



ضخامت δ

فرض اساسی ← δ (نسبت به طول مشخصه ای) بسیار کوچک است.

ترم های اینرسی را با هم و ترم های لزجت را با هم مقایسه می کنیم.

$x \sim L \qquad u \sim U_\infty$

$y \sim \delta \qquad v \sim ?$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{U_\infty}{L} + \frac{v}{\delta} = 0 \Rightarrow v \sim U_\infty \frac{\delta}{L}$$

$P \sim \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \rightarrow ? \rightarrow$ برنولی

$*$ $\Rightarrow$ y mom: فعلاً ؟ $\rightarrow$ کلاً از بین رفت

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow P \neq P(y)$$

$$x \text{ mom}: \; u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

معادلات $\rightarrow$ دو تا $\leftarrow$ x mom و پیوستگی

مجهولات $\rightarrow$ دو تا $\rightarrow$ u و v

فرض بر این است که قبلاً از حل معادلات اولر یا لاپلاس P بدست آمده است.

$\leftarrow$ حل $\rightarrow$ توسط بلازیوس Blasius.

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \rightarrow$$ معادلات بلازیوس

$$x^* = x/L \qquad u^* = \frac{u}{U_\infty} \qquad P^* = \frac{P}{\rho U_\infty^2}$$

$$y^* = y/\delta \qquad v^* = \frac{v}{\frac{\delta U_\infty}{L}}$$

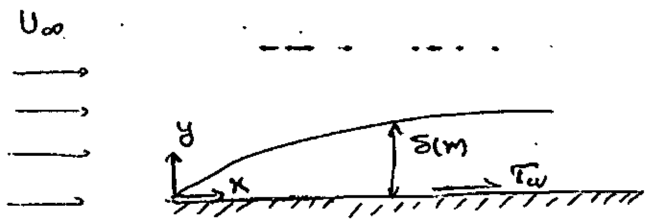
$$x: \quad u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$y: \quad \frac{1}{Re}\left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re^2}\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}$$

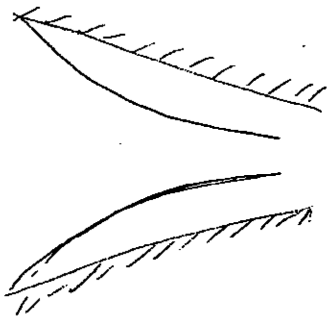
اگر $Re \rightarrow \infty$

δ بسیار کوچک $\equiv Re \rightarrow \infty$

مسئله صفحه تخت:



$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP_\infty}{dx} = 0$$



$$\frac{dP}{dx} \neq 0$$

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$y = 0 \rightarrow u = v = 0$$

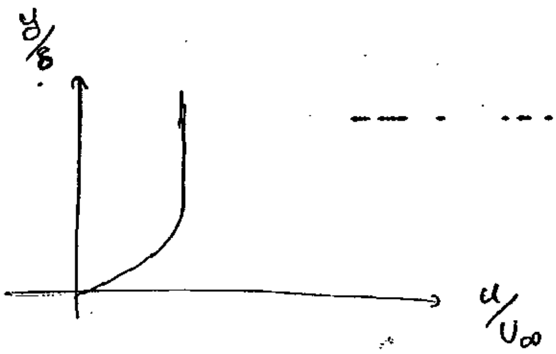
$$y = \infty \rightarrow u = U_\infty$$

ایده بلازیوس :

$$\frac{u}{U_\infty} = g\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) \rightarrow$$ تشابه

تساوی فوق به این معنی است که پروفیل های سرعت با هم متشابهند

که به حل تشابهی



$$\frac{u}{U_\infty} = f'\left(\frac{y}{\delta}\right)$$ چرا؟ $\leftarrow f' \leftarrow g$

$$\eta = \frac{y}{\delta} \Rightarrow u = U_\infty f'(\eta)$$

پیوستگی : $v =$

$$x \text{ mom} \rightarrow \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \rho U_\infty \frac{U_\infty}{x} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta^2}$$

$$\Rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

$$\Delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \Rightarrow \delta \sim \Delta(x)$$

$$\frac{u}{U_\infty} = f'\left(\underbrace{\frac{y}{\Delta}}_{\eta}\right)$$ ← کاردوباره

$$v = \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{4x}} (\eta f' - f)$$

$$x\text{.mom: } f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

$$f(0) = f'(0) = 0$$

$$f'(\infty) = 1$$

$u(x,y) = u_\infty f'(\eta)$

$V(x,y) = \sqrt{\frac{\nu u_\infty}{4x}}(\eta f' - f)$ ← مهم

$\xrightarrow{N-S} \boxed{f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0}$ $\quad f(0) = f'(0) = 0$, $f'(\infty) = 1.0$ B.C.

$\boxed{89.2.5}$

حل معادله بلازیوس با کمک سری ها :

$f(\eta) = A_0 + A_1\eta + \frac{A_2}{2!}\eta^2 + \cdots$

$f'(\eta) = A_1 + A_2\eta + A_3/_{2!}\,\eta^2 + \cdots$

$f''(\eta) = A_2 + A_3\eta + A_4/_{2!}\,\eta^2 + \cdots$

$f(0) = 0 \longrightarrow A_0 = 0 \qquad f'(0) = 0 \longrightarrow A_1 = 0$

$f''' + \frac{ff''}{2} = 0 \Rightarrow f'''(0) = 0 \longrightarrow A_3 = 0$

$2\left[A_4\eta + \frac{A_5}{2!}\eta^2 + \frac{A_6}{3!}\eta^3 + \cdots\right] + \left[\frac{A_2}{2!}\eta^2 + \frac{A_4}{4!}\eta^4 - \right]\left[A_2 + \frac{A_4}{2!}\eta^2 - -\right] = 0$

$A_4 = 0 \quad , \quad 2A_5/_{2!} + A_2^2/_{2!} = 0 \quad , \quad 2A_6/_{3!} = 0$

$2A_7/_{4!} + \frac{A_2A_4}{4!} + \frac{A_2A_4}{2!\,2!} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_4 = 0,\; A_6 = 0,\; A_7 = 0$

$2A_8/_{8!} + A_2A_5/_{5!} + A_2A_5/_{2!\,3!} = 0$

$A_8 = \frac{11}{4}A_2^3 \quad , \quad A_5 = -A_2^2/_2$

$\Rightarrow f(\eta) = \frac{A_2}{2!}\eta^2 - \frac{1}{2}\frac{A_2^2}{5!}\eta^5 + \frac{1}{4}\frac{11A_2^3}{8!}\eta^8 - \frac{1}{8}\frac{375}{11!}A_2^4\eta^{11}$

$f'(\eta)_{\eta\to\infty} \simeq 1.0 \qquad \eta \simeq 5. \qquad \underline{A_2 = 0.33206}$

$$f(\eta) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\tfrac{1}{2}\right) \frac{\alpha^{n+1} C_n}{(3n+2)!} \eta^{3n+2} \qquad \alpha = 0.33206 = A_2$$

$C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 11$, $C_3 = 375$, $C_4 = 27,897$

$C_5 = 3,717,137$

$$\tau_w = \tau_w(x) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \boxed{\mu \sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu x}}\, f''(0)}$$

$$\boxed{C_f = \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \;;\; Re_x = \frac{u_\infty \cdot x}{\nu}}$$

البته در ابتدای لبه τ خیلی جواب نمی‌دهد چون δ و x در آن تحت هم‌مرتبه هستند، بنابراین:

$\left(\delta/x \le 0.1\right) \Rightarrow$ شرط صحت فرمول

ما راه verify نمودن τ_w :

$$F_D = \int_0^L \tau_w \, dA \Rightarrow F_D \checkmark \Rightarrow C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 A} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_{\infty L/\nu}}}$$

$$\Rightarrow C_D = \frac{1.328}{\sqrt{Re_x}} \Rightarrow \boxed{F_D = 1.328\left(\frac{1}{2}\rho u_\infty^2\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{u_\infty L}{\nu}}}} \quad \pm 1\%$$ خطا

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

@ $y = 0$, $u = 0$, $v = 0$

@ $y = \infty$, $u \to u_\infty$

در مسئله استوکس داریم + در این معادله x هم کشش $\Leftarrow$ @ $x = 0$, $u = u_\infty$

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x / u_\infty}} \qquad \boxed{\begin{matrix} y = \infty \\ x = 0 \end{matrix}} \rightarrow \boxed{\eta = \infty}$$

بنابراین حل تشابهی دارد

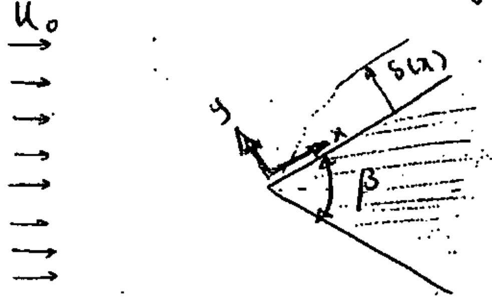
$\eta = A\left(y / x^n\right)$ داده‌ها هم در یک خط با هم collapse می‌شوند!   ترسیب currie:

$\frac{u}{u_\infty} = f'(\eta) \qquad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$v \rightarrow$ از معادله پیوستگی $\Rightarrow (\text{--} F(x) \text{--}) f''' + (\cdot\text{--}) \frac{1}{2} f f'' = 0$

if $n = \frac{1}{2} \Rightarrow$ مستقل از x می‌شود $; A = \sqrt{\nu / u_\infty}$

Falkner_Skan : جریان گوه (wedge Flow)



$\partial P / \partial x \neq 0 \qquad \tau_w(x) = ?$

$\mu = 0 \rightarrow$ جریان غیرچرخشی $\Rightarrow \nabla^2 \phi = 0$

$\Rightarrow U_\infty(x) = C x^m \quad , \quad m = \frac{\beta/\pi}{2 - \beta/\pi} \quad ?$

پارامتری بستگی به U_0 دارد

if $\beta = 0 \rightarrow C = U_0$

$P_\infty(x) + \frac{1}{2} \rho u_\infty^2(x) = \text{Const.}$

$\frac{dP_\infty}{dx} = - \frac{\rho u_\infty^2(x) \cdot m}{x}$

$$\boxed{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{m\, U_\infty^2(x)}{x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad \text{O.D.E.}$$

$\eta = y / \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \Rightarrow \frac{u}{u_\infty} = f'(\eta)$

$$f''' + \left(\frac{m+1}{2}\right) f f'' + m\left[1 - f'^2\right] = 0$$

$f(0) = f'(0) = 0 , \quad f'(\infty) = 1$

$\frac{u(x,y)}{u_\infty} = f'\left(y/\xi\right) \rightarrow \eta = y/\xi$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \underbrace{u_\infty \frac{du_\infty}{dx}}_{-\frac{1}{\rho}\frac{dP_\infty}{dx}} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rightarrow f''' + \Big[\underbrace{\frac{\xi}{\nu}\frac{d}{dx}(u_\infty \xi)}_{\alpha}\Big] f f'' + \Big[\underbrace{\frac{\xi^2}{\nu}\frac{du_\infty}{dx}}_{\beta}\Big](1 - f'^2) \equiv 0$$

$u_\infty, \xi = \varphi(x)$?

$$f''' + \alpha f f'' + \beta\left[1 - f'^2\right] = 0$$

مراحل :

1) α , β انتخاب می‌شود.

2) از معادلات I , II $\Leftarrow$ $\xi(x)$, $u_\infty(x)$

3) از $u_\infty(x)$ هندسه مسئله درست میشود.

4) از $\xi(x) \leftarrow f \leftarrow \tau_w(x)$

$$\begin{cases} \dfrac{\xi}{\nu}\dfrac{d}{dx}(u_\infty \xi) = \alpha \quad (\mathrm{I}) \\[2ex] \dfrac{\xi^2}{\nu}\dfrac{du_\infty}{dx} = \beta \quad (\mathrm{II}) \end{cases}$$

(جریان $u_\infty = Cx^m$ "گوه‌ای" wedge Flow)

$$\alpha = \frac{1}{2}\ ;\ \beta = 0 \Rightarrow \frac{du_\infty}{dx} = 0 \rightarrow u_\infty = \text{Cst.} = C$$

$$\Rightarrow \frac{\xi}{\nu}\frac{d}{dx}(\underset{C}{u_\infty}\xi) = \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{\nu x}{C}} \Rightarrow \text{Flat Plate}$$

$$\alpha = \beta = 1 \Rightarrow u_\infty = Cx \rightarrow f''' + ff'' + 1 - f'^2 = 0$$

$$\xi = \sqrt{\nu / C}$$

جریان hiemenz

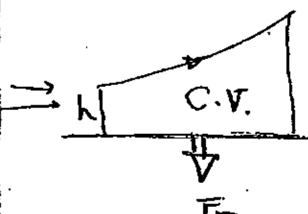
هر α و β جریان قابل قبول از منظر فیزیکی نخواهد شد u از u_∞ در لایه مرزی جلو نزند!

$\boxed{89.2.7}$

$$\text{PDE} \xrightarrow{\text{حل دقیق}} \text{ODE}$$

■ روش فون ـ کارمن

* معادله انتگرال مستقیم



$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{Flat-Plate}$$

$\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}} \rightarrow 0$

$$\partial u/\partial x + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u^2) - u\frac{\partial u}{\partial x} - \partial v/\partial y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \underbrace{u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\partial/\partial y(uv)} = \nu\, \partial^2 u/\partial y^2$$

$$\Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y}(uv)\,dy = \nu \int_0^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy$$

$$\Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy + [uv]_0^\delta = \nu \ldots = -\tau_w/\rho$$

$$\Rightarrow \quad '' \quad + u_\infty v(x,\delta) = -\tau_w/\rho$$

پیوستگی: $\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = 0 \qquad v(x,\delta)$

$$v(x,\delta) = -\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

$$\Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy - u_\infty \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = -\tau_w/\rho$$

Leibnitz: $\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy + f(x,\beta)\frac{d\beta}{dx} - f(x,\alpha)\frac{d\alpha}{dx}$; $\quad \underline{\delta = \delta(x)}$

$$\Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2\,dy - u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u)\,dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u\,dy - u_\infty \frac{d\delta}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u(u_\infty - u)\,dy = \tau_w/\rho \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}\underbrace{\int_0^{\delta(x)} \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right)dy}_{\theta} = \tau_w/\rho u_\infty^2$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} = \tau_w/\rho u_\infty^2}$$

مجهول: $u(x,y),\ \delta(x),\ \tau_w$

شکل پروفیل سرعت در معادله فون-کارمن حدس زده می‌شود.

در حالت اول: چندجمله‌ای - سینوسی یا کسینوسی انتخاب می‌شود

" دوم: چندجمله‌ای توانی

$$\frac{u}{u_\infty} = g(y/\delta) = a_0 + a_1 (y/\delta) + a_2 (y/\delta)^2$$

$\#1:\ @\ y=0 \quad : u=0$

$\#2:\ @\ y=\delta \quad : u=u_\infty$

$\#3:\ @\ y=\delta \quad : \partial u/\partial y = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u}{u_\infty} = 2(y/\delta) - (y/\delta)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\delta u(u_\infty - u)\,dy = u_\infty^2 \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty}\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)dy = \frac{2}{15}\,\delta u_\infty^2$$

(momentum integral = MI)

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 2\mu \frac{u_\infty}{\delta}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{15}\delta u_\infty^2\right) = \frac{2\nu u_\infty}{\delta}$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}} \Leftarrow \delta(x) = \sqrt{30}\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \Leftarrow$$ exact حل دارد ↓

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = \frac{0.730}{\sqrt{Re_x}} \qquad \left(\text{Blasius}: \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2u_\infty}{\delta^2} \neq 0\right)?$$

به همین خاطر سراغ درجه 3 و 4 می‌رویم.

$$\frac{u}{u_\infty} = \sum_{i=0}^{4} a_i (y/\delta)^i$$

$\#4:\ y=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\#4:\ y=\delta \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\#5:\ y=\delta : \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$

شرایط 1ـ3 : شرایط فیزیکی هستند

شرط‌های ریاضی :

شکل با گرادیان فشار ;

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_\infty \frac{du_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0 \end{cases}$$

$$I = \int_0^\delta \underbrace{u_\infty \frac{du_\infty}{dx}}\, dy = ?$$

$$I = \frac{du_\infty}{dx}\int_0^\delta u_\infty\, dy$$

عملاً هم u_∞ و هم $\frac{du_\infty}{dx}$ مستقل از y هستند و می‌توان بیرون آورد

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u(u_\infty - u)\,dy + \frac{du_\infty}{dx}\int_0^{\delta}(u_\infty - u)\,dy = \tau_w/\rho$$

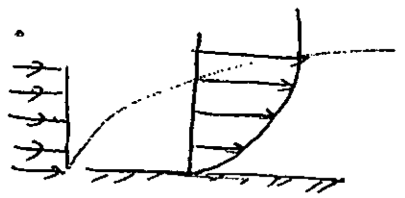
$$\frac{d}{dx}\underbrace{\int \frac{u}{u_\infty}\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)dy}_{\theta} + \frac{du_\infty}{dx}\frac{1}{u_\infty}\underbrace{\int_0^{\delta}\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)dy}_{\delta^*} = \tau_w/\rho u_\infty^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dx} + (2\theta+\delta^*)\frac{1}{u_\infty}\frac{du_\infty}{dx} = \tau_w/\rho u_\infty^2} \quad \text{M.I.}$$

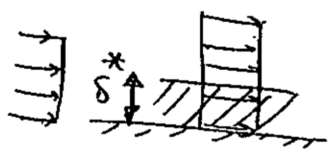
$$\frac{d}{dx}\left[u_\infty^2\int_0^{\delta}\frac{u}{u_\infty}\left(1-u/u_\infty\right)dy\right] + \frac{du_\infty}{dx}u_\infty\int_0^{\delta}\left(1-u/u_\infty\right)dy = \tau_w/\rho$$

$$\frac{d}{dx}(u_\infty^2\theta) + \frac{du_\infty}{dx}(u_\infty\delta^*) = \tau_w/\rho$$

مفهوم θ, δ^* :



$$\dot m = \int_0^{\delta}\rho u\,dy \cdot B \longrightarrow u_y$$



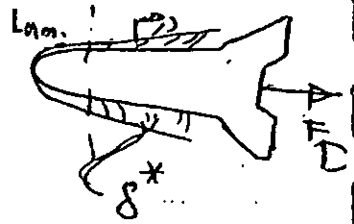
تعریف

$$\dot m = \int\rho u_\infty\,dy - \rho u_\infty\delta^* = \int\rho u\,dy$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta^* = \int_0^{\infty}\left(1-u/u_\infty\right)dy}$$

δ^* به خاطر خاصیت انتگرالی، خطای کمتری در محاسبات لبه δ دارد!

$$F_D = (F_D)_p + (F_D)_\tau$$



#1) جریان پتانسیل حل می‌شود

#2) با داشتن فشار از مرحله ۱ معادلات لایه مرزی حل می‌شوند تا δ^* پیدا شود.

#3) حل پتانسیل مجدداً انجام می‌شود

#4) سرعت حل می‌شود $\Rightarrow$ new δ^* $\Rightarrow$ $\left|\delta^*_{i+1}-\delta^*_i\right| \le 10^{-6}$

$\Rightarrow \tau_w$ ✓

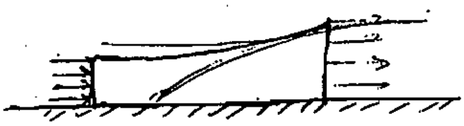
قانون کلی: $\delta > \delta^* \geq \theta$

بلازیوس $\delta^* = \frac{1.72}{\sqrt{Re_x}}$

سه‌شنبه ۱۳۸۹/۲/۷

■ روش فون کارمن :

معادله انتگرال - مومنتوم



x mom: $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

از این روش برای مسائلی که $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$ نیز می‌توان استفاده کرد.

Continuity: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u^2) - u\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{= -\partial v/\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \underbrace{u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y}(uv)} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

همان فرم بقای معادلات است
معادلات mom

از دو طرف تساوی فوق $\int_0^\delta dy$ می‌گیریم:

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy + [uv]_0^\delta = -\frac{\tau_w}{\rho}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy + U_\infty v(x,\delta) = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (1)$$

Continuity: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + \int_0^{\delta} \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + v(x,\delta) = 0$$

$$\Rightarrow v(x,\delta) = -\int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x}\,dy \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy - U_\infty \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (3)$$

Leibnitz: $\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy =$

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy + \overset{f(x,\beta)}{f}\,\frac{\partial \beta}{\partial x} - \overset{f(x,\alpha)}{f}\,\frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (4)$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2\,dy - U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \quad (5)$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} u\,dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u\,dy - U_\infty \frac{d\delta}{dx} \quad (6)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u\,(U_\infty - u)\,dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

$$\left.\Rightarrow \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} \frac{u}{U_\infty}\left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2}\right\} (7) \rightarrow M.I.$$

در روش فون کارمن پروفیل سرعت حدس (انتخاب) زده می‌شود.

در جریان آرام ← از چند جمله‌ای و نیز sin و cos است.

در جریان مغشوش ← از پروفیل‌های نمایی استفاده می‌شود.

$$\frac{u}{U_\infty} = a_0 + a_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

شرط مرزی $\rightarrow$

$$y=0 \rightarrow u=0$$

$$y=\delta \rightarrow u=U_\infty \qquad \Rightarrow \frac{u}{U_\infty} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

$$y=\delta \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\int_0^{\delta} u\,(U_\infty - u)\,dy = U_\infty^2 \int_0^{\delta} \frac{u}{U_\infty}\left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy = \frac{2}{15}\,\delta\, U_\infty^2$$

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 2\mu \frac{U_\infty}{\delta}$$

$$(7) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{15}\,\delta\, U_\infty^2\right) = \frac{2\nu U_\infty}{\delta} \Rightarrow \delta(x) = \sqrt{30}\,\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}}$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{0.730}{\sqrt{Re_x}} \rightarrow$$ درجه دو فون کارمن

$$\frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \rightarrow$$ دقیق، بلازیوس.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2U_\infty}{\delta^2} \neq 0 \leftarrow$$ ● پروفیل درجه ۲

□ درجه ۳

u

شرط مرزی بیشتر $\xrightarrow{\text{درجه ۳}}$ $y=0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \rightarrow$ چرا؟ → فیزیکی / ریاضی

درجه چهار $\quad y=\delta \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

درجه ۵ $\quad y=\delta \rightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$

$\vdots \quad y=\delta$

تا درجه ۳ ← شرط مرزی فیزیکی ...

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\int_0^\delta U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} dy = \frac{dU_\infty}{dx}\int_0^\delta U_\infty dy \longrightarrow ?$$ برای بهتر شدن فرم

جواب ← تقریب

$$x \text{ mom}: \frac{d}{dx}\int_0^\delta u(U_\infty - u)\,dy + \frac{dU_\infty}{dx}\int_0^\delta (U_\infty - u)\,dy = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(U^2\left[\underbrace{\int_0^\delta \frac{u}{U_\infty}\left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy}_{\theta}\right]\right) + \frac{1}{U_\infty}\frac{dU}{dx}\underbrace{\int_0^\delta \left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy}_{\delta^*} = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} \quad (2)$$

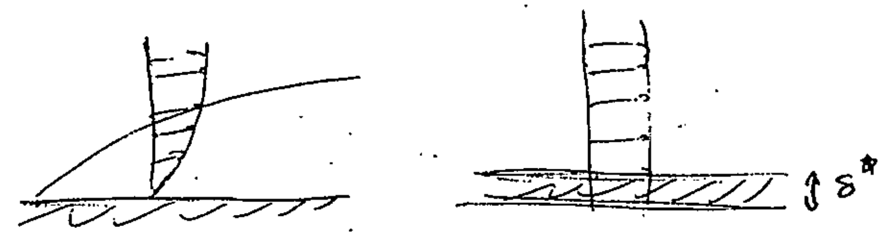
θ ضخامت ممنتوم

δ^* ضخامت جابجایی

$$\frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta^*)\frac{1}{U_\infty}\frac{dU_\infty}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{d}{dx}(U_\infty^2\,\theta) + \frac{dU_\infty}{dx}U_\infty \delta^* = \frac{\tau_w}{\rho}$$

چرا ضخامت جابجایی؟ چرا ضخامت ممنتوم؟

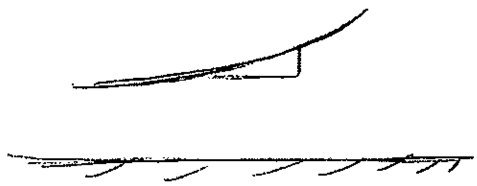


$$\dot{m} = \int_0^\infty \rho u\,dy = \int_0^\delta \rho U_\infty\,dy - \rho U_\infty \delta^*$$

$$\Rightarrow \delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

δ ← به خطای آزمایش بسیار حساس است

δ^* ← نه



تعبیر فیزیکی δ^*

← میزان تاب برداشتن خطوط جریان.

■ حل مسائل سه بعدی

۱) حل جریان پتانسیل ← میدان فشار

۲) با استفاده از میدان فشار مرحله ۱ ← معادلات لایه مرزی

حل می شوند تا δ^* محاسبه شود.

۳) ضخامت δ^* به شکل اضافه می شود ~~و~~ دوباره جریان پتانسیل حل می شود

۴) دوباره معادلات لایه مرزی حل می شوند تا δ^*_{new} بدست آید

$$\left| \delta^*_{i+1} - \delta^*_i \right| < 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \tau_w \checkmark$$

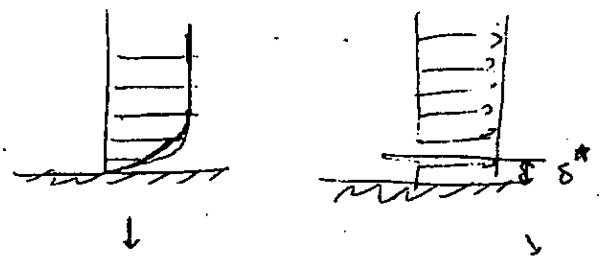
قاعده کلی $\rightarrow \delta > \delta^* > \theta$

بلازیوس $\rightarrow \delta^* = \frac{1}{3}\delta$

یکشنبه ۱۳۸۹/۲/۱۲

روش انتگرالی -karman- Pohlhousen برای محاسبه تنش برشی در جریان های با گرادیان فشار $\Leftarrow$ حل تحلیلی ندارد.

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$



$$\dot{m}_1 = \int_0^\infty \rho u^2 dy \qquad \dot{m}_2 = \int_0^\infty \rho U_\infty^2 dy - \rho U_\infty^2 \delta^*$$

$$\dot{m}_2 - \dot{m}_1 = \int_0^\infty \rho U_\infty^2 dy - \rho U_\infty^2 \delta^* - \int_0^\infty \rho u^2 dy = \rho U_\infty^2 \theta$$

$$U_\infty^2 \delta^* = \int_0^\infty (U_\infty^2 - u U_\infty) dy$$

$$\Rightarrow \theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \longrightarrow$$ ضخامت مومنتم

$$\rho U_\infty^2 \theta = \int \rho u\, dy\, (U_\infty - u)$$

$$\Rightarrow \theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

$$\frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta^*)\frac{1}{U_\infty}\frac{dU_\infty}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2}$$

پروفیل درجه ۴ فرض می‌کنیم:

$$u^* = \frac{u}{U_\infty} = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\eta^4$$

$$y^* = \eta = y/\delta$$

$$y = 0 \rightarrow u = 0$$

$$y = \delta \rightarrow u = U_\infty$$

$$y = \delta \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cancel{0} - \frac{U_\infty}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx}$$

$$y = \delta \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \cdots$$

پارامتر فشار $\Lambda(x)$

$$\eta = 0 \;;\; \frac{u}{U_\infty} = 0 \;;\; \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(\frac{u}{U_\infty}\right) = -\frac{\delta^2}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx}$$

$\eta=1 \quad \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{u}{U_\infty}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(\frac{u}{U_\infty}\right) = 0$

$\frac{u}{U_\infty} = 1$

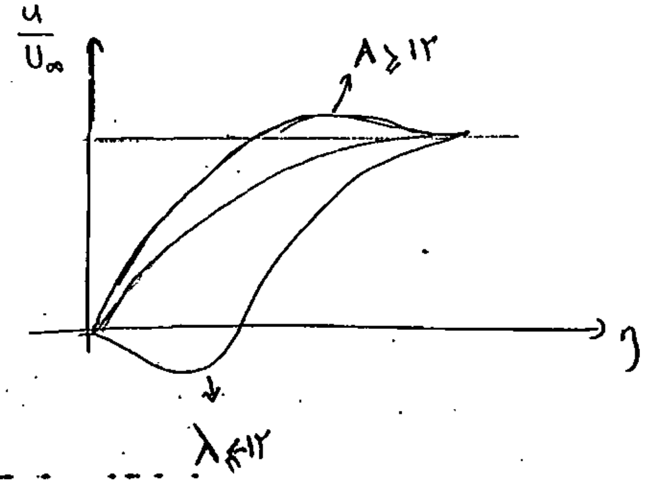
$\Rightarrow a = 0$

$b = 2 + \frac{\Lambda(x)}{6}$

$c = -\frac{\Lambda(x)}{2}$ ← تابعی از x هستند پس حل تشابهی نمی‌باشند ؟

$d = -2 + \frac{\Lambda(x)}{2}$

$e = 1 - \frac{\Lambda(x)}{6}$



پس فقط $-12 < \Lambda < 12$ قابل قبول است ← چرا ؟

لذا از $\Lambda = -12$ به عنوان معیار seperation یاد می‌شود.

امّا این معیار، معیار خوبی نیست.

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy = \delta\int_0^\infty (1-u^*)\,d\eta \longrightarrow \eta = \frac{y}{\delta}$$

$$\delta^* = \delta\left(\frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120}\right) \quad ①$$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty}\left(1-\frac{u}{U_\infty}\right) = \delta\left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072}\right) \quad ②$$

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \mu\frac{U_\infty}{\delta}\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right) \quad ③$$

$$\frac{d\theta}{dx} + (2\theta+\delta^*)\frac{1}{U_\infty}\frac{dU_\infty}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} \quad ④$$

①, ②, ③, ④ $\Rightarrow$ ODE برحسب δ $\Rightarrow \begin{cases}\Lambda \\ U_\infty \\ \frac{dU_\infty}{dx}\end{cases}$ $\frac{d^2U_\infty}{dx^2}$

اگر U_∞ را عددی به دست آوریم آنگاه دقت $\frac{d^2U_\infty}{dx^2}$ پایین می‌آید و حل جالب نخواهد بود ?

■ حل Holstein-Bohlen

$Re_\theta = \frac{\theta U_\infty}{\nu}$ ---- θ ← ضخامت مومنتوم

$$④ \Rightarrow \frac{1}{2}U_\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{\theta^2}{\nu}\right) + \left(2+\frac{\delta^*}{\theta}\right)\underbrace{\frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx}}_{\lambda} = \frac{\tau_w\,\theta}{\mu U_\infty}$$

[illegible]

این دو پیشنهاد کردند که $\lambda = \frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx}$ پارامتر فشار باشد.

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx} = \cancel{\Lambda} = \frac{\theta^2}{\delta^2}\Lambda$$

$$= \left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072}\right)^2 \Lambda$$

$$\frac{\delta^*}{\lambda} = \frac{\left(\frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120}\right)}{\left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072}\right)} = f(\lambda)$$

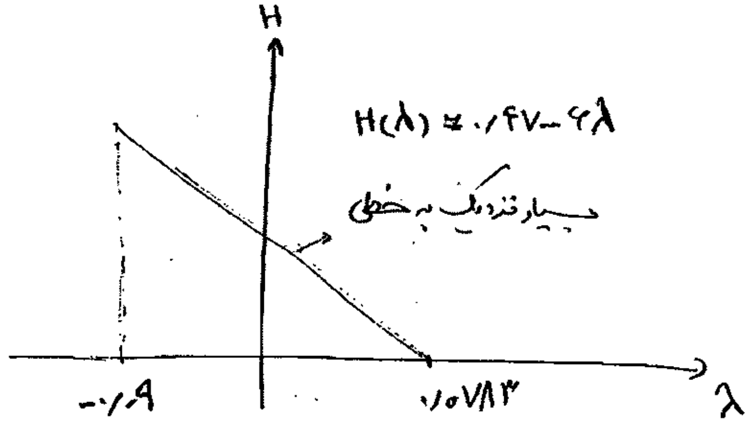
$$\frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} = \left(2 + \frac{\Lambda}{6}\right)\times\left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072}\right) = g(\lambda)$$

$$Ⓔ \Rightarrow U_\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{\theta^2}{\nu}\right) = 2\underbrace{\left\{g(\lambda) - [2 + f(\lambda)]\lambda\right\}}_{H(\lambda)}$$

$$\frac{\theta^2}{\nu} = Z$$

(1)

$$\left\{\begin{aligned} & Z\frac{dU_\infty}{dx} = \lambda \\ & U_\infty \frac{dZ}{dx} = H(\lambda) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta, \theta^*, \theta, \tau_w \ \checkmark\checkmark$$



● Walz

$\Lambda = -12 \Rightarrow \lambda = -0.1567$

seperation → $\lambda \simeq \cancel{m} -0.09$

از صفحه ۱۱ ، ① ⇐

$$\underbrace{\theta^2(x) = \frac{0.47\,\nu}{U_\infty(x)} \int_0^x U_\infty^5(\xi)\,d\xi}_{\text{منسوب به Walz}}$$

مراحل:

#1) حل پتانسیل ⇐ $U_\infty(x)$

#2) با استفاده از معادله Walz ⇐ $\theta(x)$

#3) λ از رابطه $\frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx}$ بدست می‌آید

$\#4)$ δ , δ^* $\Leftarrow$ پروفیل سرعت $\Leftarrow C_f \Leftarrow \tau_w$

جریان بلازیوس $\leftarrow U_\infty = Cte \Leftarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\theta(x)}{x} = \dfrac{5.84}{\sqrt{Re_x}} \\ C_f = \dfrac{0.686}{\sqrt{Re_x}} \end{cases}$$

در حل Walz حسب ورم: چرا؟ λ

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx} = \left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda}{9072}\right)^2 \Lambda$$

سه شنبه ۱۳۸۹/۲/۱۴

روش قدیم کارمن وقتی U_∞ عددی به دست می‌آید $\leftarrow$ $\frac{d^2U_\infty}{dx^2}$ دقت کمی دارد

$$\text{Bohlen + Holstein} \Rightarrow ODE \Rightarrow \theta\left(U_\infty , \frac{dU_\infty}{dx}\right)$$

Walz $\Rightarrow \theta($ انتگرال $) \rightarrow \tau_w$

ضعف $\leftarrow$ $\lambda = \lambda(\Lambda)$

■ روش Thwaites :

← فقط برای روش آرام کاربرد دارد

$$\frac{d\theta}{dx}+(2\theta+\delta^*)\frac{1}{U_\infty}\frac{dU_\infty}{dx}=\frac{\tau_w}{\rho U_\infty} \quad : U_\infty(x) \qquad ①$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx}+\left(2+\frac{\delta^*}{\theta}\right)\frac{\theta}{U_\infty}\frac{dU_\infty}{dx}=\frac{\tau_w}{\rho U_\infty} \qquad ②$$

$$\frac{\delta^*}{\theta}=H \longrightarrow \text{shape factor}$$

طرفین ② را در $\frac{U_\infty \theta}{\nu}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{U_\infty\theta}{\nu}\frac{d\theta}{dx}+(2+H)\underbrace{\left(\frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx}\right)}_{\lambda}=\frac{\tau_w\theta}{\mu U_\infty}=\cancel{T(\lambda)}=T(\lambda) \qquad ③$$

$$H=H(\lambda)$$

$$③ \Rightarrow U_\infty\frac{d}{dx}\left(\frac{\theta^2}{\nu}\right)=2\overbrace{\left\{T(\lambda)-(2+H(\lambda))\lambda\right\}}^{F(\lambda)}$$

• با فرض اینکه $F(\lambda)$ یک تابع Universal باشد

• و با استفاده از حل‌های Falkner–Skan

\+

استوانه

$\circ\ F(\lambda)=0.45-6\lambda \rightarrow$ تقریب تجربی

$$T(\lambda) = (\lambda + 0.082)^{0.62}$$

$$T(\lambda) = (\lambda + 0.09)^{0.62} \longrightarrow$$ بعدا ۰/۰۸۲ توسط دیگران اصلاح شد

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx}$$

$$\Rightarrow U_\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{\theta^2}{\nu}\right) + 6\left(\frac{\theta^2}{\nu}\right)\frac{dU_\infty}{dx} = 0.45$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\theta^2}{\nu}U_\infty^6\right) = 0.45\,U_\infty^5 \Rightarrow$$ انتگرال

$$\frac{\theta^2}{\nu}U_\infty^6\Big]_{x_0}^{x} = 0.45\int_{x_0}^{x} U_\infty^5(\xi)\,d\xi$$

if at $x = x_0$; $U_\infty = 0$ ← اگر جریان جوری که با نقطه سکون لایه مرزی آغاز می‌شود.

$$\Rightarrow \theta^2(x) = \frac{0.45\,\nu}{U_\infty^6}\int_{x_0}^{x} U_\infty^5(\xi)\,d\xi$$

$$\theta \rightarrow \lambda \rightarrow T \rightarrow \tau_w$$

سوال: آرام بودن جریان کی نقض شده است؟

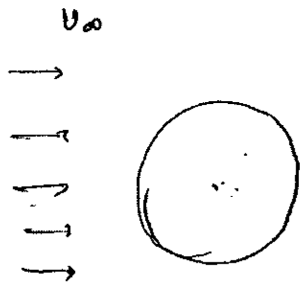
برای جریان بلازیوس:

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.671}{\sqrt{Re_x}}$$

که اختلاف کمی با حل بلازیوس دارد.

■ حل مسئله جریان سیال حول استوانه:

البته این کار خیلی درست نیست چون در بدست آوردن $F(\lambda)$ از خود این مسئله استفاده شده است.



$$\nabla^2 \phi(r,\theta) = 0 \Rightarrow \phi(r,\theta) = U_\infty r\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U_\infty\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$V_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\cdot\frac{1}{r} = -U_\infty\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

$$@\ r = a \Rightarrow V_r = 0$$

$$V_\theta = -2U_\infty \sin\theta$$

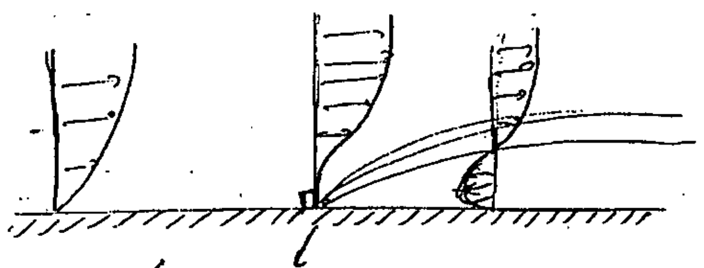
$* \ \beta = \pi - \theta$ تغییر متغیر

$$\theta^2(x) = \frac{0.45\nu}{U_\infty^6}\int_0^x U_\infty^5(\beta)\, d\xi \qquad d\xi = a\, d\beta$$

$$\theta(\beta) = \sqrt{\frac{0.45\nu a}{2U_\infty \sin^6\beta}\left\{-\cos\beta + \frac{2}{3}\cos^3\beta - \frac{\cos^5\beta}{5} + \frac{8}{15}\right\}}$$

آیا تئوری های لایه مرزی همیشه ~~همواره~~ می تواند مورد استفاده قرار بگیرد؟ یعنی آیا همیشه با دقت خوبی جواب می دهد؟

در بعضی مواقع جواب نمی دهد.



جریان برگشتی * Reverse flow

back flow

sep~~erat~~ed flow

$\lambda_{sep} \simeq -0.09$ ← معیار جدایی

آیا بعد از جدایش می‌توان از تئوری لایه مرزی استفاده کرد؟ چرا؟

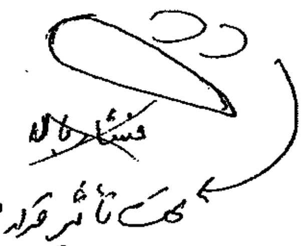
خیر ← δ بزرگ می‌شود ← $1 < \frac{\delta}{x}$

آیا قبل از جدایش می‌توان از تئوری لایه مرزی استفاده کرد؟

کمی با اغماض چون معادلات N-S خاصیت بیضوی دارد

و ناحیه قبل از جدایش را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

همین مسئله را در مورد ایرفویل هم داریم:



زاویه stall ← حدوداً ۱۲ درجه

شرط لازم جدایش: $\frac{dP}{dx} > 0$

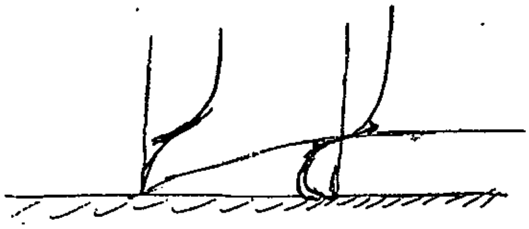
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

در دیواره ← $u=0$, $v=0$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0}$$

خاصیت پروفیل‌ها بعد از جدایش ← نقطه عطف دارد.

1



$$y \to \infty \to \frac{\partial u}{\partial y} \to 0 \quad u \to U_\infty \to \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

پس $\frac{dP}{dx} > 0$ شرط لازم برای داشتن نقطه عطف است

اما شرط لازم و کافی برای داشتن reversflow ، $\frac{dP}{dx} > 0$ و قوی

نیز باید باشد.

بخش ۹: سؤالات زوج HW تحویل دهید HW#9

فرد ← حل کنید.

■ Vorticity EQ: ch3 → book

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{V}$$

if $\rho = Const$

$\mu = Const$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = -\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \nu \nabla^2 \vec{V} \qquad (1)$$

از دو طرف معادله ① کرل می‌گیریم:

$$\omega = \nabla \times \vec{V} \qquad (۲)$$

$$(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \nabla\left(\tfrac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V}\right) - \vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) \qquad (۳)$$

①, ②, ③ $\quad \nabla\times\{(V\cdot\nabla)V\} = (V\cdot\nabla)(\nabla\times V) - ((\nabla\times V)\cdot\nabla)V$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{\omega} = (\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} + \nu\nabla^2\vec{\omega} \qquad (۴)$$

مهم و دارای تعبیرهای زیبا و قوی

رابطه ④ دارای این مزیت است که ترم فشار را از آن حذف شده است

$$\omega \;\; 2D \rightarrow \omega = \omega_z \rightarrow \zeta$$

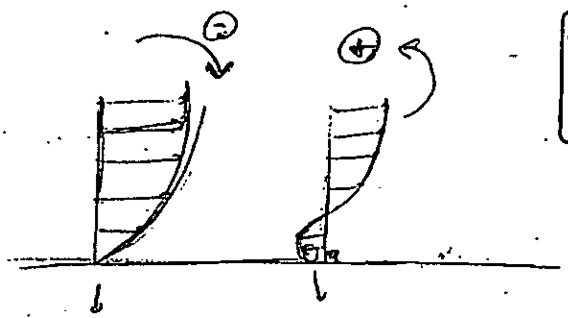
$$\Rightarrow \frac{D\omega_z}{Dt} = \nu\nabla^2\omega_z$$

• تغییر ω در یک جریان بخاطر پدیده دیفیوژن diffusion خواهد بسیار زیبا بود ـ فقط در 2D.

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$@\, y=0,\ x=x \Rightarrow v=0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$$



$\frac{\partial u}{\partial y} > 0$ $\qquad$ $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$

پس از وقوع جدایی ورتیسیته تغییر علامت می‌دهد.

کتاب Tritton

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$y=0 \longrightarrow u=0$$
$$v=0$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

$$\Rightarrow @\ y=0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\mu\frac{\partial \omega_z}{\partial y} \quad (1)$$

(2) ورتیسیته از دیواره به میدان نفوذ می‌کند ← پس $\frac{d\omega_z}{dy}\Big|_{y=0} < 0$

(1) , (2) هر جایی که $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ باشد احتمال جدایی وجود دارد.

یکشنبه ۱۳۸۹,۲,۱۹

■ روش اختلالات جزئی Perturbation

- Regular
- Singular

جریان خزشی ← Re ← خیلی کوچک

لایه مرزی ← Re ← خیلی بزرگ = $1/Re$ خیلی کوچک.

روغن کاری ← شیب کوچک.

* تبدیل جزئی دایره به بیضی.

- Regular
  - ← جریان کوئت همراه با مکش
  - ← پیدا کردن فرکانس طبیعی حرکت نوسانی یک حباب

$$\begin{cases} (1+\epsilon)\dfrac{du}{dx} + u = 0 \\ u(0) = a \end{cases} \Rightarrow u = a\, e^{-\frac{x}{1+\epsilon}}$$

اگر $\epsilon \ll 1$ یا $\epsilon \approx 0$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} + u = 0 \\ u(0) = a \end{cases} \Rightarrow u(x) = a e^{-x} \Rightarrow$$ حل تقریبی > Regular

asymptotic solution

همیشه $\epsilon \to 0$ صادق نیست.

حل دقیق در دسترس نیست

لذا ایده استفاده از سری و مشکلات جزئی بوجود آمد:

$$u(x,\epsilon) = \underbrace{u_0(x)}_{\text{مرتبه صفر}} + \underbrace{u_1(x)\,\epsilon}_{\text{مرتبه ۱}} + \underbrace{u_2(x)\,\epsilon^2}_{\text{مرتبه ۲}} + O(\epsilon^3)$$

$$\left(\frac{du_0}{dx} + u_0\right)\epsilon^0 + \left(\frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + u_1\right)\epsilon$$

$$+\left(\frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + u_2\right)\epsilon^2 + O(\epsilon^3) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{du_0}{dx} + u_0 = 0 \\ u_0(0) = a \end{cases} \Rightarrow u_0(x) = a e^{-x}$$

$$\begin{cases} \dfrac{du_0}{dx} + \dfrac{du_1}{dx} + u_1 = 0 \\ u_1(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1(x) = a x e^{-x}$$

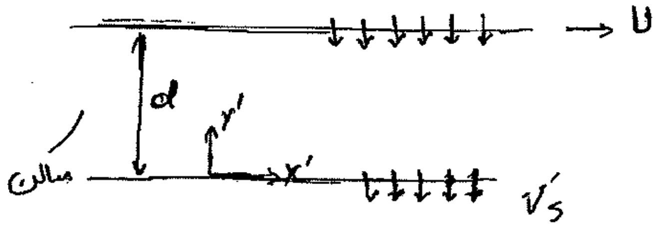
$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} + \dfrac{du_2}{dx} + u_2 = 0 \\ u_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow u_2(x) = a\left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{-x}$$

کتاب پاپاناسیو

روش اختلالات جزیی برای سیالات نیوتنی معتبر است.

" " غیر نیوتنی " نیست.

• مثال زیر از کتاب Kundu است:



Prim → دستگاه مختصات پریم دار

$$u'(y') = \frac{U}{d} y'$$

بالانس بین مکش پایین و بالا برقرار است طوری که

$\frac{\partial u'}{\partial x'} = 0 \longrightarrow$

صادق است.

Continuity: $\overbrace{\frac{\partial u'}{\partial x'}}^{=0} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \Rightarrow v' = cte = -V_s'$

x mom: $u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$

$$\Rightarrow -V_s' \frac{du'}{dy'} = \nu \frac{d^2 u'}{dy'^2} \quad ①$$

بی‌بعد سازی:

$y = \frac{y'}{d}$

$u^* = \frac{u'}{U}$

$V_s = \frac{V_s'}{U}$

$\Rightarrow x\ mom: \frac{d^2u}{dy^2} + \epsilon \frac{du}{dy} = 0 \Big\}$ ②

① $\Rightarrow -V_s \frac{du}{dy} = \frac{1}{Re} \frac{d^2u}{dy^2} \longrightarrow Re = \frac{Ud}{\nu}$

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dy^2} + V_s Re \frac{du}{dy} = 0$

$\Rightarrow \epsilon = V_s Re \Rightarrow \epsilon = \frac{V_s' d}{\nu}$

فرض می‌کنیم ϵ مقدار کوچکی باشه. چرا؟

شرایط مرزی: $u(0) = 0$
$u(1) = 1$

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dy^2} + \epsilon \frac{du}{dy} = 0 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

Exact solution: $$u(y) = \frac{1-e^{-\epsilon y}}{1-e^{-\epsilon}}$$

Perturbation solution:

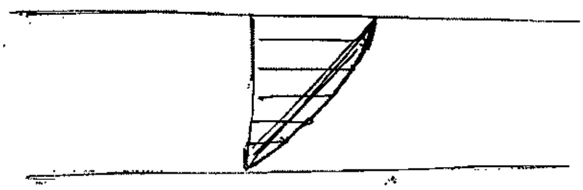
$$u(y) = u_0(y) + u_1(y)\epsilon + u_2(y)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

$\boxed{\text{تا مرتبه ۲ خودتان ادامه دهید}}$

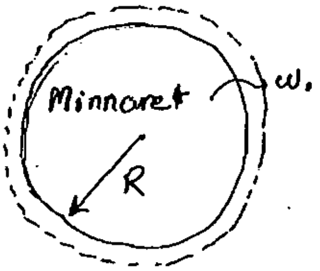
$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u_0}{dy^2} = 0 \\ u_0(0) = 0 \qquad u_0(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow u_0(y) = y$$

$$\begin{cases} \dfrac{d u_0}{dy} + \dfrac{d^2 u_1}{dy^2} = 0 \\ u_1(0) = 0 \qquad u_1(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1(y) = \frac{1}{2} y(1-y)$$

$$\Rightarrow u(y) = y + \frac{1}{2} y(1-y)\epsilon + O(\epsilon^2)$$



مثال : حباب گازی



کتاب Panton

$$\rho\left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2\right) = P_g - P_\infty$$

کتاب اشتباهاً $\frac{2}{3}$ گذاشته

از ترم‌های دارای σ و μ صرف نظر می‌کنیم.

$$P_g = P_g(t)$$

شرایط اولیه : $R(0) = R_0 \quad \dot{R}(0) = 0$

اما فرض می‌کنیم در لحظه صفر شعاع حباب به مقدار کمی تغییر کند:

$$R(0) = R_0(1+\epsilon)$$

$$P_0 V_0^K = P V^K$$

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 - \frac{P_\infty}{\rho}\left[\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3K} - 1\right] = 0 \qquad (1)$$

? if $R < 10^{-2}\,\text{cm} \Longrightarrow$ می‌توان از σ یا کشش سطحی صرف نظر می‌کنیم:

if $\dot{R} = 0, \ddot{R} = 0 \xrightarrow{(1)} R = R_0$ تعادل

پس اگر $R \neq R_0$ یعنی سیستم از حالت تعادل خارج شده است.

$$R(t) = R_0 + R_1(t)\epsilon + R_2(t)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3K} \xrightarrow[\text{میشوند}]{\text{بسط داده جملات}}$$

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3K} \approx \left(1+\epsilon\frac{R_1}{R_0}+\epsilon^2\frac{R_2}{R_0}+\dots\right)^{-3K}$$

$$\epsilon^1 : \left\{ R_0\ddot{R}_1 + \frac{3KP_0}{\rho R_0} R_1 = 0 \Rightarrow R_1(t) \checkmark \right.$$

$$\epsilon^2 \left\{ R_0\ddot{R}_2 + \frac{3KP_0}{\rho R_0} R_2 = -R_1\ddot{R}_1 - \frac{3}{2}\dot{R}_1^2 + \frac{3K(3K+1)}{2\rho}\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 \right.$$

$$\Rightarrow R_1(t) = R_0 \cos\omega_0 t$$

$$\omega_0 = \frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{3KP_0}{\rho}}$$ در محدوده شنوایی انسان قرار دارد.

سه‌شنبه ۱۳۸۹/۲/۲۱

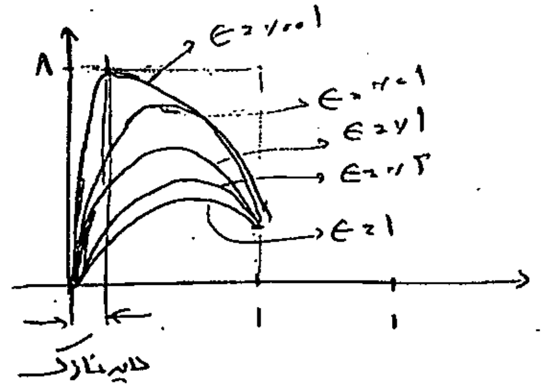
Singular Perturbation

HW#4 Papa → 3, 4, 5 (فصل ۷) → در امتحان حتماً هست.

مثال:

$$\begin{cases} \epsilon \dfrac{d^2u}{dx^2} + (1+2\epsilon)\dfrac{du}{dx} + 2u = 0 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

exact solution: $u(x,\epsilon) = \dfrac{e^{-2x} - e^{-x/\epsilon}}{e^{-2} - e^{-1/\epsilon}}$



تغییرات در لایه نازک که اگر شدید باشد به آن لایه مرزی

حال فرض می‌کنیم $\epsilon \ll 1$ باشد.

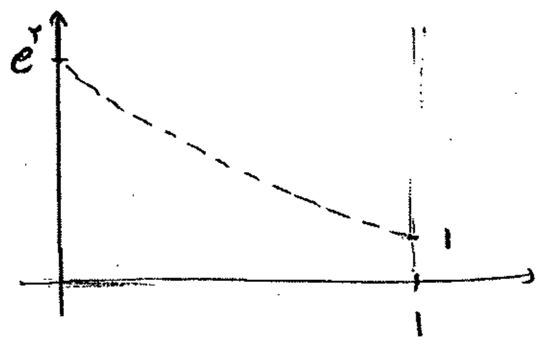
$\epsilon^0 \rightarrow$ مرتبه صفر

$$0 \quad \frac{du_0}{dx} + 2u_0 = 0 \Rightarrow u_0 = C_1 e^{-2x} \qquad @\, x = 1$$

از لحاظ ریاضی هرکدام از شرط مرزی را می‌توان استفاده کرد، در اینجا از شرط مرزی در $x=1$ استفاده می‌کنیم:

$x=1 \Rightarrow u_0^{(o)} = e^{2(1-x)}$

outer solution → ترم مرتبه صفر حل خارجی.



این حل، حل کامل نیست.

$u_0^{(i)}$ → ترم مرتبه صفر - حل داخلی

$u^{(o)}$ → مثل حل جریان پتانسیل

$u^{(i)}$ → مثل حل لایه مرزی

$\zeta = \frac{x}{\epsilon}$ → برای xهای کوچک طوری که ζ مقدار بزرگی است

Coordinat Stretching

$$\epsilon \frac{d^2u}{dx^2} + (1+2\epsilon)\frac{du}{dx} + 2u = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\zeta^2} + (1+2\epsilon)\frac{du}{d\zeta} + 2u\epsilon = 0 \rightarrow$$

فقط برای نزدیک دیواره معتبر است.

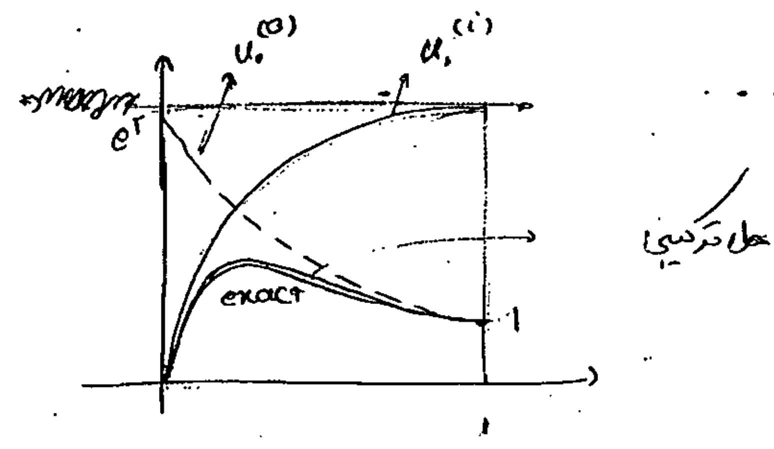
حل مرتبه صفر $\epsilon = 0$

$$\cancel{\frac{d^2u^{(i)}}{dx^2}} \quad \frac{d^2u_0^{(i)}}{d\zeta^2} + \frac{du_0^{(i)}}{d\zeta} = 0$$

$$\Rightarrow u_0^{(i)} = A_1 + A_2 e^{-\zeta}$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow u_0^{(i)} = A_1(1 - e^{-\zeta})$$

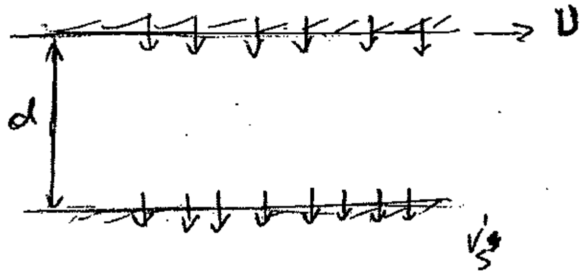
ایده پرانتل $\rightarrow \lim_{\zeta \to \infty} u_0^{(i)} = \lim_{x \to 0} u_0^{(o)} \Rightarrow A_1 = e^2$



$$u^{(c)} = u^{(o)} + u^{(i)} - (e^{2})$$ ← حد مشترک

$$u^{(c)} = e^{2(1-x)} - e^{2} e^{-x/\epsilon}$$

مثال : مکش قوی بین دو صفحه



$$-v_s \frac{du}{dy} = \frac{1}{Re} \frac{d^2u}{dy^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dy^2} + \epsilon \frac{du}{dy} = 0 \qquad \epsilon = \frac{v_s' d}{\nu}$$

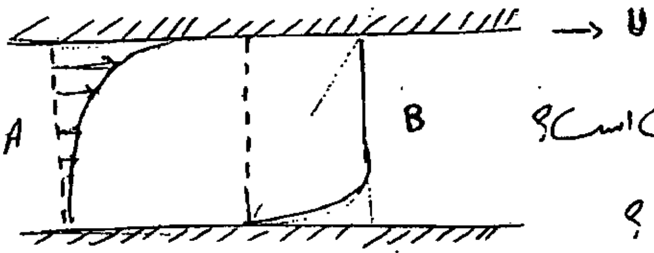
فرض می کنیم که ϵ بزرگ است ← ν کوچک یا v_s' بیشتر.

آیا v_s' آنقدر بزرگ شده است که $\frac{\partial P}{\partial x}$ وارد مسئله کند؟

$$\Rightarrow \delta \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{du}{dy} = 0 \qquad \delta = 1/\epsilon$$

$$u^{(c)} = u^{(i)} + u^{(o)}$$

$$\delta = 0 \Rightarrow \frac{du_0^{(o)}}{dy} = 0 \Rightarrow u_0^{(o)} = cte \Rightarrow u_0^{(o)} = 1$$



A و B کدام درست است؟

تشخیص لایه مرزی؟

$$\eta = \frac{y}{\delta}$$

$$\frac{d^2 u_0^{(i)}}{d\eta^2} + \frac{du_0^{(i)}}{dy} = 0 \Rightarrow u(\eta) = A_1 + A_2 e^{-\eta}$$
$$= A_1(1 - e^{-\eta})$$

$$\lim_{y \to 0} u_0^{(o)} = \lim_{\eta \to \infty} u^{(i)} \Rightarrow A_1 = 1$$

$$\boxed{u^{(c)} = 1 - e^{-y/\delta}} \qquad \epsilon \gg 1$$

حد مشترک؟

بحث جدید: تئوری ناپایداری (خطی)

در هر مسأله‌ای اگر اعداد بی‌بعد را کم از حدی بگذرانیم، جواب ناپایدار خواهد بود.

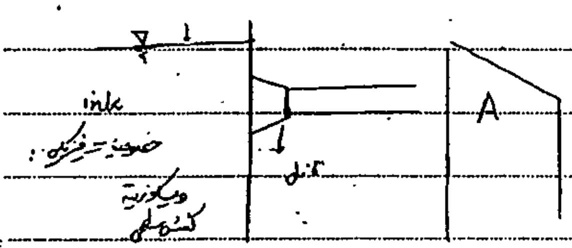
ناپایداری جریان آرام ← جریان آرام دیگر (با معادلات و شرایط مرزی یکسان چند جواب وجود خواهد داشت.)

در هر مسأله ← نه تنها جریان فرضی ناپایداری وجود ندارد، چون عبارات غیرخطی جابجایی کاملاً حذف می‌شوند.

جریان درهم (حاصل نهایی ناپایداری جریان آرام جریان درهم خواهد بود.)

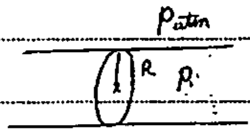
✓ ممکن است جریان آرام به آرام دیگر و سپس به درهم تبدیل شود.

✓ در پرینتر Ink jet :



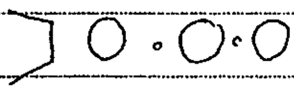
اگر یک انتقال فوری شکل داده تغییر کند: A B و سیال قابلیت دمیدن آن را نداشته باشد.

$P_A > P_B$



$$P_i = P_{at} + \frac{\sigma}{R}$$

✓ ممکن است جریان قطره قطره شود:



این پدیده یک پدیده ناپایداری است که به دلیل وجود free surface در آن پدیده است.

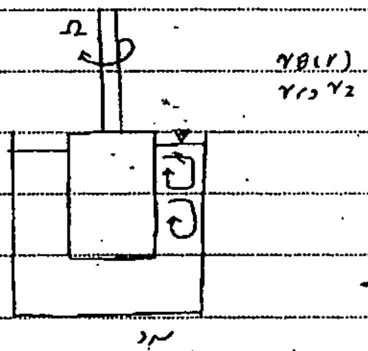
✓ در جریان بین دو استوانه: (ویسکومتر)

وقتی عدد بی‌بعد تیلور از حدی بیشتر شود، ورتکس‌ها تشکیل شده،

$V_\theta(r)$

V_r, V_z

تغییر الگوی سرعت ← تغییر میدان تنش ← تغییر ویسکوزیتی اندازه گرفته شده

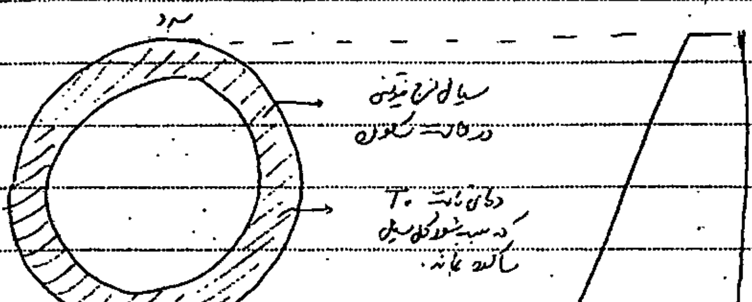


✓ بحث از کتاب Tritton

مثال: حلقه

اگر حلقه را [illegible]

دو منبع سرد و گرم قرار دهیم.



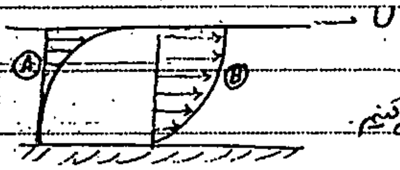
اگر توزیع دما در دو نیمه یکی باشد باز هم سیال ساکن خواهد ماند. (چون هر دو نیمه با [illegible] برابرند.)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\delta \ll 1$ و در بزرگترین ترم مشتق ضرب شده، پس باید از [illegible] حل ترکیبی استفاده کنیم

$u^{(c)} = u^{(i)} + u^{(o)} -$ حد مشترک

$\delta = 0 \Rightarrow \frac{du_o}{dy} = 0 \rightarrow u_o^{(o)} = 1$



با توجه به شکل و با توجه به حل معادله ضعیف و معادله کامل می‌توان فرض کرد

در مورد شکل B وجود خواهد داشت و به همین خاطر از شرط مرزی بالایی استفاده می‌کنیم

برای حل معادله داخلی پارامتر جدید را تعریف می‌کنیم:

$\eta = \frac{y}{\delta}$

$$\frac{d^2 u_o^{(i)}}{d\eta^2} + \frac{d u_o^{(i)}}{d\eta} = 0 \Rightarrow u_o^{(i)}(\eta) = A_1 + A_2 e^{-\eta}$$

با اعمال B.C در $y=0$ داریم: $A_1 = -A_2$

$$u_o^{(i)}(\eta) = A_1(1 - e^{-\eta})$$

با استفاده از اصل Prantdl:

$$\lim_{y \to 0} u_o^{(o)} = \lim_{\eta \to \infty} u_o^{(i)} \Rightarrow A_1 = 1$$

در نهایت حل ترکیبی به دست می‌آید:

$$\boxed{u^{(c)} = 1 - e^{-y/\delta}} = 1 + (1 - e^{-\eta}) - 1$$

$\delta = 1/\epsilon \ , \ \epsilon \gg 1$

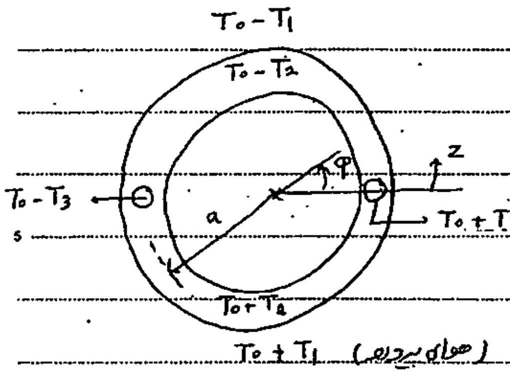
حل مطلوب برای $\epsilon \gg 1$ صادق است.

با استفاده از مسائل قبل برای امتحان ؟؟

PAPCO

Subject.
Year. Month. Date. ( )

آیا وضعیت سکون ناپایدار است و با یک اختلال کوچک سیال به حرکت در می‌آید، اگر:



z $\quad T_E = T_0 - T_1 \left(\frac{z}{a} \right)$

با رسم نمودار کانتور در دو بعد

معادلات حاکم N.S و انرژی است:

معادلات روبرو مشهور به معادلات لورنتز هستند. (از نظر فرم ریاضی)

با اطلاع در مسأله‌ی فیزیکی عبارتند از:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = -Pr\,X + Pr\,Y \\ \dfrac{dY}{dt} = -Y + \underbrace{Ra}_{\text{عدد ریلی}}\,X - XZ \\ \dfrac{dZ}{dt} = -Z + XY \end{cases}$$

$X \longrightarrow V_\phi$

$Y \longrightarrow T_3$ میزان عدم تقارن دما در دو سمت راست و چپ

$Z \longrightarrow T_2$

✓ معادلات ما ODE هستند.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k} \qquad \underbrace{Ra}_{\text{مربوط به نیروی شناوری}} = \frac{g\beta T_1}{\nu\alpha} \Big/ 2a\mu k$$

$\alpha \equiv$ Thermal Diffusivity

$\beta \equiv$ Thermal Expantion

✓ در کتاب Tritton به جای α با β تبدیل کرده

آیا راه حل پایدار وجود دارد؟

$\longrightarrow$ Steady state

$$\frac{d}{dt} = 0 \longrightarrow X_s = Y_s = Z_s = 0$$ (فقط اگر $Ra \le 1$ اتفاق می‌افتد) (حرکت وجود ندارد)

$$\begin{cases} X_s = Y_s = \pm (Ra - 1)^{1/2} \\ Z_s = Ra - 1 \end{cases}$$

پس در حالت کلی سه حل مختلف می‌توان داشت.

آیا وضعیت تعادل سکون از نوع پایدار است؟

اگر کمیت‌های متغیر به اندازه‌ی کوچکی دچار اغتشاش شوند، یا به عبارت دیگر:

Basic Flow: $X = X_s + x$

$Y = Y_s + y$

$Z = Z_s + z$

PAPCO

با جایگزینی کردن در معادلات:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -IPr\,x + IPr\,y \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + IRa\,x - xZ_s - [X_s z(-xz)] \\ \dfrac{dz}{dt} = -z + xY_s + [X_s y(+xy)] \end{cases}$$

معادلات دیفرانسیل حاکم بر ترم‌های اغتشاشی بدست آمده و می‌توانیم با حل آنها پی ببریم که آیا اغتشاشات دچار رشد می‌شوند یا از بین می‌روند.

در تئوری ناپایداری خطی x و y و z بسیار کوچک فرض شده و در نتیجه از ضرب آنها صرف نظر می‌شود:

- تحلیل ناپایداری خطی:

$$\frac{dx}{dt} = -P_r x + IPr\,y$$
$$\frac{dy}{dt} = -y + IRa\,x - xZ_s - zX_s$$
$$\frac{dz}{dt} = -z + xY_s + yX_s$$

با این کار نقطه Transition بدست می‌آید یا به عبارت دیگر IRa، Re، IPr بحرانی بدست می‌آیند و x و y و z پس از ناپایداری دقت کافی نخواهد داشت چون به سمتی می‌رود که خواست مقدار آنها بزرگ شود.

حل معادلات بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \exp(\sigma t) \\ y &= y_0 \exp(\sigma t) \\ z &= z_0 \exp(\sigma t) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \sigma = \sigma_r + i\sigma_i$$

هدف محاسبه‌ی σ است. σ می‌تواند مختلط باشد اما بخش حقیقی آن برای ما مهم‌تر است. اگر $\sigma_r \geq 0$ باشد، مسأله ناپایدار خواهد شد.

(چون به صورت نمایی x و y و z زیاد خواهند شد)

با قرار دادن سه حل پیشنهادی در دستگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -(\sigma + IPr)x_0 + IPr\,y_0 = 0 \\ (IRa - Z_s)x_0 - (\sigma+1)y_0 - X_s z_0 = 0 \\ Y_s x_0 + X_s y_0 - (\sigma+1)z_0 = 0 \end{cases}$$

از دستگاه بالا σ بدست خواهد آمد.

اگر وضعیت تعادلی سکون بوده باشد: $X_s = Y_s = Z_s = 0$

دترمینان ماتریس ضرایب باید صفر باشد:

$$\rightarrow \begin{vmatrix} -\sigma - IPr & IPr & 0 \\ IRa - Z_s & -\sigma - 1 & -X_s \\ Y_s & X_s & -\sigma - 1 \end{vmatrix} = 0$$

وضعیت سکون:

$$\longrightarrow (\sigma+1)\left[\sigma^2 + \sigma(IPr+1) - IPr(IRa-1)\right] = 0$$

یکی از جواب‌های معادله‌ی بالا $\sigma = -1$ است. اما این جواب ناپایدار نیست. پس باید ترم دیگر را بررسی کرد.

Subject.
Year. Month. Date. ( )

σ_r دو ریشه مزدوج هر دو منفی هستند پس باز هم حل پایدار خواهد بود. ، $Ra \leq 1$

در این حالت σ_r یکی از ریشه‌ها مثبت بوده و حل ناپایدار می‌شود. $Ra > 1$:

پس حتی اگر اختلاف دما هم وجود داشته باشد تا زمانی که $Ra \leq 1$ است حرکتی نخواهیم داشت و اختلاف دما خواهد شد. اگر اختلاف را از جایی بیشتر کنیم، $Ra > 1$ شده دیگر [illegible] اغتشاش نخواهد بود.

پس عدد Ra بحرانی 1 است.

✓ در دنیای واقعی پس از ناپایداری به دو حل پایدار تبدیل می‌رسیم. اما نقطه ناپایداری حل که قادر به پیش‌بینی آن نیست و تنها کمک می‌کند در انتقال حل ناپایدار می‌شود

اما در حل پایدار بعدی چه، آیا این حل پایدار است یا باز با اغتشاش ناپایدار خواهد شد؟

از معادله دیفرانسیل تبدیلی می‌توان استفاده کرد تنها باید X_s و Y_s و Z_s دیگر را در آن قرار داد:

$$\sigma^3 + \sigma^2(Pr+2) + \sigma(Pr+Ra) + 2Pr(Ra-1) = 0$$

با توجه A, B, C :

$$\longrightarrow \sigma^3 + A\sigma^2 + B\sigma + C = 0$$

حالت اول) سه ریشه حقیقی وجود دارد ← هر سه ریشه منفی ← پایدار

" دوم) یک ریشه حقیقی منفی دارد، دو ریشه مزدوج دارد

$$\sigma = \underbrace{\alpha}_{\text{لازم در تعیین ناپایداری}} \pm i\beta$$

$\alpha > 1 \longrightarrow$ حل ناپایدار

$\longrightarrow (C-AB) > 0 \Longrightarrow \alpha > 0$ (اثبات در Tritton).

$$\boxed{Ra(Pr-2) - Pr(Pr+4) > 0}$$

+ اگر $Pr \leq 2$ باشد، در این صورت $C-AB$ هرگز + نمی‌شود، یعنی سیستم پایدار خواهد بود. پس در این حالت عدد Pr مطرح می‌شود (تا اینجا همین حکم به پایستگی ادامه خواهد داد).

+ اگر $Pr > 2$ باشد، در این صورت $C-AB$ تنها موقعی + است که داشته باشیم:

$$Ra \geq (Ra)_{cr} = \frac{Pr(Pr+4)}{Pr-2}$$

پس $Pr > 2$ به تنهایی به معنای ناپایداری نیست و باید شرط Ra نیز برقرار شود.

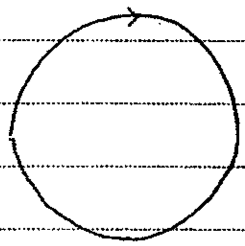
✓ هر سه عدد بحرانی قبلی $Pr = 2$ ، $Ra = 1$ و $Ra = \frac{Pr(Pr+4)}{Pr-2}$ به شکل آزمایشی نیز تایید می‌شوند.

PAPCO

- ناپایداری تیلور-کوئت (خطوط جریان خمیده) Taylor Couette (Centrifugal Instability)

هر جایی که خطوط جریان خمیده باشند احتمال ناپایداری وجود دارد.

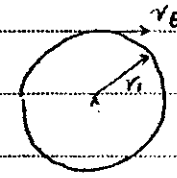
تحلیل ناپایداری تیلور مربوط به جریان لزج بود، پیش از او رایلی تئوری برای جریان غیر لزج ارائه داده بود.



سیرکولاسیون $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int \underbrace{(\nabla \times \vec{V})}_{\vec{\xi} \rightarrow \vec{\omega}} \cdot d\vec{A}$

ورتیسیته

در حالت زیر:



$\Gamma_1 = \int_0^{2\pi} v_\theta r_1 \, d\theta = 2\pi r_1 v_{\theta_1}$

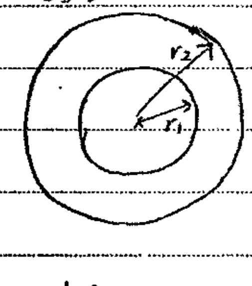
- قضیه‌ی کلوین: (برای سیال غیرقابل تراکم) Kelvin

این قضیه بیان می‌کند اگر جریان غیرقابل تراکم و غیر لزج باشد:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

(اثبات در Currie)

رایلی از این قضیه استفاده می‌کند. اگر المان ما با اغتشاش به شعاع r_2 برسد، می‌خواهیم بدانیم آیا به حالت قبل برمی‌گردد یا ناپایدار است:



$\Gamma_2 = 2\pi r_2 v'_{\theta_2}$

طبق قضیه‌ی کلوین:

$2\pi r_2 v'_{\theta_2} = 2\pi r_1 v'_{\theta_1}$

$\longrightarrow v'_{\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} v_{\theta_1} > v_{\theta_2} \longrightarrow \frac{d\Gamma}{dr} < 0$ ناپایدار

اگر $v'_{\theta_2} > v_{\theta_2}$ باشد که v_{θ_2} سرعت ذره در حالت پایدار در شعاع r_2 است.

در این حالت ابعاد آن مرتبا بزرگ خواهد شد.

F_D

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v_\theta^2}{r}$$

$r_1 v_{\theta_1} > r_2 v_{\theta_2}$

اگر در جریانی $\frac{d\Gamma}{dr} < 0$ باشد، جریان ناپایدار خواهد بود.

- شرح این بخش در کتاب Drazin است.

- شرح کلی در (Chandrasekhar) است.

یکشنبه ۱۳۸۹/۲/۲ ترمودینامیک

~~چرا است ایزوترمال در برگشت پذیر باشد ؟ ← expander~~

یکشنبه ۱۳۸۹/۲/۲ سیالات

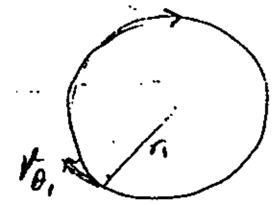
- ناپایداری Teylor-Couette

خطوط جریان خمیده — Centrifugal instability

سیرکولاسیون

$$\Gamma_1 = \oint \vec{V}\cdot d\vec{l}$$

$$= \oint (\vec{\nabla}\times\vec{V})\cdot dA$$



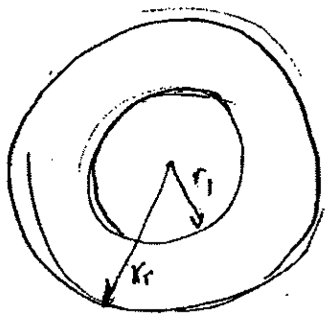
$$\Gamma_1 = 2\pi r_1 V_{\theta_1}$$

- قضیه کلوین: Kelvin ← بدون اثبات

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$ ← برای سیال غیرقابل تراکم + غیرلزج

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{v_\theta^2}{r}$$

اگر از r_1 به r_2 ببریم در آنجا باقی می‌ماند یا نه؟



$$\Gamma_2 = 2\pi r_2 v'_{\theta_2}$$

$$\Gamma_1 = 2\pi r_1 v_{\theta_1}$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \Rightarrow \Gamma_1 = \Gamma_2 \Rightarrow v'_{\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} v_{\theta_1}$$

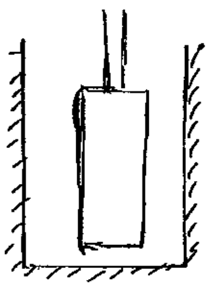
اگر $v'_{\theta_2} < v_{\theta_2}$ آنگاه جریان ناپایدار خواهد شد!

$$v'_{\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} v_\theta \Rightarrow r_1 v_{\theta_1} > r_2 v_{\theta_2} \rightarrow \Rightarrow \frac{d\Gamma}{dr} < 0 \Rightarrow$$ ناپایدار

مطالب این بخش

Drazin

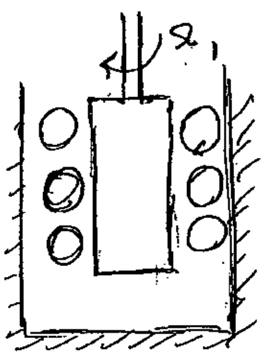
Chandrasekhar



$$v_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

شرط‌های مرزی ← B,A

Couette Viscometer



پارامترهای بازی ← $\Omega_1, \Omega_2, R_1, R_2, \nu$

$(Ta) > 1706 \rightarrow$ ناپایدار

این مشاهدات اولین نمونه برای اثبات وجود چند حل برای معادله N-S بود.

$V_0(r) = V_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r} \longrightarrow$ حل پایه

حل پایه

$= r\Omega_0(r) = r\left(A + \frac{B}{r^2}\right)$

$\frac{dP_0}{dr} = \rho \frac{V_0^2}{r} \Rightarrow$

حل پایه $\rightarrow A = -\Omega_1 \eta^2 \dfrac{1-\mu/\eta^2}{1-\eta^2}$

$B = \Omega_1 \dfrac{R_1^2(1-\mu)}{1-\eta^2}$

$\mu = \Omega_2/\Omega_1 \longrightarrow$ نسبت دورها

$\eta = R_1/R_2 \rightarrow$ نسبت شعاع ها.

$$\vec{V} = \left|\begin{array}{l} \cancel{(V_r)_0}^{=0} + V_r' \longrightarrow \text{اغتشاش} = V_r(r,\theta,z,t) \\ (V_\theta)_0 + v_\theta'(r,\theta,z,t) = V_\theta(\text{———}) \\ \cancel{(V_z)_0}^{=0} + V_z'(r,\theta,z,t) = V_z(\text{———}) \end{array}\right.$$

$P_0(r) + P'(r,z,\theta,t) = P(\text{———})$

۱۵۱

$Re\ ,\ \underbrace{\alpha,\ c}_{\text{ها}}$

می‌توانند موهومی باشند

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_r + i\alpha_i \\ C = C_r + iC_i \end{cases}$$

دو معادله داریم و ۶ تا پارامتر.

α را یک مقدار حقیقی می‌گیریم ⇐ $\alpha_i = 0$ ⇐

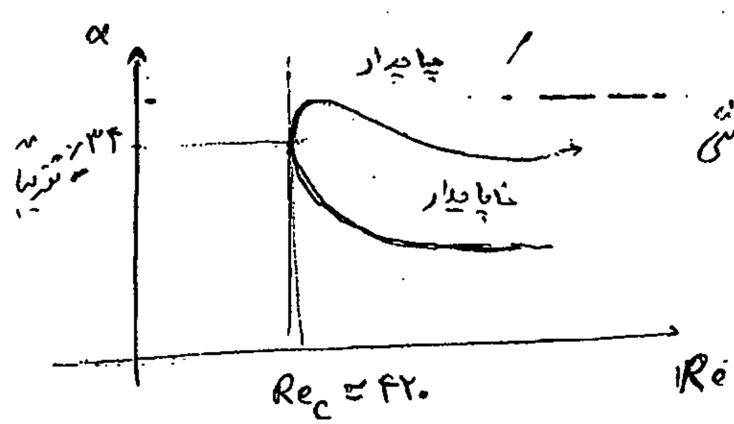
Temporal Instability Analysis.

به ازای مقادیر خاصی از C_i معادله ① تساوی ها ① برقرار می‌شود

⇐ eigenvalue problem

اولاً C_i مهم است با توجه به صفحه ۱۱ Travelling wave

دوماً به ازای $C_i > 0$ ناپایداری اتفاق می‌آید.



Taang curve

www.vepub.com
Publish Your Mind

موارد فوق را از معادلات N-S قرار می‌دهیم

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial r} &= \\ \cancel{\frac{\partial p'}{\partial \theta}} &= 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial z} &= \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

p' را حذف کنید

↓

یک معادله

↓

پیوستگی

↓

u'_z را حذف می‌کنیم

معادله θ مشتق دار نشده دست نخورده باقی می‌ماند

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta^*\right) \Delta^* v'_r &= 2\Omega_0 \frac{\partial^2 v'_\theta}{\partial z^2} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta^*\right) v'_\theta &= -(D^* V_0)\, v'_r \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\Delta^* = \Delta - \frac{1}{r^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$D = \frac{d}{dr} \qquad D^* = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}$$

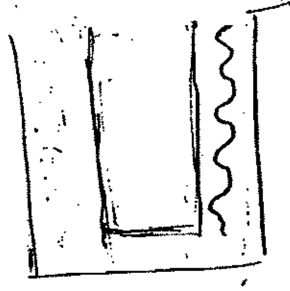
فرض می‌کنیم که اغتشاش را بصورت سری فوریه ← مدهای نرمال

بنویسیم Normal-mode-Analysis

$$v'_r = \hat{u}(r)\, e^{st+ikz}$$

$$v'_\theta = \hat{v}(r)\, e^{st+ikz}$$

اغتشاش



$$\text{(۲) ODE}\begin{cases} \{\nu(DD^* - k^2) - s\}(DD^* - k^2)\hat{u} = 2k^2\Omega_0 \hat{v} \\ \{\nu(DD^* - k^2) - s\}\hat{v} = (D^* V_0)\hat{u} \end{cases}$$

K ← عدد موج

$K = \text{Wave Number} = \frac{2\pi}{\lambda}$

@ $z = \pm\infty$ → bounded

K است به عنوان input

$s = s_r + i s_i$

→ $\mathrm{Re}(s) > 0 \Rightarrow$ ناپایداری → Synge

Synge ⇒ $\boxed{\mu > \eta^2}$ → معیار ناپایداری

وقتی $Re > 0$ می‌شود که رابطه $\mu > \eta^2$ برقرار شود

در مسأله Taylor از یک حالت steady به حالت steady دیگر می‌رود. پس $s = 0$

$\cancel{\sigma_i} \rightarrow$

→ exchange of Instability

$d = R_2 - R_1 = Gap$

Narrow Gap → $\hat{u}$ از معادله ② حذف شده

$$\boxed{(D^2-a^2)^3\,\hat{v} = -a^2\, T_a \underbrace{\{1-(1-\mu)(x+\tfrac{1}{2})\}}_{f(x)}\hat{v}} \quad ③$$

شرایط مرزی برای معادله ③ : ۶

@ $r = R_1$
$r = R_2$ → اغتشاشات صفر → $x = \pm\frac{1}{2}$

$$x = \frac{r-R_0}{d}$$

$R_0 = \frac{1}{2}(R_1+R_2)$ → دستگاه مختصات در وسط فاصله
برای استفاده از سری فوریه

$$\Rightarrow T_a = \frac{4\Omega_1^2 R_1^4}{\nu^2}\,\frac{\eta^2-\mu}{1-\eta^2}\left(\frac{1-\eta}{\eta}\right)^4$$

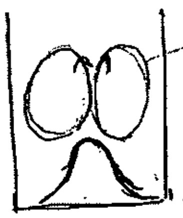
سه‌شنبه ۱۳۸۹٫۳٫۴

■ ناپایداری جریان‌های (تقریباً) موازی

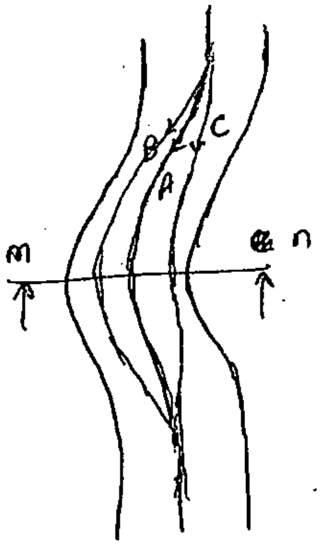
★ معادله Orr-Sommerfeld

main flow

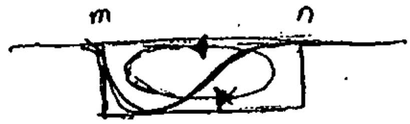
secondary flow

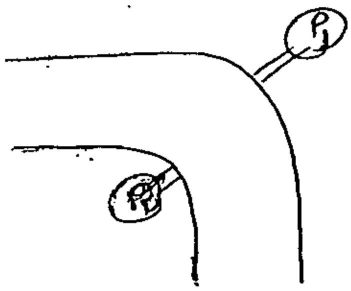


⇒ قارچی

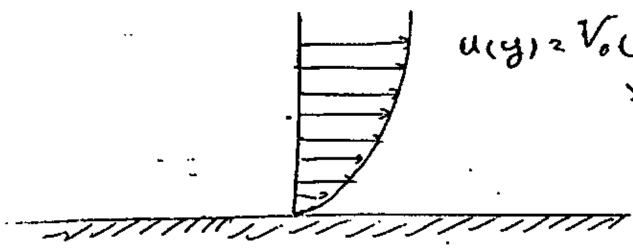


→ Jush kom? Kunda?





$P_1 > P_2$ → باید باشد.



$u(y) = V_0(y)$
↳ Base flow

$P_0 = P_\infty$
↳ base flow

$$u(x,y,t) = V_0(y) + u'(x,y,t)$$

$$v(x,y,t) = 0 + v'(x,y,t)$$

$$P(x,y,t) = P_0(x) + P'(x,y,t)$$

قضیه Squire: اغتشاش دو بعدی خطرناک‌تر از اغتشاش سه بعدی است.

فرض اغتشاش ضعیف: $\left|\frac{u'}{V_0}\right| \ll 1 \;,\; \left|\frac{P'}{P_0}\right| \ll 1$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0} \Big\}$$

$$x: \frac{\partial u'}{\partial t} + (V_0 + u')\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\left(\frac{dV_0}{dy} + \frac{\partial u'}{\partial y}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\left(\cancel{\frac{dP_0}{dx}} + \frac{\partial P'}{\partial x}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \cancel{\frac{d^2 V_0}{dy^2}}\right)$$

$$y: \frac{\partial v'}{\partial t} + (V_0 + u')\frac{\partial v'}{\partial x} + v'\frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial y} +$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}\right)$$

$\Longrightarrow$ خطی سازی می‌کنیم:

با استفاده از کوچک بودن اغتشاشات داریم:

$$x: \frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU_0}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}\right)$$

$$y: \frac{\partial v'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \nabla^2 v'$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

$$u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y} \qquad v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2 \psi' - \frac{d^2 U}{dy^2}\frac{\partial \psi'}{\partial x}$$

$$= \nu\left(\frac{\partial^4 \psi'}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi'}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \psi'}{\partial x^2 \partial y^2}\right)$$

Normal mod ~~…~~ Analysis

$$\psi'(x, y, t) = f(y)\, e^{i\alpha(x - ct)}$$

$\searrow$ Travelling wave

α = wave number $= 2\pi/\lambda$

$$\boxed{\left(f'''' - 2\alpha^2 f'' + \alpha^4 f\right)\frac{\nu}{i\alpha} = (U_0 - c)(f'' - \alpha^2 f) - U_0'' f}$$

درای بعد.

$\hat{f} = \frac{f}{LU}$

طول مشخصه — سرعت مشخصه

$V_0 \rightarrow$ Base پروفیل است

$\hat{V}_0 = \frac{V_0}{U}$ $\qquad$ $\hat{x} = \frac{x}{L}$

$\hat{C} = \frac{C}{U}$ $\qquad$ $\hat{\alpha} = \alpha L$

$Re = \frac{UL}{\nu}$

بی بعد شده:

$$(\hat{f}'''' - 2\hat{\alpha}^2\hat{f}'' + \hat{\alpha}^4\hat{f}) = iRe\,\hat{\alpha}(\hat{V}_0 - C)(\hat{f}'' - \alpha^2\hat{f}) - \hat{V}_0''\hat{f} \quad (1)$$

Helmholtz $\longrightarrow$ 

Tollmien + Schlichting: بعد از سی سال معادله (1)

توسط این دو حل شد.

شرایط مرزی برای لایه مرزی:

@ $f(0) = f'(0) = 0$

@ $f(\infty) = f'(\infty) = 0$