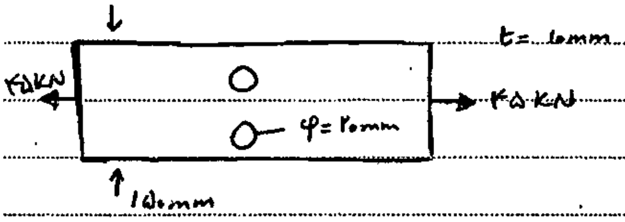
Subject: مقاومت مصالح ۱
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین



① الف) تنش محوری متوسط در مقطع بحرانی

ب) تنش محوری متوسط در ورق در مقطعی که هیچ گونه پیچ ندارد.

ج) تنش برشی متوسط پیچ‌ها   د) تنش لهیدگی متوسط بین پیچ و ورق

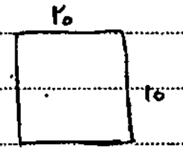
الف) $\sigma = \dfrac{F}{A} = \dfrac{45 \times 10^3}{(150-40) \times 10 \times 10^{-6}} = 40.909 \ \text{MPa}$

ب) $\sigma = \dfrac{45 \times 10^3}{150 \times 10 \times 10^{-6}} = 30 \ \text{MPa}$

ج) $\tau = \dfrac{F}{A} = \dfrac{45 \times 10^3}{2 \times \frac{\pi}{4} \times 20^2 \times 10^{-6}} = 71.6 \ \text{MPa}$ A: سطح مقطع پیچ

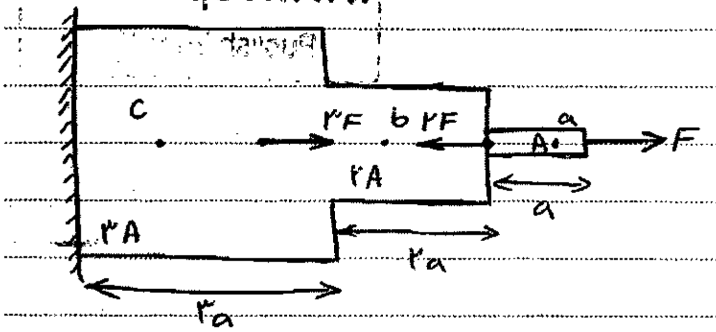
برای محاسبه‌ی تنش برشی، نیروی برشی را بر سطح برش دیده تقسیم می‌کنیم. در اینجا هم نیروی برشی همان نیروی 45KN است و سطح برشی سطح پیچ است که منطبق بر صفحه‌ی ورق است یعنی سطح مقطع دایره‌ای پیچ. می‌توان فرض کرد در پیچ این دو صفحه وجود داشته و نیروی 45KN پیچ را می‌برد.

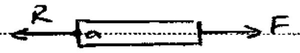
د) $\sigma_b = \dfrac{F}{A_n} = \dfrac{45}{2 \times 20 \times 10} = 112.5 \ \text{MPa}$
مستطیل

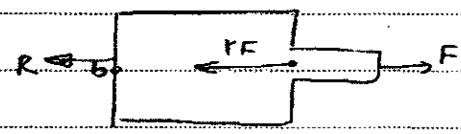


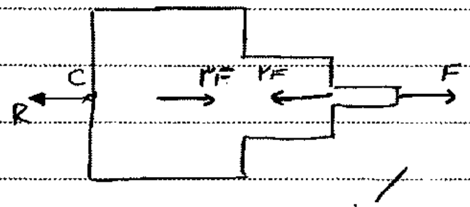
Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲ـ تنش محوری را در نقاط a و b و c بیابید.



a:  $\xrightarrow{\Sigma F=0}$ $R=F \Rightarrow \sigma_a = \dfrac{F}{A}$ T(کششی)

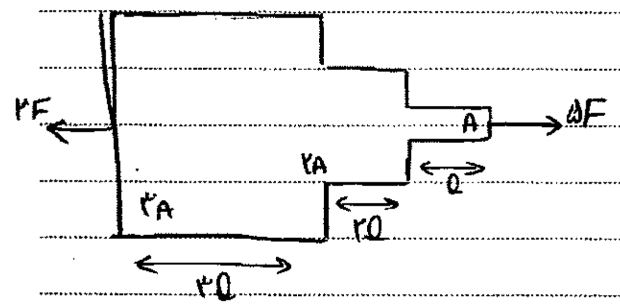
b:  $\Rightarrow R = -F \Rightarrow \sigma_b = \dfrac{-F}{۲A}$ C(فشاری)

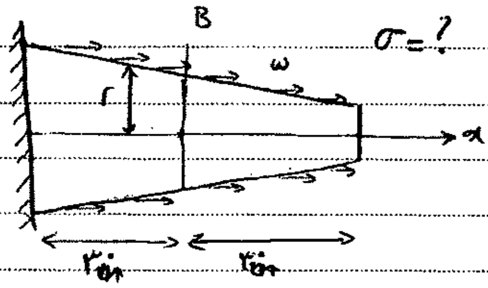
c: 

$R = ۲F \Rightarrow \sigma_c = \dfrac{۲F}{۳A}$ T(کششی)

برای تحلیل، از طرف تکیه‌گاه به شکل نگاه کرده و در نقطه‌ی مورد نظر برش می‌زنیم و بررسی می‌کنیم.

۳ـ تنش محوری را در نقاط a و b و c بیابید.





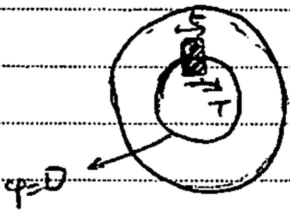
۴ـ $\sigma = ?$ $\quad w = (٦٠ + ۴٠x)\ \dfrac{lb}{in}$ $\quad r = ۲ - \dfrac{x}{٦}\ in$

$$F = \int_{۳}^{٦} w\,dx = \int_{۳}^{٦} (٦٠ + ۴٠x)\,dx = ٦٠x + ۲٠x^{۲}\Big|_{۳}^{٦}$$

$$\sigma = \frac{F}{A_B} = \frac{۷۲٠}{\pi\left(۲ - \frac{۳}{٦}\right)^{۲}} = \frac{۷۲٠}{۷{,}٠٦۹} = ۱٠۲\ psi\ \left(lb/in^{۲}\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۴ـ شفت پیچشی با گشتاور $T = 450\ N.m$ ، $D = 50\ mm$ ، مطلوبست تنش برشی

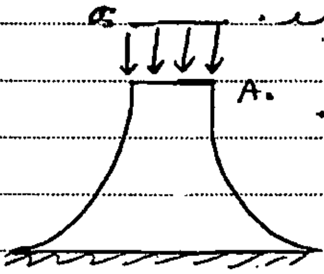


$t = 12\ mm$ $\qquad \vec{T} = \vec{F} \times \vec{r} \Rightarrow 450 = F \times 0/025$

طول $L = 50\ mm$ $\qquad \Rightarrow F = 18\ kN$

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{18}{12 \times 50} = 30\ MPa$$

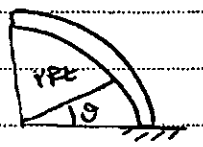
۵ـ وزن مخصوص $\rho g = \gamma$ ، A_0 ... را طوری بیابید که تنش در مقاطع σ باشد.



جواب: $A = A_0\, e^{\frac{\gamma}{\sigma} y}$

۶ـ افزایش طول را بیابید:

$\varepsilon = 0/1 \cos\theta$



$$\varepsilon = \frac{d\delta}{dL} \Rightarrow d\delta = \varepsilon\, dL \Rightarrow \delta = \int \varepsilon\, dL = \int_0^{\pi/2} \varepsilon\, r\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 0/1 \cos\theta\, d\theta = 0/1 \sin\theta \Big|_0^{\pi/2} = \boxed{0/1}$$

۷ـ تغییر مکان یک جسم در راستای x و y و z به ترتیب با u و v و w نشان داده می‌شوند. کرنش‌های نقطه ... y و ... در 2x در

نقطه (2,0,-1) ... بیابید.

$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$

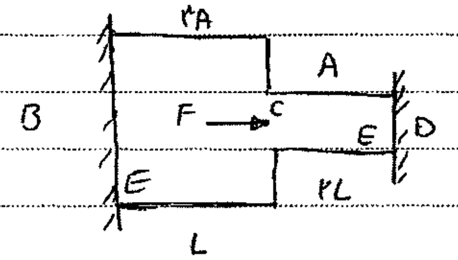
$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$

$u(x,y,z) = 3x^2 - 5xy + 4z^2x - 2y$ ، $v(x,y,z) = -5x^2y^2 + 2xyz^2 + 4z$

$w(x,y,z) = 2x + 4xy^2z^2 - 6z^2 - 12y^4$

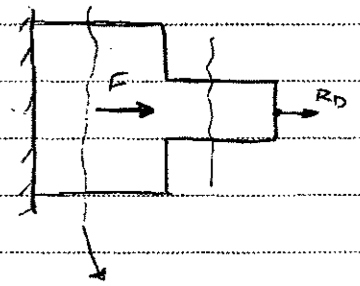
$\varepsilon_x =$

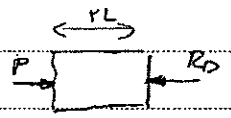
۸- مطلوبست: عکس‌العمل تکیه‌گاه D و جابجایی نقطه C



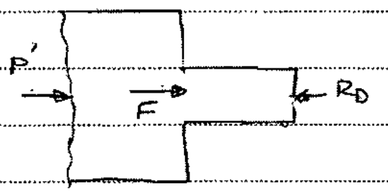
$$\delta = \frac{FL}{EA}$$

از آنجا که صفر است، چون میله دو طرف ثابت شده است

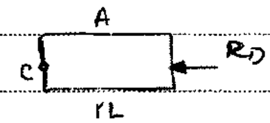




$$P = R_D \Rightarrow \delta_1 = \frac{R_D(۲L)}{EA}$$



$$P' = R_D - F \Rightarrow \delta_۲ = \frac{(R_C - F)L}{۳EA}$$



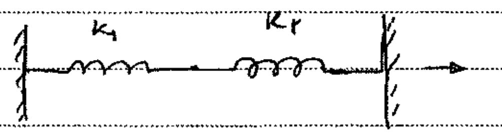
$$\delta_D = \delta_1 + \delta_۲ = 0 \Rightarrow R_D = +\frac{F}{۷}$$

$$\boxed{\delta_C = \frac{R_D(۲L)}{EA} = \frac{F/۷\,(۲L)}{AE} = \frac{۲}{۷}\frac{FL}{AE}}$$

میتوان میله الاستیک را به صورت فنر مدل کرد.

$$\delta = \frac{FL}{EA} \qquad F = k\delta$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{EA}{L}}$$

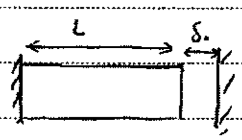


فنرها موازی هستند

$$K_1 = \frac{E(۳A)}{L} \qquad E_۲ = \frac{EA}{۲L}$$

$$\delta_C = \frac{R_B}{K_1} = \frac{R_D}{K_۲} = \frac{F}{K_1 + K_۲}$$

۹- اگر دما در میله ثابت $\underline{\Delta T}$ تغییر کند، مطلوبست تنش ایجاد شده در میله

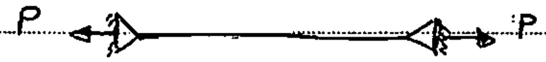


$$\delta_{\text{حرارتی}} - \delta_{\text{نیرو}} = \delta_0 \Rightarrow \alpha L \Delta T - \frac{\sigma L}{E} = \delta_0$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{(\delta_0 - \alpha L \Delta T)E}{L}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱۰ـ تنش اولیه سیم در دمای $20^\circ C$، $35\ MPa$ است. در چه دمایی تنش سیم صفر می‌شود؟



$\alpha = 16 \times 10^{-7}\ 1/^\circ C$ و $E = 210\ GPa$

در این حالت سیم منقبض است به عبارتی کشیده با نیروی P. حال برای بازگرداندن آن به حالت بدون انقباض دلیل باید دمای آن را تغییر دهیم

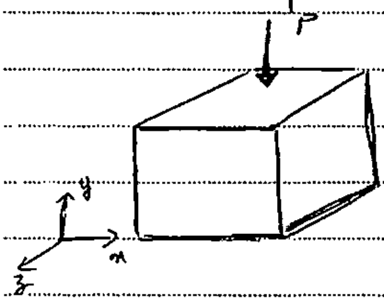
با تغییر دما باید به اندازه‌ای که نیروی P حذف شود، یعنی باید گرم شود

(اولیه) تنش اولیه — تنش حرارتی

$$\sigma - \alpha E \Delta T = 0$$

$$320 \times 10^{7} = 16.1 \times 10^{-7} \times 210 \times 10^{9}\ \Delta T = 0 \Rightarrow \Delta T = 10.2^\circ C = T_2 - 20 \Rightarrow T_2 = 30.2^\circ C$$

۱۱ـ مکعبی با ابعاد ... در ۵ طرف بسته است و از طرف دیگر آزاد تحت فشار P است. تغییر حجم نسبی را بیابید.



$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

چون سطح مکعب از ۵ طرف بسته است، $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$ ولی σ_x و σ_z صفر نیستند چون

از طرف دیواره‌ها تحت فشارند، به علت تقارن شکل $\sigma_x = \sigma_z$ ، $\sigma_y = -P$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right) = \frac{1}{E}\left(-P - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right) \quad (*)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right) = 0 \Rightarrow \sigma_x - \nu(-P + \sigma_x) = 0 \Rightarrow \sigma_x(1-\nu) = -\nu P$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{-\nu P}{1-\nu} \overset{*}{\Rightarrow} \boxed{\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(-P + \frac{2\nu^2 P}{1-\nu}\right)}$$

اگر رابطه ε_x ، ε_y ، ε_z را با هم جمع کنیم:

$$\varepsilon_v = \frac{-P}{E}\left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\right)$$

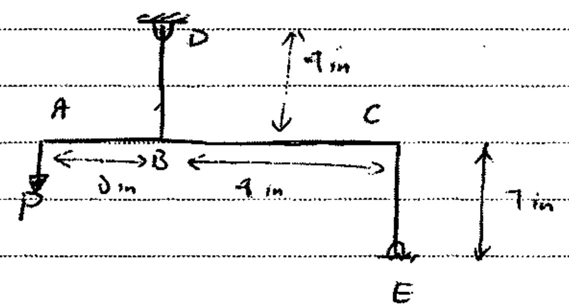
Subject:
Year. Month. Date. ( )

★ این فرمول ضروری را حفظ نمایید

$$\sigma_y = 2G\,\varepsilon_y + \lambda\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

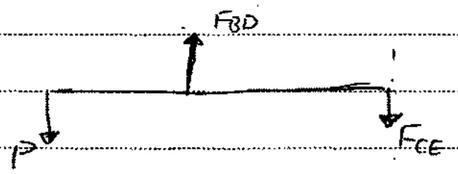
۱۲



$A_{BD} = 0.4\ in^2$, $E_{BD} = 1.5\times10^7\ psi$

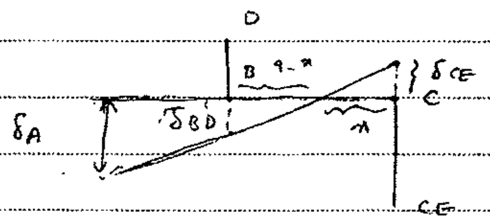
$A_{CE} = 0.5\ in^2$, $E_{CE} = 10.4\times10^7\ psi$

مقدار ماکزیمم نیروی P که تغییر مکان نقطه A به $0.014\ in$ تجاوز نکند. (میله AC صلب است)



$P = F_{BD} - F_{CE}$ $\qquad \sum M_B = 0 \Rightarrow 5P = 9\times F_{CE} \Rightarrow \boxed{F_{CE} = \frac{5}{9}P}$

$\Rightarrow \boxed{F_{BD} = \frac{14}{9}P}$



$$\delta_{BD} = \frac{F_{BD}\,L_{BD}}{A_{BD}\,E_{BD}} = \frac{\frac{14}{9}P\times9}{0.4\times1.5\times10^7} = 2.3\times10^{-6}P$$

$$\delta_{CE} = \frac{F_{CE}\,L_{CE}}{A_{CE}\,E_{CE}} = \frac{\frac{5}{9}P\times6}{0.5\times10.4\times10^7} = 0.64\times10^{-6}P$$

$$\frac{\delta_{BD}}{\delta_{CE}} = \frac{9-x}{x}$$

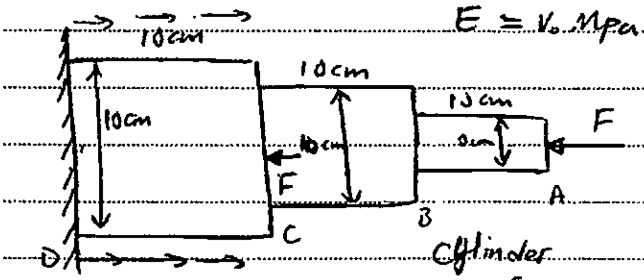
$$\frac{\delta_{BD}}{\delta_A} = \frac{9-x}{14-x} \Rightarrow 2.3\times10^{-6}P = 0.014\,\frac{9-x}{14-x}$$

$\delta_A = 0.014$ ، max درحالت

$\Rightarrow \boxed{P=}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نیروی F را طوری بیابید که جابجایی انتهای تیر صفر شود $E = 70\,MPa$



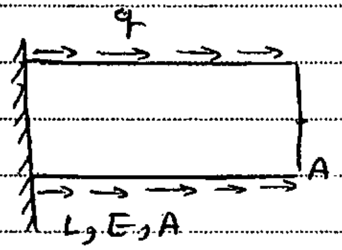
$\delta_{A/B}$ $\delta_{B/C}$ $\delta_{C/D}$

$$\delta_A = 0 \quad \frac{F \times 150}{\frac{\pi (50)^2}{4} \times 70 \times 10^3} + \frac{F \times 150}{\frac{\pi (100)^2}{4} \times 70 \times 10^3} + \frac{2F \times 150}{\frac{\pi (100)^2}{4} \times 70 \times 10^3} - \int_0^{150} \frac{x \times 0.2 \times dx}{\frac{\pi (100)^2}{4} \times 70 \times 10^3} = 0$$

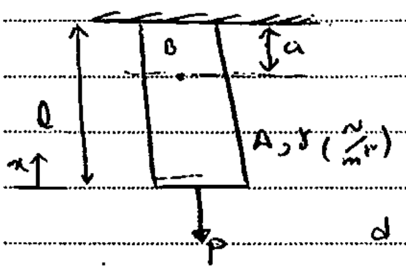
$\Rightarrow F =$

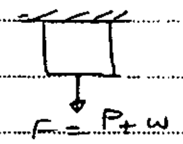
مثال: A ثابت کنید

$$\delta_A = \int_0^L \frac{q(x)\,dx}{A\,E} = \int_0^L \frac{\int_x^L q(t)\,dt}{AE}\,dx$$



مثال: مطلوب است δ_B



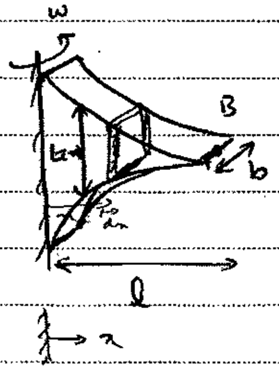


$$d\,w_{(x)} = \gamma A\,dx \Rightarrow w_{(x)} = \gamma A x \Big|_0^{l-a} \Rightarrow w = \gamma A (l-a)$$

$$\Rightarrow F = P + \gamma A (l - a) \quad \Rightarrow \delta_B = \frac{FL}{AE} = \boxed{\frac{(P + \gamma A (l-a))\,a}{AE}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: $\delta_B = ?$



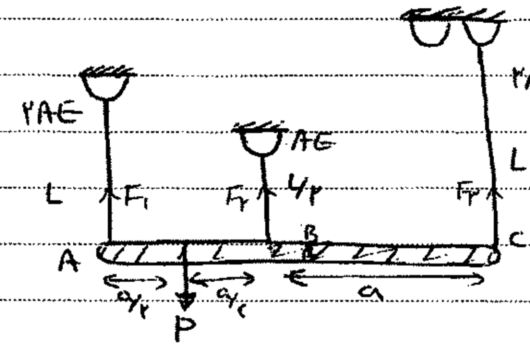
$t_{(x)} = 4l - x^2$

$t_{(x)} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2 = l}$

$A_{(x)} = t_{(x)}\, b$

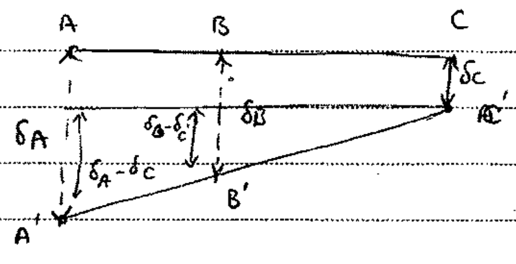
$dE = m r \omega^2 = \gamma\, t_{(x)}\, b\, dx\, x\, \omega^2$

مثال: AC صلب است مفروض



$F_1 + F_2 + F_3 = P$

$\sum M_B = 0 \Rightarrow$

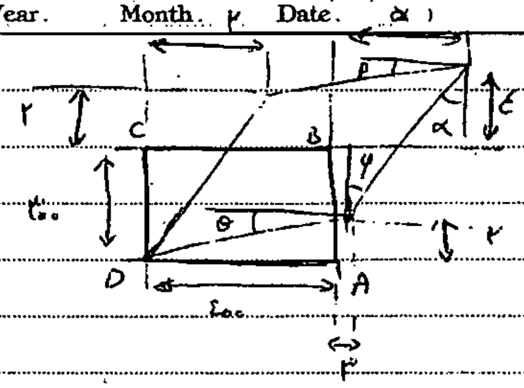


$$\frac{\delta_B - \delta_C}{\delta_A - \delta_C} = \frac{3/2}{4/2} = 3/4 \Rightarrow$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. ۲ Date. ۵)

۱۳ ـ کرنش برشی γ_{xy} در نقاط A و B



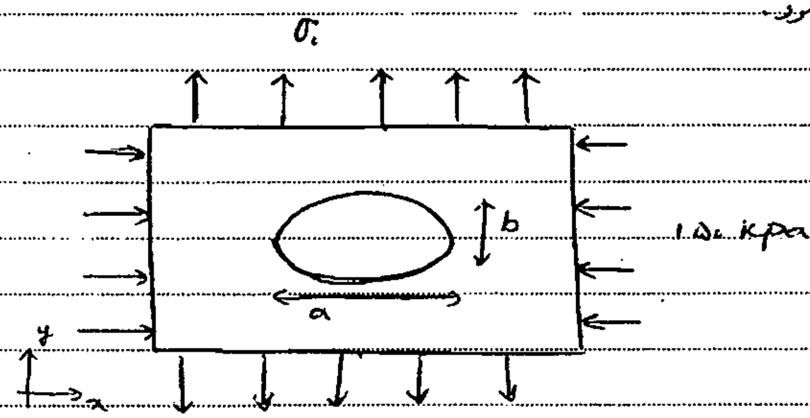
$$\alpha = \tan^{-1}\frac{5-3}{302} = 0.00662252\ \text{rad}$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{2}{403} = 0.00496278\ \text{rad}$$

$$\varphi = \alpha \quad , \quad \beta = \theta \qquad\qquad (\gamma_B)_{xy} = \alpha + \beta = 0.0116\ \text{rad}$$

$$(\gamma_A)_{xy} = -0.0116\ \text{rad}$$

تنش σ_0 را طوری بیابید که حفره به ۹۵٪ تبدیل شود



$$b = 0.95a$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \cancel{\sigma_z}\right)\right) = \frac{1}{E}\left(-150 - \nu\sigma_0\right) \Rightarrow \delta_x = \frac{a}{E}\left(-150 - \nu\sigma_0\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \cancel{\sigma_z}\right)\right) = \frac{1}{E}\left(\sigma_0 + 150\nu\right) \Rightarrow \delta_y = \frac{b}{E}\left(\sigma_0 + 150\nu\right)$$

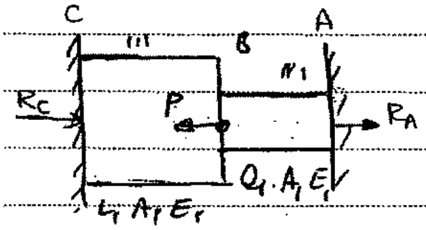
$$a + \delta_x = b + \delta_y \Rightarrow a + \frac{a}{E}\left(-150 - \nu\sigma_0\right) = 0.95a + \frac{0.95a}{E}\left(\sigma_0 + 150\nu\right)$$

$$\Rightarrow E - 150 - \nu\sigma_0 = 0.95E + 0.95\sigma_0 + 0.95\times 150\nu$$

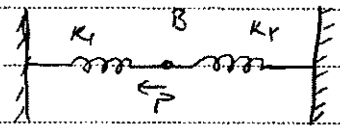
$$\Rightarrow \sigma_0 = \frac{0.05E - 150 - 0.95\times 150\nu}{\nu + 0.95}$$

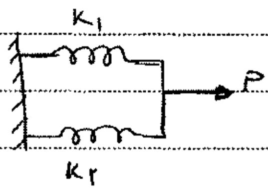
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسئله: مطلوبست جابجایی نقطه B و R_A و R_C.



$$K_1 = \frac{A_1 E_1}{L_1} \qquad K_2 = \frac{A_2 E_2}{L_2}$$



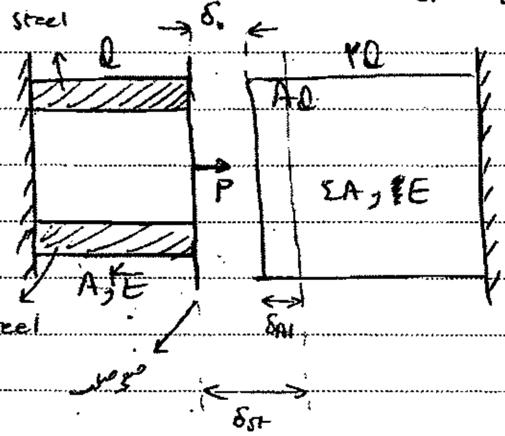


$$\delta_B = \delta = \frac{P}{K_1 + K_2} = \frac{P}{\frac{A_1 E_1}{L_1} + \frac{A_2 E_2}{L_2}}$$

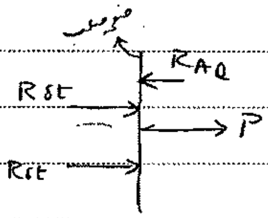
$$F_1 = K_1 \delta = R_C = \frac{P A_1 E_1}{L_1 \left(\frac{A_1 E_1}{L_1} + \frac{A_2 E_2}{L_2} \right)}$$

$$F_2 = K_2 \delta = R_A = \frac{P A_2 E_2}{L_2 \left(\frac{A_1 E_1}{L_1} + \frac{A_2 E_2}{L_1} \right)}$$

مسئله:



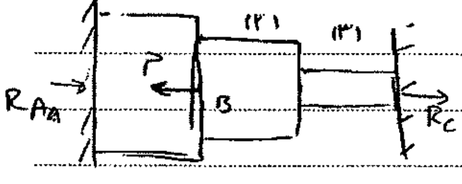
$$\delta_{st} = \delta_0 + \delta_{Al}$$

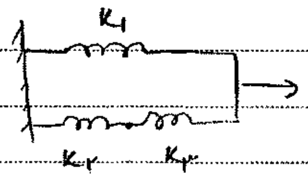


(1)
$$P = R_{Al} - 2R_{st}$$

(2)
$$\frac{R_{st} \ell}{4AE} = \delta_0 + \frac{R_{Al} (2\ell)}{4AE} \xrightarrow{(1),(2)} R_{st}, R_{Al} \checkmark$$

مسئله:





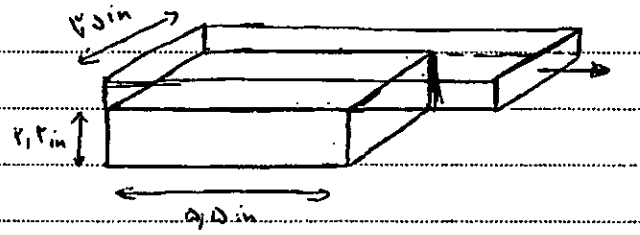
$$\delta_B = \frac{P}{K_1 + \left(\frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} \right)^{-1}}$$

$$\delta_C = 0 \Rightarrow \frac{R_C}{K_3} + \frac{R_C}{K_2} + \frac{(R_C - P)}{K_1} = 0 \Rightarrow R_C = \checkmark$$

$$R_C + R_A = P \Rightarrow R_A = \checkmark$$

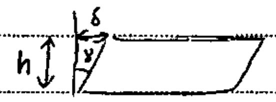
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$G = 55\ kpsi$ ـ۱۴



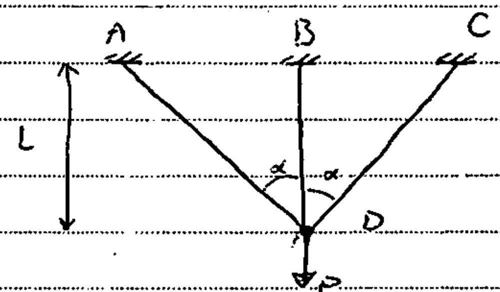
$P = 9\ kips$ مطلوبست تغییر طول میله. (ورق پایینی ثابت است)

$$\tau = \frac{9}{5.5 \times 3.5} = 467.53\ psi \qquad \tau = G\gamma \Rightarrow \gamma = 0.0085006$$

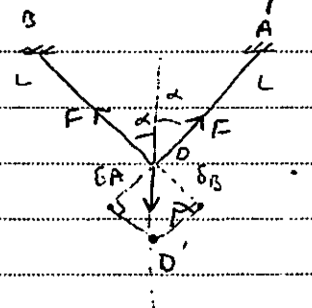


$$\gamma = \frac{\delta}{h} = \frac{\delta}{2.2} \rightarrow \delta = 0.0187\ in$$

۱۵ـ جنس و سطح مقطع هر سه میله یکسان است. تغییر مکان نقطه D را بیابید.



نحوه حل:



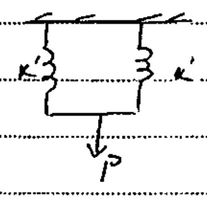
$$2F\cos\alpha = P \Rightarrow F = \frac{P}{2\cos\alpha}$$

$$\delta_A = \delta_B = \frac{FL}{AE} = \frac{PL}{2AE\cos\alpha}$$

برای بدست آوردن DD′ باید مثلثاتی با دو سیستم A و B تصویر کنیم

$$DD' = \delta_D = \frac{\delta_A}{\cos\alpha} = \frac{PL}{2AE\cos^2\alpha}$$

یعنی اگر جسم میله‌ای را به دید فنر نگاه کنیم



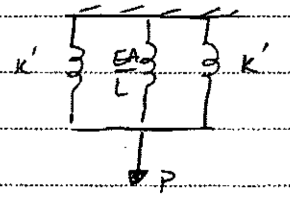
$$\delta = \frac{P}{2K'} = \frac{PL}{2AE\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow K' = \overbrace{\frac{AE}{L}}^{K}\cos^2\alpha = K\cos^2\alpha$$

ثابت فنر معادل شده میله: $K = \frac{AE}{L}$
الاستیک در جلسه ۲

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل سوال ۱

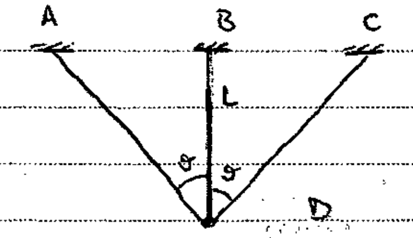


$$K' = KC_{\alpha}^{2} = \frac{EA\,C_{\alpha}^{2}}{\left(\frac{L}{C_{\alpha}}\right)} = \frac{EA}{L}C_{\alpha}^{3}$$

طول میله مایل

$$\delta_D = \frac{P}{\frac{2EA}{L}C_{\alpha}^{3} + \frac{EA}{L}} = \boxed{\frac{PL}{AE(1+2C_{\alpha}^{3})}}$$

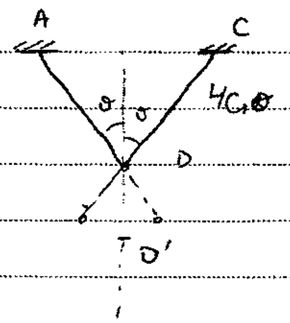
۱۷- اگر سه میله مشخص شده به اندازه ΔT افزایش دما دهیم مطلوبست δ_D (جابجایی) ؟



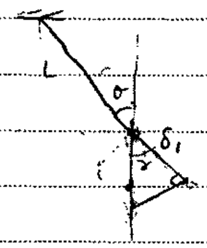
فرض کنیم میله B به اندازه افزایش طول دهد

$DD' = \alpha L \Delta T$

اگر میله‌های مایل را افزایش دما دهیم



طبق (1) : $DD' = \left(\alpha \frac{L}{C_{\theta}} \Delta T\right) / C_{\theta} = \frac{\alpha L \Delta T}{C_{\theta}^{2}}$



$\delta_1 = \frac{L\alpha \Delta T}{C_{\theta}}$ (1)

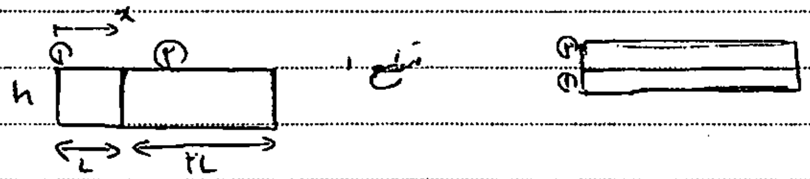
چون $\frac{\alpha L \Delta T}{C_{\theta}^{2}} > \alpha L \Delta T$ پس میله B کشش و میله‌های A و C فشار تحمل می‌کنند و

$\alpha L \Delta T < \delta_D < \frac{\alpha L \Delta T}{C_{\alpha}^{2}}$

PAPCO

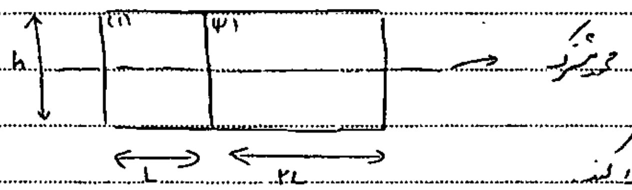
Subject:
Year.　　Month.　　Date.　　( )

۱۷ـ اگر $E_2 = 2E_1$ محل نیروی محوری مقطع را تعیین کنید (تا در محور کشش باشد) ($\bar{x} = ?$)



اگر $n = \frac{E_1}{E_2}$ باشد با ضرب کردن عرض اضلاع ماده با مدول E_1 در n به ماده‌ای با مدول E_2 تبدیل می‌شود.

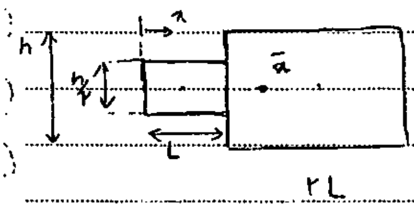
این تغییر باید در اضلاع عمود بر محور مشترک مقطع رخ می‌دهد.



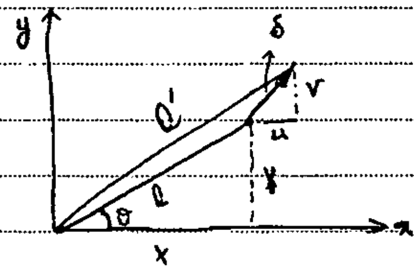
طبق $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{2}$ در مقطع ۱ ضلع h باید به $h/2$ کاهش پیدا کند.

$\Downarrow$

نیرو باید در مرکز سطح وارد شود تا محوری باشد.



$$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{L/2\,(L h/2) + 2L\,(2Lh)}{Lh/2 + 2Lh} = 1.7L$$



$\delta = \ell' - \ell$　　(For small deformations) معمولاً برای تغییر شکل‌های کوچک

$$\ell^2 = x^2 + y^2$$

$$\xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} \quad 2\ell \underbrace{d\ell}_{\delta} = 2x \underbrace{dx}_{u} + 2y \underbrace{dy}_{v}$$

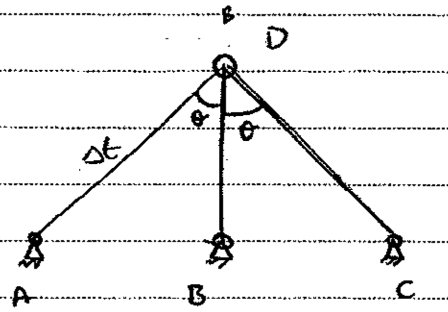
$x = \ell \cos\theta$

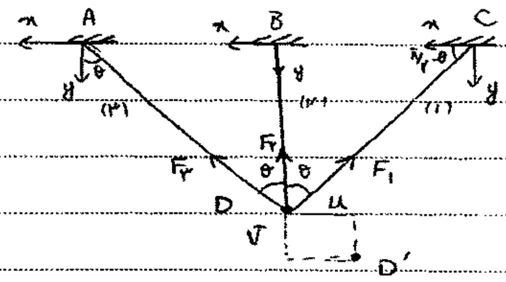
$\longrightarrow$ $\boxed{\delta = u\cos\theta + v\sin\theta}$

$y = \ell \sin\theta$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سوال شماره ۴ تمرین [illegible]:





طبق دیاگرام ثابت شد

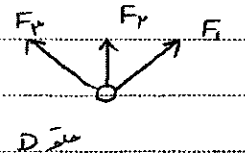
$$\delta_1 = -u\,Cos(\pi/2-\theta) + \bar{V}\,Sin(\pi/2-\theta)$$

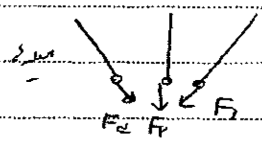
$$\Rightarrow \delta_1 = -u\,Sin\,\theta + \bar{V}\,Cos\,\theta \quad \text{I}$$

$$\delta_2 = -u\,Sin(0) + \bar{V}\,Cos(0) = \bar{V} \quad \text{II}$$

$$\delta_3 = -u\,Cos(\pi/2+\theta) + \bar{V}\,Sin(\pi/2+\theta) = \bar{u}\,Sin\,\theta + \bar{V}\,Cos\,\theta \quad \text{III}$$

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1\,Sin\,\theta - F_3\,Sin\,\theta = 0 & \text{IV} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_2 + F_1\,Cos\,\theta + F_3\,Cos\,\theta = 0 & \text{V} \end{cases}$$





$$\begin{cases} \delta_1 = \dfrac{F_1 L}{AE} & \text{VI} \\ \delta_2 = \dfrac{F_2 L\,Cos\,\theta}{AE} & \text{VII} \\ \delta_3 = \dfrac{F_3 L}{AE} & \text{VIII} \end{cases}$$

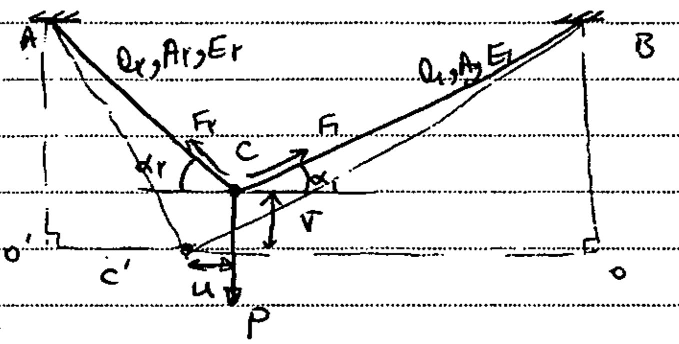
ابتدا با ترکیب روابط I، II، VI، VII و VIII روابطی بین $\bar{V}$ و u و F_i بدست می‌آید و با جایگذاری

در معادله IV و V جواب نهایی یافته می‌شود.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

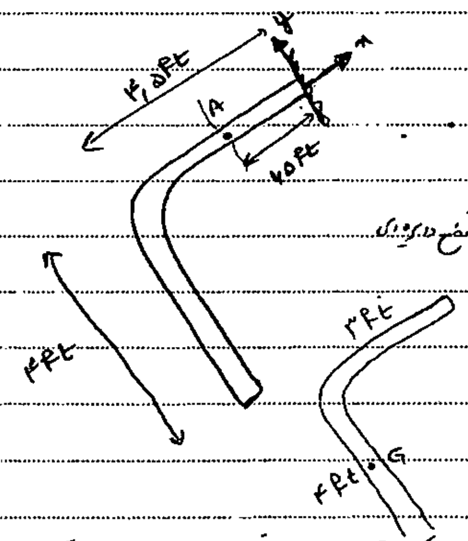
روش جابجایی (displacement) :۱



$$\begin{cases} F_1 \cos\alpha_1 - F_2 \cos\alpha_2 = 0 \\ F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 = P \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_1 = \dfrac{F_1 l_1}{A_1 E_1} \\ \delta_2 = \dfrac{F_2 l_2}{A_2 E_2} \end{cases}$$

$$B\hat{O}C: \quad (l_1 + \delta_1)^2 = (l_1 \sin\alpha_1 + v)^2 + (l_1 \cos\alpha_1 + u)^2$$

صرف‌نظر از مرتبه ۲ $\Longrightarrow$ $\boxed{\delta_1 = v \sin\alpha_1 + u \cos\alpha_1}$



۱۸ـ میله‌ای تحت وزن ۱۰ $\frac{lb}{ft}$ است. در نقطه A $\tau_{max} = ?$

به قطر ۱

مقطع دایره‌ای $\leftarrow$ $J = \frac{1}{2}\pi r^4$

در مقطع دایره‌ای تنش به صورت خطی تغییر می‌کند. $\tau = \dfrac{T r}{J}$

پس $\tau_{max} = \dfrac{TR}{J}$

نیروی وزن در قسمت 3 ft باعث خمش می‌گردد نه پیچش. یعنی پیچش فقط حاصل از گشتاور ناشی از وزن قسمت 4 ft است

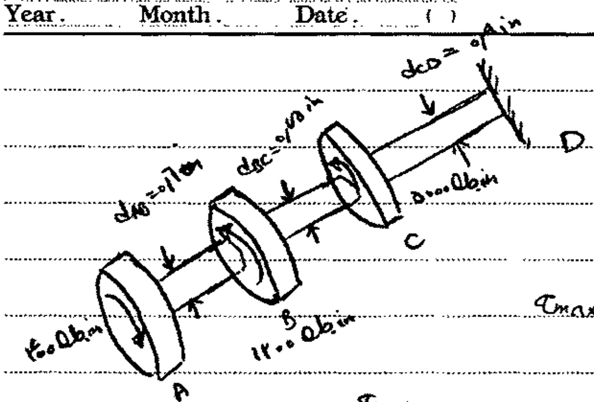
$F = Pl = 10 \times 4 = 40\ lb \Rightarrow T_A = 2 \times 40 = 80\ lb.ft = 960\ lb.in$

$$\tau_{max} = \frac{T_A \times r}{\frac{1}{2}\pi r^4} = \frac{960 \times 0.5}{\frac{1}{2}\pi \times (0.5)^4} = 4.89\ ksi$$

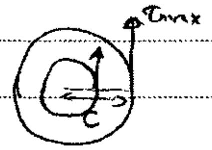
Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱۹ـ گشتاور ... میله AD ... قطر ۰٫۳in

τ_{max} ... !



$$\tau_{max}=\frac{Tc}{J}$$



$$AB:\quad J=\frac{\pi}{2}(0.3^4-0.15^4)=0.011928\ in^4$$

$$\tau_{max}=\frac{400\times0.3}{0.011928}=10060\ psi$$

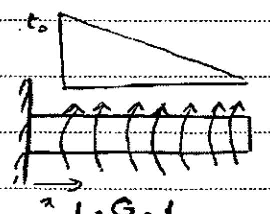
$$BC:\quad J=\frac{\pi}{2}(0.375^4-0.15^4)$$

$$\tau_{max}=\frac{800\times0.375}{J}=9911\ psi$$

$$CD:\quad J=\frac{\pi}{2}(0.45^4-0.15^4)\Rightarrow\tau_{max}=\frac{(1200+500-400)\times0.45}{J}=9196\ psi$$

τ_{max} در میله AB است.

۲۰ـ ... $T=L$ ...



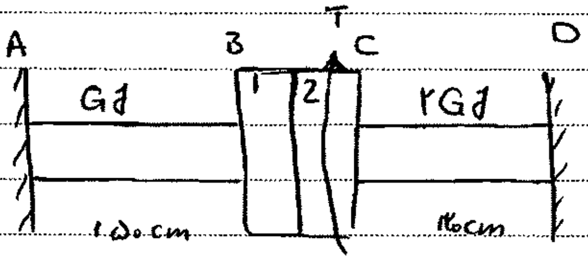
$$\varphi=?$$

$$\varphi=\frac{TL}{JG}\xrightarrow[\text{گسترده}]{\text{در بارگذاری}}\varphi=\frac{\bar{a}S}{GJ}$$

$$\Rightarrow\varphi=\frac{\frac{1}{3}L\times\frac{1}{2}L\,t_0}{GJ}=\boxed{\frac{t_0L^2}{6GJ}}$$

۲۱ـ ... ۰٫۰۲rad است.

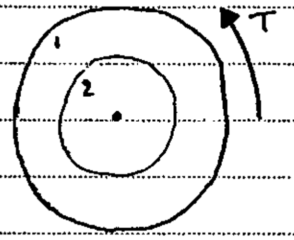
$T=1200\ N.m$ $\quad GJ=9000\ N.m^2$ ... گشتاورهای ... AB و CD ...



$$\begin{cases}\varphi_{CD}=\varphi_{AB}+\theta\Rightarrow\dfrac{T_{CD}L_{CD}}{2GJ}=\dfrac{T_{AB}L_{AB}}{GJ}+0.02\\ T_{AB}+T_{CD}=1200\ N.m\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}\begin{cases}T_{AB}=257.2\ N.m\\ T_{CD}=942.8\ N.m\end{cases}$$

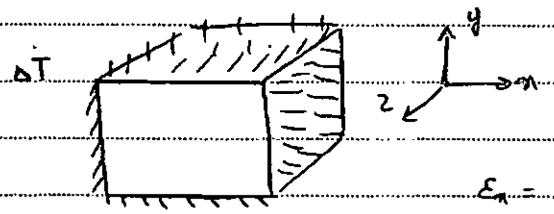
Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲۲- چه بخشی از T توسط قسمت مرکزی دایره که مساحت آن نصف مساحت دایره است تحمل می‌شود؟



$$A_2 = \frac{1}{2} A_1 \Longrightarrow r_2^2 = \frac{1}{2} r_1^2 \Longrightarrow r_2^4 = \frac{1}{4} r_1^4 \Longrightarrow J_2 = \frac{1}{4} J_1$$

$$\boxed{\varphi = \frac{TL}{GJ_1} = \frac{T'L}{GJ} \Longrightarrow \frac{T'}{T} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{1}{4}}$$



مثال: مطلوبست $\mathcal{E}_z$

$$\mathcal{E}_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \cancel{\sigma_z}^{\,0})\right) + \alpha\Delta T = 0$$

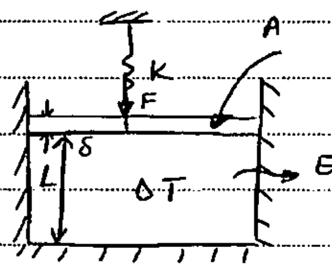
$$\Longrightarrow \sigma_x - \nu\sigma_y = -E\alpha\Delta T$$

$$\mathcal{E}_y = 0 \Longrightarrow \sigma_y - \nu\sigma_x = -E\alpha\Delta T$$

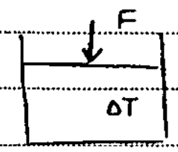
$$\Longrightarrow \sigma_x \checkmark,\ \sigma_y \checkmark$$

$$\mathcal{E}_z = \frac{1}{E}\left(\cancel{\sigma_z}^{\,0} - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right) \checkmark$$

مثال: مطلوبست تغییر ارتفاع



$$F = k\delta$$
$$\delta = \mathcal{E}_y L \Longrightarrow \boxed{F = k\mathcal{E}_y L}$$



$$\mathcal{E}_x = 0 \Longrightarrow \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \cancel{\sigma_z}^{\,0})\right) + \alpha\Delta T = 0 \Longrightarrow \sigma_x = -E\alpha\Delta T + \nu\sigma_y$$

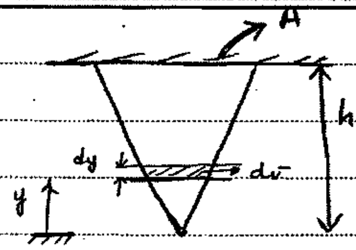
$$\sigma_y = \frac{-F}{A} = \frac{-k\mathcal{E}_y L}{A} \quad *$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \cancel{\sigma_z}^{\,0})\right) + \alpha\Delta T = \frac{1}{E}\left(\sigma_y + \nu E\alpha\Delta T - \nu^2\sigma_y\right)$$

$$\mathcal{E}_y = \sigma_y\left(\frac{1-\nu^2}{E}\right) + \nu\alpha\Delta T \overset{*}{=} \frac{k\mathcal{E}_y L}{A}\left(\frac{\nu^2 - 1}{E}\right) + \nu\alpha\Delta T$$

$$\Longrightarrow \mathcal{E}_y\left(1 - \frac{kL}{AE}(\nu^2 - 1)\right) = \nu\alpha\Delta T \longrightarrow \mathcal{E}_y = \frac{\nu\alpha\Delta T}{\left(1 + \frac{kL}{AE}(1-\nu^2)\right)}$$

$$\Longrightarrow \delta = \mathcal{E}_y L = \frac{L\nu\alpha\Delta T}{\left(1 + \frac{kL}{AE}(1-\nu^2)\right)}$$



مثال: مطلوبست ΔV ارتجاعی با γ باشد

شکل مخروط است

$$F(y) = \gamma V(y) = \frac{1}{3}\gamma A(y)\, y$$

$$\frac{A(y)}{A_0} = \left(\frac{y}{h}\right)^2 \Longrightarrow A(y) = \left(\frac{y}{h}\right)^2 A_0$$

$$\sigma_{(y)} = \frac{F(y)}{A(y)} = \frac{1}{3}\gamma y$$

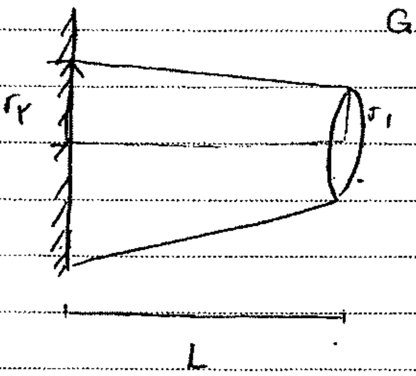
$$\varepsilon_v = \frac{1-2\nu}{E}\left(\cancel{\sigma_x}^{\,0} + \sigma_y + \cancel{\sigma_z}^{\,0}\right) = \frac{1-2\nu}{3E}\gamma y$$

$$\Delta V = \int^{h} \varepsilon_v\, dv = \int^{h} \frac{1-2\nu}{3E}\gamma y \left(\frac{y}{h}\right)^2 A_0\, dy \Longrightarrow \Delta V \checkmark$$

$$dv = A(y)\, dy = \left(\frac{y}{h}\right)^2 A_0\, dy$$

مثال: مطلوبست پیچش انتهای میله

$G(x)$ $\quad t(x)$



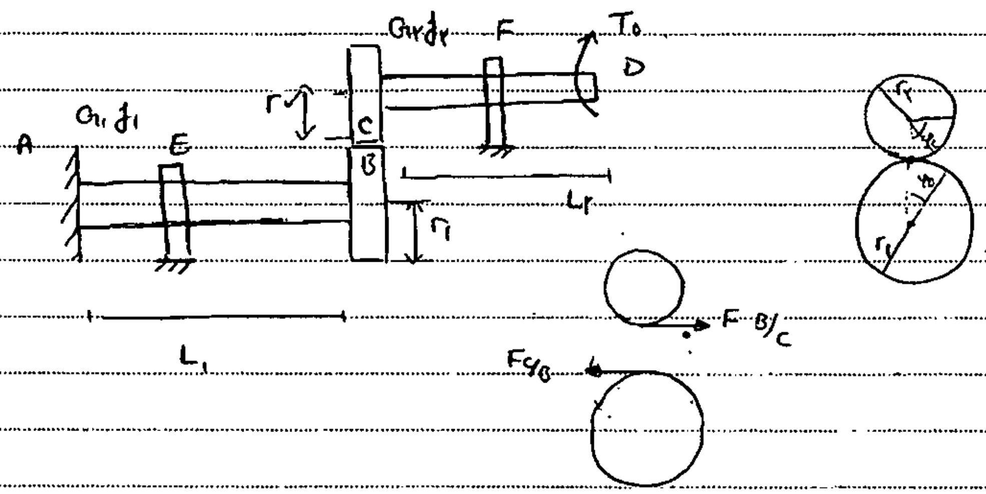
Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر موتوری با توان P وجود داشت که شفت را با سرعت ω می‌چرخاند

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

$$P = T\omega \longrightarrow \boxed{T = \frac{P}{\omega}}$$

مثال $\quad \varphi_D = ?$

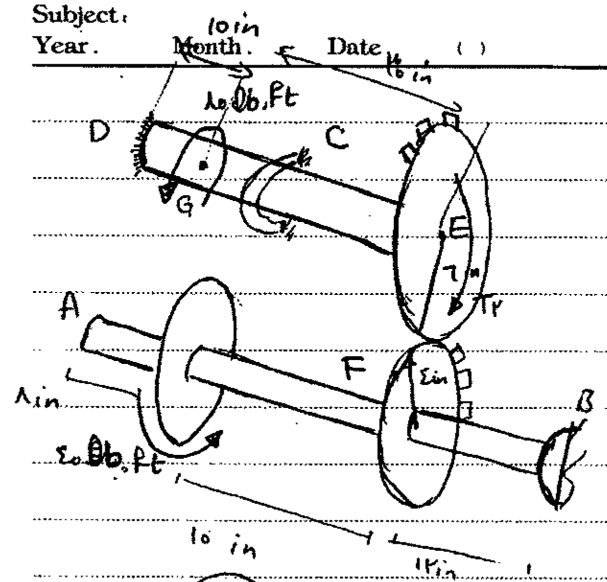


$$\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \boxed{r_1 \varphi_B = r_2 \varphi_C}$$

$$\begin{aligned} T_C &= r_2 \, F_{B/C} \\ T_B &= r_1 \, F_{C/B} \end{aligned} \Longrightarrow \begin{cases} T_B = \dfrac{r_1}{r_2} T_C \\ T_C = T_0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{T_B = \frac{r_1}{r_2} T_0}$$

$$\Rightarrow \varphi_B = \frac{T_B L_1}{G_1 J_1} = \frac{r_1}{r_2} T_0 \frac{L_1}{G_1 J_1} \Longrightarrow \varphi_C = \frac{r_1}{r_2} \varphi_B = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 T_0 \left(\frac{L_1}{G_1 J_1}\right)$$

$$\varphi_D = \frac{T_0 L_2}{G_2 J_2} + \varphi_C \quad \checkmark$$



۲۳ ـ قطر لوله ۱ in است. مقدار زاویه پیچش نقطه A ؟

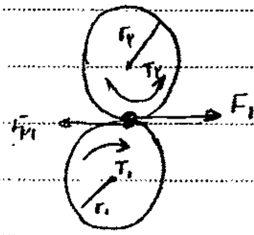
$G = 11 \times 10^6$

$\varphi_A = \varphi_F + \varphi_{A/F}$

طول قطعات با کمک و ربط دادن به هم

$$\varphi_{A/F} = \frac{TL}{GJ} = \frac{40 \times 10 \times 12 \frac{in}{ft}}{G\,J} = \boxed{0.00445\ rad}$$

$J = \frac{1}{2}\pi r^4 \qquad G = 11 \times 10^6$



$$F_{12} = F_{21} \Rightarrow \frac{T_2}{r_2} = \frac{T_1}{r_1} \Rightarrow \frac{T_2}{6} = \frac{\overset{40 \times 12}{T_1}}{4} \Rightarrow \boxed{T_2 = 60 \times 12\ lb.ft}$$

$r_1 \varphi_1 = r_2 \varphi_2$ بخاطر چرخ دنده‌ها طول کمان برابر است

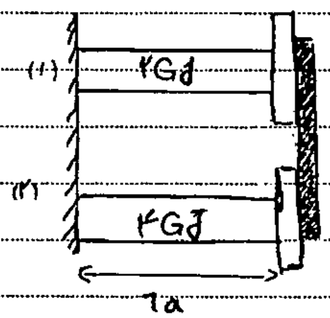
برای DCE : $\varphi_E = \varphi_{E/G} + \varphi_{G/D} = \frac{1}{GJ}\left(T_2\,(30) + (T_2 - 80 \times 12)\,(10)\right)$

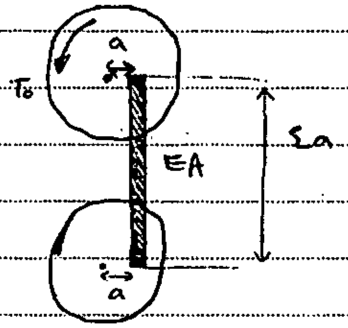
$$= \frac{12}{11 \times 10^6 J}\left(60 \times 30 - 20 \times 10\right) = 0.017778\ rad$$

$$\boxed{4\,\varphi_F = 0.017778 \times 6 \Rightarrow \varphi_F = 0.02666\ rad}$$

$\varphi_A = \varphi_F + \varphi_{A/F} = 0.03111\ rad = 1.78°$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

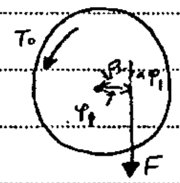




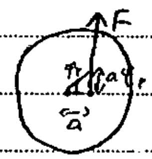
$$\frac{GJ}{EA} = \frac{1}{12} a^2 \quad - ۲۴$$

φ دیسک پایینی؟

دیسک بالایی



دیسک پایینی



$$\varphi_1 = \frac{(T_0 - Fa)(6a)}{2GJ}$$

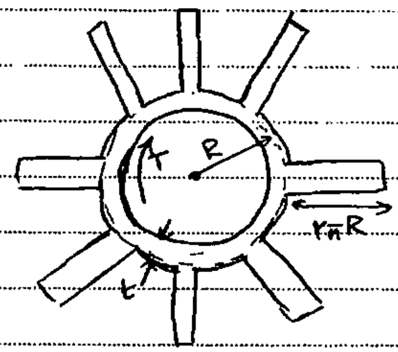
$$\varphi_2 = \frac{Fa\,(6a)}{4GJ}$$

چون در میله نیروی کششی داریم.

$$a\varphi_1 - a\varphi_2 = \delta_{\text{میله}} = \frac{F(4a)}{EA} \Longrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{4F}{EA} = \frac{4Fa^2}{12GJ}$$

جابجایی (کار) روا غلط
$\varphi_2 > \varphi_1$

$$\boxed{F = \frac{18\,T_0}{29a}} \longrightarrow \varphi_2 = \frac{3Fa^2}{2GJ} = \boxed{\frac{27\,T_0 a}{29GJ}}$$



مثال ۲۵ چند درصد گشتاور T توسط جداره نازک دایره‌ای تحمل می‌شود؟

$$\frac{R}{t} = 10$$

$$\varphi_{\text{جداره}} = \varphi_{\text{ورق}}$$

جدار نازک $\varphi = \dfrac{T_c L}{4\pi^2 R^4 G} \cdot \dfrac{2\pi R}{t} = \dfrac{T_c L}{2\pi R^3 G t}$

$$\varphi = \varphi_c \Longrightarrow \frac{T_c L}{2\pi R^3 G t} = \frac{TL}{2\pi R^3 t\left(\frac{8}{3}\left(\frac{t}{R}\right)^2 + 1\right) G}$$

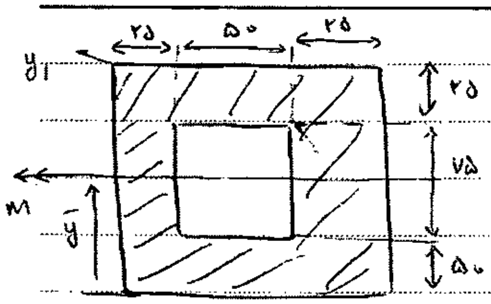
کل $\varphi = \dfrac{TL}{G\left(8 \times \frac{1}{3}(2\pi R)t^3 + 2\pi R^3 t\right)} = \dfrac{TL}{2\pi R t\left(\frac{8}{3}t^2 + R^2\right) G}$

$$\longrightarrow \boxed{T_c = 0.974\ T}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲۶- گشتاور خمشی مجاز که تیر تحمل می‌کند



$$\sigma_{\text{کشش مجاز}} = 80\ MPa$$

$$M > 0$$

$$\sigma_{\text{فشاری مجاز}} = 20\ MPa$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{100\times150\times75 - 50\times75\times(50+\frac{75}{2})}{150\times100 - 50\times75} = 70.83\ mm$$

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

$$I = \left(\frac{1}{12}\times100\times150^3 + 100\times150\times(75-70.83)^2\right) - \left(\frac{1}{12}\times50\times75^3 + 50\times75\left(50+\frac{75}{2}-70.83\right)^2\right)$$

$$= 25.59\times10^6\ mm^4$$

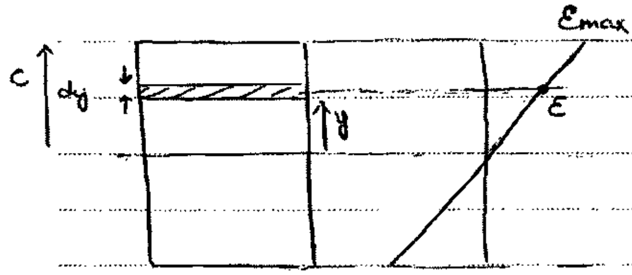
$$y_1 = 150 - 70.83 = \longrightarrow \sigma_{max\ \text{کششی}} = \frac{M y_1}{I} \Rightarrow M = \frac{\sigma I}{y} = 72235.7\ N.m$$

$$y_2 = 70.83 \longrightarrow \sigma_{\text{فشاری}\ max} = \frac{M y_2}{I} \Rightarrow M = \frac{\sigma_{all} I}{y_2} = 25858.3\ N.m$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{all} = 72235.7\ N.m}$$

۲۷- اگر رابطه‌ی بین تنش و کرنش $\sigma^n = E\varepsilon$ باشد، مطلوبست σ_{max} در یک تیر با مقطع مستطیلی،

حتی اگر مقطع نامتقارن باشد، توزیع کرنش خطی است.

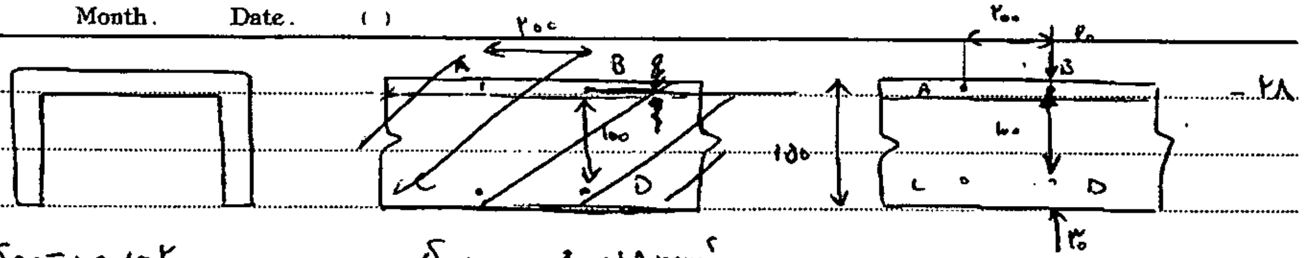


$$dM = y\sigma dA = \sqrt[n]{E\varepsilon}\ y\, b\, dy$$

$$\varepsilon = \frac{y}{c}\varepsilon_{max} = \frac{y}{c}\frac{\sigma_{max}^n}{E}$$

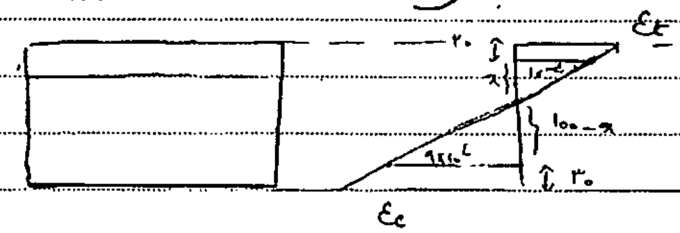
$$M = 2\int_0^c (E\varepsilon)^{1/n}\, y\, b\, dy = \frac{2n}{2n+1}\sigma_{max} b c^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{max} = \frac{2n+1}{2n}\frac{M}{bc^2}, \quad I = \frac{1}{12}b(2c)^3 \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{2n+1}{3n}\frac{Mc}{I}}$$



$\delta_{AB} = +0.02\ mm$ $\delta_{CD} = -0.018\ mm$

$E = 10^5\ \frac{N}{mm^2}$ مطلوبست $\sigma = ?$



$$\varepsilon_{AB} = \frac{\delta_{AB}}{200} = 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{CD} = \frac{\delta_{CD}}{200} = -9\times10^{-4}$$

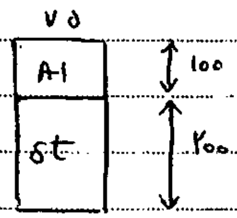
مثلث: $\frac{x}{100-x} = \frac{10^{-4}}{9\times10^{-4}} \Rightarrow \boxed{x = 10\,mm}$

$\frac{\varepsilon_t}{20+x} = \frac{10^{-4}}{x} \Rightarrow \varepsilon_t = 3\times10^{-4}$ $\sigma_t = E\varepsilon_t = 10^5\times3\times10^{-4} = \boxed{30\ MPa}$

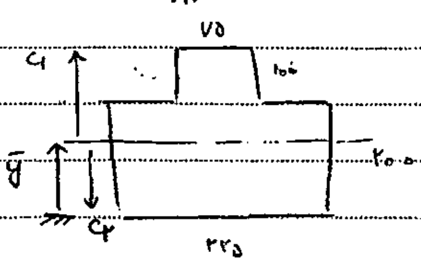
$\frac{\varepsilon_c}{130-x} = \frac{9\times10^{-4}}{100-x} \Rightarrow \varepsilon_c = 1.2\times10^{-3} \Rightarrow \sigma_c = E\varepsilon_c = 10^5\times1.2\times10^{-3} = \boxed{120\ MPa}$

مطلوبست σ_{max} در هر جنس $E_{Al} = 0.7\times10^5$ $E_{st} = 2.1\times10^5$

$M = 80\times10^6$



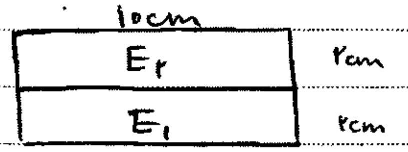
$\frac{E_{st}}{E_{Al}} = 3 = n \Rightarrow$ مبدل



$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = 121\,mm$$

$I = 301\times10^6\ mm^4$ $\sigma_{Al} = \frac{MC_1}{I} = \frac{(80\times10^6)(300-121)}{301\times10^6} = \boxed{47.6\ MPa}$

$\sigma_{st} = n\frac{MC_2}{I} = 3\times\frac{80\times10^6\times121}{301\times10^{6}} = \boxed{96.5\ MPa}$

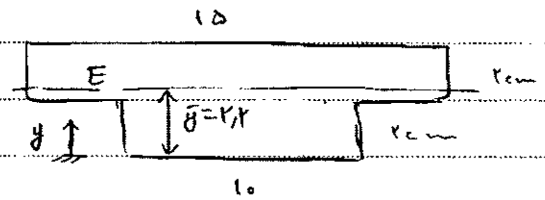


$E_1 = 140\ GPa$ $M = 200\ N.m$ ؛ فرض
$E_2 = 210\ GPa$

R و $\sigma_{max} = ?$

$\frac{E_2}{E_1} = \frac{3}{2} \Longrightarrow$ اصلاح در سطح مقطع E_2 را به اندازه عرض مشتق $\frac{3}{2}$ برابر می‌کنیم

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{(1\times 2\times 10)+(3\times 2\times 15)}{2\times 10 + 2\times 15} = \boxed{2.2}$$



$$I = \left(\frac{1}{12}\times 10\times 2^3 + 2\times 10\times 1.2^2\right) + \left(\frac{1}{12}\times 10\times 2^3 + 2\times 10\times 0.8^2\right) = \sum\left(\bar{I}_i + A_i d_i^2\right)\ [cm^4]$$

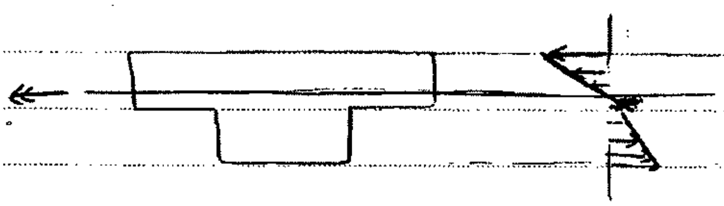
$$n_i = \frac{E_i}{E_1 \to E_{ref}} \qquad \sigma_i = \frac{n_i M y_i}{I}$$

برای قسمت بالای: $\sigma_{max} = \frac{3}{2}\times\frac{M}{I}\times(1.8)$

برای قسمت پایینی: $\sigma_{max} = \frac{M}{I}\times 2.2$

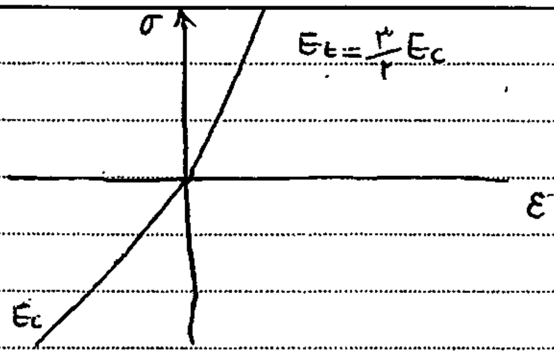
$\Longrightarrow \boxed{\sigma_{max} = 2.7\ \frac{M}{I}}$

اگر بخواهیم قطعه را بررسی کنیم



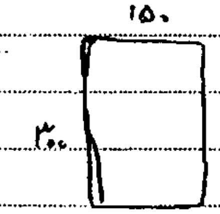
$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E_1 I} \longrightarrow \boxed{R = \frac{E_1 I}{M}}$$

Subject: Year. Month. Date. ( )

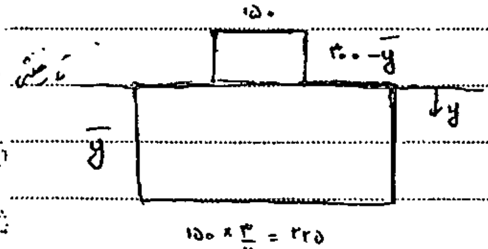


۳۰ـ مادهٔ غیر ایزوتروپیک $M=+240\ kN.m$

$E_t=\frac{3}{2}E_c$ مطلوبست σ_{max} کششی و فشاری



چون در حالت کشش و فشار، E یکسان نیست



قاعدتاً برای این صورت در نظر گرفت که دو جنس با E های متفاوت داریم. قسمت کششی را

معادل می‌کنیم با استفاده از $\frac{3}{2}$ برابر کردن اضلاع قسمت کششی موازی با تار خنثی.

تار خنثی محل جدایی قسمت کششی از قسمت فشاری است. پس مرکز آن معلوم است

$$\bar{y}=\frac{-\frac{\bar{y}}{2}(225\times\bar{y})+\frac{300-\bar{y}}{2}\times150\times(300-\bar{y})}{A_2-A_1}$$ چون مبدأ را روی تار خنثی در نظر گرفتیم

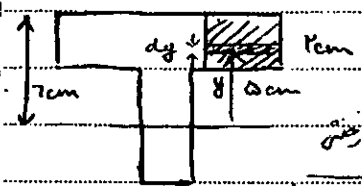
$$\Rightarrow \boxed{\bar{y}=135\ mm}$$

$$I=\Sigma I_i=\frac{1}{3}(225)(135)^3+\frac{1}{3}(150)(300-135)^3=4.09\times10^{+8}\ mm^4$$

*
$$\sigma_{max\,t}=\frac{3}{2}\frac{MC_1}{I}=\frac{3}{2}\left(\frac{240\times10^3\times135\times10^{-3}}{4.09\times10^8\times10^{-12}}\right)=96.8\ MPa$$

$$\sigma_{max\,C}=\frac{MC_2}{I}=\frac{240\times10^3\times(300-135)}{4.09\times10^8\times10^{-12}}=118.8\ MPa$$

۳۱ـ $M=960\ N.m$ ، $I_{N.A}=2784\ cm^4$ نیرویی که به قسمت هاشور خورده وارد می‌شود؟



$$dF=\sigma dA=\frac{My}{I}dA\Rightarrow F=\frac{M}{I}\int y\,dA$$

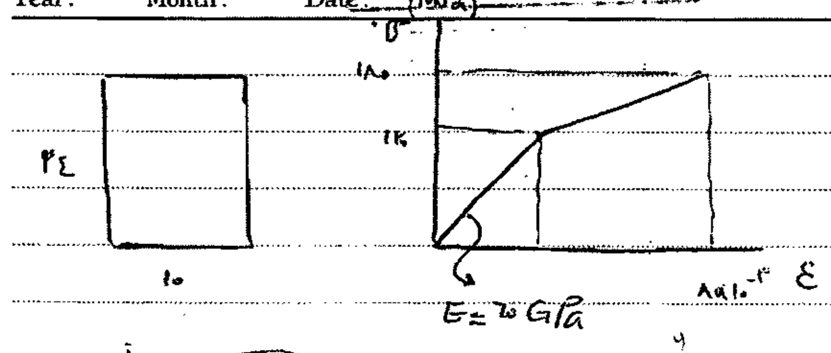
$$\Rightarrow \boxed{F=\frac{M}{I}Q} \Longrightarrow \boxed{F=\frac{960\times(0.02\times0.05\times0.05)}{2784\times10^{-8}}=1.72\ kN}$$

$Q=A\bar{y}$

PAPCO

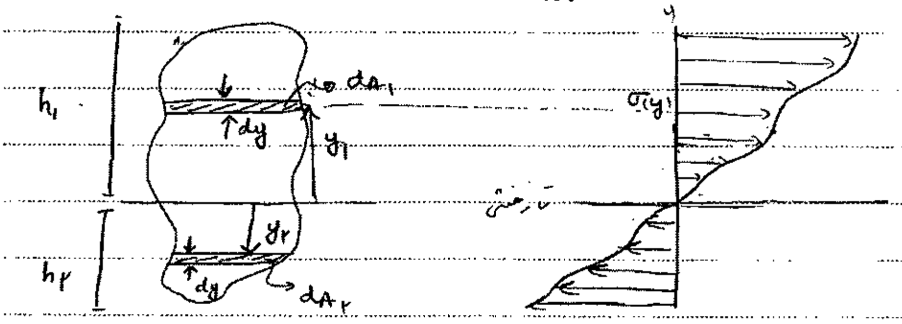
Subject:
Year. Month. Date.

۳۱: تیر با نمودار تنش و کرنش داده شده ممان را بیابید.



$M = ?$

در حالت کلی:



$$dM = y\,dF = y\,\sigma_y\,dA = y\,\sigma_y \overbrace{f(y)\,dy}^{dA}$$

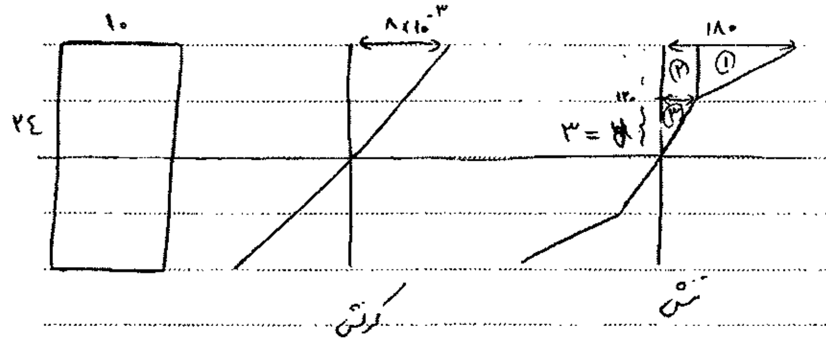
$$\Rightarrow M_1 = \int_0^{h_1} y\,\sigma_y\,f(y)\,dy \xrightarrow{\text{و همچنین}} M_2 \checkmark$$

در مقطع مستطیلی: $f(y) = b \Rightarrow M = b\left[\int_0^{h_1} y_1\,\sigma(y)\,dy + \int_0^{h_2} y_2\,\sigma(y)\,dy\right]$

یادآوری: $\bar{y} = \dfrac{\int y\,f(y)\,dy}{A} \qquad A = \int f(y)\,dy$

$$\Rightarrow \boxed{M = b\left(A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2\right)}$$

و در حل این مثال:



$$\varepsilon_y = \frac{\sigma}{E} = \frac{120\times10^{6}}{60\times10^{9}} = 2\times10^{-3}$$

$$\frac{y}{12} = \frac{2\times10^{-3}}{8\times10^{-3}} \Rightarrow y = 3\,cm$$

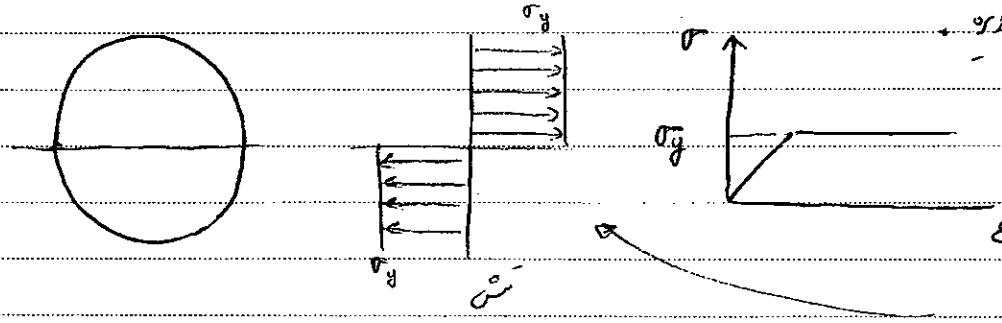
چون در بالا و پایین تار خنثی متقارن است

$$M = 2\left(M_1 + M_2 + M_3\right) = 2\left(A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 + A_3\bar{y}_3\right)b =$$

۳۲- ضریب شکل کره

M پلاستیک

$$S.F = \frac{M_P}{M_y}$$



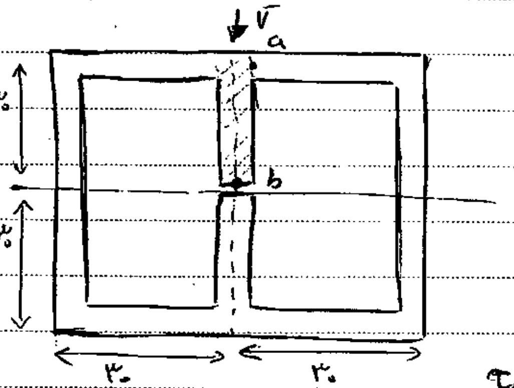
لحظه ورود به حالت پلاستیک

$$M_P = \sigma_y A_1 \bar{y}_1 + \sigma_y A_2 \bar{y}_2 \Longrightarrow M_P = \frac{A}{2}\sigma_y(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)$$

$$A_1 = A_2 = \frac{A_{tot}}{2}$$

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \frac{4r}{3\pi} \longrightarrow M_P = \frac{1}{2}\times\pi r^2 \sigma_y \times 2\times\frac{4r}{3\pi} = \boxed{\frac{4r^3}{3}\sigma_y}$$

$$M_y = \frac{\sigma_y I}{y_{\to r}} =$$



۳۳- تنش برشی در نقاط a و b؟

$V = 24N$ $t = 4mm$

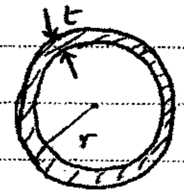
چون b در تار خنثی است $\tau_b = 0$

$$\tau_a = \frac{VQ}{It} \quad \begin{cases} t = \text{طول برش} = 8 \\ Q_a = A\bar{y} = 30\times4\times15 = 1800\ mm^3 \end{cases}$$

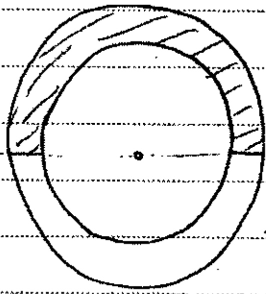
$$I = \frac{1}{12}\times60\times60^3 - 2\times\frac{1}{12}\times24\times60^3 = \frac{1}{12}\times12\times52^3 = 517568\ mm^4$$

$$\tau_a = \frac{26\times10^3\times1800}{517568\times8\times10^{-6}} = 10/43\ KPa$$

Subject:
Year. Month. Date.

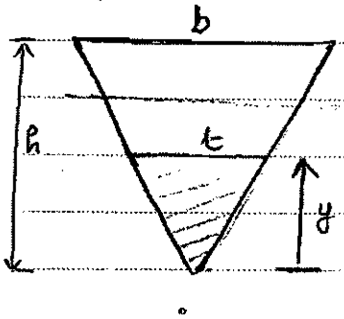


۳۴- اگر $\tau_{max}=K\frac{V}{A}$ ، مطلوبست محاسبه مقدار K .



$$\tau=\frac{VQ}{It}=\frac{V\,\overbrace{(\pi r t)}^{A}\,\overbrace{\left(\frac{2r}{\pi}\right)}^{\bar{y}}}{\pi r^3 t \times 2t}$$

$$\Longrightarrow \tau=\frac{2V}{A} \Longrightarrow \boxed{K=2}$$



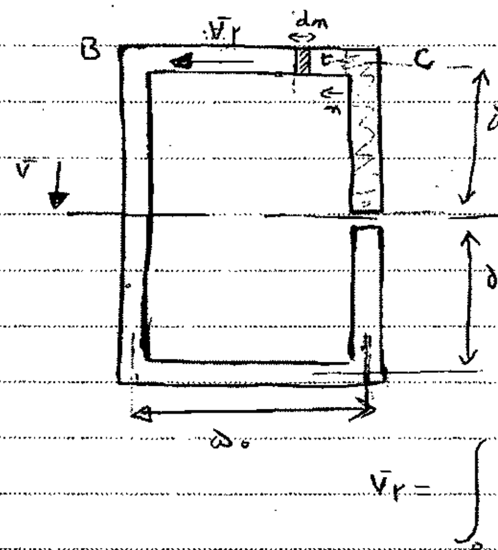
۳۵- تنش برشی max در چه مقطعی رخ می‌دهد و مقدار آن چقدر است؟

$$Q=A\bar{y}=\frac{1}{2}yh\,t\times\frac{1}{3}(h-y) \qquad \frac{t}{b}=\frac{y}{h}\Rightarrow t=\frac{b}{h}y$$

$$\Longrightarrow Q=\frac{1}{3}\,\frac{b}{h}\,y^2(b-y)$$

$$\tau=\frac{VQ}{It}=\frac{V\times\frac{1}{3}\frac{b}{h}y^2(b-h)}{\frac{1}{36}bh^3\times\frac{b}{h}y}=\frac{12V}{bh^3}\left(hy-y^2\right)$$

$$\frac{d\tau}{dy}=0 \Longrightarrow y_{max}=\frac{h}{2} \Longrightarrow \tau_{max}=\frac{3V}{bh}=\frac{3}{2}\,\frac{V}{A}$$



۳۶- در شکل BC نیروی برشی V_2 چقدر است؟

$$F_{BC}=V_2=\int \tau\, dA=\int \frac{VQ}{It}\,t\,dx$$

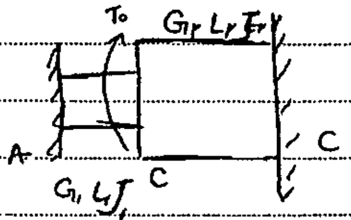
$$\tau_{BC}=\frac{V(25\times 50t+50\times xt)}{It}$$

$$V_2=\int_0^{50}\frac{50Vt(25+x)}{I}\,dx=1.25\times10^5\,\frac{Vt}{I}$$

توجه داشته باشید جریان های برشی به فرض رو به پایین بودن V نوشته شده است. در صورتیکه جهت V تغییر کند جهت جریان های برشی تغییر می‌کند.

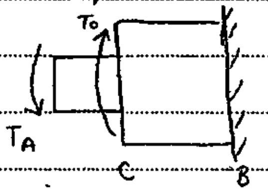
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: φ_C و گشتاور تکیه‌گاه A ؟



$\varphi_A = 0$

راه اول: درجه نامعینی یک است و T_A را مجهول می‌گیریم



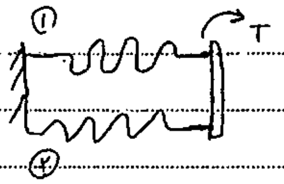
$$\varphi_A = \varphi_{A/C} + \varphi_{C/B} = \frac{T_A L_1}{G_1 J_1} + \frac{(T_A - T_0) L_2}{G_2 J_2} = 0 \Rightarrow T_A \checkmark$$

$$\varphi_C = \frac{(T_A - T_0) L_2}{G_2 J_2} \checkmark$$

راه دوم: فنر

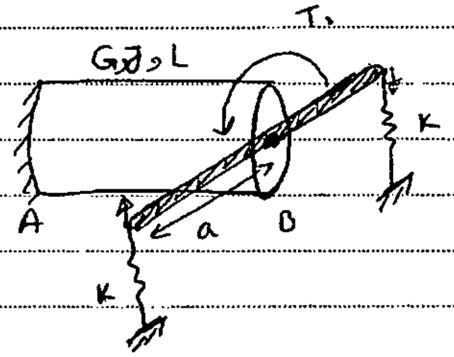
$$K = \frac{GJ}{L}$$

$$\varphi_C = \frac{T}{\frac{G_1 J_1}{L_1} + \frac{G_2 J_2}{L_2}}$$



$$T_A = K_A \varphi = \frac{T}{\frac{G_1 J_1}{L_1} + \frac{G_2 J_2}{L_2}} \times \frac{G_1 J_1}{L_1}$$

مثال: مطلوبست φ_B

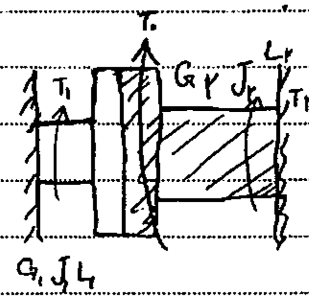


$$\begin{cases} T_S = 2Fa = 2K\delta a \\ \delta = r\varphi \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{(T_0 - T_S) L}{GJ}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi \checkmark \\ \delta \checkmark \end{cases}$$

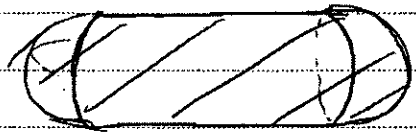
مثال: قطعه ۲ به اندازه φ_0 پیچانده شده و سپس جوش می‌شود. T را بدست آورید

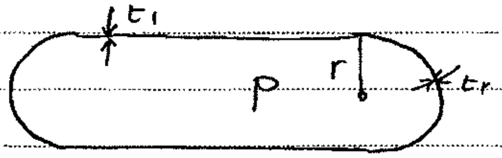


$$\begin{cases} \varphi_2 = \varphi_0 + \varphi_1 \\ \varphi_2 = \frac{T_2 L_2}{G_2 J_2} \qquad \varphi_1 = \frac{T_1 L_1}{G_1 J_1} \end{cases}$$

$$T_1 + T_2 = T_0$$

رابطهٔ t_1 و t_2 را طوری بیابید که هیچ تحرکی نداشته باشند.





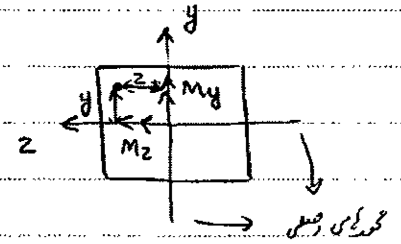
$$\begin{cases} (\varepsilon_\theta)_c\, r = (\Delta r)_c \\ (\varepsilon_\theta)_s\, r = (\Delta r)_s \end{cases} \Longrightarrow \Delta r_c = \Delta r_s$$

استوانه $$(\varepsilon_\theta)_c = \frac{1}{E}\left(\frac{Pr}{t_1} - \nu\frac{Pr}{2t_1}\right)$$

کره $$(\varepsilon_\theta)_s = \frac{1}{E}\left(\frac{Pr}{2t_2} - \frac{\nu Pr}{2t_2}\right)$$

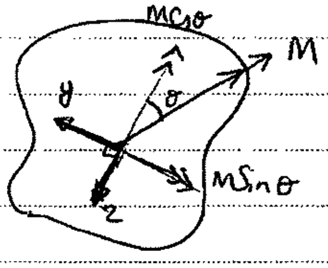
خمش تیرهای نامتقارن یک جنس:

اگر گشتاور در دو راستا داشتیم



$$\sigma_x = \frac{-M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

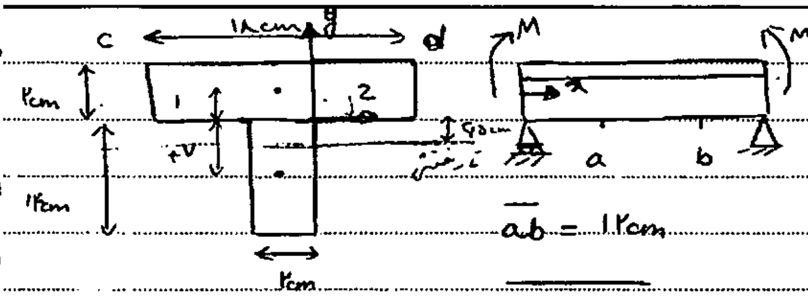
در حالت کلی



$\cancel{\sigma_x \quad M_y I_z \quad M_z I_{yz}\, z \quad M_z I_y \quad M_y I_{yz}}$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{(M_y I_z - M_z I_{yz})\, z + (M_z I_y - M_y I_{yz})\, y}{I_y I_z - I_{yz}}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مثال: مطلوبست محل تار خنثی، σ_{max}

تغییر طول $\overline{ab}$ ، $\overline{cd}$ و نیروی که بر سطح مقطع (بال بالایی) وارد می‌شود.

$\overline{ab} = 12\,cm$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{2\times18\times1 - 14\times2\times7}{2\times14 + 2\times18} = -2{,}5\,cm$$

$$I_{\text{تار خنثی}} = \left[\frac{1}{12}\,18\times2^3 + (18\times2\times3{,}5^2)\right] + \left[\frac{1}{12}\times2\times14^3 + (14\times2\times4{,}5^2)\right]\ cm^4$$

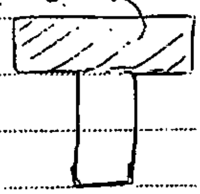
$$\sigma_{max} = \frac{M\,\overset{14-2{,}5}{C}}{I}$$

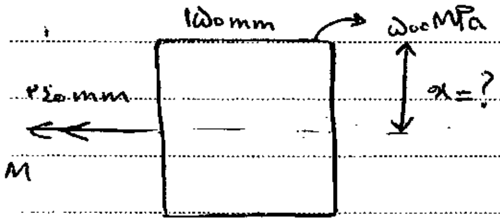
$$\begin{cases} \delta_{ab} = \varepsilon_x\Big|_{y=1{,}5} \times \overline{ab} \\ \varepsilon_x = \dfrac{-y}{R} \\ \dfrac{1}{R} = \dfrac{M}{EI} \end{cases}$$

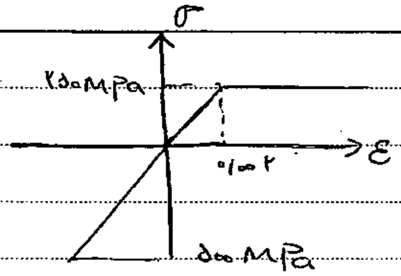
$$\begin{cases} \delta_{cd} = \varepsilon_z \times \overline{cd} \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left(\cancel{\sigma_z} - \nu(\sigma_x + \cancel{\sigma_y})\right) = \dfrac{-\nu\,\overset{\frac{-Ey}{R}}{\sigma_x}}{E} = \dfrac{\nu y}{R} \end{cases} \boxed{\Rightarrow \delta_{cd}\ \checkmark}$$

$$F_A = \int_A dF = \int \underbrace{\left(\frac{-My}{I}\right)}_{\sigma_x} dA = -\frac{M}{I}\,\overset{\text{ممان اول سطح}}{Q} = \boxed{\frac{-M}{I}\,\bar{y}A}$$

بال بالایی



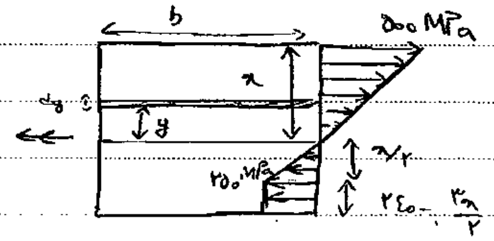




مثال:

نمودار $\sigma - \varepsilon$ تیر مطابق شکل است. اگر تنش در تار بالا $500\ MPa$ باشد؛ مطلوبست مکان تار خنثی.

جسم حالت الاستوپلاستیک هر دو تنش الاستیک برابر است



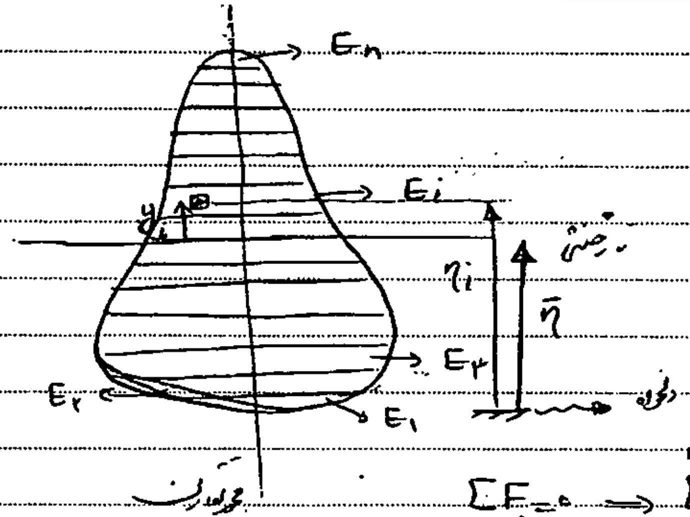
$$F_A = 0 = \int dF = \int \sigma_x\, b\, dy = b\int \sigma_x\, dy = b\left(\frac{1}{2}\times\frac{x}{2}\times 250 + \left(240-\frac{3x}{2}\right)\times 250 - \frac{1}{2}\times x\times 500\right)$$

$\Rightarrow x$ ✓

$$M = -\int \sigma_x\, y\, \overbrace{dA}^{b\,dy} = -b\bar{y}\int \sigma_x\, dy$$

$$\bar{I} = \int_a^b x\, f(x)\, dx = \bar{x}\int_a^b f(x)\, dx \quad ✓$$

$$\Rightarrow M = -b\left(\frac{2}{3}x \times \frac{-1}{2}\times x \times 500 - \frac{2}{3}\times\frac{x}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{x}{2}\times 250 - \left(\frac{240-\frac{3x}{2}}{2}+\frac{x}{2}\right)\left(240-\frac{3x}{2}\right)\times 250\right)$$



$$\varepsilon_i = \frac{y_i}{R}$$

$$\sigma_i = \frac{E_i y_i}{R}$$

$$\sum F_A = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} \frac{+E_i y_i}{R}\, dA_i = 0$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} E_i \int_{A_i} y_i\, dA_i = 0$$

از دستگاه کلی مبدأ استفاده میکنیم که در آن فاصله‌ی تار خنثی از مبدأ $\bar{\eta}$ است.

$$y_i = \eta_i - \bar{\eta}$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} E_i \int_{A_i} (\eta_i - \bar{\eta})\, dA_i = 0$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} E_i \overbrace{\int_{A_i} \eta_i\, dA_i}^{\bar{\eta}_i A_i} = \bar{\eta} \sum_{i=1}^{n} E_i A_i$$

$$\Longrightarrow \bar{\eta} = \frac{\sum \bar{\eta}_i E_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} E_i A_i}$$

اگر یکی از E ها را به عنوان E_{ref} در نظر بگیریم

$$\frac{E_i}{E_{ref}} = n_i$$

$$\longrightarrow \bar{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{\eta}_i n_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i A_i} \rightsquigarrow \text{مکان تار خنثی}$$

$\Sigma M = +M$ مجموع گشتاورهای وارد بر هر مقطع برابر $\underline{M}$ خواهد بود: با جهت مثبت

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} y_i \sigma_i \, dA_i = +M$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} (\eta_i - \bar{\eta}) \, \sigma_i \, dA_i = +M$$ با استفاده (1)

$$\sigma_i = \frac{E_i y_i}{R}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} \frac{E_i y_i^2}{R} \, dA_i = M$$

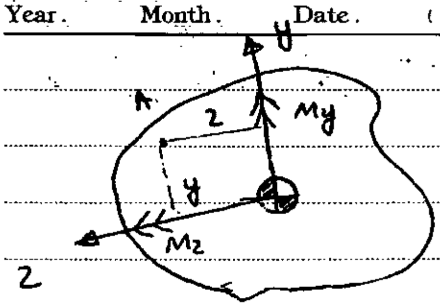
$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{M}{\sum_{i=1}^{n} E_i I_i}}$$

$$\sigma_j = \frac{E_j y_j}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{\sigma_j}{E_j y_j} \Rightarrow \frac{\sigma_j}{E_j y_j} = \frac{M}{\sum_{i=1}^{n} E_i I_i}$$

$$\Rightarrow \sigma_j = \frac{E_j M y_j}{\sum_{i=1}^{n} E_i I_i} \xrightarrow{n_i = \frac{E_i}{E_{ref}}} \boxed{\sigma_j = \frac{n_j M y_j}{\sum_{i=1}^{n} n_i I_i}}$$

حالا دیگر $\underline{\sum_{i=1}^{n} n_i I_i}$ همان $\underline{I}$ مقطع تغییر شکل یافته است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مثال: ثابت کنید اگر محورهای مختصات در مرکز جرم واقع باشند

$$\cancel{\sigma_x = M_y I_z - M_z I_{yz} z}$$

$$\sigma_x = \frac{(M_y I_z + M_z I_{yz})\, z - (M_z I_y + M_y I_{yz})\, y}{I_y I_z - I_{yz}}$$

$$\sigma_x = cz + dy + f$$

$$M_z = -\int y\,\sigma_x\, dA$$

$$M_y = \int z\,\sigma_x\, dA$$

نیروی خارجی نداریم

$$F = \int \sigma_x\, dA = 0 \Rightarrow \int (cz + dy + f)\, dA = c\cancel{\int z\, dA}^{\bar{z}A} + d\cancel{\int y\, dA}^{\bar{y}A} + fA = 0$$

$$\xrightarrow[\bar{y}=0]{\bar{z}=0} \boxed{f = 0}$$

$$M_z = -\int y(cz + dy)\, dA = -cI_{yz} - d\,I_{zz}$$

$$M_y = \int (cz + dy)\, z\, dA = c\,I_{yy} + d\,I_{yz} \quad \xrightarrow{M_z,\, M_y} \begin{cases} c = \checkmark \\ d = \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_x =$$ رابطه‌ی اول

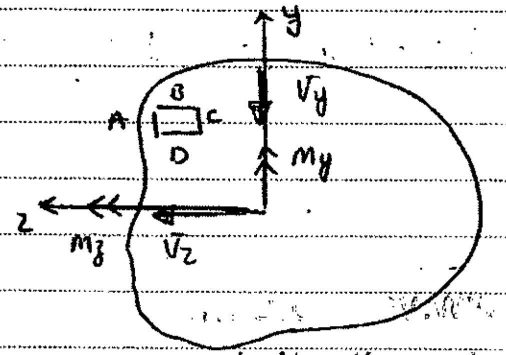
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یعنی معادلات می‌گرفت. اگر z^* و y^* محورهای اصلی و M_z^* و M_y^* تصویر گشتاور در این محورها باشد،

$$\sigma_x = \frac{M_{y^*} z^*}{I_{y^*y^*}} - \frac{M_{z^*} y^*}{I_{z^*z^*}}$$

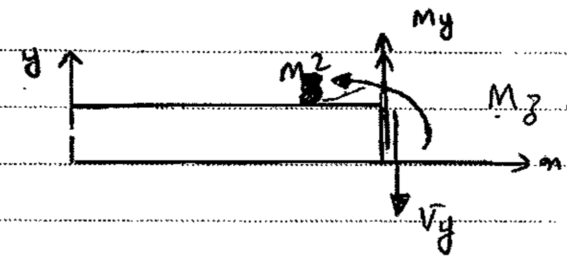
مثال:



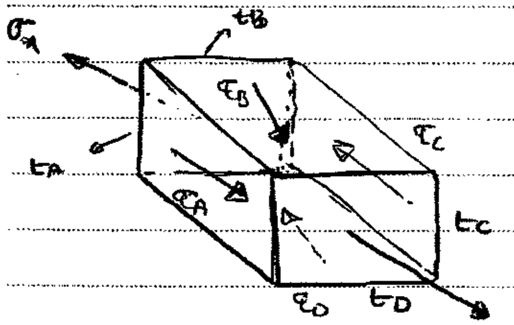
$$\frac{dM_y}{dx} = V_z \qquad \underline{e}_{V_z} = \underline{e}_{M_y} \times \underline{e}_x$$

$$\frac{dM_z}{dx} = V_y \qquad \underline{e}_{V_y} = \underline{e}_{M_z} \times \underline{e}_x$$

جهت V_y و V_z از ضرب خارجی (قانون دست راست) بدست می‌آید



M_z جهت V_z



$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

تعادل $\quad \tau_A t_A dx + \tau_B t_B dx - \tau_C t_C dx - \tau_D t_D dx$

$$+ \int \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dA - \int \sigma_x \, dA = 0$$

$$\sigma_x = \frac{\bar{M}_y z}{\bar{I}_{yy}} - \frac{\bar{M}_z y}{\bar{I}_{zz}}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial x} \frac{z}{\bar{I}_{yy}} - \frac{\partial \bar{M}_z}{\partial x} \frac{y}{\bar{I}_{zz}}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \bar{V}_z \frac{z}{\bar{I}_{yy}} - \bar{V}_y \frac{y}{\bar{I}_{zz}}$$

$$\bar{V}_z = \frac{V_z + V_y \dfrac{I_{yz}}{I_{zz}}}{1 - \dfrac{I_{yz}^2}{I_{yy} I_{zz}}} \quad , \quad \bar{V}_y = V$$

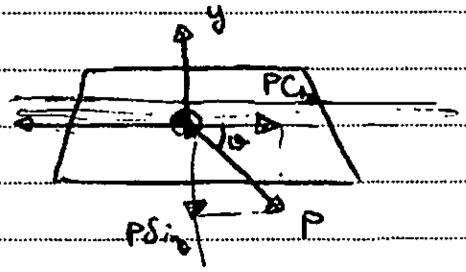
و در نتیجه با جایگذاری در معادله

$$\tau_A t_A + \tau_B t_B + \tau_C t_C + \tau_D t_D + \int \frac{\bar{V}_y z}{I_{zz}} dA - \int \frac{\bar{V}_z y}{I_{yy}} dA = 0$$

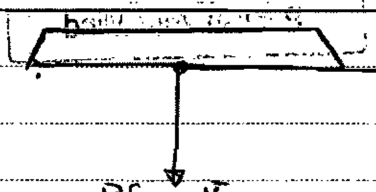
$$\frac{\bar{V}_y Q_z}{I_{zz}} \qquad \frac{\bar{V}_z Q_y}{I_{yy}}$$

$$\tau_A t_A + \tau_B t_B - \tau_C t_C - \tau_D t_D + \frac{\bar{V}_y Q_z}{I_{zz}} + \frac{\bar{V}_z Q_y}{I_{yy}} = 0$$

اما در حالت تیر نازک جدار مفید است که مقدار تنش‌های برشی صفر باشند. همین دلیل است که برای این‌ها باید مرکز برش را در نظر گرفت که از مقطع خارج بوده.



Subject:
Year. Month. Date. ( )



$P\cos\theta = -\bar{V}_z$

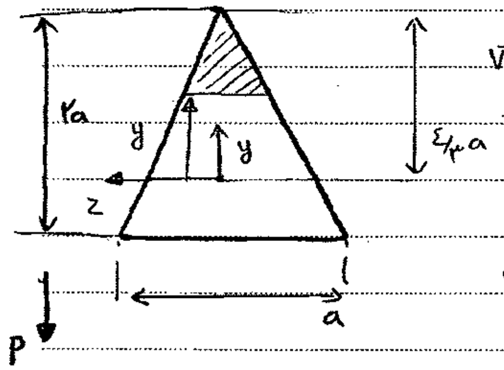
$\bar{V}_z \ , \ \bar{V}_y = \checkmark$

$P\sin\theta = \bar{V}_y$

$\tau_A , \tau_B , \tau_C = 0$ $\qquad \boxed{\tau_D = \checkmark}$ و همینطور در رابطه بدست آمده

مثال: τ_{max} را بدست آورید.

مبدأ مختصات را در مرکز سطح در نظر می‌گیریم



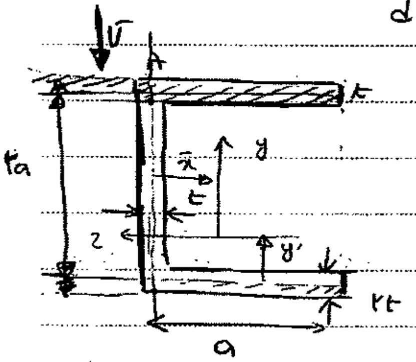
$$\tau = \frac{VQ}{It} \qquad A = \frac{1}{2} a \times 2a \times \left(\frac{\frac{4}{3}a - y}{2a}\right)^2$$

$$I = \frac{1}{36}(a)(2a)^3 \qquad \bar{y} = y + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}a - y\right)$$

$$t = \left(\frac{\frac{4}{3}a - y}{2a}\right) \times a \qquad Q = A\bar{y}$$

$$\rightarrow \tau \ \checkmark \Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = 0 \rightsquigarrow \tau_{max} = \checkmark$$

مطلوب است تنش برشی در نقطه A



$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{a \times 2a \times t + 2a \times a \times t}{(3a \times t) + (2a \times t)} = \checkmark$$

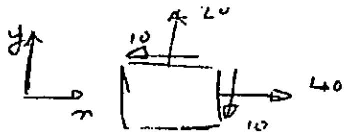
۱) پیدا کردن مرکز سطح ۲) دستگاه مختصات را روی مرکز سطح قرار می‌دهیم

۳) محاسبه I_{yy}, I_{zz} و I_{yz} و بدست آوردن $\bar{V}_y$ و $\bar{V}_z$

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{t \times a \times \frac{a}{2} + 2t \times a \times \frac{a}{2}}{2t \times a + t \times 2a + a \times t} = \checkmark$$

$$I_{yy} = \left[\frac{1}{12} \times t^3 \times 2a + 2a \times t \times \bar{x}^2\right] + \left[\frac{1}{12} \times t \times a^3 + t \times a \times \left(\frac{a}{2} - \bar{x}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{12} \times 2t \times a^3 + a \times 2t \times \left(\frac{a}{2} - \bar{x}\right)^2\right]$$

$$I_{zz} = \left[\frac{1}{12} \times t \times (2a)^3 + 2at\,(a - \bar{y})^2\right] + \left[\frac{1}{12} a t^3 + at\,(2a - \bar{y})^2\right] + \left[\frac{1}{12} \times a \times (2t)^3 + 2at\,\bar{y}^2\right]$$



$$I_{yz} = \sum \left(\bar{I}_{yz} + A_i x_o y_o\right)_i = (a \times t)(2a - \bar{y})\left(\bar{x} - \frac{a}{2}\right) + (2a \times t) \times \bar{x} \times (a - \bar{y}) + (a \times 2t)(-\bar{y}) \times \left(\bar{y} - \frac{a}{2}\right)$$

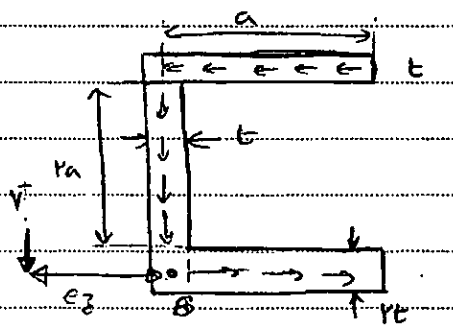
$$\bar{V}_y = \frac{V_y + V_z \dfrac{I_{yz}}{I_{yy}}}{1 - \dfrac{I_{zy}^2}{I_{yy} I_{zz}}} = \checkmark \qquad \bar{V}_z = \frac{V_z + V_y \dfrac{I_{yz}}{I_{zz}}}{1 - \dfrac{I_{zy}^2}{I_{yy} I_{zz}}} = \checkmark$$

$$\tau t = \frac{\bar{V}_y Q_z}{I_{zz}} - \frac{\bar{V}_z Q_y}{I_{yy}}$$

$$Q_z = a \times t \times (2a - \bar{y})$$

$$Q_y = a \times t \times \left(\bar{x} - \frac{a}{2}\right)$$

مثال: در مثال قبل مرکز برش را بیابید.

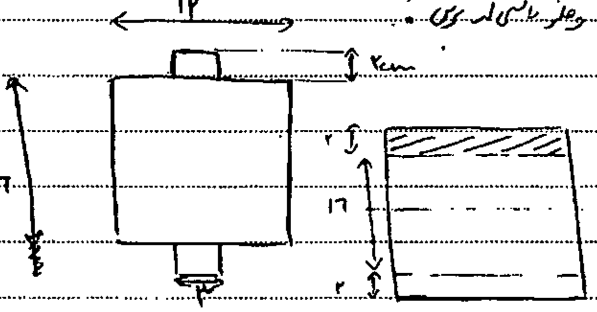


$$dm_B = q \times 2a\, dx$$

$q = \tau t \rightarrow$ جریان برش ثابت است

$$M = \int_0^a 2aq\, dx = V e_z$$

۲۰۷ - اگر $E_{فلز} = 4 E_{چوب}$ تنش چسب بین چوب و فلز با شکل زیر؟



مقطع فلز را ۴ برابر می‌کنیم چوبی

$V = 4 t f$ ← ton force

$$I_{eq} = \frac{1}{12} \times 12 \times 16^3 = 8000\ cm^4$$

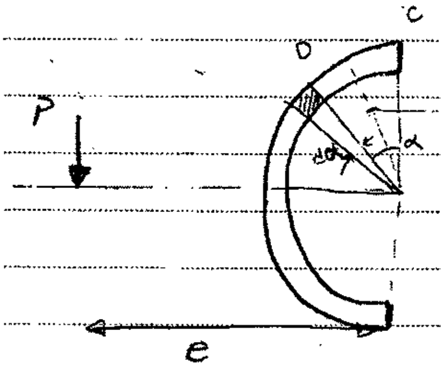
$$Q = A\bar{y} = 2 \times 12 \times 9 = 216\ cm^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{4 \times 10^3 \times 216}{8000 \times 3} = 36\ kgf/cm^2$$

طول قسمت اتصال چوب و فلز اصلی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲۸ـ مطلوبست مرکز برش؟



$\bar{y} = \bar{r}\cos\frac{\alpha}{2}$

$$Q = A\bar{y} = r\alpha t \, \frac{r\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \cos\frac{\alpha}{2} = r^2 t\sin\alpha$$

$$q = \frac{PQ}{I} = \frac{P r^2 t \sin\alpha}{\frac{1}{2}\pi r^3 t} = \frac{2P\sin\alpha}{\pi r}$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow \int q r^2 d\theta = Pe \Rightarrow \frac{2Pr}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = Pe \Rightarrow \boxed{e = \frac{4r}{\pi}}$$

تبدیل تنش:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

ماتریس تنش بصورت

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

در حالت تنش صفحه‌ای است $\tau_{y'z'} = \tau_{x'z'} = 0$

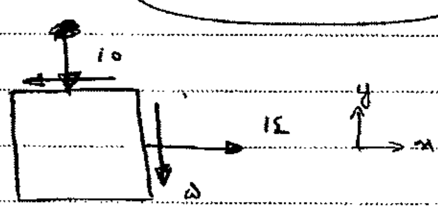
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & 0 \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

یعنی

$$\sigma_x + \sigma_y + \cancel{\sigma_z} = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} + \cancel{\sigma_{z'}}$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

مثال: مطلوبست تنش برشی max و زاویه‌ای که تنش برشی max بوجود می‌آید.



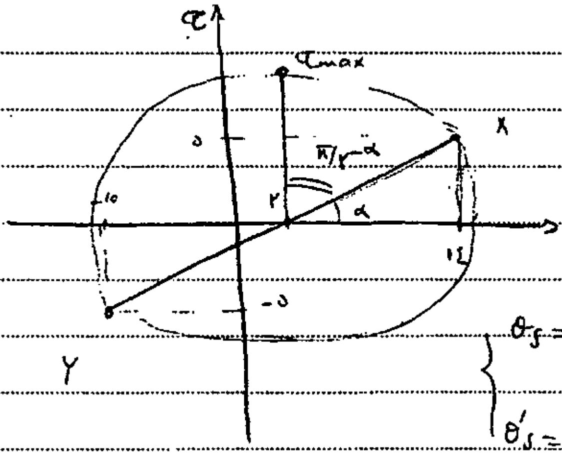
حل: داریم $\sigma_x = 14 \quad \sigma_y = -10 \quad \tau_{xy} = -5$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 14 & -5 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} \qquad \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\frac{24}{2}^2 + 25} =$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{24}{-10} = 2.4 \rightarrow \theta_s \checkmark , \quad \theta_{2s} = \theta_{1s} + \pi/2$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل به روش دایره مور



$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$

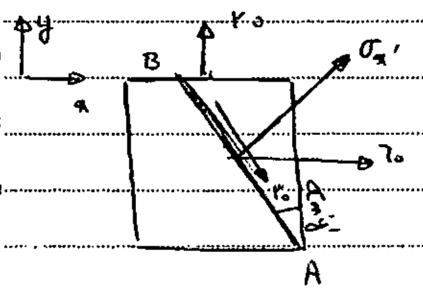
$\Rightarrow \pi/2 - \alpha$ ✓

زوایا در دایره‌ی مور ۲ برابر حالت واقعی هستند.

$$\begin{cases} \theta_s = \frac{1}{2}\left(\pi/2 - \alpha\right) \\ \theta'_s = \theta_s + \pi/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2 + \tau_{max} \\ \sigma_2 = 2 - \tau_{max} \end{cases}$$

مثال: σ_{AB} و $\tau_{AB} = ?$

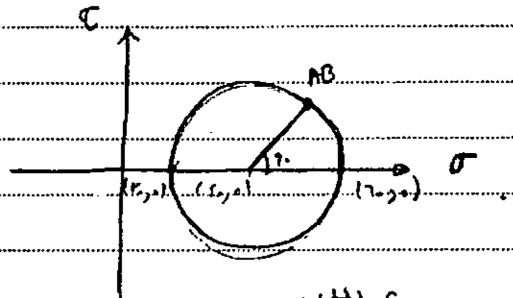


شرایط مسئله: $\theta = 30 \quad \sigma_x = 60 \quad \sigma_y = 20 \quad \tau_{xy} = 0$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 60 + \tau_{xy} \sin 60$$

$\Rightarrow \sigma_{x'} = 50 \quad , \quad \tau_{x'y'} = -10\sqrt{3}$

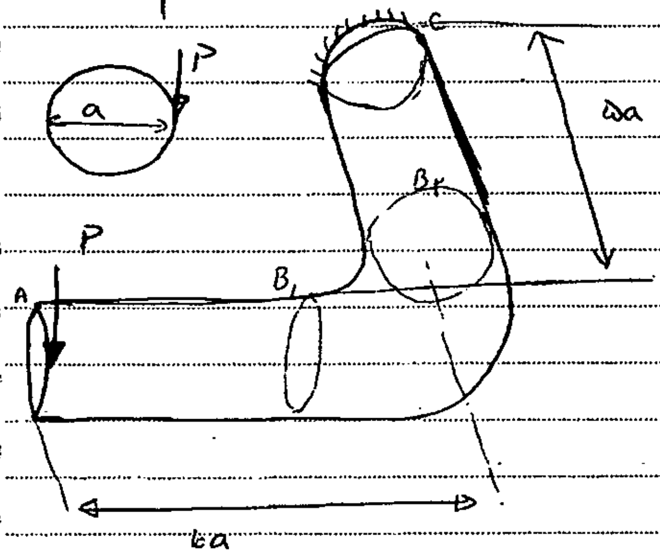
حل به روش دایره مور

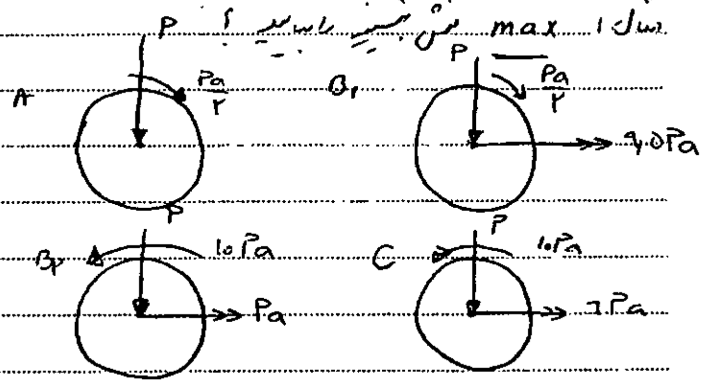


$\sigma_{AB} = 40 + \underset{20}{R} \cos 60 = 50$

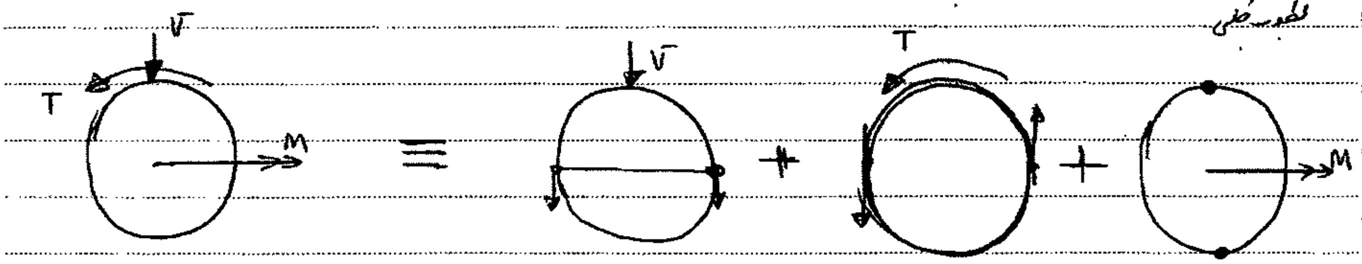
$\tau_{AB} = R \sin(60) = 10\sqrt{3}$

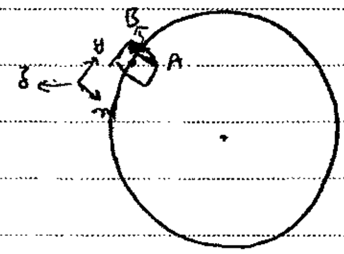
مثال: max تنش برشی را بیابید؟

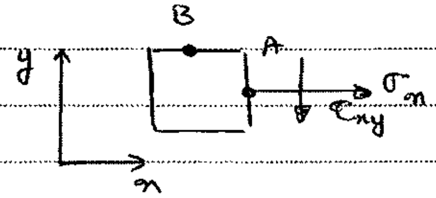




Subject:
Year.		Month.		Date.		( )







$$\sigma_z = 0 \longrightarrow \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

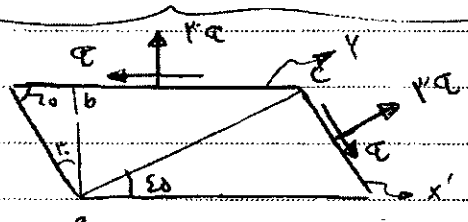
$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \xrightarrow{\sigma_y = 0} \boxed{\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \tau_{max}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \longrightarrow \tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

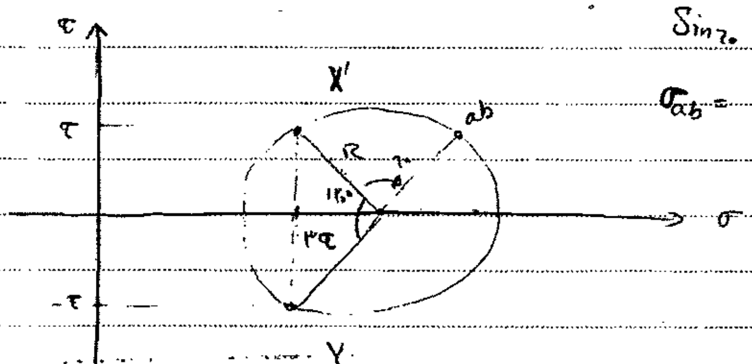
سؤال مطرح

$$\sigma, \tau \big|_{ab, bc}$$



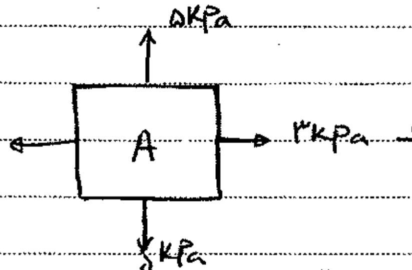
$$R = \frac{\tau}{\sin 60} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tau$$

$$\sigma_{ab} = 3\tau + 2R\cos 60$$

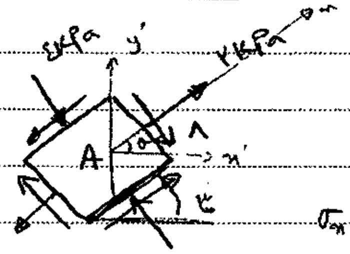


Subject:
Year. Month. Date. ( )

۳۸- تنش اصلی و تنش برشی ماکزیمم



+



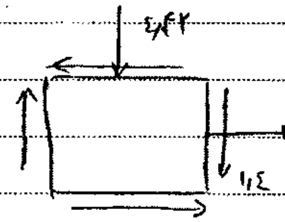
$\theta = -30 \qquad \tau_{xy} = -8$

$\sigma_x = 2 \qquad \sigma_y = -4$

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$= 2 \times \frac{3}{4} + (-4) \times \frac{1}{4} + (-8)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7.42\ kPa$$

$$7.42 + \sigma'_y = 2 - 4 \Rightarrow \sigma'_y = -9.42\ kPa$$



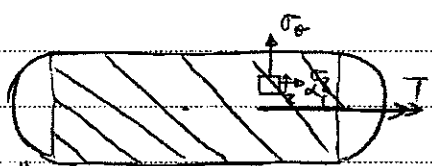
$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = -1.4\ kPa$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 10.55 \\ \sigma_2 = -4.55 \end{cases}$$

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} = \frac{|10.55 + 4.55|}{2} = 7.55\ kPa$$

۳۹- استوانه جدار نازک تحت فشار داخلی P_0 و گشتاور پیچشی $T = 4\pi P_0 r^3$ مؤلفه‌های تنش روی

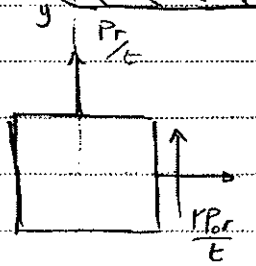
المان مورب چقدر است؟ $(\alpha = 45)$

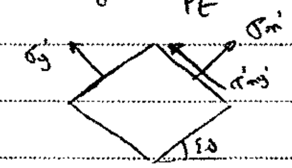


$$\sigma_\theta = \frac{Pr}{t}$$

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{4\pi P_0 r^4}{2\pi r^3 t} = \frac{2P_0 r}{t}$$

$$\sigma_z = \frac{Pr}{2t}$$

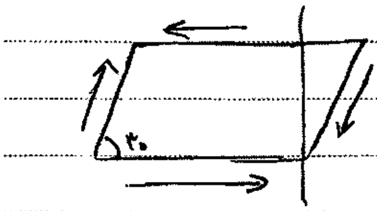




$\theta = +45$

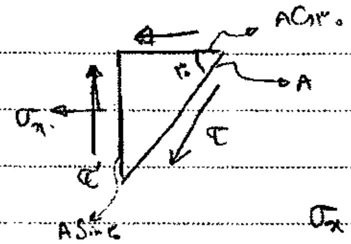
$\rightarrow \sigma_{x'},\ \sigma_{y'},\ \tau_{x'y'}$ ✓

۳۹ - تنش برشی : 10 MPa



تنش نرمال = صفر $\sigma_1 , \sigma_2 = ?$

چون صفحه ثابت نیست، قسمت مثلثی را جدا کرده که بستر را ثابت بگیریم



$$\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow -\tau(A\cos 30) - \sigma(A\sin 30) - \tau\cos 60\,(A) = 0$$

$$\sigma_x = -2\sqrt{3}\,\tau = -20\sqrt{3}\ \text{MPa}$$

$$\sigma_1 , \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \longrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -10\sqrt{3} + 20 \\ \sigma_2 = -10\sqrt{3} - 20 \end{cases}$$

۵۰ - حالت تنش سطحی صفحه‌ای است، σ_1 و σ_2 را بدست آورید.

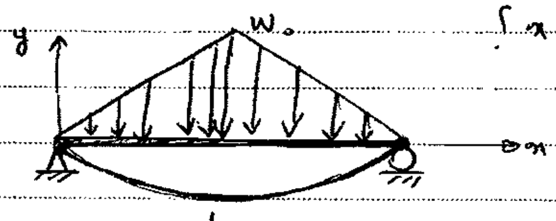
$$\sigma = \begin{bmatrix} 100 & 120 & 0 \\ 120 & -80 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \qquad \sigma_3 = 50 \qquad \sigma = \begin{bmatrix} 100 & 120 \\ 120 & -80 \end{bmatrix}$$

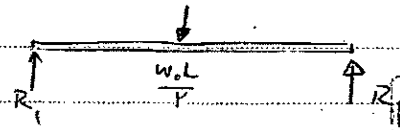
$$|\sigma - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 100-\lambda & 120 \\ 120 & -80-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (\lambda - 100)(\lambda + 80) - 120^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda^2 - 20\lambda - 18000 - 14400 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 160 \\ \lambda_2 = -140 \end{cases}$$

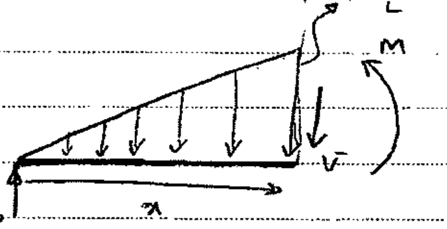
$$\Longrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 160 \\ \sigma_2 = -140 \end{cases}$$

۵۰ - تغییر مکان تیر برحسب x و تغییر مکان تیر در $x = \frac{3L}{4}$ ؟





$$\Longrightarrow R_1 = R_2 = \frac{w_0 L}{4}$$



$$\Sigma M_G = 0 \Rightarrow M - \frac{w_0 L}{4} x + \left(\frac{1}{2} \times x \times \frac{2x}{L} w_0\right) \times \frac{x}{3} = 0 \Longrightarrow M(x) = \frac{w_0 L}{4} x - \frac{w_0}{3L} x^3 \qquad 0 < x < L/2$$

$$EIy'' = M \Rightarrow EIy' = \frac{w_0 L}{8} x^2 - \frac{w_0}{12L} x^4 + C_1 \Rightarrow EIy = \frac{w_0 L}{24} x^3 - \frac{w_0}{60L} x^5 + C_1 x + C_2$$

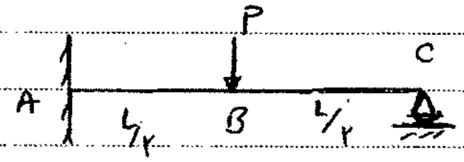
شرایط مرزی:
$x=0 \rightarrow y=0$
$x=L/2 \rightarrow y'=0$

$$\Rightarrow EIy = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0 L}{24}x^3 - \frac{5w_0L^3}{192}x$$

چون تقارن داریم: $y(\frac{3L}{4}) = y(\frac{L}{4})$

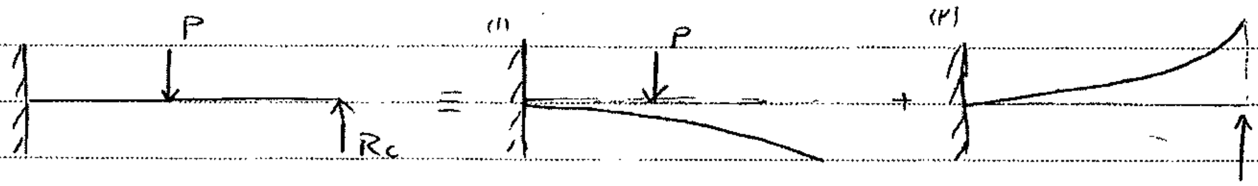
$$\Rightarrow EIy = \frac{-w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0L}{24}x^3 - \frac{5w_0L^3}{192}x \Big|_{x=L/4}$$

مطلوبست عکس العمل تکیه‌گاه C ؟



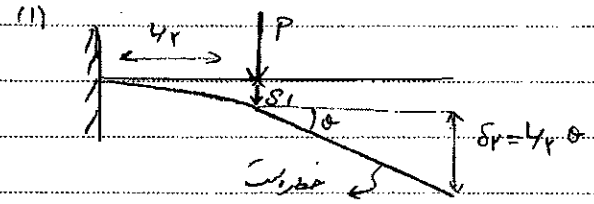
سازه از نظر استاتیکی نامعین است. در مقاومت مصالح می‌دانیم در $x=L$

تغییرشکل صفر است. اگر به جای تکیه‌گاه نیروی آن را قرار دهیم از اصل super position داریم



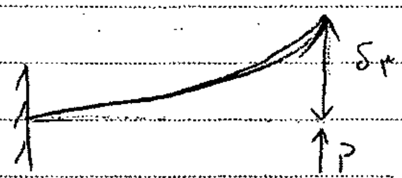
بعد از نقطه اثر نیرو به صورت خط راست است.

چون θ کوچک است $\sin\theta \simeq \theta$



$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$$

برای θ و δ به جدول‌های کتاب رجوع شود.



$$\delta = -\left[\frac{P(L/2)^3}{3EI} + \frac{L}{2}\,\frac{P(L/2)^2}{2EI}\right] + \frac{R_cL^3}{3EI} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R_c = \frac{5}{16}P}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Subject:
Year. Month. Date. ( )

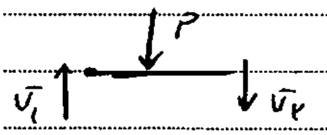
ادامه حل

$$EI\,y_1^{(4)} = -\omega(x) = 0$$

$$EI\,y_2^{(4)} = -\omega(x) = 0$$

$\xrightarrow{\text{شرایط مرزی}}$
$$\begin{cases} x=0 \longrightarrow y_1=0 \quad , \quad y_1''=0 \\ x=L \longrightarrow y_2=0 \quad , \quad y_2''=0 \\ x=a \longrightarrow y_1=y_2 \quad , \quad y_1'=y_2' \quad , \quad y_1''=y_2'' \end{cases}$$

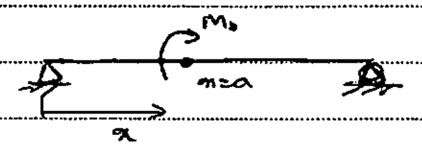
در a مشتق سوم برابر نیست



$$V_1 = P + V_2$$

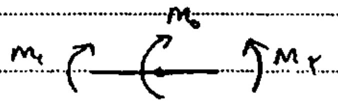
$$\Longrightarrow EI\,y_1''' = P + EI\,y_2'''$$

مثال:



$$x=a \rightsquigarrow y_1'' \neq y_2''$$

M در نقطه $x=a$ با پرش است

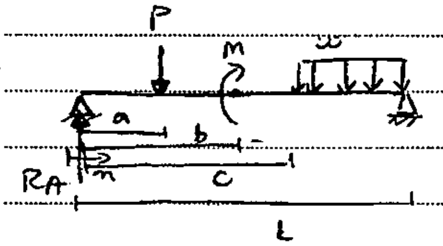


$$M_2 - M_1 = M_0$$

$$\Longrightarrow EI(y_2'' - y_1'') = M_0$$

y پیوسته است ، چون دو قسمت حرکت و لغزش نسبت به هم ندارند

مثال:



$$EI\,y_1'' = R_A x$$

$$EI\,y_2'' = Rx - P(x-a)$$

$$EI\,y_3'' = Rx - P(x-a) + M_0$$

$$EI\,y_4'' = Rx - P(x-a) + M_0 - \frac{\omega}{2}(x-c)^2$$

و با توجه به شرایط پیوستگی در $x=a$ و $x=b$ حل می‌کنیم

با تعریف توابع تکین (توابع منفرد یا جهش‌دار) حل این مسائل ساده‌تر خواهد شد

$$\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} 0 & x<a \\ (x-a)^n & x\geq a \end{cases}$$

$$EI\,y_1'' = R_A\langle x-0\rangle$$

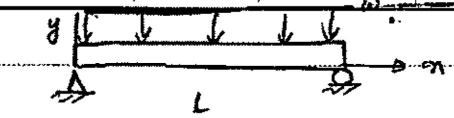
$$EI\,y_2'' = R\langle x-a\rangle - P\langle x-a\rangle$$

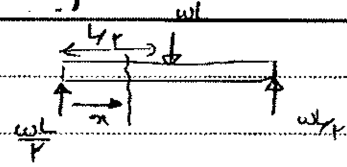
برای کل تیر

$$\Longrightarrow EI\,y'' = R_A\langle x\rangle - P\langle x-a\rangle + M_0\langle x-b\rangle^0 - \frac{\omega}{2}\langle x-c\rangle^2$$

Subject:
Year. Month. Date.

مثال ۱





$M(x) = \frac{\omega L}{2} x - \frac{\omega x^2}{2}$ $\qquad EI\,y'' = M(x)$

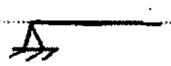
$\Longrightarrow EI\,y' = \frac{\omega L}{4} x^2 - \frac{\omega x^3}{6} + C_1$

$\Longrightarrow EI\,y = \frac{\omega L}{12} x^3 - \frac{\omega x^4}{24} + C_1 x + C_2$

C_1 و C_2 را با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آوریم

$x = L \Longrightarrow \quad y = 0 \quad y'' = 0$

$x = 0 \Longrightarrow \quad y = 0 \quad y'' = 0$



$y = 0$

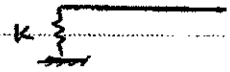
$y'' = 0$

$y = 0$

$y' = 0$

$y' = 0$

$y^{(3)} = 0$



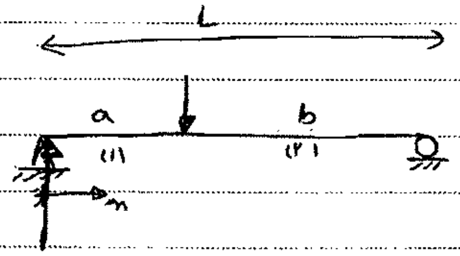
$F = ky \xrightarrow{\text{نیروی برشی هم}} EI\,y''' = ky$

بستر الاستیک

$\frac{dM}{dx} = V \quad , \quad \frac{dV}{dx} = -\omega$

$EI\,y''' = V(x) \qquad EI\,y'''' = -\omega(x)$

زمانی که نیروی نقطه‌ای بر تیر وارد می‌شود در طرفین محل اثر نیرو، معادله M تفاوت دارد



$\frac{Pb}{L}$

$EI\,y'' = M(x)$

$$\begin{cases} EI\,y'' = \frac{Pb}{L} x & 0 < x < a \\ EI\,y'' = \frac{Pb}{L} x - P(x-a) & a < x < L \end{cases}$$

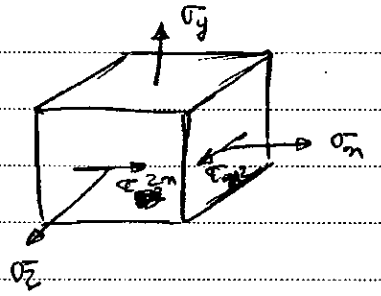
با اعمال شرایط مرزی و پیوستگی مسئله حل می‌شود

$x = a \Longrightarrow y_1 = y_2 \qquad x = 0 \Longrightarrow y_1 = 0$

$y_1' = y_2' \qquad x = L \Longrightarrow y_2 = 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ابتدا تنش کلی را تحلیل را بیابید.



$$[\sigma]=\begin{Bmatrix}\sigma_x & 0 & \tau_{xz}\\ 0 & \sigma_y & 0\\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z\end{Bmatrix}$$

تنش دو بعدی $\sigma_3=\sigma_y \Longleftarrow$

$$[\sigma]=\begin{Bmatrix}\sigma_x & \tau_{zx}\\ \tau_{xz} & \sigma_z\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_1,\sigma_2=\frac{\sigma_x+\sigma_z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xz}^2}$$

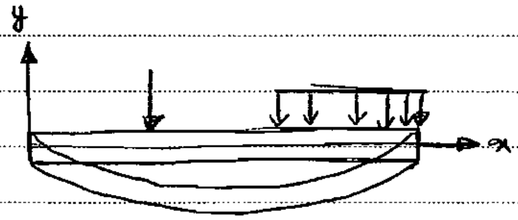
با مقدار ویژه‌ی $[\sigma]$ را بدست می‌آوریم

نکته: مجموع تنش در جهات عمود ثابت باشد

$$\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma_{x'}+\sigma_{y'}+\sigma_{z'}$$

جابجایی تیرها:

تیر تحت بارگذاری از حالت مستقیم خارج شده و دارای منحنی $y(x)$ می‌شود که می‌توان ~~تغییر~~ تغییر مکان هر نقطه را بدست آورد.



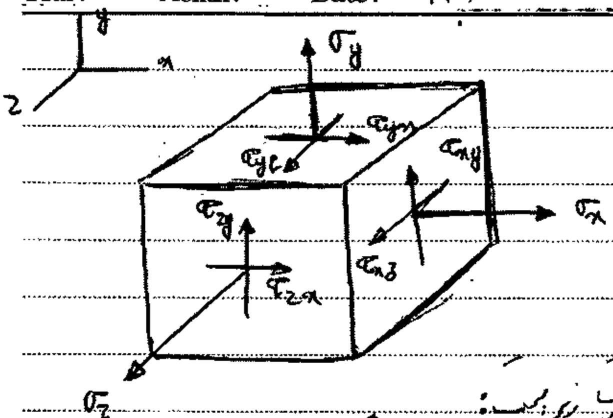
$$\frac{1}{R}=\frac{M}{EI} \qquad \frac{1}{R}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{M}{EI}\xrightarrow{y'^2\ll 1} y''=\frac{M}{EI}$$

$$y'=\int y'' \quad , \quad y=\int y'$$

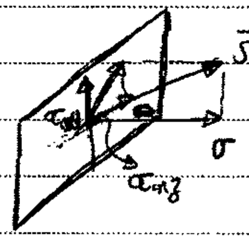
Subject:
Year. Month. Date.

در حالت سه بعدی



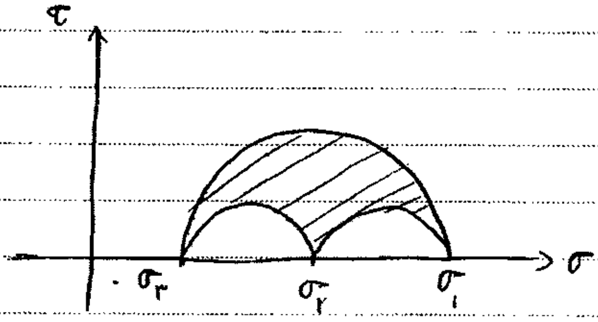
$$[\sigma] = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

درحقیقت این نوع تجزیه برای جزء المان بحث ما است و در واقع بصورت زیر است:



برای بدست آوردن تنش های اصلی معادله درجه ۳ تانسور تنش را بدست می‌آوریم.

دایره‌ی موهر در حالت سه بعدی:



اگر σ_1 ، σ_2 و σ_3 تنش‌های اصلی در سه بعد باشند

سه دایره به قطرهای $\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$ ، $\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$ و $\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$ رسم می‌کنیم. تنش هر نقطه در داخل قسمت هاشور خورده می‌باشد.

$$R = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

نکته: صفحه‌ای که در آن فقط تنش اصلی عمودی وارد شود ($\tau=0$)، دارای تنش اصلی است؛ یعنی اگر صفحه‌ای [illegible]

صفحات تنش برشی صفر است که دارای تنش‌های اصلی است؛ اگرچه $\sigma=0$ باشد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل مطلوب با استفاده می‌شود

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

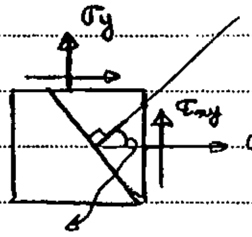
$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

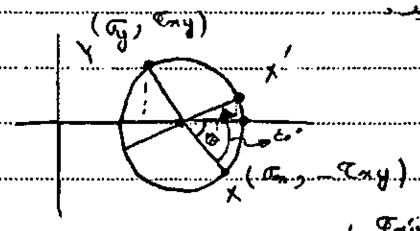
بر دایره‌ی موهر تنش محوری قطر هر صفحه در صورت کششی بودن، مثبت؛ و در صورت فشاری بودن، منفی است.

تنش برشی قطر هر صفحه در صورتی که المان را ساعتگرد بچرخاند مثبت است؛ و اگر المان را پادساعتگرد بچرخاند، منفی است.

اختلاف زاویه در دایره‌ی موهر دو برابر اختلاف زاویه‌ی واقعی است و هم جهت با جهت دوران آن زاویه؛ به طور مثال صفحه‌های مختصاتی x و y در دایره‌ی موهر 180° اختلاف زاویه دارند.



$\theta = 20$



$$tg\,\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\begin{cases} \tau_{x'y'} = R\sin(40 - 2\theta) \\ \sigma_{x'y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R\cos(40 - 2\theta) \end{cases}$$

PAPCO

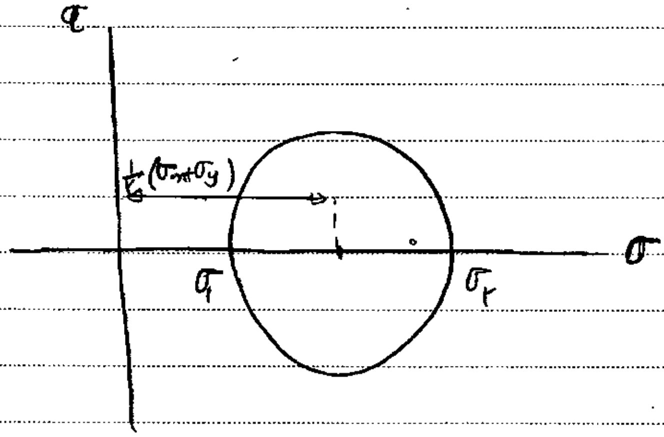
Subject:
Year. Month. Date. ( )

توان هم کوانتیک و مقادیر max و min را توانست و مقادیر ویژه استفاده کرد.

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \qquad |(A - \lambda I)| = 0 \implies AX = \lambda X$$

مجموعه مقادیر ویژه تنش max را می دهد
و بردار ویژه محورهای اصلی را می دهد.

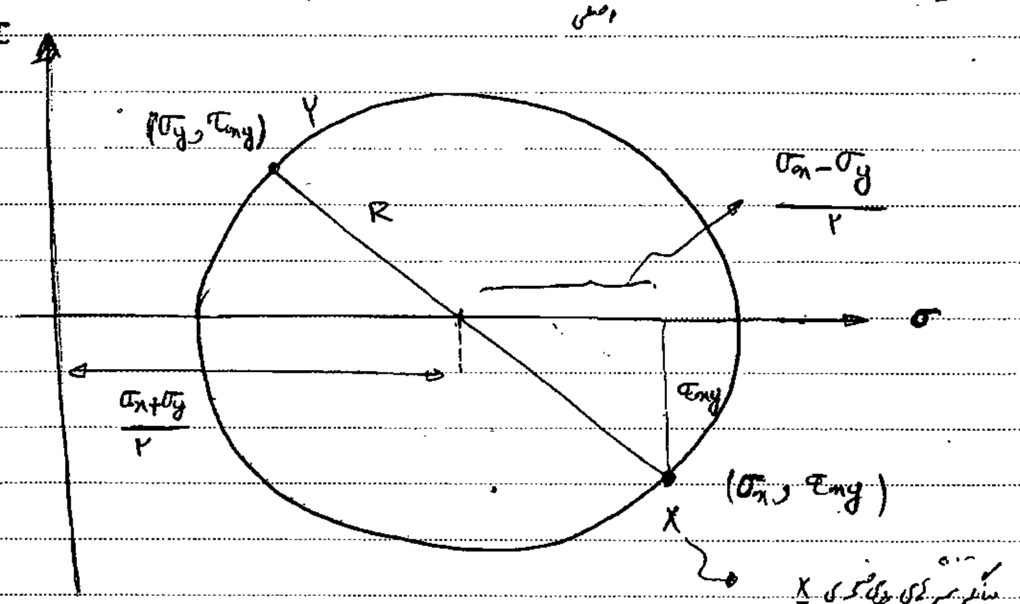
دایره موهر (مور)



$$\begin{cases} \sigma_x' = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{x'y'} = -\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2} \end{cases}$$

$$\left(\sigma_x' - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$ معادله دایره

در دایره ی موهر هر نقطه بیانگر تنش های (اصلی کششی و فشاری) و برشی یک صفحه از المان مربوط است.



Subject:
Year. Month. Date.

از لحاظ طراحی مهم است که بدانیم در کدام صفحه تنش بیشینه می‌شود تا بتوانیم جهت را تعیین و بار را بر آن وارد کنیم.

چون طول این مسئله حل می‌شود از معادلات (که) بیشینه صفحه‌ای است که در آن تنش بیشینه در صفحه‌های مختلف در آن نقطه وارد

برای یافتن بیشینه مقدار تنش، باید از روابط بدست آمده مشتق گرفت و برابر صفر قرار دهیم:

$$\boxed{\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}}$$ برای تنش عادی

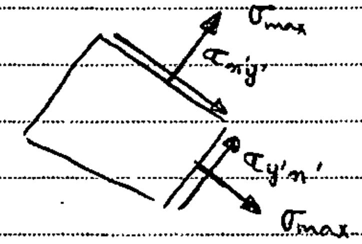
$$\boxed{\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

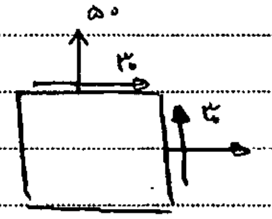
برای تنش برشی

$$\boxed{\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}}$$

$$\boxed{\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

در صفحه‌ای که تنش max نرمال رخ می‌دهد، تنش برشی در آن صفحه صفر است؛ و بالعکس.

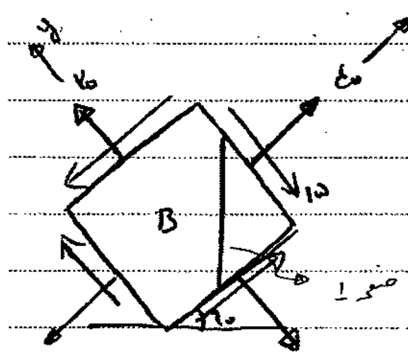


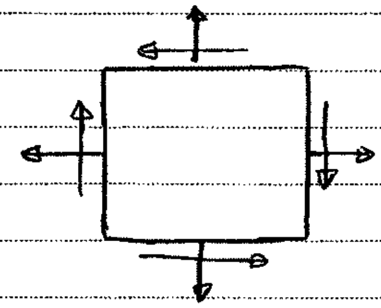


۵۰ → $\sigma_{max} = ۵۰$

... حل می‌شود، روابط تنش به صورت $a\cos_\theta^2 + b\sin_\theta^2 + c\tau_{xy} = 0$ ... است.

سؤال) اگر المان زیر را ۶۰° بچرخانیم تنش‌ها چقدر خواهد شد؟

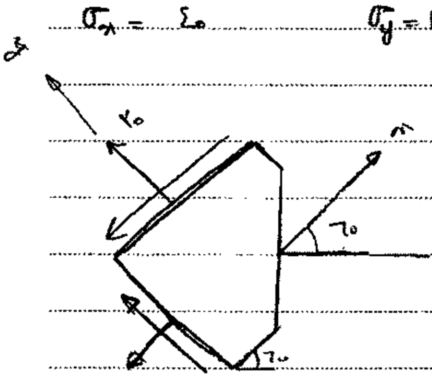




ابتدا تنش‌ها در صفحه ۱ را بدست آوریم.

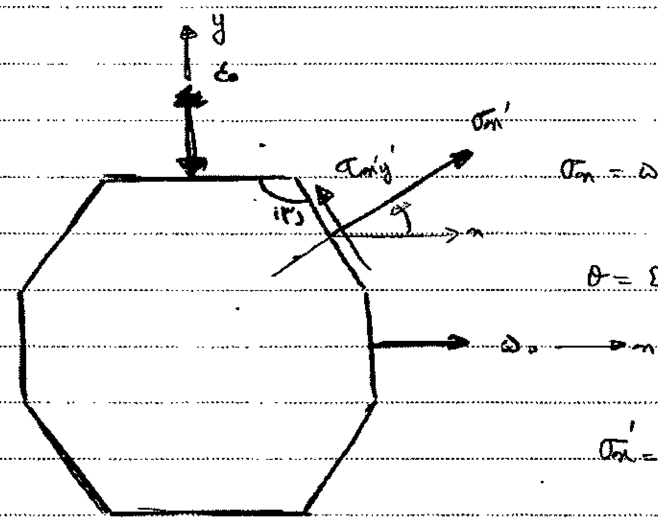
$\sigma_x = 40$ $\qquad$ $\sigma_y = 20$ $\qquad$ $\tau = -15$

$\theta = -60 \longrightarrow$ اگر محور x به سمت خط عمود بر صفحه بچرخیم، ساعتگرد است



$\tau_{x'y'} = -5\left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)$

$\sigma_{x'} = 25 + \frac{15\sqrt{3}}{2}$



$\sigma_x = 50$ $\qquad$ $\sigma_y = -40$ $\qquad$ $\tau_{xy} = 0$

$\theta = 45$

$\sigma_{x'} = 0$ $\qquad$ $\tau_{x'y'} = -45$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

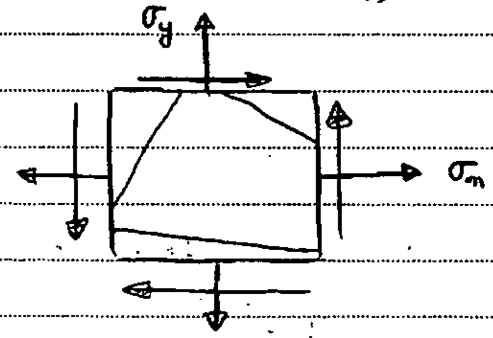
در نهایت معادلات کلی قبل به شکل زیر می‌باشد

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

تبدیل تنش در صفحه‌های مختلف

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

یعنی با گرفتن و محاسبه‌ی تنش برای المان مربعی بزرگ می‌توان تنش در صفحه‌های زیر را نیز به دست آورد.

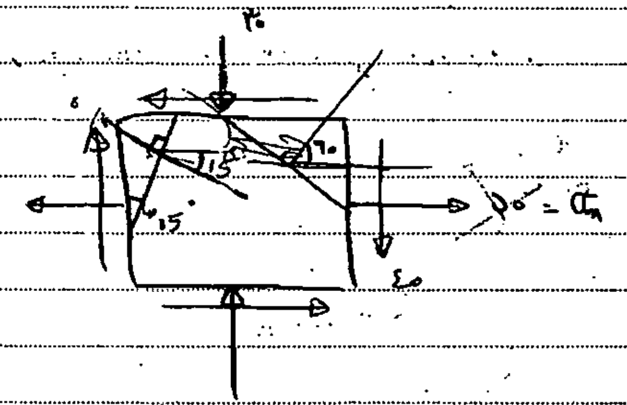


به دست آوردن علامت تنش‌ها

تنش ~~نرمال~~ محوری: کششی مثبت و تنش فشاری منفی است.

تنش برشی: نسبت به σ_x اگر گشتاور حاصل از τ پادساعتگرد باشد مثبت است و اگر ساعتگرد باشد منفی است.

زاویه‌ی θ: نسبت به خط عمود بر صفحه و خط افقی، اگر ساعتگرد باشد منفی و اگر پادساعتگرد باشد مثبت است.



$\theta_1 = 60$ $\sigma_x = 50$

$\theta_2 = -15$ $\sigma_y = -30$

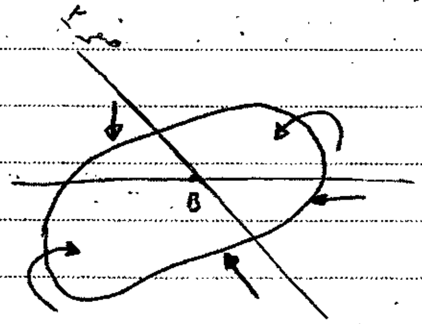
$\tau = -40$

نکته: برای تبدیل تنش در هر المانی نیاز به داشتن تنش در دو صفحه‌ی عمود داریم.

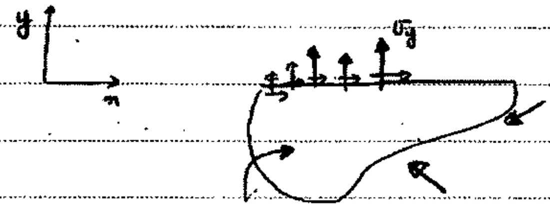
Subject: Year. Month. Date. ( )

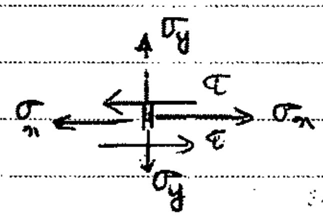
تبدیل تنش: تنش های ... در صفحه ای دلخواه حساب کرد.

تنش در نقطه ای دلخواه B

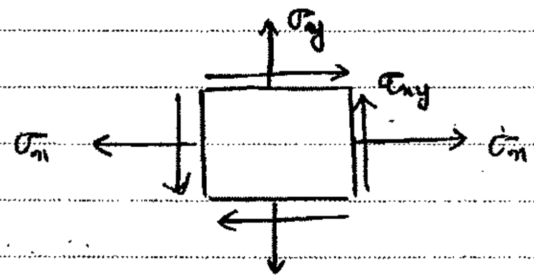


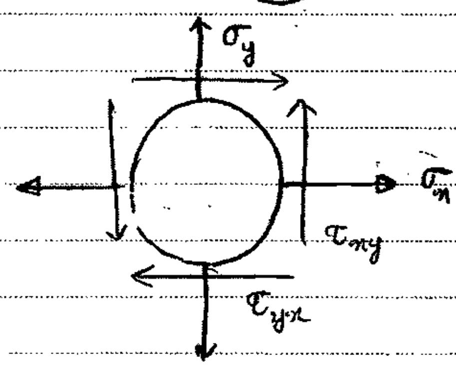
اگر المان را برای نقطه ی B ببریم





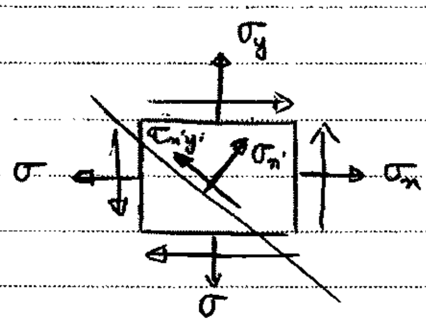
وجه های صفحه ای نقطه ی B ... می توان صفحه فرض گرفت و تعادل آن را بررسی کرد. در ...

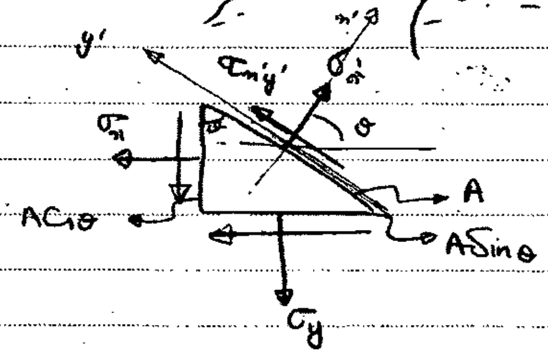




$$\Sigma M = 0 \Longrightarrow \boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$

در حالت دیگر ... در صفحه ۲ بررسی کنیم، المان فوق تغییر می کند.





$\Sigma F_{x'} = 0 \Longrightarrow$

$\Sigma F_{y'} = 0 \Longrightarrow$ $\tau_{x'y'}$ و $\sigma_{x'}$ بدست می آید (در ...)

Subject: Year. Month. Date. ( )

پس به جای طول ~~[illegible]~~ المان dx بار q با جریان برش بدست آورده و با $dP = q\,dx$ و سپس dx را حساب

می‌کنیم که همین است به طوری که مدنظر است و گشتاور تعادل را می‌نویسیم. هر چه فاصله گشتاورهای ... به نقطه‌ای که آن محور q بیشتر باشد

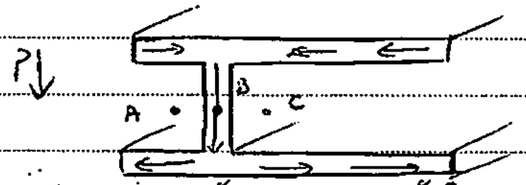
بهتر است. طبق طرز این روش

$$Pe = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{b_i} \frac{PQ_i}{I}\,dx\,R_i \Rightarrow \boxed{e = \frac{1}{I}\sum \int_0^{b_i} Q_i R_i\,dx}$$

بازوی گشتاور

اگر نقطه‌ای داخل پروفیل را در نظر بگیریم باید مجموع گشتاورهای حاصل از جریان برش حول محور با گشتاور حاصل از P

هم جهت باشند. اگر نقطه‌ای خارج از پروفیل را در نظر بگیریم برعکس است.

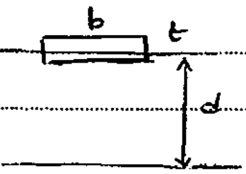


گشتاور حول B هر دو ساعتگرد هستند پس باید P را در A قرار دهیم.

چون ... اگر C باشد گشتاور کل جریان‌ها پادساعتگرد است. اگر P در C واقع شود گشتاور حاصل حول محور ... C صفر

می‌شود و همواره ... ساعتگرد است

در مقاطع جدار نازک



$$I = \frac{1}{12} b t^3 + b t d^2$$

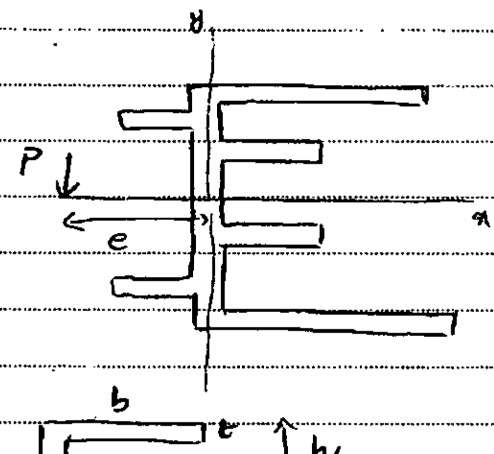
$$\frac{1}{12} b t^3 \ll b t d^2 \rightarrow I = b t d^2$$

I هر بال حول تار خنثی

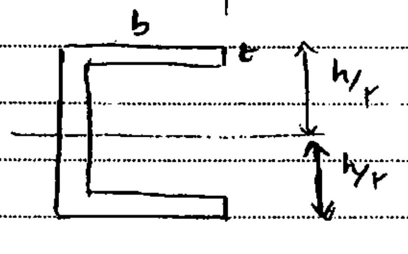
مرکز سطح هر بال

$$e = \frac{\sum I_i x_i}{I}$$

و ...

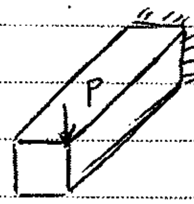


تار خنثی



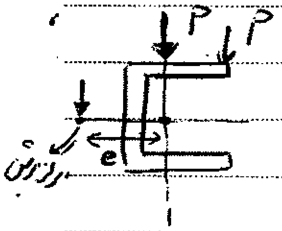
$$e = 2\,\frac{I_1 x_1}{I} = \frac{b t h^2 b}{4 \times 2 I} \times 2 = \frac{t b^2 h^2}{4 I}$$

مرکز برش :

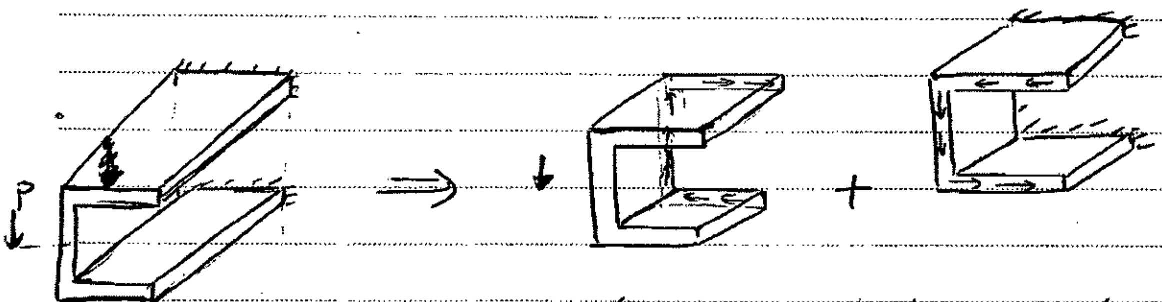


در شکل مقابل مقطع دچار خمش و عدم دچار پیچش می‌شود چرا که نیرو از مرکز سطح می‌گذرد.

اما در شکل پایینی با وجود اینکه نیرو در راستای مرکز سطح است باز هم خمش و پیچش داریم.

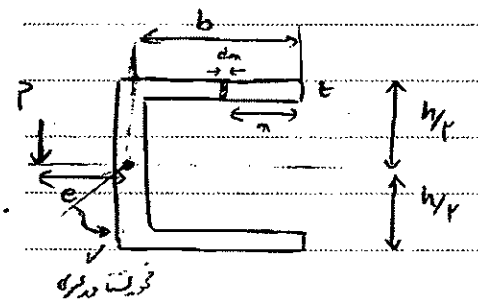


هدف یافتن نقطه‌ای است که اگر نیرو آن‌جا وارد شود، فقط خمش داریم. این نقطه مرکز برش نام دارد.



در یک نقطه‌ی مناسب از جزء کشیده را و نیروها را انتگرال گرفته و معادل را بررسی می‌کنیم.

مثال:



$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$V = P \qquad q = \frac{P t x h/2}{I}$$

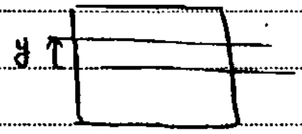
$$dF_1 = q' dx = \frac{P t x h}{2I} dx$$

$$dM_1 = h/2 \, dF_1 = \frac{P t x h^2}{4I} dx \Rightarrow M_1 = \int_{x=0}^{x=b} dM = \frac{P t b^2 h^2}{8I}$$

$$M = 2M_1 = \frac{P t b^2 h^2}{4I}$$

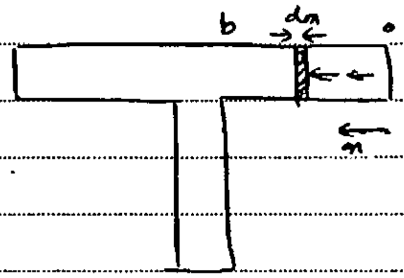
$$\sum M = 0 \Rightarrow Pe = \frac{P t b^2 h^2}{4I} \Rightarrow \boxed{e = \frac{t b^2 h^2}{4I}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



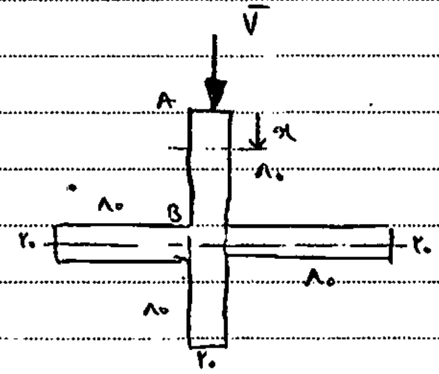
$$\tau = \frac{P}{h^3 b}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

می‌توان q را برحسب x محاسبه کرد و نیروی وارد بر جزء شاخه را بدست آورد.



$$\boxed{F = \int_0^b q(x)\, dx}$$

مثال: نیروی داخل شاخه‌ی AB را حساب کنید.



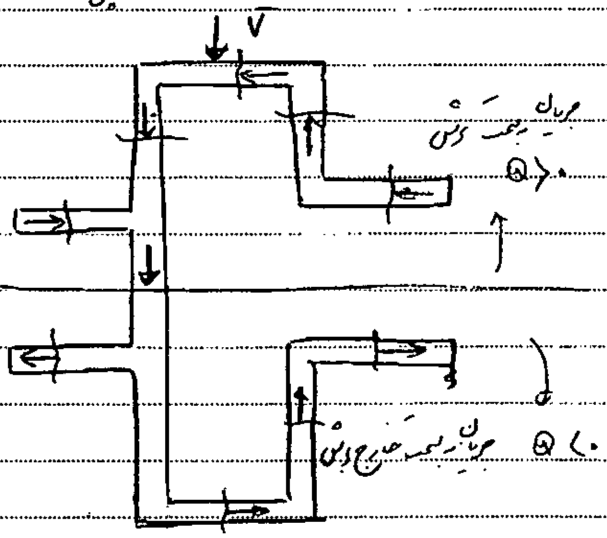
$$VQ = V \times 20x\left(90 - \frac{x}{2}\right)$$

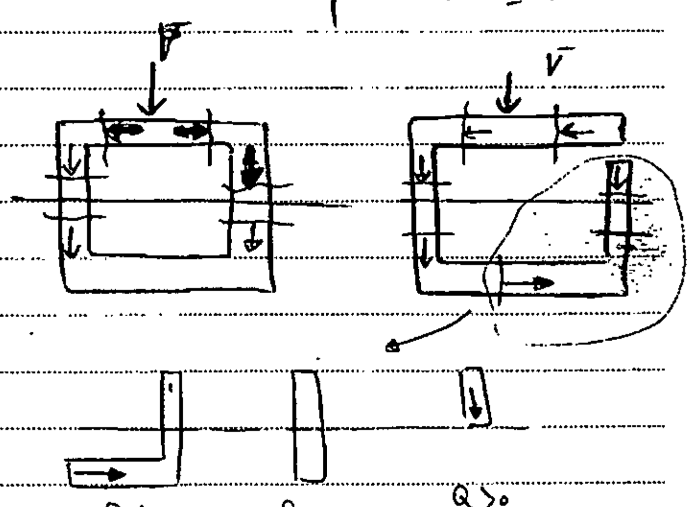
$$I = \frac{1}{12}\times 20 \times 180^3 + 2\times\left(\frac{1}{12}\times 80 \times 20^3\right)$$

$$\Rightarrow q_{(x)} = \frac{VQ}{I} = \frac{V \times 20x\left(90 - x/2\right)}{I}$$

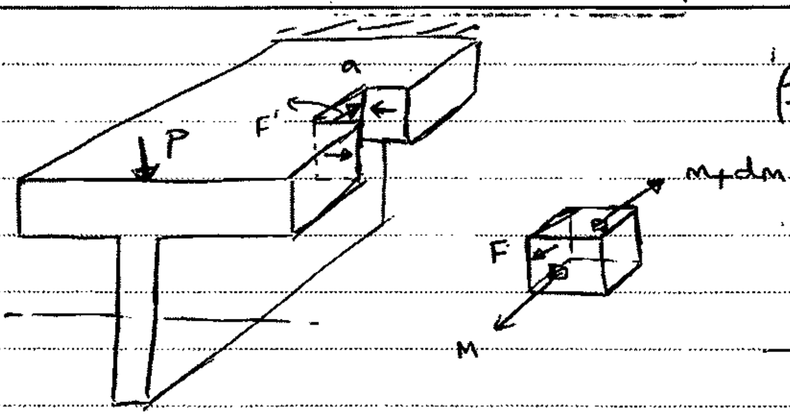
$$F = \frac{20V}{I}\int_0^{80} x\left(90 - \frac{x}{2}\right) dx$$

مثال: جریان‌های برش را رسم کنید.



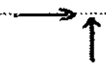


Subject:
Year. Month. Date.

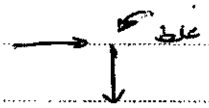


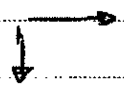
اگر هر قطعه‌ی کوچک را در هر سمت در نظر بگیریم :

$|F'|=|F|$



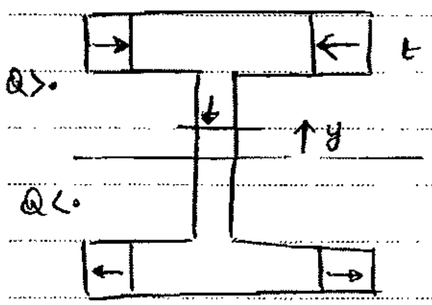
نیرو دو تا باید به هم نزدیک شوند





یا از هم دور شوند .

در قطعه‌ی جدا شده ، $y>0$ و $A>0$ در نتیجه $Q>0$ و از طرفی چون Q حول محور برابر صفر است ،



Q قسمت دیگر منفی می‌شود . در رسم جریان برش و جهت نیرو

زمانی که علامت Q مثبت است که جریان به سمت گوشه خط برش

و زمانی که علامت Q منفی است ، جریان خارج شونده از خط برش است

جاهای مقابل مربوط به قسمت متصل به دیگری است ، از لحاظ جهت مخالف

$$\tau = \frac{VQ}{It} \longrightarrow \tau t = \frac{VQ}{I}$$

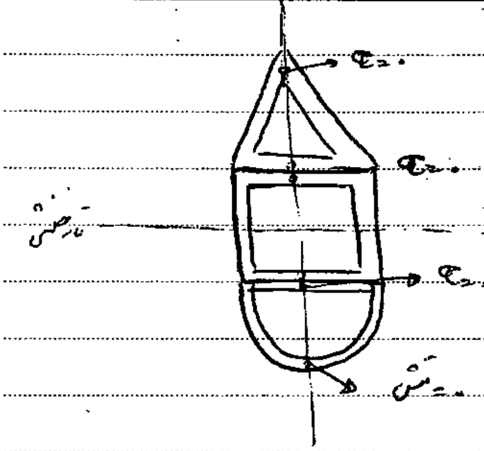
بنابراین تمامی جهت که برعکس می‌شود

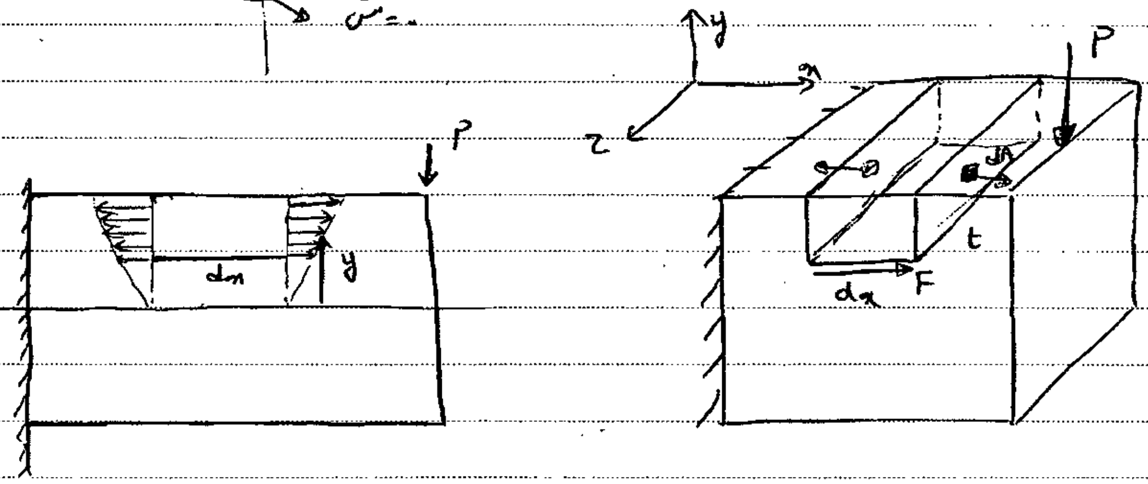
$$\longrightarrow \boxed{q = \frac{VQ}{I}}$$

q : جریان برش

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در مقطع جدار نازک روی خط تقارن تنش صفر است.





$$\sigma = \frac{My}{I}$$

$\Sigma F_{(x)} = 0$

$$F = \int_A \frac{(M + dm)\,y}{I}\, d_A - \int_A \frac{My}{I}\, d_A$$

چون روابط M از P.x بدست می‌آید و چون dm را از انتگرال بیرون آورده $d_A = dy\,d_z$

$$F = \int \frac{dm}{I}\, y\, d_A = \frac{dm}{I}\int y\, d_A \qquad \frac{dm}{d_x} = V$$

$$\frac{F}{t\,d_x} = \frac{dm}{I\,t\,d_x}\int y\, d_A$$

$$\boxed{\tau = \frac{V}{It}\,Q}$$

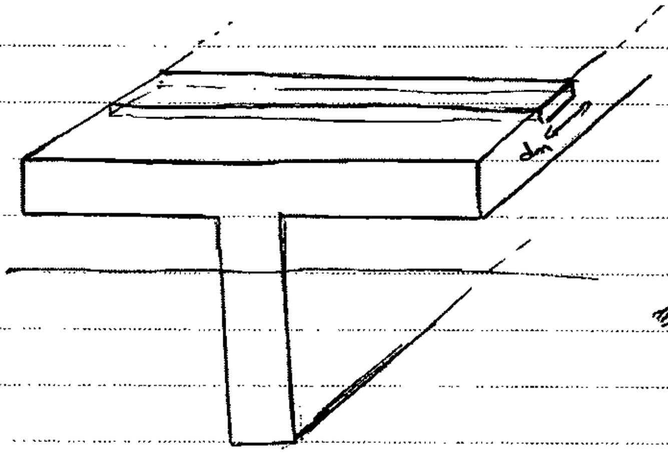
$$\tau = \frac{F}{d_x\, t}\ ,\quad \bar{y}A = \int y\, d_A = Q$$

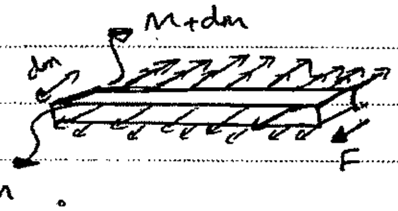
در واقعیت در جداول τ ثابت نیست؛ اما تفاوت آنقدر کم است و d_x آنقدر کوچک است که τ با تقریب خوبی درست درمی‌آید

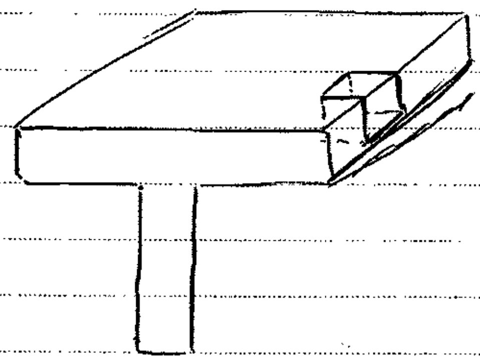
$$d_F = \frac{(M+dM)\,y}{I}\,d_A - \frac{My}{I}\,d_A$$

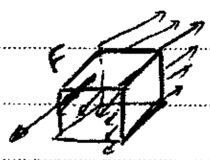
$$F = \int \frac{(M+dM)\,y}{I}\,d_A - \frac{My}{I}\,d_A$$

$$\rightarrow \quad F = \int \frac{dM\,y}{I}\,d_A$$



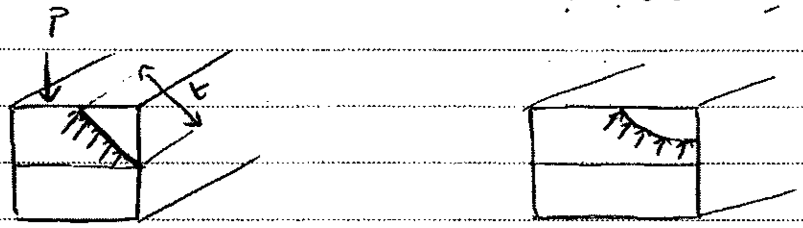




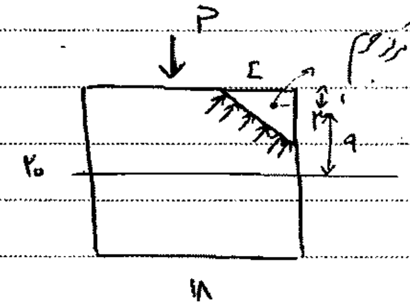


$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

برش a حتماً موازی با تار خنثی نیست ؟ ولی روابط برقرار است.



مثال



$V = P$

$Q = \frac{۳ \times ۴}{۲} \times ۹$ $I = \frac{۱}{۱۲} \times ۲۰^۳ \times ۱۵$

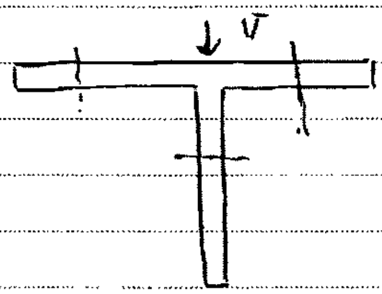
$t = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$

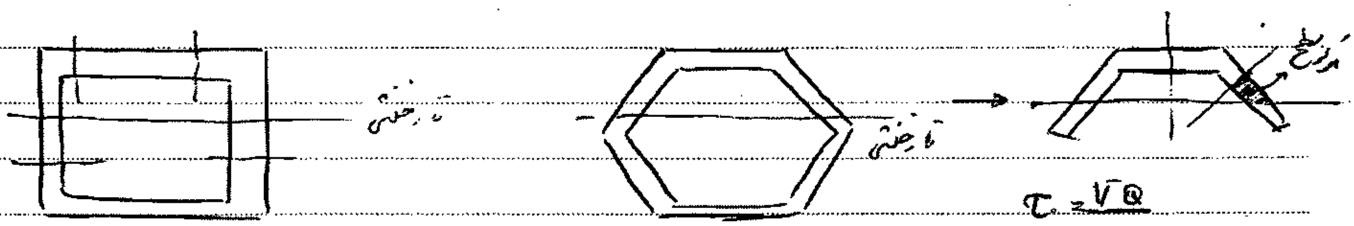
$\tau = \frac{VQ}{It}$

در حالت غیر جدار نازک که در طراحی برش را موازی با تار خنثی در نظر می‌گیریم.

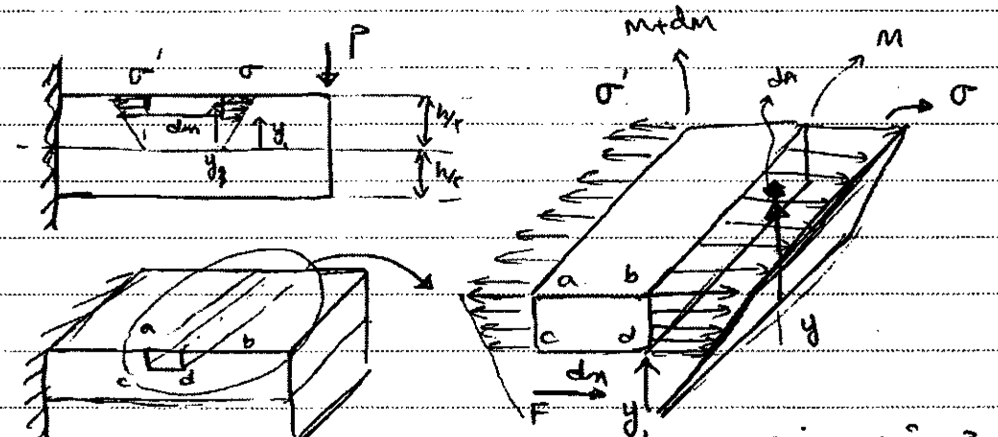
مقاطع جدار نازک ؛ در مقاطع جدار نازک خطوط برش را عمود بر جهت ضخامت

بر قسمت نازک ~~[illegible]~~ در نظر می‌گیریم. توجه داشته باشید که با این قسمت برش محدوده کامل جدا شود.





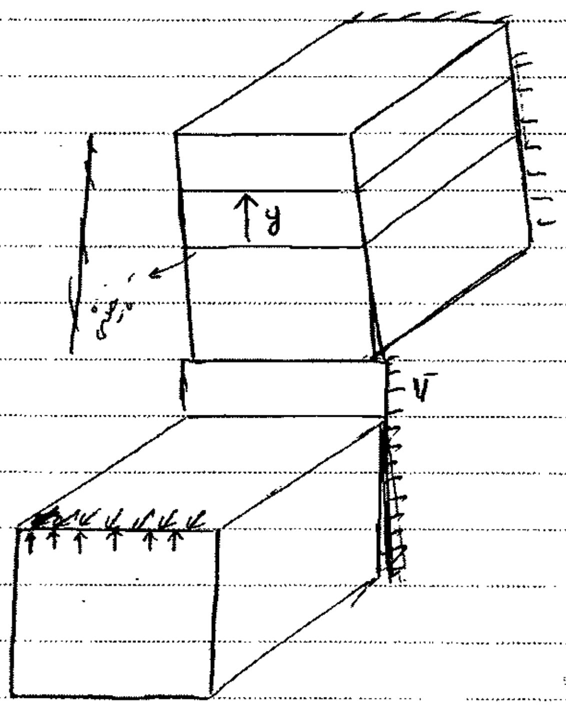
$\tau = \frac{VQ}{It}$



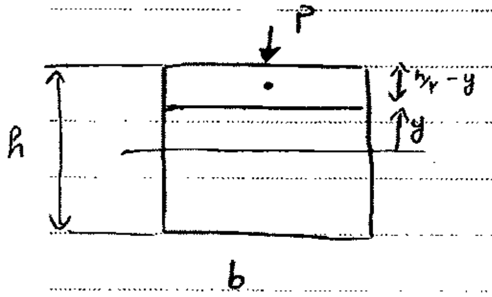
جسم فاصله a نسبت به b ... نسبت به ... است ... و در ...

$\sigma' > \sigma$

چنین تنش برشی ایجاد میشود در مقطع بصورت زیر است.



مثال مستطیل:



$$V = P$$

$$Q = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right)$$

$$I = \frac{1}{12} h^3 b$$

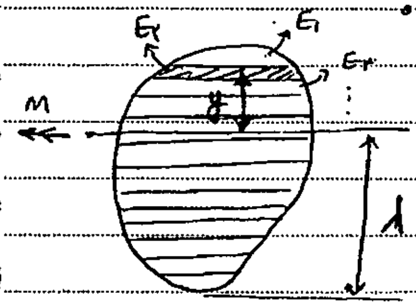
$$t = b$$

$$\Rightarrow \tau_{(y)} = \frac{VQ}{It} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{6P}{h^3 b}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}$$

$$\frac{d\tau}{dy} = 0 \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{P}{hb} = 1/5\ \tau_{ave}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

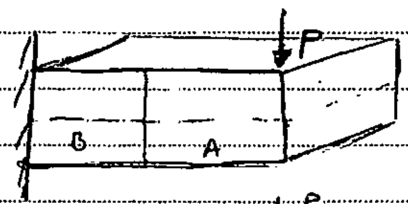
مثال: دو ماده با مدول‌ها برای خمش جسمی با یکدیگر ... n الیاف ناهمگن که مختلف ساخته شده باشند.

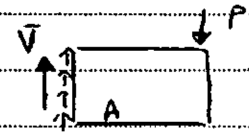


$$\sigma_n = Q \cdot \frac{My}{I_t}$$

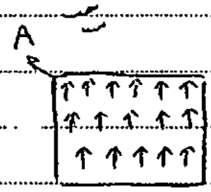
ضریب ... E_1 و E_2 ... ، ... محور ... — نسبت مدول‌ها ، $\frac{E_1}{E_2} = n$ — به محور خنثی →

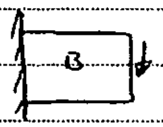
برش





بعد از تقطیع

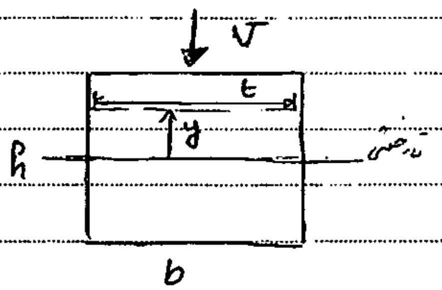




$$\tau_{ave} = \frac{V}{A} = \frac{P}{A}$$

تنش برشی میانگین (متوسط)

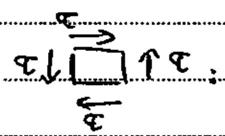
تنش برشی در همه نقاط برابر نیست ... در رابطه فوق بصورت میانگین است ... پس در مقاطع بزرگ‌تر نمی‌توان از این رابطه استفاده کرد.



$$\boxed{\tau = \frac{VQ}{It}}$$

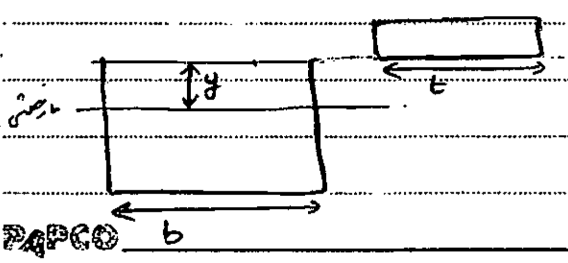
طول خط برش

اگر جزئی از جسم را در نظر بگیریم:



Q ، گشتاور اول سطح در خط برش

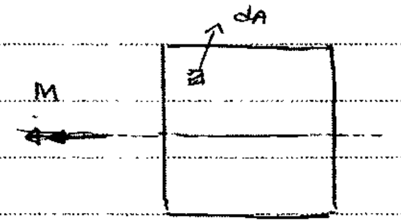
Q را می‌توان هم از قسمت بالای برش و هم قسمت پایین خط برش بدست آورد، هر کدام راحت‌تر است را انتخاب می‌کنیم.



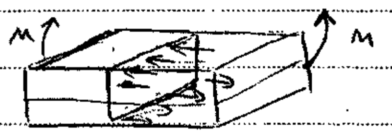
Subject:
Year. Month. Date. ( )

در معادلات بالا ثابت است که می‌توان فرض کرد اگر نیروی P وارد در مرکز سطح مقطع باشد تار خنثی از مرکز سطح مقطع می‌گذرد.

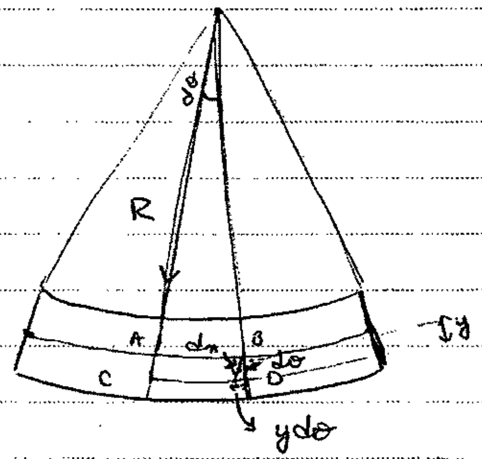
حال یک مقطع را درون دو نظر بگیرید. هر نقطه این مقطع تحت تنش است.



$$dF = \sigma \, dA$$



چون در خنثی تنش صفر است، پس طول آن پس از خمش تغییر نمی‌کند.



پیش از خمش

$$\varepsilon = \frac{y\,d\theta}{R\,d\theta} = \frac{y}{R}$$

$$E\varepsilon = \frac{Ey}{R} = \sigma$$

$$F = \int_A \sigma \, dA = \int \frac{Ey}{R} \, dA = 0$$ چون نیروی خارجی وجود ندارد

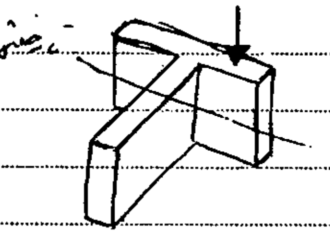
$$\rightarrow \frac{E}{R} \int y \, dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{R} A\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{y} = 0 \rightarrow$$ محور خنثی از مرکز سطح می‌گذرد

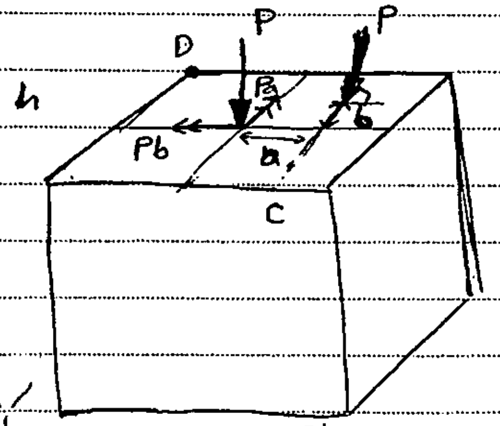
$$M = \int y \sigma \, dA = \int y \frac{yE}{R} \, dA = \frac{E}{R} \int y^2 \, dA = \frac{EI}{R}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \longrightarrow \frac{\sigma}{Ey} = \frac{M}{EI} \longrightarrow \boxed{\sigma = \frac{My}{I}}$$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

اگر خمش نامتقارن باشد (نیرو موازی سطح وارد شود)



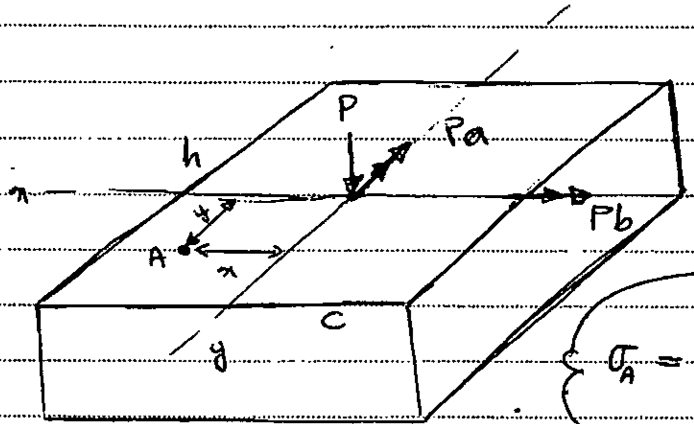


فشاری کششی فشاری

$$\sigma_D = -\frac{Pb\,\frac{h}{2}}{\frac{1}{12}h^3c} + \frac{Pa\,\frac{c}{2}}{\frac{1}{12}c^3h} - \frac{P}{hc}$$

Pb آ حول محور I Pa حول محور I

در حالت کلی



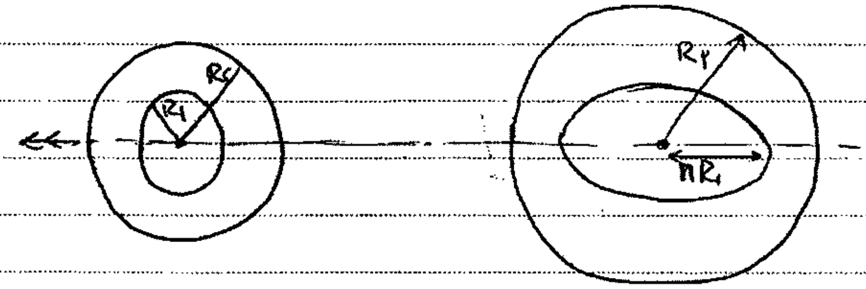
$$\boxed{\sigma_A = \frac{-Pb\,y}{\frac{1}{12}h^3c} + \frac{Pa\,x}{\frac{1}{12}c^3h} - \frac{P}{ch}}$$

برای اینکه نقطه A واقع بر تار خنثی باشد باید $\underline{\sigma_A = 0}$ ، پس برای بدست آوردن معادله تار خنثی داریم :

$$\sigma_A = 0 \longrightarrow \frac{-Pb\,y}{\frac{1}{12}\cancel{h^3}c} + \frac{Pa\,x}{\frac{1}{12}\cancel{c^3}h} - \frac{P}{ch} = 0 \Longrightarrow \boxed{a'x + b'y + c' = 0}$$

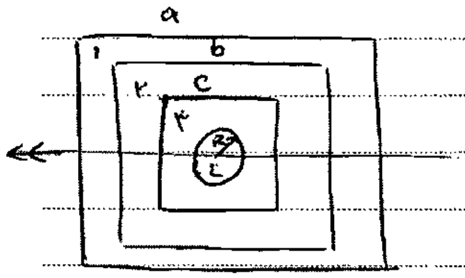
معادله تار خنثی

حال اگر بررسی خاصی داشته باشیم مطابق این معادلات انجام می‌دهیم .



$$\frac{E_1}{E_2} = n$$

$$I_t = n \times \frac{1}{4}\pi R_1^4 + \frac{1}{4}\pi (R_2^4 - R_1^4)$$



$$\frac{E_1}{E_4} = n_1 \qquad \frac{E_2}{E_4} = n_2 \qquad \frac{E_3}{E_4} = n_3$$

$$\cancel{I_t \; \frac{1}{12} a^4 \; b^4 n_1 \; \frac{1}{12} b^4 \; c^4 n_2 \; \frac{1}{12} c^4}$$

$$I_t = \frac{1}{12}(a^4 - b^4)\, n_1 + \frac{1}{12}(b^4 - c^4)\, n_2 + \left(\frac{1}{12} c^4 - \frac{1}{4}\pi R^4\right) + \frac{1}{4}\pi R^4 n_4$$

$$(\sigma_{max})_1 = n_1 \frac{M \, a/2}{I_t}$$

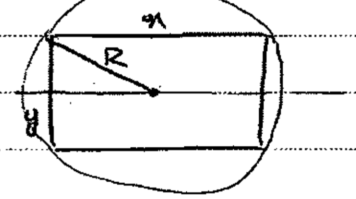
$$(\sigma_{max})_2 = n_2 \frac{M \, b/2}{I_t}$$

$$* \; (\sigma_{max})_3 = \frac{M \, c/2}{I_t}$$

$$(\sigma_{max})_4 = n_4 \frac{MR}{I_t}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در مقطع مستطیلی برای بدست آوردن مقاومت بیشینه

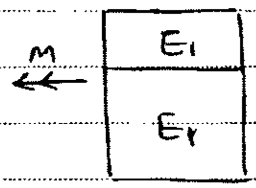


$$\frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12} y^3 x}{\frac{y}{2}} = \frac{1}{6} y^2 x$$

$$y^2 + x^2 = 4R^2 \qquad \frac{I}{c} = \frac{1}{6}(4R^2 - x^2)x$$

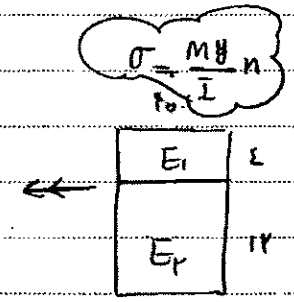
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{I}{c}\right) = 0 \implies \left(\frac{I}{c}\right)_{max} \checkmark$$

نکته: رابطه $\sigma = \frac{My}{I}$ مربوط به حالتی است که مقطع یک تکه و از یک جنس بوده و تکه‌ها از راستای هر سطح وارد شود. حال اگر از یک جنس نبود (مقطع به صورت کامپوزیت باشد):

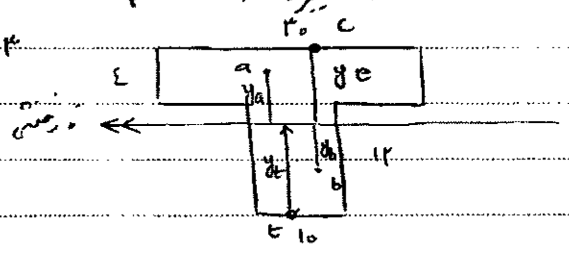


اگر $\frac{E_1}{E_2} = n$ باشد، عرض مقطع با مدول E_1 را n برابر می‌کنیم تا به صورت مقطعی با مدول E_2 مدل شود. البته عرض را تغییر می‌دهیم که محور خنثی تغییر نکند.

پس تنش‌های به دست آمده در قسمت تغییر یافته (مدل شده) در n ضرب می‌شوند: $\sigma = \frac{My}{I} n$



$$\frac{E_1}{E_2} = 3$$



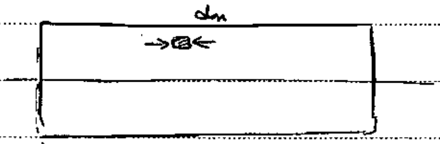
$$\boxed{\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}}$$

$$\sigma_a = \frac{M y_a}{I_t} \times 3 \qquad \sigma_b = \frac{M y_b}{I_t} \qquad (\sigma_{max})_c = \frac{M y_c}{I_t} \times 3 \qquad (\sigma_{max})_t = \frac{M y_t}{I_t}$$

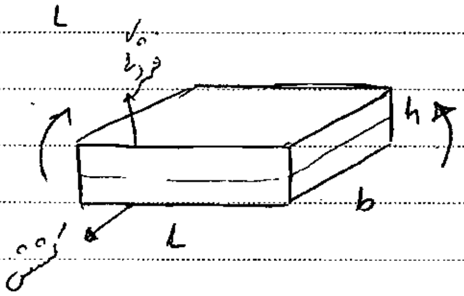
نکته: این کار به خاطر آن است که تار خنثی ثابت بماند که حتی اگر بخواهیم به گونه‌ای عمل کنیم که تار خنثی قبل از مدل کردن معلوم باشد یا قبل و بعد از مدل کردن یکسان باشد نیازی به مدل کردن نیست.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر المان کوچکی در عرض تیر را در نظر بگیریم.



$$\varepsilon = \int_0^L \varepsilon_{(x)}\,dx$$

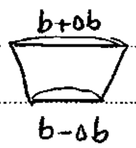


وقتی M تغییر کند داریم

$$\varepsilon = \frac{M\frac{h}{2}}{\frac{1}{12}h^3 b E}$$

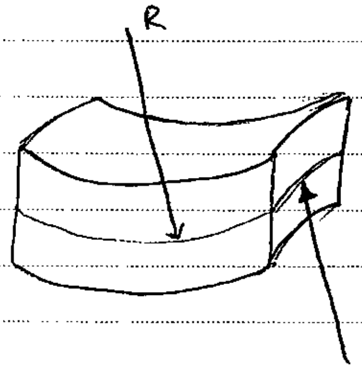
$$\Delta b = -\nu\varepsilon b = -\nu\frac{M\frac{h}{2}}{\frac{1}{12}h^3 b E}\,b \longrightarrow$$ کم می‌شود   عرض پایینی

$$\Delta b = +\nu\frac{M\frac{h}{2}}{\frac{1}{12}h^3 b E}\,b \longrightarrow$$ افزایش می‌یابد   عرض بالایی



یعنی مقطع دچار اعوجاج می‌شود. مقدار اعوجاج بسیار کم است.

حتی به صورت کمان در می‌آید:



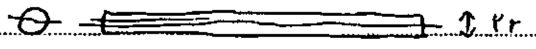
$$\boxed{R' = \frac{R}{\nu}}$$

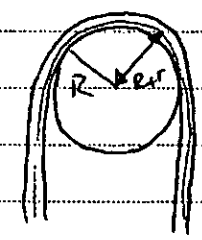
$$\sigma_{max} = \frac{M\,c_{max}}{I} \Longrightarrow M = \frac{I}{c}\,\sigma_{max} \Longrightarrow \frac{I}{c} =$$ مقاومت خمشی

(y_{max})

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: تنش max در سیم چقدر است؟

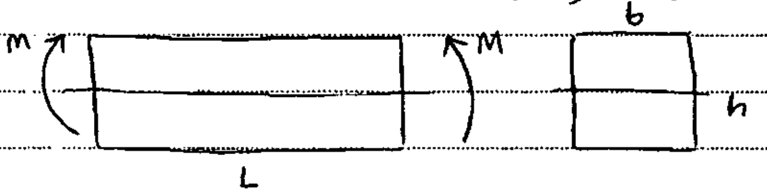




$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{R+r} = \dfrac{M}{EI} \\ \sigma_{max} = \dfrac{M\, y_{max}}{I} \end{array}\right. \quad y_{max} \to r \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sigma_{max} = \dfrac{Er}{R+r}}$$

نکته: در طول تیر تحت خمش، تنش ثابت است؛ بنابراین کرنش نیز ثابت است.

مثال: مطلوب است تغییر مکان، تغییر طول تیر.

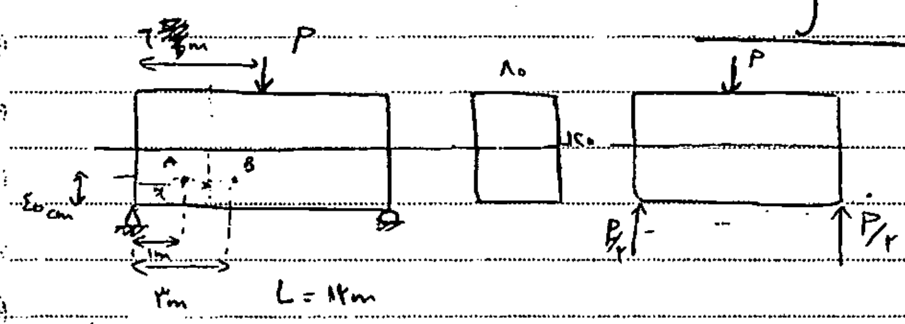


$$\sigma = E\varepsilon \Longrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M \times \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} h^3 b} \Longrightarrow \varepsilon = \frac{M \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} h^3 b E} \Longrightarrow \boxed{\Delta L = \frac{M \times \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} h^3 b E} L}$$

اگر کرنش ثابت نباشد $\delta = \int \varepsilon(x)\, dx$

اگر تغییر طول AB ، ۲cm باشد



راست تیر: $M(x) = \frac{P}{2} x$

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(x\, P/2)\, 0.2}{\frac{1}{12}\, 80 \times 120^3 \times 10^{-8}} \Longrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = 0.0003 P x$$

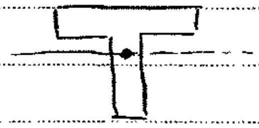
$$\delta_{AB} = \int_1^3 \varepsilon(x)\, dx = \int_1^3 0.0003 P x\, dx = 24 \times 10^{-2}\, m \Longrightarrow P$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تار خنثی از مرکز سطح مقطع تحت خمش می‌گذرد. در مستطیل

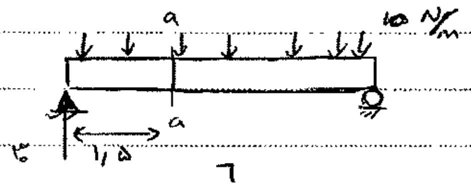
اگر فقط یک قسمت وجود داشته باشد و محور تقارن جسم باشد، محور تار از مرکز سطح مقطع می‌گذرد.

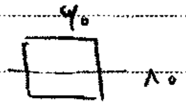


اگر مقطع نسبت به مرکز متقارن باشد: $y_{max}=c$ ، $\sigma=\dfrac{My}{I}$

$$\boxed{\sigma_{max}=\frac{Mc}{I}}$$

در طراحی اول باید M_{max} را پیدا کنیم.





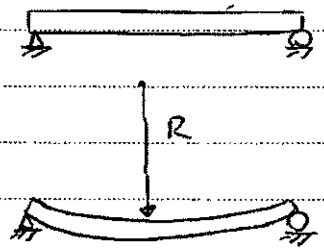
$$\sigma_{max}\Big|_{a}^{a}=\frac{M\times 30}{\frac{1}{12}\times 80^{3}\times 60} \qquad M=30\times 1.5-\frac{10\times(1.5)^{2}}{2}$$

تنش max در نقاطی که M بیشینه و y بیشینه است نباید از حد خاصی بیشتر باشد. این مقدار توسط آیین‌نامه تعیین می‌شود.

رابطهٔ تغییر شکل در خمش: در حالت قبل از ایجاد تنش $R=\infty$. هرچه تنش بیشتر شود R کاهش می‌یابد.

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma=\dfrac{My}{I}\\[2ex]\dfrac{1}{R}=\dfrac{M}{EI}\end{array}\right.$$

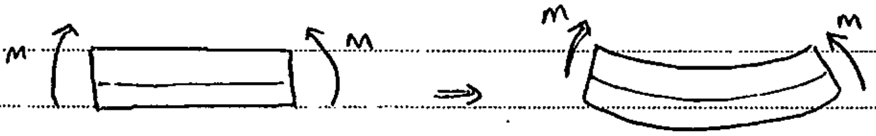
R: شعاع تار خنثی



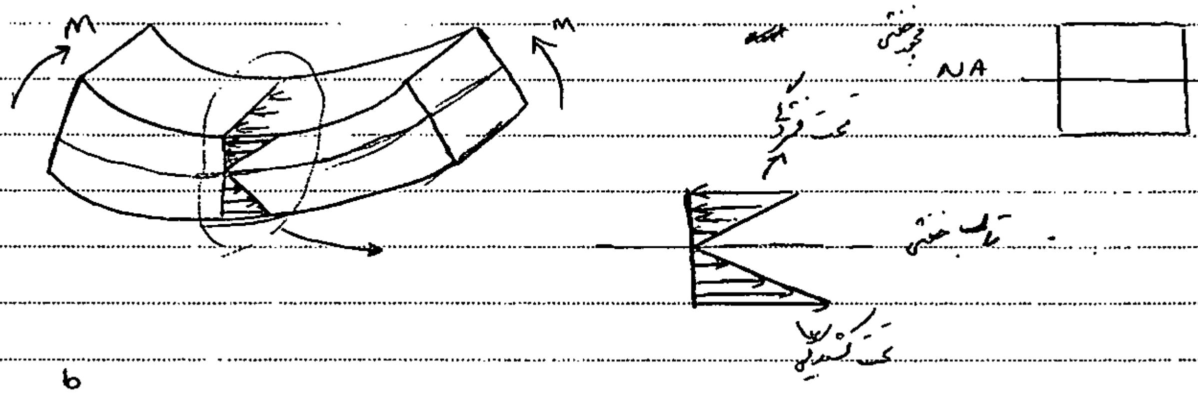
Subject:
Year. Month. Date. ( )

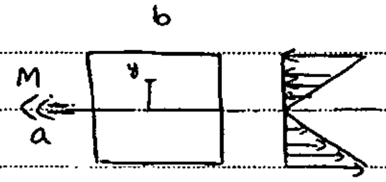
مثال: به صورت دیفرانسیلی با استفاده از المان معادله $EA\frac{d^2\delta}{dx^2} = -q(x)$ را ثابت کنید.

خمش:



مطابق شکل در لبه‌ی بالای ما فشردگی و در لبه‌ی پایینی ما کشیدگی به وجود آمده است. هر چه به سمت وسط می‌آییم از این مقادیر کاسته می‌شود تا در جایی به صفر برسد. این ناحیه، ناحیه‌ی تبدیل فشردگی به کشیدگی است.





NA

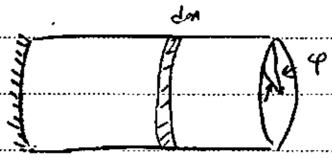
$$\boxed{\sigma = \frac{My}{I}}$$

I: ممان اینرسی حول محور خنثی

برای مستطیل: $I = \frac{1}{12}a^3b$

PAPCO

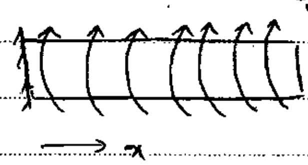
اگر گشتاور یا سطح مقطع ثابت نبود



$$d\varphi = \frac{T(x)\,dx}{GJ}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \int^{L} \frac{T(x)\,dx}{G\,J(x)}}$$

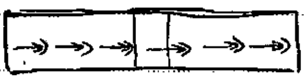
$$d\varphi = \frac{T(x)\,dx}{G\,J(x)}$$



$t(x)\ \frac{N.m}{m}$

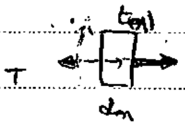
* مثال: برای المان از طریق روابط گشتاوری را نوشته و φ را حساب کنید

(شرایط مرزی را در نظر بگیرید). (مساحت ثابت است)



$$GJ\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -t(x)\ ?$$

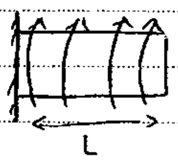
راه دیگر: با نوشتن معادله تعادل



$$T+dT \xrightarrow{\text{معادله دیفرانسیل برای } \varphi \text{ بدست آورید}} \Sigma M = 0 \Rightarrow T + dT - T + t(x)\,dx = 0$$

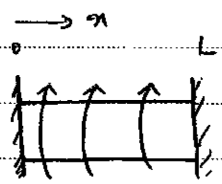
$$\Rightarrow dT = -t(x)\,dx \Rightarrow \frac{dT}{d(x)} = -t(x) \qquad d\varphi = \frac{T(x)\,dx}{GJ}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T(x)}{GJ} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت } x} \frac{d^2\varphi}{dx^2} =$$



$T_{(L)} = 0$

$\varphi(0) = 0$



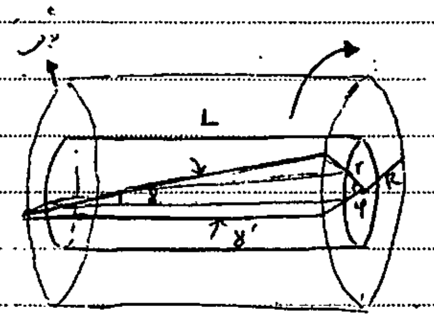
$\varphi(0) = \varphi(L) = 0$

$\left.\begin{array}{l} T(0) \neq 0 \\ T_{(L)} \neq 0 \end{array}\right\}$ مجهول

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تنش برشی طبق رابطه $\tau_{max} = \frac{T}{2At_{min}}$ محاسبه می‌شود.

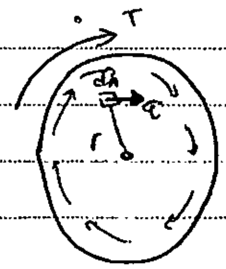
$T = 2At_{min}\,\tau_{max} \Longrightarrow$ ثابت ظرفیت مقطع لوله $= 2At_{min}$



شکل ۱ $\quad r\varphi = L\gamma \Longrightarrow \frac{\varphi}{L} = \frac{\gamma}{r}$

چون $\frac{\varphi}{L}$ و یا ... ثابت است، لذا $\frac{\gamma}{r}$ همواره ثابت است.

$$\frac{\gamma'}{R} = \frac{\gamma}{r}$$



$$\tau\, d_A = dF \Longrightarrow r\tau\, d_A = dT$$

$$\boxed{T = \int r\tau\, d_A}$$

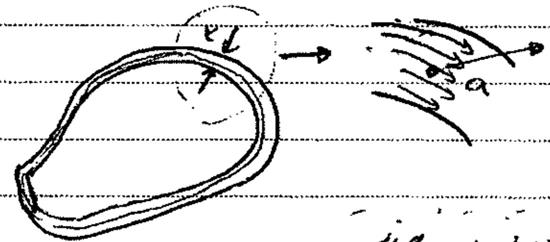
$$\begin{cases} \tau = G\gamma \\ \frac{\varphi}{L} = \frac{\gamma}{r} = \text{ثابت} \end{cases} \Longrightarrow \frac{G\gamma}{r} = \frac{G\varphi}{L} \Longrightarrow \frac{G\varphi}{L} = \frac{\tau}{r} \quad \text{ثابت}$$

$$T = \int r^2 \frac{\tau}{r}\, d_A \xrightarrow{\tau/r \text{ ثابت}} T = \frac{\tau}{r}\underbrace{\int r^2 d_A}_{J} \Rightarrow T = \frac{\tau}{r}J$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{Tr}{J}} \longrightarrow \frac{\tau}{r} = \frac{T}{J} = \frac{G\varphi}{L} \longrightarrow \boxed{\varphi = \frac{TL}{GJ}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای مقاطع بسته |



در اینجا نیز با نزدیک شدن به قسمت خارجی جریان

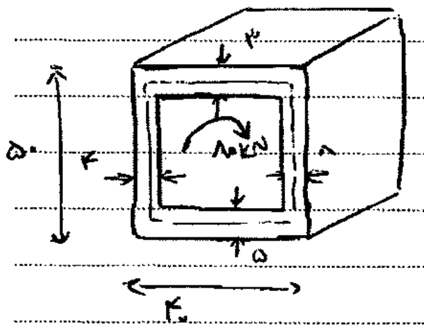
تنش افزایش می‌یابد ، اما ما در نقطه میانی در نظر می‌گیریم ، چون که این تقریب بهتر است .

$$\tau = \frac{T}{2At}$$

طول خط چین

$$\boxed{\varphi = \frac{TL}{4A^2G} \oint \frac{ds}{t}}$$

ممکن است t متغیر باشد . A سطح محصور درون خط چین است . چون سطح خارجی و داخلی دو حد هستند ، مساحت سطح محصور خط چین با مساحت داخل جسم خیلی فرق می‌کند ؛ البته اگر قابل مقایسه بود ، باید جدا حساب کنی .



$$\tau = \frac{80}{2(46\times 36)\times 10^{-4} \times 8\times 10^{-3}}$$

$$\varphi = \frac{80 \times 3}{4(36\times 46)\times 10^{-9} \times 30\times 10^{9}} \times \left(\frac{36}{3} + \frac{46}{4} + \frac{36}{5} + \frac{46}{8} \right)$$

اگر شکل از قسمت‌های مجزا تشکیل شده باشد

$$\boxed{\varphi = \frac{TL}{4A^2G} \sum \frac{S_i}{t_i}}$$

حال می‌خواهیم سختی این مقطع بسته را بیابیم

$$T = \frac{4A^2G}{L \sum \frac{S_i}{t_i}} \varphi \implies \text{سختی} = \frac{4A^2G}{L \sum \frac{S_i}{t_i}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مقاطع

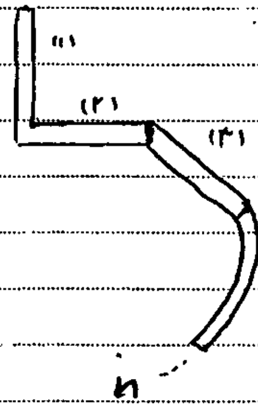
مقطع نازک مستطیلی

$$\tau = \frac{rT}{J} \qquad \tau = \frac{t\,T}{\boxed{\frac{1}{3} b t^3}_{J}}$$

اگر شکل ترکیبی از چند قسمت باشد:

$$\tau_j = \frac{T t_j}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} t_i^3 b_i} \qquad \varphi = \frac{TL}{G \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} t_i^3 b_i}$$

سختی پیچشی مقطع باز ترکیبی



$$K = \frac{G \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} t_i^3 b_i}{L}$$

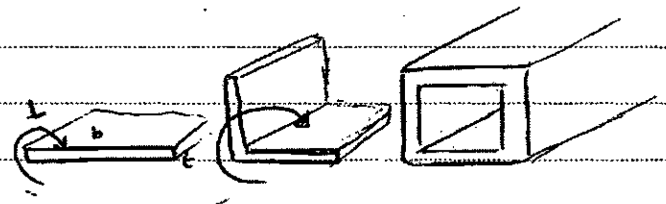
برای محاسبه‌ی ظرفیت برای حالت بحرانی به محاسبه‌ی رابطه‌ی فوق نیاز داریم

برای ظرفیت باید به دنبال تنش max برویم

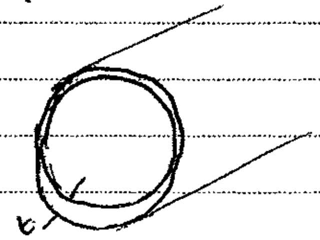
$$\tau_{max} = \frac{T t_{max}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} b_i t_i^3} \Longrightarrow T = \boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} t_i^3 b_i}{t_{max}}}\,\tau_{max}$$

ظرفیت الاستیک پیچشی مقطع باز

پیچش مقطع جدار نازک باز و بسته:



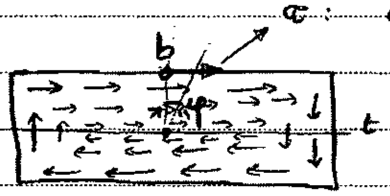
اگر مقطع لوله‌ای هم بسته باشد، به آن مقطع بسته گویند و برعکس.



اگر مقطع باز نازکی تحت پیچش در نظر بگیریم

بیشینه تنش: τ

در مقطع مستطیلی



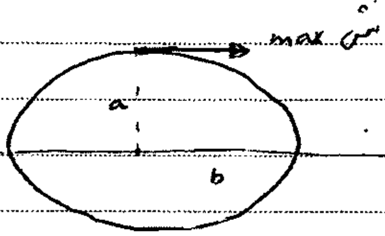
$$\boxed{\tau = \frac{T}{\alpha t^2 b}}$$

α با توجه به نسبت t و b تعیین می‌شود.

در خط چین نشان داده شده تنش برشی صفر است و با نزدیک شدن به هر چه به سطح مستطیل تنش افزایش می‌یابد.

چون در نقاط مرزی این تنش بیشتر است، τ تنش پیچشی بیشینه است که در وسط ضلع است که در فاصله کمتر از مرکز قرار دارد.

(تنش برشی max را محاسبه می‌کنیم)



$a < b$

~~تنش برشی بیشینه مستطیلی~~

اگر $\frac{b}{t} = \infty$ ، $\alpha = \frac{1}{3}$ کاملاً نازک

$$\boxed{\tau = \frac{T}{\frac{1}{3} t^2 b}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سختی (صلبیت، سفتی) : ارتباط خطی بین نیرو و تغییر مکان است که با گشتاور و تغییر زاویه نیز هست

سختی = تغییر مکان (یا تغییر زاویه) × ضریب ≡ نیرو (یا گشتاور) بدون ضریب

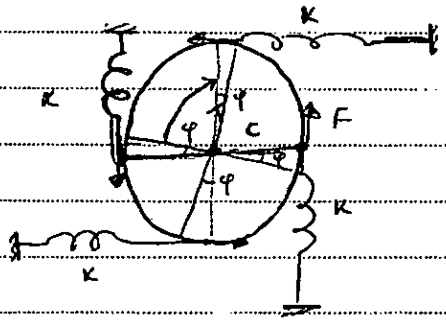
مثلا $F = (K)\delta$

صلبیت ، سفتی ، سختی ≡ ضریب

ظرفیت (مقاومت) : رابطهٔ خطی بین نیرو و تنش مجاز است :

تنش مجاز × ضریب = نیرو بدون ضریب

ظرفیت ≡ ضریب

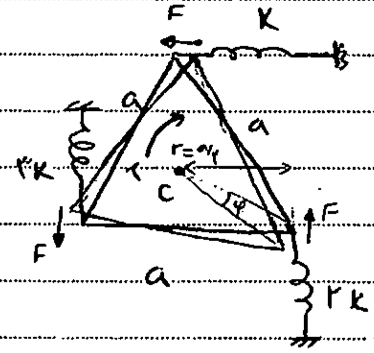


مثال ۱ : می‌خواهیم سختی پیچشی شکل مقابل را بیابیم.
مجموعه یک فنر

شعاع ۱ ، r

فنر $F = K r \varphi$

$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow 4Fr - T = 0 \Rightarrow T = 4Kr^2\varphi \Rightarrow$ سختی پیچشی : $4Kr^2$



اگر φ درجه دوران کند، در حالت خطی است باید ۲ ... بیابیم، ۲ ما محاسبه

مرکز جرم نیروی سختی فنر است. مقدار حاصلضرب $r\varphi$ در این حالت کشیدگی یا فشردگی فنرها بود

درست مقابل ۱ $\delta = a\varphi/2$

$F = K\delta = Ka\varphi/2$

$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow +T - 2/3 \times \frac{a\sqrt{3}}{2} F - a/2\, F - a/2\, F = 0 \Rightarrow T = \frac{a}{2} F \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 \right)$

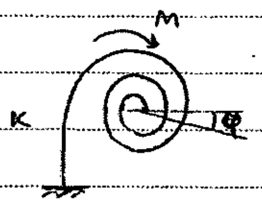
$\Rightarrow T = aF\left(\sqrt{3}/3 + 1\right) \rightarrow \boxed{T = \frac{Ka^2\varphi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)}$

$\Rightarrow$ سختی $= \frac{Ka^2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)$

اگر ما سختی فنر از مرکز جرم نگذرد M آن صفر خواهد شد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

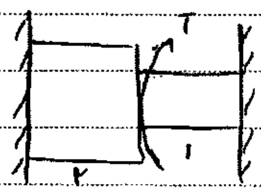
می‌توان در اینجا نیز جسم را به فنر تشبیه کرد، اما فنر پیچشی:



$$\boxed{M = K\varphi} \Longrightarrow K = \frac{GJ}{L}$$

$$T = \frac{GJ}{L}\varphi$$

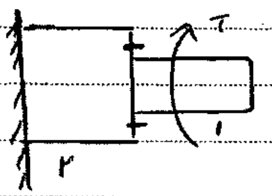
مثال: گشتاور T به جسم اعمال می‌کنیم:



$$\varphi = \frac{T}{K_1 + K_2} \Longrightarrow T_1 = K_1\varphi_1 \ , \quad T_2 = K_2\varphi_2$$

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = T \\ \varphi = \dfrac{T_1 L_1}{J_1 G_1} = \dfrac{T_2 L_2}{J_2 G_2} \end{cases}$$

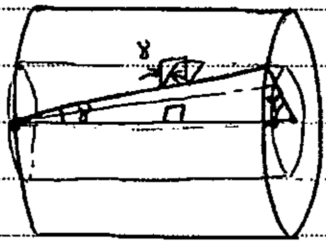
اگر مثلاً توسط یک جدار به اندازه‌ی φ_0 بین دو قطعه لقی وجود داشته باشد، در این صورت

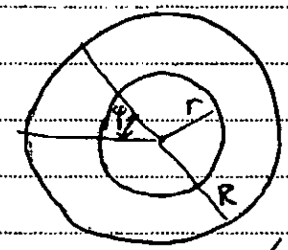


$$\begin{cases} T_1 + T_2 = T \\ \dfrac{T_1 L_1}{G_1 J_1} = \dfrac{T_2 L_2}{G_2 J_2} + \varphi_0 \end{cases}$$

قطعه ۱ به اندازه φ_0 درجه می‌چرخد بعد از آن جسم ۲ را هم می‌چرخاند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



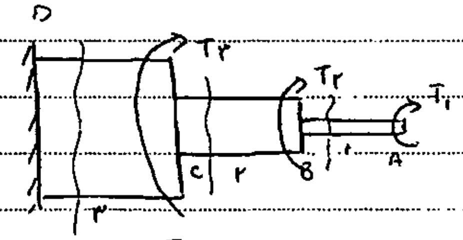


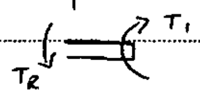
اگر لوله را جدا کنیم و استوانه داخلی را در نظر بگیریم:

چون شعاع دو استوانه برابر نیست مختلفند $\gamma \neq \gamma_{(r)}$

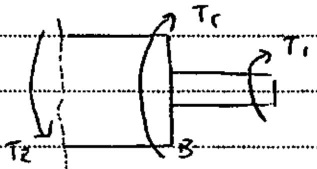
$$\boxed{\varphi r = \gamma_{(r)} L}$$

مثال:

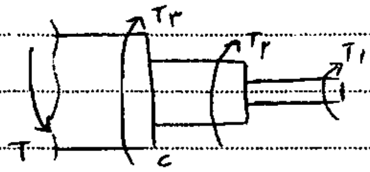




$\Sigma T = 0 \Rightarrow T_R = T_1 \Rightarrow \varphi_{A/B} = \dfrac{T_1 L_1}{J_1 G_1}$



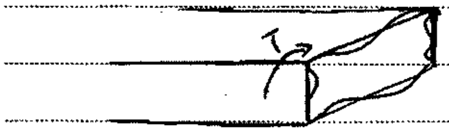
$T_1 + T_2 - T_R = 0 \Rightarrow T_R = T_1 + T_2 \Rightarrow \varphi_{B/C} = \dfrac{(T_1 + T_2) L_2}{J_2 G_2}$



$T = T_1 + T_2 + T_3 \Rightarrow \varphi_{C/D} = \dfrac{(T_1 + T_2 + T_3) L_3}{J_3 G_3}$

$$\varphi_{A/D} = \varphi_{A/B} + \varphi_{B/C} + \varphi_{C/D}$$

اگر مقطع دایره‌ای نباشد، دیگر به صورت صفحه نخواهد ماند! و شکل مقطع دچار اعوجاج می‌شود. تنها مقطعی که ثابت می‌ماند (دایره است.



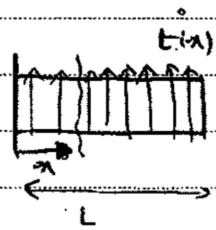
φ: زاویه پیچش نسبی انتهایی است که مقطع دوران می‌کند:

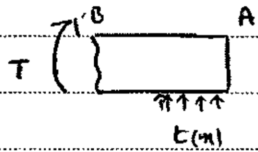
$$\varphi = \frac{TL}{GJ}$$

G : مدول برشی (صلبیت)

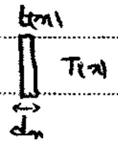
L : طول قطعه

حالا اگر نیروی پیچشی توزیع گسترده باشد:





$$T_{(x)} = \int_x^L t_{(x)}\, dx$$



$$\longrightarrow d\,T_{(x)} = t_{(x)}\, dx \Longrightarrow \varphi_{(x)} = \int_x^L \frac{T(x)\, dx}{G J_{(x)}}$$

یعنی برای کل میله داریم:

$$\varphi_{(x)} = \int_0^L \frac{T(x)\, dx}{G . J(x)}$$

این معادله درست است اما برای پیچش نسبی است. در شکل بالا هم پیچش نقطه A نسبت به نقطه B محاسبه شده است.

PAPCO

Subject:
Year. / Month. Date. ( )

استوانه‌ای که $\frac{r}{t}$ خیلی بزرگ است، در مقابل σ_z و σ_θ می‌توان از σ_r صرف‌نظر کرد

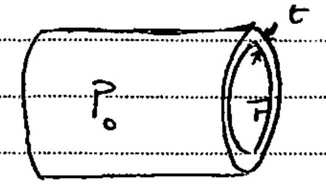
$$\frac{\sigma_r}{\sigma_z} \simeq 0$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\,\sigma_z\right] \qquad \sigma_\theta = \frac{Pr}{t}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\,\sigma_\theta\right] \qquad \sigma_z = \frac{Pr}{2t}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[0 - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)\right] \qquad \boxed{\Delta t = t\,\varepsilon_r} \qquad \boxed{\Delta r = r\,\varepsilon_\theta}$$

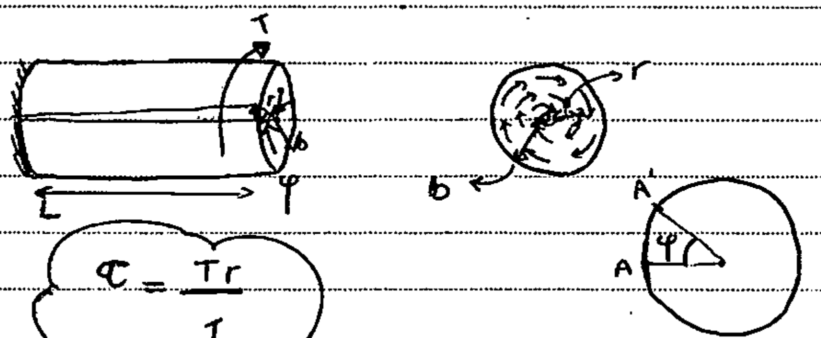
مثال: مخزن تحت فشار داخلی P_i است.



$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r+\Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r} \longrightarrow \boxed{\Delta r = r\,\varepsilon_\theta}$$

پیچش: اگر یک جسم (استوانه‌ای با مقطع دایره‌ای) تحت گشتاور T قرار بگیرد، تنش برشی موازی با سطح هر مقطع ایجاد می‌کند
(تنش برشی است)

این تنش برشی در همه نقاط یکسان نیست.



$$\tau = \frac{Tr}{J}$$

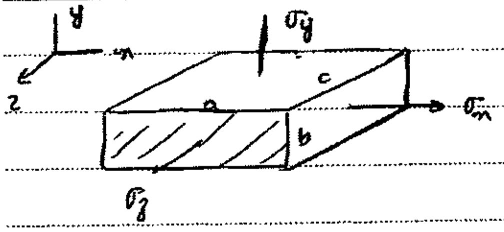
J : ممان اینرسی قطبی مقطع

برای دایره: $J = \frac{1}{2}\pi R^4$

تعریف: $J = \int r^2 dA$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای محاسبه تغییر کرنش سطحی :



$$\varepsilon_A = \frac{a(1+\varepsilon_x)\; b(1+\varepsilon_y) - ab}{ab}$$

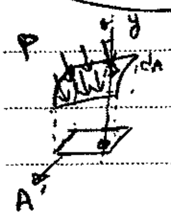
$$\varepsilon_A = 1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\cancel{\varepsilon_x\varepsilon_y}-1 \Longrightarrow \boxed{\varepsilon_{A_{xy}} = \varepsilon_x+\varepsilon_y}$$

به همین صورت

$$\varepsilon_{A_{xz}} = \varepsilon_x+\varepsilon_z$$

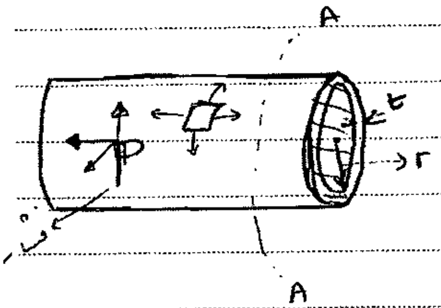
$$\varepsilon_{A_{yz}} = \varepsilon_y+\varepsilon_z$$

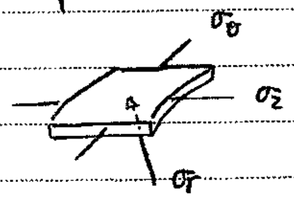
بیان فشار : برای محاسبه نیروی وارده از فشار :



$$d_F = P\, d_A \cos\theta \xrightarrow{\text{برآیند}} \boxed{F = PA' = P\int d_A\cos\theta}$$

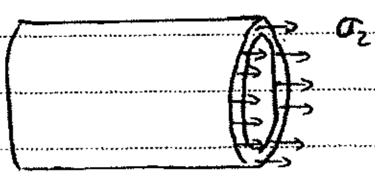
مخازن جدار نازک تحت فشار : از دو طرف بسته را بررسی میکنیم.





$$\frac{t}{r} \ll 1$$

$$\boxed{\sigma_r = -P}$$



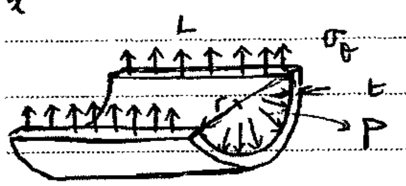
A-A

$A = 2\pi r t$

$A = \pi(r+t)^2 - \pi r^2$

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow 2\pi r t\, \sigma_z - \pi r^2 P = 0 \Longrightarrow \sigma_z = \frac{Pr}{2t}$$

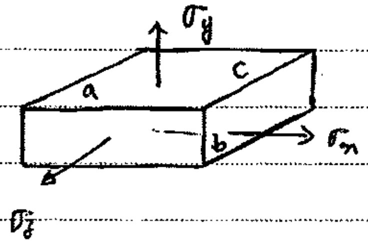
اگر دو سر مخزن باز باشند



$$\sum F_y = 0 \longrightarrow 2Lt\,\sigma_\theta - P(2rL) = 0$$

$$\Longrightarrow \sigma_\theta = \frac{Pr}{t}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



با توجه به روابط طول و ε :

$$a_2 = a\,(1+\varepsilon_x)$$
$$b_2 = b\,(1+\varepsilon_y)$$
$$c_2 = c\,(1+\varepsilon_z)$$

$$V_1 = abc$$
$$V_2 = a_2 b_2 c_2 = a\,b\,c\,(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$$

کرنش حجمی یا تغییر حجم نسبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V}}$$

$$\varepsilon_V = \frac{V_2 - V_1}{V_1} \underset{\text{و صرفنظر از توان ۲}}{\overset{\text{ساده سازی}}{=\!=}} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \Rightarrow \boxed{\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$

با جمع روابط هوک در سه بعد $(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$:

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)$$

درصورتیکه تغییر دما هم داشتیم

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right) + \alpha\Delta T$$
$$\varepsilon_y = \ldots$$
$$\varepsilon_z = \ldots$$

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) + 3\alpha\Delta T$$

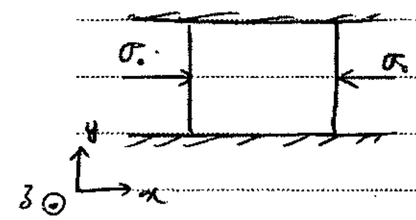
Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته: در مواد الاستیک ... ثابت است $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ ثوابت الاستیک مستقل‌اند و ثوابت دیگر را می‌دهند

E مدول یانگ

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+2\nu)(1-\nu)}$$

مثال:



محاسبه ε_x ، ε_y و ε_z

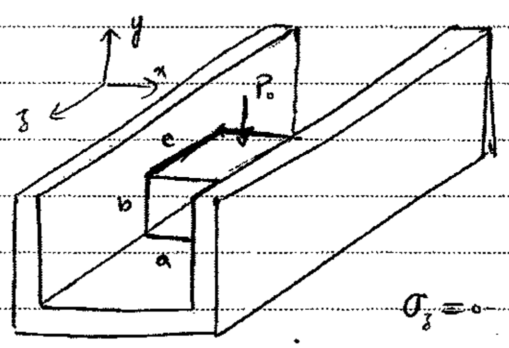
$\sigma_x = -\sigma_0$

$\varepsilon_y = 0$

$\sigma_z = 0$ $\qquad \sigma_y = +\nu\sigma_x = -\nu\sigma_0$

توجه: مسئله در حالت تنش صفحه‌ای ... است.

مثال: $\Delta C = ?$



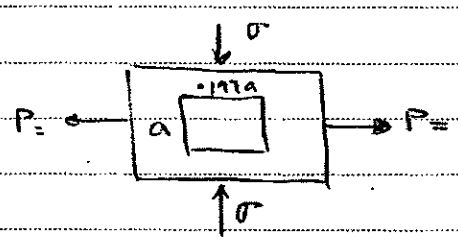
$\varepsilon_x = 0 \qquad \sigma_y = -P_0$

$\sigma_z = 0 \qquad \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = 0 \Rightarrow \sigma_x = \nu\sigma_y = -\nu P_0$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)\right) = \frac{1}{E}\left[0 - \nu(-P_0 - \nu P_0)\right]$$

$$\Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\nu}{E}(P_0 + \nu P_0)$$

مثال: روی مربع زیر مستطیل رسم کرده‌ایم. σ چقدر باشد تا شکل به مربع تبدیل شود؟



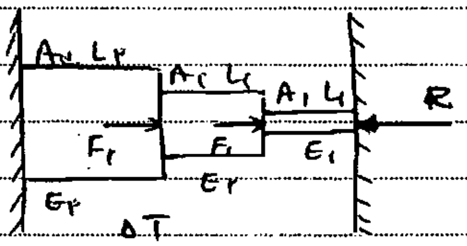
$L_2 = 0.96a(1+\varepsilon_x)$

$\xrightarrow{L_1 = L_2}$

$L'_2 = a(1+\varepsilon_y)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

و در حالات مختلف نیز همین صحبت برقرار است.



$$\Sigma \delta_i = 0$$

$$\delta_1 = \frac{R L_1}{A_1 E_1} \qquad \delta_2 = \frac{(F_1 - R) L_2}{A_2 E_2} \qquad \delta_3 = \frac{(F_1 + F_2 - R) L_3}{A_3 E_3}$$

$$\delta_T = \alpha L \Delta T$$

تنش صفحه‌ای:

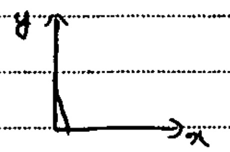
هنگامی که تنش صفحه‌ای است، در راستای سوم تنش وجود ندارد.

کرنش صفحه‌ای: هنگامی که کرنش صفحه‌ای است، کرنش در راستای سوم برابر صفر است.

مطلب مثال اگر صفحه xy مد نظر باشد، داریم:

روابط هوک

روابط هوک برای حل:



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_z + \sigma_y)\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right)$$

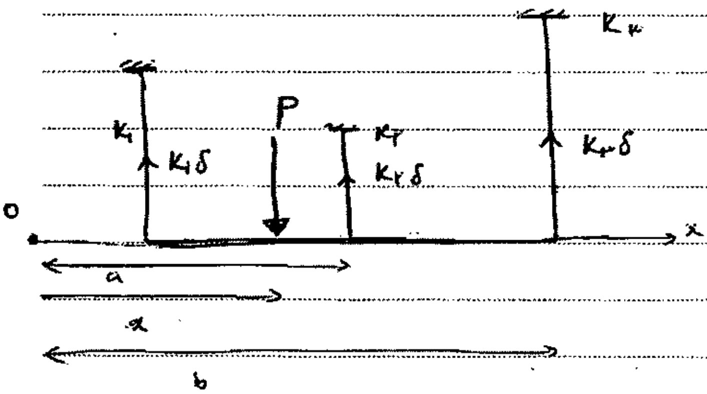
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right)$$

تنش صفحه‌ای ⟵ $\sigma_z = 0$

کرنش صفحه‌ای ⟵ $\varepsilon_z = 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر یک جسم صلب (تیری) را بیابیم که با چند فنر موازی نگه داشته شده باشد، یک مجموعه فنر موازی می‌باشد:



$$\sum M_{P} = 0 \Rightarrow K_1 \delta x - K_2 \delta (a - x) - K_3 \delta (b - x) = 0$$

با حل معادلات داریم (برای [illegible]):

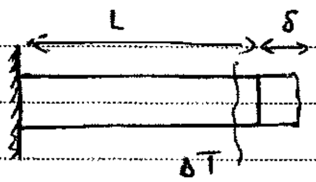
مرکز سختی سازه

$$x = \frac{\sum K_i x_i}{\sum K_i}$$

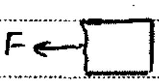
مشاهده می‌شود که محل مرکز سختی به اندازه نیرو وابسته نیست.

تنش حرارتی: اگر به عضوی حرارت بدهیم، در آن کرنش حرارتی ایجاد می‌شود، اما این حرارت به تنهایی هیچ تنشی در عضو ایجاد نمی‌کند، مگر اینکه قیدی وجود داشته باشد؛ مثلاً دیواری که از افزایش طول عضو جلوگیری کند.

بی قید:

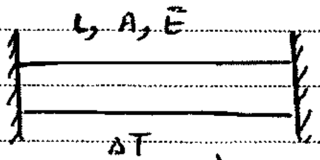


$$\delta = \alpha L \Delta T \quad , \quad \sigma = 0$$

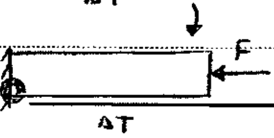


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F + 0 = 0 \Rightarrow F = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{F}{A} = 0$$

مقید:



$$\delta = \alpha L \Delta T - \frac{FL}{AE} = 0$$

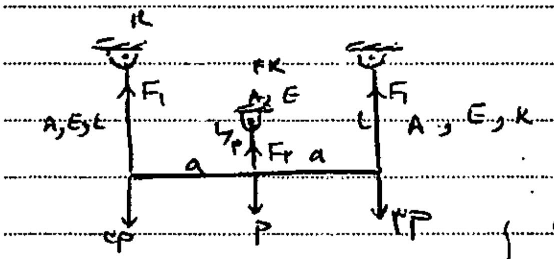


$$\rightarrow \boxed{\sigma = \frac{F}{A}}$$

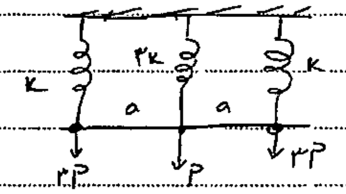
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: δ جسم صلب را بیابید. فنرها

به علت تقارن جسم صلب به صورت صاف پایین می‌آید



$$\delta = \frac{F}{\Delta K} = \frac{VP}{\Delta K} \quad , \quad K = \frac{AE}{L} \longrightarrow \delta = \frac{VPL}{\Delta AE}$$



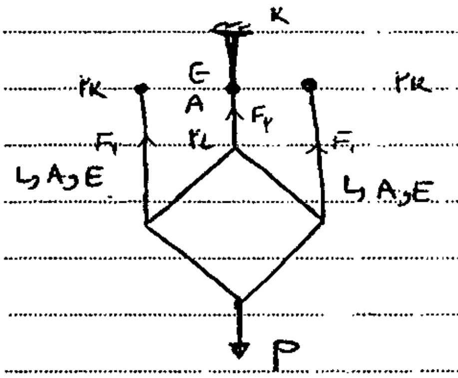
نیروی اعضای سمت چپ و راست:

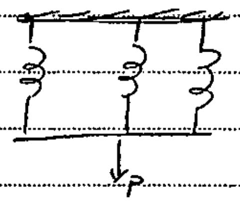
$$F_1 = K\delta = \frac{VP}{\Delta}$$

نیروی عضو وسط:

$$F_2 = 3K\delta = \frac{21P}{\Delta}$$

به علت تقارن جسم صلب به صورت صاف پایین می‌آید





$$\delta = \frac{P}{\Delta K} = \frac{2PL}{\Delta AE} \quad , \quad K = \frac{AE}{2L}$$

نیروی اعضای سمت چپ و راست:

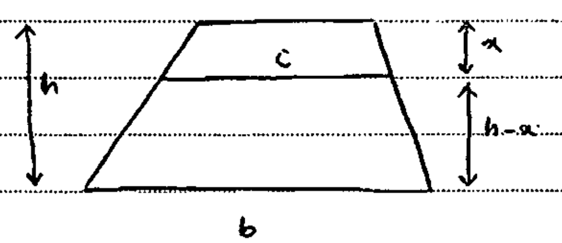
$$F_1 = 2K\delta = \frac{2P}{\Delta}$$

نیروی عضو وسط:

$$F_2 = K\delta = \frac{P}{\Delta}$$

نکته: در دو مثال بالا دیدیم که به علت تقارن δ ها یکی است و کل مجموعه پایین می‌آید. به این علت است که علاوه بر تقارن هندسی از لحاظ سختی (K) هم تقارن وجود دارد. اگر تنها از لحاظ هندسی تقارن وجود داشت و تنها تقارن ... نتیجه را می‌گرفتیم اشتباه است.

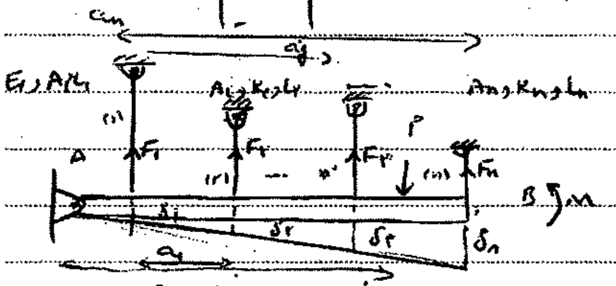
یادآوری هندسی:



$$\boxed{c = \frac{bx + a(h-x)}{h}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته: در حل مسائل نامعین ستونی علاوه بر معادلات استاتیکی به حل معادلات هندسی هم نیاز داریم.



$$K_i = \frac{A_i E_i}{L_i} \qquad \frac{F_1}{K_1} = \frac{F_2}{K_2} = \dots = \frac{F_n}{K_n}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Longrightarrow F_1 a_1 + F_2 a_2 + \dots + F_n a_n + M = P d$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{a_1}{a_2} \qquad \frac{\delta_1}{\delta_3} = \frac{a_1}{a_3} \qquad \dots \qquad \frac{\delta_1}{\delta_n} = \frac{a_1}{a_n}$$

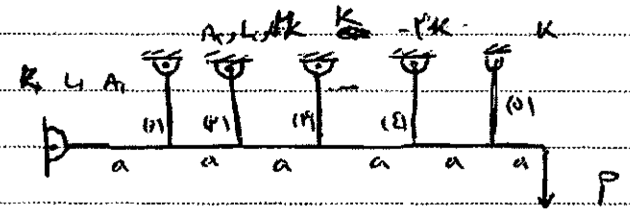
اگر معادلات را بنویسیم به این نتیجه می‌رسیم:

$$\boxed{F_j = \frac{a_j k_j}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 K_i} M}$$

مجموع گشتاور نیروها حول مفصل

(این رابطه فقط برای تیرهای صلب است و در ضمن باید ستون‌ها قائم باشند!)

مثال ۱



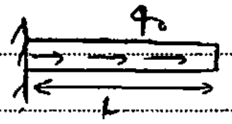
$$F_3 = \frac{3a \times K}{K(a^2+8a^2+9a^2-48a^2+25a^2)} \times (P \times 6a) = \frac{18P}{-5}$$

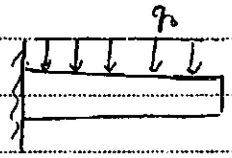
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

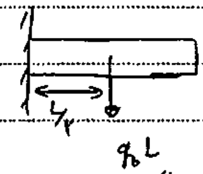
تذکر: این روابط تنش و کرنش برای یک جسم یکنواخت (با E و A ثابت) است. در غیر این صورت تکه تکه بررسی می‌کنیم.

مثال:





$$\xrightarrow{\text{استاتیک}}$$



$$M_B = \frac{q_0 L^2}{2} \rightarrow \delta = \frac{q_0 L^2/2}{AE} = \frac{q_0 L^2}{2AE}$$

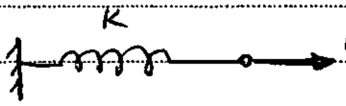
تذکر: این بارگذاری‌ها می‌توانند با شرایط مختلف باشند؛ لذا تسلط بر معادلات نیروی گسترده (استاتیک) مهم است.

بررسی کرنش در مسائل نامعین استاتیکی:

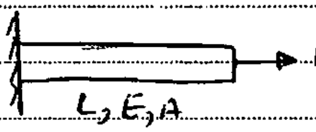
برای حل این گونه مسائل ابتدا معادلات استاتیکی مجهولات را می‌یابیم؛ سپس از طریق بررسی کرنش (مقاومت مصالح) روابط دیگری بدست آورده و با استفاده از این روابط تمام مجهولات را پیدا می‌کنیم.

مدل کردن به فنر:

با معادله کرنش فنر و میله‌های الاستیک می‌توان تشبیه گرفت.



$$\Longrightarrow \quad F = K\delta$$



$$\Longrightarrow \quad F = \frac{AE}{L}\delta$$

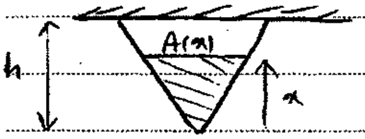
یعنی می‌توان این میله را به صورت فنر مدل کرد.

$$K = \frac{AE}{L}$$

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + \cdots + P_n = P & \text{تعادل نیرویی} \\ \dfrac{P_1 L_1}{A_1 E_1} = \dfrac{P_2 L_2}{A_2 E_2} = \cdots = \dfrac{P_n L_n}{A_n E_n} & \text{اگر تغییر مکان‌ها یکسان باشد} \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: ازدیاد طول مخروط در اثر وزن را محاسبه کنید.

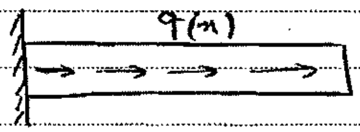


$$P_{(x)} = \gamma\left(\frac{1}{3}x\right)A_{(x)}$$

$$\delta = \frac{\gamma}{3}\int_0^h \frac{x\,\cancel{A(x)}\,dx}{\cancel{A(x)}\,E} = \frac{\gamma h^2}{6E}$$

نکته: علت اینکه می‌توان از انتگرال گرفت این است که رابطه $\delta = \dfrac{FL}{AE}$ رابطه‌ای خطی است.

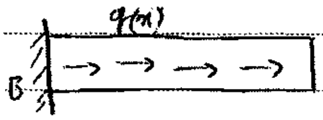
اگر میله تحت وزن خود نباشد و داشته باشیم که از آن نیروی گسترده محوری وارد شود



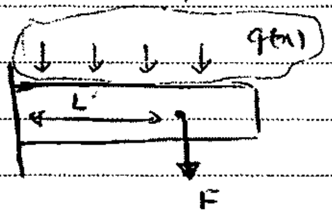
$$P_{(x)} = \int_0^x q(x)\,dx \longrightarrow \delta = \frac{\int_0^L\int_0^x q(x)\,dx}{A_{(x)}E}$$

ثابت کنید

$$\longrightarrow \delta = \int_0^L \frac{x\,q(x)\,dx}{AE}$$



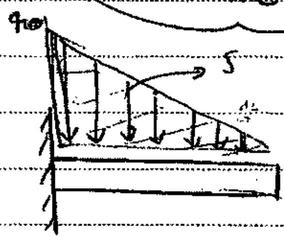
اگر نیروهای محوری را به طور کلی به صورت عمومی در نظر بگیریم



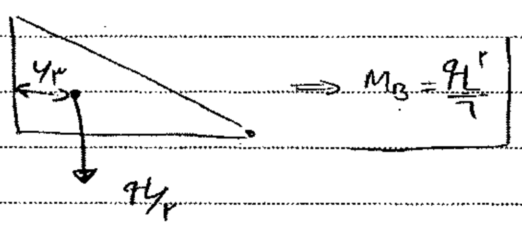
$$M_B = FL'$$

$$\delta_A = \frac{\sum M_B}{AE}$$

مثال



$$F = \int q(x)\,dL = S = qL/2$$

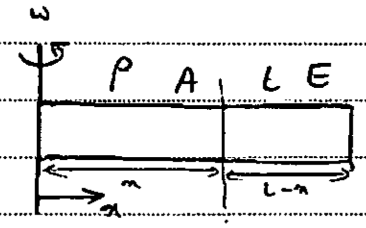


$$\Longrightarrow M_B = \frac{qL^2}{6} \longrightarrow \delta = \frac{\frac{qL^2}{6}}{AE} = \frac{qL^2}{6AE}$$

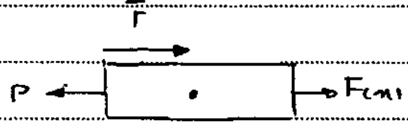
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: اگر میله با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد، کرنش میله چقدر است؟



$$F_{(x)} = m_{(x)}\,\bar{r}_{(x)}\,\omega^2$$



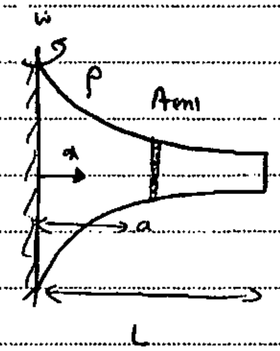
از سطح $\bar{r} = r$

$$P_{(x)} = \rho\,\overbrace{(L-x)A}^{V}\,\overbrace{\frac{L+x}{2}}^{\bar{r}}\,\omega^2$$

$$\longrightarrow \delta_C = \frac{\rho A\omega^2}{2}\int_0^L \frac{(L^2-x^2)\,dx}{AE}$$

$$\Longrightarrow \delta_C = \frac{\rho\omega^2}{2E}\int_0^L (L^2-x^2)\,dx$$

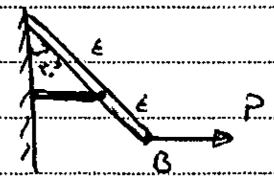
مثال:



$$P_{(x)} = m\bar{r}\omega^2$$

$$P_{(x)} = \int_a^L \rho A_{(x)}\,dx\;x\,\omega^2 \longrightarrow \delta = \int \frac{P_{(x)}\,dx}{A_{(x)}E}$$

مثال: مطلوبست کرنش در میله‌های ... و مکان نهایی نقطه B.



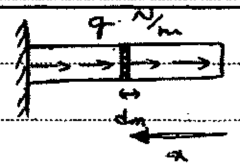
$A = 2\,cm^2$ $E = 180\ GPa$

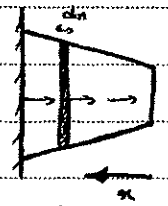
نکته: اگر نیروهای وارده بصورت گسترده بر حسب A را محاسبه بکنیم؟ چرا که معمولاً در سوالات داده می‌شوند. در صورت لزوم در آخر ...

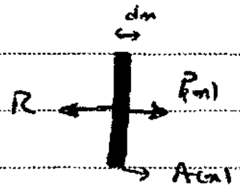
حل با ... کمک.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: در این مثال توزیع بار گسترده داریم. در شکل پایین سطح مقطع ثابت نیست.

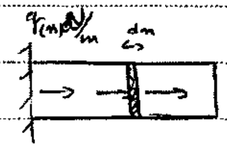


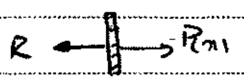




$$\boxed{d\delta = \frac{P_{(x)}\, dx}{A_{(x)}\, E}} \Longrightarrow \boxed{\delta = \int \frac{P_{(x)}\, dx}{A_{(x)}\, E}}$$

شکل بالا

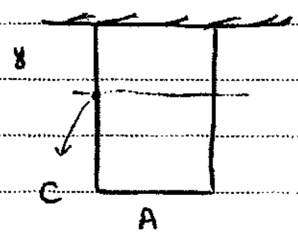


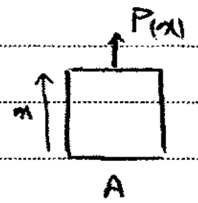


$\longrightarrow R = P(x)$ $\qquad P_{(x)} = dF = qx$

$$\Longrightarrow \delta = \int_0^L \frac{qx\, dx}{AE} = \boxed{\frac{qL^2}{2AE}}$$

مثال:



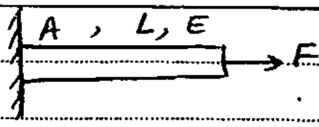


$P_{(x)} = \gamma x A$

$$\delta_C = \int_0^L \frac{\gamma x A\, dx}{AE} = \frac{\gamma L^2}{2E}$$

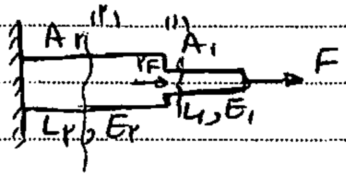
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\sigma = E\varepsilon$ رابطه هوک ۱

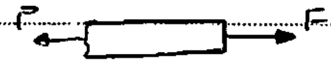


$\dfrac{F}{A} = E\dfrac{\delta}{L} \longrightarrow \delta = \dfrac{FL}{AE}$ *

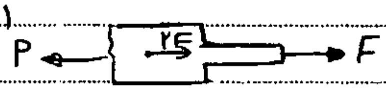
تغییر در هندسه، نیرو، یا جنس در نتیجه تأثیر می‌گذارد. مثلاً:



حل مثال:

(۱) 

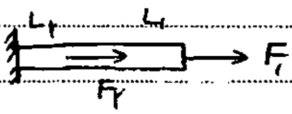
$\Sigma F = 0 \Rightarrow P = F \Rightarrow \boxed{\delta_۱ = \dfrac{FL_۱}{A_۱E_۱}}$

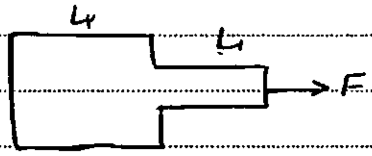
(۲) 

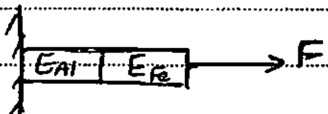
$P = ۳F \longrightarrow \boxed{\delta_۲ = \dfrac{۳FL_۲}{A_۲E_۲}}$

$\longrightarrow \delta = \delta_۱ + \delta_۲$

در مورد حالت‌های زیر هم به همین صورت عمل می‌کنیم.

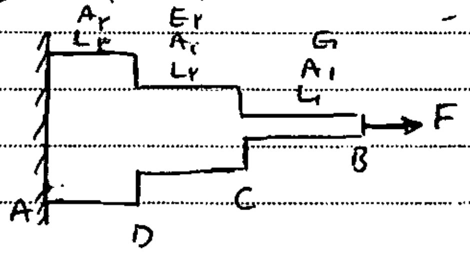






شرط درستی و صحت رابطه * ثابت بودن F و A و E است. و در غیر این صورت باید قسمت‌ها را جداگانه و تک تک بررسی کنیم.

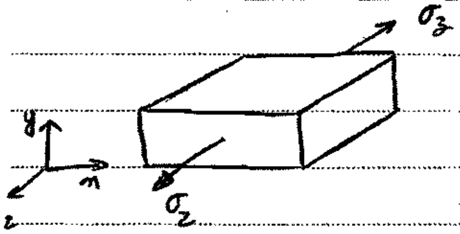
مثال:



$\delta_{B/C} = \dfrac{FL_۱}{AE_۱}$ $\delta_{D/A} = \dfrac{FL_۲}{A_۲E_۲}$

$\delta_{C/D} = \dfrac{FL_۲}{A_۲E_۲}$ $\Longrightarrow$ $\delta = \delta_{B/C} + \delta_{C/D} + \delta_{D/A}$

Subject:
Year.　　Month.　　Date.　　(　)



در حالت سه‌بعدی برای اجسام ایزوتروپیک (همسانگرد) از ضریب پواسون است

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = -\nu\,\varepsilon_z = -\nu\,\frac{\sigma_z}{E}$$

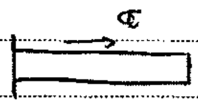
$$\varepsilon_y = -\nu\,\varepsilon_z = -$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right)$$

رابطه‌ای هم بین تنش برشی و کرنش برشی وجود دارد:



$$\boxed{\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}}$$

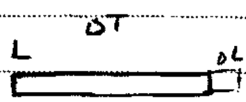
$$\boxed{\tau_{xz} = G\,\gamma_{xz}}$$

$$\boxed{\tau_{yz} = G\,\gamma_{yz}}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

بعداً اثبات خواهد شد

می‌دانیم اگر به جسم حرارت بدهیم، با تغییر طول مواجه خواهیم شد:



$$\Delta L = L_1\,\alpha\,\Delta T \Longrightarrow \frac{\Delta L}{L} = \alpha\,\Delta T$$

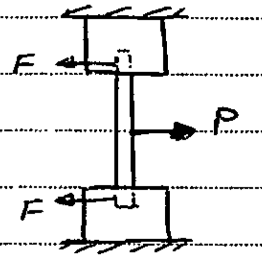
کرنش حرارتی

$$\varepsilon_T = \alpha\,\Delta T$$

PAPCO

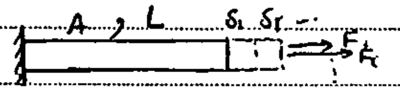
Subject.
Year. Month. Date. ( )

گاهی تنش به صورت تنش دوبل است: یعنی از دو طرف بر جسم نیرو وارد می‌شود.



$$F = \frac{P}{2} \Longrightarrow \boxed{\tau = \frac{P}{2A}}$$

اگر روند تنش و کرنش را بررسی کنیم (با صرف‌نظر از تغییر سطح):

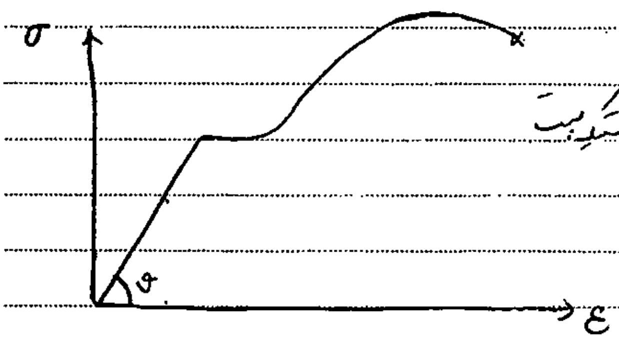


$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A} \qquad \varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{L}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{A} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{L}$$

$\vdots$

و بعد رسم نمودار آن داریم:

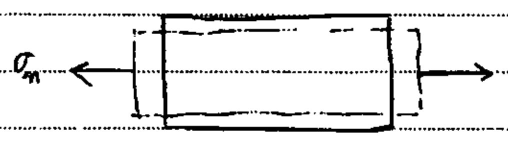


در ابتدا، منحنی به صورت خط راست است. مدول الاستیسیته:

مدول یانگ به صورت زیر تعریف می‌گردد. علت خطی بودن نمودار تغییر شکل الاستیک است

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon}} \Longrightarrow \boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

ضریب یانگ از خواص مکانیکی هر ماده است.



اگر جسم تحت تنش محوری باشد، انقباض حاصل می‌شود در جهت عمود بر نیرو.

علامت - در رابطه، کاهش کرنش جانبی داریم:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \boxed{\varepsilon_y = -\nu\,\varepsilon_x}$$

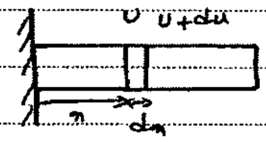
ضریب پواسون

$$0 < \nu < 0.5$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نقاط درون جسم هستند تغییر مکان می‌دهند ، کرنش در همه نقاط یکسان نیست.



$$\boxed{\varepsilon_{(x)} = \frac{d\,u_{(x)}}{dx}} \quad , \quad \boxed{\varepsilon_y = \frac{d\,v_{(y)}}{dy}}$$

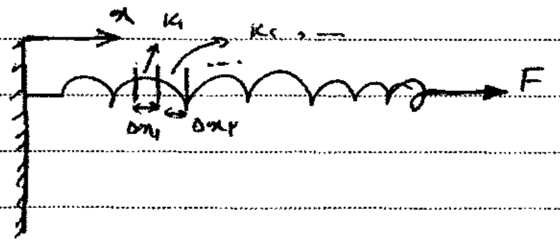
بطور کلی تغییر مکان در راستای x و y به ترتیب با $\bar{u}$ و $\bar{v}$ نمایش می‌دهیم.

در حالت کلی کرنش برابر است:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

u : تابع تغییر مکان در راستای x
v : " " " y
w : " " " z

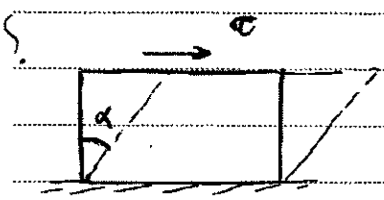
اگر فنری داشته باشیم ، تغییر طول تمام نقاط فنر یکسان نخواهد بود.

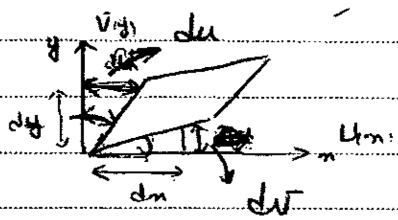


$$\Delta x_i = \frac{F}{K_i}$$

تنش قائم باعث ایجاد تغییر طول می‌شود و تنش برشی باعث ایجاد اعوجاج در جسم می‌شود. این اعوجاج کرنش برشی نام دارد و موجب

زاویه تغییر می‌کند که همان زاویه در حالت قائم تغییر می‌کند





این زاویه بسیار کوچک است ، لذا

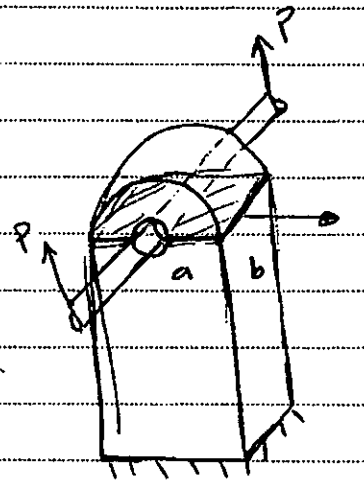
$$\left(\alpha \simeq tg\,\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \ldots\right)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \gamma = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

(کرنش برشی: جمع تنش‌ها)

در حالت قبل نیز τ_a محاسبه شده است.

در حالت شکست، قطعه همواره برش می‌خورد که مساحت کمتری دارد.



سطح شکست

$$A = b\,(a - 2r)$$

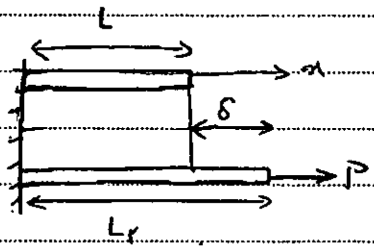
شعاع سوراخ

اگر نیروی وارد بر جسم به حد معینی برسد گسیخته می‌شود. بیشترین تنش برشی وارد بر کدام قسمت است؟

اما اگر نیروی P رو به پایین وارد شود، مساحت مربوط به تنش برشی $A = a\,b$ است.

مسئله دیگری که اهمیت بسیاری دارد، تغییر طول یا کرنش است.

کرنش: تغییر طول نسبی هر قطعه یا جسم بر اثر اعمال نیروی P

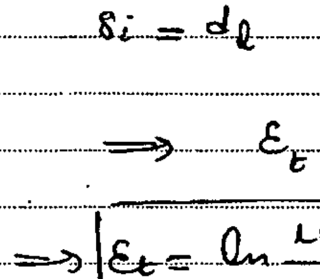


$$\boxed{\varepsilon_n = \frac{\delta}{L}}$$

کرنش مهندسی (اسمی)

$$\delta = L_2 - L$$

تعریفی برای کرنش واقعی، حقیقی وجود دارد. اگر نیرو را مرحله به مرحله زیاد کنیم تا به نیروی مورد نظر برسیم، در هر مرحله افزایش طول جزئی خواهیم داشت:



$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{L_1} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{L'_2} \qquad \varepsilon_3 = \frac{\delta_3}{L'_3}, \ldots$$

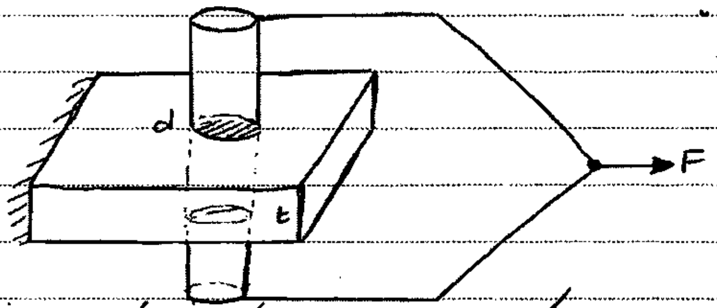
$$\delta_i = d_l$$

$$\Longrightarrow \varepsilon_t = \sum \varepsilon_i = \int_{L_1}^{L_2} \frac{dl}{l} = \ln \frac{L_2}{L_1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\varepsilon_t = \ln \frac{L_2}{L_1}} \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_1 + L_1} \varepsilon_t = \ln(1+\varepsilon)$$

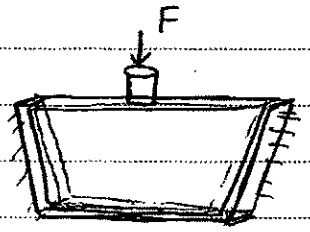
Subject: مقاومت مصالح TA ۹۱/۳۰-۱۱ دوشنبه
Year. Month. Date: ( )

مثال: در شکل زیر محاسبه تنش تماسی برای این مسئله مطلوب است.



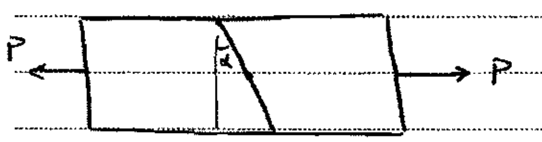
تنش تماسی یا مفهوم تنش لهیدگی تعریف جالب بدین صورت که بیشترین نیرویی است که می‌توان بر سطح تماس وارد کرد تا لهیدگی یا خرابی رخ دهد تقسیم بر مساحت تصویر شده عمود بر نیرو (bearing stress) نامیده می‌شود. مثلاً در شکل بالا مساحت تصویر شده عمود بر نیرو به صورت مستطیل (d × t) است و $\sigma_b = \dfrac{F}{dt}$ تنش تماسی محاسبه و تنش لهیدگی را تعریف می‌کنیم، متفاوت است.

مثال: تنش تماسی در قطعه زیر را بیابید.

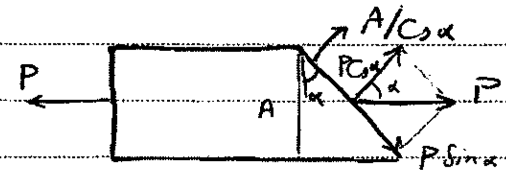


تنش تماسی نیرو باید حتماً عمود بر سطح باشد.

* سؤال: اهمیت محاسبه تنش روی صفحه مورب مشخص شده

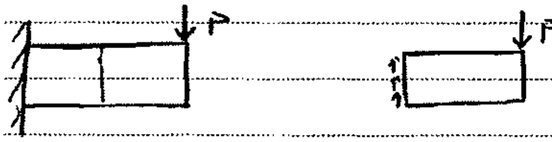


$$\tau_\alpha = \frac{P\sin\alpha}{A/\cos\alpha} = \boxed{\frac{P}{2A}\sin 2\alpha}$$



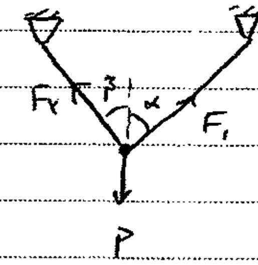
$$\sigma_n = \frac{P\cos\alpha}{A/\cos\alpha} = \boxed{\frac{P}{A}\cos^2\alpha}$$

اگر نیروی P به صورت برشی وارد شود تنش برشی (τ) به صورت زیر قابل محاسبه است. و نیروی عکس العمل به صورت بارگذاری گسترده است.



PAPCO

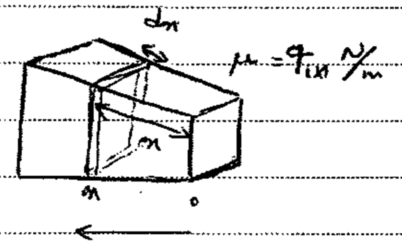
ترکیبی ۱



$$|F_1| = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} P$$

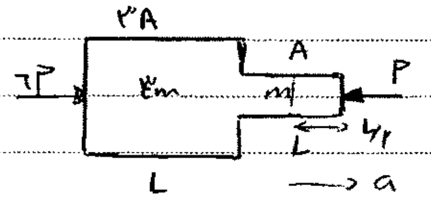
$$|F_2| = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} P$$

کشش یافته‌ای که بعضی تنش را حساب کند. هرچند معمولاً گسترده با توزیع نیرو را در جهت طولی مثال

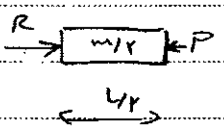


$$\boxed{F = \int_0^x q(x)\, dx}$$

سوال: در قطعه‌ای که در شکل زیر، تنش در نقطه مشخص شده چقدر است؟



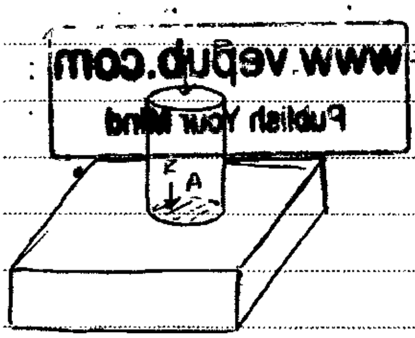
$$\Sigma F = ma \Rightarrow ۶P - P = ۴ma \Rightarrow a = \frac{۵P}{۴m}$$



$$\Sigma F = ma \Rightarrow R - P = \frac{m}{۲}\left(\frac{۵P}{۴m}\right) \Rightarrow R = P + \frac{۵P}{۸}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{R}{A} = \frac{۱۳}{۸}\frac{P}{A}}$$

تنش تماسی: تنشی است که در اثر تماس در سطح تماس مادی‌ای ... طبیعی مثال در شکل زیر

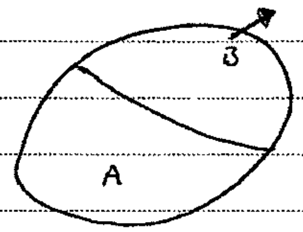


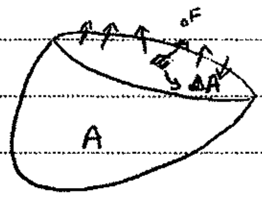
$$\boxed{\sigma = \frac{R}{A}}$$

اما همیشه اتصالات و تماس‌ها به این سادگی نیستند و گاهی شکل پیچیده‌ای به خود می‌گیرد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

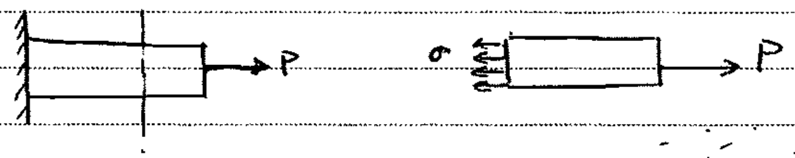
تنش محوری: می‌دانیم به طور کلی تنش از رابطه $\sigma = \frac{F}{A}$ بدست می‌آید. فرض کنید یک جسم را از طرفین یا یک طرف می‌کشیم. اگر مقطع این جسم را در نظر بگیریم، در آن نیروی گسترده‌ای وجود دارد که در واحد سطح معادل تنش در آن مقطع است.



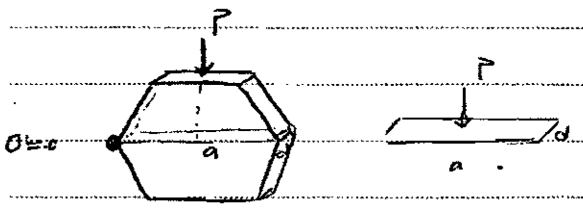


$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

در تنش محوری مورد مطالعه ما، میله‌ای در نظر می‌گیریم که در آن نیرو یکنواخت است و برای آنکه تنش یکنواخت (در مقطع) باشد، باید نیروی وارده از مرکز سطح عبور کند (امتداد نیرو). این یک شرط لازم است ولی کافی نیست.

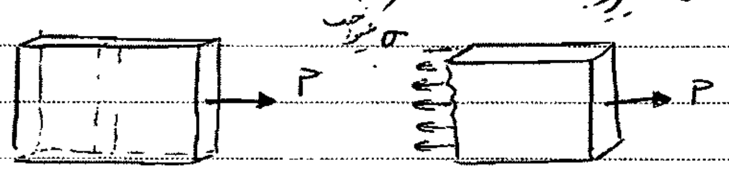


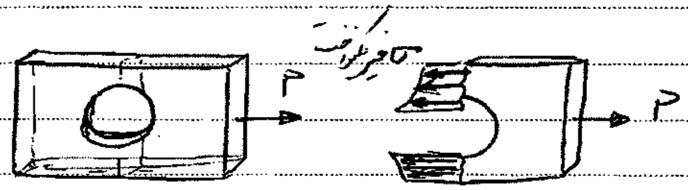
نقطه مثال: در حالتی که شکستگی وجود دارد تنش یکنواخت نیست



تنش غیر یکنواخت $\qquad \sigma \neq \frac{P}{ad}$

هرگونه تغییر در هندسه جسم می‌تواند در توزیع تنش تغییر ایجاد کند.





در این جا تنش فشاری را با علامت منفی و کششی را با علامت مثبت نشان می‌دهیم.

فشاری: σ_c ، σ فشاری $= -\sigma$

کششی: σ_t ، σ کششی $= +\sigma$

PAPCO