www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مقاومت مصالح ۲

تیرها

ـ تغییر شکل تیرها ← انتگرال‌گیری مستقیم توابع تکین (ماکالی)

ـ روش لنگر ـ سطح برای تعیین خیز تیرها (ترسیمی ، جمع آثار)

* قضیه‌ی سه لنگر و استفاده از آن در تحلیل تیرهای نامعین با چندین دهانه

ـ مبحث خمش (نامتقارن)

ـ مبحث انرژی ، انرژی پیچشی

ـ مخازن تحت فشار جدار نازک استوانه‌ای و کروی

* تنش در لوله‌های جدار ضخیم تحت فشار داخلی

* پیچش فنر و فرمول فنر

ـ میان ترم

ـ خمش تیر خمیده

ـ روش‌های انرژی و استفاده از آنها در تحلیل سازه‌ها ، قضیه کار ـ انرژی و کاستیلیانو

ـ ناپایداری (کمانش) ستون‌ها

نمره‌دهی: ـ تکالیف و کوئیز ۳ نمره

ـ میان ترم ۸ نمره

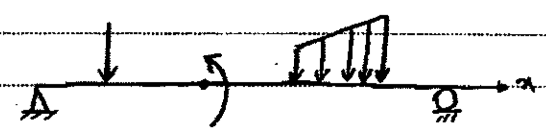
ـ پایان ترم ۹ نمره

www.vepub.com
Publish Your Mind

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تغییر شکل تیرها :



در مقطع تیرها برش V و خمش M به صورت تابعی از x به دست آمد.

می‌دانیم ممان خمشی عامل تغییر انحنای تیر و برش عامل تغییر زاویه‌ای عضو است ولی تغییر زاویه‌ای ایجاد شده در تیرهایی که

طول بلند باشد با شرط نسبت طول به ارتفاع مقطع > 10 ناچیز است.

نکته مهم این است که تغییر شکل در تیرها در مقایسه با اثر خمش ناچیز است؛ لذا از آن صرف نظر می‌کنیم. به این تیرها، تیر اویلر-برنولی گویند. اما اگر تیر کوتاه و قطور باشد، اثر برش نیز باید لحاظ شود. به این تیرها، تیر تیموشنکو گویند.

رابطه لنگر-انحنا: در خمش خالص رابطه انحنا با خمش تیر داریم:

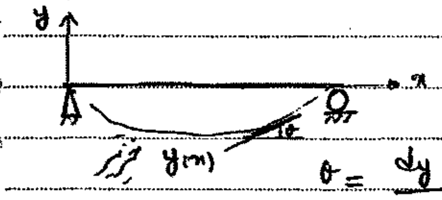
$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$

هم M و هم EI می‌توانند تابعی از x باشند.

فعلاً حالت ساده (وابسته نبودن به x) را، صلبیت خمشی EI را ثابت در نظر می‌گیریم.

وقتی تیر تحت بارگذاری قرار گیرد، خط الاستیک به اندازه $y(x)$ به طرف پایین خم می‌شود؛ و در هر نقطه

$\theta = \frac{dy}{dx}$ به عنوان «شیب» تیر شناخته می‌شود.

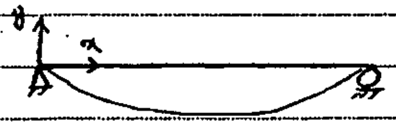


$$\theta = \frac{dy}{dx}$$ شیب

www.vepub.com
Publish Your Mind

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )



اگر : $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ $\qquad$ $\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$

در تغییر شکل‌های کوچک $\left|\frac{dy}{dx}\right| \ll 1$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2y}{dx^2}$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر خیز تیر

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

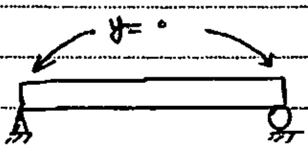
انتگرال $\Downarrow$

$\theta(x)$

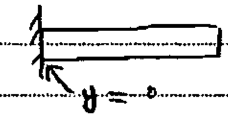
انتگرال $\Downarrow$

خیز $y(x)$

ثابت‌های انتگرال گیری از شرایط تکیه‌گاهی تعیین می‌شود.



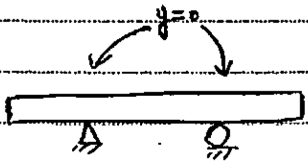
تکیه‌گاه ساده :



تکیه‌گاه گیردار :

$y=0$

$\theta=0$



تکیه‌گاه مرکب :

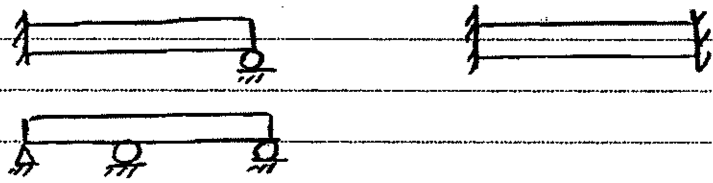
موارد فوق محل معین هستند.

PAPCO

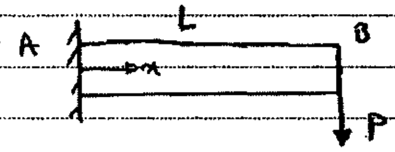
www.vepub.com
Publish Your Mind

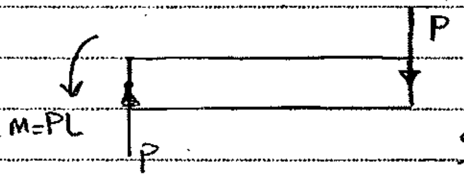
Subject:
Year. Month. Date. ( )

چند نوع تیر نامعین :



مسئله: EI ثابت





$$M(x) = P(x-L)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(x-L)}{EI}$$

$$\Longrightarrow \theta(x) = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right) + C_1$$

$$\Longrightarrow y(x) = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{L}{2}x^2\right) + C_1x + C_2$$

شرایط مرزی

$$\theta(0) = 0 \Longrightarrow C_1 = 0$$
$$y(0) = 0 \longrightarrow C_2 = 0$$

$$y(x) = \frac{Px^2}{EI}\left(\frac{x}{6} - \frac{L}{2}\right) \Longrightarrow y(L) = \frac{PL^2}{EI}\left(\frac{-L}{3}\right) = \boxed{-\frac{PL^3}{3EI}}$$

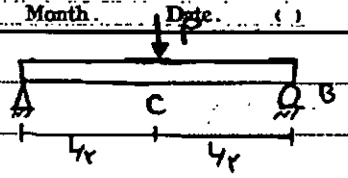
منفی علامت نشان دهنده آن است که تغییر مکان B به پایین می‌باشد

$$\theta_B = \theta(L) = \frac{P}{EI}\left(\frac{L^2}{2} - L^2\right) = \boxed{\frac{-PL^2}{2EI}}$$

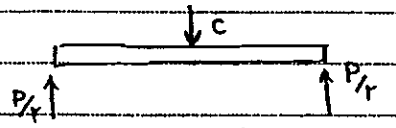
منفی علامت آن است که دوران ساعتگرد یا چرخش رخ داده

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مثال: EI ثابت



$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EI}=\begin{cases}\frac{Px}{2EI} & 0<x<L/2\\ \frac{P}{2EI}(L-x) & x>L/2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta(x)=\begin{cases}\frac{Px^2}{4EI}+C_1 & 0<x<L/2\\ \frac{P}{2EI}\left(Lx-\frac{x^2}{2}\right)+C_1' & x>L/2\end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x)=\begin{cases}\frac{Px^3}{12EI}+C_1x+C_2 & 0<x<L/2\\ \frac{P}{2EI}\left(\frac{Lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+C_1'x+C_2' & x>L/2\end{cases}$$

شرایط تکیه‌گاهی: $y(0)=0$, $y(L)=0$

شرط پیوستگی در محل مشترک : $\theta(\frac{L^-}{2})=\theta(\frac{L^+}{2})$, $y(\frac{L^-}{2})=y(\frac{L^+}{2})$

$\rightarrow C_1, C_2, C_1', C_2'$ ✓

مشاهده می‌شود که این روش برای M با تغییر ضابطه که در آن ثابت‌های انتگرال به ازای هر ضابطه در هر مرحله ۲ ثابت ایجاد می‌کند. راه دیگر، توابع تکین (یا تابع‌های تکین Singular functions) است.

توابع تکین:

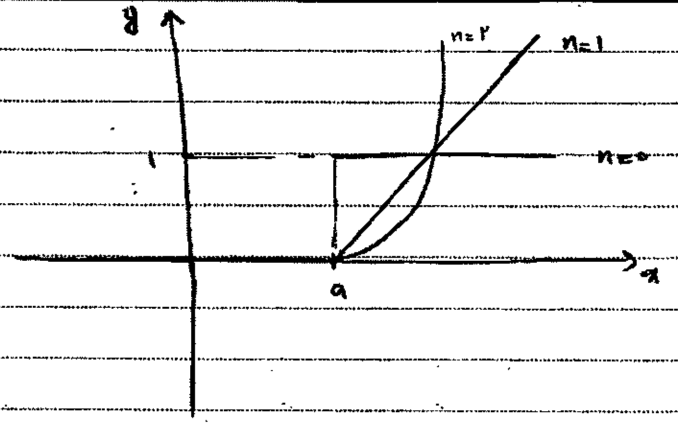
$$\langle x-a\rangle^n=\begin{cases}(x-a)^n & x>a\\ 0 & x<a\end{cases}$$

$$\int\langle x-a\rangle^n\,dx=\frac{1}{n+1}\langle x-a\rangle^{n+1}+C$$

PAPCO

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )



تابع ضربه‌ی واحد (تابع دیراک) :

$$\langle x-a\rangle^{-1} = \begin{cases} +\infty & x=a \\ 0 & x\neq a \end{cases}$$

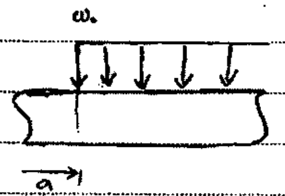
$$\int \langle x-a\rangle^{-1}\, dx = \langle x-a\rangle^{0}$$

تابع دابلت واحد :

$$\langle x-a\rangle^{-2} = \begin{cases} \pm\infty & x=a \\ 0 & x\neq a \end{cases}$$

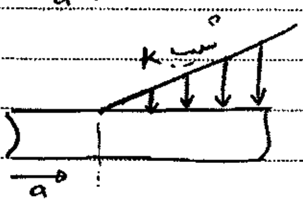
$$\int \langle x-a\rangle^{-2}\, dx = \langle x-a\rangle^{-1}$$

از این توابع برای بیان شدت بار روی تیر $w(x)$ استفاده می‌کنیم.



بار گسترده‌ی یکنواخت : توزیع بار ثابت است که w در این بازه ثابت است.

$$w(x) = w_0 \langle x-a\rangle^{0}$$



بار مثلثی :

$$w(x) = K\langle x-a\rangle^{1}$$

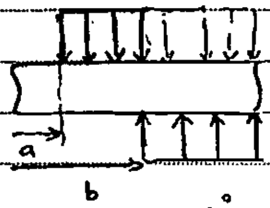
PAPCO

www.vepub.com
Publish Your Mind

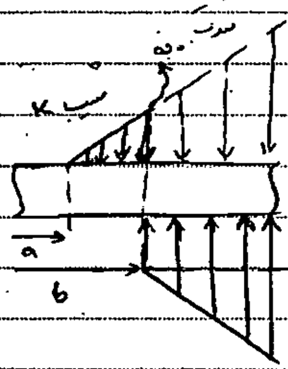
Subject:
Year. Month. Date. ( )

نخست: بجای توابع تکین در نقطه a تا بی‌نهایت ادامه دارد، باید در نظر داشت زمانی که بار ادامه دار تا انتها نیست، جواب را

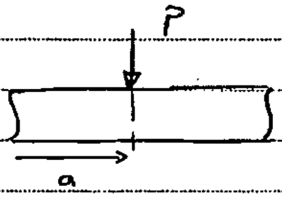
باید با معادلات دیگری بارگذاری را اصلاح کنیم.



$$w(x) = w_0 \langle x-a \rangle^0 - w_0 \langle x-b \rangle^0$$

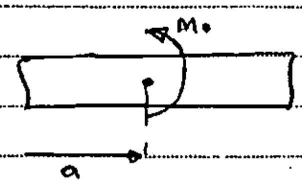


$$w(x) = K \langle x-a \rangle^1 - w_0 \langle x-b \rangle^0 - K \langle x-b \rangle^1$$



$$w(x) = P \langle x-a \rangle^{-1}$$

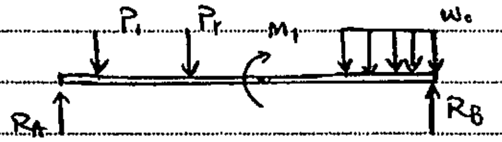
(جهت P: جهت مثبت)



$$w(x) = M_0 \langle x-a \rangle^{-2}$$

(جهت M: جهت مثبت)

معادله بار را برای تیر در نظر می‌گیریم.



عکس‌العمل‌ها را به صورت مجهول در معادله می‌نویسیم. در صورتی که نامعین باشد R_A و R_B را به عنوان مجهول در نظر می‌گیریم

و با توجه به شرایط مرزی در معادلات آنها را حساب می‌کنیم.

PAPCO

$$w(x) = -R_A \langle x \rangle^{-1} + P_1 \langle x-a \rangle^{-1} + P_2 \langle x-b \rangle^{-1} - M_1 \langle x-c \rangle^{-2} + w_0 \langle x-d \rangle^0 - R_B \langle x-L \rangle^{-1}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

پس داریم :

$$w_{(x)} = -R_A\langle x\rangle^{-1} + P_1\langle x-a\rangle^{-1} + P_2\langle x-b\rangle^{-1} + M_1\langle x-c\rangle^{-2} + w_0\langle x-d\rangle^{0} - R_B\langle x-L\rangle^{-1}$$

می‌دانیم

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \text{و} \quad \frac{dV}{dx} = -w$$

$$V_{(x)} = R_A\langle x\rangle^{0} - P_1\langle x-a\rangle^{0} - P_2\langle x-b\rangle^{0} + M_1\langle x-c\rangle^{-1} - w_0\langle x-d\rangle^{1} + R_B\langle x-L\rangle^{0}$$

$$M_{(x)} = R_A\langle x\rangle^{1} - P_1\langle x-a\rangle^{1} - P_2\langle x-b\rangle^{1} + M_1\langle x-c\rangle^{0} - \frac{w_0}{2}\langle x-d\rangle^{2} + R_B\langle x-L\rangle^{1}$$

$$\Rightarrow EI\,\theta_{(x)} = \frac{R_A}{2}\langle x\rangle^{2} - \frac{P_1}{2}\langle x-a\rangle^{2} - \frac{P_2}{2}\langle x-b\rangle^{2} + M_1\langle x-c\rangle^{1} - \frac{w_0}{6}\langle x-d\rangle^{3} + \frac{R_B}{2}\langle x-L\rangle^{2} + C_1$$

$$\Rightarrow EI\,y_{(x)} = \frac{R_A}{6}\langle x\rangle^{3} - \frac{P_1}{6}\langle x-a\rangle^{3} - \frac{P_2}{6}\langle x-b\rangle^{3} + \frac{M_1}{2}\langle x-c\rangle^{2} - \frac{w_0}{18}\langle x-d\rangle^{4} + \frac{R_B}{6}\langle x-L\rangle^{3} + C_1 x + C_2$$

شرایط تکیه‌گاهی :

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 \\ C_2 \end{cases}$$

توجه باید داشت که علامت‌ها به لحاظ "دیاگرامی" با هم هماهنگی داشته باشند. هم چنین چون R_A و R_B

را در $w_{(x)}$ وارد کردیم که در $V_{(x)}$ و $M_{(x)}$ ثابت انتگرال‌گیری ظاهر نمی‌شود.

اما مسئله‌ای که پیش می‌آید که بار متمرکز در انتهای تیر (چون لنگر یا نیرو) در روابط ما وارد نمی‌شوند. لذا همواره در انتهای تیر

را در محاسبات وارد نکرده.

PAPCO

www.vepub.com
Publish Your Mind

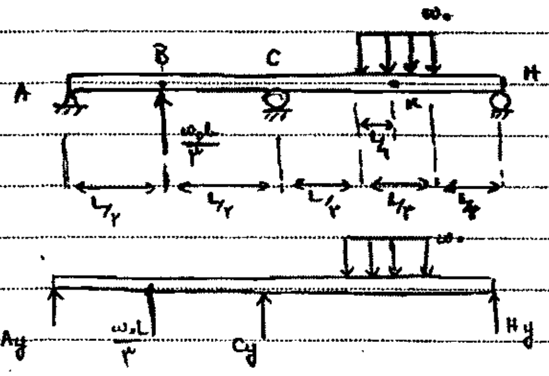
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۱: خیز نقاط B و K ؟

شیب C ؟

اگر بارگذاری w_0 گسترده بود به دلیل تقارن C شیب صفر بود

چون گسترده است بارگذاری آن را معادله تکینگی می نویسیم



$$w = -A_y\langle x\rangle^{-1} - \frac{w_0L}{3}\langle x-L/2\rangle^{-1} - C_y\langle x-L\rangle^{-1} + w_0\left\langle x-\frac{4L}{3}\right\rangle^{0} - w_0\left\langle x-\frac{5L}{3}\right\rangle^{0}$$

$$V = A_y\langle x\rangle^{0} + \frac{w_0L}{3}\langle x-L/2\rangle^{0} + C_y\langle x-L\rangle^{0} - w_0\left\langle x-\frac{4L}{3}\right\rangle^{1} + w_0\left\langle x-\frac{5L}{3}\right\rangle^{1}$$

$$M = A_y\langle x\rangle^{1} + \frac{w_0L}{3}\langle x-L/2\rangle^{1} + C_y\langle x-L\rangle^{1} - \frac{w_0}{2}\left\langle x-\frac{4L}{3}\right\rangle^{2} + \frac{w_0}{2}\left\langle x-\frac{5L}{3}\right\rangle^{2}$$

$$EI\theta = \frac{A_y}{2}\langle x\rangle^{2} + \frac{w_0L}{6}\langle x-L/2\rangle^{2} + \frac{C_y}{2}\langle x-L\rangle^{2} - \frac{w_0}{6}\left\langle x-\frac{4L}{3}\right\rangle^{3} + \frac{w_0}{6}\left\langle x-\frac{5L}{3}\right\rangle^{3} + C_1$$

$$EIy = \frac{A_y}{6}\langle x\rangle^{3} + \frac{w_0L}{18}\langle x-L/2\rangle^{3} + \frac{C_y}{6}\langle x-L\rangle^{3} - \frac{w_0}{24}\left\langle x-\frac{4L}{3}\right\rangle^{4} + \frac{w_0}{24}\left\langle x-\frac{5L}{3}\right\rangle^{4} + C_1x + C_2$$

دقت کنید دیمانسیون جملات $[FL^3]$ است؛ اگر حتی یک جمله خلاف این بود جایی اشتباه کرده ایم.

شرایط مرزی: $y(0)=0 \Longrightarrow \underline{C_2=0}$

$$y(L)=0 \Longrightarrow \frac{A_y}{6}L^3 + \frac{w_0L^4}{144} + C_1L = 0 \Longrightarrow 24A_yL^2 + w_0L^3 + 144C_1 = 0 \quad (1)$$

$$y(2L)=0 \Longrightarrow \frac{4}{3}A_yL^3 + \frac{3}{16}w_0L^4 + \frac{C_y}{6}L^3 - \frac{2w_0L^4}{243} + \frac{w_0L^4}{1944} + 2C_1L = 0$$

$$\Longrightarrow 5184A_yL^2 + 699w_0L^3 + 648C_yL^2 + 7776C_1 = 0 \quad (2)$$

تعادل: $\circlearrowleft + \sum M_H = 0 \Longrightarrow 2A_yL + \frac{w_0L}{3}\left(\frac{3L}{2}\right) + C_yL - \frac{w_0L}{3}\left(\frac{L}{2}\right) = 0$

$$\Longrightarrow 6A_y + 3C_y + w_0L = 0 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 1296A_y + 215w_0L + 216C_y = 0 \quad (4) \xrightarrow{(3),(4)} \begin{cases} A_y = -0.16755\,w_0L \\ C_y = -0.00333\,w_0L \end{cases} \xrightarrow{(1)} C_1 = 0.020264\,w_0L^3$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

$$y_B = y(L/2) = \frac{1}{EI}\left(\frac{A_y L^3}{48} + \frac{C_1 L}{2}\right) = 0/00728V \;\frac{w_0 L^4}{EI}$$

$$y_K = y(3L/2) = -0/00666 \;\frac{w_0 L^4}{EI}$$

$$\theta_2 = \theta(L) = -0/0205 \;\frac{w_0 L^3}{EI}$$

اگر تکیه‌گاه‌ها گیردار بودند ، $C_y = 0$ خواهد بود. به اندازه یک طرف گیردار و طرف دیگر فنری است ، $C_y \neq 0$ اما

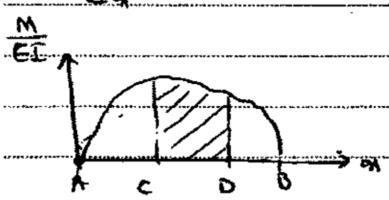
دیده می‌شود $C_y \ll A_y$. هم چنین مقادیر y_B و y_K از لحاظ ابعادی هم منطقی است $\left(\frac{\frac{N}{m}\, m^4}{\frac{N}{m^2}\, m^4} = m\right)$

روش لنگر – سطح (قضایای تغییر شکل و شیب، معروف به (قضیه سطح – ممان)) :

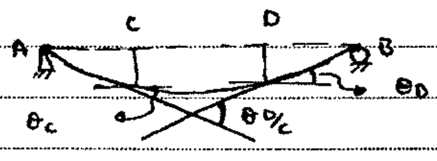
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \theta(x) = \int \frac{M}{EI}\, dx$$

سطح

اگر وضعیت $\frac{M}{EI}$ برای ما مشخص باشد :



$$\theta_{D/C} = \theta_D - \theta_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\, dx$$



$$\theta_{D/C} = \theta_D - \theta_C$$

دوران خلاف ساعت :
مخالف عقربه ساعت : +
موافق عقربه ساعت : −

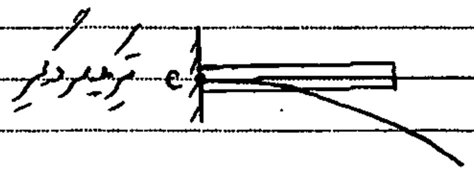
قضیه اول : شیب نسبی (اختلاف شیب) هر دو نقطه از تیر برابر است با سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ مابین آن

دو نقطه . با داشتن شیب خاص در یک نقطه C (نقطه مرجع) می‌توان با این قضیه شیب هر نقطه دیگر را بدست آورد .

www.vepub.com
Publish Your Mind

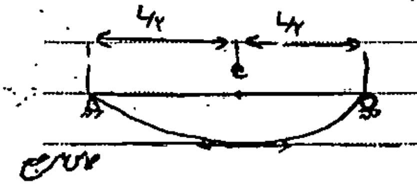
Subject:
Year. Month. Date. ( )

در حالت‌های خاص:



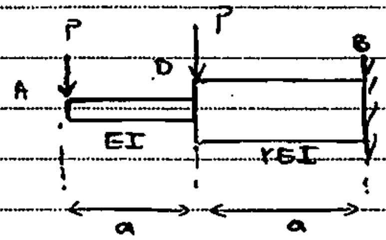
۱) مماس مرجع

معمولاً در تیرهای طره‌ای شیب نقطه گیردار را مرجع قرار می‌دهیم.



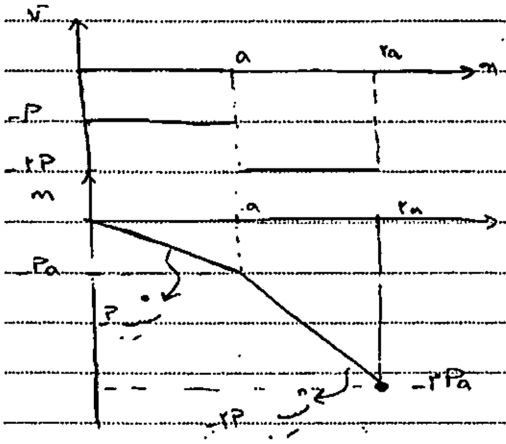
۲) تیرهای با بارگذاری متقارن : مرکز تقارن را مرجع قرار می‌دهیم.

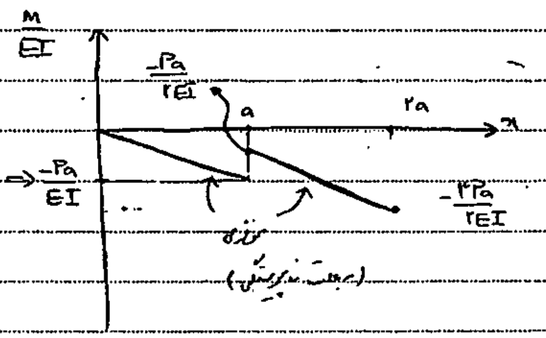
مثال: شیب در نقطه A ؟



در این مثال چون تیر طره‌ای است [illegible]

توجه: M در تیرهای طره منفی است!





$$\theta_A = \theta_A - \cancel{\theta_B} = \theta_{A/B} = -\theta_{B/A}$$

$$\theta_{B/A} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{EI}\,dx = -\frac{Pa}{EI}\left(\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{-Pa}{EI} - \frac{3Pa}{2EI}\right)\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{-3Pa^2}{2EI}$$

$$\rightsquigarrow \theta_A = \frac{3Pa^2}{2EI}$$

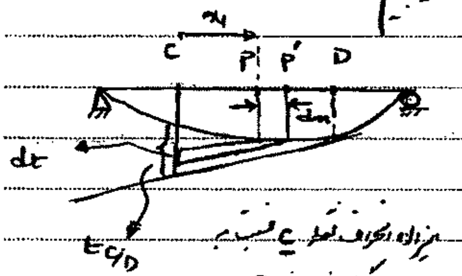
www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

[illegible]

در اینجا قضیه دوم را مطرح می‌کنیم.

در اینجا می‌خواهیم انحراف نقطه C را نسبت به مماس بر نقطه D بیابیم.

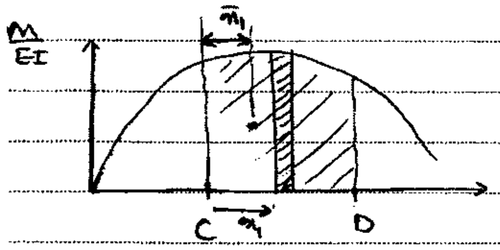


dt برابر است با [illegible] فاصله [illegible] بین مماس‌های گذرنده از P و P' است.

$$dt = x_1 \left[\frac{M}{EI}\right]_P^{P'}$$

$$t_{C/D} = \int_C^D dt \Longrightarrow \boxed{t_{C/D} = \int_{x_C}^{x_D} x_1 \frac{M}{EI}\, dx}$$

قضیه دوم: انحراف نقطه C نسبت به مماس گذرنده از D برابر است با گشتاور اول سطح زیر نمودار بین C و D نسبت به نقطه C.



$$t_{C/D} = \int_{x_C}^{x_D} x_1 \frac{M}{EI}\, dx = \bar{x}_1 \times A$$

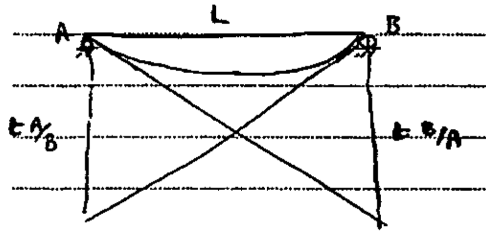
اگر $t_{C/D}$ مثبت است، آنگاه نقطه C بالای مماس گذرنده از D قرار دارد.

PAPCO

www.vepub.com
Publish Your Mind

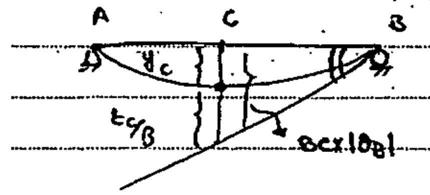
Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای یافتن خیز نقطه‌ی دلخواه C



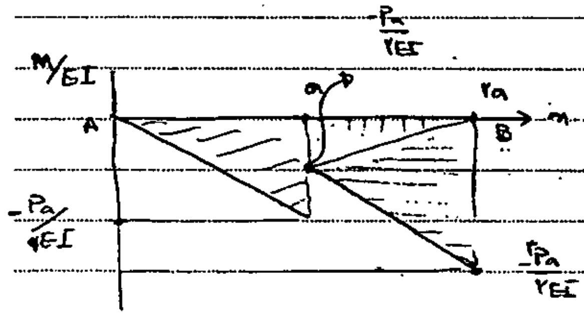
$$\theta_B = \frac{t_{A/B}}{L} \qquad \theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L}$$

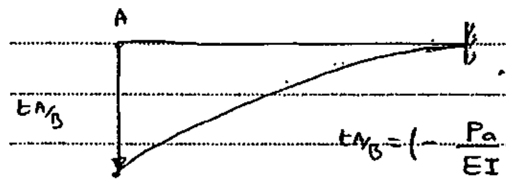
$$* \; t_{B/A} \neq -t_{A/B} \; *$$



$$y_C = t_{C/B} + BC \times |\theta_B|$$

مثال: در مثال قبل خیز نقطه A را بدست آورید





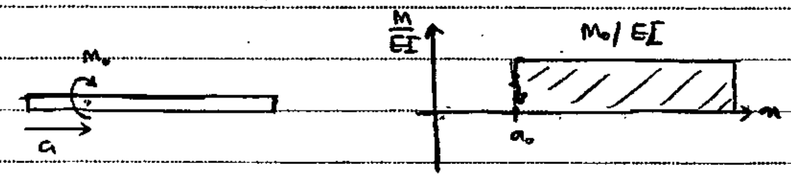
$$t_{A/B} = \left(-\frac{Pa}{EI}\right)\left(\frac{a}{۲}\right)\left(\frac{۲a}{۳}\right) + \left(\frac{-Pa}{۲EI}\right)\left(\frac{a}{۲}\right)\left(\frac{۴a}{۳}\right) + \left(\frac{-۳Pa}{۲EI}\right)\left(\frac{a}{۲}\right)\left(\frac{۵a}{۳}\right)$$

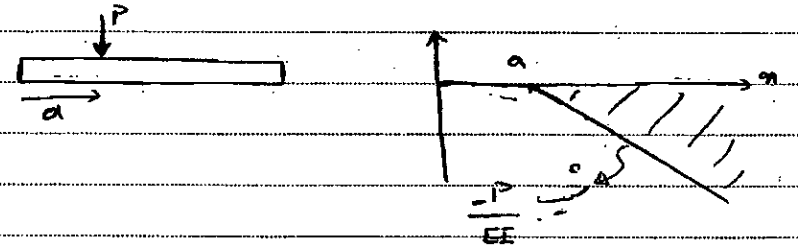
$$\Rightarrow y_A = t_{A/B} = -\frac{۲۴\,Pa^۳}{۱۲\,EI}$$

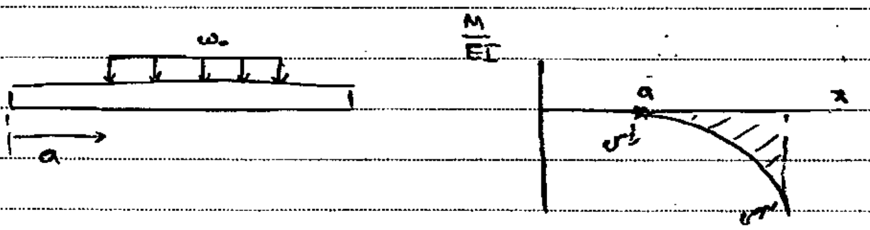
www.vepub.com
Publish Your Mind

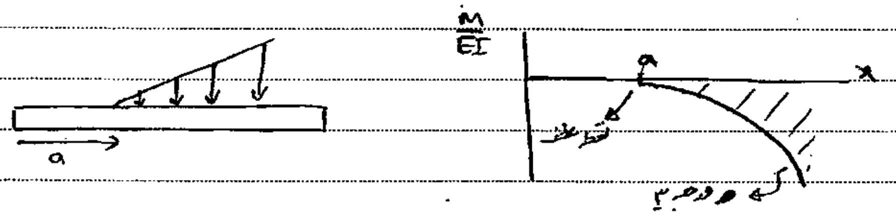
Subject:
Year. Month. Date.

شکل سطوح برای حالت‌های مختلف 3 ...

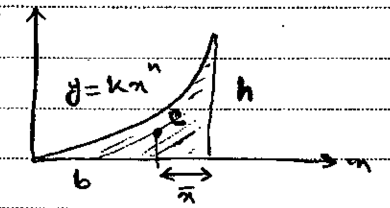








یادآوری :



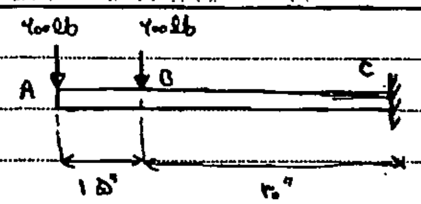
$$A = \frac{b \cdot h}{n+1}$$

$$\bar{x} = \frac{b}{n+2}$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year . . Month . . Date . ( )

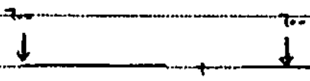
مثال: مطلوبست تعیین شیب و خیز نقاط A و B



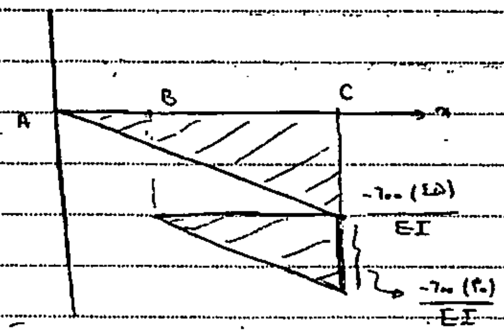
S4×7.7

$E = 29\times10^{6}$ psi

$I = 6.77$



محور مرجع: مماس رسم شده در C



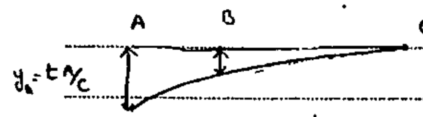
$$\theta_{B} = \theta_{A/C} = -\theta_{C/A} = \theta_A - \theta_C = \int_{x_C}^{x_A} \frac{M}{EI}\,dx$$

$$\theta_A = -\left\{\frac{-600\times45}{EI}\times\frac{45}{2} - \frac{600\times30}{EI}\times\frac{30}{2}\right\} = -4.98\times10^{-3}\ \text{rad}$$

برای بدست آوردن θ_B هم می‌توان ($\theta_{B/A}$) و هم می‌توان ($\theta_{B/C}$) را بدست آورد، ما با توجه به اینکه محاسبه $\theta_{B/A}$ ساده‌تر است

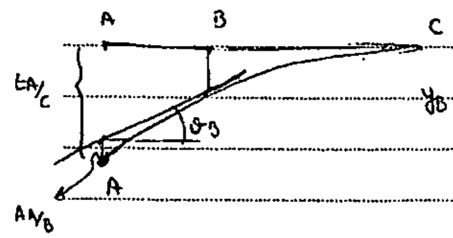
$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \frac{15}{2}\times\frac{-600\times15}{EI} \Rightarrow \theta_B = 4.59\times10^{-3}\ \text{rad}$$

مشاهده می‌شود $\theta_B < \theta_A$ و $\theta_A > 0$ یعنی A به سمت عقربه چرخیده است



$$t_{A/C} = \left\{\frac{600\times45}{EI}\times\frac{45}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)45 - \frac{600\times30}{EI}\times\frac{30}{2}\times\left(15+\frac{2}{3}\times30\right)\right\}$$

$$\Rightarrow y_A = t_{A/C} = 0.1570\ \text{inch}\ \checkmark$$



$$y_B = t_{A/C} - t_{A/B} - \theta_B\cdot AB = 0.0842''\ \downarrow$$

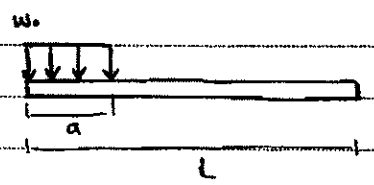
در محاسبه $t_{A/B}$ فقط سطح ممان بین A و B را در نظر گرفت

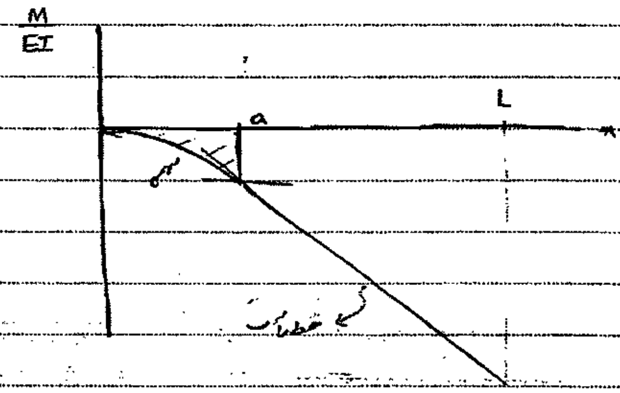
PAPCO

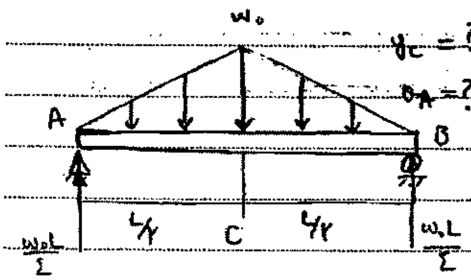
W...pub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۱



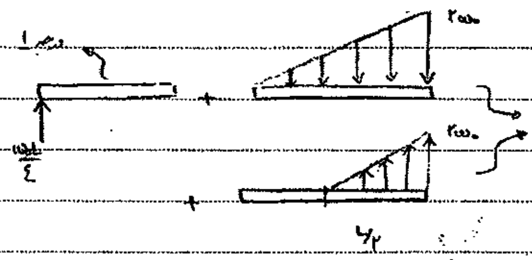


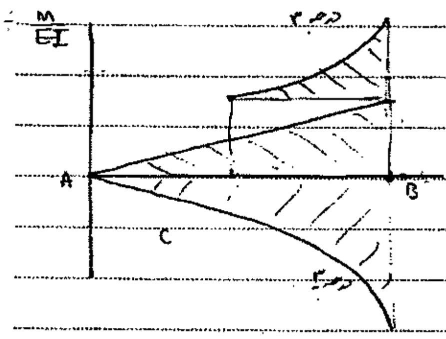


$y_C = ?$

$\theta_A = ?$

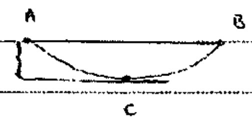
مثال ۱





محور مرجع : C

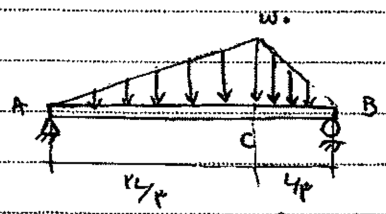
$-y_C = t_{A/C}$



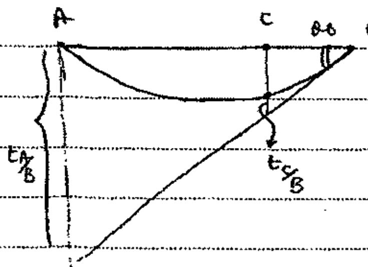
$\theta_{C/A} = \theta_C - \theta_A = -\theta_A$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_C = \dfrac{w_0 L^4}{120 EI} \downarrow \\ \theta_A = \dfrac{-5 w_0 L^3}{192 EI} \end{array} \right.$$

مثال مسئله با بارگذاری نامتقارن



$t_{A/B}\ \checkmark \rightarrow \theta_B\ \checkmark$



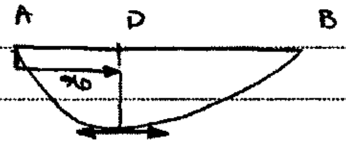
$t_{C/B}\ \checkmark$

$$y_C + t_{C/B} = t_{A/B}\left(\frac{BC}{AC}\right) \Rightarrow y_C\ \checkmark$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

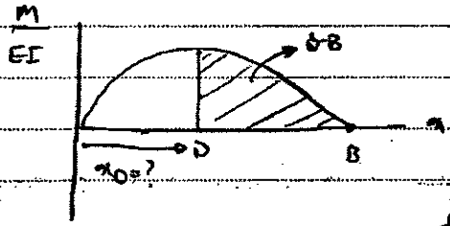
Subject:
Year. Month. Date. ( )

خیز حداکثر و محل آن (با محل خط با شیب صفر) :



$\theta_{B/D} = \theta_B - \theta_D = \theta_B \rightarrow x_D$?

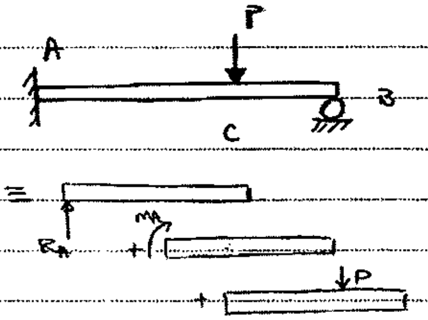
یعنی سطح منحنی وسط و ترتیب نیاز است

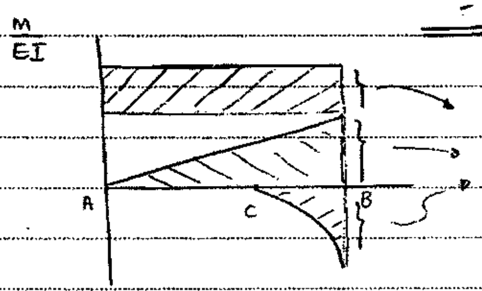


این روش در صورتی که چند قطعه با محاسبه همراه باشد مناسب است ! ولی در صورت خطی بودن حل کنیم

EI متغیر : نسبت ... استفاده از ... تکیه گاه ... مناسب است .

مسائل نامعین :





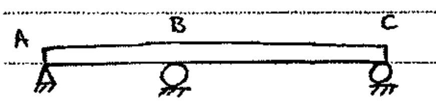
$y_B = 0 \Rightarrow t_{B/A} = 0 \longrightarrow$ ... مجهول

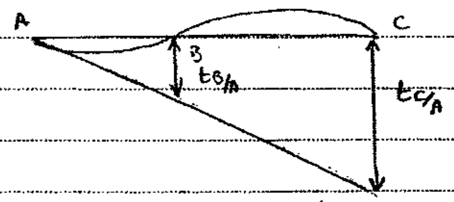
+

معادل

+

...





$$\frac{t_{B/A}}{t_{C/A}} = \frac{AB}{AC}$$

یعنی با نسبت خطی بین سه نقطه ... قرار داد و با توجه به آن که مجهولات را بدست آورد .

PAPCO

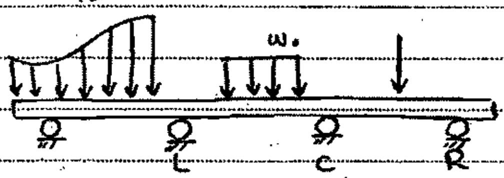
www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روش سه لنگر برای تیرهای با چندین دهانه — Three Moment equation:

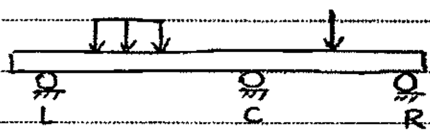
که مجموعه برای یک تیر چندین دهانه (فاصله بین دو تکیه‌گاه — span) با فاصله‌های متفاوت یا بارهای متفاوت و ممان اینرسی متفاوت

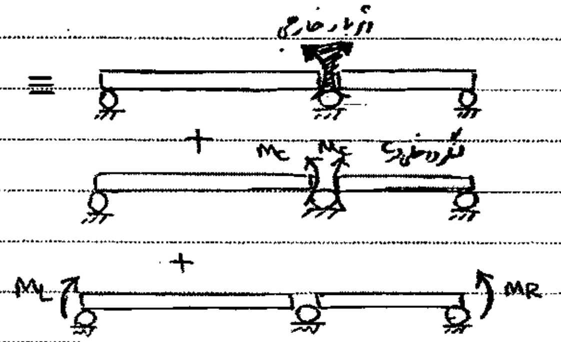
و اگر یک دسته تکیه‌گاه‌ها روی این تیر پیوسته چنین وضعی هست



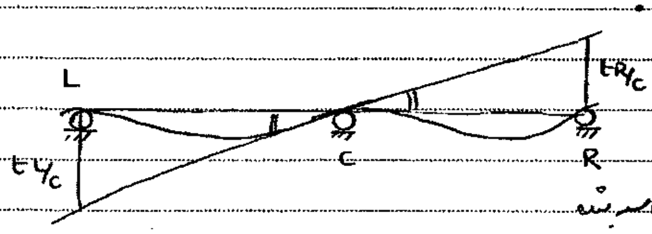
برای حل مسئله (با ۳ تکیه‌گاه) فرمول معادلات را شکل می‌دهیم.

ممان‌ها در تکیه‌گاه‌های L، C و R را در نظر بگیرید.





تیر پیوسته را به صورت دو تیر ساده در نظر می‌گیریم که لنگرهای داخلی M_C، M_L و M_R به عنوان بارگذاری خارجی به آنها اضافه شده است. شرط پیوستگی تیر با استفاده از لنگرهای داخلی اضافه می‌شود (توجه شود که در تکیه‌گاه‌ها رسم شده و تکیه‌گاه‌ها مفصلی هستند). حال تغییر شکل تیر پیوسته را در نظر می‌گیریم.



برای پیوستگی شیب در نقطه C، θ_C محاسبه شده

یعنی $t_{L/C}$ به وسیله محاسبه شده از روی $t_{R/C}$ باید برابر شود. این برای معادله سه لنگر

M_L، M_R و M_C می‌شود (معادله سه لنگر). اگر طول دهانه چپ L_L و طول دهانه راست را

www.vepub.com
Publish Your Mind

$$\frac{t_{L/C}}{L_L} = -\frac{t_{R/C}}{L_R}$$

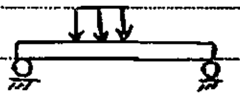
مبنیم: L_R

اگر از تکیه‌گاه چپ به طرف گره C از $\frac{M}{EI}$ ممان گیری شود خواهیم داشت

$$t_{L/C} = \frac{1}{EI_L}\left(\bar{x}_L A_L + \frac{2}{3}L_L \times \frac{1}{2}M_C L_L + \frac{1}{3}L_L \times \frac{1}{2}M_L L_L\right)$$

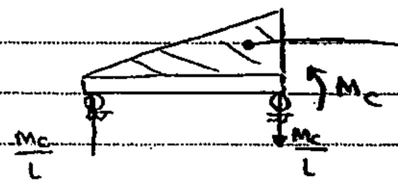
که در آن A_L سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ برای مسئله معین و $\bar{x}_L$ فاصله مرکز سطح آن تا تکیه‌گاه چپ است. (در این‌جا فرض EI ثابت شده است)

مسئله اول



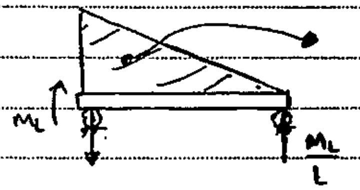
$$\frac{\bar{x}_L A_L}{EI_L}$$

مسئله دوم



$$\frac{2}{3}L_L \times \frac{1}{2}M_C L_L$$

مسئله سوم



$$\frac{1}{3}L_L \times \frac{1}{2}M_L L_L$$

با استفاده از تکیه‌گاه راست

$$t_{R/C} = \frac{1}{EI_R}\left(\bar{x}_R A_R + \frac{2}{3}L_R \times \frac{1}{2}M_C L_R + \frac{1}{3}L_R \times \frac{1}{2}M_R L_R\right)$$

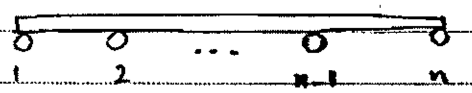
که در آن A_R سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ برای مسئله معین و $\bar{x}_R$ فاصله مرکز سطح آن تا تکیه‌گاه راست است.

بنابراین معادله سه لنگر به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{L_L M_L}{EI_L} + 2\left(\frac{L_L}{EI_L} + \frac{L_R}{EI_R}\right)M_C + \frac{L_R}{EI_R}M_R = -\frac{6\bar{x}_L A_L}{L_L EI_L} - \frac{6\bar{x}_R A_R}{L_R EI_R}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

با نوشتن این دو معادله برای هر دو دهانه مجاور، برای تعیین لنگرهای داخلی مجهول همان تعداد معادله بدست می‌آید (لنگرهای تکیه‌گاهی انتهایی مشخص هستند).

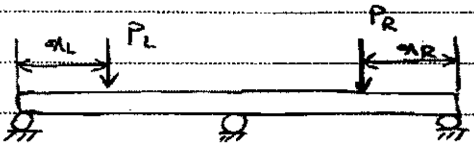


n−۲ لنگر داخلی ⟸ { تعداد مجهولات n−۲ ، تعداد معادلات n−۲ }

مقادیر لنگرها از حل دستگاه معادلات بدست می‌آید.

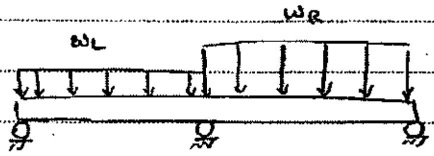
مثال:

بار متمرکز روی دهانه:



$$\text{سمت راست معادله سه لنگر} = -\frac{P_L x_L}{EI_L}(L_L - x_L)\left(1+\frac{x_L}{L_L}\right) - \frac{P_R x_R}{EI_R}(L_R - x_R)\left(1+\frac{x_R}{L_R}\right)$$

بار گسترده یکنواخت روی هر دهانه:



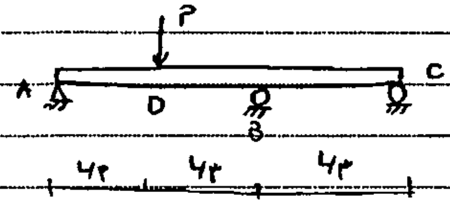
$$\text{سمت راست معادله سه لنگر} = \frac{-w_L L_L^3}{4EI_L} - \frac{w_R L_R^3}{4EI_R}$$

PAPCO

www.vapub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year.... Month..... Date. ...( )

مثال:



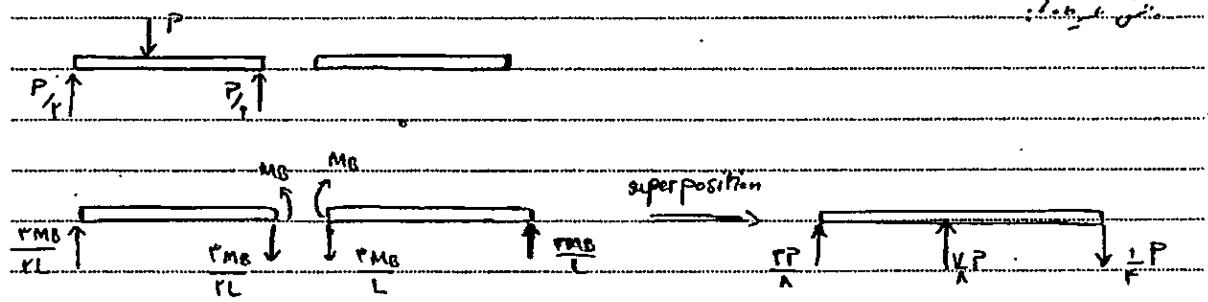
معادله سه لنگر:

$$\frac{L_L}{EI_L}M_L + 2\left(\frac{L_L}{EI_L}+\frac{L_R}{EI_R}\right)M_B + \frac{L_R}{EI_R}M_R = -\frac{6\bar{a}_L A_L}{L_L EI_L} - \frac{6\bar{a}_R A_R}{L_R EI_R}$$

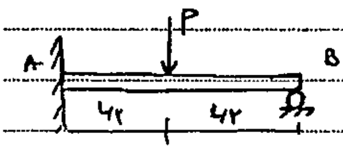
EI: ثابت

$$M_L=M_R=0 \Rightarrow 0 + 2\left(\frac{2}{3}L+\frac{L}{3}\right)M_B + 0 = -P\left(\frac{L}{3}\right)\left(\frac{L}{3}\right)\left(\frac{\frac{L}{3}}{\frac{2L}{3}}\right) \Rightarrow \boxed{M_B = -\frac{PL}{12}}$$

رسم نمودارها:

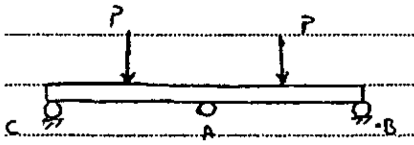


M_R و M_L صفر هستند



مثال: در این تیر اتصال گیردار به صورت تیری با دهانه صفر در نظر گرفته شود.

در این حالت لنگر در A صفر نیست



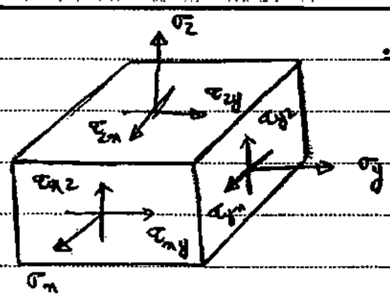
جواب: $M_A = \frac{-3PL}{16}$ و $R_B = \frac{5P}{16}$

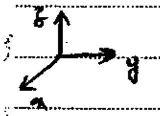
www.vapub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تعریف تانسور تنش (یادآوری):

حالت تنش :





تانسور تنش
$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

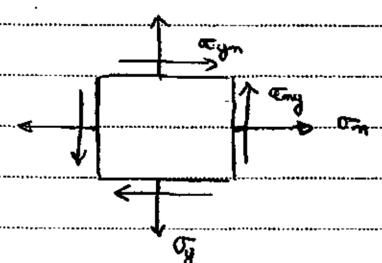
از تعادل نیروها و تعادل گشتاورها داریم : $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ و $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ و $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

می‌دانیم مقادیر در $\vec{\sigma}$ علامت دارند. ۱) تنش قائم در جهت خروج از سطح مثبت

۲) تنش برشی مثبت روی وجه مثبت در جهت مثبت و روی وجه منفی در جهت منفی است.

حال اگر z را یک وجه آزاد، تنش صفحه‌ای در نظر بگیریم.

$$xy \text{ در صفحه } \longrightarrow \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



علت این است که نقاط بحرانی در سطح جسم قرار دارند. هم چنین واضح است تنش کششی والبته در جهت عمود بر سطح است.

و معادلات وابع مولفه‌های تنش با تغییر جهت محورهای سطح و چرخش دستگاه مختصات تغییر می‌کنند. برای این است که حالت خاصی از تنش؟

حساب شود می‌توانیم یک حالت مختصات را برای بررسی انتخاب کنیم.

PAPCO

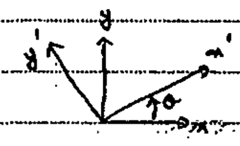
www.vepub.com
Publish Your Mind

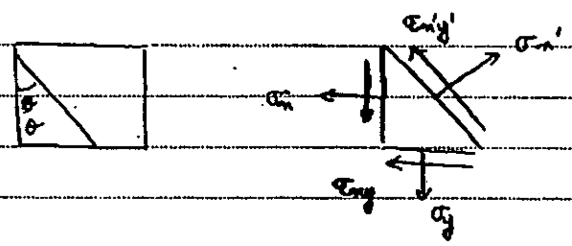
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مطالعه تبدیل تنش

- جهت تنش های متعامد
- تنش های برشی که اثر دارند
- برای المان های مساله روی صفحه مایل

تبدیل صفحه ای:





داریم $\quad \sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$\theta \rightarrow \theta + \frac{\pi}{2} \quad : \quad x' \rightarrow y'$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

رابطه مستقل از زاویه دوران

$$\boxed{\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'}}$$

www.vepub.com
Publish Your Word

Subject:
Year. Month. Date. ( )

با توجه به این که زاویه صفحات محورهای تنش $\frac{\pi}{2}$ است

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0 \Longrightarrow \boxed{\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}} \rightsquigarrow |\theta_{p_1} - \theta_{p_2}| = \frac{\pi}{2}$$

صفحات اصلی در صفحه xy

$\tau_{x'y'} = 0 \longrightarrow$ صفحات اصلی

در صفحات اصلی تنش برشی وجود ندارد و فقط تنش نرمال داریم. تنش‌های نرمال را ← تنش اصلی

وضعیت صفحه‌ای محور z یک صفحه اصلی و $\sigma_z = 0$ یک تنش اصلی است.

در حالت کلی سه تنش اصلی داریم. تنش‌های اصلی عبارتند از:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \sigma_3 = \sigma_z = 0$$

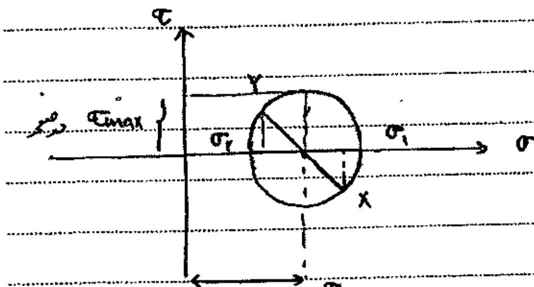
برای تنش برشی حداکثر:

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = 0 \rightsquigarrow \boxed{\operatorname{tg} 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}}} \rightsquigarrow |\theta_{s_1} - \theta_{s_2}| = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightsquigarrow |\theta_p - \theta_s| = \frac{\pi}{4}$$

$$\underset{\text{درصفحه}}{\tau_{max}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

دایره موهر تنش صفحه‌ای:



$$x \left| \begin{array}{l} \sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{array} \right.$$

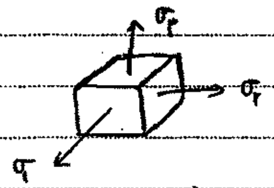
$$y \left| \begin{array}{l} \sigma_y \\ +\tau_{xy} \end{array} \right.$$

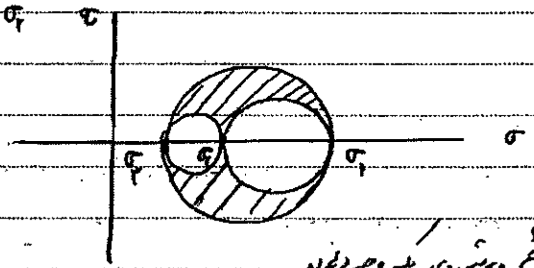
www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در حالت وضعیت بحرانی تنش با اعمال یک محور اصلی دوران دهیم آنگاه تنش صفحه اصلی خواهد یافت.

در اینجا تمام تنش‌ها تنش محوری خواهد بود.



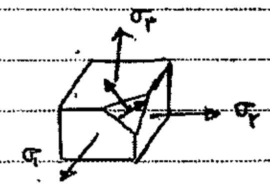


دوایر موهر بحرانی تنش سه بعدی تنش ماکزیمم برشی روی یک صفحه خواهد بود

حالت کلی که در فضا تنش ۳ دایره تشکیل می‌گردد.

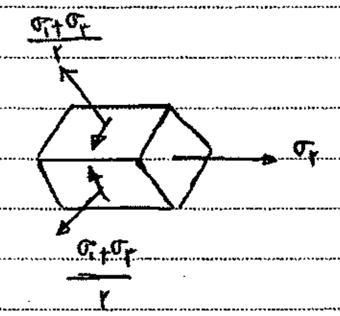
$$\tau_{max} = \text{شعاع بزرگترین دایره} = \text{نصف قطر} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2}$$

$\rightsquigarrow \sigma_3 \leq \sigma \leq \sigma_1$

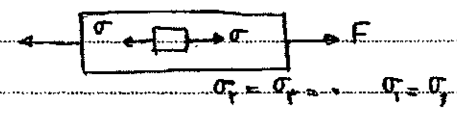


τ_{max} روی وجوه جانبی المان رخ می‌دهد که در چرخش 45° حاصل می‌شود.

در این حالت σ_2 حاصل می‌شود:



بارگذاری تک محوری:



$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \qquad \sigma_1 = \sigma$

τ_{max} روی صفحه‌ای که با محور بارگذاری زاویه $\frac{\pi}{4}$ می‌سازد رخ می‌دهد $\longrightarrow$ شکست برشی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر تانسور تنش در دستگاه xyz معلوم باشد و بردار تنش را روی یک صفحه بخواهیم، به این شکل عمل می‌کنیم:

$$\boxed{\vec{t} = \vec{\sigma}\ \vec{n}}$$

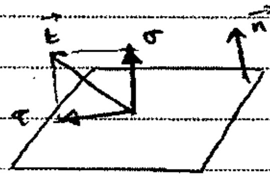
$\vec{t}$: بردار تنش (برآیند بردارهای تنش روی آن صفحه)

$\vec{n}$: بردار عمود بر صفحه

$\vec{\sigma}$: تانسور تنش

بردار $\vec{t}$ از دو مؤلفه عمودی و مماسی تشکیل شده است: σ و τ است

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$



$$\boxed{\sigma = \vec{t} \cdot \vec{n}}$$

$$\boxed{\tau = \sqrt{|\vec{t}|^2 - \sigma^2}}$$

اگر تنش در جهت‌های اصلی داده شده باشد

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{\sigma} = \vec{t} \cdot \vec{n} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$\tau^2 = (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2) - [\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2]^2$$

بردار برشی $\boxed{\vec{\tau} = \vec{t} - \sigma \vec{n}}$

PAPCO

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: وضعیت تنش در یک نقطه را در نظر بگیرید.

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \\ 5 & 10 & 5 \\ -5 & 5 & 20 \end{pmatrix} MPa$$

تنش عمودی و برشی روی صفحه‌ای با بردار عمود $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ را بیابید.

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} MPa = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{2} \\ 10/\sqrt{2} \\ 15/\sqrt{2} \end{pmatrix} MPa \qquad |\vec{t}| = \frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{1+4+9} = 5\sqrt{7}$$

$$\sigma = \vec{t} \cdot \vec{n} = \frac{5}{2} + \frac{15}{2} = \boxed{10\ MPa} \qquad \tau = \sqrt{25 \times 7 - 100} = \boxed{5\sqrt{3}\ MPa}$$

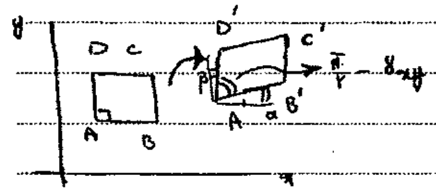
در چه حالتی تنش برشی صفر است؟

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \qquad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

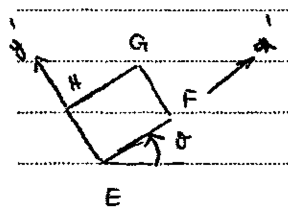
$$\tau^2 = |\vec{t}|^2 - \sigma^2 \xrightarrow{\tau = 0} \begin{cases} |\vec{t}|^2 = \sigma^2 \\ \vec{\sigma}\,\vec{n} = \sigma \vec{n} \end{cases}$$

مقدار ویژه و بردار ویژه

تعریف کرنش صفحه‌ای: تغییر طول نسبی را کرنش طولی و تغییر زاویه قائمه را کرنش برشی گویند. وضعیت کرنش را در نظر بگیرید.



$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \qquad \varepsilon_y = \frac{A'D' - AD}{AD} \qquad \gamma_{xy} = \alpha + \beta$$

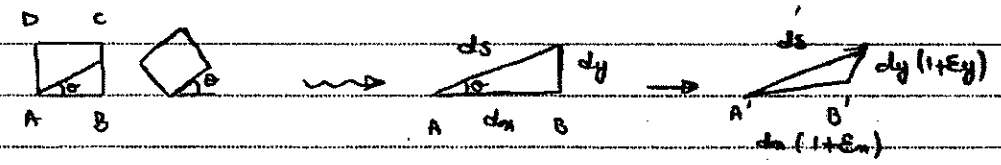


$$\varepsilon_{x'} = ? \qquad \varepsilon_{y'} = ? \qquad \gamma_{x'y'} = ?$$

اگر دستگاه مختصات جدید $x'y'$ را رسم کنیم که با محور x زاویه θ می‌سازد، کرنش در $x'y'$ را بیابید.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$\varepsilon_{x'} = \frac{ds' - ds}{ds} \qquad \begin{cases} dx = ds\cos\theta \\ dy = ds\sin\theta \end{cases}$$

$$ds'^2 = \left[dx(1+\varepsilon_x)\right]^2 + \left[dy(1+\varepsilon_y)\right]^2 - 2\left[dx(\varepsilon_x+1)\right]\left[dy(1+\varepsilon_y)\right]\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma_{xy}\right)$$

$$= ds^2\left\{(1+\varepsilon_x)^2\cos^2\theta + (1+\varepsilon_y)^2\sin^2\theta + 2(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)\sin\theta\cos\theta\sin(\gamma_{xy})\right\}$$

$$ds' = ds\sqrt{(1+2\varepsilon_x+\varepsilon_x^2)\cos^2\theta + \dots}$$

با توجه به کوچک بودن کرنش‌ها توان دوم آن‌ها را در مقایسه با توان اول و ضرب آنها از یک قابل اغماض است. همچنین جملات عبارت باقی‌مانده زیر رادیکال را به صورت تقریبی می‌گیریم.

$$\sqrt{1+2\varepsilon_x\cos^2\theta} \simeq 1+\varepsilon_x\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow ds' = ds\left\{1+\varepsilon_x\cos^2\theta + \varepsilon_y\sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x\cos^2\theta + \varepsilon_y\sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta}$$

ص ۲۵ :

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

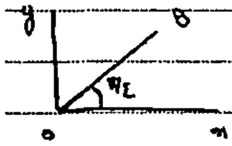
$$x' \to y', \quad \theta \to \theta + \frac{\pi}{2}$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

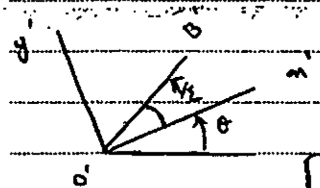
برای کرنش برشی به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \varepsilon_x' = \varepsilon_{OB} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{OB} - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)}$$

یعنی در محاسبه، مقدار کرنش آن را روی محور به دست می‌آوریم (OB).



$$\theta \rightarrow \theta + \frac{\pi}{4} \quad , \quad \varepsilon_x' \rightarrow \varepsilon_{OB'}$$

$$\boxed{\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta}$$

در مقایسه با روابط تبدیل تنش صفحه‌ای

$$\sigma \longleftrightarrow \varepsilon$$

$$\tau \longleftrightarrow \frac{\gamma}{2}$$

یعنی همانطوری که در به دست آوردن روابط تبدیل از تنش صفحه‌ای استفاده کردیم، در اینجا نیز با استفاده از روابط مشابه کرنش‌های اصلی را به دست می‌آوریم

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\Downarrow$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

راستاهای اصلی کرنش در صفحه

راستاهای اصلی کرنش، راستاهایی است که کرنش برشی در آنها صفر است.

یعنی زاویه را $\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌دهیم

کرنش‌های اصلی داریم:

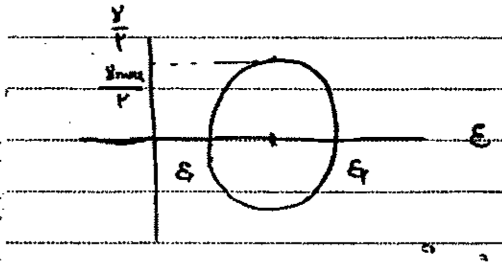
$$\boxed{\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}}$$

$$\frac{\gamma_{max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دایره مور نیز به صورت زیر است (دوایر کرنش در صفحه) :



همانطور که می‌دانیم وضعیت تنش در نقطه تانسوری است . کرنش نیز به صورت تانسوری زیر تعریف می‌شود :

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \text{متقارن} & & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

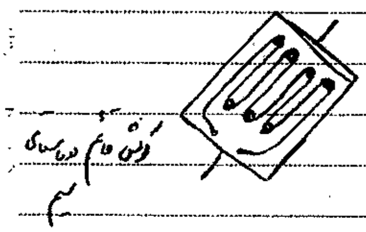
تانسور کرنش

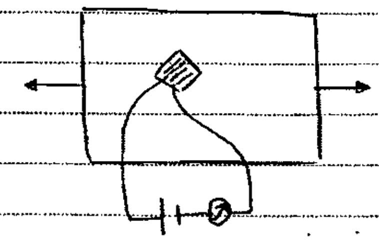
سنجش کرنش به وسیله کرنش‌سنج : کرنش‌سنج متشکل از سیم‌های بسیار نازک و مقاومت الکتریکی معین

و مقاومت الکتریکی مشخص هستند . به علت بارگذاری تغییر شکل‌هایی ایجاد می‌شود و نتیجتاً

در مقاومت سیم تغییر ایجاد می‌شود و لذا جریان عبوری از مدار تغییر می‌کند .

کرنش‌سنج تنها کرنش قائم در راستای سیم را نشان می‌دهد .





برای تعیین حالت وضعیت تنش صفحه‌ای است (صفحه xy) . اگر مؤلفه‌های کرنش در این صفحه یعنی ε_x ، ε_y و γ_{xy} را

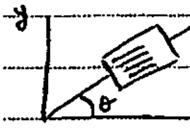
داشته باشیم با استفاده از قانون هوک :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases}$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

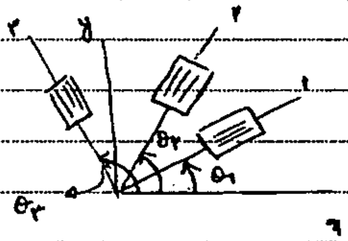
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y) \longrightarrow \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

کرنش‌های که داخل صفحه در جهت به اعمال کرنش سنج‌ها و روابط تبدیل کرنش مشخص می‌شود:



$$\boxed{\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta}$$

از سه جهت می‌شود سه مجهول را تعیین کرد که این منجر به کرنش سنج شده که در θهای مختلف داریم تا ε_x، ε_y و γ_{xy} مشخص شود.



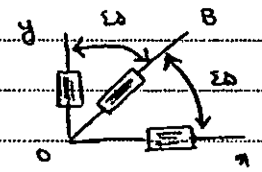
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x \cos^2\theta_1 + \varepsilon_y \sin^2\theta_1 + \gamma_{xy}\sin\theta_1\cos\theta_1$$

$$\varepsilon_2 = \;\vdots$$

$$\varepsilon_3 = \;\vdots$$

$\xrightarrow{\text{۳ معادله}} \varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \gamma_{xy}$

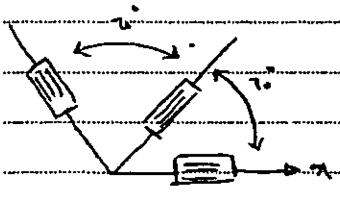
کرنش سنج گل‌ها :

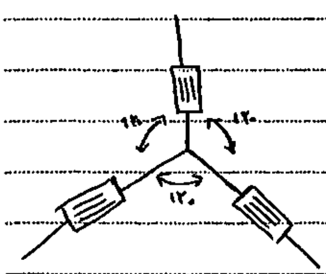


$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_y$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_2 - (\varepsilon_1+\varepsilon_3)$$





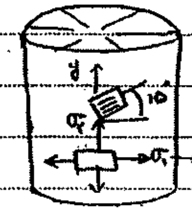
باید توجه شود که این کرنش سنج‌ها نزدیک هم باشند. چرا که در صورت پراکندگی، مقادیر آن را ... نقطه دارند.

هم چنین در صورت مجهول بودن ... به ازاء هر مجهول یک کرنش سنج نیاز داریم.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: مخزن تحت فشار قطر داخلی ۳۰۰ mm و ضخامت جداره ۳ mm



$E = 200\ GPa$ ، $\nu = 0.29$ کرنش سنج عدد 350μ نشان می‌دهد. فشار داخلی مخزن؟

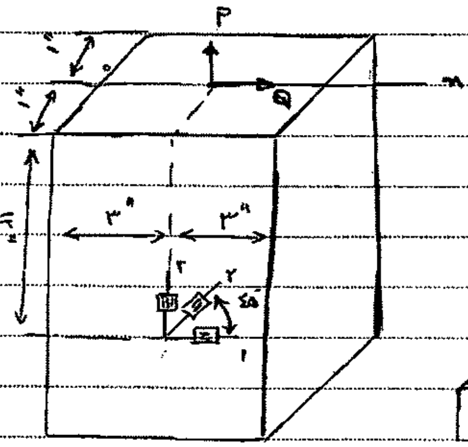
$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{Pr}{t} \\ \sigma_2 = \dfrac{Pr}{2t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \alpha P \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = \beta P \\ \gamma_{12} = \gamma_{xy} = 0 \end{cases}$$

جهت‌های اصلی را بیابیم ←

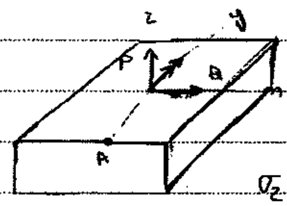
$\theta = 15^\circ$: $\varepsilon_{x'} = \varepsilon_1 \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta = 350\mu \Rightarrow \boxed{P = 1.725\ MPa}$

مثال: $\varepsilon_3 = 100\mu$ $\varepsilon_2 = 250\mu$ $\varepsilon_1 = -60\mu$

$Q = ?$ $P = ?$



تنش‌ها در مقطع نصب کرنش سنج



مؤلفه‌های تنش در نقطه A:

$\sigma_z = \dfrac{P}{A}$ $\tau_{zx} = \dfrac{3}{2}\dfrac{Q}{A}$

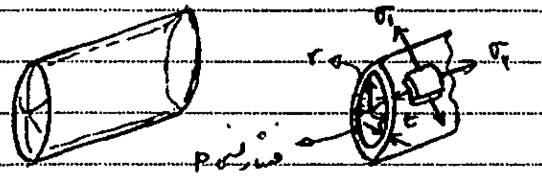
$\sigma_x = 0$

$$\text{معادلات} \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{-\nu}{E}\sigma_z = \varepsilon_1 \Rightarrow P \checkmark \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\tau_{zx}}{G} = 2\varepsilon_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \Rightarrow Q \checkmark \end{cases}$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

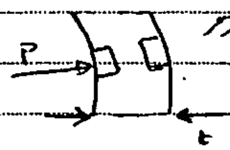
مخازن تحت فشار جدار نازک :



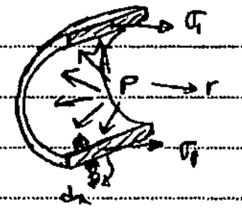
$\frac{r}{t} \geq 10$: جدار نازک

فرض : فشار خارج ـ فشار داخل = P ؛ $P>0$: فشار داخل از فشار خارج بیشتر است

σ_1 : تنش محیطی (حلقوی) — tangential σ_2 : تنش طولی — longitudinal

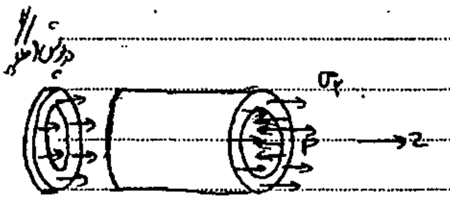


تنش فشاری در جهت P ـ تغییر می‌کند، اما چون مقدار P نسبت به تنش‌ها کوچک است از آن صرف نظر می‌کنیم.



$$\Sigma F_r = 0 \Rightarrow 2\sigma_1 t\,dx - P(2r\,dx) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_1 = \frac{Pr}{t}}$$ تنش محیطی



$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow \sigma_2(2\pi r t) - P(\pi r^2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_2 = \frac{Pr}{2t}}$$ تنش طولی

نکته: در صورتی که $P>0$ باشد، σ_1 و σ_2 کششی هستند.

اگر فشار تابعی از z باشد (مانند فشار ناشی از فشار سیال در مخزن)، با رابطه σ_1 می‌توان به جای $P_{(z)}$، P قرار داد

ولی برای σ_2، فشار در کل مخزن باید در نظر گرفته شود.

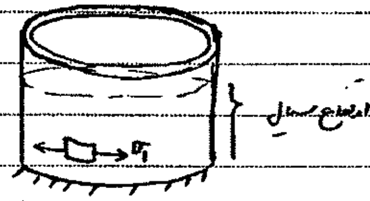
PaPCO

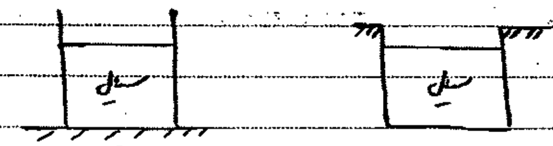
www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مخازن ذخیره‌ی روباز (کاربرد): در این نوع مخزن تنش طولی ناشی از فشار سیال ایجاد نمی‌شود؟ فقط به خاطر وزن مخزن بالای...

هیدرواستاتیک: در این حالت تنش طولی را نداریم.



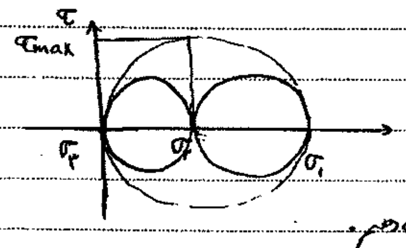


σ_2 ناشی از فشار نداریم. σ_2 ناشی از فشار داریم.

در صورتی که این مخزن به صورت یکپارچه ساخته نشده باشد و از اتصال ورق‌ها با جوش ساخته شده باشد باید تنش σ_2 و σ_1 در مقاطع

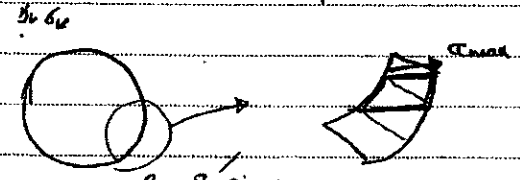
جوش یا درز جوش محاسبه شده و با حد مجاز آنها مقایسه گردد.

تنش برشی حداکثر: تنش‌های اصلی: $\sigma_1 = \frac{Pr}{t}$ $\sigma_2 = \frac{Pr}{2t}$ $\sigma_3 = 0$



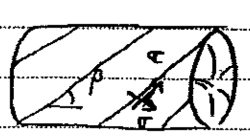
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{Pr}{2t}$$

τ_{max} زمانی اتفاق می‌افتد که المان را حول محور طولی در صفحه‌ی مماس 45° دوران دهیم.



نکته: اگر این مخزن ساخته شده باشد، در تنش σ_1 حساس است (یعنی شکست طولی داریم).

مخازن معمولاً از ورق‌هایی که به صورت مارپیچ جوش داده می‌شوند (β نسبت به راستای محور ساخته شده تحت جوش مارپیچی‌اند).

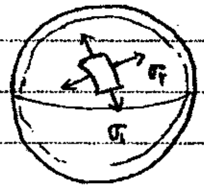


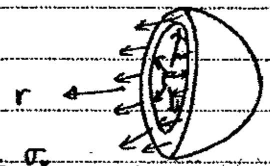
PAPCO

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مخزن کروی : به علت تقارن : $\sigma_1 = \sigma_2$





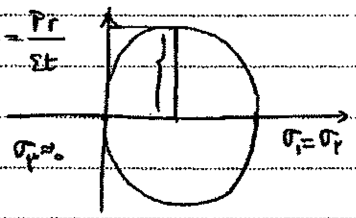
$\sigma_1 = \sigma_2$

$$\sum F_r = 0 \Rightarrow \sigma_1 (2\pi r t) - p(\pi r^2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{Pr}{2t}}$$

تنش برشی حداکثر :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{Pr}{4t}$$

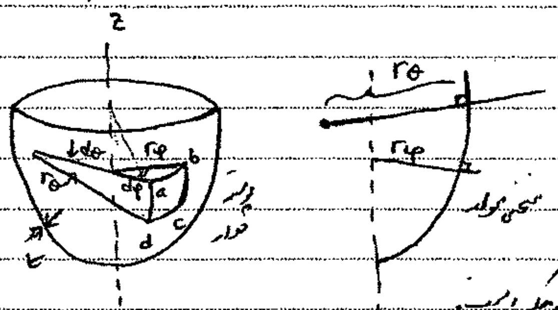


تنش برشی max بر روی صفحه‌ای که با صفحات اصلی زاویه 45° بسازد

اتفاق می‌افتد (در راستای طول σ_2)

مشاهده می‌شود τ_{max} در مخزن کروی، نصف مقدار مخزن استوانه‌ای است و این امکان را فراهم می‌کند که از ورق نازک‌تری استفاده کرد.

تنش در پوسته‌های دوار جدار نازک متقارن :

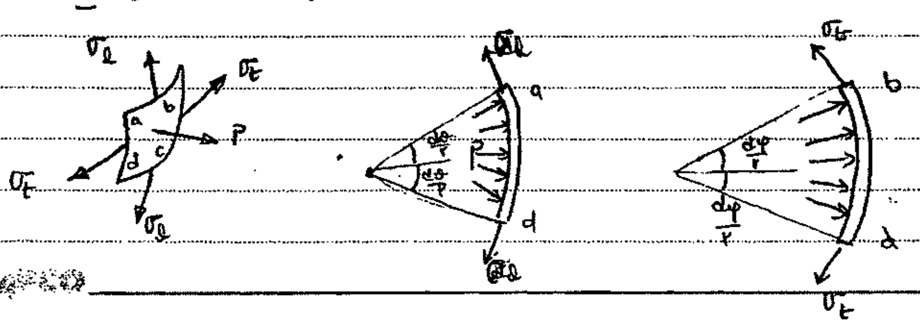


t ضخامت، z محور تقارن، ضخامت در امتداد عمود بر پوسته ثابت است.

$\overline{ab}$: برش محیطی به شعاع انحنای $\underline{r_\varphi}$ در جهت محیطی (حلقوی) hoop و با زاویه $\underline{d\varphi}$: مرکز این برش روی محور تقارن است.

$\overline{ad}$: برش نصف‌النهاری یا طولی (longitudinal - meridional) : به شعاع $\underline{r_\theta}$ با زاویه $\underline{d\varphi}$.

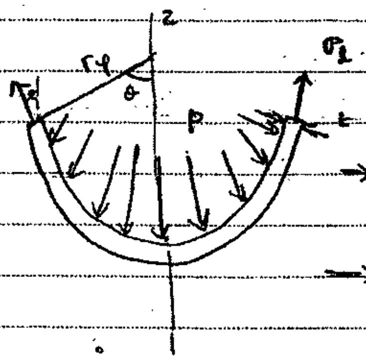
نمودار جسم آزاد :



Subject:
Year: Month: Date: ( )

$$\Rightarrow 2\left[\sigma_t\,(t\,r_\theta\,d\theta)\,\sin\frac{d\varphi}{2}\right] + 2\left[\sigma_l\,(t\,r_\varphi\,d\varphi)\,\sin\frac{d\theta}{2}\right] - P\,r_\theta\,r_\varphi\,d\theta\,d\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_t}{r_\varphi} + \frac{\sigma_l}{r_\theta} = \frac{P}{t}} \quad ①$$



$$\Sigma F_z = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_l\,(2\pi r_\varphi \sin\theta\; t)\,\sin\theta - P\,\pi\,(r_\varphi \sin\theta)^2 = 0 \quad ②$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_l = \frac{P r_\varphi}{2t}} \; ③ \xrightarrow[①]{\text{جایگذاری در}} \boxed{\sigma_t = \frac{P r_\varphi}{t}\left[1 - \frac{r_\varphi}{2 r_\theta}\right]} \; ④$$

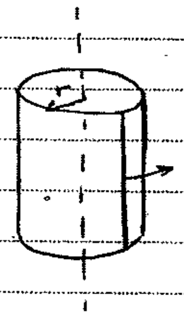
P و t می‌توانند فشار و ضخامت در موضع z باشند هر P تابع z باشد که روابط ۱ همچنان برقرار است (P و t

متغیر محیطی)

اما در قسمت دوم معادله‌ی ۲ که منتجه نیروی ناشی از P در راستای z معادل با انتگرال‌گیری بدست آید، در روابط ۳ و ۴

قابل استفاده نیستند.

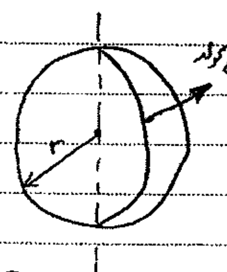
مثال: مخزن استوانه‌ای



$r_\varphi = r \qquad r_\theta = \infty$

$$\sigma_t = \frac{Pr}{t} = \sigma_1 \qquad \sigma_l = \frac{Pr}{2t} = \sigma_2$$

مثال: مخزن کروی



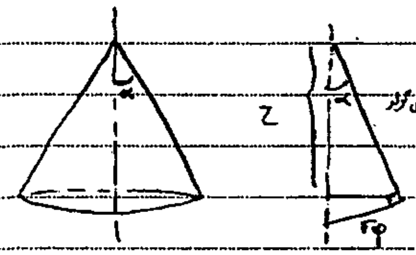
$r_\varphi = r_\theta = r$

$$\sigma_t = \frac{Pr}{2t} = \sigma_l$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: مخزن مخروطی



محور $\quad r_\theta = \infty$

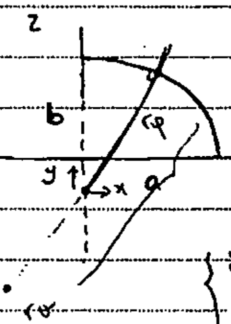
$$r_\varphi = \frac{Z\, tg\alpha}{Co\alpha}$$

$$\sigma_t = \frac{P Z\, tg\alpha}{t\, Co\alpha} \qquad \sigma_l = \frac{1}{2}\sigma_t = \frac{P Z\, tg\alpha}{2 t\, Co\alpha}$$

if $\alpha \to 0 \Longrightarrow$ مخزن استوانه‌ای (... $z \to \infty$ ... $\alpha \to 0$ ...)

if $\alpha \to \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$ صفحه تخت $\quad \sigma_l , \sigma_t \to \infty$

مثال: ظرف بیضوی $\qquad \frac{a}{b}$ برای های مختلف



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$r_\theta = \rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \longrightarrow r_\theta(x) = \frac{-(a^4 - x^2 + a^2b^2)^{3/2}}{b\, x}$$

$$\begin{cases} y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-b}{a} \times \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ \frac{-2x\,dx}{a^2} = \frac{2y\,dy}{b^2} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \times \frac{b^2}{a^2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-b^2}{a^2}\,\frac{x}{y} = \frac{-b}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \Longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-bx}{a\,(a^2 - x^2)^{3/2}}$$

$$y - y_0 = \frac{a\sqrt{a^2 - x_0^2}}{b}(x - x_0) \xrightarrow{x = 0} y = y_0 - \frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{b}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \Delta y = 2y_0 - \frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{b} \\ \Delta x = x \end{cases} \Longrightarrow r_\varphi = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \left[x^2 + \left(\frac{2b}{a} - \frac{a}{b}\right)^2 (a^2 - x_0^2)\right]^{1/2}$$

$$\xrightarrow{x_0 \to x} r_{\varphi(x)} = \left[x^2 + \left(\frac{2b}{a} - \frac{a}{b}\right)^2 (a^2 - x_0^2)\right]^{1/2}$$

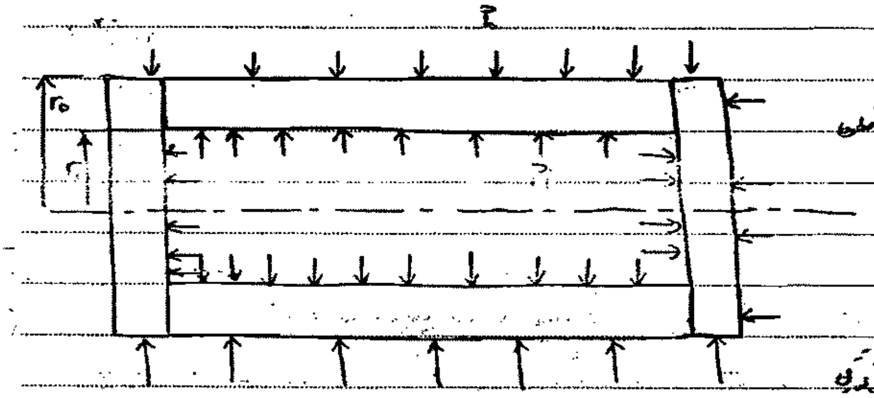
$$\sigma_{l(x)} = \frac{P\, r_\varphi(x)}{2t} \qquad \sigma_{t(x)} = \frac{P\, r_\varphi(x)}{t}\left[1 - \frac{r_\varphi(x)}{r_\theta(x)}\right]$$

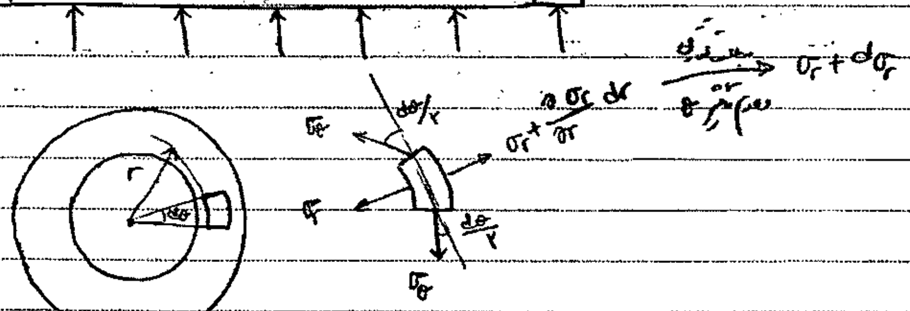
www.vepub.com
Publish Your Mind

استوانه‌های جدار ضخیم :

کاربرد: در سیستم‌های هیدرولیک و لوله‌کشی‌ها و ...

فرض: جداره‌ی سیلندر تحت فشار بالا





$$\sum F_r = 0 \Longrightarrow -\sigma_r (r\,d\theta) - 2\sigma_\theta\, dr \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr\right)(r+dr)\, d\theta = 0$$

$\xrightarrow{\text{معادله دیفرانسیل}}$ معادله دیفرانسیل شامل σ_r و σ_θ

برای حل این معادله، تغییر مکان را به صورت شعاعی در نظر می‌گیریم

تغییر مکان در راستای شعاعی : u

کرنش محیطی : $\varepsilon_\theta = \dfrac{u}{r}$

کرنش شعاعی : $\varepsilon_r = \dfrac{du}{dr}$

معادلات هوک :

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu\sigma_\theta\right)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \nu\sigma_r\right)$$

Subject.
Year. Month. Date. ( )

پس از جایگذاری در معادله دیفرانسیل تعادل، معادله تنش‌ها بر حسب کرنش‌ها، معادله کرنش‌ها بر حسب u قرار داده

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ بر حسب u(r) حاصل

با حل این معادله u(r) مشخص می‌شود ← ε_r و ε_θ ← σ_r و σ_θ ، دو ثابت انتگرال‌گیری نیز

داریم که از شرایط مرزی تنش مشخص می‌شوند.

شرایط مرزی :

$$\sigma_r(r_i) = -P_i$$

$$\sigma_r(r_o) = -P_o$$

$$\sigma_r = \frac{P_i r_i^2 - P_o r_o^2 + r_i^2 r_o^2 (P_o - P_i)/r^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

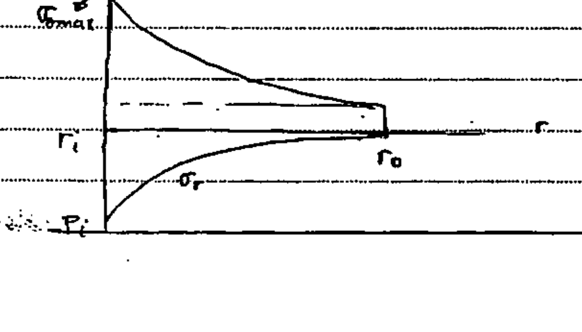
$$\sigma_\theta = \frac{P_i r_i^2 - P_o r_o^2 - r_i^2 r_o^2 (P_o - P_i)/r^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

حال اگر جداره داریم $\frac{r_i + r_o}{2} = r_{ave}$ و $t = r_o - r_i$ در روابط بالا قرار دهیم نتایج جدار نازک بسته به نسبت $\frac{t}{r}$

نتیجه می‌دهد.

$$\text{if } P_o = 0 \longrightarrow \begin{cases} \sigma_r = \dfrac{r_i^2 P_i}{r_o^2 - r_i^2}\left(1 - \dfrac{r_o^2}{r^2}\right) \\[2ex] \sigma_\theta = \dfrac{r_i^2 P_i}{r_o^2 - r_i^2}\left(1 + \dfrac{r_o^2}{r^2}\right) \end{cases}$$

جزوه



www.vepub.com
Publish Your Mind

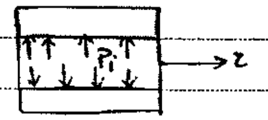
Subject:
Year. Month. Date: ( )

بنابراین ثابت شد که $\sigma_{\theta max}$ در داخلی‌ترین سطح است و اگر بخواهیم جدار ضخیم لوله را با اعمال فشار داخلی تحمل کند باید ... افزایش دهیم

باید پیش‌تنیده و به روش‌های خاص ... تنش (پسماند) در لوله ایجاد کرد که باعث می‌شود $\sigma_{\theta max}$ کاهش یابد

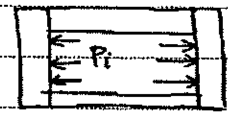
تعیین کرد.

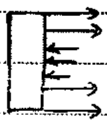
$$\boxed{\sigma_t + \sigma_r = const.}$$



$$\sigma_z = \sigma_\theta = 0 \Longrightarrow \boxed{\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) = const}$$

در صورتی که دو سر لوله با درپوش بسته شود





$$\boxed{\sigma_z = \frac{P_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2}}$$

لوله‌ای فولادی از جنس ... به قطر خارجی "۸ و ضخامت دیواره "$\frac{1}{4}$ اگر تنش محیطی مجاز برای آن ماده

12 ksi باشد، فشار مجاز داخل لوله را برای دو حالت زیر تعیین کنید.

الف) لوله را جدار نازک فرض کنیم ب) لوله را جدار ضخیم فرض کنیم

الف)

$$r_i = \frac{d_i}{2} = \frac{1}{2}(d_o - 2t) = 3.75'' \qquad r_o = \frac{d_o}{2} = 4'' \qquad r_{ave} = \frac{4 + 3.75}{2}$$

$$\sigma_t = \frac{P\, r_{ave}}{t} = \frac{P(4 + 3.75)}{2 \times \frac{1}{4}} = 12\ ksi \Longrightarrow \boxed{P_{all.} = 774\ psi}$$

ب)

$$(\sigma_t)_{max} = \frac{r_i^2 P_i}{r_o^2 - r_i^2}\left(1 + \frac{r_o^2}{r_i^2}\right) = P_i \frac{r_o^2 + r_i^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

$$(\sigma_t)_{max} = 12\ KSi \Longrightarrow \boxed{P_i = 773\ psi}$$

PaPCO

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject :
Year . Month . Date . ( )

همین مسئله را به صورت دقیق ۱" عرض حل کنید الف) $P_i = ۲,۲۳$ KSI ب) $P_i = ۲,۲۹$ KSI

حساب هم می‌شود چون می‌توان جدار نازک فرض کرد $\sigma_{t\,max}$ کرنش را محدود می‌کند ، P_{all} را می‌دهد درست.

* در مخزن جدار ضخیم ، همین روابط ولی با لامه ۲ ... ۲ برای σ_t و σ_r درست می‌آید *

در کره ... تنش طولی نداریم و فقط تنش‌های شعاعی و محیطی داریم.

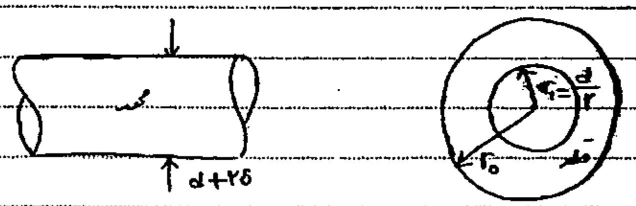
شرینک فیت و پرس فیت — Shrink fit & Press fit

برای جا زدن و ثبت قطعه روی محور بدون استفاده از پیچ ... قطر سوراخ باید کوچکتر از قطر محور باشد ... یک راه این است که قطر سوراخ کوچکتر از قطر محور باشد ، سپس با اعمال نیرو (با اختلاف قطر کم) یا حرارت (در اختلاف قطرهای بیشتر) قطعه را روی محور جا می‌دهند.

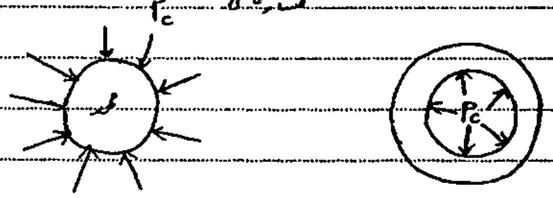
در فصل مشترک قطعه و محور فشار تماسی ایجاد می‌شود که ... تنش‌های ... و محیطی ایجاد می‌کند.

اتصال فشاری — تثبیت موقعیت

محاسبه فشار تماسی :



δ : اختلاف شعاعی سوراخ قطعه و شعاع محور



$$\boxed{|\delta_s| + |\delta_h| = \delta}$$

مجموع تغییر شکل‌ها باید δ را جبران کند.

$\delta_{shaft} = \alpha P_c$ و $\delta_{hole} = \beta P_c$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

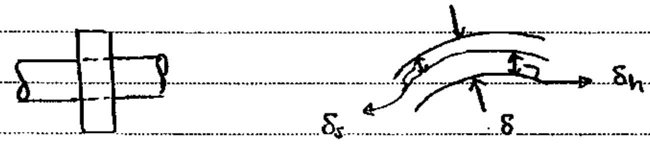
$$P_c = \frac{\delta}{r_i\left[\frac{1}{E_o}\left(\frac{r_o^2+r_i^2}{r_o^2-r_i^2}+\nu_o\right)+\frac{1}{E_i}\left(+1-\nu_i\right)\right]}$$

قطعه   محور

اگر محور توخالی با شعاع داخلی R_i باشد.

$$P_c = \frac{\delta}{r_i\left[\text{جمله اول} + \frac{1}{E_i}\left(\frac{r_i^2+R_i^2}{r_i^2-R_i^2}-\nu_i\right)\right]}$$

در صورت وجود نیروی محوری یا گشتاور، اصطکاک و گشتاور اصطکاکی ناشی از P_c مانع از حرکت قطعه می‌شود.



مثال: یک چرخ دنده با انطباق $H7/s6$ روی محوری به قطر 60mm نصب شده و قطر خارجی قطعه استوانه‌ای 120mm است. محور و قطعه هر دو از جنس فولاد هستند ($E = 100\ GPa$ ، $\nu = 0.3$) اگر ضریب اصطکاک بین قطعه و محور 0.15 باشد، مطلوب است تعیین نیروی محوری و گشتاور پیچشی که قطعه می‌تواند تحمل کند؟ در حالت حداکثر تداخل. پهنای قطعه 20mm است.

سوراخ قطعه $H7: \frac{+30\ \mu m}{0\ \mu m} \longrightarrow 60^{+30\ \mu m}_{+0\ \mu m}$

محور $s6: \frac{+72\ \mu m}{+53\ \mu m} \longrightarrow 60^{+72\ \mu m}_{+53\ \mu m}$

برای حداکثر تداخل، قطر سوراخ 60.0 mm و قطر محور 60.072 خواهد بود.

$$\Longrightarrow \delta = \frac{0.072}{2} = 0.036\ mm$$

در رابطه، شعاع‌ها را وارد می‌کنیم:

$$P_c = \frac{0.036}{\frac{30}{100\times10^3}\left[\left(\frac{60^2+30^2}{60^2-30^2}+0.3\right)+\left(1-0.3\right)\right]} = 90\ MPa$$

فشار تماس

MPa

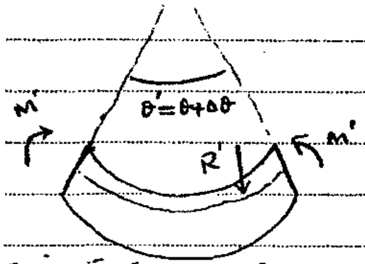
نیروی محوری $= \mu P_c A = 0.15 \times 90 \times 20 \times 60\pi = 50.9\ KN$

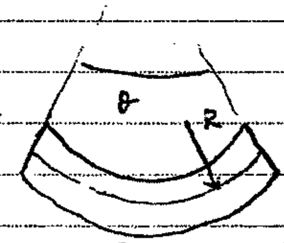
گشتاور پیچشی $= r_i(\mu P_c A) = 1527\ KN\cdot mm$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

خمش تیرهای خمیده :

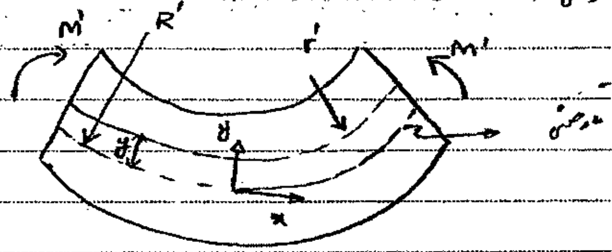




هرگاه تیرهای خمیده تحت خمش قرار گیرند یک طرف تحت کشش و طرف دیگر تحت فشار است ! لذا باید لایه‌ای وجود داشته باشد که تحت تنش صفر
باشد

و نتیجتاً طول تار خنثی ثابت باقی بماند . لذا

$$\boxed{R\theta = R'\theta'}$$



$$\delta = r'\theta' - r\theta$$

$$\begin{cases} r = R - y \\ r' = R' - y \end{cases} \Rightarrow \delta = -y\,\Delta\theta$$

در اینجا تغییر طول تار واقع در فاصله y از تار خنثی

مقطع ثابت باقی می‌ماند

کرنش محوری
$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\delta}{r\theta} = \frac{-\Delta\theta}{\theta}\,\frac{y}{R-y}}$$

کرنش محوری به صورت غیرخطی (هذلولی) با فاصله از لایه خنثی تغییر می‌کند . اگر تنش ناشی از این کرنش را σ_x بنامیم

و اگر تنها تنش ایجاد شده باشد ، با استفاده از قانون هوک طبق قانون هوک داریم :

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

$$\sigma_x = -\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\,\frac{y}{R-y}$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله [illegible] σ_y نیز برای معادل [illegible] می‌باشد و اندازه‌گیری با شعاع انحنای بزرگ

نسبت به عمق تیر [illegible] ناچیز خواهد بود.

اگر تیر [illegible] در نظر بگیریم [illegible] برای یافتن موقعیت تار خنثی نتیجه می‌گیریم

نیروی محوری باید صفر باشد و مجموع گشتاورها باید برابر M شود.

$$\int_A \sigma_x \, d_A = 0 \qquad \int y \, \sigma_x \, d_A = M$$

$$\int_A \sigma_x \, d_A = 0 \Longrightarrow \int \frac{E \Delta\theta}{\theta} \, \frac{R-r}{r} \, d_A = 0 \Longrightarrow \int \frac{R-r}{r} \, d_A = 0$$

$$\Longrightarrow R = \frac{A}{\int \frac{d_A}{r}}$$

$$\bar{r} = \frac{1}{A} \int r \, d_A$$ محور مرکز سطح

$$\bar{r} \neq R$$

یعنی تار خنثی از مرکز سطح نمی‌گذرد.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{A} \int \frac{1}{r} \, d_A$$

انحنای تار خنثی، میانگین سطحی انحناهای تارهای مختلف است.

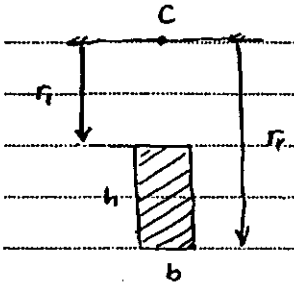
المان سطحی هم فاصله‌ای [illegible] y [illegible] داشته باشد.

PAPCO

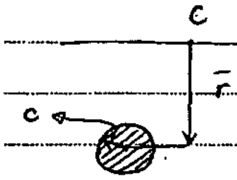
www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

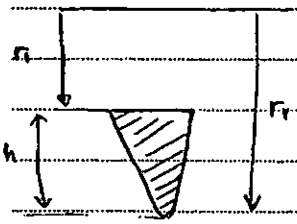
برای چند شکل ساده R بدست می‌آید



$$R=\frac{h}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$



$$R=\frac{1}{2}\left(\bar{r}+\sqrt{\bar{r}^2-c^2}\right)$$



$$R=\frac{\frac{1}{2}h}{\frac{r_2}{h}\ln\frac{r_2}{r_1}-1}$$

لنگر خمشی را بدست می‌آوریم

$$M=\int\frac{E\Delta\theta}{\theta}\,\frac{R-r}{r}\,\overset{R-r}{y}\,dA$$

$$\frac{E\Delta\theta}{\theta}\int\frac{(R-r)^2}{r}\,dA=M \qquad \frac{E\Delta\theta}{\theta}\left[R^2\int\frac{dA}{r}-2RA+\int r\,dA\right]=M$$

$$\Rightarrow\frac{E\Delta\theta}{\theta}\left[RA-2RA+\bar{r}A\right]=M$$

$$\Rightarrow\frac{E\Delta\theta}{\theta}=\frac{M}{A(\bar{r}-R)}$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

if $M>0 \Rightarrow \Delta\theta>0 \Rightarrow \bar{r}>R$

مرکز سطح مقطع نسبت به تار خنثی دورتر از مرکز انحنا قرار دارد.

$e=\bar{r}-R$ فاصله مرکز سطح تا تار خنثی

$$\Rightarrow \sigma_x=-\frac{My}{Ae(R-y)}$$

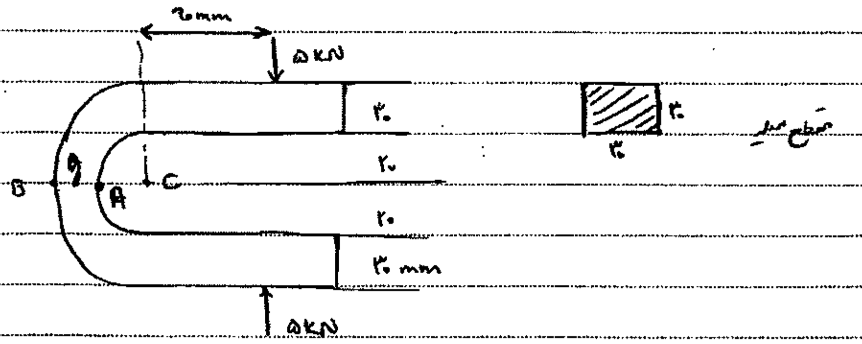
$$\sigma_x=\frac{M(r-R)}{Aer}$$

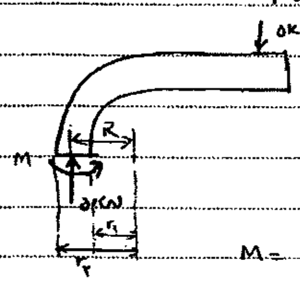
e عدد کوچکی است و خطای محاسبه آن زیاد است، مثلاً اگر e را تا ۴ رقم اعشار حساب کنیم دقت بیشتری خواهیم داشت.

تغییر شعاع انحنای تار خنثی

$$\boxed{\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}=\frac{M}{EAeR}}$$

مثال: $\sigma_A , \sigma_B = ?$





$$R=\frac{h}{\ln\frac{r_2}{r_1}}=\frac{۳۰}{\ln\frac{۵۰}{۲۰}}=۳۲٫۷۴\,mm$$

$$M=۵KN(۶۰+۳۲٫۷۴)=۴۶۳٫۷\ KNmm$$

$$\sigma_x=\frac{M(r-R)}{Aer}+\frac{P}{A} \Rightarrow \sigma_A=\frac{۴۶۳٫۷\times10^{3}(۲۰-۳۲٫۷۴)}{۳۰^{2}(۳۵-۳۲٫۷۴)(۲۰)}-\frac{۵\times10^{3}}{۳۰^{2}}=-۱۶۵٫۸\ MPa$$

$$\sigma_B=\frac{۴۶۳٫۷\times10^{3}(۵۰-۳۲٫۷۴)}{۳۰^{2}(۳۵-۳۲٫۷۴)(۵۰)}-\frac{۵\times10^{3}}{۳۰^{2}}=۷۲٫۱\ MPa$$

مقدار $\frac{P}{A}$ نسبتاً کوچک است.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: اگر اندازه‌ی $\frac{r}{8}$ ۲۰ به 200mm تغییر کند.
مسئله‌ی قبل

$$R=\frac{30}{\ln\frac{230}{200}}=214.65$$

$$M=5(60+214.65)=1373.3\ \text{kN.mm}$$

با جایگذاری تنش‌ها در نقاط

$$\sigma_A=\frac{1373.3\times10^3(200-214.65)}{30^2(215-214.65)(200)}=\underline{-319.3\ \text{MPa}}$$

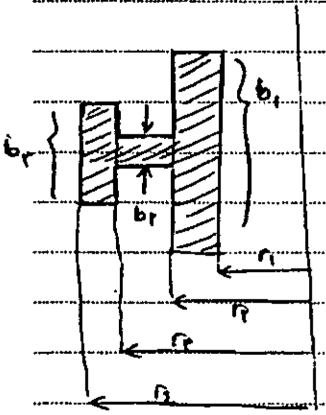
$$\sigma_B=\frac{1373.3\times10^3(230-214.65)}{30^2(215-214.65)(230)}=\underline{291\ \text{MPa}}$$

هر چه شعاع انحنا بیشتر شود، جواب به جواب تنش تیر مستقیم نزدیکتر می‌شود.

در مثال اخیر مشاهده می‌شود که در حالت اول مقدار $|\sigma_A|-|\sigma_B|$ بیشتر است.

اگر شعاع انحنا بزرگتر از ۵ برابر عمق تیر باشد، با روابط تیر مستقیم با تقریب خوبی می‌توان جواب برای تیر خمیده بدست آورد.

مثال:



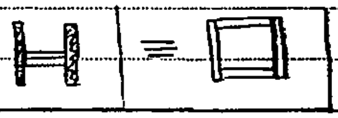
$$R=\frac{A}{\int\frac{dA}{r}}$$

$$\int\frac{dA}{r}=\int\frac{dA}{r_1}+\int\frac{dA}{r_2}+\int\frac{dA}{r_3}$$

$$=\frac{A_1}{R_1}+\frac{A_2}{R_2}+\frac{A_3}{R_3}=\frac{b_1(r_2-r_1)}{\frac{r_2-r_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}}+\frac{b_2(r_3-r_2)}{\frac{(r_3-r_2)}{\ln\frac{r_3}{r_2}}}+\frac{b_3(r_4-r_3)}{\frac{r_4-r_3}{\ln\frac{r_4}{r_3}}}$$

$$=\ln\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{b_1}\times\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{b_2}\times\left(\frac{r_4}{r_3}\right)^{b_3}\right]$$

مشاهده می‌شود در صورتی که ... نسبت ... در راستای محور ... نسبت به ... سطح را ... ؟

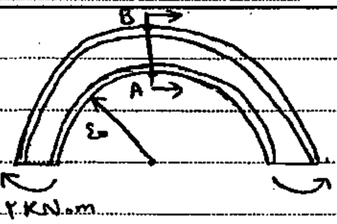


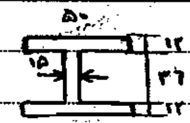
بدون اینکه R تغییر کند.

PAPCO

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )





مثال ۱ واحد ها mm

مطلوبست حداکثر تنش کششی و فشاری ! ناودانی پس از اعمال گشتاور ؟

$E = ۲۰۰\ GPa$

$$R = \frac{۲(۵۰)(۱۲) + (۱۵)(۳۶)}{\ln\left[\left(\frac{۵۲}{۴۰}\right)^{۵۰}\left(\frac{۸۸}{۵۲}\right)^{۱۵}\left(\frac{۱۰۰}{۸۸}\right)^{۵۰}\right]} = \boxed{۶۳,۵\ mm}$$

$$\sigma_x = \frac{M(r-R)}{Aer}$$

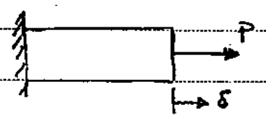
$$\sigma_A = \frac{-۲\times۱۰^{۶}(۴۰-۶۳,۵)}{۱۷۴۰(۷۰-۶۳,۵)(۴۰)} = ۱۰۳,۹\ MPa$$

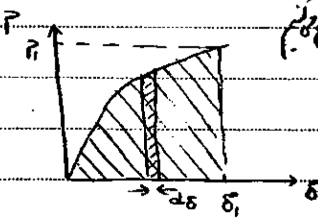
$$\sigma_B = \frac{-۲\times۱۰^{۶}(۱۰۰-۶۳,۵)}{۱۷۴۰(۷۰-۶۳,۵)(۱۰۰)} = \boxed{-۶۴,۵\ MPa}$$

تغییر زاویه : $\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EAeR} \Rightarrow \frac{1}{R'} - \frac{1}{۶۳,۵} = \frac{-۲\times۱۰^{۶}}{۲۰۰\times۱۰^{۳}\times۱۷۴۰(۷۰-۶۳,۵)\times۶۳,۵} \Rightarrow \boxed{R' = ۶۳,۵۵}$

$$R\theta = R'\theta' \Rightarrow \theta' = \frac{R\theta}{R'} = \frac{۶۳,۵\times۲\pi}{۶۳,۵۵}$$

روش‌های انرژی : [illegible] مساحت زیر منحنی





$dU = P\,d\delta$ جزء کار انجام شده روی میله

$$U = \int_0^{\delta_1} P\,d\delta$$ انرژی کرنشی

در صورتی که نیرو به تدریج وارد شود، به گونه‌ای که سرعت انرژی ایجاد نگردد.

چنانچه نیرو ضربه‌ای وارد شود، چون جرم جسم [illegible] دارد در اثر این ضربه دیگر [illegible].

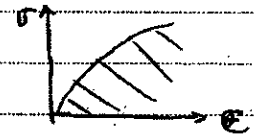
www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

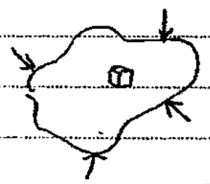
انرژی در واحد حجم مبنا :

$$\frac{U}{V} = \frac{\int_0^{\delta_1} P\,d\delta}{AL} = \int_0^{\delta_1} \frac{P}{AL}\,d\delta \qquad \frac{P}{A} = \sigma \qquad \frac{d\delta}{L} = d\varepsilon$$

$$\frac{U}{V} = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma\,d\varepsilon \rightsquigarrow$$



میزان انرژی در واحد حجم را چگالی انرژی کرنشی (u) گویند



$$u = \frac{dU}{dV}$$

اگر توزیع تنش در جسم یکنواخت باشد، چگالی یکنواخت خواهیم داشت :

$$\boxed{u = \frac{U}{V}}$$

در بارگذاری محوری در راستای x تنش خطی الاستیک در ناحیه الاستیک :

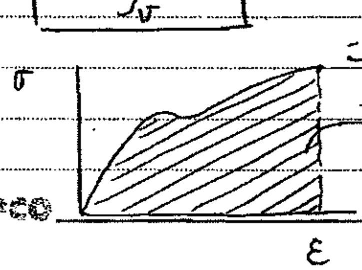
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\boxed{u = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x\,d\varepsilon_x = \frac{1}{2}E\varepsilon_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x}$$

این رابطه برای هر جزء که فقط تحت تنش σ_x قرار دارد در ناحیه خطی الاستیک صادق است، در واقع الان مورد نظر حالت الاستیک تنش است

برای محاسبه کل انرژی کرنشی که داریم :

$$\boxed{U = \int_V u\,dV}$$



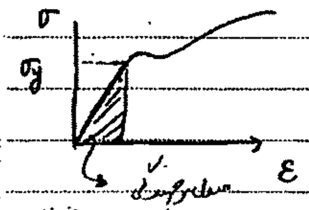
معیاری از ظرفیت جذب انرژی ماده ⟶ مدول چقرمگی

Toughness

PaPCO

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )



معمولاً برای فولادها هم سطح زیر منحنی را تا حد تسلیم در نظر بگیرند و محاسبه کنند؛

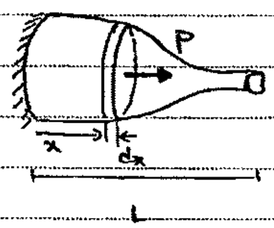
در حالت کرنش محوری [illegible]

$$u = \frac{\sigma_y^2}{2E}$$

در حالت کلی در مواردی که در طول محور تنش σ_x ایجاد می‌کند.

$$\boxed{U = \int_V u\,dV = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\,dV}$$

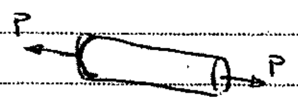
در بارگذاری محوری و در حالتی که [illegible] در هر مقطع ثابت باشد



$$\sigma_x = \frac{P}{A} \qquad dV = A\,dx$$

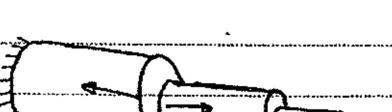
$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2A^2E}(A\,dx) = \int_0^L \frac{P^2}{2AE}\,dx$$

مثلاً برای میله با P ، A و E ثابت (تنش یکنواخت) داریم



$$\boxed{U = \frac{P^2L}{2AE}}$$

برای قطعات مختلف که در هر قسمت A ، E و P ثابت باشد (مثلاً [illegible]) می‌نویسیم



داریم جمع جبری

$$U = \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i^2 L_i}{2A_iE_i} \longrightarrow \sum$$

[illegible] باشد

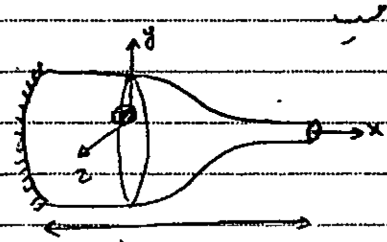
[illegible] تبدیل می‌شود.

PAPCO

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

انرژی کرنشی ناشی از خمش : در این مورد تنش های خمشی در هر مقطع ثابت نیست

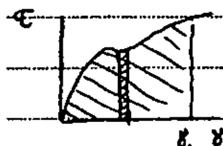


$$\sigma_x = \frac{-My}{I} \qquad dv = dA\,dx$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2}\left(\underbrace{\int_A y^2 dA}_{I}\right) dx = \boxed{\int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}}$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

در حالت برشی :

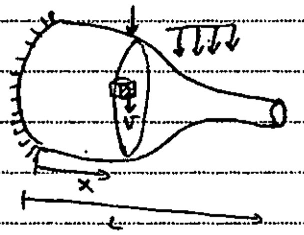


قانون هوک برشی : $\tau = G\gamma$

$du = \tau d\gamma$

$$U = \int_0^{\gamma} \tau d\gamma = \frac{1}{2} G\gamma^2 = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2}\tau\gamma$$

انرژی کرنشی در اثر تنش برشی :

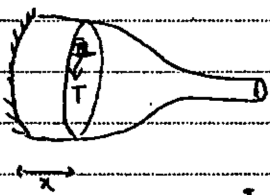


$$\tau = \frac{VQ}{It} \qquad dv = dA\,dx$$

$$U = \int_0^L \frac{V^2}{2I^2 G}\left(\int_A \frac{Q^2}{t^2} dA\right) dx$$

معمولاً سهم این انرژی در مقابل انرژی کرنشی ناشی از خمش قابل اغماض است

انرژی کرنشی در اثر پیچش مقطع دایره‌ای :



$$\tau = \frac{T\rho}{J} \qquad dv = dA\,dx$$

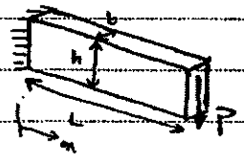
$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2}\left(\underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{J}\right) dx = \boxed{\int_0^L \frac{T^2 dx}{2GJ}}$$

مقطع ثابت: $\boxed{U = \frac{T^2 L}{2GJ}}$

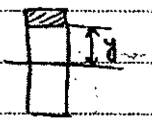
مقطع‌های متغیر: $\boxed{U = \sum \frac{T_i^2 L_i}{2G J_i}}$

PAPCO

محاسبه انرژی کرنشی برشی تیر:



$$I = \frac{1}{12} b h^3 \qquad M = P(L - x)$$
$$V = P$$



$$\frac{Q}{t} = \frac{\frac{b}{2}\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(\frac{h}{2}+y\right)}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\int_A \frac{Q^2}{t^2}\, dA = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{b}{4}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 dy$$

$$= \frac{b}{4}\left[\frac{h^4}{16} y + \frac{y^5}{5} - \frac{2h^2 y^3}{12}\right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$= \frac{b}{4}\left[\frac{h^4}{16} h + \frac{2}{5}\left(\frac{h}{2}\right)^5 - \frac{h^2}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3\right]$$

$$= \alpha b h^5 \Longrightarrow U_\tau = \frac{P^2 L}{2 I^2 G}(\alpha b h^5) = \boxed{\frac{3P^2 L}{5GA}}$$

$$U_\sigma = \int_0^L \frac{M^2\, dx}{2EI} = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$$U = U_\sigma + U_\tau = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{3P^2 L}{5GA} \Longrightarrow U = \frac{P^2 L^3}{6EI}\left(1 + \frac{18\, EI}{5GAL^2}\right)$$

$$\xrightarrow{I = \frac{1}{12} b h^3} U = \frac{P^2 L^3}{6EI}\left(1 + \frac{3Eh^2}{10\, GL^2}\right)$$

اگر $\frac{h}{L} < \frac{1}{10}$ اثر انرژی برشی قابل صرفنظر است.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

چگالی انرژی کرنشی در حالت کلی تنش: دیدیم که انرژی کرنشی حاصل از بارگذاری بر جسم به گونه‌ای بستگی دارد و فقط به وضعیت بارگذاری نهایی

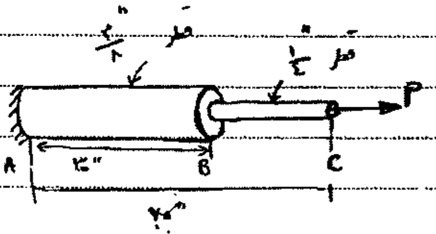
وابسته است و به ترتیب بستگی ندارد. لذا می‌توان برای هر المان در حالت بارگذاری کلی از جمع انرژی‌ها محاسبه کرد و برای حجم المان گرفت.

$$U = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y \varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z \varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xz}\gamma_{xz} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz}$$

قانون هوک → u فقط برحسب تنش
→ u برحسب کرنش

توجه: در روش ... چون روابط خطی نیست، از اصل super position نمی‌توان استفاده کرد، بلکه تابع درجه دوم انرژی کرنشی

این امکان را فراهم کرده که u را از مجموع u بارهای مختلف محاسبه کرد.



مثال: AB: آلومینیوم $\sigma_y = 50ksi$ ، $E = 10Msi$

BC: فولاد $\sigma_y = 60ksi$ ، $E = 29Msi$

U_{max}؟: ماکزیمم انرژی کرنشی بدون تغییر شکل دائمی چقدر است

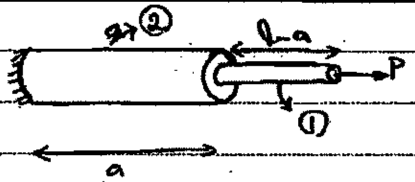
$$\begin{cases} \sigma_{AB} = \dfrac{P}{A_{AB}} = (\sigma_y)_{Al} \longrightarrow P = P_1 \\ \sigma_{BC} = \dfrac{P}{A_{BC}} = (\sigma_y)_{st} \longrightarrow P = P_2 \end{cases} \Rightarrow P_{max} = \min\{P_1, P_2\}$$

$$U = \sum_{i=1}^{2} \frac{P_i^2 L_i}{2E_i A_i} = \frac{P_{max}^2}{2}\left[\left(\frac{L}{EA}\right)_{Al} + \left(\frac{L}{EA}\right)_{st}\right]$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سوال ۱: حداکثر انرژی کرنشی چقدر است؟ $A_1 < A_2$



$$U = \frac{P^2}{2E}\left(\frac{l-a}{A_1} + \frac{a}{A_2}\right)$$

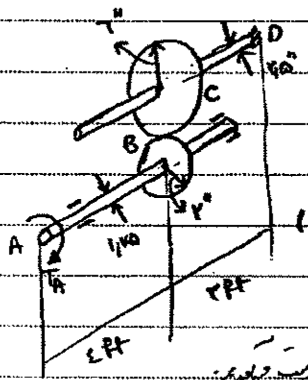
مشخص است که چون $A_1 < A_2$، هرچه طول قسمت نازکتر بیشتر باشد انرژی بیشتری ذخیره می‌شود

لذا U_{max} برای $a=0$ یعنی وقتی تمام میله از مقطع کوچک باشد

$P = \sigma_y A_1$

$$U = \frac{\sigma_y^2}{2E}\left[A_1(l-a) + \frac{A_1^2}{A_2}a\right]$$

سوال ۲: $T_A = 12.5$ kip.in



$G = 11.5$ MPa

$U = ?$ (انرژی کرنشی)

تحت بارگذاری نشان داده شده، هم پیچش داریم و هم خمش، از خمش صرف نظر می‌کنیم

چرخ‌دنده‌ها ... به طور ... در محل ... انرژی ... پیچش را حساب خواهیم

گشتاور پیچشی در T_A ... گشتاور پیچشی ... در طول ... ABCD ثابت

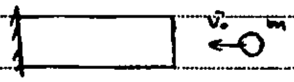
$T_{AB} = T_A$ $\qquad$ $P = T\omega$ ثابت

$T_{CD} = \frac{r_C}{r_B} T_A$ $\qquad$ $U_T = \left(\frac{T^2 L}{2GJ}\right)_{AB} + \left(\frac{T^2 L}{2GJ}\right)_{CD}$

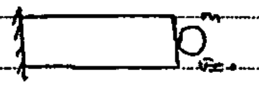
www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادل‌سازی بارگذاری ضربه‌ای :



فرض کنید گوله‌ای با سرعت اولیه به میله برخورد کرده و متوقف می‌شود.

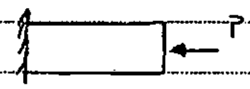


فرضیات : کل انرژی ضربه بصورت انرژی کرنشی در میله ذخیره شده و اتلاف انرژی نداریم.

ضربه کل جسم را یکباره تحت تاثیر قرار می‌دهد.

$U_m = \frac{1}{2} m V_0^2$ انرژی جسم ضربه زننده

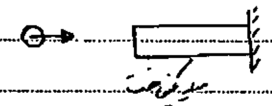
حال می‌خواهیم این ضربه را با بارگذاری معادل استاتیکی که همان اثر ضربه را دارد معادل سازی کنیم



$P_{\text{معادل}} : U$

تنش در تیر شکل : $U = U_m \longrightarrow P_{\text{معادل}}$

مسأله :



$U = U_m$

$$\frac{P^2 L}{2AE} = U_m \Longrightarrow \boxed{P = \sqrt{\frac{2AEU_m}{L}}}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} = \sqrt{\frac{2EU_m}{AL}}$$

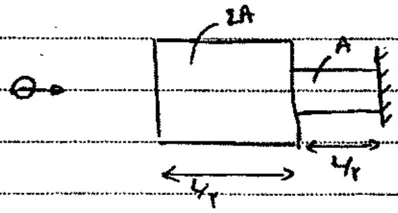
$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \sqrt{\frac{2EU_m}{V}}}$$

حالت مطلوب این است که تیر [illegible] حجم زیادی داشته باشد.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

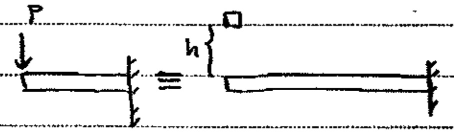
مثال ۲ :

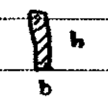


$U = U_m \longrightarrow P$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} = \sqrt{\frac{16\,U_m E}{5AL}} = \sqrt{\frac{8\,U_m E}{V}}$$

مثال ۳ :





U تنش U_m

$$\frac{I}{c^2} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h^2/4} = \frac{bh}{3}$$

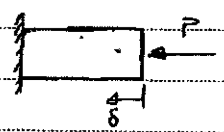
$$\sigma_{max} = \sqrt{\frac{6\,U_m E}{L\left(I/c^2\right)}} = \sqrt{\frac{18\,U_m E}{V}}$$

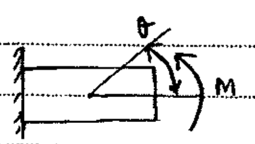
در طراحی های بارگذاری ضربه‌ای ؛ هدف ما کاهش تنش σ_{max} است.

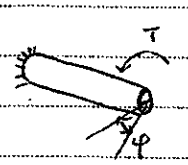
– از ماده با E پایین و σ_y بالا استفاده کنیم (رفتار ارتجاعی)

– حجم بالای ماده (حجم مؤثر) در تمام المانها توزیع یکنواخت تنش داریم (جایگزینی کرنش).

تعریف کار - انرژی : انرژی کرنشی ذخیره شده در جسم برابر است با کار نیروهای خارجی روی جسم.



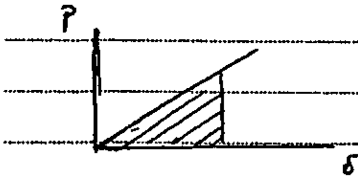




www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اما اگر قطعه با شتاب به صورت ضربه‌ای وارد می‌شود؛ بار لحظه‌ای و ... حل است

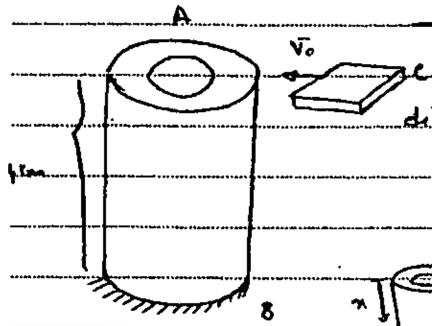


$W = \frac{1}{2} P\delta$ کار نیروی محوری

$W = \frac{1}{2} M\theta$ کار لنگر خمشی

$W = \frac{1}{2} T\varphi$ کار لنگر پیچشی

با استفاده از روش انرژی می‌توان برای یک بارگذاری مشخص تغییر مکان ... را بدست آورد.

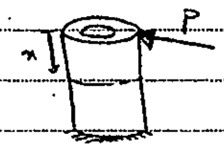


مثال: در ... AB

$d_i = 48mm \quad d_o = 80mm \quad t = 3mm \quad m_c = 4kg$

$E = 200\,GPa \quad V_{0\,max} = ? \quad \sigma_{max} = 180\,MPa$

... خمش در طول لوله وجود دارد



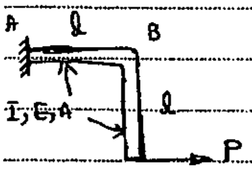
$M = Px$

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

$I = \frac{\pi}{64}(80^4 - 48^4) \times 10^{-12}\, m^4$

$U_m = \frac{1}{2} m_c v_0^2 \qquad \sigma_{max} = \frac{P.Lc}{I} = \frac{P \times (1.2 \times 40 \times 10^{-3})}{I} = 180 \times 10^6 \Rightarrow P$ ✓

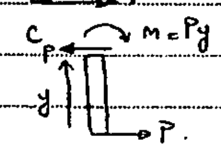
$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_c v_0^2 = \frac{P^2L^3}{6EI} \Rightarrow \boxed{V_0 = 2.55\ m/s}$$



مثال: $\Delta x_c = ?$

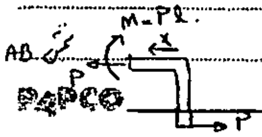
در این مثال ... انرژی کرنشی را ... جمع کرده و با کار نیروی P برابر قرار دهیم تا تغییر مکان را بدست آوریم ... فقط از خمش و محوری صرف نظر کرده می‌شود.

BC خمش



$$U = U_B + U_{AB} = \frac{P^2 l^3}{6EI} + \left(\frac{P^2 l}{2EA} + \frac{P^2 L^3}{2EI}\right)$$

AB خمش

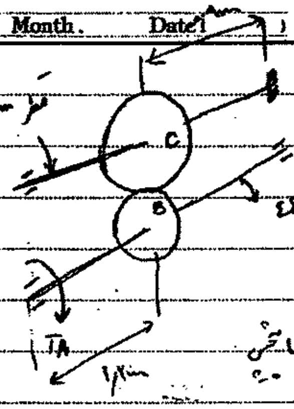


$w = \frac{1}{2} P\Delta x \qquad U = w \Rightarrow \Delta x_c = \frac{Pl}{AE} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl^3}{EI}$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date:

مسئله ۱



$r_B = 40\,mm \qquad r_C = 120\,mm$

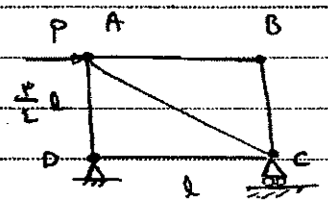
$T_A = 1500\,N.m \qquad G = 80\,GPa$

$T_{AB} = T_A = 1500\,N.m \qquad T_{CD} = \frac{r_C}{r_B} T_{AB} = 4500\,N.m$

انرژی $U = U_{AB} + U_{CD} = \frac{T_{AB}^2 L_{AB}}{2G J_{AB}} + \frac{T_{CD}^2 L_{CD}}{2G J_{CD}} = \boxed{\quad N.m}$

$$\begin{cases} W = \frac{1}{2} T_A \varphi_A \\ W = U \end{cases} \longrightarrow \boxed{\varphi_A (rad) =}$$

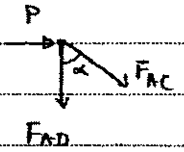
مسئله ۲ A, E ثابت $\qquad \Delta x_A = ?$



$F_{AB} = F_{CD} = 0$

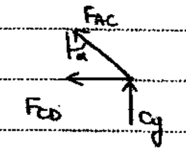
تحلیل خرپا:

$tg\,\alpha = \frac{4}{3}$



تعادل $\longrightarrow F_{AC} = \frac{-P}{\sin\alpha} = -1.25P$

$\longrightarrow F_{AD} = 0.75P$



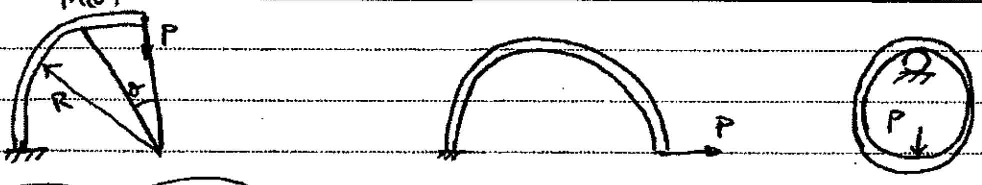
$F_{CD} = -F_{AC}\sin\alpha = P$

$U = \frac{1}{2AE}\left\{P^2L + (0.75P)^2\left(\frac{3}{4}l\right) + (-1.25P)^2\left(\frac{5}{4}l\right)\right\} = \alpha \frac{P^2L}{AE} = W = \frac{1}{2}P\Delta x_A$

$\Longrightarrow \boxed{\Delta x_A = 3.375 \frac{Pl}{AE}}$ $\qquad$ P جهت

www.vepub.com
Publish Your Mind

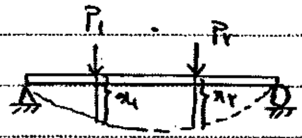
Subject.
Year. Month. Date. ( )



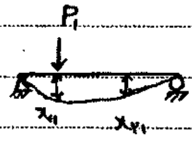
$$U = \int \frac{M^2 R\, d\theta}{2EI}$$

در خمش برای جسم‌هایی که نسبت شعاع انحنای به عمق تیر بیش از ۵ برابر باشد می‌توان از فرمول فوق استفاده کرد.

مثال: کار داخلی بارگذاری متعدد:



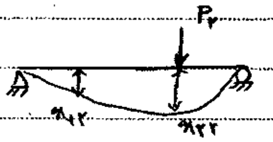
تغییر شکل به ترتیب اثر بارها یکی یکی را حساب و اصل جمع آثار را اعمال می‌کنیم و نتیجه را قرار داد.



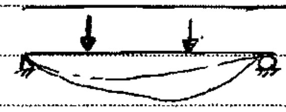
$$x_{11} = \alpha_{11} P_1$$

$$x_{21} = \alpha_{21} P_1$$

α_{ij} (ضریب تأثیر ـ نرمی): تغییر مکان در نقطه i به علت بار واحد در نقطه j.



$$x_{12} = \alpha_{12} P_2$$



$$x_{22} = \alpha_{22} P_2$$

$$x_1 = x_{11} + x_{12} = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} = \alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2$$

کار بار خارجی را به صورت حساب می‌کنیم: اول P_1 سپس P_2:

$$W_1 = \underbrace{\frac{1}{2} P_1 x_{11}}_{\text{ابتدا } P_1 \text{ اعمال}} + \underbrace{P_1 x_{12} + \frac{1}{2} P_2 x_{22}}_{\text{ورود } P_2 \text{، } P_2 \text{ تدریجی تغییر می‌کند ولی } P_1 \text{ ثابت است}} = \frac{1}{2}\alpha_{11} P_1^2 + \alpha_{12} P_1 P_2 + \frac{1}{2}\alpha_{22} P_2^2$$

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اول P_2 بعد P_1 : عکس حالت قبل

$$W_2 = \frac{1}{2}P_2 x_{22} + P_2 x_{21} + \frac{1}{2}P_1 x_{11} = \frac{1}{2}\alpha_{11}P_1^2 + \alpha_{21}P_1P_2 + \frac{1}{2}\alpha_{22}P_2^2$$

چون انرژی ذخیره شده از ترتیب بارگذاری مستقل است

$$W_1 = W_2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha_{12} = \alpha_{21}}$$ قضیه دوطرفه ماکسول

انرژی ذخیره شده = کار بار خارجی

$$\boxed{U = W_1 = W_2}$$

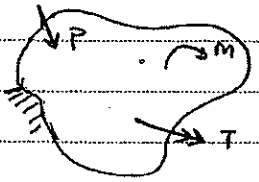
$$\frac{\partial W_1}{\partial P_1} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 = x_1$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial P_2} = \alpha_{21}P_1 + \alpha_{22}P_2 = x_2$$

یعنی با مشتق گیری از کار یا انرژی بر حسب نیرو در هر نقطه، جابجایی آن نقطه بدست می‌آید.

قضیه اول کاستیگلیانو : تغییر مکان هر نقطه در راستای نیروی وارد برابر است با مشتق انرژی نسبت به آن

بارگذاری:



$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}$$

+ : هم جهت بار

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M}$$

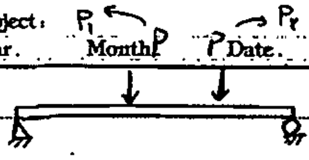
− : در خلاف جهت بار

$$\varphi = \frac{\partial U}{\partial T}$$

در مسائل اگر بارگذاری کلی باشد هر صورت بارگذاری جابجایی شود و فقط مشتق گیری ... ادامه در جلسه بعد.

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject: Year. Month Date.



زمانی که بارهای مختلف داریم باید برای بارها اسم جدا استفاده کنیم. پس از مشتق گیری از U نسبت به

بارهای مورد نظر می‌توانیم مقادیر بارها را جایگذاری کنیم.

$$U = U(P_1, P_2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} , \frac{\partial U}{\partial P_2} \xrightarrow{\text{پس جایگذاری}} P_1 = P_2 = P$$

انرژی U از روابط انتگرال بدست می‌آید.

$$U = \int \frac{P^2 \, dx}{2EA} \qquad U = \int \frac{M^2 \, dx}{2EI} \qquad U = \int \frac{T^2 \, dx}{2GJ}$$

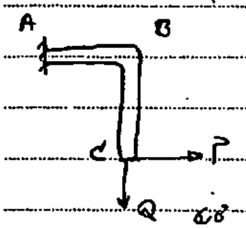
همیشه ابتدا مشتق گیری نسبت به بار، قبل از انتگرال گیری انجام شود.

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} \rightsquigarrow \frac{\partial U}{\partial P_i} = \int \frac{P \left(\frac{\partial P}{\partial P_i}\right) dx}{EA}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \int \frac{M \left(\frac{\partial M}{\partial P_i}\right)}{EI} dx$$

اگر در نقطه‌ای از سازه که در راستای آن تغییر مکان را باید حساب کنیم، در آن نقطه در راستای مورد نظر باری موجود نباشد، یک بار مجازی در آن نقطه

و در راستا قرار می‌دهیم، U را حساب می‌کنیم، نسبت به بار مجازی مشتق می‌گیریم و سپس بار مجازی را صفر قرار می‌دهیم.



$$U = U(P, Q) \qquad \Delta y_c = ?$$

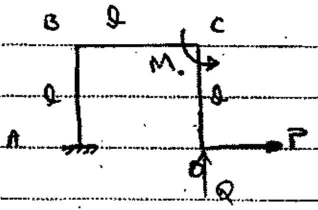
مجازی

$$\Delta y_c = \left. \frac{\partial U}{\partial Q} \right|_{Q=0}$$

همیشه فقط یک بار U را تشکیل می‌دهیم.

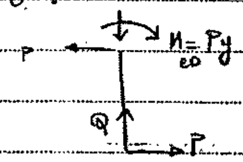
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: منحنی خمش EI
(قطعات خمشی در نظر گرفته شود)



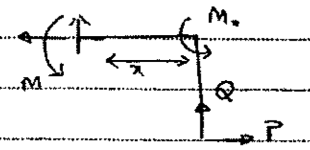
$\theta_C = ?$ $\Delta y_D = ?$

CD بخش:



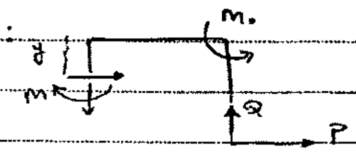
$M_{CD} = Py$

BC بخش:



$M_{BC} = Pl + Qx + M_0$

AB بخش:



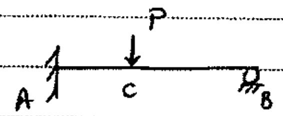
$M_{AB} = M_0 + QL + P(l-y)$

$U = U_{CD} + U_{BC} + U_{AB}$

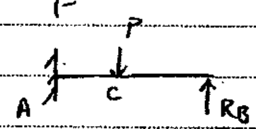
$$\Delta y_D = \left.\frac{\partial U}{\partial Q}\right|_{Q=M_0=0} = 0 + \int_0^l \frac{\overbrace{(Pl)}^{m}\overbrace{(x)}^{\frac{\partial m}{\partial Q}}}{EI}\,dx + \int_0^l \frac{\overbrace{P(l-y)}^{m}\overbrace{(L)}^{\frac{\partial m}{\partial Q}}}{EI}\,dy$$

$$\theta_C = \left.\frac{\partial U}{\partial M_0}\right|_{Q=M_0=0}$$

نکته: وقتی که سازه نامعین است تکیه‌گاه را حذف می‌کنیم و به جای آن واکنش را قرار می‌دهیم و با توجه به اینکه تغییر مکان در تکیه‌گاه صفر است



$\equiv$



خواهیم:

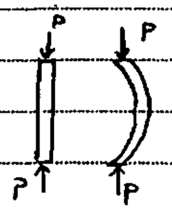
$$\Delta y_B = \frac{\partial U}{\partial R_B} = 0$$

PAPCO

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

کمانش ستون‌ها: وقتی بارگذاری از حد معینی تجاوز کند بصورت ناگهانی از حالت تعادل پایدار خارج شده و ناپایداری ستون را به همراه خواهد داشت



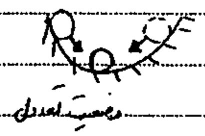
$P < P_{cr}$ ⟵ ستون مستقیم و پایدار است

$P > P_{cr}$ ⟵ ستون کمانش کرده و ناپایدار است

کمانش: به وضع ناپایداری وضعیت مستقیم ستون است و حالت وضعیت نامطلوب و ناپایدار است

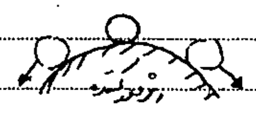
پایداری تعادل (با استفاده از مثال توپ):

برای درک بهتر پایداری مثالی را می‌آوریم (مثال توپ)



نیروی بازگرداننده

⟵ تعادل پایدار



⟵ تعادل ناپایدار

⟵ تعادل بی‌تفاوت

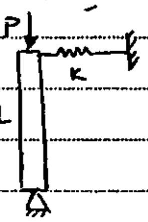
معیار پایداری و ناپایداری یک وضع تعادل: باید آن را کمی از وضعیت تعادل منحرف کنیم و ببینیم که نیروی بازگرداننده غالب است یا نیروی دورکننده.

در حالت حدی «تعادل بی‌تفاوت» بار بحرانی ستون بدست می‌آید.

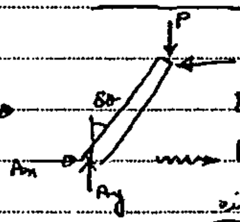
بار بحرانی سیستم‌های متشکل از میله‌های صلب و فنرها: در این حالت وضعیت فنریت متمرکز در فنر است.

$P_{cr} = 0$

اگر جزئی انحرافی به ستون اعمال کنیم از حالت تعادل خارج می‌گردد



انحراف ⟶



$\Sigma M_A = 0$

⟵ $PL\delta\theta = KL^2\delta\theta$

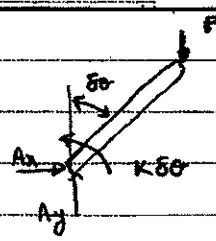
نیروی بازگرداننده نیروی دورکننده

$\Rightarrow \boxed{P_{cr} = KL}$

PapCo

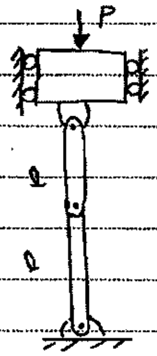
www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

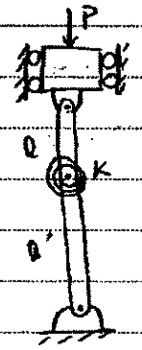


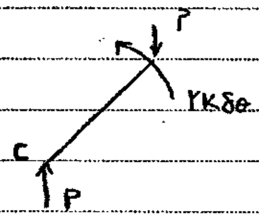
$$\sum M_A = 0 \Longrightarrow PL\delta\theta = K\delta\theta$$

$$\Longrightarrow P_{cr} = \frac{K}{L}$$

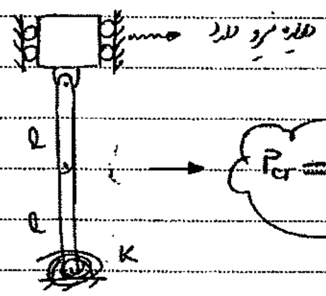


$$\longrightarrow \boxed{P_{cr} = 0}$$

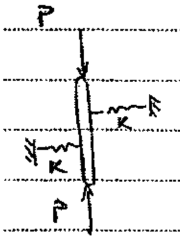




$$\sum M_c = 0 \longrightarrow P_{cr} = \frac{2K}{L}$$



$$\longrightarrow P_{cr} = \frac{K}{2L}$$

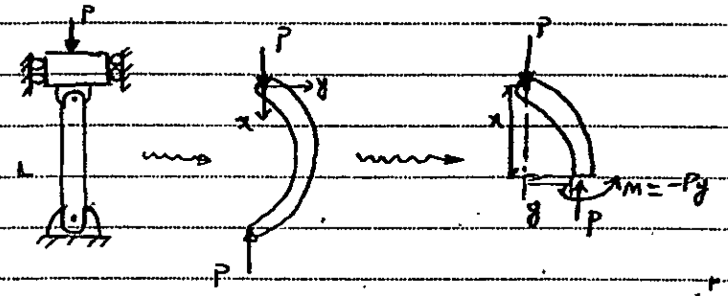


$\longrightarrow$ [illegible] $\longrightarrow$ $P =$ [illegible]

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject :
Year . Month . Date . / /

بار بحرانی ستون دو سر مفصل : تئوری کمانش اویلر



تئوری تیرها : $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0$, $\lambda^2 = \frac{P}{EI}$

$y = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$

$y(0) = 0 \longrightarrow A = 0$

$y(L) = 0 \longrightarrow B\sin\lambda L = 0 \longrightarrow \begin{cases} B = 0 \longrightarrow \text{جواب بدیهی} \\ \text{یا} \\ \sin\lambda L = 0 \longrightarrow \lambda L = k\pi \Rightarrow \lambda^2 = \frac{k^2\pi^2}{L^2} \end{cases}$

$$P = \frac{k^2\pi^2 EI}{L^2} \xrightarrow[k=1]{\text{کمترین مقدار برای}} P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$ فرمول اویلر

توجه داشته باشید مقدار نیم موج‌ها دست ما نیست و ما مقدار k را کنترل کنیم .

اگر شرایط دو سر تکیه‌گاه مفصلی برای هر دو محور یکسان باشد (مقطع مثلاً چیزی) I را به عنوان I_{min} انتخاب می‌کنیم که حالت بحرانی‌تر است

کمانش حول محور ضعیف $(I = I_{min})$ دوران حول محور قوی‌تر ضعیف

در واقعیت مقدار P_{cr} کمتر از مقدار محاسبه شده است چرا که ستون به صورت طبیعی کمی انحنا و انحراف اولیه دارد

Papco

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

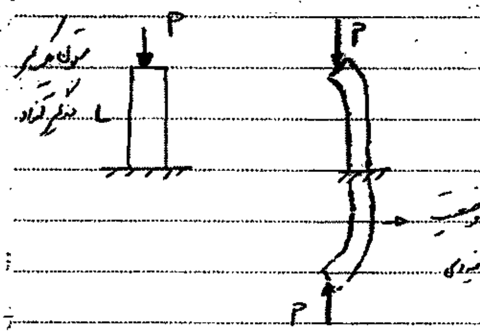
تنش در ستون مستقیم در حالت بحرانی

۲. بستگی به [illegible] سطح

$$\sigma_{cr}=\frac{P_{cr}}{A}=\frac{\pi^2EI}{L^2A}=\boxed{\frac{\pi^2E}{(L/r)^2}}$$

$$r=\sqrt{\frac{I}{K}}$$

L/r : ضریب لاغری ستون

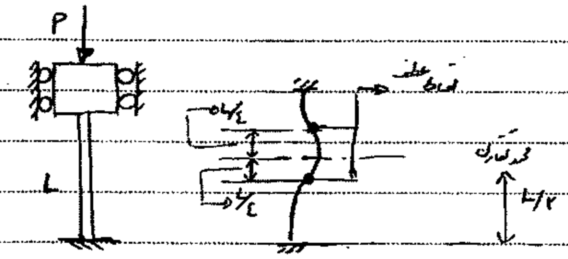


در حالت بالا [illegible] ستون [illegible] [illegible] که طول کمانش [illegible]

که طول کمانش دو برابر طول [illegible]

$$L_e=2L$$

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{L_e^2}=\frac{\pi^2EI}{(2L)^2}$$



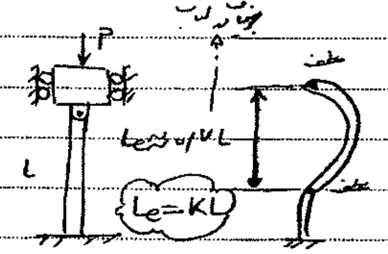
ستون دو سر گیردار :

[illegible] ستون [illegible] با طول $L_e=\frac{L}{2}$ در عطف

در صورتی که چند نقطه عطف وجود داشته باشد بزرگترین فاصله بین دو عطف را L_e در نظر می‌گیریم تا P_{cr} [illegible]

[illegible] که [illegible] بیشتر بود [illegible] کمانش می‌کند.

ستون یک سر گیردار [illegible] :

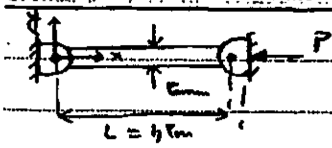


$$\boxed{L_e=KL} \rightarrow K=\begin{cases}1\\2\\\frac{1}{2}\\0.7\end{cases}$$

PAPCO

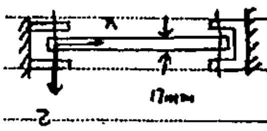
www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مسئله: ستون Al) $P = ?$ ← ضریب اطمینان $= ۲٫۸$

کمانش حول xy: ستون دو سر لولا $I = I_z$



کمانش حول xz: ستون دو سر گیردار $I = I_y$

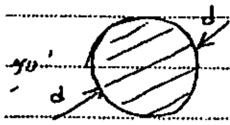
xy حول: $(P_{cr})_{xy} = \dfrac{\pi^2 E\left(\frac{1}{12}\times 12\times 6^3\right)}{(1200)^2}$, $L_e = L$

xz حول: $(P_{cr})_{xz} = \dfrac{\pi^2 E\left(\frac{1}{12}\times 6\times 12^3\right)}{(600)^2}$, $L_e = L/2$

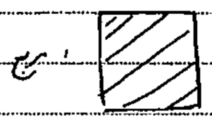
$P_{cr} = \min\{(P_{cr})_{xy}, (P_{cr})_{xz}\} =$ $\qquad P = \dfrac{P_{cr}}{SF} =$

مسئله: می‌خواهیم یک ستون با طول مشخص و سطح مقطع ثابت را طوری طراحی کنیم که P_{cr} حداکثر باشد. مقطع ستون باید چه شکلی باشد؟ (دایره یا مربع)

$A: const$ ← برای اینکه بار بیشتری تحمل کند I باید بیشتر باشد [illegible]



دایره

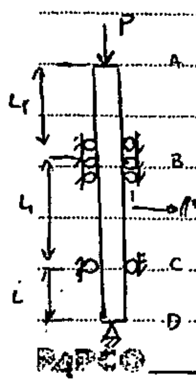


مربع

$A = \frac{\pi}{4} d^2$ $\qquad A = a^2$

$I = \frac{\pi}{64} d^4$ $\qquad I = \frac{1}{12} a^4 = \frac{A^2}{12}$

$I = \frac{A^2}{4\pi}$ $\qquad$ مقطع مربع بهتر است ← $I_{مربع} > I_{دایره}$



مسئله: کمانش ستون شکل ... طول‌ها چقدر باشند تا P_{cr} حداکثر شود؟

در حالتی که P_{cr} در هر قسمت ... P_{cr} بیشتر [illegible]

(هر قسمت ... [illegible])

P_{cr} برای هر قسمت باید برابر باشد یعنی طول موثر L_e باید برابر شود

$L_e(CD) = L_e(BC) = L_e(AB)$

$L = 0.7 L_1 = 2L_2$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

PAPCO

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$t_{A/B} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{x M(x)}{EI}\, dx = \frac{۱٤۹۱٫۷٦}{EI}$$

$$y_A = t_{A/B} + \theta_B \times |AB| = \boxed{۲۷٫۲۸\ mm}$$

$$\theta_{B/D} = \frac{۳۲٫۱٤}{EI} \qquad \theta_D = \theta_{BD} - \theta_B = \frac{۲۰٫۲۱}{EI} \Rightarrow \theta_D = ۰٫۰۱۵۳\ rad$$

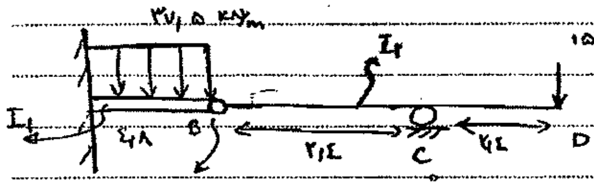
$$\boxed{y_D = ۳۲٫۵۲\ mm}$$

مثال:

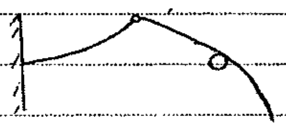
$E = ۲٥\ KPa$

$I_1 = ۱٫٥٦ \times 10^9\ mm^4$

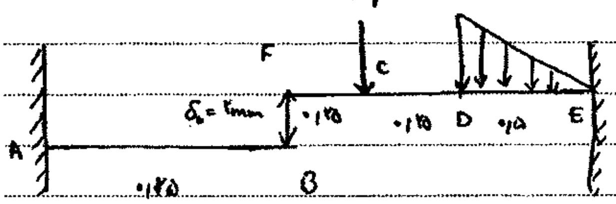
$I_2 = ۱٫۱۷ \times 10^9\ mm^4$



خیز B و D بیابید.

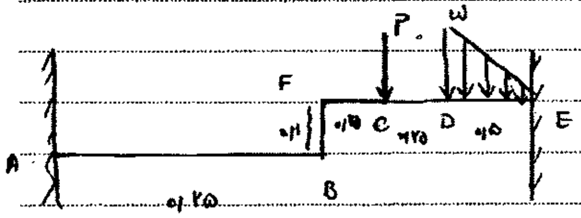


Homework:



$P = ۵KN \qquad W = ۱۲KN$

$E = ۲۰۰ GPa$



$P = ۵KN \qquad W = ۱۲KN$

مطلوبست ۱ـ عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

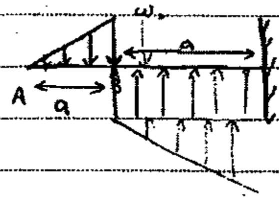
۲ـ جابجایی نقطه D

۳ـ شیب نقاط B و E

www.vapub.com
Publish Your Mind

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ادامه:



$$w_{(x)} = \frac{w_0}{a}\langle x\rangle^1 - w_0\langle x-a\rangle^0 - \frac{w_0}{a}\langle x-a\rangle^1$$

$$V_{(x)} = \frac{-w_0}{2a}\langle x\rangle^2 + w_0\langle x-a\rangle^1 + \frac{w_0}{2a}\langle x-a\rangle^2$$

$$\Rightarrow M_{(x)} = \frac{-w_0}{6a}\langle x\rangle^3 + \frac{w_0}{2}\langle x-a\rangle^2 + \frac{w_0}{6a}\langle x-a\rangle^3$$

$$\Rightarrow EI\theta_{(x)} = \frac{-w_0}{24a}\langle x\rangle^4 + \frac{w_0}{6}\langle x-a\rangle^3 + \frac{w_0}{24a}\langle x-a\rangle^4 + C_1$$

$$\Rightarrow EIy_{(x)} = \frac{-w_0}{120a}\langle x\rangle^5 + \frac{w_0}{24}\langle x-a\rangle^4 + \frac{w_0}{120a}\langle x-a\rangle^5 + C_1x + C_2$$

$$\theta(2a) = 0 \Rightarrow \frac{-2w_0}{3}a^3 + \frac{w_0}{6}a^3 + \frac{w_0}{24}a^3 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{16w_0 - 4w_0 - w_0}{24}a^3$$

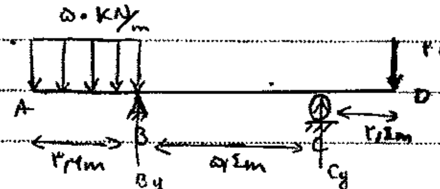
$$\boxed{\Rightarrow C_1 = \frac{11}{24}w_0a^3}$$

$$y(2a) = 0 \Rightarrow \frac{-w_0}{120a}\times 32a^5 + \frac{w_0}{24}a^4 + \frac{w_0}{120a}a^5 + \frac{11}{24}w_0a^3\times 2a + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = \checkmark$$

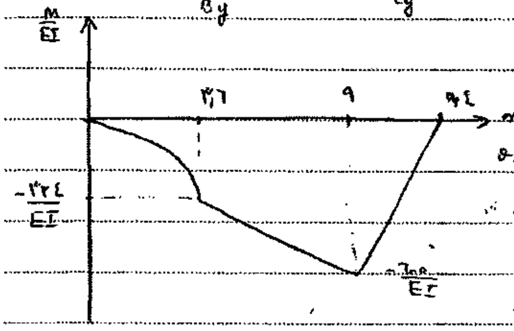
مثال: شیب و خیز مطلق در A و D ؟

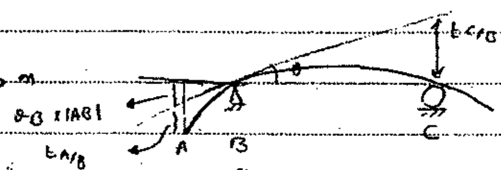
$I = 15000$
$E = 9.77\times 10^9$



$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow C_y = 301.11 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y = 128.889 \text{ kN}$$





$$t_{C/B} = \int_{x_C}^{x_B} \frac{x\,M(x)}{EI}\,dx = \frac{6065.28}{EI}$$

$$\theta_B \simeq \theta_B = \frac{t_{C/B}}{5.4} = \frac{1123.2}{EI} \Rightarrow \theta_B =$$

$$\theta_{A/B} = \theta_A - \theta_B = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M(x)}{EI}\,dx = \frac{388.8}{EI} \Rightarrow \underline{\theta_A = 0.011 \text{ rad}}$$