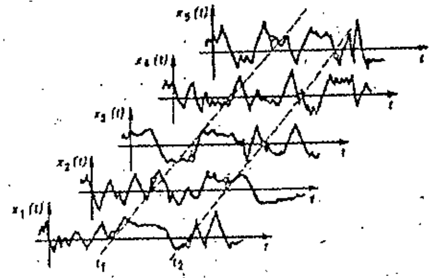
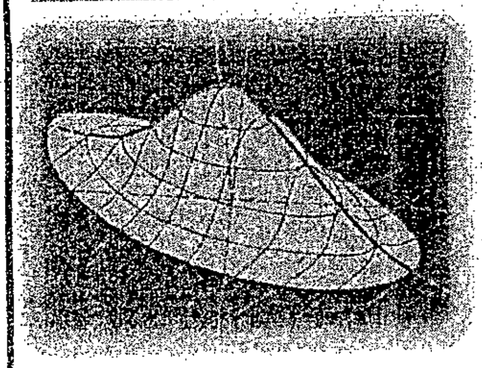
دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات اصفهان



ارتعاشات تصادفی

Random Vibrations

Probabilistic and Stochastic Methods in Structural Dynamics



Instructor: Dr. Reza Akbari

Course outline

ارتعاشات تصادفی

۱ـ تفاوت پدیده های ارتعاشی قطعی و تصادفی
۲ـ یادآوری تئوری احتمالات و خواص توابع تصادفی
۳ـ بررسی انواع توزیع احتمالات
۴ـ فرآیندهای تصادفی
۵ـ طیف های پیوسته و مجزای نیرو
۶ـ حرکت تصادفی تکیه گاهها
۷ـ توزیع احتمالات رایله و کاربرد آن
۸ـ بررسی مقاومت هنگام تأثیر نیروهای تصادفی
۹ـ واکنش تصادفی سیستم های یکدرجه آزادی
۱۰ـ واکنش تصادفی سیستم های چند درجه آزادی
۱۱ـ بررسی مسئله غیرخطی در حالت ارتعاشات تصادفی

(دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات اصفهان، جزوه درس ارتعاشات تصادفی، گرد آوری و تنظیم: دکتر رضا اکبری، تابستان ۱۳۹۲)

References

1-Structural Dynamics and Vibration Theory

- R.W. Clough & J. Penzin, 'Dynamics of Structure', CSI, 2003
- A.K. Chopra, 'Dynamics of Structure', Pearson, Prentice Hall, 2012.
- Inman D.J., 'Engineering Vibration', Prentice Hall, 1994.
- Meirovitch L., 'Fundamentals of vibrations', McGrawHill, 2001.

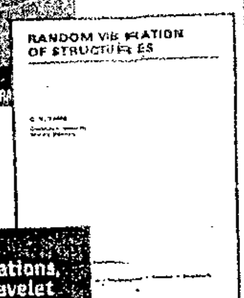
2-Random Vibrations

- Lutes L.D. and Sarkani S., 'Random Vibrations: Analysis of structural and mechanical systems', Elsevier, 2004.
- Soong T.T. and Grigoriu, 'Random vibration of mechanical and structural systems', Prentice Hall, 1993.
- Newland D.E., 'An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis', Longman, 1975/1984/1993.
- Wirsching P.H. and Paez T.L. and Ortiz K. 'Random vibrations: Theory and Practice', John Wiley and sons, 1995.
- C. Y. Yang, 'Random Vibration of Structures', John Wiley and sons, 1986.
- Bendat J.S. and Piersol A.G., 'Random data analysis and measurement procedures', Wiley Series in Probability and Statistics, 3rd Edition, 2004.

Main References

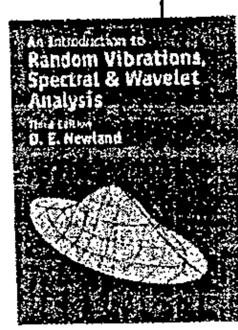
- Lutes L.D. and Sarkani S., 'Random Vibrations: Analysis of structural and mechanical systems', Elsevier, 2004.

- C. Y. Yang, 'Random Vibration of Structures', John Wiley and sons, 1986. (Course book)



- Newland D.E., 'An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis', Longman, 1975/1984/1993. (Course book)

ترجمه این کتاب: ارتعاشات اتفاقی و تحلیل طیفی
ترجمه بهرامی و نوری خاجوی، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر



Purpose of Course

- ❑ To supply the students with the basic understanding of concepts, theories and methods of stochastic dynamics.

- ❑ Further, to understand and carry out stochastic analyses in terms of the low order statistical moments of linear structures exposed to random external dynamic loads or initial values.

Motivation

Civil engineering structures are exposed to:
Wind, Waves, Earthquakes and Traffic, which <u>are random in nature</u>.

This means that:

"the exact variation of the loads with time and spatial position on the structure cannot be specified in the usual deterministic meaning."

Instead, these loads are only known in terms of certain statistical measures such as <u>mean values, variances, spectral density functions</u> etc.
"As a consequence, the dynamic response of structure becomes random as well"

Based on a statistical description of the loads, the corresponding statistical measures of the response quantities such as stresses, deflections etc. are determined by the stochastic dynamic analysis.

Finally, **based on the determined statistical measures** a reliability analysis of the structure is performed to decide whether or not it fulfills the specified safety requirements (reliability analysis not covered here).

Aim

At the end of the course the student is supposed to posses knowledge and understanding of all concepts, theories and methods covered in the course.

Further that the student is able to apply the theories to **the dynamic analysis of stochastic exposed simple linear structures.**

In this course, only "Linear Stochastic Dynamics" is covered.

Prerequisites

- Knowledge of **fundamental structural dynamics for linear structures, including modal analysis** and **frequency and impulse response of SDOF and MDOF systems.**

- Knowledge of **fundamental probability theory** for random variables and random vectors.

Application

Where do we use random vibration analysis?

- ❑ Acquiring random data
- ❑ Estimating parameters of a structural system subjected to random excitation based on measured excitations and responses
- ❑ Designing structural and mechanical systems for random Environments
- ❑ Modifying a structure to resist random vibrations
- ❑ Structural health monitoring

Evaluation and Grading

There are four evaluation criteria:

1- **Homework Assignments (10%)**
-80 exercises in 13 series
-each home-work should be delivered one week after assignment

2- **Term paper (0-10%), *Arbitrary***
-a subject on application of random vibration in structural engineering
-a Powerpoint file should be prepared and presented at the class in 15 min
-a brief report should be delivered
-deadline = before the last session of the semester

3- **Project (30%)**
-deadline = one month after the end of the semester (Will not be extended)

4- **Final Exam (50-60%)**

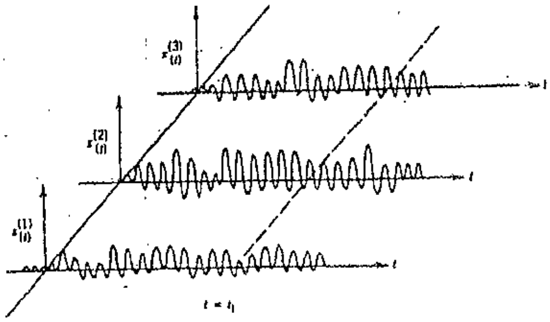
It is necessary to attend every class. Absence has negative effect.

Introduction

Random vs Stochastic?

- Both have same superficial meaning.
- Random is usually used for variables (Random variable). **Stochastic** is usually used for processes (Stochastic process).

➔ The dynamic response at one instant of time t is a random variable $x(t)$ but that the uncertain history of response over a range of time values is a stochastic process $\{x(t)\}$.



Introduction

Random vibrations

- In the course of **Structural Dynamics**, various types of excitations is considered, all of them are **deterministic** (functions of time)➔ the responses of structure are **deterministic** (functions of time).
- In practice, many forms of excitations are described by their statistical properties, then the system is said to be under **random vibration** ➔ the corresponding response is also described statistically ➔We can predict the probability that the response in the structure exceeds a specified level.
- The subject of random vibrations is concerned with finding out how the statistical (or average) characteristics of the motion of a randomly excited system depend on the statistics of the excitation and the dynamic properties of the vibrating system.

تابع چگالی احتمال

Probability density function

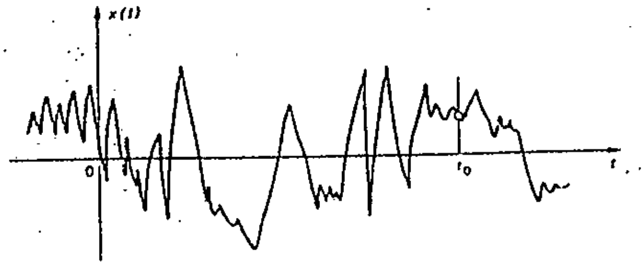
مقدمه

شکل زیر بخشی از تاریخچه زمانی یک سیستم تصادفی است. **جابجایی x در برابر زمان t.**

از آنجا که حرکت تصادفی است، مقدار مطلق x برای هر انتخاب زمانی $t = t_0$ بطور دقیق قابل پیشبینی نیست.

بیشترین کاری که می‌توانیم انجام دهیم اینست که احتمال اینکه x در t_0 در یک بازه یا محدوده مشخص قرار گیرد را پیدا کنیم.

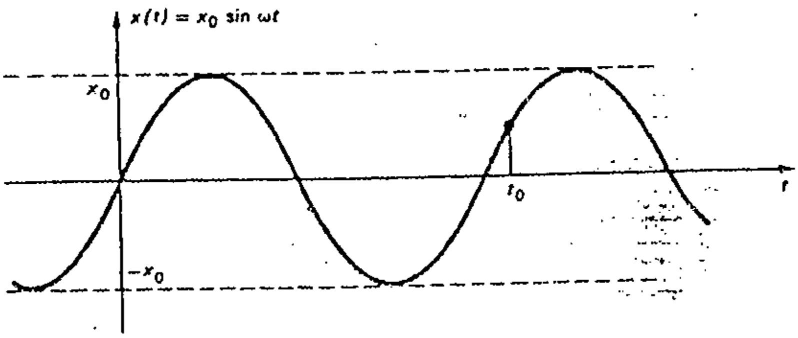
موضوع این احتمال در قلب تئوری ارتعاشات تصادفی قرار دارد و در ابتدا برخی از تئوریهای پایه احتمال مورد بررسی قرار می‌گیرد.



ابتدا فرض کنید با یک تاریخچه زمانی غیر تصادفی یا تعیّنی روبرو هستیم، مثلاً یک فرم سینوسی

در این حالت می توانیم مقدار دقیق x را برای هر مقدار داده شده t تعیین کنیم.

بنابراین می توانیم کسر یا قسمتی از زمان که شکل موج بین دو تراز x قرار گیرد را پیدا کنیم.

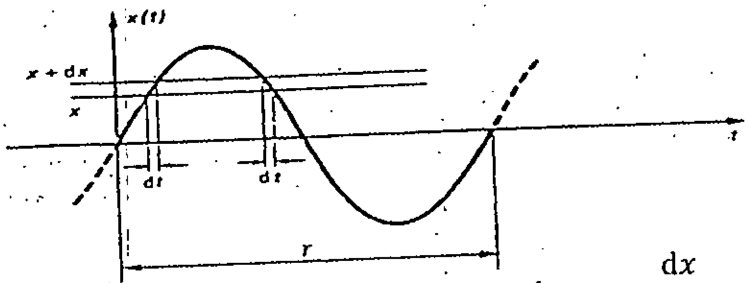


با توجه به شکل زیر، در یک سیکل کامل، $x(t)$ برای دو بازه زمانی dt بین نوارهای x تا $x + dx$ قرار می گیرد. اگر:

$$x = x_0 \sin \omega t$$

خواهیم داشت:

$$dx = x_0 \omega \cos \omega t \, dt$$



بنابراین:

$$dt = \frac{dx}{x_0 \omega \cos \omega t}$$

با جایگزاری:

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}$$

خواهیم داشت:

$$dt = \frac{dx}{x_0 \omega \sqrt{1 - x^2 / x_0^2}}$$

کسری از زمان در هر سیکل که $x(t)$ بین دو مقدار x و $x + dx$ قرار می گیرد برابر است با:

$$\frac{2dt}{T} = \frac{2dx}{\omega T \sqrt{x_0^2 - x^2}}$$

2π

با قرار دادن:

$\omega = 2\pi f$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

داریم:

$$\frac{2dt}{T} = \frac{dx}{\pi \sqrt{x_0^2 - x^2}}$$

بنابراین، برای هر سیکل کامل، این رابطه در واقع سهم یا کسری از زمان سپری شده که $x(t)$ بین دو مقدار x و $x + dx$ قرار می گیرد را به ما خواهد داد.

$$\frac{2dt}{T} = \frac{dx}{\pi \sqrt{x_0^2 - x^2}}$$

ابتدا فرض کنید مقدار x را در $t = t_0$ می‌خواهیم. چون $x(t)$ یک موج سینوسی و تعینی است، با انتخاب t_0 بلافاصله $x(t_0)$ بدست می آید.

حالا فرض کنید t_0 بصورت دقیق معلوم نیست. فقط می‌توانیم بگوییم که روی محور زمان واقع است. در این حالت نمی‌توان گفت $x(t_0)$ چقدر است. **فقط می‌توان پیشبینی کرد که چه مقداری میتواند باشد.**

اگر t_0 کاملاً بصورت اتفاقی انتخاب شود، t_0 هر جایی در یک سیکل کامل قرار می‌گیرد (فرض کنید زمان شروع و انتها نداریم و موج از منفی تا مثبت بینهایت گسترش دارد).

شانس یا احتمال اینکه $x(t_0)$ بین x و $x + \mathrm{d}x$ قرار گیرد فقط بستگی به این دارد که $x(t)$ چه مدت در هر سیکل بین x و $x + \mathrm{d}x$ قرار دارد.

بنابراین احتمال اینکه $x \le x(t_0) \le x + \mathrm{d}x$ باشد برابر است با:

$\mathrm{Prob}(x \le x(t_0) \le x + \mathrm{d}x) =$ کسری از زمان در هر سیکل که $x(t)$ بین x و $x + \mathrm{d}x$ قرار می گیرد

و برابر است با:

$$= \frac{2\mathrm{d}t}{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{d}x}{\pi\sqrt{x_0^2 - x^2}} \quad \text{for} \quad -x_0 \le x \le x_0$$

در این رابطه، x_0 دامنه حرکت می باشد.

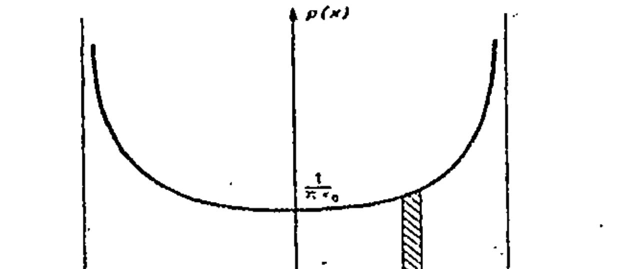
تابع چگالی احتمال مرتبه اول $p(x)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathrm{Prob}(x \le x(t_0) \le x + \mathrm{d}x) = p(x)\mathrm{d}x$$

بنابراین، در این حالت:

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x_0^2 - x^2}} \quad \text{for} \quad -x_0 \le x \le x_0$$

The *first-order probability density function*



احتمال اینکه $x(t_0)$ در بازه x تا $x + \mathrm{d}x$ قرار گیرد برابر سطح هاشور زده در زیر منحنی است و احتمال اینکه $x(t_0)$ هر مقداری بین $-x_0$ تا $+x_0$ را بگیرد برابر تمام سطح زیر منحنی است.

یعنی:

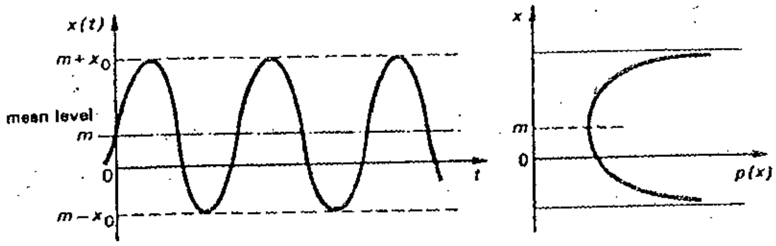
$$\mathrm{Prob}(-x_0 \le x(t_0) \le x_0) = \int_{-x_0}^{x_0} p(x)\mathrm{d}x = \int_{-x_0}^{x_0} \frac{1}{\pi\sqrt{x_0^2 - x^2}}\mathrm{d}x$$

برای موج سینوسی این مثال، هر مقداری از x با انتخاب تصادفی t_0، حتماً در محدوده $-x_0$ تا $+x_0$ قرار می گیرد. بنابراین جواب انتگرال بالا برابر واحد می‌باشد زیرا احتمال قطعیت برابر ۱ یا ۱۰۰٪ می باشد.

همچنین، احتمال اینکه $x(t_0)$ مقادیری خارج از محدوده $-x_0$ تا $+x_0$ را بگیرد برابر صفر است زیرا دامنه موج سینوسی فقط بین این دو مقدار قرار دارد.

تابع چگالی احتمال $p(x)$ چگالی توزیع مقادیر x را نشان می‌دهد.

از آنجا که بیشتر زمان یک موج سینوسی در حوالی نقاط پیک آن، در مقایسه با مقدار میانگین آن، سپری می‌شود، تابع چگالی احتمال آن در نزدیک نقاط پیک حرکت افزایش می‌یابد و در نقطه میانگین حداقل می‌باشد.

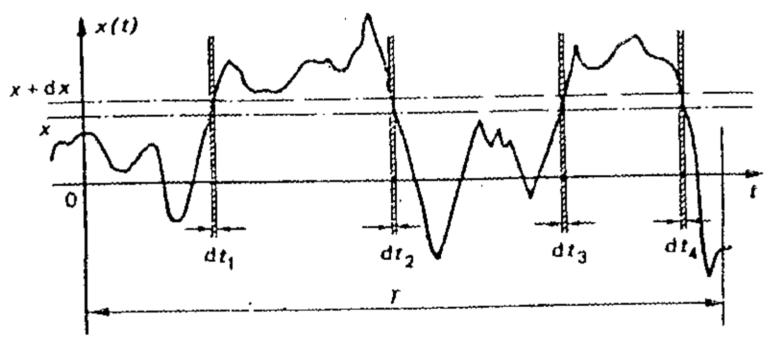


حالا فرض کنید $x(t)$ موج سینوسی نیست و بیانگر یک فرایند تصادفی است. یعنی مقادیر آن صراحتاً قابل پیشبینی نیست. البته وقتی اتفاق افتاد مقادیر آن بطور دقیق قابل اندازه گیری است. مثلاً فرض کنید $x(t)$ رکورد دقیق یا تاریخچه زمانی برای همه زمانها تاکنون می‌باشد (مثلاً یک زلزله).

σ^2 $E(x)$

فرض کنید مشخصات آماری $x(t)$ (میانگین و انحراف معیار و غیره) با زمان تغییر نمی‌کنند، بنابراین می‌توانیم از این تاریخچه زمانی برای محاسبه تابع چگالی احتمال $x(t)$ مشابه آنچه برای توابع تعینی گفته شد استفاده کنیم.

شکل زیر، نمونه تاریخچه زمانی برای یک فرآیند تصادفی است که زمانهایی که در آن $x \leq x(t) \leq x + \mathrm{d}x$ قرار دارد، با نوارهای هاشور زده مشخص شده است.



در طی بازه زمانی T، $x(t)$ به مدت $(\mathrm{d}t_1 + \mathrm{d}t_2 + \mathrm{d}t_3 + \mathrm{d}t_4)$ در نواری با مقادیر x تا $x + dx$ قرار دارد.

بنابراین می‌توان گفت اگر T به اندازه کافی طولانی باشد، تابع چگالی احتمال $p(x)$ برابر است با:

$p(x)\mathrm{d}x =$ **کسری از کل زمان سپری شده که $x(t)$ بین x و $x + \mathrm{d}x$ قرار می گیرد**

و برابر است با:

$$= \frac{(\mathrm{d}t_1 + \mathrm{d}t_2 + \mathrm{d}t_3 + \cdots)}{T} = \frac{\sum \mathrm{d}t}{T}$$

برای اینکه این رابطه درست باشد، T باید متناهی باشد و مشخصات آماری تاریخچه زمانی هم نباید با زمان تغییر کند.

زمانیکه $x(t)$ یک تابع تصادفی از t باشد، از رابطه بالا نمی‌توان برای تعیین $p(x)$ استفاده کرد. در اینحالت برای هر تاریخچه زمانی نمونه داده شده، تنها کاری که میتوان کرد اینست که $p(x)$ را با تقسیم رکورد نمونه به سطوح مختلف و اندازه‌گیری زمان صرف شده در هر نوار (با مقادیر x) و استفاده از رابطه قبل اندازه‌گیری کنیم.

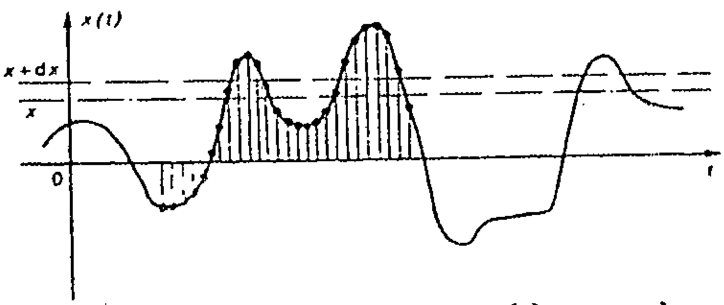
یک تحلیلگر احتمالاتی این کار را برای ما به سرعت انجام می‌دهد.

اگر N مقدار نمونه داشته باشیم، مطابق شکل، $\mathrm{d}n$ از این مقادیر در نوار x و $x + \mathrm{d}x$ قرار می‌گیرند و متعاقباً تابع چگالی احتمال برابر است با:

کسری از کل تعداد نمونه‌هایی که در نوار x و $x + \mathrm{d}x$ قرار می‌گیرند $= p(x)\mathrm{d}x$

و برابر است با:

$$p(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}n}{N}$$



خلاصه اینکه، احتمال اینکه $x \leq x(t) \leq x + \mathrm{d}x$ قرار گیرد برابر کسری از نمونه‌ها نسبت به نمونه‌های نامحدود گروه است که در آن $x \leq x(t) \leq x + \mathrm{d}x$ قرار دارد. یعنی اگر N برابر کل تعداد نمونه‌ها در گروه و n برابر تعداد نمونه‌های مورد نظری باشد که در آن $x \leq x(t) \leq x + \mathrm{d}x$ قرار دارد، داریم:

$$\mathrm{Prob}(x \leq x(t) \leq x + dx) = \lim_{N \to \infty} \frac{n}{N}$$

و نهایتاً تابع چگالی احتمال برابر است با:

$$\mathrm{Prob}(x \leq x(t) \leq x + dx) = p(x)\mathrm{d}x$$

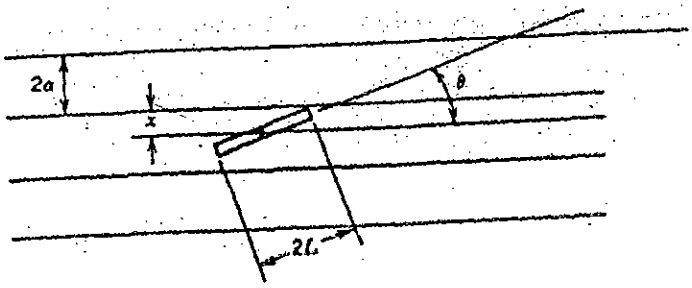
و داریم:

$$P(a < X < b) = \int_a^b p(x)dx$$

$$P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.0$$

مثال

میله‌ای به طول $2L$ روی تخته‌ای که با خطوط موازی به فاصله مساوی $2a$ مشخص شده است مطابق شکل قرار می‌گیرد. با فرض $L < a$ (یعنی فقط یک خط میتواند با میله برخورد کند)، احتمال اینکه میله روی یک خط قرار گیرد چقدر است؟

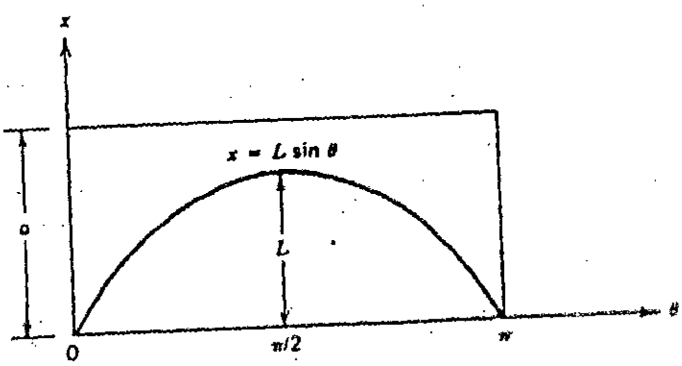


حل

اگر فاصله تصادفی از مرکز میله تا نزدیکترین خط را x و زاویه تصادفی میله با خط را θ بگیریم، شرط برخورد خط با میله اینست که $L\sin\theta \nless x$ باشد. محدوده x بین $0 \le x \le a$ و برای θ بین $0 \le \theta \le \pi$ می‌باشد.

احتمال مورد نظر برابر سطح زیر منحنی در صفحه $x - \theta$ است. یعنی:

$$P(\text{covering line}) = \frac{\text{area under arc}}{a\pi}$$



توزیع نرمال

Gaussian or Normal distribution

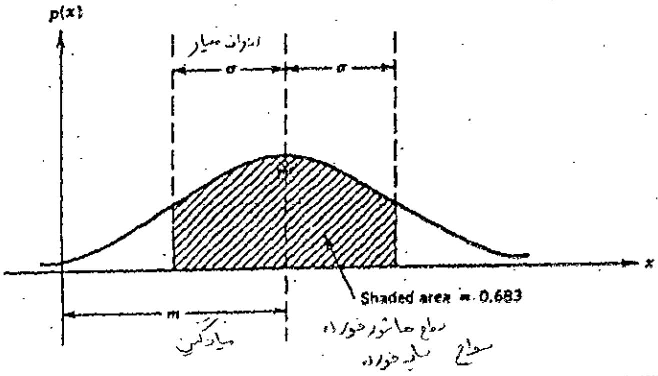
توزیع نرمال یا گوسی یکی از حقایق جالب زندگی است و بسیاری از ارتعاشات تصادفی که در طبیعت ایجاد می‌شوند دارای توزیع احتمال به شکل زنگوله‌ای هستند.

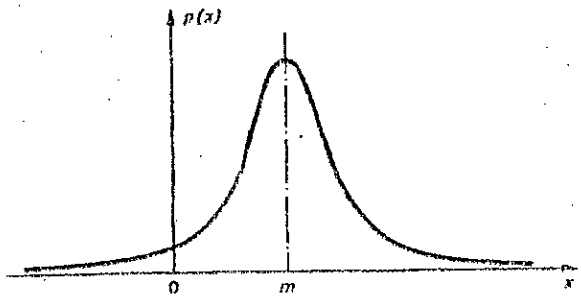
معادله شکل زنگوله بصورت زیر است:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

که x متغیر تصادفی و m و σ به ترتیب میانگین و انحراف معیار گروهی هستند که در ادامه تشریح می‌شوند.

این توزیع کاربردهای بسیاری در تئوری ارتعاشات تصادفی برای تقریب مشخصات تحریک تصادفی دارد.





میانگین یا متوسط‌های مهم فرآیندهای تصادفی

Important averages of random processes

فرض کنید تابع چگالی احتمال $p(x)$ برای یک فرآیند تصادفی معلوم باشد. از این تابع می‌توان در محاسبه اطلاعات آماری خاصی از فرآیند تصادفی $x(t)$ استفاده کرد.

۱-میانگین فرآیند تصادفی

امید ریاضی، توقع، انتظار

ابتدا مقدار میانگین فرآیند تصادفی x که با علامت $E[x]$ که حرف E به معنی $Expectation$ (یعنی مقدار مورد انتظار) است نشان داده می شود را بررسی می‌کنیم.

با توجه به شکل، مقدار میانگین تاریخچه زمانی x روی بازه T برابر است با:

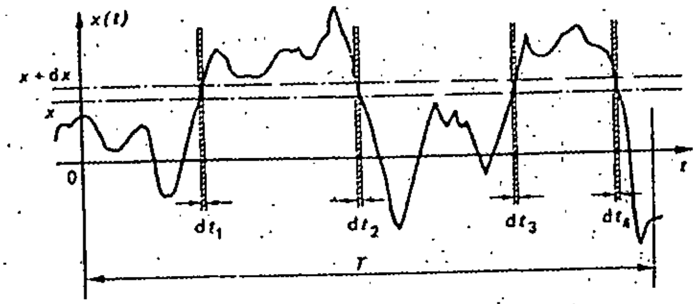
کل مساحت زیر منحنی $x(t)$ در بازه زمانی T = $(E[x])T$

(ناحیه زیر خط صفر را از کل مساحت کم می‌کنیم)

$$= \int_0^T x(t)\mathrm{d}t$$

بنابراین:

$$E[x] = \int_0^T x(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{T}}$$



قبلا داشتیم:

$p(x)\mathrm{d}x =$ کسری از کل زمان سپری شده که $x(t)$ بین x و $x + \mathrm{d}x$ قرار می‌گیرد

$$= \frac{(\mathrm{d}t_1 + \mathrm{d}t_2 + \mathrm{d}t_3 + \cdots)}{T} = \frac{\sum \mathrm{d}t}{T}$$

با استفاده از ریاضیات مهندسی، از رابطه مذکور می‌توان برای تعیین $p(x)$ و تعیین فرمول استاندارد محاسبه مقدار میانگین از روی تابع چگالی احتمال استفاده کرد.

یعنی:

$$\int_0^T x(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{T}} = \sum_t x(t) \times$$

(کسری از زمان سپری شده که $x(t)$ در نوار x تا $x + \mathrm{d}x$ قرار می‌گیرد)

که با استفاده از رابطه بالا برابر است با:

$$= \sum_x x.(p(x)\mathrm{d}x) = \int_{-\infty}^{\infty} x.p(x)\mathrm{d}x$$

بنابراین:

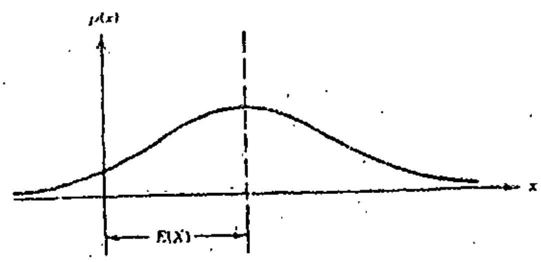
$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\mathrm{d}x$$

این رابطه، تعریف اصلی مقدار میانگین $E[x]$ است.

با تعمیم این تعریف، میانگین یا مقدار مورد انتظار تابعی از متغیر تصادفی بصورت زیر بیان می‌شود:

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)\mathrm{d}x$$

تصویر زیر، بیان هندسی میانگین متغیر تصادفی را نشان می‌دهد.



۲-میانگین مربع فرآیند تصادفی

مقدار میانگین مربع x (*Mean Square Value*) یعنی $E[x^2]$ برابر است با:

$$E[x^2] = \int_0^T x^2(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{T}}$$

و متناظر با رابطه استاندارد:

$$[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x$$

۳-واریانس و انحراف معیار فرآیند تصادفی

انحراف استاندارد x که معمولاً با σ نشان داده می شود، و واریانس که با σ^2 نشان داده می‌شود بصورت زیر تعریف می شود:

واریانس $$\sigma^2 = E[(x - E[x])^2]$$

واریانس در واقع میانگین مربع انحراف x از میانگین x است.

رابطه بالا بصورت زیر ساده می شود:

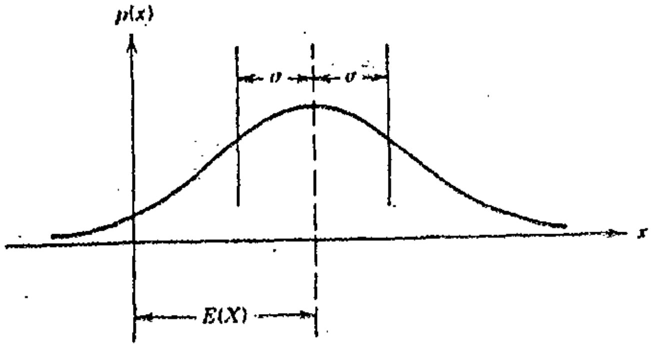
$$\sigma^2 = E[x^2 - 2xE[x] + (E[x])^2] = E[x^2] - 2E[x].E[x] + (E[x])^2$$

از آنجا که میانگین جمع ترمها برابر جمع میانگین جداگانه آنهاست، و میانگین یک مقدار ثابت برابر همان مقدار ثابت است خواهیم داشت:

واریانس $$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2$$

یا:

واریانس=^{2}(انحراف معیار)=میانگین مربع-^{2}(میانگین)



مثال

برای تابع چگالی احتمال گوسی (نرمال) داریم:

میانگین:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\, dx$$

میانگین مربع:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, p(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\, dx$$

با تغییر متغیر $y = (x - m)$ خواهیم داشت:

مثل ۲۲ گنل انتگرال

$$E[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (y + m)\, e^{-y^2/2\sigma^2}\, dy$$

$$E[x^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (y + m)^2\, e^{-y^2/2\sigma^2}\, dy$$

و با استفاده از نتایج استاندارد زیر:

ص ۲۲

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\, e^{-u^2} du = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ص ۱۱۳ روابط ریاضی (18-77)

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^2/2} dx = \frac{\Gamma[(m+1)/2]}{2a^{(m+1)/2}}$$

ص ۲۶۵

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha) \qquad 0! = \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(1) = 1 \;,\; \Gamma(4) = 3!$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2/2\sigma^2}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma$$

$$\int_0^{\infty} y\, e^{-y^2/2\sigma^2}\, dy = \sigma^2$$

$$\int_0^{\infty} y^2\, e^{-y^2/2\sigma^2}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma^3$$

نتیجه می‌شود:

$$E[x] = m$$

و

$$E[x^2] = \sigma^2 + m^2$$

یعنی m برابر میانگین و σ انحراف میعیار فرآیند گوسی می باشند.

تابع توزیع احتمال

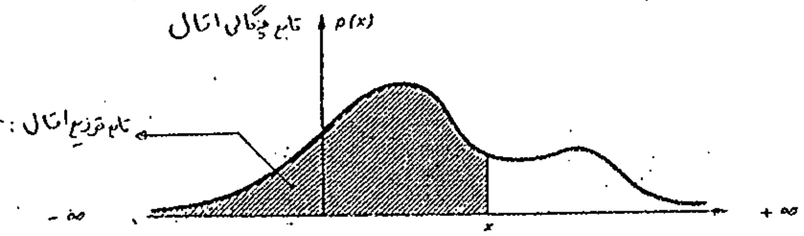
Probability distribution function

علاوه بر تابع چگالی احتمال $p(x)$ برای توصیف توزیع مقادیر یک متغیر تصادفی، تابع توزیع احتمال $P(x)$ نیز به صورت زیر تعریف می شود:

تابع توزیع احتمال $\quad$ تابع چگالی احتمال

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\mathrm{d}x$$

و مطابق شکل، برابر سطح هاشور خورده زیر منحنی تابع چگالی احتمال است.



مقدار $P(x)$ بین صفر و ۱ قرار دارد زیرا:

$$\mathrm{Prob}(-\infty \le x \le \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x = P(x=\infty) = 1$$

و احتمال اینکه مقدار نمونه متغیر تصادفی کمتر از x باشد را می‌دهد.

با مشتق گیری نسبت به x داریم:

$$\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} = p(x)$$

یعنی شیب تابع توزیع احتمال برابر تابع چگالی احتمال است.

تمرین سری اول:

مسائل ۱.۱ تا ۱.۵ کتاب Newland

Joint probability density function — تابع چگالی احتمال توأم

توزیع احتمال مشترک

Joint probability distributions

تابع چگالی احتمال مرتبه دوم *Second-order probability density function*

قبلاً دیدیم تابع چگالی احتمال مرتبه اول $p(x)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\text{Prob}(x \le x(t_0) \le x + dx) = p(x)\text{d}x$$

تابع چگالی احتمال مرتبه دوم یا $p(x,y)$ به همان طریق تعریف می‌شود اما برای دو متغیر تصادفی x و y. احتمال اینکه متغیر تصادفی x در بازه x تا $x+\text{d}x$ و همزمان متغیر تصادفی y در بازه y تا $y+\text{d}y$ قرار گیرد برابر است با: $p(x,y)\text{d}x\,\text{d}y$

مثلاً اگر $x(t)$ یک تابع تصادفی بر حسب t و $y(t)$ تابع تصادفی دیگری بر حسب t باشد، و اگر هر دو تابع نمونه‌هایی از یک زمان دلخواه t_0 باشند، احتمال مشترک مذکور بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Prob}(x \le x(t_0) \le x + dx \text{ and } y \le y(t_0) \le y + dy) = p(x,y)\text{d}x\text{d}y$$

برای تعیین احتمال مشترک که $x(t_0)$ و $y(t_0)$ در نوار محدود با مقادیر x و y قرار گیرند باید از سمت راست رابطه بالا روی نوارهای x و y انتگرال گیری کنیم.

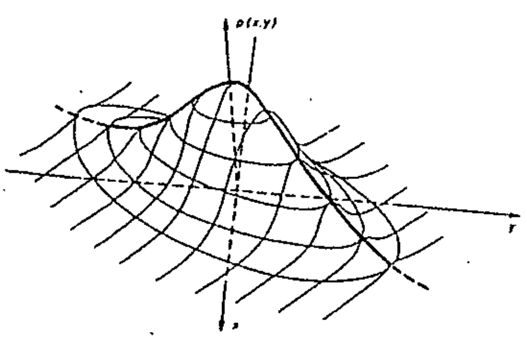
یعنی:

$$\text{Prob}(x_1 \le x(t_0) \le x_2 \text{ and } y_1 \le y(t_0) \le y_2) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} p(x,y)\text{d}x\text{d}y$$

اگر محدوده هر دو نوار از $-\infty$ تا $+\infty$ گسترش یابد، قطعیت ۱۰۰٪ وجود دارد که $x(t_0)$ و $y(t_0)$ در این نوارها قرار گیرند. بنابراین:

$$\text{Prob}(-\infty \le x(t_0) \le \infty \text{ and } -\infty \le y(t_0) \le \infty) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\text{d}x\text{d}y = 1$$

تابع چگالی احتمال مشترک $p(x,y)$ نشان دهنده یک سطح دو بعدی است (مطابق شکل) که حجم زیر این سطح برابر واحد است (بدون بعد). بُعد $p(x,y)$ باید با بعد $\frac{1}{xy}$ یکی باشد.



حال در نظر بگیرید، **مستقل از مقدار** $y(t_0)$ احتمال اینکه متغیر تصادفی $x(t_0)$ در نواز بین x تا $x + \mathrm{d}x$ قرار بگیرد، چقدر است.

این احتمال را می‌توان بصورت تابع چگالی احتمال مرتبه اول $p(x)$ بصورت زیر نشان داد:

$$\mathrm{Prob}(x \le x(t_0) \le x + dx) = p(x)\mathrm{d}x$$

اما نتیجه مشابهی را میتوان با استفاده از تابع چگالی احتمال مرتبه دو $p(x, y)$ با قرار دادن حدود انتگرال گیری برای $y(t_0)$ از $-\infty$ تا $+\infty$ بدست آورد.

یعنی:

$$\mathrm{Prob}(x \le x(t_0) \le x + dx \ \text{ and } \ -\infty \le y(t_0) \le \infty) = \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\mathrm{d}y$$

یا به این صورت:

$$p(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\mathrm{d}y$$

یا:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\mathrm{d}y$$

یعنی تابع چگالی احتمال مرتبه اول را میتوان با انتگرال گیری تابع چگالی احتمال مرتبه دوم نظیر بر روی متغیر تصادفی خواسته نشده بدست آورد. بطور مشابه داریم:

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\mathrm{d}x$$

که به آن، توزیع احتمال حاشیه‌ای یا Marginal گویند.

میانگین‌های مرتبه دوم

به منظور تعیین مقدار میانگین یک کمیت که تابعی از دو متغیر تصادفی است ابتدا به معادلات $E[x]$ و $E[x^2]$ برمی‌گردیم. یعنی:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\mathrm{d}x$$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x$$

فرم کلی این توابع به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$E\begin{bmatrix}\text{function of} \\ \text{a random} \\ \text{variable } x\end{bmatrix} = \sum_{\text{all } x} \begin{pmatrix}\text{value of function} \\ \text{when } x \text{ lies in the} \\ \text{band } x \to x + \mathrm{d}x\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{probability that} \\ x \text{ lies in the band} \\ x \to x + \mathrm{d}x\end{pmatrix}$$

که قابل توسعه برای دو متغیر تصادفی x و y می‌باشد و به فرم زیر بیان می‌شود:

$$E\begin{bmatrix}\text{function of}\\ \text{random}\\ \text{variables } x\\ \text{and } y\end{bmatrix} = \sum_{\substack{\text{all } x\\ \text{and}\\ \text{all } y}} \begin{pmatrix}\text{value of function}\\ \text{when } x \text{ lies in the}\\ \text{band } x \to x + dx\\ \textit{and } y \text{ lies in the}\\ \text{band } y \to y + dy\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{probability that}\\ x \text{ lies in the}\\ \text{band } x \to x + dx\\ \textit{and } y \text{ lies in the}\\ \text{band } y \to y + dy\end{pmatrix}$$

بیان ریاضی به صورت زیر است:

$$E[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

و این یک نتیجه کلی برای محاسبه $E[f(x,y)]$ یعنی میانگین تابع $f(x,y)$ از دو متغیر تصادفی x و y با تابع چگالی احتمال مشترک $p(x,y)$ است.

حال چند میانگین مهم مرتبه دوم به شکل زیر تعریف می‌شوند.

۱-همبستگی یا Correlation بین دو فرآیند تصادفی x و y بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[xy] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy.\,p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

۲-کوواریانس یا Covariance بین دو فرآیند تصادفی x و y بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Cov}(x,y) = E[(x-E[x])(y-E[y])] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-E[x])(y-E[y]).\,p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

که رابطه ساده شده آن عبارتست از:

$$\mathrm{Cov}(x,y) = E[xy] - E[x].E[y]$$

۳-ضریب همبستگی یا Correlation Coefficient بین دو فرآیند تصادفی x و y بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho = \mathrm{Cov}(x,y)/\sigma_x\sigma_y$$

مثال

مجدداً تاریخچه زمانی موج سینوسی را در نظر می‌گیریم. فرض کنید دو موج سینوسی با دامنه و فرکانس یکسان و غیر همفاز با زاویه فاز تصادفی ϕ وجود دارد.

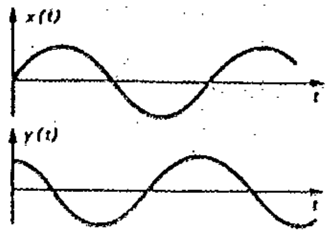
$$x(t) = x_0 \sin \omega t \qquad \text{و} \qquad y(t) = x_0 \sin(\omega t + \phi)$$

هدف محاسبه مقدار میانگین xy و $(xy)^2$ می‌باشد.

حل

فرض کنید هر دو تاریخچه زمانی، در لحظه زمانی یکسان t_0 نمونه‌گیری شده‌اند. در این حالت:

$$x(t_0) = x_0 \sin \omega t_0 \qquad \text{و} \qquad y(t_0) = x_0 \sin(\omega t_0 + \phi)$$

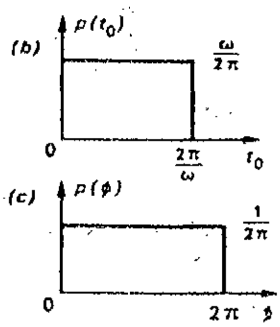


از آنجا که زمان t_0 اختیاری است، هر کجای محور زمان می‌تواند باشد، اما چون امواج سینوسی بصورت پریودیک با پریود $T = 2\pi/\omega$ تکرار می‌شوند، فقط لازم است حالت هایی را در نظر بگیریم که:

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

$$0 \leqslant t_0 \leqslant \frac{2\pi}{\omega}$$

اگر t_0 کاملاً بصورت تصادفی انتخاب شود، یعنی یک متغیر تصادفی که می‌تواند با توزیع احتمال یکنواخت هر جایی روی محور زمان باشد، تابع چگالی احتمال $p(t_0)$ برای t_0 مطابق شکل (b) خواهد بود.



بطور مشابه، اگر زاویه فاز ϕ یک متغیر تصادفی باشد که می‌تواند با توزیع احتمال یکنواخت، هرجایی روی محور بین صفر تا 2π باشد، تابع چگالی احتمال $p(\phi)$ برای ϕ نیز مطابق شکل (c) خواهد بود.

ارتفاع منحنی باید به گونه‌ای مقیاس شود که سطح زیر منحنی در هر تابع برابر واحد باشد.

از تعاریف پایه میتوان نوشت:

$$\text{Prob}\begin{pmatrix}\text{time of sampling lies}\\ \text{in the band } t_0 \text{ to } t_0+\mathrm{d}t_0\end{pmatrix} = p(t_0)\,\mathrm{d}t_0 = \frac{\omega}{2\pi}\,\mathrm{d}t_0$$

and

$$\text{Prob}\begin{pmatrix}\text{phase difference lies}\\ \text{in the band } \phi \text{ to } \phi+\mathrm{d}\phi\end{pmatrix} = p(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\phi.$$

برای یافتن احتمال مشترک دو رویداد t_0 و ϕ، احتمال وقوع جداگانه هرکدام را در هم ضرب می‌کنیم. بنابراین، احتمال مشترک بصورت:

$$\text{Prob}\begin{pmatrix}\text{sampling time in the}\\ \text{band } t_0 \to t_0+\mathrm{d}t_0\\ \textit{and} \text{ phase difference}\\ \text{in the band } \phi \to \phi+\mathrm{d}\phi\end{pmatrix} = \frac{\omega}{(2\pi)^2}\,\mathrm{d}t_0\,\mathrm{d}\phi$$

و تابع چگالی احتمال مشترک بصورت:

$$p(t_0,\phi) = \begin{cases}\dfrac{\omega}{(2\pi)^2} \quad \text{for} \quad \begin{cases}0 \leqslant t_0 \leqslant 2\pi/\omega\\ 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi\end{cases}\\ 0 \text{ for all values of } t_0 \text{ and } \phi \text{ outside these limits.}\end{cases}$$

خواهد بود. به کمک رابطه زیر:

$$E[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

خواهیم داشت:

$$E[xy] = \int_0^{2\pi/\omega}\mathrm{d}t_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\; x_0^2 \sin\omega t_0 \sin(\omega t_0+\phi)\frac{\omega}{(2\pi)^2}$$
$$= x_0^2\frac{\omega}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi/\omega}\mathrm{d}t_0 \sin\omega t_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\sin(\omega t_0+\phi).$$

ابتدا انتگرال سمت راست را در نظر بگیرید که برابر صفر است. بنابراین:

$$E[xy] = 0.$$

همچنین:

$$E[x^2y^2] = \int_0^{2\pi/\omega}\mathrm{d}t_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\; x_0^4 \sin^2\omega t_0 \sin^2(\omega t_0+\phi)\frac{\omega}{(2\pi)^2}$$
$$= x_0^4\frac{\omega}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi/\omega}\mathrm{d}t_0 \sin^2\omega t_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\sin^2(\omega t_0+\phi).$$

انتگرال سمت راست برابر π است و نتیجه برابر است با:

$$E[x^2y^2] = x_0^4\cdot\frac{\omega}{(2\pi)^2}\cdot\frac{\pi}{\omega}\cdot\pi$$
$$= \tfrac{1}{4}x_0^4.$$

احتمال مشروط

Conditional Probability

دیدیم که چطور توابع چگالی احتمال مرتبه اول از روی توابع چگالی احتمال مرتبه دوم متناظرشان بدست می‌آیند. همچنین، چگالی احتمال x وقتی در نوار x تا $x + \mathrm{d}x$ و مستقل از مقدار y قرار گیرد را بدست آوردیم.

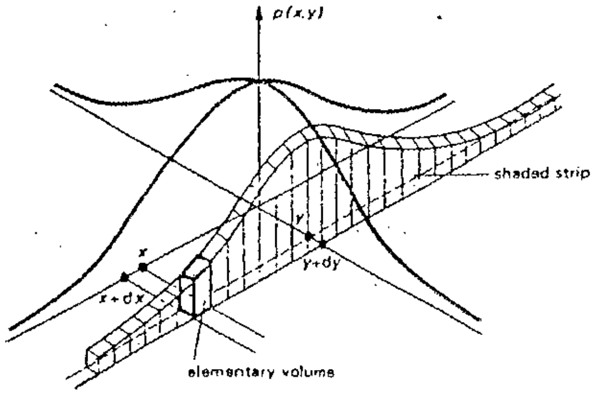
اکنون فرض کنید بجای اینکه اجازه دهیم متغیر تصادفی y هر مقداری داشته باشد، توجه‌مان را فقط برای مواقعی که y در نوار y تا $y + \mathrm{d}y$ قرار گیرد جلب کنیم. در شرایطی که y در این در این نوار قرار گیرد، میخواهیم توزیع x را پیدا کنیم.

معنی این محدودیت اینست که مجدداً دو تابع تصادفی $x(t)$ و $y(t)$ که در زمان اختیاری t_0 نمونه‌گیری شده‌اند را در نظر بگیرید. با چندین بار نمونه گیری تاریخچه زمانی (با تغییر دلخواه t_0)، مجموعه‌ای از نمونه‌های با مقادیر x و y خواهیم داشت.

از این مجموعه، فقط نمونه‌هایی را استخراج می‌کنیم که y در محدوده y تا $y + \mathrm{d}y$ قرار گیرد. بنابراین مجموعه کمتری در اختیار خواهیم داشت.

اکنون فقط برای این نمونه‌های انتخاب شده، میخواهیم توزیع x را پیدا کنیم که بنام تابع چگالی احتمال مشروط x به شرط معلوم بودن y نام دارد و بصورت $p(x|y)$ نشان داده می‌شود.

شکل زیر، چگالی احتمال مشترک $p(x,y)$ را نشان می‌دهد.



المان حجم نشان داده شده بیانگر احتمال اینست که x در نوار x تا $x + \mathrm{d}x$ و y در نوار y تا $y + \mathrm{d}y$ قرار گیرد. حجم نوار هاشور زده بیانگر احتمال وقوع $-\infty \leq x \leq \infty$ و y در نوار y تا $y + \mathrm{d}y$ می‌باشد. بنابراین احتمال مشروط که به ازای y معلوم در نوار y تا $y + \mathrm{d}y$، x در نوار x تا $x + \mathrm{d}x$ قرار گیرد برابر است با:

$$p(x|y)\mathrm{d}x = \frac{\text{elementary volume}}{\text{volume of shaded strip}}$$

یا:

$$p(x|y)\mathrm{d}x = \frac{p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\mathrm{d}x}$$

با ساده سازی:

$$p(x|y)\mathrm{d}x = \frac{p(x,y)}{p(y)}$$

چنانچه توزیع احتمال مشترک x مستقل از y باشد داریم:

$$p(x|y) = p(x)$$

در اینحالت:

$$p(x,y) = p(x)p(y)$$

که بنام شرط استقلال آماری x از y نام دارد.

توزیع گوسی (نرمال) مرتبه دوم

Second order Gaussian distribution

عبارت کلی برای تابع توزیع احتمال مرتبه دوم نرمال برای دو متغیر تصادفی نرمال مشترک x و y بصورت زیر است:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{(1-\rho_{xy}^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left\{\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}-\frac{2\rho_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right\}}$$

که در این رابطه:

m_x و m_y مقادیر میانگین x و y ، همچنین، σ_x^2 و σ_y^2 واریانس x و y، و ρ_{xy} ضریب همبستگی است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

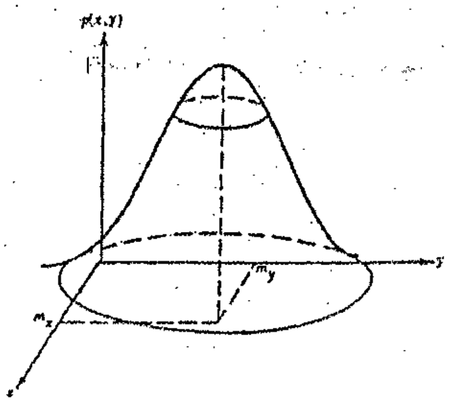
ضریب همبستگی

$$\rho_{xy} = \frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x\sigma_y}$$

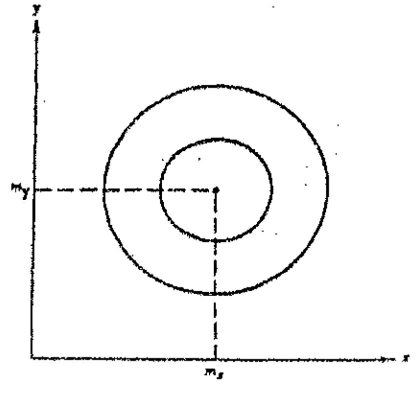
و بنام کوواریانس نرمال شده نیز نام دارد.

اگر $\rho_{xy} = 0$ باشد، x و y مستقل آماری هستند و رابطه قبل بصورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$p(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-(x-m_x)^2/2\sigma_x^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-(y-m_y)^2/2\sigma_y^2}\right) = p(x)p(y)$$



(a)



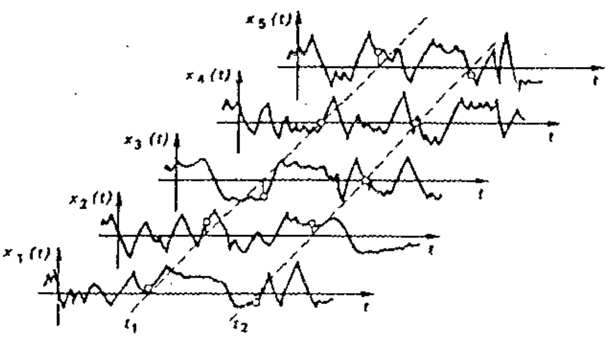
(b)

میانگین گیری گروهی

Ensemble Averaging

در بسیاری از موارد و کاربردهای عملی لازم است بجای میانگین گیری بر روی یک تاریخچه زمانی، میانگین گیری بر روی تعداد زیادی تاریخچه زمانی انجام شود. مثلاً برای بررسی فشار باد بر روی بال هواپیما باید در تعداد زیادی پرواز در شرایط مختلف، تاریخچه های زمانی زیادی ثبت شوند و بر روی آنها میانگین گیری انجام شود.

در این حالت با یک فرآیند تصادفی $x(t)$ متشکل از مجموعه یا گروهی از تابع تصادفی نمونه $x(t_1), x(t_2), x(t_3), etc$ روبرو هستیم. درحقیقت بجای اندازه گیری در طول یک نمونه منفرد، میانگین گیری گروهی در عرض گروهی از نمونه ها انجام می‌شود (مطابق شکل).



با تعیین مقادیر کافی توابع نمونه در زمان t_1، توزیع احتمال مرتبه اول برای x در t_1 بدست می‌آید. اگر مجموعه دیگری از اندازه‌گیری ها در زمان t_2 انجام شود، توزیع احتمال مرتبه دوم برای x در t_1 و t_2 بدست می‌آید. با ادامه این فرآیند، توزیع احتمال مراتب بالاتر برای این گروه داده بدست می‌آید.

برای یک فرآیند تصادفی گوسی (نرمال)، توزیع احتمال گروهی باید گوسی باشد. توزیع احتمال مرتبه اول برای x در t_1 و برای x در t_2 رابطه زیر را ارضا خواهد کرد.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

توزیع احتمال مشترک برای x در t_1 و برای x در t_2 نیز رابطه زیر را ارضا می‌کند (وقتی x به $x(t_1)$ و y به $x(t_2)$ تبدیل شود).

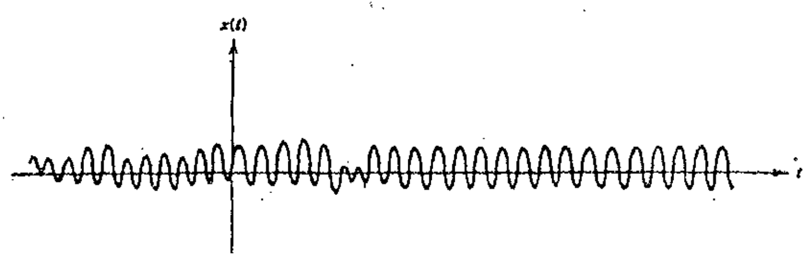
$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{(1-\rho_{xy}^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left\{\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}-\frac{2\rho_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right\}}$$

علاوه بر این، برای هر مجموعه زمانی متناهی t_n، متغیر تصادفی $x(t_n)$ دارای توزیع مشترک متناسب با توابع چگالی طیفی احتمالی گوسی مرتبه بالا خواهد بود.

فرآیندهای تصادفی ایستا (ایستان)

Stationary Random Process

فرآیند تصادفی را ایستا (ایستان) گویند هرگاه توزیع احتمال گروهی آن به زمان وابستگی نداشته باشد. عبارت ایستایی مربوط به توزیع احتمال است نه به خود نمونه‌ها. به بیان دیگر، فرآیند تصادفی را ایستا گویند چنانچه مشخصات آماری توابع نمونه آن، تغییرات زمانی کمی داشته باشد (فرآیندی با تابع نمونه شکل زیر).



ایستایی یعنی مستقل بودن مشخصات آماری فرآیند تصادفی از زمان.

به زبان ریاضی، ایستایی کامل فرآیند یعنی:

$$p[X(t_1)] = p[X(t_1+\tau)]$$

$$p[X(t_1),X(t_2)] = p[X(t_1+\tau),X(t_2+\tau)]$$

$$p[X(t_1),X(t_2),X(t_3)] = p[X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),X(t_3+\tau)] \quad \text{and so on}$$

(دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات اصفهان ،جزوه درس ارتعاشات تصادفی، گرد آوری و تنظیم: دکتر رضا اکبری، تابستان ۱۳۹۲)

یعنی همه میانگین های مهم، و بطور خاص مقدار میانگین، میانگین مربع، واریانس و انحراف معیار، مستقل از زمان هستند.

از آنجا که اکثر فرآیندهای تصادفی واقعی در مسائل مهندسی دارای نقاط شروع و پایان هستند، آنها را نمی‌توان ایستای واقعی دانست ولی برای مقاصد عملی فرض ایستایی غالباً دقت کافی را دارد یا قابل تقسیم به بازه‌های زمانی مختلفی هستند که هرکدام را می‌توان ایستا در نظر گرفت.

برخی موارد از واژه **ایستای ضعیف** برای توصیف فرآیندها استفاده می شود و به این معنی است که فقط توزیع احتمال مرتبه اول و دوم با زمان تغییر نمی‌کنند و واژه **قویاً ایستا** نیز وقتی بکار می‌رود که تمام توزیع های احتمالی گروهی با زمان تغییر نکنند.

برای یک فرآیند تصادفی ایستا، ثابتهای آماری زیر برای یک متغیر تصادفی $X(t_1)$ در زمان t_1 یا برای $X(t_2)$ در زمان t_2 وجود دارند:

$$\text{mean} = \mu = E[X(t_1)] = E[X(t_2)]$$

$$\text{mean square} = E[X(t_1)^2] = E[X(t_2)^2]$$

$$\text{variance} = \sigma^2 = E\{[X(t_1) - \mu]^2\} = E\{[X(t_2) - \mu]^2\}$$

برای دو متغیر تصادفی $X(t_1)$ در t_1 و $X(t_2)$ در t_2 با تاخیر زمانی $\tau = t_2 - t_1$ داریم:

$$\text{covariance} = E\{[X(t_1) - \mu][X(t_2) - \mu]\} = E[X(t_1)X(t_2)] - \mu^2 = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] - \mu^2$$

و همچنین برای تابع همبستگی:

$$R(\tau) = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)]$$

که آن، **تابع خودهمبستگی** گویند و می‌بینیم که هر دو تابع تنها تابعی از تاخیر زمانی τ می‌باشند.

فرآیندهای تصادفی ارگودیک:

Ergodic Random Process

در عمل، با توجه به اینکه تهیه تعداد نامحدود تابع نمونه از متغیرهای تصادفی امکان پذیر نمی‌باشد، برای استخراج اطلاعات آماری و احتمالاتی متغیرهای تصادفی باید به توابع نمونه موجود اکتفا شود. خوشبختانه در برخی فرآیندهای تصادفی ایستا، اطلاعات آماری یک تابع نمونه دارای یک زمان طولانی، به خوبی اطلاعات آماری گروه را تقریب می‌زند. بنابراین هر تابع نمونه، کاملاً بیانگر گروهی است که فرآیند تصادفی را تشکیل می‌دهند. این فرآیندها را ارگودیک گویند.

بنابراین فرآیند تصادفی ایستا را ارگودیک گویند هرگاه، علاوه بر اینکه کلیه میانگین‌های گروهی نسبت به تغییر در زمان ایستا هستند، میانگین‌های گرفته شده در طول هر نمونه منفرد با میانگین‌های گروهی آنها برابر باشند.

یعنی برای یک فرآیند تصادفی ایستای ارگودیک، مقدار میانگین و تابع خودهمبستگی بصورت زیر تعریف می‌شوند:

مقدار میانگین

$$E[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\mathrm{d}t$$

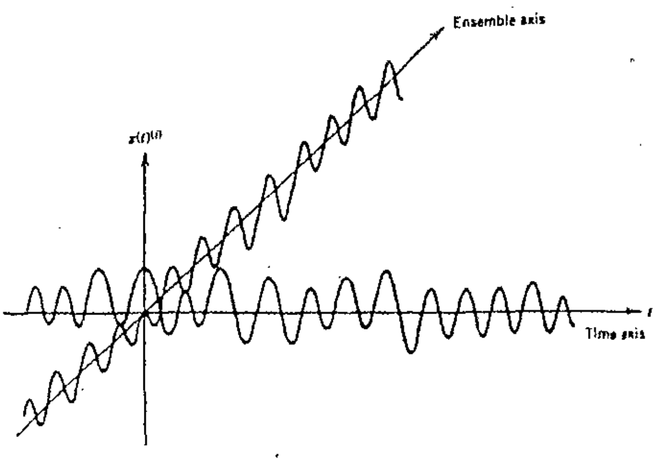
تابع خودهمبستگی

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t$$

میانگین های یک فرآیند ارگودیک را **میانگین‌های دائمی** نیز می‌گویند و با علامت $\langle . \rangle$ نیز نشان می‌دهند. یعنی برای یک فرآیند ارگودیک داریم:

$$\langle x(t)\rangle = E[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\mathrm{d}t$$

تصویری از یک فرآیند ارگودیک در شکل زیر نشان داده شده است.



فرآیند تصادفی ایستا را ارگودیک گویند
هرگاه،
علاوه بر اینکه کلیه میانگین‌های گروهی
نسبت به تغییر زمان ایستا هستند،
میانگین گرفته شده در طول هر نمونه با
میانگین گروهی آن برابر باشد

در ادامه مباحث، در میانگین‌های مهم یک نمونه تصادفی بسته به مورد فرض می‌کنیم این نمونه متعلق به یک فرآیند تصادفی ایستا و ارگودیک است.

توجه شود که اگر یک فرآیند تصادفی ارگودیک باشد حتماً ایستاست، زیرا میانگین در طول یک نمونه منفرد (در تئوری) از $t = -\infty$ تا $t = +\infty$ انجام می‌شود و بنابراین مستقل از زمان است. اگر میانگین‌های نمونه منفرد و میانگین‌های گروهی برابر باشند، میانگین‌های گروهی هم باید مستقل از زمان باشند و بنابراین فرآیند باید ایستا باشد.

تمرین سری دوم:

مسائل ۲.۱ تا ۲.٤ کتاب Newland و ۱.۹ و ۱.۱۰ کتاب Yang

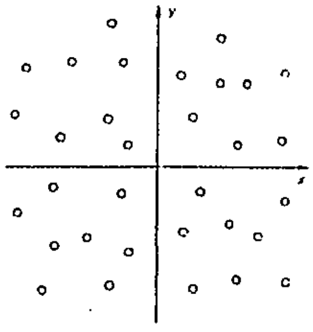
همبستگی

Correlation

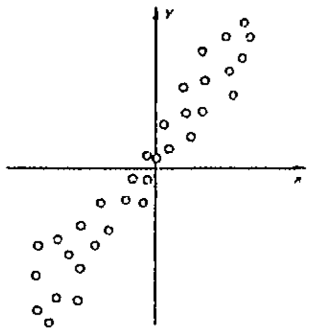
مجموعه‌ای از مقادیر جفتی متغیر های تصادفی x و y را درنظر بگیرید. هر جفت بیانگر یک نقطه در صفحه $x - y$ است (شکل زیر).

در شکل (a)، مقادیر جفتی x و y الگوی مشخصی ندارند ولی در شکل (b)، الگوی تعریف شده‌ای وجود دارد.

uncorrelated
نا‌همبسته



(a) x and y values uncorrelated



(b) x and y values exhibit correlation

correlation
همبستگی

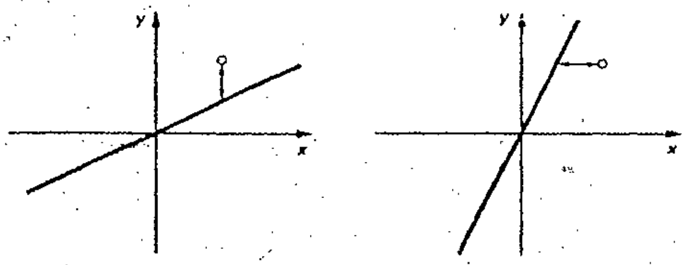
در حالت دوم، در هر جفت، یک مقدار بزرگ برای x متناظر با یک مقدار بزرگ برای y است. این دو متغیر همبستگی دارند، Correlated. ولی در حالت اول غیرهمبسته می‌باشند، Uncorrelated.

برای شکل(b) ، میخواهیم رابطه تقریبی بین x و y را بصورت یک خط راست بدست آوریم. یک راه اینست که مربع اختلاف مقدار واقعی y از مقداری که از تقریب خط حاصل می‌شود مینیموم باشد.
($y=mx$)

مطابق شکل، چنانچه موقعیت محورها به گونه‌ای تنظیم شود که داشته باشیم:

$$E[x] = E[y] = 0$$

یعنی مرکز مختصات در مرکز ثقل نقاط داده قرار گیرد، رابطه تقریب خط برابر $y = mx$ خواهد بود.



(a) Line of regression of y on x

(b) Line of regression of x on y

اختلاف (انحراف) هر مقدار y از مقدار تقریبی mx برابر است با:

$$\Delta = y - mx$$

و مقدار میانگین مربع انحراف برابر است با:

$$E[\Delta^2] = E[(y-mx)^2] = E[y^2] + m^2E[x^2] - 2mE[xy]$$

این مقدار وقتی مینیموم است که مشتق آن نسبت به m برابر صفر باشد. یعنی:

$$0 = 2mE[x^2] - 2E[xy]$$

یا:

$$m = \frac{E[xy]}{E[x^2]}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$y = \frac{E[xy]}{E[x^2]} . x$$

یا، چون درحالت میانگین صفر روابط زیر بر قرار است:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] \qquad \text{and} \qquad \sigma_y^2 = E[y^2]$$

فرم نهایی رابطه تقریب خطی بصورت زیر خواهد بود:

معادله رگرسیون خطی y روی x

$$\frac{y}{\sigma_y} = \left\{\frac{E[xy]}{\sigma_x\sigma_y}\right\}\frac{x}{\sigma_x}$$

این معادله، معادله رگرسیون خطی y روی x است. بطور مشابه، معادله رگرسیون خطی x روی y بصورت زیر است:

معادله رگرسیون خطی x روی y

$$\frac{x}{\sigma_x} = \left\{\frac{E[xy]}{\sigma_x\sigma_y}\right\}\frac{y}{\sigma_y}$$

اگرمیانگین x و y طبق آنچه در بالا عنوان شد صفر نباشند، معادلات متناظر رگرسیون خطی بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{y-m_y}{\sigma_y}=\left\{\frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x\sigma_y}\right\}\frac{x-m_x}{\sigma_x}$$ رگرسیون خطی y روی x

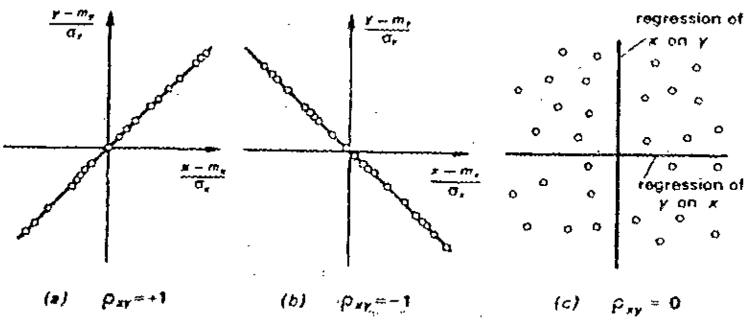
$$\frac{x-m_x}{\sigma_x}=\left\{\frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x\sigma_y}\right\}\frac{y-m_y}{\sigma_y}$$ رگرسیون خطی x روی y

که در آن، m_x و m_y به ترتیب میانگین x و y می‌باشند.

همانطور که قبلاً دیدیم، پارامتر:

$$\rho_{xy}=\frac{E[(x-m_x)(y-m_y)]}{\sigma_x\sigma_y}$$

بنام **ضریب همبستگی** (*Correlation Coefficient*) یا **کوواریانس نرمال‌شده** (*Normalized Covariance*) نام دارد و واضح است که اگر $\rho_{xy}=\pm1$ باشد، روابط رگرسیون بیانگر یک خط خواهند بود. اگر $\rho_{xy}=0$ باشد، هیچ همبستگی وجود ندارد و خطوط رگرسیون موازی با محورهای x و y خواهند بود.



اکنون دو موج سینوسی با دامنه و فرکانس یکسان و با اختلاف فاز ثابت ϕ را درنظر بگیرید:

$$x(t)=x_0\sin\omega t$$
$$y(t)=y_0\sin(\omega t+\phi).$$

فرض کنید این دو موج نمونه هایی در یک زمان تصادفی t_0 هستند و مقدار میانگین حاصلضرب $x(t_0)y(t_0)$ مورد نظر ما باشد. مقدار میانگین از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E[x(t_0)y(t_0)]=\int_{-\infty}^{\infty}x_0y_0\sin\omega t_0\sin(\omega t_0+\phi)p(t_0)\,dt_0$$

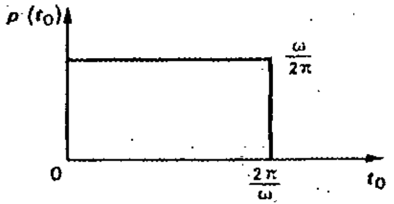
انتگرال دوگانه به یک انتگرال تبدیل شده است زیرا t_0 تنها متغیر تصادفی ماست. در این حالت، تنها لازم است t_0 از صفر تا $2\pi/\omega$ تغییر کند تا یک سیکل کامل حرکت پرپودیک را داشته باشد. بنابراین، تابع چگالی طیفی برای t_0 مطابق شکل خواهد بود.

پس از جایگذاری در رابطه قبل داریم:

$$E[x(t_0)y(t_0)] = x_0 y_0\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\int_0^{2\pi/\omega} \sin\omega t_0 \sin(\omega t_0 + \phi)\,dt_0$$

$$= x_0 y_0\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\int_0^{2\pi/\omega} \{\sin^2\omega t_0 \cos\phi + \sin\omega t_0 \cos\omega t_0 \sin\phi\}\,dt_0$$

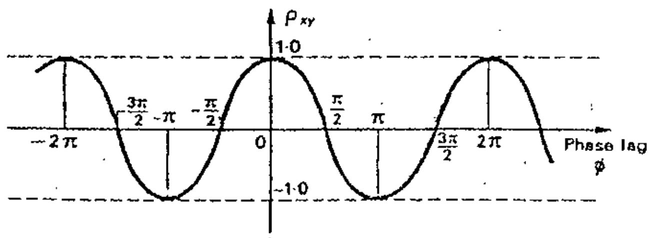
$$= \tfrac{1}{2} x_0 y_0 \cos\phi$$



و ضریب همبستگی برابر است با:

$$\rho_{xy} = \frac{E[xy]}{\sigma_x \sigma_y} = \cos\phi$$

زیرا $\sigma_x = x_0/\sqrt{2}$ و $\sigma_y = y_0/\sqrt{2}$ می باشد.



زمانیکه اختلاف فاز صفر یا ۱۸۰ درجه باشد، این دو موج سینوسی را کامل همبسته و زمانیکه ۹۰ یا ۲۷۰ درجه باشد غیر همبسته می‌گویند.

بطور کلی دو تابع هارمونیک را همبسته می‌گویند اگر همفاز یا غیر همفاز باشند و غیر همبسته می‌گویند اگر در ربع مجاور یکدیگر (Quadrature) قرار داشته باشند.

مثال

نشان دهید ضریب همبستگی همواره بین ۱ و ۱- قرار دارد. $-1 \leq \rho \leq +1$

حل

فرض کنید Y_1 و Y_2 دو متغیر تصادفی باشند و θ یک پارامتر باشد. در اینصورت میدانیم:

$$E[(\theta Y_1 - Y_2)^2] \geqslant 0$$

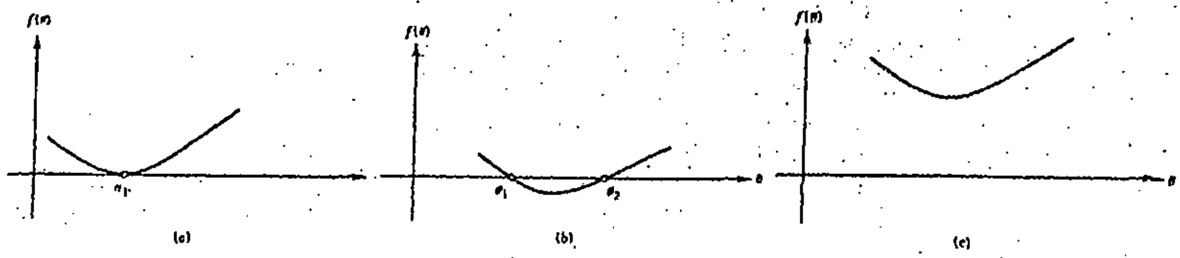
یعنی:

$$[\overbrace{E(Y_1^2)\theta^2}^{a} - \overbrace{2E(Y_1 Y_2)\theta}^{b} + \overbrace{E(Y_2^2)}^{c}] \geqslant 0$$

اگر فرض کنیم این عبارت یک تابع درجه ۲ از θ باشد داریم:

$$f(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c \geqslant 0$$

سه حالت برای ریشه های این معادله رخ می دهد که در شکل نشان داده شده است. درحالت a معادله ۱ ریشه، در حالت b دو ریشه و در حالت c معادله ریشه ندارد.



برای حل معادله داریم:

$$\theta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad b^2 \leqslant 4ac$$

با جایگزینی داریم:

$$[E(Y_1 Y_2)]^2 \leqslant E(Y_1^2)E(Y_2^2)$$

(نامساوی شوارتز)

با تعریف:

$$Y_1 = X_1 - E(X_1), Y_2 = X_2 - E(X_2)$$

داریم:

$$E(Y_1^2) = \sigma_1^2$$

$$E(Y_2^2) = \sigma_2^2$$

$$E(Y_1 Y_2) = E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\}$$

آنگاه نتیجه می‌شود:

$$[\mathrm{cov}(X_1, X_2)]^2 \leqslant \sigma_1^2\sigma_2^2$$

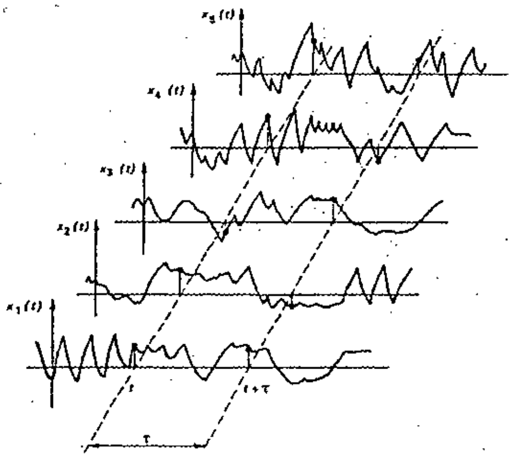
و نهایتاً داریم:

$$\left[\frac{\mathrm{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]^2 \leqslant +1, \qquad -1 \leqslant \rho \leqslant +1$$

خودهمبستگی

Autocorrelation

تابع خودهمبستگی یک فرآیند تصادفی $x(t)$ برابر میانگین حاصلضرب $x(t)x(t+\tau)$ تعریف می‌شود. فرآیند در زمان t و مجدداً در زمان $t+\tau$ نمونه‌گیری می‌شود و حاصلضرب آنها میانگین‌گیری می‌شود، یعنی $E[x(t)x(t+\tau)]$ برای گروه محاسبه می‌شود.



قبلاً دیدیم اگر فرآیند ایستا باشد، مقدار $E[x(t)x(t+\tau)]$ مستقل از زمان t خواهد بود و تنها به پارامتر زمانی τ بستگی دارد.

نحوه نمایش تابع خود همبستگی فرآیند $x(t)$:

$$E[x(t)x(t+\tau)] = f(\tau) = R_x(\tau)$$ تابع خودهمبستگی

برخی از خواص این تابع به شرح زیر است: برخی از خواص تابع خودهمبستگی (Autocorrelation)

اگر $x(t)$ ایستا باشد، میانگین و انحراف معیار مستقل از زمان خواهند بود. بنابراین:

سادگی $\Rightarrow$ $$E[x(t)] = E[x(t+\tau)] = m$$

و همچنین:

انحراف معیار $\Rightarrow$ $$\sigma_{x(t)} = \sigma_{x(t+\tau)} = \sigma.$$

ضریب همبستگی $x(t)$ و $x(t+\tau)$ بصورت زیر بدست می‌آید:

ضریب همبستگی $\Rightarrow$ $$\rho = \frac{E[\{x(t)-m\}\{x(t+\tau)-m\}]}{\sigma^2}$$

$$= \frac{E[x(t)x(t+\tau)] - mE[x(t+\tau)] - mE[x(t)] + m^2}{\sigma^2}$$

ضریب همبستگی $\Rightarrow$ $$\rho = \frac{R_x(\tau) - m^2}{\sigma^2}$$

بنابراین:

$$\boxed{R_x(\tau) = \sigma^2\rho + m^2}$$

و چون ρ در محدوده ± 1 قرار دارد خواهیم داشت:

$$-\sigma^2 + m^2 \leqslant R_x(\tau) \leqslant \sigma^2 + m^2$$

اگر $\tau = 0$ باشد داریم:

$$R_x(\tau = 0) = E[x(t)^2] = E[x^2]$$

که برابر مقدار میانگین مربع فرآیند است.

در مقادیر $\tau \to \infty$، فرآیند تصادفی غیرهمبسته خواهد بود زیرا رابطه معنی‌داری بین مقادیر $x(t)$ و $x(t+\tau)$ وجود ندارد و بنابراین $\rho \to 0$

دو رابع مجاور یکدیگر

در اینحالت:

$\rho \to 0 \Rightarrow \{R_x(\tau \to \infty) - m^2\} \to 0$

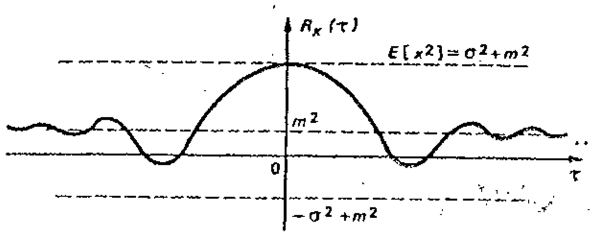
$$R_x(\tau \to \infty) \to m^2$$

نهایتاً چون برای یک فرآیند تصادفی ایستا، $R_x(\tau)$ فقط به پارامتر τ وابسته است داریم:

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = E[x(t)x(t-\tau)] = R_x(-\tau)$$

یعنی تابع خودهمبستگی یک تابع زوج نسبت به τ می‌باشد.

همه خواص این تابع در شکل زیر نشان داده شده است:



برخی خصوصیات تابع خودهمبستگی در شکلهای زیر نشان داده شده است:

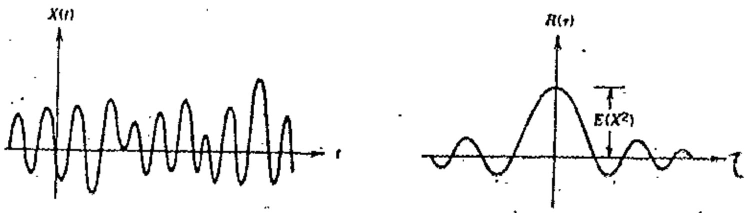


FIG. 2.2. A typical sample of a stationary random process and its autocorrelation function.

نمونه عادی -

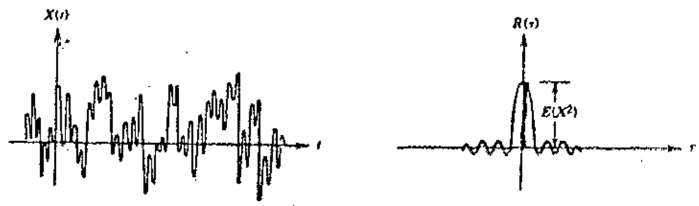


FIG. 2.3. A sample of an extremely irregular stationary random process and its autocorrelation function.

شدیداً نامنظم

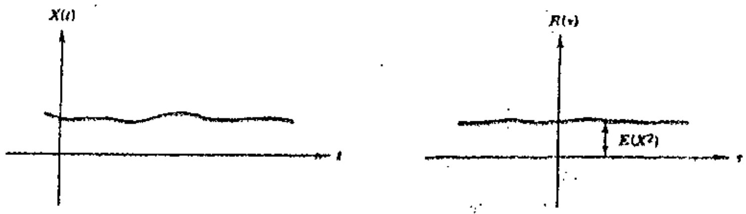


FIG. 2.4. A sample of a very regular or uniform stationary process and its autocorrelation function.

یکنواخت یا خیلی مرتب

بطور خلاصه مهمترین خواص تابع خود همبستگی $R_x(\tau)$ فرآیند تصادفی ایستای $x(t)$ به شرح زیر است:

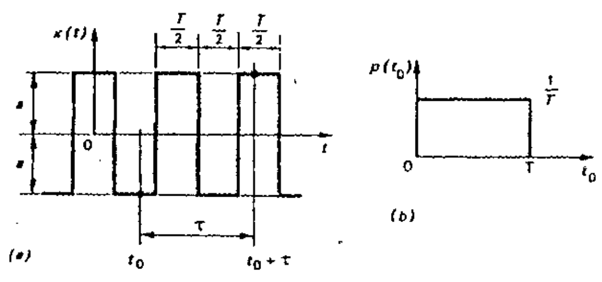
- $R_x(0) = E[x^2]$ که برابر است با میانگین مربع گروهی
- تابع خودهمبستگی یک تابع زوج نسبت به τ می‌باشد یعنی: $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$
- $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$
- اگر $x(t) = x(t+\tau)$ آنگاه $R_x(\tau) = E[x^2]$
- اگر $x(t)$ از $x(t+\tau)$ مستقل باشد، آنگاه:

$$R_x(\tau) = E[x(t)]E[x(t+\tau)] = (E[x])^2$$

- اگر $\tau \to \infty$، آنگاه $x(t)$ از $x(t+\tau)$ مستقل می شود و $R_x(\tau) \to (E[x])^2$

مثال

تابع خود همبستگی را برای فرآیند تصادفی ارگودیک $x(t)$ که توابع نمونه‌ای از یک موج مربعی با دامنه برابر a و پریود T مطابق شکل می‌باشند، بطوریکه پارامتر اختلاف زمان t_0 یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بین صفر تا T باشد (مطابق شکل) را محاسبه کنید.



حل

دو راه برای حل وجود دارد. اول اینکه، میانگین گروهی در عرض گروهی از توابع نمونه در زمانهای t_0 و $t_0 + \tau$ محاسبه شود. راه دوم اینست که از ارگودیک بودن فرآیند استفاده کنیم. یعنی هر تابع نمونه کاملاً بیانگر مجموعه کل فرآیند است. در حقیقت از میانگین گیری در طول یک تابع نمونه تکی با درنظرگرفتن اینکه زمان t_0 یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در طول محور زمان است استفاده کنیم.

در اینحالت:

$$R_x(\tau) = E[x(t_0)x(t_0+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)x(t_0+\tau)p(t_0)\,dt_0$$

ازآنجا که $x(t)$ پریودیک است، فقط لازم است یک سیکل کامل منفرد تاریخچه زمانی لحاظ شود و محدوده مقادیر t_0 از صفر تا T گسترش یابد.

با جایگزینی تابع چگالی طیفی در رابطه بالا داریم:

$$R_x(\tau) = \int_0^{T} x(t_0)x(t_0+\tau)\,\frac{1}{T}\,dt_0$$

از آنجا که $x(t)$ یک تابع ناپیوسته است، باید فرآیند را گام به گام جلو ببریم.

۱- برای $0 \leq \tau \leq T/2$

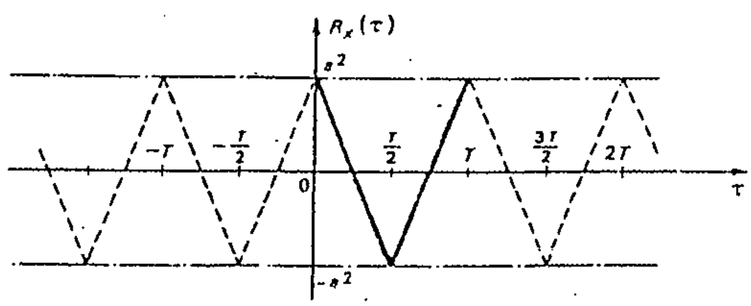
بازه زمانی انتگرال را برای $t_0 = 0$ تنظیم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}R_x(\tau) &= \frac{1}{T}\int_0^{T/2-\tau} a^2\,dt_0 + \frac{1}{T}\int_{T/2-\tau}^{T/2} -a^2\,dt_0 + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T-\tau} a^2\,dt_0 + \\ &\quad + \frac{1}{T}\int_{T-\tau}^{T} -a^2\,dt_0 \\ &= a^2\left(1 - 4\frac{\tau}{T}\right) \quad \text{for} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{T}{2}.\end{aligned}$$

۲- برای $T/2 \leq \tau \leq T$

در اینحالت داریم:

$$\begin{aligned}R_x(\tau) &= \frac{1}{T}\int_0^{T-\tau} -a^2\,dt_0 + \frac{1}{T}\int_{T-\tau}^{T/2} a^2\,dt_0 + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{3T/2-\tau} -a^2\,dt_0 + \\ &\quad + \frac{1}{T}\int_{3T/2-\tau}^{T} a^2\,dt_0 \\ &= a^2\left(-3 + 4\frac{\tau}{T}\right) \quad \text{for} \quad \frac{T}{2} \leqslant \tau \leqslant T.\end{aligned}$$



با تکرار این فرآیند، جوابهایی که روی شکل با خط چین نشان داده شده است بدست می‌آیند.

توجه شود که اگر $\tau = T, 2T, 3T, \text{etc.}$، مقادیر نمونه $x(t_0)$ و $x(t_0 + \tau)$ همفاز خواهند بود و همبستگی کامل وجود دارد و $R_x(\tau) = E[x^2] = a^2$ خواهد بود.

اگر $\tau = T/2\,, 3T/2\,, 5T/2\,, \text{etc.}$ باشد، مقادیر نمونه $x(t_0)$ و $x(t_0 + \tau)$ در فاز مخالف هستند و $R_x(\tau) = -E[x^2] = -a^2$

همبستگی متقابل (دگرهمبستگی)

Cross-Correlation

همبستگی متقابل بین دو تابع تصادفی و ایستای مختلف $x(t)$ و $y(t)$ و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)]$$

$$R_{yx}(\tau) = E[y(t)x(t+\tau)]$$

چون فرآیندها ایستا هستند بنابراین:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t-\tau)y(t)] = R_{yx}(-\tau)$$

$$R_{yx}(\tau) = E[y(t-\tau)x(t)] = R_{xy}(-\tau)$$

اما در حالت کلی، $R_{xy}(\tau)$ و $R_{yx}(\tau)$ یکی نیستند و برخلاف تابع خود همبستگی، اینها تابع زوج نیستند.

هر تابع همبستگی متقابل را می‌توان بر حسب کوواریانس نرمال‌شده ρ بصورت زیر بیان کرد:

$$R_{xy}(\tau) = \sigma_x\sigma_y\rho_{xy}(\tau) + m_x m_y$$

فرمول ص 68

$$R_{yx}(\tau) = \sigma_y\sigma_x\rho_{yx}(\tau) + m_y m_x$$

و چون مقادیر حدی ρ برای همبستگی همفاز کامل یا غیر همفاز برابر ± 1 می‌باشد، مقادیر حدی تابع همبستگی متقابل برابر است با:

$$\pm\sigma_x\sigma_y + m_x m_y$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$-\sigma_x\sigma_y + m_x m_y \leqslant R_{xy}(\tau) \leqslant \sigma_x\sigma_y + m_x m_y$$

برای اغلب فرآیندهای تصادفی، انتظار داریم هیچ همبستگی بین x و y زمانیکه پارامتر جداساز زمانی τ خیلی بزرگ باشد وجود نداشته باشد. یعنی:

$$R_{xy}(\tau \to \infty) \to m_x m_y$$

$$R_{yx}(\tau \to \infty) \to m_y m_x$$

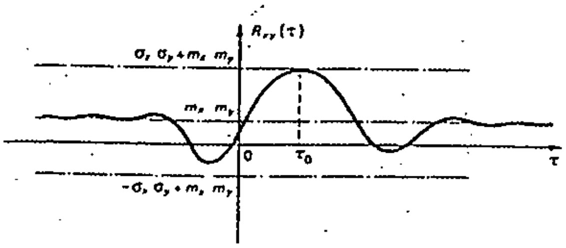


Fig. 3.10 Illustrating properties of the cross-correlation function $R_{xy}(\tau)$ of two stationary processes $x(t)$ and $y(t)$

خواص این تابع در شکل نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که دو فرآیند تصادفی $x(t)$ و $y(t)$ در حالتیکه $\tau = \tau_0$ باشد حداکثر همبستگی را خواهند داشت.

مثال

دو فرآیند تصادفی $x(t)$ و $y(t)$ که هر یک شامل یک گروه از توابع نمونه که هر کدام امواج سینوسی با دامنه و فرکانس یکسان هستند را در نظر بگیرید. نمونه‌ای از $x(t)$ بصورت زیر است:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \theta)$$

که در آن، θ زاویه اختلاف فاز (ثابت) است. اگر θ برای تمام نمونه ها یکسان باشد، $x(t)$ دیگر یک فرآیند تصادفی نیست. ما فرض می‌کنیم این اختلاف فاز یک متغیر تصادفی است و از یک نمونه به نمونه دیگر فرق می‌کند. با فرض اینکه تمام زوایای اختلاف فاز هر تابع نمونه بین ۰ تا 2π بصورت یکنواخت توزیع شود (احتمال یکسان)، داریم:

$$p(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{for } \ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

اگر هر نمونه از فرآیند تصادفی $y(t)$ متناظر یک نموه از فرآیند $x(t)$ و مثلاً بصورت زیر باشد:

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \theta - \phi)$$

که در آن ϕ زاویه اختلاف فاز ثابت دیگری که برای همه نمونه های یکسان است باشد، توابع همبستگی متقابل $R_{xy}(\tau)$ و $R_{yx}(\tau)$ را محاسبه کنید.

حل

تابع همبستگی متقابل $R_{xy}(\tau)$ برابر است با:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = E[x_0 y_0 \sin(\omega t+\theta)\sin(\omega t+\omega\tau+\theta-\phi)]$$

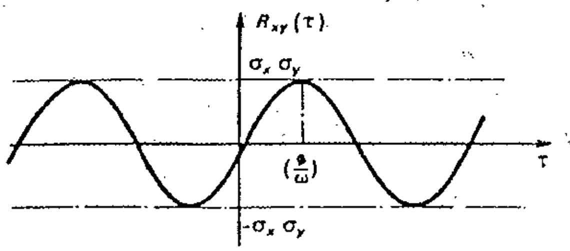
$$= \int_0^{2\pi} x_0 y_0 \sin(\omega t+\theta)\sin(\omega t+\omega\tau+\theta-\phi)\frac{1}{2\pi}\,d\theta$$

با جایگذاری:

$$\sin(\omega t+\omega\tau+\theta-\phi) = \sin(\omega t+\theta)\cos(\omega\tau-\phi) + \cos(\omega t+\theta)\sin(\omega\tau-\phi)$$

داریم:

$$R_{xy}(\tau) = \tfrac{1}{2}x_0 y_0 \cos(\omega\tau-\phi)$$



بطور مشابه، تابع همبستگی متقابل $R_{yx}(\tau)$ برابر است با:

$$R_{yx}(\tau) = E[y(t)x(t+\tau)] = E[x_0 y_0 \sin(\omega t+\theta-\phi)\sin(\omega t+\omega\tau+\theta)]$$

و نهایتاً:

$$R_{yx}(\tau) = \tfrac{1}{2}x_0 y_0 \cos(\omega\tau+\phi)$$

چون فرض کردیم θ بصورت یکنواخت بین ۰ تا 2π توزیع شده است، هر دو فرآیند تصادفی $x(t)$ و $y(t)$ ارگودیک هستند.

این مسأله را میتوان از راه دیگری هم حل کرد که محاسبه میانگین‌های نمونه نسبت به میانگین‌های گروهی است. درنتیجه، مشابه مثال قبل، فرض می‌کنیم توابع نمونه $x(t)$ و $y(t)$ در زمان دلخواه t_0 روی محور زمان نمونه گیری شده اند و t_0 بین ۰ تا $2\pi/\omega$ حرکت می‌کند (یک سیکل کامل) و یک متغیر تصادفی با توزیع زیر است:

$$p(t_0) = \begin{cases} \omega/2\pi & \text{for} \quad 0 \leqslant t_0 \leqslant 2\pi/\omega \\ 0 \text{ elsewhere.} & \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{2\pi/\omega} x_0 y_0 \sin(\omega t_0+\theta)\sin(\omega t_0+\omega\tau+\theta-\phi)\frac{\omega}{2\pi}\,dt_0$$

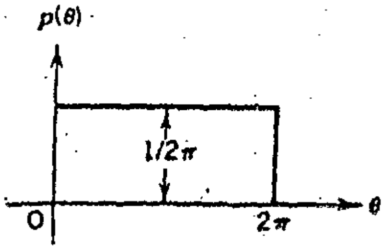
که نتیجه آن با روش قبل یکی است.

مثال

اگر فرآیند تصادفی $Z(t)$ دارای مولفه کاملاً پریودیک باشد، نشان دهید تابع $R_Z(\tau)$ نیز دارای مولفه پریودیک با همان پریود می‌باشد.

حل

با فرض $Z(t) = X(t) + Y(t)$ و فرض مولفه $X(t)$ بصورت زیر:



$$X(t) = \sin(\omega t + \theta)$$

که ω فرکانس زاویه‌ای و θ زاویه اختلاف فاز تصادفی با توزیع یکنواخت بین 0 تا 2π باشد (مطابق شکل).

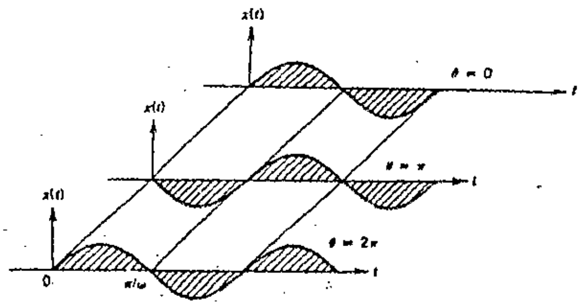
اکنون داریم:

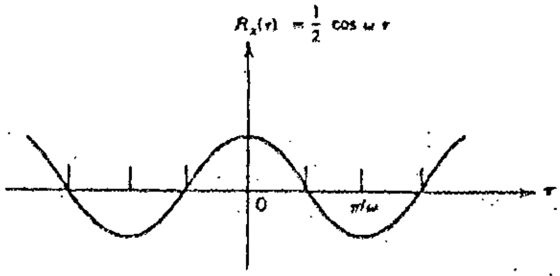
$$R_z(\tau) = E[Z(t)Z(t+\tau)] = E[(X(t)+Y(t))(X(t+\tau)+Y(t+\tau))]$$
$$= R_x(\tau) + R_y(\tau) + 2R_{xy}(\tau)$$

و برای $R_{x(\tau)}$ داریم:

$$R_x(\tau) = \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \theta)\sin(\omega t + \omega\tau + \theta)p(\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\{\cos\omega\tau - \cos[\omega(2t+\tau) + 2\theta]\}\frac{d\theta}{2\pi}$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos\omega\tau$$

که پریودیک با همان پریود می‌باشد.





تمرین سری سوم:

مسائل ۳.۱ تا ۳.۴ کتاب Newland

تحلیل فوریه

Fourier analysis

اکثر مهندسین با تحلیل در حوزه فرکانس آشنا هستند که در آن توابع پریودیک را می‌توان به مولفه‌های هارمونیک تجزیه کرد.

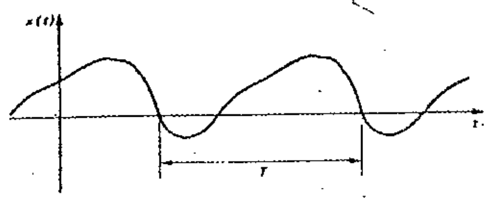
می‌دانیم اگر $x(t)$ یک تابع پریودیک برحسب زمان t با پریود T مطابق شکل باشد، این تابع را می‌توان بصورت سری نامحدود از توابع مثلثاتی بصورت زیر بیان کرد:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + a_2 \cos\frac{4\pi t}{T} + \cdots$$
$$+ b_1 \sin\frac{2\pi t}{T} + b_2 \sin\frac{4\pi t}{T} + \cdots$$

یا به این شکل:

سری فوریه

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin\frac{2\pi kt}{T}\right)$$



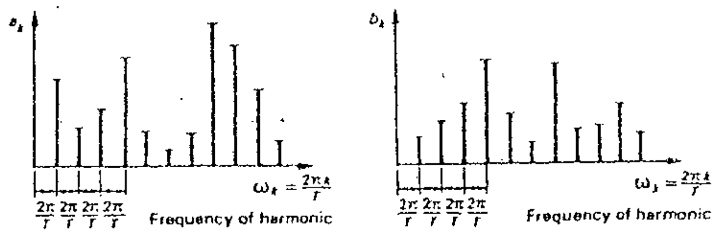
که در آن، a_0 و a_k و b_k ضرایب سری فوریه هستند و از روابط زیر بدست می‌آیند:

ضرایب سری فوریه

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$
$$\underset{k\ge 1}{a_k} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\frac{2\pi kt}{T}\,dt$$
$$\underset{k\ge 1}{b_k} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin\frac{2\pi kt}{T}\,dt.$$

شرایط ریاضی برای همگرایی این سری عموماً تمام مسائل مهندسی عملی را شامل می‌شود. تنها محدودیت اینست که زمانیکه $x(t)$ ناپیوسته است، این سری مقدار متوسط $x(t)$ را در محل ناپیوستگی بدست می‌دهد.

فرض کنید موقعیت محور t در شکل قبل به گونه‌ای تنظیم شود که متوسط $x(t)$ برابر صفر باشد. در اینصورت، ضریب $a_0 = 0$ بوده و ضرایب a_k و b_k متفاوت خواهند بود و مقدار آنها مطابق شکل زیر می‌باشد.



$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

محور افقی در این شکل برابر فرکانس بوده و موقعیت kامین ضریب برابر است با:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

که برابر فرکانس k امین هارمونیک می‌باشد. فاصله بین دو هارمونیک برابر است با:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

زمانیکه T زیاد می‌شود، فاصله فرکانسی $\Delta\omega$ کوچک می‌شود و فاصله مقادیر ضرایب سری فوریه تنگ‌تر می‌شوند. در حد وقتی $T \to \infty$، مقدار این ضرایب عملاً بهم می‌چسبند و توابع پیوسته‌ای از فرکانس را تشکیل می‌دهند.

در این حالت $x(t)$ دیگر بیانگر یک پدیده پریودیک نیست و تحلیل آن بصورت مولفه‌های فرکانسی گسسته ممکن نمی‌باشد. در این حالت سری فوریه به انتگرال فوریه و ضرایب فوریه به توابعی پیوسته از فرکانس بنام تبدیلات فوریه مبدل می‌شوند.

انتگرال فوریه

با جایگذاری ضرایب سری فوریه در این سری، به ازای $a_0 = 0$ داریم:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} \mathrm{d}t \right\} \cos \frac{2\pi kt}{T} + $$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} \mathrm{d}t \right\} \sin \frac{2\pi kt}{T}.$$

با جایگذاری مقادیر $2\pi k/\mathrm{T} = \omega_k$ و $T = 2\pi/\Delta\omega$ از روابط قبل خواهیم داشت:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \omega_k t \, \mathrm{d}t \right\} \cos \omega_k t + $$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \omega_k t \, \mathrm{d}t \right\} \sin \omega_k t.$$

زمانیکه $T \to \infty$، دراینصورت $\Delta\omega \to d\omega$ و علامت $\sum$ به انتگرال با حدود ۰ تا ∞ مبدل می‌شود.

در اینحالت:

$$x(t) = \int_{\omega=0}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\omega t\, dt\right\}\cos\omega t + \int_{\omega=0}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin\omega t\, dt\right\}\sin\omega t$$

با تعریف:

مؤلفه‌های تبدیل فوریه

$$\begin{cases} A(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\omega t\, dt \\ B(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin\omega t\, dt \end{cases}$$

داریم:

انتگرال فوریه

$$x(t) = 2\int_{0}^{\infty} A(\omega)\cos\omega t\, d\omega + 2\int_{0}^{\infty} B(\omega)\sin\omega t\, d\omega.$$

توابع $A(\omega)$ و $B(\omega)$ بنام مولفه‌های تبدیل فوریه $x(t)$ نام دارند و معادله بالا بیان $x(t)$ به شکل **انتگرال فوریه** یا **تبدیل معکوس فوریه** می‌باشد.

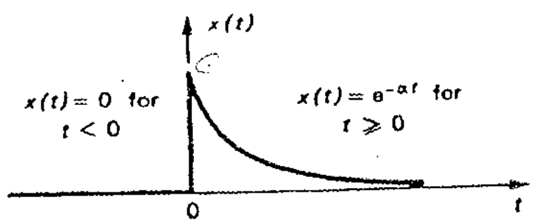
در کاربردهای مهندسی، شرط مهمی که وجود دارد به شکل زیر نشان داده می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty.$$

مشابه سری فوریه گسسته، زمانیکه ناپیوستگی در $x(t)$ داشته باشیم، معادله انتگرال فوریه در محل ناپیوستگی به سمت مقدار متوسط $x(t)$ میل می‌کند.

مثال

مولفه های $A(\omega)$ و $B(\omega)$ تبدیل فوریه را برای تابع نشان داده شده در شکل زیر بدست آورید.



حل

$\int u.dv = uv - \int v.du$

داشتیم:

$$B(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin\omega t\,dt. \qquad A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos\omega t\,dt$$

با انتگرال جزء به جزء داریم:

$$A(\omega) = \int_0^\infty \overbrace{e^{-\alpha t}}^{dv}\underbrace{\cos\omega t}_{u}\,dt = \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\cos\omega t\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\omega}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin\omega t\,dt$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{\omega}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin\omega t\,dt.$$

$$B(\omega) = \int_0^\infty \overbrace{e^{-\alpha t}}^{dv}\underbrace{\sin\omega t}_{u}\,dt = \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin\omega t\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\omega}{\alpha}e^{-\alpha t}\cos\omega t\,dt$$

$$= \frac{\omega}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos\omega t\,dt.$$

بنابراین:

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos\omega t\,dt = \frac{1}{\alpha} \qquad \left(1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin\omega t\,dt = \frac{\omega}{\alpha^2}$$

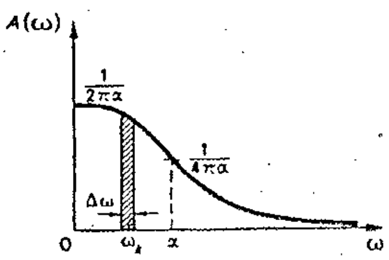
و نهایتاً:

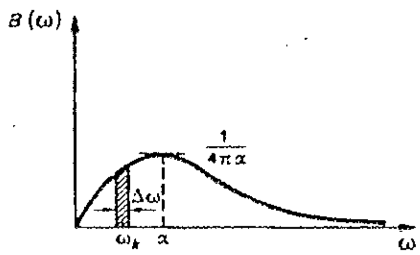
$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \qquad B(\omega) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

و انتگرال فوریه به شکل زیر خواهد بود:

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}\cos\omega t\,d\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\sin\omega t\,d\omega.$$

توابع $A(\omega)$ و $B(\omega)$ در شکل زیر نشان داده شده است.





زمانیکه $t = 0$ باشد داریم:

$$x(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}\,d\omega = \frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

که برابر مقدار متوسط تابع در محل ناپیوستگی است.

در حقیقت، انتگرال فوریه برابر حد سری فوریه به ازای وقتی است که پریود به سمت بینهایت میل کند. همچنین، انتگرالهای فوریه بیانگر ترکیب مولفه‌های فرکانسی یک تابع غیر پریودیک هستند. در ادامه خواهیم دید که به منظور فهم مشخصات فرکانسی فرآیندهای تصادفی، لازم است ترکیب فرکانسی توابع همبستگی آنها را آنالیز کنیم که عموماً توابع غیر پریودیک هستند.

مقایسه سری و انتگرال فوریه

مقایسه معادلات تبدیل فوریه با ضرایب سری فوریه و انتگرال فوریه با سری فوریه اطلاعات مفیدی به ما می‌دهد.

یکی اینکه بُعد فیزیکی مولفه های تبدیل فوریه، $A(\omega)$ و $B(\omega)$ با ضرایب سری فوریه، a_k و b_k متفاوت است. دیگری اینکه ناحیه المان کوچک $A(\omega_k)\Delta\omega$ و $B(\omega_k)\Delta\omega$ در شکل مثال قبل دارای ابعادي مشابه a_k و b_k در شکل حالت گسسته این ضرایب بود و با نصف دامنه مولفه‌های هارمونیک یک تابع پریودیک قابل مقایسه است (ضریب ۲ در رابطه انتگرال فوریه در رابطه سری فوریه وجود ندارد).

انتگرال فوریه مختلط

در تئوری ارتعاشات تصادفی متداول است که معادلات انتگرال و تبدیل فوریه را به شکل مختلط بیان می‌کنند. به کمک رابطه زیر:

$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$

$e^{x-iy} = e^{x}(\cos y - i\sin y)$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

و تعریف تابع $X(\omega)$ بصورت زیر:

زوج $A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\cos\omega t\cdot dt$

فرد $B(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\sin\omega t\cdot dt$

$$X(\omega) = A(\omega) - iB(\omega)$$

و جایگذاری از روابط $A(\omega)$ و $B(\omega)$ داریم:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left(\cos\omega t - i\sin\omega t\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

این رابطه، تعریف رسمی $X(\omega)$ است و بنام تبدیل فوریه $x(t)$ نام دارد.

چون $A(\omega)$ تابعی زوج و $B(\omega)$ تابعی فرد از ω هستند، بنابراین $A(\omega)\cos\omega t$ و $B(\omega)\sin\omega t$ هر دو توابعی زوج از ω هستند و رابطه انتگرال فوریه را می‌توان بصورت زیر نیز بیان کرد:

فرمول ص ۸۷

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\cos\omega t\, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega)\sin\omega t\, d\omega$$

(حدود انتگرال بجای ۰ تا ∞، از $-\infty$ تا $+\infty$ عوض شد و ضریب ۲ نیز حذف شد).

اگر دو رابطه زیر (که برابر صفر هستند) را به رابطه بالا اضافه کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\sin\omega t\, d\omega = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\omega)\cos\omega t\, d\omega = 0.$$

خواهیم داشت:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\cos\omega t\, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega)\sin\omega t\, d\omega +$$
$$+ i\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\sin\omega t\, d\omega - i\int_{-\infty}^{\infty} B(\omega)\cos\omega t\, d\omega$$

نتیجه اینکه:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{A(\omega) - iB(\omega)\}\{\cos\omega t + i\sin\omega t\}\, d\omega$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega.$$

روابط نهایی زیر بنام زوج تبدیل فوریه معروف هستند:

زوج تبدیل فوریه

$$\begin{cases} X(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \\ x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \end{cases}$$

مثال

تبدیل فوریه (مختلط) تابع مثال قبل را پیدا کنید.

حل

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{\alpha+i\omega} e^{-(\alpha+i\omega)t}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha+i\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right) - i\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)$$

$= A(\omega) - iB(\omega)$ from the previous example

تمرین سری چهارم:

مسائل ٤.١ تا ٤.٤ کتاب Newland

چگالی طیفی (چگالی طیف توان)

چگالی طیف توان

Spectral density / Power spectral density

در این قسمت، ترکیب فرکانسی فرآیندهای تصادفی که بطور طبیعی رخ می‌دهند بررسی می‌شود. از آنجا که تاریخچه زمانی $x(t)$ یک تابع نمونه پریودیک نیست، قابل بیان بصورت سری فوریه گسسته نیز نمی‌باشد. علاوه بر این، برای یک فرآیند ایستا، $x(t)$ شرط زیر را ارضا نمی‌کند:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

بنابراین تئوری کلاسیک آنالیز فوریه را نمی‌توان بر روی یک تابع نمونه اعمال نمود. این مشکل را می‌توان با آنالیز تابع خود همبستگی $R_x(\tau)$، بجای توابع نمونه فرآیند، برطرف کرد.

منطق پشت این قضیه اینست که تابع خودهمبستگی بطور غیر مستقیم اطلاعاتی را درباره فرکانسهای موجود در فرآیند تصادفی به ما می‌دهد. فرکانسهای موجود در نمودار $R_x(\tau)$ در برابر τ، محتوای فرکانسی توابع نمونه فرآیند تصادفی $x(t)$ را برمی‌گرداند.

در این بخش صرفاً بر روی آنالیز فرکانسی $R_x(\tau)$ تمرکز می‌کنیم زیرا اگر بخواهیم از روشهای کلاسیک فوریه استفاده کنیم راه دیگری نداریم.

اگر محور صفر فرآیند تصادفی $x(t)$ طوری نرمال شود که مقدار میانگین فرآیند $m = E[x]$ برابر صفر باشد، مشروط بر اینکه $x(t)$ فاقد مولفه پریودیک باشد داریم:

68 $R_x(\tau \to \infty) \Rightarrow m^2$

$$R_x(\tau \to \infty) = 0$$

و شرط زیر ارضا خواهد شد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_x(\tau)|\, d\tau < \infty$$

تبدیل فوریه $R_x(\tau)$ و تبدیل معکوس آن بر اساس روابط فصل قبل برابر است با:

چگالی طیفی (چگالی طیف توان)

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \\ R_x(\tau) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega \end{cases}$$

در این روابط، $S_x(\omega)$ بنام **چگالی طیفی (یا چگالی طیف توان)** فرآیند x نام دارد و تابعی از فرکانس زاویه‌ای ω است. **مهمترین خاصیت این تابع اینست** که زمانیکه $\tau = 0$ باشد، داریم:

$$R_x(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega$$

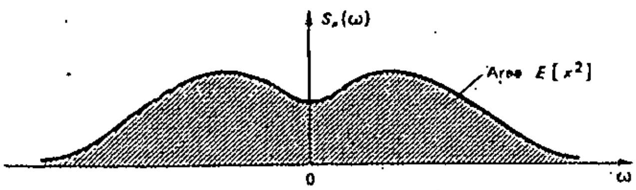
و از تعریف پایه $R_x(\tau)$

$$E[x(t)x(t+\tau)] = f(\tau) = R_x(\tau)$$

خواهیم داشت:

$$\{\tau = 0\} \Rightarrow \quad E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega.$$

یعنی میانگین مربع فرآیند تصادفی x برابر سطح زیر نمودار چگالی طیفی $S_x(\omega)$ در برابر ω است. بعد چگالی طیفی برابر میانگین مربع تقسیم بر واحد فرکانس است و نام دیگر آن، **چگالی طیفی میانگین مربع** می‌باشد. به استناد رابطه بالا، این تابع هیچگاه منفی نخواهد بود.



قبلا در تبدیل فوریه مختلط دیدیم:

$$S_x(\omega) = A(\omega) - iB(\omega)$$

که در آن:

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau \qquad B(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau.$$

داخل انتگرال دوم تابعی است فرد و حاصل انتگرال برابر صفر می‌باشد.

در نتیجه:

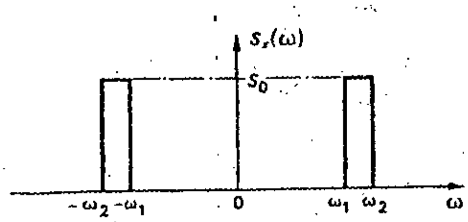
$$S_x(\omega) = A(\omega)$$

یعنی چگالی طیفی یک تابع حقیقی از ω است.

نتیجه اینکه، تابع چگالی طیفی میانگین مربع یک فرآیند تصادفی، یک تابع زوج، غیر منفی و حقیقی است.

مثال

مطلوبست تعیین میانگین مربع و تابع خودهمبستگی فرآیند تصادفی ایستای $x(t)$ که تابع چگالی طیفی میانگین مربع آن مطابق شکل زیر است:



تابع چگالی طیفی

حل

از روابط قبل داریم:

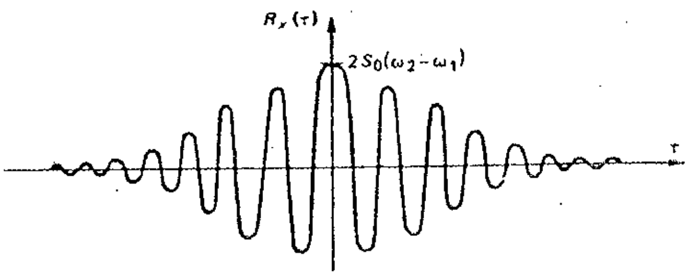
$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\,d\omega = 2S_0(\omega_2 - \omega_1)$$

و همچنین:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega$$

چون تابع چگالی طیفی یک تابع زوج است داریم:

$$\begin{aligned}
R_x(\tau) &= 2\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0\cos\omega\tau\,d\omega \\
&= 2S_0\left[\frac{1}{\tau}\sin\omega\tau\right]_{\omega_1}^{\omega_2} \\
&= \frac{2S_0}{\tau}(\sin\omega_2\tau - \sin\omega_1\tau) \\
&= \frac{4S_0}{\tau}\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\tau\cdot\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)\tau
\end{aligned}$$

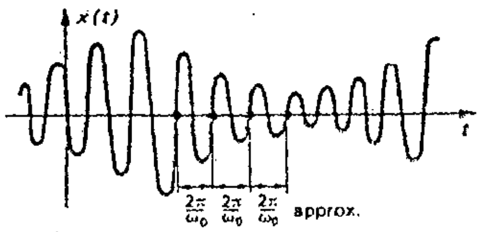


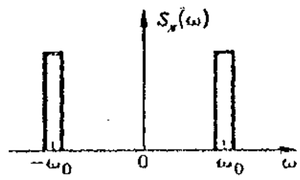
فرآیندهای باند پهن و باند باریک
Narrow band and broad band processes

فرآیندی که چگالی طیفی آن مشابه مثال قبل باشد یک فرآیند باند باریک است زیرا چگالی طیفی تنها باند باریکی از فرکانسها را اشغال می‌کند. تابع خودهمبستگی چنین فرآیندی در شکل مثال قبل نشان داده شد. در اینحالت، فرکانس غالب $R_x(\tau)$ در برابر τ برابر مقدار متوسط $\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$ می‌باشد.

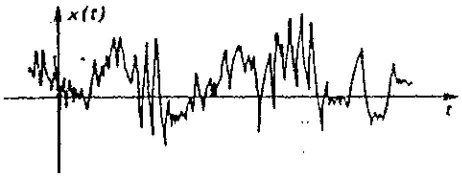
همبستگی وقتی ماکزیموم است که $\tau = 0$ باشد و متناظر یک نمودار کسینوسی با دامنه کاهشی است و با افزایش τ روی نمودار، همبستگی در مقادیر همفاز τ به تدریج از بین می‌رود.

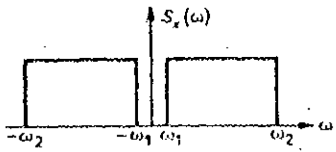
تاریخچه زمانی یک فرآیند نمونه باند باریک در شکل زیر نشان داده شده است.





در فرآیند باند پهن، تابع چگالی طیفی، باند پهنی از فرکانس را اشغال می‌کند و تاریخچه زمانی از جمع اثرات تمام باند فرکانسها مطابق شکل زیر ساخته می‌شود.





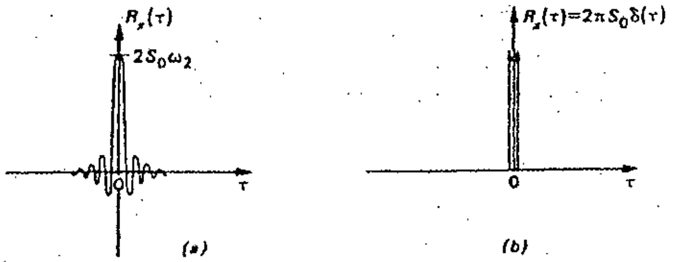
در حد، زمانیکه $\omega_1 = 0$ و $\omega_2 = \infty$، طیف حاصل را نویز یا اغتشاش سفید (White Noise) می‌گویند.

مقدار میانگین مربع یک فرآیند نویز سفید باید نامحدود باشد زیرا نویز سفید صرفاً یک مفهوم تئوری است ولی در عمل، یک طیف را زمانی نویز سفید می‌گویند که یک نویز با باند پهن باشد و پهنای آن تمام فرکانسهای مورد نظر را شامل شود.

شکل تابع خودهمبستگی متناظر با نویز سفید را می‌توان از مثال قبل پیدا کرد. با قراردادن $\omega_1 = 0$، تابع $R_x(\tau)$ برابر است با:

$$R_x(\tau) = \frac{4S_0}{\tau}\cos\frac{\omega_2\tau}{2}\sin\frac{\omega_2\tau}{2} = 2S_0\frac{\sin\omega_2\tau}{\tau}$$

شکل (a) این وضعیت را نشان می‌دهد. با قراردادن $\omega_2 = \infty$، شکل (b) با ارتفاع نامحدود و عرض صفر و مساحت زیر منحنی برابر $2\pi S_0$ حاصل می‌شود.



برای بیان این وضعیت از تابع دلتای دیراک استفاده می‌شود.

توابع دلتا (یا ضربه)، در آنالیز فوریه نقش تعیین کننده‌ای دارند. تابع دلتای دیراک به شکل $\delta(\tau)$ همه جا صفر است بجز در $\tau = 0$ و همچنین:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\,d\tau = 1.$$

به شکل کلی، تابع دلتای $\delta(\tau - T)$ همه جا صفر است بجز در $\tau = T$ و داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - T) f(\tau)\,d\tau = f(\tau = T)$$

که $f(\tau)$ هر تابع پیوسته دلخواه می‌باشد.

با استفاده از این تعریف، تابع خود همبستگی یک فرآیند تصادفی ایستای نویز سفید با چگالی طیفی برابر S_0 برابر است با:

$$R_x(\tau) = 2\pi S_0\,\delta(\tau).$$

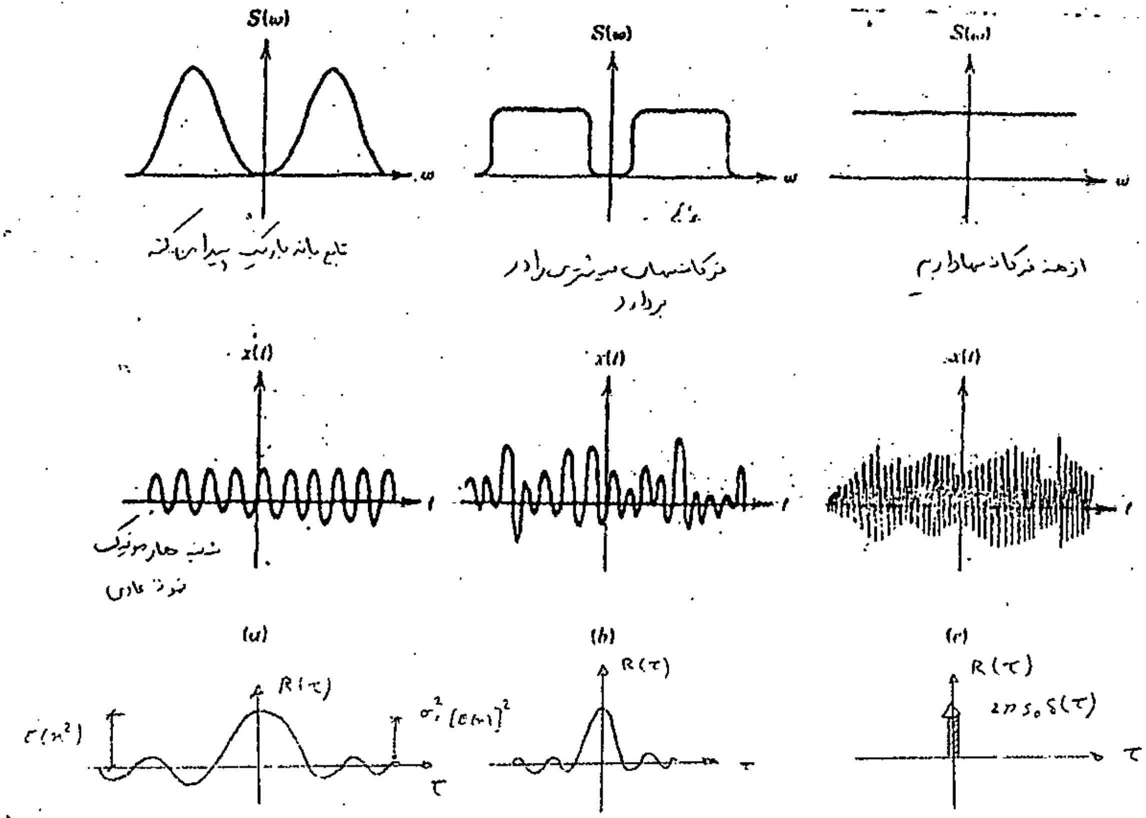
بنابراین مساحت زیر منحنی تابع $R_x(\tau)$ برابر $2\pi S_0$ می‌باشد. اگر تبدیل فوریه این تابع را برای محاسبه چگالی طیفی انجام دهیم خواهیم دید:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi S_0\,\delta(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

و

$$S_x(\omega) = S_0.$$

سه نمونه فرآیند تصادفی و تابع چگالی طیفی متناظر در شکل زیر نشان داده شده است.



چگالی طیفی فرآیندهای حاصل از فرآیند اصلی

قبلاً دیدیم اگر چگالی طیفی $S_x(\omega)$ یک فرآیند تصادفی $x(t)$ موجود باشد، میتوان مقدار میانگین مربع $E[x^2]$ را مطابق رابطه زیر محاسبه نمود:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega.$$

همچنین، میتوان چگالی طیفی فرآیندهایی که از مشتق گیری x بدست می‌آیند را محاسبه نمود. مثلاً فرآیند سرعت $dx/dt = \dot{x}$ و فرآیند شتاب $d^2x/dt^2 = \ddot{x}$.

محاسبه از تابع خودهمبستگی شروع می‌شود.

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

که برای میانگین گروهی می‌توان آنرا بصورت زیر نوشت:

$$R_x(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} x_r(t)x_r(t+\tau).$$

مشتق $R_x(\tau)$ نسبت به τ را درنظر بگیرید.

در حقیقت هر ترم $x_r(t)x_r(t+\tau)$ را باید مشتق بگیریم و t را ثابت فرض کنیم.

برای هر ترم داریم:

$$\frac{d}{d\tau}\underbrace{\{x_r(t)x_r(t+\tau)\}}_{R_x(\tau)} = x_r(t)\frac{d}{d\tau}x_r(t+\tau)$$

$$= x_r(t)\frac{d}{d(t+\tau)}x_r(t+\tau)\cdot\frac{d(t+\tau)}{d\tau}$$

$$= x_r(t)\dot{x}_r(t+\tau)$$

و خواهیم داشت:

$$\frac{d}{d\tau}(R_x(\tau)) = E[x(t)\dot{x}(t+\tau)].$$

برای یک فرآیند ایستا، میانگین گروهی مستقل از زمان t خواهد بود. بنابراین:

$$E[x(t)\dot{x}(t+\tau)] = E[x(t-\tau)\dot{x}(t)]$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{d}{d\tau}(R_x(\tau)) = E[x(t-\tau)\dot{x}(t)].$$

با مشتق گیری مجدد نسبت به τ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}(R_x(\tau)) = -E[\dot{x}(t-\tau)\dot{x}(t)]$$

$$= -R_{\dot{x}}(\tau)$$

که در آن، $R_{\dot{x}}(\tau)$ تابع خودهمبستگی برای فرآیند جدید $\dot{x}(t)$ است. همچنین، از انتگرال فوریه داریم:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega.$$

سمت راست این معادله یک انتگرال معین نسبت به ω است و τ ثابت است و حدود انتگرال نیز مستقل از τ می‌باشد.

بنابراین می‌توان نسبت به τ در زیر علامت انتگرال مشتق گرفت:

$$\frac{d}{d\tau}(R_x(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega S_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega \qquad \frac{d^2}{d\tau^2}(R_x(\tau)) = -\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega.$$

از ترکیب روابط قبل می‌توان دید که تابع خودهمبستگی برای فرآیند جدید را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$R_{\dot{x}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega.$$

همچنین به کمک رابطه زیر:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

خواهیم داشت:

$$R_{\dot{x}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

و در نتیجه:

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$$

بنابراین چگالی طیفی فرآیند جدید فقط ω^2 برابر چگالی طیفی فرآیند اصلی است. این یک نتیجه بسیار مهم است زیرا به کمک آن میتوان میانگین مربع سرعت $E[\dot{x}^2]$ را از روی $S_{\dot{x}}(\omega)$ تعیین کرد.

یعنی:

$$E[\dot{x}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega)\, d\omega.$$

بطور مشابه میانگین مربع شتاب برابر است با:

$$E[\ddot{x}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{x}}(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_x(\omega)\, d\omega$$

چگالی طیفی متقابل

Cross-spectral density

دیدیم که چگونه چگالی طیفی یک فرآیند تصادفی به شکل تبدیل فوریه تابع خودهمبستگی‌اش بدست آمد. با استفاده از این مفهوم، چگالی طیفی متقابل یک جفت فرآیند تصادفی را می‌توان برابر تبدیل فوریه تابع همبستگی متقابل متناظر آن دو فرآیند تعریف کرد.

بنابراین اگر $R_{xy}(\tau)$ و $R_{yx}(\tau)$، توابع همبستگی متقابل باشند خواهیم داشت:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \qquad S_{yx}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

و رابطه تبدیل فوریه معکوس آنها نیز بصورت زیر است:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega \qquad R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{yx}(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega.$$

شرط وجود این انتگرالها اینست که:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_{xy}(\tau)|\, d\tau < \infty$$

و این به این معنی است که $x(t)$ و $y(t+\tau)$ وقتی $\tau \to \infty$ باید غیرهمبسته باشند، یعنی m_x یا m_y (یکی از مقادیر میانگین) باید صفر باشند.

قبلاً دیدیم توابع همبستگی متقابل از طریق رابطه زیر به یکدیگر مربوط می‌باشند:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t-\tau)y(t)] = R_{yx}(-\tau)$$
$$R_{yx}(\tau) = E[y(t-\tau)x(t)] = R_{xy}(-\tau)$$

بنابراین با قرار دادن:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$$

داریم:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(-\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

با تغییر نام τ به τ' داریم:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\tau'=\infty}^{\tau'=-\infty} R_{yx}(\tau')\, e^{i\omega\tau'}\,(-d\tau')$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau')\, e^{i\omega\tau'}\, d\tau'$$

با قرار دادن:

$$S_{xy}(\omega) = A(\omega) - iB(\omega) \quad \text{و} \quad S_{yx}(\omega) = C(\omega) - iD(\omega)$$

که در آن، A تا D توابعی حقیقی از ω هستند.

از مقایسه رابطه بالا با رابطه زیر:

$$S_{yx}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

نتیجه می‌شود:

$$D(\omega) = -B(\omega) \quad \text{و} \quad C(\omega) = A(\omega)$$

زیرا انتگرالهای معین مستقل از متغیر انتگرال گیری هستند. بنابراین $S_{yx}(\omega)$ زوج مختلط $S_{xy}(\omega)$ می‌باشد و عمولاً به شکل زیر نشان داده می‌شود:

$$S_{yx}(\omega) = S^{*}_{xy}(\omega)$$

و همچنین:

$$S_{xy}(\omega) = S^{*}_{yx}(\omega)$$

مثال

فرآیند تصادفی نویز سفید و ارگودیک $y(t)$ نتیجه یک فرآیند مشابه $x(t)$ با زمان تاخیر T است. اگر چگالی طیفی هر دو فرآیند برابر S_0 باشد، مطلوبست محاسبه توابع همبستگی متقابل و چگالی طیفی متقابل.

حل

داشتیم:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = R_{yx}(-\tau).$$

در اینجالت $y(t+T) = x(t)$ است، بنابراین $y(t) = x(t-T)$ خواهد بود و داریم:

$$y(t+\tau) = x(t+\tau-T)$$

نتیجه می‌شود:

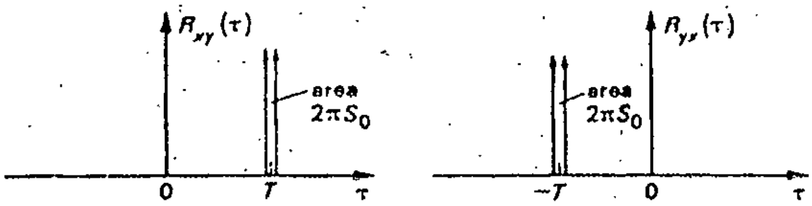
$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)x(t+\tau-T)].$$

سمت راست این معادله برابر تابع خودهمبستگی $R_x(\tau - T)$ است و برابر است با:

$$2\pi S_0\,\delta(\tau - T)$$

بنابراین:

$$R_{xy}(\tau) = 2\pi S_0\,\delta(\tau - T) = R_{yx}(-\tau)$$



چون این دو فرآیند هر دو نویز سفید هستند، توابع همبستگی متقابل آنها همه جا صفر است بجز برای مقدار منفرد τ که در آن $x = y$ باشد.

بنابراین:

$$R_{xy}(\tau = T) = R_{yx}(\tau = -T) = R_x(\tau = 0)$$

برای چگالی طیفی دیدیم:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

بنابراین:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi S_0\,\delta(\tau - T)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$
$$= S_0\,e^{-i\omega T}$$

همچنین:

$$S_{yx}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi S_0\,\delta(\tau + T)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$
$$= S_0\,e^{i\omega T}$$

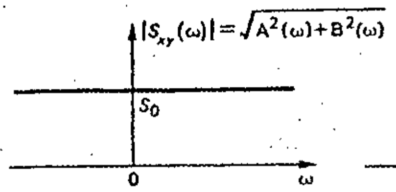
می‌بینیم که این دو تابع، زوج مختلط یکدیگرند.

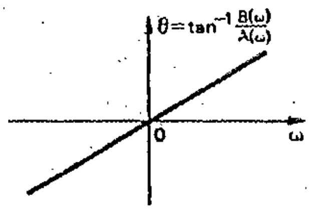
با قراردادن:

$$S_{xy}(\omega) = A(\omega) - iB(\omega)$$

داریم:

$$A(\omega) = S_0 \cos \omega t$$
$$B(\omega) = S_0 \sin \omega t$$





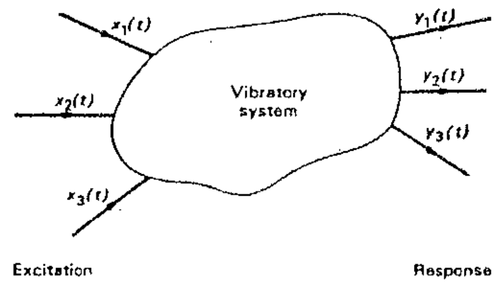
تمرین سری پنجم:

مسائل ۵.۱ تا ۵.٤ کتاب Newland و مسائل ۲.۳ تا ۲.۵ و ۳.۱ تا ۳.۳ کتاب Yang

روابط تحریک-پاسخ برای سیستمهای خطی یک درجه آزادی

مشخصات **پاسخ تعینی** سیستمهای یک درجه آزادی در این بخش مورد بررسی قرار می‌گیرد. از دینامیک سازه کلاسیک می‌دانیم برای بیان پاسخ یک سیستم کلی در برابر تحریک تعینی (غیر تصادفی) چندین روش وجود دارد.

فرض کنید تعدادی ورودی بنامهای $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$, etc., که مبین تحریک و تعدادی خروجی بنامهای $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$, etc., که مبین پاسخ می‌باشند داریم.



ورودی می‌تواند نیرو یا فشار و خروجی می‌تواند جابجایی، سرعت، شتاب و یا ترکیبی از اینها باشد. در اینجا ما با سیستمهای خطی سر و کار داریم به این معنی که متغیر پاسخ $y(t)$ از طریق یک معادله دیفرانسیل خطی به شکل زیر با توابع تحریک در ارتباط است:

$$a_n\frac{d^n y_1}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y_1}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy_1}{dt}+a_0y_1=$$

$$=\Big\{b_r\frac{d^r x_1}{dt^r}+b_{r-1}\frac{d^{r-1}x_1}{dt^{r-1}}+\cdots+b_1\frac{dx_1}{dt}+b_0x_1+$$

$$+c_s\frac{d^s x_2}{dt^s}+c_{s-1}\frac{d^{s-1}x_2}{dt^{s-1}}+\cdots+c_1\frac{dx_2}{dt}+c_0x_2+$$

$$+d_t\frac{d^t x_3}{dt^t}+d_{t-1}\frac{d^{t-1}x_3}{dt^{t-1}}+\cdots+d_1\frac{dx_3}{dt}+d_0x_3+$$

$$+\cdots\cdots\Big\}.$$

ضرایب a, b, c, d, etc., در حالت کلی می‌توانند توابعی برحسب زمان باشند ولی ما فقط حالتی را در نظر می‌گیریم که ثابت باشند (در دینامیک سازه کلاسیک مشخصات سیستم هستند) و این بدین معنی است که مشخصات سیستم ارتعاشی با زمان تغییر نمی‌کند.

این معادلات خطی‌اند، زیرا:

اگر $y_1'(t)$ برابر پاسخ به تحریک $x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)$, etc., و $y_1''(t)$ نیز پاسخ به تحریک $x_1''(t), x_2''(t), x_3''(t)$, etc., باشد، دراینصورت پاسخ به تحریک مرکب زیر:

$$x_1'(t)+x_1''(t), x_2'(t)+x_2''(t), x_3'(t)+x_3''(t), \text{etc.},$$

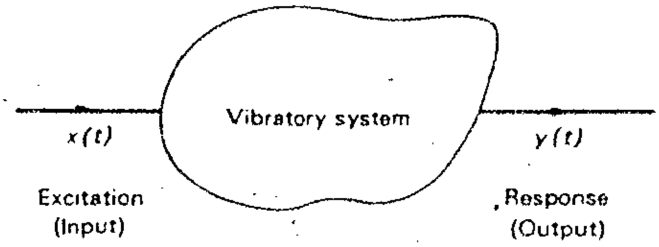
برابر است با:

$$y_1''(t)+y_2''(t)$$

این یعنی اصل جمع آثار قوا یا *Principle of linear superposition*

با بکارگیری اصل جمع آثار قوا مساله ما ساده می‌شود زیرا کافی است نحوه تعیین پاسخ (خروجی) از یک تحریک (ورودی) تنها را بدانیم. در اینصورت می‌توان با جمع تک‌تک پاسخهای ناشی از چندین ورودی، پاسخ به تحریک مرکب آنها را در هر نقطه‌ای بدست آورد.

در حقیقت، سیستم ساده شده زیر را خواهیم داشت که تنها یک متغیر ورودی و تنها یک متغیر خروجی وجود دارد:



روش کلاسیک (دینامیک سازه کلاسیک)

اگر معادلات حرکت برای سیستم خطی با پارامترهای ثابت را بتوان بدست آورد، یک معادله دیفرانسیل خطی به شکل زیر خواهیم داشت:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$

$$= b_r \frac{d^r x}{dt^r} + b_{r-1} \frac{d^{r-1} x}{dt^{r-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

برای یک تحریک معلوم $x(t)$ و شرایط اولیه معلوم، این معادله را می‌توان به روشهای کلاسیک حل کرد و جواب کامل $y(t)$ را بدست آورد. **به دو دلیل معمولاً این روش برای مسائل ارتعاش تصادفی مناسب نیست.** اول اینکه معادله دیفرانسیل بالا را به ندرت می‌توان مستقیماً بدست آورد زیرا اطلاعات کافی و قابل دسترس وجود ندارد و روشهای آزمایشگاهی ساده برای تعیین ضرایب a و b معمولاً دردسترس نیست. دوم اینکه، حتی اگر معادله دیفرانسیل معلوم باشد، صرفاً چنانچه تاریخچه زمانی کامل $x(t)$ در دسترس باشد می‌توان تاریخچه زمانی کامل $y(t)$ را تعیین کرد که در ارتعاشات تصادفی این داده‌ها موجود نیستند.
به منظور محاسبه مقادیر میانگین متغیرهای خروجی (پاسخ)، بهتر است روی روشهایی که مبین رابطه بین $y(t)$ و $x(t)$ هستند تمرکز کنیم.

۱- حل در حوزه فرکانس: روش پاسخ فرکانسی Frequency Response Method

یکی از روشهای توصیف مشخصات دینامیکی یک سیستم خطی، تعیین پاسخ به یک تحریک ورودی سینوسی است.
با توجه به شکل قبل، اگر ورودی برابر یک تحریک سینوسی با دامنه ثابت و فرکانس مشخص باشد:

$$x(t) = x_0 \sin \omega t$$

دراینصورت، طبق رابطه قبل (معادله دیفرانسیل کلی حرکت)، خروجی حالت پایدار (جواب خصوصی) نیز یک تابع سینوسی با دامنه مشخص با همان فرکانس و با زاویه اختلاف فاز ϕ خواهد بود.

بنابراین:

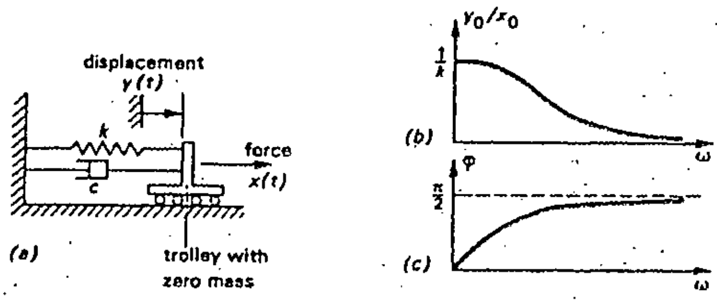
$$y(t) = y_0 \sin(\omega t - \phi)$$

فرض می‌کنیم وقتی تحریکی نداریم، سیستم ساکن است و $y(t) = 0$.

هر اطلاعاتی در مورد نسبت دامنه y_0/x_0 و اختلاف فاز ϕ، تابع انتقال سیستم در فرکانس مشخص ω را تعیین می‌کند. با تغییر فرکانس تحریک و اندازه‌گیری پاسخ در مجموعه‌ای از فرکانسهای نزدیک بهم، نسبت دامنه و زاویه اختلاف فاز را می‌توان بصورت تابعی از فرکانس ترسیم نمود و در تئوری اگر محدوده فرکانسی از صفر تا بینهایت گسترش یابد، مشخصات دینامیکی سیستم بطور کامل تعیین می‌شوند.

مثال

مطلوبست تعیین نسبت دامنه و زاویه فاز برای انتقال تحریک سینوسی از طریق یک سیستم فنر-میراگر (فاقد جرم) مطابق شکل. تحریک برابر نیروی $x(t)$ است و پاسخ برابر جابجایی $y(t)$ می‌باشد.



حل

برای یک فنر خطی با سختی k و میراگر ویسکوز خطی با ضریب c، معادله حرکت برابر است با:

$$c\dot{y} + ky = x(t)$$

گفتیم اگر تحریک برابر یک موج سینوسی با دامنه ثابت به شکل زیر باشد:

$$x(t) = x_0 \sin \omega t$$

cos (a - b) = cos a cos b + sin a sin b
sin (a - b) = sin a cos b - cos a sin b

پاسخ به شکل زیر خواهد بود:

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t - \phi).$$

بنابراین:

$$c y_0 \omega \cos(\omega t - \phi) + k y_0 \sin(\omega t - \phi) = x_0 \sin \omega t$$

در نتیجه:

$$y_0 \sin \omega t \left\{ c\omega \sin\phi + k\cos\phi - \frac{x_0}{y_0} \right\} + y_0 \cos\omega t \, \{ c\omega\cos\phi - k\sin\phi \} = 0.$$

هر دو ترم داخل { } به تنهایی باید برابر صفر باشند. بنابراین:

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{(c^2\omega^2 + k^2)}}$$

و همچنین:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{c\omega}{k}$$

بجای اینکه نسبت دامنه و زاویه فاز را دو کمیت مجزا درنظر بگیریم، در تئوری ارتعاشات متداول است که از یک تابع مختلط مثلاً $H(\omega)$ برای بیان هر دو کمیت استفاده شود و اندازه آن برابر نسبت دامنه و نسبت بخش موهومی به بخش حقیقی آن برابر تانژانت زاویه فاز می‌باشد.

$H(\omega)$: برای بیان هر دو کمیت استفاده می‌شود. ... از آن ... بدست داده

... بدست بدون موهومی ... آن ... برابر ... است ...

بنابراین اگر تعریف کنیم:

$$H(\omega) = A(\omega) - iB(\omega)$$

که $A(\omega)$ و $B(\omega)$ توابع حقیقی از ω هستند. بنابراین:

$$|H(\omega)| = \sqrt{(A^2 + B^2)} = \frac{y_0}{x_0}$$

و:

$$\frac{\text{Imaginary part}}{\text{Real part}} = \frac{B}{A} = \tan\phi$$

اگر از نوشتار نمایی (مختلط) استفاده کنیم، برای ورودی سینوسی با دامنه x_0 داریم:

$$x(t) = x_0 \sin \omega t = x_0\{\text{the imaginary part of } e^{i\omega t}\} = x_0 \operatorname{Im}(e^{i\omega t}),$$

و خروجی هارمونیک متناظر برابر است با:

$$y(t) = x_0 \operatorname{Im}\{H(\omega) e^{i\omega t}\}$$

برای اثبات میتوان به شکل زیر عمل کرد:

۶۴ R

$$\begin{aligned}
y(t) &= x_0 \operatorname{Im}\{A(\omega) - iB(\omega)(\cos\omega t + i\sin\omega t)\} \\
&= x_0\{A(\omega)\sin\omega t - B(\omega)\cos\omega t\} \\
&= x_0\sqrt{(A^2 + B^2)}\sin\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{B}{A}\right) \\
&= y_0 \sin(\omega t - \phi)
\end{aligned}$$

بطور خلاصه

اگر ورودی اعمالی به یک سیستم خطی شامل یک هامونیک با دامنه ثابت به شکل زیر باشد:

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t}$$

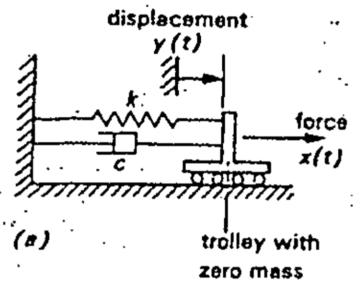
خروجی متناظر عبارتست از:

$$y(t) = H(\omega) x_0 e^{i\omega t}$$

که در آن، $H(\omega)$ بنام **تابع پاسخ فرکانسی مختلط** سیستم شناخته می‌شود. در این دو معادله، یا بخش حقیقی یا بخش موهومی (نه هر دو) مد نظر است. در این معادلات لزومی ندارد x_0 حتماً حقیقی باشد.

مثال

مطلوبست تعیین تابع پاسخ فرکانسی برای مثال قبل.



حل

معادله حرکت به شکل زیر است:

$$c\dot{y} + ky = x$$

با قرار دادن (یا بخش حقیقی یا بخش موهومی):

ورودی اسمانی $\quad x(t) = x_0 e^{i\omega t}$

و

خروجی متناظر $\quad y = H(\omega) x_0 e^{i\omega t}$

داریم:

$$(ci\omega + k)H(\omega)e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

درنتیجه:

تابع پاسخ فرکانس $\quad H(\omega) = \dfrac{1}{k + ic\omega} = A(\omega) - iB(\omega)$

بنابراین نسبت دامنه برابر است با:

$$\frac{y_0}{x_0} = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k^2 + c^2\omega^2)}}$$

و همچنین:

$$\tan\phi = \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \frac{c\omega}{k}$$

با یک دیدگاه دیگر هم می‌توان تابع پاسخ فرکانسی مختلط $H(\omega)$ را تعریف کرد.

اگر تبدیل فوریه تابع ورودی $x(t)$ را با $X(\omega)$ نشان دهیم داریم:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

که برابر جمع مولفه‌های فرکانسی تابع تحریک می‌باشد. با جمع پاسخ حاصل از مولفه‌های فرکانسی تابع تحریک $x(t)$ بعنوان تحریک‌های گذرا و دلخواه می‌توان کل پاسخ ناشی از تابع تحریک را بدست آورد.

با این توضیح اگر پاسخ ناشی از مولفه فرکانسی تحریک با دامنه واحد به شکل زیر:

دامنه واحد $\quad x'(t) = e^{i\omega t}$

برابر با:

پاسخ برای دامنه واحد $$y'(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$$

باشد، کل پاسخ با جمع آثار قوا بصورت زیر خواهد بود:

کل پاسخ $$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

(علامت پریم به معنی مشتق نیست و به معنی یک مولفه از تحریک یا پاسخ است) و چون پاسخ $y(t)$ را نیز میتوان برحسب مؤلفه‌های فرکانسی‌اش بصورت زیر نوشت:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

بنابراین خواهیم داشت:

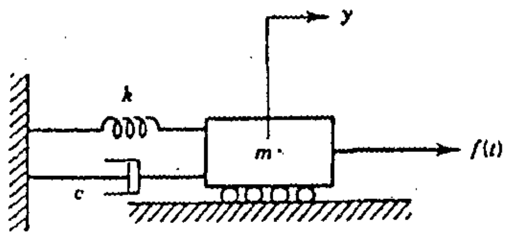
$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

که رابطه مهم بین تبدیل فوریه ورودی و خروجی و تابع پاسخ فرکانسی است و فرمول بسیار مهمی در ارتعاشات تصادفی است.

مثال

تابع پاسخ فرکانسی مختلط سیستم یک درجه آزادی شکل زیر را بدست آورید. جرم و سختی و میرایی با پارامترهای m, k, c و تابع نیروی خارجی (تحریک) با $f(t)$ مشخص شده است.

$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t)$



حل

معادله حرکت سیستم برابر است با:

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = x(t)$$

که در این رابطه، فرکانس طبیعی ω_n و نسبت میرایی ξ و تحریک $x(t)$ بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}, \qquad \xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2km} \Rightarrow \frac{c}{m} = 2k\xi$$

$$c_c = 2km, \qquad x(t) = \frac{f(t)}{m}$$

با جایگزینی:

$$x'(t) = e^{i\omega t}$$

و

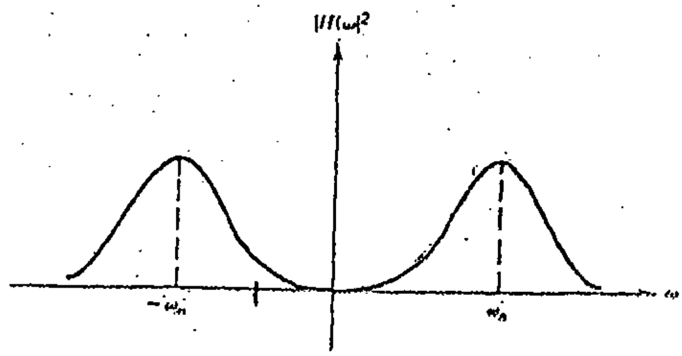
$$y' = H(\omega)e^{i\omega t}$$

و مشتقات آن در معادله حرکت داریم:

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega\omega_n}$$

همچنین:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\omega_n^2}$$



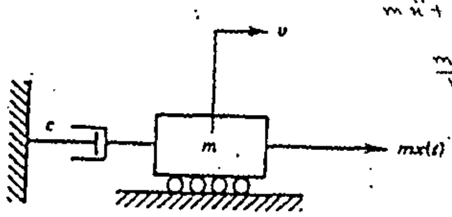
مثال

پاسخ سرعت حالت پایدار سیستم یکدرجه آزادی جرم و میراگر شکل زیر را در برابر تحریک هارمونیک زیر مجاسبه کنید:

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = x(t)$

$\frac{m\dot{v}}{m} + \frac{cv}{m} = \frac{x(t)}{m}$

$$x(t) = a\cos\omega_0 t, \qquad -\infty < t < \infty$$



حل

معادله حرکت سیستم برابر است با:

$\dot{V} + \beta V = x(t)$

$$\dot{v} + \beta v = x(t)$$

که در آن:

$$\beta = c/m.$$

پاسخ سرعت ناشی از مولفه فرکانسی تحریک با دامنه واحد زیر:

$$x'(t) = e^{i\omega t}$$ تحریک با دامنه واحد

برابر است با:

$$v'(t) = H_1(\omega)e^{i\omega t}$$ پاسخ سرعت ناشی از مولفه فرکانسی

با جایگزینی در معادله حرکت داریم:

$$H_1(\omega) = \frac{1}{\beta + i\omega}$$

تابع تحریک این مساله را می‌توان بصورت زیر هم نوشت:

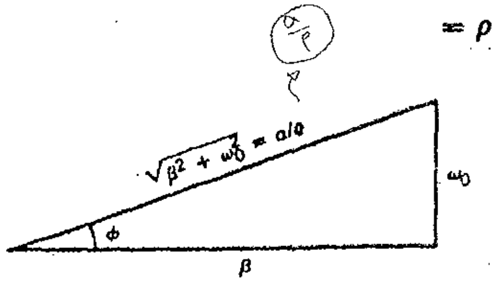
$$x(t) = \frac{a}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)$$

بنابراین پاسخ حالت پایدار سرعت نیز بصورت زیر خواهد بود:

$$v(t) = \frac{a}{2} H_1(\omega_0) e^{i\omega_0 t} + \frac{a}{2} H_1(-\omega_0) e^{-i\omega_0 t}$$

$$= \frac{a}{\beta^2 + \omega_0^2}(\beta \cos \omega_0 t + \omega_0 \sin \omega_0 t)$$

$$= \rho \cos(\omega_0 t - \phi)$$



که در آن:

$$\rho = a/\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} \text{ and } \phi = \tan^{-1}(\omega_0/\beta)$$

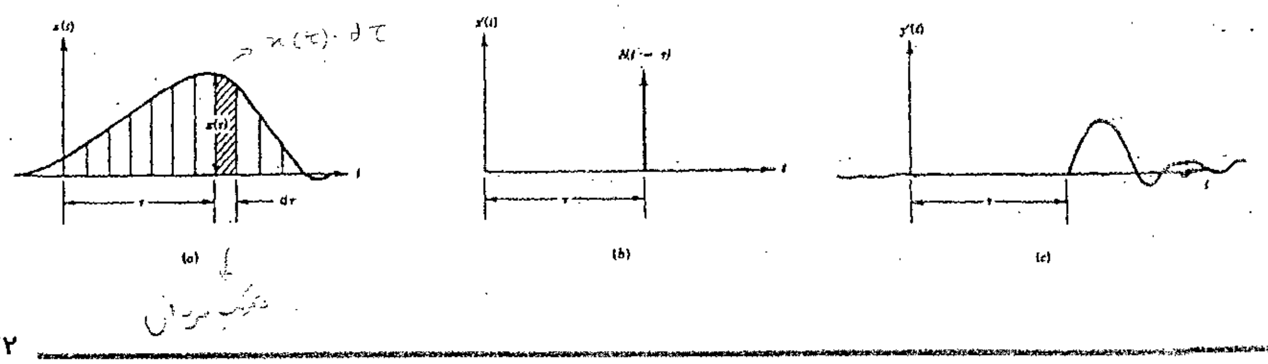
تذکر: $H(\omega)$ با $H_1(\omega)$ فرق دارد زیرا اولی پاسخ فرکانسی سرعت است ولی دومی (تابع پاسخ فرکانسی) پاسخ جابجایی است.

۲-حل در حوزه زمان، روش پاسخ به ضربه Impulse Response Method

دیدیم تابع پاسخ فرکانسی $H(\omega)$، پاسخ حالت پایدار یک سیستم به تحریک ورودی سینوسی است و با اندازه‌گیری این تابع برای تمامی فرکانسها، مشخصات دینامیکی سیستم بطور کامل تعریف می‌شود. یک روش دیگر، اندازه‌گیری پاسخ گذرا به یک تحریک ضربه‌ای است. چنانچه پاسخ گذرا برای تمام زمانها اندازه‌گیری شود، تا زمانی که تعادل دینامیکی پس از اعمال ضربه مجدداً حاصل شود، تمام مشخصات دینامیکی سیستم بطور کامل تعریف می‌شود.

برای این کار معمولاً از پاسخ سیستم به یک ضربه واحد بعنوان ورودی که کوتاه و تیز باشد و در یک بازه زمانی بسیار کوچک (به لحاظ تئوری برابر با صفر) رخ دهد استفاده می‌شود.

بعبارت دیگر، تابع تحریک $x(t)$ بصورت جمع توابع ضربه‌ای $x(\tau)d\tau$ مطابق شکل (a) تجزیه شده و پاسخ هر ضربه بطور جداگانه تعیین می‌شود و مجدداً پاسخها با یکدیگر جمع بسته می‌شوند.



به کمک تابع دلتای دیراک:

$$\delta(t) \to \infty \qquad \text{as } t \to 0$$

$$\delta(t) = 0 \qquad \text{for all other } t$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

چنین تحریکی را می‌توان با معادله زیر بیان کرد:

$$x(t) = I\,\delta(t)$$

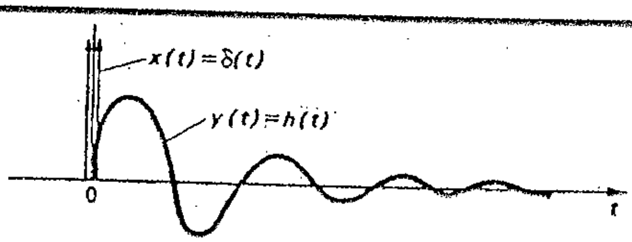
که در آن، I پارامتری است ثابت با بُعد: زمان × x

برای حالتی که $x(t)$ بیانگر نیروست، معادله بالا توصیفی است از یک اصابت چکش یا ضربه به بزرگی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{d}t = I \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = I \text{ in (force)} \times \text{(time) units.}$$

نیرو زمان

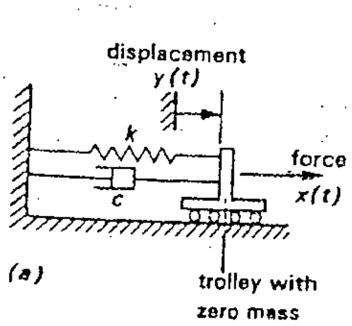
این روش در حالت کلی وقتی $x(t)$ مبین هر پارامتر ورودی، چه نیرو و غیره، باشد به همین شکل انجام می‌شود و پاسخ ضربه یک سیستم بصورت پاسخ سیستم به یک ورودی ضربه‌ای به شکل معادله بالا تعریف می‌شود که در آن، I دارای ابعاد متناسب با ورودی است.



زمانیکه مقدار عددی I برابر واحد باشد، تحریک بنام **ضربه واحد** تعریف می‌شود. پاسخ به یک ضربه واحد در $t = 0$ با **تابع پاسخ به ضربه واحد**، $h(t)$، بیان می‌شود.

مثال

تابع پاسخ به ضربه واحد در سیستم شکل زیر را بدست آورید (سیستم مثال قبل).



حل

معادله حرکت سیستم عبارتست از:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = x,$$

h(t)

جواب $h(t)$ $y(t)$ است به ازای $x(t) = \delta(t)$ یعنی:

$$c\dot{h} + kh = \delta(t).$$

زمانیکه $t > 0$ باشد $\delta(t) = 0$ است و داریم:

$$c\dot{h} + kh = 0$$

نهایتا داریم:

$$h = Ce^{-kt/c}$$

که در آن، C ضریب ثابتی است که از شرایط مرزی در $t = 0$ بدست می‌آید.

برای بررسی بیشتر موضوع و اینکه ببینیم پس از اصابت ضربه چه اتفاقی می‌افتد، از این حقیقت استفاده می‌کنیم که تابع دلتا همه جا صفر است بجز در $t = 0$. برای نقاط واقع در سمت چپ و راست نقطه صفر (در مبدأ) داریم:

$$\int_{0-}^{0+} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

با انتگرال‌گیری طرفین معادله حرکت در سمت چپ و راست نقطه صفر داریم:

$$c\int_{0-}^{0+} \dot{h}\,\mathrm{d}t + k\int_{0-}^{0+} h\,\mathrm{d}t = \int_{0-}^{0+} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

با اصابت چکش، سیستم بطور ناگهانی به حرکت در می‌آید. چون $\dot{h}(t)$ در لحظه $t = 0$ نامحدود است انتگرال آن در سمت چپ و راست نقطه صفر محدود خواهد بود. همچنین، چون پاسخ سیستم نامحدود نیست، انتگرال آن در مجاورت نقطه صفر برابر صفرخواهد بود (انتگزال دوم).

بنابراین معادله بالا بصورت زیر در می‌آید:

$$c\int_{0-}^{0+} \dot{h}\,\mathrm{d}t = 1$$

و داریم:

$$c(h(t = 0+) - 0) = 1$$

یا:

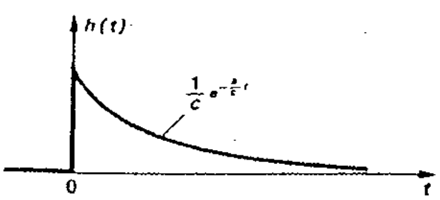
$$h(t = 0+) = \frac{1}{c}.$$

بنابراین:

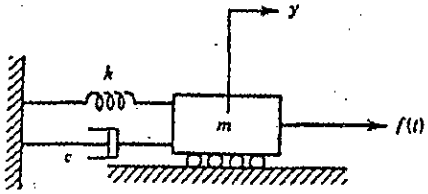
$$C = \frac{1}{c}$$

و جواب نهایی بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} h(t) = 0 & \text{for} \quad t < 0 \\ h(t) = \dfrac{1}{c}e^{-kt/c} & \text{for} \quad t > 0 \end{cases}$$



برای سیستم یکدرجه آزادی جرم-فنر-میراگر (شکل زیر)، تابع پاسخ به ضربه واحد بصورت زیر بدست می‌آید:



$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

با قرارداد تابع دلتای دیراک $\delta(t)$ بجای $f(t)$ در سمت راست معادله حرکت، تابع پاسخ به ضربه واحد $h(t)$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$m\ddot{h} + c\dot{h} + kh = \delta(t)$$

زمانیکه $t > 0$ باشد $\delta(t) = 0$ است و داریم:

$$\ddot{h} + 2\xi\omega_n\dot{h} + \omega_n^2 h = 0$$

و نتیجه خواهد شد:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_n t} \sin\omega_D t$$

که در آن:

$$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$h(t)$ $H(\omega)$

۳-رابطه بین تابع پاسخ فرکانسی و تابع پاسخ به ضربه واحد

با توجه به اینکه یکی از دو تابع پاسخ فرکانسی و تابع پاسخ به ضربه واحد برای بیان مشخصات دینامیکی سیستم کافی هستند، قائدتاً باید بتوان یکی را از روی دیگری بدست آورد. در سیستم‌های پایدار، که قبل از اعمال تحریک سیستم در حال سکون قرار دارد داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

دو روش برای تعیین رابطه بین تابع پاسخ فرکانسی و تابع پاسخ به ضربه واحد وجود دارد:

روش اول

اگر کل تحریک شامل یک ضربه ورودی $x(t) = \delta(t)$ باشد پاسخ برابر $y(t) = h(t)$ خواهد بود. بنابراین با استفاده از روابط قبل داریم:

$$y(t) = h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega$$

که در آن، $X(\omega)$ تبدیل فوریه $x(t) = \delta(t)$ می‌باشد و برابر است با:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi}$$

بنابراین:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

و تبدیل فوریه معکوس برابر است با:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

روش دوم

برای اینکار از تبدیل فوریه که یک تابع غیر پریودیک را به شکل طیف فرکانسی‌اش تجزیه می‌کند استفاده می‌شود. با تبدیل فوریه ضربه ورودی $x(t) = \delta(t)$ و پاسخ گذرای $y(t) = h(t)$ داریم:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

معادله اول به شکل زیر ساده می‌شود:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cos\omega t\,dt - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\sin\omega t\,dt$$

و خواهیم داشت:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}$$

اکنون از این استدلال استفاده می‌کنیم:

میدانیم اگر یک سیستم خطی در برابر یک تحریک هارمونیک پایدار با فرکانس ω قرار گیرد، پاسخ آن نیز هارمونیک و پایدار و با همان فرکانس خواهد بود. بنابراین منطقی است که فرض کنیم در یک سیگنال ورودی غیر پریودیک، مولفه‌های فرکانسی $X(\omega)d\omega$ در نوار فرکانسی ω تا $\omega + d\omega$ در ورودی، با مولفه‌های $Y(\omega)d\omega$ همان نوار فرکانسی در خروجی متناظر است.

در این حالت با فرض ورودی هارمونیک به شکل:

$$x(t) = X(\omega)\,d\omega\,e^{i\omega t}$$

(که صرفاً یکی از دو بخش حقیقی یا موهومی مد نظر است)، با خروجی هارمونیک زیر متناظر است:

$$y(t) = Y(\omega)\,d\omega\,e^{i\omega t}.$$

بنابراین به کمک روابط قبلی این مبحث داریم:

$$y(t) = H(\omega)X(\omega)\,d\omega\,e^{i\omega t}$$

و از مقایسه دو رابطه اخیر داریم:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

نهایتاً با قرارداد روابط ورودی و خروجی در فرمول بالا خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = H(\omega)\cdot\frac{1}{2\pi}$$

یا:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

که نشان می‌دهد تابع پاسخ فرکانسی، تبدیل فوریه تابع پاسخ به ضربه واحد است. تبدیل معکوس فوریه نیز به شکل زیر است:

تابع پاسخ ضربه واحد برابر انتگرال فوریه تابع پاسخ فرکانسی مختلط می‌باشد

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

در حقیقت، **تابع پاسخ به ضربه واحد برابر انتگرال فوریه تابع پاسخ فرکانسی مختلط** است.

۶- پاسخ به یک ورودی دلخواه

ورودی دلخواه و تعینی $x(t)$ به یک سیستم خطی اعمال می‌شود و پاسخ خروجی $y(t)$ مد نظر است. یک راه اینست که از تابع پاسخ فرکانسی به شکل زیر استفاده کنیم:

ابتدا تبدیل فوریه ورودی به شکل:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

و سپس استفاده از رابطه:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

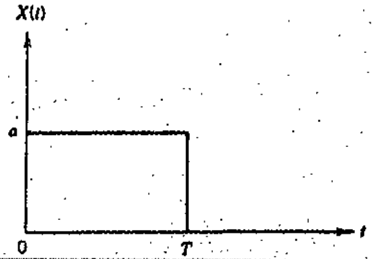
و آنگاه، تبدیل معکوس فوریه خروجی به شکل زیر:

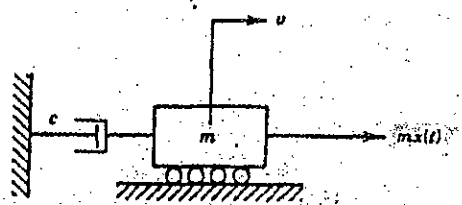
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

معمولاً محاسبه این انتگرال بسیار مشکل است و به ندرت از این روش برای تعیین پاسخ خروجی استفاده می‌شود.

مثال

در مثال قبل (سیستم یکدرجه آزادی با جرم و میراکز و بدون فنر) اگر تابع تحریک مطابق شکل زیر باشد، پاسخ حالت گذرای سرعت را بدست آورید:





حل

قبلاً دیدیم:

$$H_1(\omega) = \frac{1}{\beta + i\omega}$$

تبدیل فوریه تحریک برابر است با:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\, dt = \frac{a}{i\omega}(1 - e^{-i\omega T})$$

و تبدیل فوریه پاسخ سرعت برابر است با:

$$V(\omega) = H_1(\omega)X(\omega) = \frac{\omega}{\beta + i\omega}\left[\frac{a}{i\omega}(1 - e^{i\omega T})\right]$$

با تبدیل فوریه معکوس داریم:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{a}{2\pi i}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega(\omega - i\beta)}\, d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-T)}}{i\omega(\omega - i\beta)}\, d\omega\right]$$

این دو انتگرال با استفاده از قضیه مانده‌ها قابل حل است:

جواب انتگرال اول برای $t > 0$:

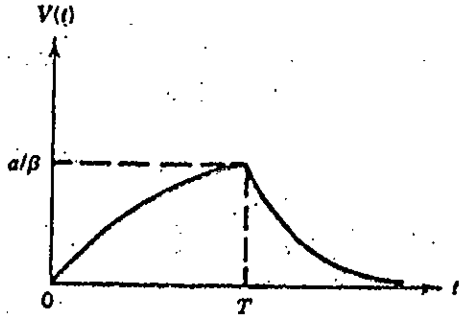
$$I_1 = 2\pi i\left[\frac{1}{i(-i\beta)} + \frac{e^{-\beta t}}{-\beta}\right] = \frac{2\pi i}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$$

جواب انتگرال دوم برای $t > T$:

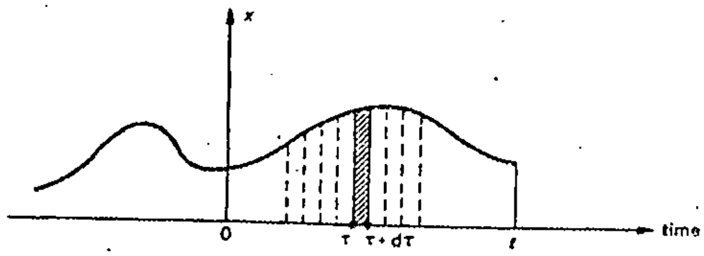
$$I_2 = 2\pi i\left[\frac{1}{i(-i\beta)} + \frac{e^{-\beta(t-T)}}{-\beta}\right] = \frac{2\pi i[1 - e^{-\beta(t-T)}]}{\beta}$$

جواب کلی:

$$v(t)=\begin{cases}\dfrac{a}{2\pi i}(I_1-I_2)=\dfrac{a}{\beta}(1-e^{-\beta t}) & \text{for } 0<t<T\\ \dfrac{a}{\beta}\{(1-e^{-\beta t})-[1-e^{-\beta(t-T)}]\} & \text{for } t>T\\ 0 & \text{for } t<0\end{cases}$$



راه دیگر، همانطور که از دینامیک سازه می‌دانیم، تجزیه ورودی دلخواه $x(t)$ به ضربه‌های کوچک مطابق شکل و سپس جمع پاسخ هر یک از این ضربه ها با یکدیگر می‌باشد.



سهم ناحیه هاشور زده در پاسخ برابر است با:

$$h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

که در آن $h(t-\tau)$ برابر پاسخ در زمان t به یک ضربه واحد در زمان τ می‌باشد.

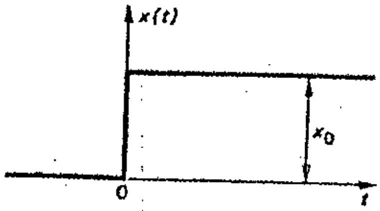
از آنجا که با سیستمهای خطی کار داریم، با جمع پاسخها در محور زمان خواهیم داشت:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

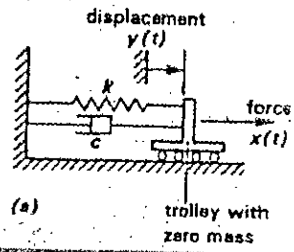
که به آن انتگرال دوهامل یا کانولوشن می‌گویند.

مثال

پاسخ سیستم زیر به یک ورودی پله ای به بصورت شکل زیر را بدست آورید (سیستم مثال قبل).



$$x(t) = x_0 \text{ at } t = 0$$



حل

قبلاً در حل این مثال دیدیم:

$$h(t) = 0 \qquad \text{for} \qquad t < 0$$

$$h(t) = \frac{1}{c}e^{-kt/c} \qquad \text{for} \qquad t > 0$$

بنابراین داریم:

$$h(t-\tau) = 0 \qquad \text{for} \qquad \tau > t$$

$$h(t-\tau) = \frac{1}{c}e^{-k(t-\tau)/c} \qquad \text{for} \qquad \tau < t.$$

تابع تحریک برابر است با:

$$x(\tau) = 0 \qquad \text{for} \qquad \tau < 0$$

$$x(\tau) = x_0 \qquad \text{for} \qquad \tau > 0$$

بنابراین:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)x(\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{1}{c}e^{-k(t-\tau)/c}x_0\,d\tau \qquad \text{for} \qquad t > 0$$

و نهایتاً:

$$y(t) = \frac{x_0}{k}(1 - e^{-kt/c}) \qquad \text{for} \qquad t > 0.$$

فرمهای دیگر انتگرال دوهامل

فرم اصلی بصورت زیر است:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

فرقی نمی‌کند که حد بالای انتگرال را به بینهایت تبدیل کنیم زیرا برای $t < \tau$ تابع $h(t-\tau) = 0$ بنابراین داریم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

همچنین، با تغییر متغیر $\theta = t - \tau$ در فرم اصلی انتگرال دوهامل داریم:

$$y(t) = \int_{\infty}^{0} h(\theta)x(t-\theta)(-\mathrm{d}\theta)$$

که به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta$$

مشابه استدلال قبل چون $h(\theta) = 0$ برای $\theta < 0$ ، بنابراین میتوان رابطه بالا را بصورت زیر هم نوشت:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta$$

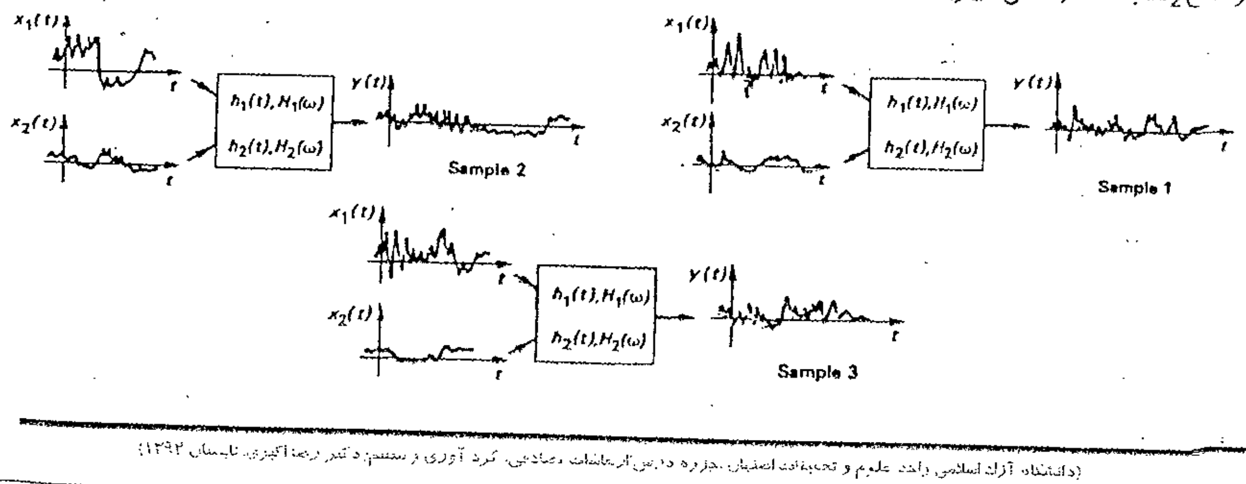
تمرین سری ششم:

مسائل ۶.۱ تا ۶.۴ کتاب Newland

پاسخ سیستمهای خطی یک درجه آزادی به تحریک تصادفی

در این بخش، پاسخ سیستمهای خطی یک درجه آزادی به ورودی (تحریک) تصادفی مورد بررسی قرار می‌گیرد. به این منظور، پاسخ $y(t)$ سیستم به دو ورودی تصادفی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ بررسی خواهد شد. مساله پاسخ به یک ورودی تنها به سادگی با قراردادن یکی از دو متغیر x_1 یا x_2 برابر با صفر بدست می‌آید و پاسخ به بیش از دو ورودی نیز بطور مشابه با دو ورودی تعمیم داده می‌شود.

آنچه نیاز داریم، تعداد نامحدودی آزمایش است که همگی بطور همزمان انجام شده باشد و هر کدام روی یک سیستم خطی مشابه بطوریکه توابع پاسخ ضربه برابر $h_1(t)$ و $h_2(t)$ و توابع پاسخ فرکانسی متناظر آنها $H_1(\omega)$ و $H_2(\omega)$ باشد. (شکل زیر).



هر آزمایش به کمک توابع نمونه ورودی از فرآیندهای تصادفی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ انجام می‌شود و پاسخ نیز یک تابع نمونه خروجی از فرآیند تصادفی $y(t)$ است.

هدف اینست که ببینیم چگونه مشخصات فرآیند خروجی به مشخصات دو فرآیند ورودی و به مشخصات ورودی-خروجی سیستم بستگی دارد.

توابع $h_1(t)$ و $H_1(\omega)$، پاسخ $y(t)$ ناشی از ورودی $x_1(t)$ را می‌دهد و توابع $h_2(t)$ و $H_2(\omega)$، پاسخ $y(t)$ ناشی از ورودی $x_2(t)$ را می‌دهد.

میانگین پاسخ

مطابق رابطه انتگرال دوهامل، پاسخ $y(t)$ یک آزمایش نمونه به ورودی های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ برابر است با:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)x_1(t-\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta)x_2(t-\theta)\mathrm{d}\theta$$

اگر بخواهیم میانگین گروهی $E[y(t)]$ را بدست آوریم، باید مقادیر میانگین هر دو انتگرال سمت راست رابطه بالا را بدست آوریم. کافی است به یاد داشته باشیم، هر انتگرال فقط حالت حدی یک جمع است و میانگین مجموعی از اعداد برابر جمع میانگین تک تک آنهاست. مثلاً:

$$E[x_1 + x_2 + x_2 + \cdots] = E[x_1] + E[x_2] + E[x_3] + \cdots$$

یا به شکل زیر:

$$E\left[\sum_{r=1}^{N} x_r\right] = \sum_{r=1}^{N} E[x_r]$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$E[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)E[x_1(t-\theta)]\mathrm{d}\theta + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta)E[x_2(t-\theta)]\mathrm{d}\theta$$

مشروط بر اینکه هر دو ورودی تصادفی ایستا باشند، میانگین $E[x_1]$ و $E[x_2]$ مستقل از زمان میانگین‌گیری گروهی $(t-\theta)$ است. بنابراین داریم:

$$E[y(t)] = E[x_1]\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)\mathrm{d}\theta + E[x_2]\int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

واضح است که $E[y(t)]$ نیز مستقل از زمان است. بنابراین:

$$E[y] = E[x_1]\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)\mathrm{d}\theta + E[x_2]\int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

برای بیان دیگر این رابطه، به کمک رابطه زیر:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

خواهیم داشت:

$$E[y] = E[x_1]H_1(0) + E[x_2]H_2(0)$$

که در آن:

$$H_1(0) = \frac{\text{Constant level of } y}{\text{Constant level of } x_1}$$
$$H_2(0) = \frac{\text{Constant level of } y}{\text{Constant level of } x_2}$$

تابع خودهمبستگی پاسخ

$R_y(\tau) = E[y(t) \cdot y(t+\tau)]$

تابع خود همبستگی فرآیند خروجی $y(t)$ برابر است با:

$$E[y(t)y(t+\tau)]$$

با قرار دادن:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1)x_1(t-\theta_1)\mathrm{d}\theta_1 + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_1)x_2(t-\theta_1)\mathrm{d}\theta_1$$

و همچنین:

$$y(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_2)x_1(t+\tau-\theta_2)\mathrm{d}\theta_2 + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_2)x_2(t+\tau-\theta_2)\mathrm{d}\theta_2$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E[y(t)y(t+\tau)] = E\bigg[&\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1)x_1(t-\theta_1)\mathrm{d}\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_2)x_1(t+\tau-\theta_2)\mathrm{d}\theta_2 \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1)x_1(t-\theta_1)\mathrm{d}\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_2)x_2(t+\tau-\theta_2)\mathrm{d}\theta_2 \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_1)x_2(t-\theta_1)\mathrm{d}\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_2)x_1(t+\tau-\theta_2)\mathrm{d}\theta_2 \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_1)x_2(t-\theta_1)\mathrm{d}\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_2)x_2(t+\tau-\theta_2)\mathrm{d}\theta_2 \bigg] \end{aligned}$$

هر حاصلضرب دو انتگرال را بصورت یک انتگرال دوگانه می‌نویسیم. بعنوان نمونه:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1)x_1(t-\theta_1)\mathrm{d}\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_2)x_1(t+\tau-\theta_2)\mathrm{d}\theta_2 \\ &\qquad = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1)h_1(\theta_2)x_1(t-\theta_1)x_1(t+\tau-\theta_2)\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2 \end{aligned}$$

بنابراین باید میانگین این انتگرالهای دوگانه را محاسبه کرد.

بعنوان نمونه:

$$E\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1)h_1(\theta_2)x_1(t-\theta_1)x_1(t+\tau-\theta_2)\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2\right]$$

$R(\tau) = E[x(t) \cdot x(t+\tau)]$ $\qquad$ $S_y(w) = \frac{1}{2\pi}\int R_y(\tau)\, e \; d\tau$

که برابر است با:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1)h_1(\theta_2)E[x_1(t-\theta_1)x_1(t+\tau-\theta_2)]\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2$$

مشروط بر اینکه ورودی $x_1(t)$ ایستا باشد، تابع خودهمبستگی آن مستقل از زمان t خواهد بود.

بنابراین:

$$E[x_1(t-\theta_1)x_1(t+\tau-\theta_2)] = R_{x_1}(\tau-\theta_2+\theta_1)$$

و جواب اولین ترم برابر است با:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1)h_1(\theta_2)R_{x_1}(\tau-\theta_2+\theta_1)\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2$$

که خود مستقل از زمان t است. با بکارگیری روش مشابه برای کلیه انتگرالهای دوگانه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}R_y(\tau) = &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1)h_1(\theta_2)R_{x_1}(\tau-\theta_2+\theta_1)\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2\\ &+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1)h_2(\theta_2)R_{x_1x_2}(\tau-\theta_2+\theta_1)\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2\\ &+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_1)h_1(\theta_2)R_{x_2x_1}(\tau-\theta_2+\theta_1)\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2\\ &+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta_1)h_2(\theta_2)R_{x_2}(\tau-\theta_2+\theta_1)\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2\end{aligned}$$

بنابراین نتیجه شد که تابع خود همبستگی خروجی برای تحریک تصادفی ایستا، مستقل از زمان است. این نتیجه فقط برای سیستمهای خطی با پارامترهای ثابت معتبر است. درحقیقت، تمام میانگین‌های فرآیند خروجی برای تحریک ایستا مستقل از زمان هستند و فرآیند خروجی نیز ایستا خواهد بود.

چگالی طیفی پاسخ

چگالی طیفی پاسخ $S_y(\omega)$

با اینکه رابطه بالا نسبتاً پیچیده بود، اگر از طرفین رابطهٔ تبدیل فوریه بگیریم و $S_y(\omega)$ رابدست آوریم، رابطه به میزان قابل توجهی ساده می‌شود.

تبدیل فوریه اولین انتگرال دوگانه سمت راست رابطه بالا برابر است با:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau e^{-i\omega\tau}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\theta_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\theta_2 h_1(\theta_1)h_1(\theta_2)R_{x_1}(\tau-\theta_2+\theta_1)\right\}$$

با تغییر نوبت انتگرال گیری داریم:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\theta_1 h_1(\theta_1)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\theta_2 h_1(\theta_2)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau e^{-i\omega\tau}R_{x_1}(\tau-\theta_2+\theta_1)$$

انتگرال آخر نسبت به τ بوده و θ_1 و θ_2 ثابت درنظر گرفته می‌شوند. بنابراین این انتگرال را می‌توان بصورت زیر هم نوشت:

$$e^{i\omega(\theta_1-\theta_2)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}(\tau-\theta_2+\theta_1)e^{-i\omega(\tau-\theta_2+\theta_1)}R_{x_1}(\tau-\theta_2+\theta_1)$$

که معادل است با:

$$e^{i\omega(\theta_1-\theta_2)}.\,2\pi S_{x_1}(\omega)$$

بنابراین کل رابطه بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\theta_1 h_1(\theta_1)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\theta_2 h_1(\theta_2)\,e^{i\omega(\theta_1-\theta_2)}S_{x_1}(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\theta_1 h_1(\theta_1)e^{i\omega\theta_1}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\theta_2 h_1(\theta_2)\,e^{-i\omega\theta_2}S_{x_1}(\omega)\end{aligned}$$

۱۳۹ یادآوری

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\,e^{i\omega t}\,dt$$

با توجه به اینکه:

$$H_1(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h_1(\theta_2)e^{-i\omega\theta_2}\mathrm{d}\theta_2$$

و زوج مختلط آن به شکل:

$$H_1^*(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h_1(\theta_1)e^{i\omega\theta_1}\mathrm{d}\theta_1$$

بنابراین:

$$I_1 = H_1^*(\omega)\,H_1(\omega)\,S_{x_1}(\omega)$$

بنابراین تبدیل فوریه اولین انتگرال دوگانه تابع خودهمبستگی گرفته شد. با انجام فرآیند مشابه بر روی سایر انتکرالها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}S_y(\omega) &= H_1^*(\omega)H_1(\omega)S_{x_1}(\omega)+H_1^*(\omega)H_2(\omega)S_{x_1x_2}(\omega)+H_2^*(\omega)H_1(\omega)S_{x_2x_1}(\omega) \\ &+H_2^*(\omega)H_2(\omega)S_{x_2}(\omega)\end{aligned}$$

برای بیش از دو ورودی، مثلاً N ورودی خواهیم داشت:

$$S_y(\omega)=\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}H_r^*(\omega)H_s(\omega)S_{x_rx_s}(\omega)$$

که در آن:

$$S_{x_rx_r}=S_{x_r}$$

رابطه بالا، مهمترین نتیجه تئوری ارتعاشات تصادفی است.

برای حالتی که فقط یک ورودی داریم:

$$S_y(\omega)=H^*(\omega)H(\omega)S_x(\omega)$$

که به شکل زیر نیز نشان داده می‌شود:

$$S_y(\omega)=|H(\omega)|^2S_x(\omega)$$

برای N ورودی غیرهمبسته، که ترمهای چگالی طیفی متقابل آنها همگی صفر هستند خواهیم داشت:

$$S_y(\omega)=\sum_{r=1}^{N}|H_r(\omega)|^2 S_{x_r}(\omega)$$

میانگین مربع پاسخ

وقتی چگالی طیفی پاسخ تعیین شد، میانگین مربع پاسخ را می‌توان مستقیماً از رابطه زیر بدست آورد:

$$E[y^2]=\int_{-\infty}^{\infty}S_y(\omega)\mathrm{d}\omega$$

یعنی سطح زیر منحنی تابع چگالی طیفی که برای یک ورودی تنها برابر است با:

$$E[y^2]=\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2 S_x(\omega)\mathrm{d}\omega$$

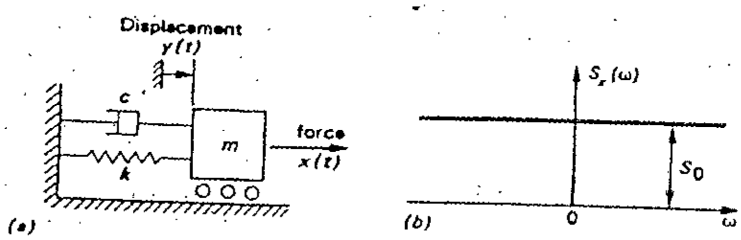
و برای N ورودی غیر همبسته برابر است با:

$$E[y^2]=\sum_{r=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}|H_r(\omega)|^2 S_{x_r}(\omega)\mathrm{d}\omega$$

برای ورودی‌های غیرهمبسته، میانگین مربع پاسخ برابر جمع میانگین مربع پاسخ‌های مجزای تک‌تک ورودی هاست. البته برای ورودی‌های همبسته این موضوع صادق نیست. در اینحالت ابتدا باید چگالی طیفی پاسخ را بدست آورده و سپس از آن انتگرال بگیریم.

مثال

مطلوبست تعیین چگالی طیفی خروجی $S_y(\omega)$ سیستم یک درجه آزادی شکل زیر، مشروط بر اینکه تابع تحریک دارای چگالی طیفی $S_x(\omega)=S_0$ باشد.



حل

قبلاً دیدیم:

$$S_y(\omega)=|H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

بنابراین:

$$S_y(\omega)=|H(\omega)|^2 S_0$$

قبلاً گفته شد که برای یافتن $H(\omega)$، باید $x(t) = e^{i\omega t}$ و $y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$ را در معادله حرکت قرار دهیم.

معادله حرکت سیستم بصورت زیر است:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = x(t)$$

بنابراین خواهیم داشت:

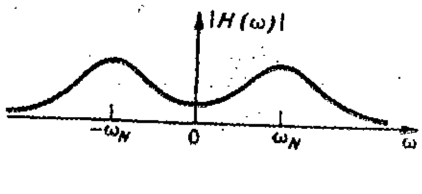
$$(-m\omega^2 + ic\omega + k)H(\omega) = 1$$

در نتیجه:

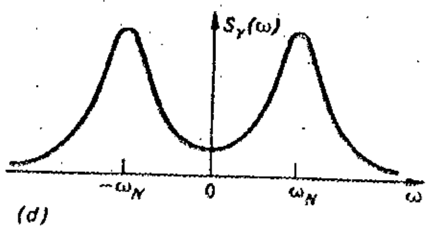
$$H(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k}$$

بنابراین:

$$S_y(\omega) = \frac{S_0}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$



(c)



(d)

سطح زیر منحنی چگالی طیفی برابر است با میانگین مربع پاسخ:

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k}\right|^2 S_0 d\omega$$

که نتیجه خواهد داد:

$$E[y^2] = \frac{\pi S_0}{kc}$$

و مستقل از جرم m می باشد.

نقطه پیک در منحنی چگالی طیفی در فرکانس زیر رخ می‌دهد:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_N$$

و ارتفاع آن برابر است با:

$$S_y(\omega_N) = \frac{S_0}{c^2\omega_N^2} = \frac{S_0 m}{c^2 k}$$

که متناسب با جرم است.

مثال

لغزنده بدون جرم، به کمک دو فنر خطی و دو میراکر ویسکوز مطابق شکل به دو دیوار متصل شده است. اگر هر دو دیوار بصورت توابع $x_1(t)$ و $x_2(t)$ با توابع چگالی طیفی برابر:

$$S_{x_1}(\omega) = S_{x_2}(\omega) = S_0 \text{ (constant)}$$

حرکت کنند و داشته باشیم:

$$x_2(t+T) = x_1(t)$$

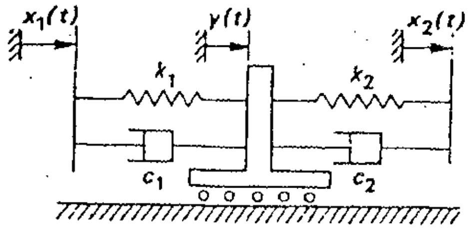
بطوریکه چگالی طیفی متقابل آنها برابر باشد با:

$$S_{x_1x_2}(\omega) = S_0 e^{-i\omega T}$$

و

$$S_{x_2x_1}(\omega) = S_0 e^{i\omega T}$$

مطلوبست تابع چگالی طیفی پاسخ $S_y(\omega)$ و میانگین مربع پاسخ $E[y^2]$



حل

رابطه تعادل (معادله حرکت) سیستم بصورت زیر است:

$$k_1(x_1 - y) + c_1(\dot{x}_1 - \dot{y}) = k_2(y - x_2) + c_2(\dot{y} - \dot{x}_2)$$

بنابراین:

$$(c_1 + c_2)\dot{y} + (k_1 + k_2)y = k_1x_1 + c_1\dot{x}_1 + k_2x_2 + c_2\dot{x}_2.$$

با قرار دادن:

$$x_1 = e^{i\omega t},\ x_2 = 0,\quad y = H_1(\omega)e^{i\omega t}$$

در معادله حرکت، تابع پاسخ فرکانسی x_1 بصورت زیر بدست می‌آید:

$$H_1(\omega) = \frac{k_1 + ic_1\omega}{k_1 + k_2 + i(c_1 + c_2)\omega}$$

همچنین، با قرار دادن:

$$x_1 = 0,\ x_2 = e^{i\omega t},\ y = H_2(\omega)e^{i\omega t}$$

داریم:

$$H_2(\omega) = \frac{k_2 + ic_2\omega}{k_1 + k_2 + i(c_1 + c_2)\omega}$$

بنابراین:

$$S_y(\omega) = \frac{k_1^2 + c_1^2\omega^2}{(k_1 + k_2)^2 + (c_1 + c_2)^2\omega^2} S_0 +$$

$$+ \frac{(k_1 - ic_1\omega)(k_2 + ic_2\omega)}{(k_1 + k_2)^2 + (c_1 + c_2)^2\omega^2} S_0\, e^{-i\omega T}$$

$$+ \frac{(k_1 + ic_1\omega)(k_2 - ic_2\omega)}{(k_1 + k_2)^2 + (c_1 + c_2)^2\omega^2} S_0\, e^{i\omega T}$$

$$+ \frac{k_2^2 + c_2^2\omega^2}{(k_1 + k_2)^2 + (c_1 + c_2)^2\omega^2} S_0$$

بعد از جمع بندی ترمها خواهیم داشت:

$$S_y(\omega) = S_0 \left\{ \frac{k_1^2 + k_2^2 + c_1^2\omega^2 + c_2^2\omega^2 + 2(k_1k_2 + c_1c_2\omega^2)\cos\omega T + \\ + 2(k_1c_2\omega - k_2c_1\omega)\sin\omega T}{(k_1 + k_2)^2 + (c_1 + c_2)^2\omega^2} \right\}$$

اگر زمان تاخیر T صفر باشد بطوریکه داشته باشیم:

$$x_1(t) = x_2(t)$$

خواهیم داشت:

$$S_y(\omega) = S_0$$

و حرکت لغزنده همواره با حرکت دیوار برابر است.

برای مقادیر بزرگ ω (فرکانسهای بالا):

$$S_y(\omega) \to S_0 \left\{ \frac{c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2\cos\omega T}{(c_1 + c_2)^2} \right\}$$

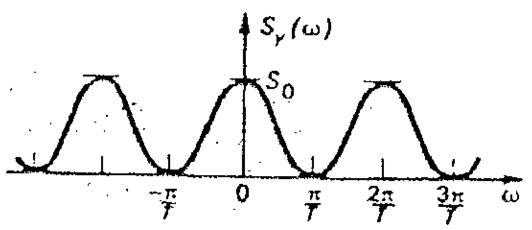
و خواهیم داشت:

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)\, d\omega \to \infty$$

برای حالتیکه سختی هر دو فنر و ضریب میرایی هر دو میراگر برابر باشند داریم:

$$S_y(\omega) = \frac{S_0}{2}(1 + \cos\omega T)$$

نتیجه اینحالت در شکل زیر ترسیم شده است.



همبستگی متقابل پاسخ

چنانچه سیستم توسط چندین ورودی تحریک شود معمولاً همبستگی متقابل بین خروجی و یکی از ورودی‌ها را محاسبه می‌کنند.

با استفاده از تعاریف قبلی داریم:

$$R_{x_1y}(\tau) = E[x_1(t)y(t+\tau)]$$

برای حالت دو ورودی داریم:

$$R_{x_1y}(\tau) = E\left[x_1(t)\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)x_1(t+\tau-\theta)\mathrm{d}\theta + x_1(t)\int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta)x_2(t+\tau-\theta)\mathrm{d}\theta\right]$$

چون $x_1(t)$ تابع θ نیست می‌توان آنرا به داخل انتگرالها برد و نتیجه را به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$R_{x_1y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)\, E[x_1(t)x_1(t+\tau-\theta)]\mathrm{d}\theta + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta)\, E[x_1(t)x_2(t+\tau-\theta)]\mathrm{d}\theta$$

یا برحسب توابع خود همبستگی و همبستگی متقابل توابع ورودی به شکل:

$$R_{x_1y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)\, R_{x_1}(\tau-\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta)\, R_{x_1x_2}(\tau-\theta)\mathrm{d}\theta$$

درحقیقت، در این رابطه، همبستگی متقابل بین ورودی $x_1(t)$ و پاسخ $y(t)$ بر حسب توابع خودهمبستگی $x_1(t)$ و همبستگی متقابل $x_1(t)$ و $x_2(t)$ و همچنین توابع پاسخ به ضربه واحد بین $x_1(t)$ و $y(t)$ و همچنین $x_2(t)$ و $y(t)$ بیان شد.

برای حالتی که $x_1(t)$ یک **ورودی اغتشاش سفید** باشد بطوریکه:

$$R_{x_1}(\tau-\theta) = 2\pi S_0\, \delta(\tau-\theta)$$

و همچنین $x_1(t)$ و $x_2(t)$ غیر همبسته باشند بطوریکه:

$$R_{x_1x_2}(\tau-\theta) = 0$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$R_{x_1y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)\, 2\pi S_0\, \delta(\tau-\theta)\mathrm{d}\theta = h_1(\tau)\, 2\pi S_0$$

نتیجه اینکه تابع همبستگی متقابل بین یک ورودی اغتشاش سفید $x_1(t)$ و پاسخ $y(t)$، برابر پاسخ y برای یک ضربه واحد در x_1 ضربدر $2\pi S_0$ می‌باشد.

چگالی طیفی متقابل پاسخ

در قسمت قبل دیدیم:

$$R_{x_1y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)\, R_{x_1}(\tau-\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta)\, R_{x_1x_2}(\tau-\theta)\mathrm{d}\theta$$

اگر از طرفین این رابطه تبدیل فوریه بگیریم:

$$S_{x_1y}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\, e^{-i\omega\tau} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)\, R_{x_1}(\tau-\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta)\, R_{x_1x_2}(\tau-\theta)\mathrm{d}\theta\right\}$$

با بازنویسی رابطه بالا داریم:

$$S_{x_1y}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta)\, e^{-i\omega\theta}\, \mathrm{d}\theta \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_1}(\tau-\theta)\, e^{-i\omega(\tau-\theta)}\,\mathrm{d}\tau$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta)\, e^{-i\omega\theta}\, \mathrm{d}\theta \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_1x_2}(\tau-\theta)\, e^{-i\omega(\tau-\theta)}\,\mathrm{d}\tau$$

حاصل برابرخواهد بود با:

$$S_{x_1y}(\omega) = H_1(\omega)S_{x_1}(\omega) + H_2(\omega)S_{x_1x_2}(\omega)$$

زمانیکه N ورودی مجزا داشته باشیم و $x_r(t)$ نمونه‌ای آنها باشد، نتیجه خواهد شد:

$$S_{x_ry}(\omega) = \sum_{s=1}^{N} H_s(\omega)S_{x_rx_s}(\omega)$$

که در این رابطه:

$$S_{x_rx_r} = S_{x_r}$$

اگر ورودی‌ها غیر همبسته باشند خواهیم دید که:

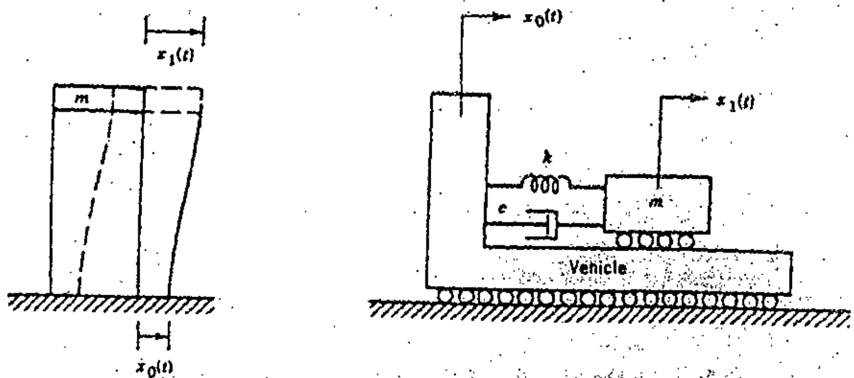
$$S_{xy}(\omega) = H(\omega)S_x(\omega)$$

همچنین:

$$S_{yx}(\omega) = S_{xy}^{*}(\omega) = H^{*}(\omega)S_x(\omega)$$

مثال

سازه یک درجه آزادی زیر (سمت چپ) در برابر شتاب پایه برابر $\ddot{x}_0(t)$ قرار دارد. این سیستم با وسیله نقلیه سمت راست وقتی با شتاب برابر با شتاب پایه ساختمان حرکت کند معادل است. مطلوبست تابع پاسخ فرکانسی و تابع ضربه واحد برای جابجایی نسبی $x_1 - x_0$ متناظر با این شتاب پایه.



حل

معادله حرکت سیستم به صورت زیر است:

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = -\ddot{x}_0$$

که در آن، پاسخ جابجایی نسبی برابر است با:

$$y = x_1 - x_0$$

و همچنین:

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad , \quad \xi = c/2\omega_n m$$

با قراردادن:

$$\ddot{x}_0(t) = e^{i\omega t} \quad \text{and} \quad y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$$

در معادله حرکت داریم:

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_n\omega}$$

و

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}$$

با قراردادن تابع دلتای دیراک در سمت راست معادله حرکت داریم:

$$\ddot{h} + 2\xi\omega_n\dot{h} + \omega_n^2 h = -\delta(t)$$

چون برای $t > 0$ داریم: $\delta(t) = 0$

بنابراین=

$$h(t) = c_1 e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t + c_2 e^{-\xi\omega_n t}\cos\omega_d t$$

در این رابطه:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

وقتی $t \to 0$ داریم:

$$\ddot{h}(t) \to -\delta(t), \dot{h}(t) \to -1, h(t) \to 0$$

بنابراین:

$$c_1 = 1/\omega_d \quad , \quad c_2 = 0$$

و داریم:

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_d}\sin\omega_d t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

مثال

در همین مثال، میانگین مربع و تابع خودهمبستگی پاسخ جابجایی نسبی را با فرض همان تحریک $\ddot{x}_0(t)$ بصورت اغتشاش سفید با تابع خودهمبستگی برابر $R_{\ddot{x}}(\tau) = 2\pi S_0\delta(\tau)$ محاسبه کنید.

حل

$$E[y^2] = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1)h(\theta_2)\, R_{\ddot{x}}(\theta_1-\theta_2)\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1)h(\theta_2)\, 2\pi S_0\, \delta(\theta_1-\theta_2)\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2 = 2\pi S_0 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\theta_1)\,\mathrm{d}\Theta_1$$

که برابر است با:

$$E[y^2] = \frac{2\pi S_0}{\omega_d^2}\int_0^{\infty} e^{-2\xi\omega_n t}\,\sin^2\omega_d t\,\mathrm{d}t$$

با تغییر متغیر $\omega_d t = x$ داریم:

$$E[y^2] = \frac{2\pi S_0}{\omega_d^3}\int_0^{\infty} e^{-2\xi\omega_n x/\omega_d}\,\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi S_0}{\omega_d^3}\left[\frac{1}{4+\frac{4\xi^2\omega_n^2}{\omega_d^2}}\right]\left(\frac{\omega_d}{\xi\omega_n}\right) = \frac{2\pi S_0}{2\xi\omega_n^3}$$

برای تعیین تابع خودهمبستگی داریم:

$$R_{\ddot{x}}(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau)$$

قبلاً دیده‌یم برای یک تابع ورودی:

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1)h(\theta_2)\, R_x(\tau - \theta_2 + \theta_1)\mathrm{d}\theta_1\, \mathrm{d}\theta_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1)h(\theta_2)\, 2\pi S_0\, \delta(\tau - \theta_2 + \theta_1)\mathrm{d}\theta_1\, \mathrm{d}\theta_2 \\ &= \int_0^{\infty} 2\pi S_0\, h(\theta_1)\, h(\tau + \theta_1)\mathrm{d}\theta_1 \end{aligned}$$

و نتیجه خواهد شد:

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \int_0^{\infty} 2\pi S_0 h(\theta_1)h(\tau + \theta_1)\mathrm{d}\theta_1 = 2\pi S_0 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi\omega_n\theta_1}\,\sin\omega_d\theta_1}{\omega_d}\,\frac{e^{-\xi\omega_n(\tau+\theta_1)}\,\sin\omega_d(\tau+\theta_1)}{\omega_d}\mathrm{d}\theta_1 \\ &= \frac{\pi S_0}{\omega_d^2} e^{-\xi\omega_n\tau}\int_0^{\infty} e^{-2\xi\omega_n\theta_1}[\cos\omega_d\tau - \cos\omega_d(\tau + 2\theta_1)]\mathrm{d}\theta_1 \\ &= \frac{\pi S_0}{\omega_d^2} e^{-\xi\omega_n\tau}\Bigg(\frac{\cos\omega_d\tau}{2\xi\omega_n} - \cos\omega_d\tau\int_0^{\infty} e^{-2\xi\omega_n\theta_1}\cos 2\omega_d\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1 \\ &\quad + \sin\omega_d\tau\int_0^{\infty} e^{-2\xi\omega_n\theta_1}\sin 2\omega_d\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1\Bigg) \end{aligned}$$

با توجه به اینکه:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad \text{and} \qquad \int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

داریم:

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \frac{\pi S_0}{\omega_d^2} e^{-\xi\omega_n\tau}\left(\frac{\cos\omega_d\tau}{2\xi\omega_n} - \frac{2\xi\omega_n\,\cos\omega_d\tau}{4\omega_n^2} + \frac{2\omega_d\,\sin\omega_d\tau}{4\omega_n^2}\right) \\ &= \frac{\pi S_0}{\omega_d^2} e^{-\xi\omega_n\tau}\left(\frac{\omega_d}{2\xi\omega_n^2}\right)\left(\sqrt{1-\xi^2}\cos\omega_d\tau + \xi\sin\omega_d\tau\right) \\ &= \frac{\pi S_0\, e^{-\xi\omega_n\tau}}{2\xi\omega_n^3}\left(\cos\omega_d\tau + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d\tau\right) \end{aligned}$$

مثال

در همین مثال، میانگین مربع و چگالی طیفی پاسخ جابجایی نسبی y را با فرض همان تحریک $\ddot{x}_0(t)$ بصورت اغتشاش سفید با چگالی طیفی برابر $S_{\ddot{x}_0}(\omega) = S_0$ محاسبه کنید.

حل

قبلاً داشتیم:

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

بنابراین داریم:

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{\ddot{x}_0}(\omega) = \frac{S_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}$$

میانگین مربع برابر است با:

$$E(y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{\pi S_0}{2\xi\omega_n^3}$$

توزیع احتمال پاسخ

اکنون ببینیم رابطه بین توزیع احتمال پاسخ (خروجی) یک سیستم خطی یک درجه آزادی، با توزیع احتمال تحریک (ورودی) آن چگونه است. البته روش کلی برای تعیین توزیع احتمال خروجی یک سیستم خطی وجود ندارد مگر در موارد خاص که توزیع احتمال ورودی نرمال (گوسی) باشد و این بدلیل خواص ویژه فرآیندهای نرمال است. یک تئوری کلی وجود دارد که اگر y_1 و y_2 یک جفت متغیر تصادفی نرمال (مشترک) باشند، چنانچه y بصورت زیر تعریف شود:

$$y = y_1 + y_2$$

آنگاه متغیر y نیز نرمال خواهد بود. با این نتیجه، اگر تحریک $x(t)$ نرمال باشد پاسخ $y(t)$ یک سیستم خطی نیز نرمال خواهد بود. با استفاده از انتگرال کانولوشن داریم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

این انتگرال در حقیقت مقدار حدی جمع خطی متغیرهای تصادفی است. بنابراین اگر $x(t)$ نرمال باشد $y(t)$ نیز نرمال خواهد بود. این نتیجه را می‌توان به حالت بیش از یک فرآیند ورودی با توزیع نرمال نیز تعمیم داد و فرآیند خروجی پس از عبور از یک سیستم خطی، نرمال خواهد بود.

نهایتاً از آنجا که مشتق فرآیند خروجی بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

بنابراین، اگر $y(t)$ نرمال باشد، $\dot{y}(t)$ و سایر مشتقات آن از مراتب بالاتر نیز نرمال خواهند بود.

مثال

یک سیستم خطی در برابر تحریک ایستا و نرمال قرار دارد و پاسخ $y(t)$ سیستم دارای میانگین m_y، انحراف معیار σ_y و تابع خودهمبستگی $R_y(\tau)$ می‌باشد. مطلوبست تابع چگالی احتمال $p(y_1, y_2)$ برای توزیع مشترک y در t_1 و y در t_2 بطوریکه $t_2 = t_1 + \tau$.

حل

با مراجعه به تعریف ارائه شده در گذشته مربوط به تابع چگالی احتمال نرمال مرتبه دوم، دیدیم که مقدار کوواریانس نرمال شده $\rho_{y_1 y_2}$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho_{y_1 y_2} = \frac{E\left[(y_1 - m_y)(y_2 - m_y)\right]}{\sigma_y^2} = \frac{R_y(\tau) - m_y^2}{\sigma_y^2} = \rho$$

و خواهیم داشت:

$$p(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_y^2\sqrt{(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\left\{(y_1-m_y)^2+(y_2-m_y)^2-2\rho(y_1-m_y)(y_2-m_y)\right\}}$$

اگر $\tau \to \infty$، آنگاه $R_y(\tau) \to m_y^2$ و خواهیم داشت: $\rho \to 0$

دراینحالت داریم:

$$p(y_1, y_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-(y_1-m_y)^2/2\sigma_y^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-(y_2-m_y)^2/2\sigma_y^2}\right) = p(y_1)p(y_2)$$

و بنابراین y_1 و y_2 بطور آماری مستقل‌اند.

برای فرآیندهای غیرگوسی (غیر نرمال) موضوع پیچیده‌تر خواهد بود. در واقع، توزیع احتمال خروجی برای پاسخ یک سیستم خطی دلخواه به صورت بسطی از توابع مطرح می‌شود که به مشخصات آماری فرآیند ورودی و مشخصات سیستم بستگی دارد که محاسبات آن مشکل و وقت‌گیر است.

خوشبختانه در بسیاری از مسائل عملی ارتعاش تصادفی، معمولاً فرآیند ورودی نرمال یا نزدیک به نرمال است و برای کاربردهای مهندسی، اغلب خطی، ایستا، ارگودیک و نرمال فرض می‌شود (اثبات به کمک تئوری حد مرکزی در احتمالات).

تمرین سری هفتم:

مسائل 7.1 تا 7.4 کتاب Newland و مسائل ۵.۱ تا ۵.۹ کتاب Yang

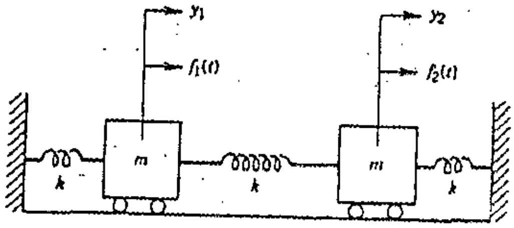
پاسخ سیستمهای خطی چند درجه آزادی به تحریک تصادفی

در این بخش، پاسخ **سیستمهای خطی چند درجه آزادی** به تحریک (ورودی) تصادفی مورد بررسی قرار می‌گیرد. تمام مفاهیم پایه و روش تحلیل پاسخ خطی سیستم‌های چند درجه آزادی در برابر تحریک تصادفی را می‌توان از مساله یک سیستم دو درجه آزادی گسترش داد. چراکه در تحلیل تعینی (غیر تصادفی) تمام اصول تحلیل سیستم‌های چند درجه‌آزادی در سیستم‌های دو درجه آزادی وجود دارد و موضوع اضافه نمودن تحریک تصادفی چیزی از این اصول نمی‌کاهد. بنابراین، ابتدا تحلیل تصادفی سیستم‌های دودرجه آزادی تشریح می‌شود تا درک کاملی از روش ایجاد شود. البته در انتها، روابط متناظر در سیستم‌های چند درجه آزادی به شکل ماتریس‌های فشرده بیان می‌شود.

۱-سیستم دودرجه آزادی

تحلیل تعینی نامیرا

سیستم دو درجه آزادی شکل زیر را درنظر بگیرید.



معادلات حرکت بر حسب جابجایی y_j، تحریک $f_j(t)$ به ازای $j = 1,2$ و جرم m و سختی k برابر است با:

$$m\ddot{y}_1 + 2ky_1 - ky_2 = f_1(t)$$

$$m\ddot{y}_2 + 2ky_2 - ky_1 = f_2(t)$$

روش مختصات مودی که در آن $f_1(t) = f_2(t) = 0$ هستند را درنظر بگیرید. با فرض حرکت دو جرم بصورت هارمونیک با دامنه‌های نامعلوم A_1 و A_2 با فرکانس نامعلوم ω داریم:

$$y_1(t) = A_1 \sin \omega t; \qquad y_2(t) = A_2 \sin \omega t$$

با جایگزینی در معادله حرکت و صفرکردن توابع تحریک داریم:

$$\omega^4 - \frac{4k}{m}\omega^2 + \frac{3k^2}{m^2} = 0$$

با حل این معادله، فرکانسهای طبیعی بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\omega_1 = \sqrt{k/m} \quad \text{and} \quad \omega_2 = \sqrt{3k/m}$$

و شکلهای مودی متناظر بصورت:

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = 1 \quad \text{and} \quad \frac{A_{12}}{A_{22}} = -1$$

با تعریف مختصات متعامد مودی داریم:

$$q_1 = A_{11} y_1 + A_{12} y_2 = y_1 + y_2$$

$$q_2 = A_{21} y_1 + A_{22} y_2 = y_1 - y_2$$

با جایگزینی y_1 و y_2 از معادلات بالا در معادلات حرکت سیستم، خواهیم داشت:

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \frac{1}{m}[f_1(t) + f_2(t)] = g_1(t)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \frac{1}{m}[f_1(t) - f_2(t)] = g_2(t)$$

که معادلات حرکت غیردرگیر هستند.

همانند دو سیستم یک درجه آزادی مجزا، معادلات مذکور برای تحریک‌های $g_1(t)$ و $g_2(t)$ برای q_1 و q_2 حل می‌شوند و خواهیم داشت:

$$q_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta) g_1(t-\theta)\, d\theta$$

$$q_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\theta) g_2(t-\theta)\, d\theta$$

که توابع $h_1(\theta)$ و $h_2(\theta)$، توابع پاسخ به ضربه واحد در سیستم غیردرگیر هستند و برابرند با:

$$h_j(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_j} \sin \omega_j t & \text{for} \quad t > 0 \\ 0 & \text{for} \quad t < 0 \end{cases}$$

بجای این کار، پاسخ‌های q_1 و q_2 را می‌توان از تحلیل در حوزه فرکانس با انتگرال فوریه بصورت زیر نوشت:

$$q_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega) e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\theta) e^{-i\omega\theta}\, d\theta \right] d\omega$$

$$q_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_2(\omega) e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_2(\theta) e^{-i\omega\theta}\, d\theta \right] d\omega$$

که در آن، توابع $H_1(\omega)$ و $H_2(\omega)$، توابع پاسخ فرکانسی سیستم غیردرگیر هستند و برابرند با:

$$H_j(\omega) = \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2}; \qquad j = 1, 2$$

این روش بنام **روش مختصات متعامد مودی** معروف است و در آن، معادلات درگیر سیستم‌های چند درجه آزادی به معادلات غیردرگیر از چند سیستم یک درجه آزادی تبدیل می‌شوند. کلیه اصول تعیین تابع پاسخ

فرکانسی و تابع پاسخ به ضربه واحد در مختصات جدید مشابه با سیستم یک درجه آزادی که قبلاً بیان شد بدست می‌آیند و همچنین داریم:

$$h_j(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_j(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega$$
$$H_j(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_j(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

و نهایتا پاسخ سیستم دودرجه آزادی برابر است با:

$$y_1(t) = \tfrac{1}{2}[q_1(t) + q_2(t)]$$
$$y_2(t) = \tfrac{1}{2}[q_1(t) - q_2(t)]$$

نکته اصلی این روش، تبدیل معادلات درگیر به معادلات غیردرگیر است.

مثال

با فرض نیروی تحریک $f_1(t)$ بصورت زیر و $f_2(t) = 0$، پاسخ سیستم دو درجه آزادی پیشگفته را بدست آورید.

$$f_1(t) = \begin{cases} F_0 & \text{for} \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

حل

داریم:

$$g_1(t) = \frac{1}{m} f_1(t) \qquad \text{and} \qquad g_2(t) = \frac{1}{m} f_1(t)$$

پاسخ q_1 برابر است با:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\omega_1} \sin[\omega_1(t-\theta)] \frac{1}{m} f_1(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{F_0}{m\omega_1}\int_0^t \sin[\omega_1(t-\theta)]\, d\theta \\ &= \frac{F_0}{m\omega_1} \frac{\cos[\omega_1(t-\theta)]}{\omega_1}\Bigg|_0^t = \frac{F_0}{m\omega_1^2}(1-\cos\omega_1 t) \qquad \text{for} \qquad 0 < t < T \end{aligned}$$

$$q_1(t) = \frac{F_0}{m\omega_1}\int_0^T \sin[\omega_1(t-\theta)]\,d\theta = \frac{F_0}{m\omega_1^2}\{\cos[\omega_1(t-T)] - \cos\omega_1 t\}$$

$$\text{for } t > T$$

همچنین برای q_2

$$q_2(t) = \begin{cases} \dfrac{F_0}{m\omega_2^2}(1-\cos\omega_2 t) & \text{for } 0 \leqslant t \leqslant T \\ \dfrac{F_0}{m\omega_2^2}\{\cos[\omega_2(t-T)] - \cos\omega_2 t\} & \text{for } t > T \end{cases}$$

و پاسخها برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{F_0}{m}\left[\dfrac{1-\cos\omega_1 t}{\omega_1^2} \pm \dfrac{1-\cos\omega_2 t}{\omega_2^2}\right] & \text{for } 0 \leqslant t \leqslant T \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{F_0}{m}\left\{\dfrac{\cos[\omega_1(t-T)] - \cos\omega_1 t}{\omega_1^2} \pm \dfrac{\cos[\omega_2(t-T) - \cos\omega_2 t]}{\omega_2^2}\right\} & \\ \qquad \text{for } t > T & \\ 0 \qquad \text{for } t < 0 & \end{cases}$$

تحلیل تصادفی نامیرا

فرض می‌کنیم توابع تحریک $f_1(t)$ و $f_2(t)$ فرآیندهای تصادفی ایستا با میانگین صفر و با توابع خودهمبستگی و چگالی طیفی بصورت:

$$R_j(\tau) = E[f_j(t)f_j(t+\tau)], \qquad j = 1, 2$$

$$S_j(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_j(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau, \qquad j = 1, 2$$

باشند. علاوه‌براین، برای تحریک، توابع همبستگی متقابل بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R_{12}(\tau) = E[f_1(t)f_2(t+\tau)]$$

$$R_{21}(\tau) = E[f_2(t)f_1(t+\tau)]$$

و همچنین توابع چگالی طیفی متقابل:

$$S_{12}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

$$S_{21}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{21}(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

به استناد خاصیت ایستایی فرآیندها:

$$R_{12}(\tau) = E[f_1(t-\tau)f_2(t)] = R_{21}(-\tau)$$

و همچنین:

$$S_{12}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{21}(-\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{21}(\tau)e^{i\omega\tau}\,d\tau = S_{21}(-\omega)$$

خودهمبستگی پاسخ نامیرا

تابع خودهمبستگی پاسخ $y_1(t)$ برابر است با:

$$R_{y_1}(\tau) = E[y_1(t)y_1(t+\tau)]$$

$$= \tfrac{1}{4}E\{[q_1(t)+q_2(t)][q_1(t+\tau)+q_2(t+\tau)]\}$$

$$= \tfrac{1}{4}\{E[q_1(t)q_1(t+\tau)] + E[q_1(t)q_2(t+\tau)] + E[q_2(t)q_1(t+\tau)]$$

$$+ E[q_2(t)q_2(t+\tau)]\}$$

سمت راست معادله بالا شامل دو تابع خودهمبستگی و دو تابع خودهمبستگی متقابل برای مختصات متعامد $q_1(t)$ و $q_2(t)$ می‌باشد. اگر از معادلات حرکت غیردرگیر که بین $q_1(t)$ و توابع تحریک تصادفی $f_1(t)$ و $f_2(t)$ نوشته شده بود استفاده کنیم برای ترم اول رابطه بالا داریم:

$$E[q_1(t)q_1(t+\tau)] = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{m}[f_1(t-\theta_1)+f_2(t-\theta)]h_1(\theta_1)\,d\theta_1\right.$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{m}[f_1(t+\tau-\theta_2)+f_2(t+\tau-\theta_2)]h_1(\theta_2)\,d\theta_2\right\}$$

با جابجایی نوبت انتگرال‌گیری و استفاده از روابط پیشین داریم:

$$E[q_1(t)q_1(t+\tau)] = \frac{1}{m^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[R_1(\tau-\theta_2+\theta_1)+R_{12}(\tau-\theta_2+\theta_1)$$

$$+R_{21}(\tau-\theta_2+\theta_1)+R_2(\tau-\theta_2+\theta_1)]h_1(\theta_1)h_1(\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2$$

بطور مشابه برای سایر ترمهای تابع خودهمبستگی پاسخ $y_1(t)$ داریم:

$$E[q_1(t)q_2(t+\tau)] = \frac{1}{m^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[R_1(\tau-\theta_2+\theta_1)-R_{12}(\tau-\theta_2+\theta_1)$$

$$+R_{21}(\tau-\theta_2+\theta_1)-R_2(\tau-\theta_2+\theta_1)]h_1(\theta_1)h_2(\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2$$

و

$$E[q_2(t)q_1(t+\tau)] = \frac{1}{m^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[R_1(\tau-\theta_2+\theta_1) + R_{12}(\tau-\theta_2+\theta_1) - R_{21}(\tau-\theta_2+\theta_1) - R_2(\tau-\theta_2+\theta_1)]h_1(\theta_2)h_2(\theta_1)\,d\theta_1\,d\theta_2$$

و

$$E[q_2(t)q_2(t+\tau)] = \frac{1}{m^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[R_1(\tau-\theta_2+\theta_1) - R_{12}(\tau-\theta_2+\theta_1) - R_{21}(\tau-\theta_2+\theta_1) + R_2(\tau-\theta_2+\theta_1)]h_2(\theta_1)h_2(\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2$$

چهار معادله مذکور همراه با معادله اصلی (معادله تابع خودهمبستگی پاسخ $y_1(t)$)، روابط پاسخ خروجی-ورودی بر حسب توابع خودهمبستگی و همبستگی متقابل هستند.

اگرچه نسبت به سیستم یک درجه آزادی که فقط یک ترم داشت، اینجا تعداد ترمهای بیشتری (۱۶ ترم) در تعیین تابع خودهمبستگی پاسخ $y_1(t)$ وجود دارند ولی ترمها عمدتاً مشابهند و مشکل خاصی در تعیین آنها وجود ندارد. ۸ تا از این ۱۶ ترم، توابع همبستگی متقابل $R_{12}(\tau)$ و $R_{21}(\tau)$ توابع تحریک تصادفی $f_1(t)$ و $f_2(t)$ هستند که ناشی از تحریک چند ورودی است.

برای حالت خاص تنها یک تحریک تصادفی $f_1(t)$، تنها ترم اول سمت راست تمام چهار رابطه انتگرالی بالا وجود دارد و ۱۶ ترم به ٤ ترم کاهش می‌یابد و توابع خودهمبستگی متقابل حذف می‌شوند و داریم:

$$R_{y_1}(\tau) = \frac{1}{4m^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_1(\tau+\theta_1-\theta_2)[h_1(\theta_1)h_1(\theta_2) + h_1(\theta_1)h_2(\theta_2) + h_2(\theta_1)h_1(\theta_2) + h_2(\theta_1)h_2(\theta_2)]\,d\theta_1\,d\theta_2$$

چگالی طیفی پاسخ نامیرا

تابع چگالی طیفی پاسخ $y_1(t)$ از روی تابع خودهمبستگی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$S_{y_1}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{y_1}(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\{E[q_1(t)q_1(t+\tau)] + E[q_1(t)q_2(t+\tau)] + E[q_2(t)q_1(t+\tau)] + E[q_2(t)q_2(t+\tau)]\}e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

به کمک روابط قبلی، نتیجه ترم اول سمت راست رابطه بالا برابر است با:

$$I_1 = \frac{1}{8\pi m^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[R_1(\tau-\theta_2+\theta_1)+R_{12}(\tau-\theta_2+\theta_1)$$
$$+R_{21}(\tau-\theta_2+\theta_1)+R_2(\tau-\theta_2+\theta_1)]e^{-i\omega\tau}h_1(\theta_1)h_1(\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2$$

$$I_1 = \frac{|H_1(\omega)|^2}{4m^2}[S_1(\omega)+S_{12}(\omega)+S_{21}(\omega)+S_2(\omega)]$$

و به همین ترتیب برای سایر ترمها:

$$I_2 = \frac{H_1(\omega)H_2(-\omega)}{4m^2}[S_1(\omega)-S_{12}(\omega)+S_{21}(\omega)-S_2(\omega)]$$

$$I_3 = \frac{H_1(-\omega)H_2(\omega)}{4m^2}[S_1(\omega)+S_{12}(\omega)-S_{21}(\omega)-S_2(\omega)]$$

$$I_4 = \frac{|H_2(\omega)|^2}{4m^2}[S_1(\omega)-S_{12}(\omega)-S_{21}(\omega)+S_2(\omega)]$$

کلیه توابع مورد نیاز در این روابط قبلاً تعریف شده‌اند. درنهایت:

$$S_{y_1}(\omega) = I_1+I_2+I_3+I_4$$

برای حالت خاص تنها یک تحریک تصادفی $f_1(t)$، تابع چگالی طیفی پاسخ $y_1(t)$ برابر است با:

$$S_{y_1}(\omega) = \frac{S_1(\omega)}{4m^2}[|H_1(\omega)|^2+H_1(\omega)H_2(-\omega)+H_2(\omega)H_1(-\omega)+|H_2(\omega)|^2]$$

مثلا برای سیستم دو درجه آزادی پیش‌گفته اگر تحریک شامل یک فرآیند تصادفی ایستا $f_1(t)$ تکی با طیف اغتشاش سفید S_0 باشد و مقدار میانگین مربع ایستای $E(y_1^2)$ را بخواهیم داریم:

چون میرایی نداریم:

$$|H_1(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_1^2-\omega^2)^2}$$

$$H_1(\omega)H_2(-\omega) = \frac{1}{(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)} = H_2(\omega)H_1(-\omega)$$

$$|H_2(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_2^2-\omega^2)^2}$$

با جایگزین در رابطه چگالی طیفی پاسخ $y_1(t)$ داریم:

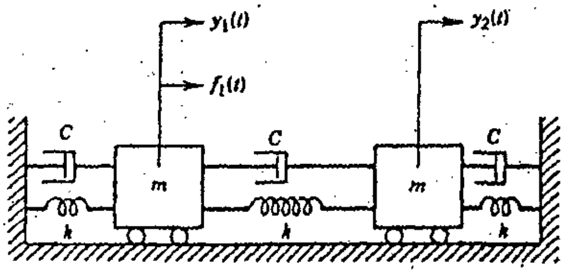
$$S_{y_1}(\omega) = \frac{S_0}{4m^2}\left[\frac{1}{(\omega_1^2-\omega^2)^2}+\frac{2}{(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)}+\frac{1}{(\omega_2^2-\omega^2)^2}\right]$$

و نهایتاً:

$$E[y_1(t)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}S_{y_1}(\omega)\,d\omega \to \infty$$

تحلیل تعیین میرا

وقتی میرایی وارد مساله شود، تنها نکته جدید آن غیردرگیرکردن معادلات حرکت است. برای سادگی فرض می‌کنیم فقط یک تحریک $f_1(t)$ داریم چراکه در حالت تحریک چند ورودی میرا، اصول پایه با حالت نامیرا یکی است. در اینجا از بیان ماتریسی استفاده می‌شود.



معادله حرکت سیستم دو درجه آزادی شکل روبرو برابر است با:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

از نتایج تحلیل ارتعاش آزاد نامیرا داشتیم:

$$\omega_1 = \sqrt{k/m} \quad \text{and} \quad \omega_2 = \sqrt{3k/m}$$

و همچنین:

$$\{\psi_1\} = \begin{Bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad \{\psi_2\} = \begin{Bmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

در اینجاهم مختصات متعامد مودی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{y\} = [\psi]\{Y\} = \{\psi_1\}Y_1 + \{\psi_2\}Y_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} Y_1 + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} Y_2$$

با جایگزینی در معادله حرکت داریم:

$$[m][\psi]\{\ddot{Y}\} + [c][\psi]\{\dot{Y}\} + [k][\psi]\{Y\} = \{f\}$$

طرفین را در $\{\psi_j\}^T$ پیش ضرب می‌کنیم.

$$\{\psi_j\}^T[m][\psi]\{\ddot{Y}\} + \{\psi_j\}^T[c][\psi]\{\dot{Y}\} + \{\psi_j\}^T[k][\psi]\{Y\} = \{\psi_j\}^T\{f\}$$

.با برقراری شرایط تعامد مودها نسبت به ماتریسهای جرم و میرایی و سختی داریم:

$$\{\psi_j\}^T[m]\{\psi_k\} = \{\psi_j\}^T[c]\{\psi_k\} = \{\psi_j\}^T[k]\{\psi_k\} = 0 \qquad \text{for } j \neq k$$

نتیجه خواهد شد:

$$M_j\ddot{Y}_j + C_j\dot{Y}_j + K_jY_j = F_j; \qquad j = 1, 2$$

که در آن:

$$M_j = \{\psi_j\}^T[m]\{\psi_j\}; \qquad M_1 = 2m, M_2 = 2m$$

$$C_j = \{\psi_j\}^T[c]\{\psi_j\}; \qquad C_1 = 2c, C_2 = 6c$$

$$K_j = \{\psi_j\}^T[k]\{\psi_j\}; \qquad K_1 = 2k, K_2 = 6k$$

$$F_j = \{\psi_j\}^T\{f\} = \psi_{1j}f_1; \qquad F_1 = f_1, F_2 = f_1$$

برابر با ماتریس جرم، ماتریس سختی، ماتریس میرایی و بردار تحریک تعمیم‌یافته می‌باشند.

با تقسیم طرفین معادله بر M_j داریم:

$$\ddot{Y}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{Y}_j + \omega_j^2 Y_j = G_j; \qquad j = 1, 2$$

که در آن:

$$2\xi_j\omega_j = c_j/M_j,\ \omega_j^2 = K_j/M_j, \text{ and } G_j = F_j/M_j.$$

که شامل دو معادله دیفرانسیل حرکت غیردرگیر می‌باشند.

مثلاً برای سیستم دو درجه آزادی پیش گفته داریم:

$$\{y\} = \{\psi_1\}Y_1 + \{\psi_2\}Y_2 = \begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}Y_1 + \begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}Y_2$$

از انتگرال دوهامل برای حل معادله دیفرانسل حرکت غیردرگیر استفاده می‌کنیم. در نتیجه:

$$Y_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_j(t-\theta)h_j(\theta)\,d\theta; \qquad j = 1, 2$$

که نیروی تعمیم یافته برابر است با:

$$G_j = F_j/M_j$$

و داریم:

$$G_1 = G_2 = f_1(t)/2m$$

تابع پاسخ به ضربه واحد برای سیستم یکدرجه آزادی برابر است با:

$$h_j(t) = \frac{\exp(-\xi_j\omega_j t)}{\omega_j\sqrt{1-\xi_j^2}} \sin\sqrt{1-\xi_j^2}\,\omega_j t$$

در این رابطه:

$$2\xi_1\omega_1 = c/m, \qquad 2\xi_2\omega_2 = 3c/m$$

$$\omega_1^2 = k/m, \qquad \omega_2^2 = 3k/m$$

به کمک تحلیل در حوزه فرکانس داریم:

$$Y_j(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_j(\omega)e^{i\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} G_j(\theta)e^{-i\omega\theta}\,d\theta\right]d\omega; \qquad j = 1, 2$$

که در آن:

$$G_1 = G_2 = f_1(t)/2m$$

و همچنین:

$$H_j(\omega) = \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 + 2i\xi_j\omega_j\omega}; \qquad j = 1, 2$$

خودهمبستگی پاسخ میرا

تابع خودهمبستگی پاسخ $y_1(t)$ سیستم دو درجه آزادی میرا در برابر تنها یک تحریک تصادفی ایستای $f_1(t)$ برابر است با:

$$\begin{aligned}
R_{y_1}(\tau) &= E[y_1(t)y_1(t+\tau)] \\
&= E\{[\psi_{11}Y_1(t) + \psi_{12}Y_2(t)][\psi_{11}Y_1(t+\tau) + \psi_{12}Y_2(t+\tau)]\} \\
&= E[\psi_{11}^2 Y_1(t)Y_1(t+\tau) + \psi_{11}\psi_{12}(t)Y_2(t+\tau) \\
&\quad + \psi_{12}\psi_{11}Y_2(t)Y_1(t+\tau) + \psi_{11}^2 Y_2(t)Y_2(t+\tau)] \\
&= \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\psi_{1j}\psi_{1k}E[Y_j(t)Y_k(t+\tau)]
\end{aligned}$$

که در آن، ψ_{1j} و ψ_{1k}، ترمهای اول بردارهای مود شکل اول و دوم هستند.

قبلاً دیدیم:

$$Y_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_j(t-\theta)h_j(\theta)\,d\theta; \qquad j = 1, 2$$

بنابراین:

$$E[Y_j(t)Y_k(t+\tau)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} G_j(\tau-\theta_1)h_j(\theta_1)\,d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} G_k(t+\tau-\theta_2)h_k(\theta_2)\,d\theta_2\right]$$

از روابط قبل داشتیم:

$$G_j(t) = \frac{F_j(t)}{M_j} = \frac{\psi_{1j} f_1(t)}{\{\psi_j\}^T[m]\{\psi_j\}}$$

با جایگزینی در رابطه قبل داریم:

$$E[Y_j(t)Y_k(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_{1j}\psi_{1k}}{M_j M_k} R_1(\tau - \theta_2 + \theta_1) h_j(\theta_1) h_k(\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2$$

در این رابطه، $R_1(\tau - \theta_2 + \theta_1)$ برابر تابع خودهمبستگی تحریک $f_1(t)$ است که قبلا بصورت زیر بدست آمد:

$$R_j(\tau) = E[f_j(t) f_j(t+\tau)], \quad j = 1, 2$$

مثلاً برای سیستم دو درجه آزادی پیش‌گفته داریم:

$$\psi_{11} = 1, \qquad \psi_{12} = 1$$

$$M_1 = 2m, \qquad M_2 = 2m$$

و در نتیجه:

$$R_{y1}(\tau) = \frac{1}{4m^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_1(\tau - \theta_2 + \theta_1)[h_1(\theta_1)h_1(\theta_2) + h_1(\theta_1)h_2(\theta_2) + h_2(\theta_1)h_1(\theta_2) + h_2(\theta_1)h_2(\theta_2)]\, d\theta_1\, d\theta_2$$

چگالی طیفی پاسخ میرا

تابع چگالی طیفی پاسخ $y_1(t)$ در برابر تنها یک تحریک تصادفی ایستای $f_1(t)$ از روی تابع خودهمبستگی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$S_{y1}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{y1}(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

با جایگزینی در رابطه بالا:

$$S_{y1}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{\psi_{1j}^2\psi_{1k}^2}{M_j M_k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_1(\tau - \theta_2 + \theta_1) h_j(\theta_1) h_k(\theta_2) \times e^{-i\omega\tau}\, d\theta_1\, d\theta_2\, d\tau$$

انتگرال سه گانه بالا را بنام I_{jk} می‌نامیم که بر حسب چگالی طیفی تحریک و تابع پاسخ فرکانسی مختلط قابل بیان است. نتیجه خواهد شد:

$$I_{jk} = S_1(\omega) H_j(\omega) H_k(-\omega)$$

با جایگزینی در رابطه چگالی طیفی داریم:

$$S_{y1}(\omega) = S_1(\omega)\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{\psi_{1j}^2\psi_{1k}^2}{M_j M_k} H_j(\omega) H_k(-\omega)$$

مثلاً برای سیستم دو درجه آزادی پیشین داریم:

$$\psi_{11} = 1, \qquad \psi_{12} = 1$$
$$M_1 = 2m, \qquad M_2 = 2m$$

و نتیجه خواهد شد:

$$S_{y1}(\omega) = S_1(\omega)\frac{1}{4m^2}\left[H_1(\omega)H_1(-\omega) + H_1(\omega)H_2(-\omega) + H_2(\omega)H_1(-\omega) + H_2(\omega)H_2(-\omega)\right]$$
$$= \frac{S_1(\omega)}{4m^2}\left[\frac{1}{(\omega_1^2-\omega^2)^2} + \frac{2}{(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)} + \frac{1}{(\omega_2^2-\omega^2)^2}\right]$$

۲-سیستم‌های چند درجه آزادی

تحلیل تعینی

معادله حرکت یک سیستم چند درجه آزادی با ماتریس‌های جرم و سختی و میرایی و بردار نیروی تحریک $\{f\}$ بصورت زیر است:

$$[m]\{\ddot{y}\} + [c]\{\dot{y}\} + [k]\{y\} = \{f\}$$

پس از حل مساله مقدار ویژه و تعیین فرکانسهای طبیعی $\{\omega\}$ و شکلهای مودی $\{\psi\}$، با معرفی مختصات متعامد مودی بصورت $\{y\} = [\psi]\{Y\}$ داریم:

$$[m][\psi]\{\ddot{Y}\} + [c][\psi]\{\dot{Y}\} + [k][\psi]\{Y\} = \{f\}$$

با ضرب طرفین معادله در $\{\psi_j\}^T$ و استفاده از خاصیت تعامد مودی:

$$\{\psi_j\}^T[m]\{\psi_k\} = \{\psi_j\}^T[c]\{\psi_k\} = \{\psi_j\}^T[k]\{\psi_k\} = 0 \qquad \text{for } j \neq k$$

داریم:

$$\ddot{Y}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{Y}_j + \omega_j^2 Y_j = G_j$$

که شامل n معادله غیردرگیر از n سیستم یک درجه آزادی معادل می‌باشد. در این رابطه:

$$2\xi_j\omega_j = \frac{C_j}{M_j} = \frac{\{\psi_j\}^T[c]\{\psi_j\}}{M_j}$$

$$\omega_j^2 = \frac{K_j}{M_j} = \frac{\{\psi_j\}^T[k]\{\psi_j\}}{M_j}$$

$$G_j = \frac{F_j}{M_j} = \frac{\{\psi_j\}^T\{f\}}{M_j}$$

$$M_j = \{\psi_j\}^T[m]\{\psi_j\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

حل معادله در حوزه زمان بصورت زیر خواهد بود:

$$Y_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_j(t-\theta)h_j(\theta)\,d\theta; \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

که در این رابطه:

$$h_j(t) = \frac{\exp(-\zeta_j\omega_j t)}{\omega_j\sqrt{1-\zeta_j^2}} \sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_j t$$

و نهایتاً پاسخ سیستم برابر خواهد بود با:

$$\{y\} = [\psi]\{Y\}$$

تحلیل تصادفی ایستا

تابع خودهمبستگی پاسخ جابجایی $y_1(t)$ برابر است با:

$$R_{y_1}(\tau) = E[\,y_1(t)y_1(t+\tau)]$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \psi_{1j}\psi_{1k}E[\,Y_j(t)Y_k(t+\tau)]$$

به کمک رابطه انتگرال دوهامل داریم:

$$E[\,Y_j(t)\,Y_k(t+\tau)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} G_j(t-\theta_1)h_j(\theta_1)\,d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} G_k(t+\tau-\theta_2)h_k(\theta_2)\,d\theta_2\right]$$

که نیروهای تعمیم یافته برابرند با:

$$G_j(t) = \frac{F_j}{M_j} = \frac{\{\psi_j\}^T\{f\}}{M_j}$$

با ترکیب دو رابطه قبل خواهیم داشت:

$$E[G_j(t-\theta_1)G_k(t+\tau-\theta_2)]$$

$$=\frac{1}{M_jM_k}E[\{\psi_j\}^T\{f(t-\theta_1)\}\{\psi_k\}^T\{f(t+\tau-\theta_2)\}]$$

$$=\frac{1}{M_jM_k}E[\psi_{1j}f_1(t-\theta_1)+\psi_{2j}f_2(t-\theta_1)+\cdots+\psi_{nj}f_n(t-\theta_1)]$$
$$\times[\psi_{1k}f_1(t+\tau-\theta_2)+\psi_{2k}f_2(t+\tau-\theta_2)+\cdots+\psi_{nk}f_n(t+\tau-\theta_2)]$$

$$=\frac{1}{M_jM_k}[\psi_{1j}\psi_{1k}R_1(\tau-\theta_2+\theta_1)+\psi_{1j}\psi_{2k}R_{12}(\tau-\theta_2+\theta_1)+\cdots$$
$$+\psi_{1j}\psi_{nk}R_{1n}(\tau-\theta_2+\theta_1)$$
$$+\psi_{2j}\psi_{1k}R_{21}(\tau-\theta_2+\theta_1)+\psi_{2j}\psi_{2k}R_2(\tau-\theta_2+\theta_1)+\cdots$$
$$+\psi_{2j}\psi_{nk}R_{2n}(\tau-\theta_2+\theta_1)+\cdots$$
$$+\psi_{nj}\psi_{1k}R_{n1}(\tau-\theta_2+\theta_1)+\psi_{nj}\psi_{2k}R_{n2}(\tau-\theta_2+\theta_1)+\cdots$$
$$+\psi_{nj}\psi_{nk}R_n(\tau-\theta_2+\theta_1)]$$

که نهایتاً برابر خواهد بود با:

$$=\frac{1}{M_jM_k}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\psi_{kj}\psi_{mk}R_{lm}(\tau-\theta_2+\theta_1)$$

وقتی تنها یک تحریک تصادفی $f_1(t)$ داشته باشیم:

$$E[G_j(t-\theta_1)G_k(t+\tau-\theta_2)]=\frac{1}{M_jM_k}\psi_{1j}\psi_{1k}R_1(\tau-\theta_2+\theta_1)$$

ازترکیب روابط قبل خواهیم داشت:

$$R_{y1}(\tau)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_{1j}\psi_{1k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{M_jM_k}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\psi_{lj}\psi_{mk}$$
$$\times R_{lm}(\tau-\theta_2+\theta_1)h_j(\theta_1)h_k(\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2$$

که در آن، $R_{lm}(\tau)$ توابع همبستگی متقابل مولفه‌های نیروهای تحریک $\{f\}$ می‌باشد و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_{lm}(\tau)=E[f_l(t)f_m(t+\tau)]$$

با جایگزینی i بجای عدد ۱ در اندیس توابع رابطه قبل، تابع خودهمبستگی $R_{y_i}(\tau)$ متناظر با پاسخ جابجایی $y_i(t)$ بدست می‌آید.

رابطه چگالی طیفی ورودی-خروجی نیز بصورت زیر بیان می‌شود:

$$S_{y1}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{y1}(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

با جایگزینی بجای تابع خودهمبستگی از روابط قبل در انتگرال بالا خواهیم داشت:

$$S_{y_1}(\omega) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \psi_{1j}\psi_{1k}\frac{1}{M_jM_k}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\psi_{lj}\psi_{mk}S_{lm}(\omega)H_j(\omega)H_k(-\omega)$$

که در آن، $S_{lm}(\omega)$ توابع چگالی طیفی متقابل مولفه‌های نیروهای تحریک $\{f\}$ می‌باشد و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_{lm} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{lm}(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

مجدداً وقتی تنها یک تحریک تصادفی $f_1(t)$ داشته باشیم:

$$S_{y_1}(\omega) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi_{1j}^2\psi_{1k}^2}{M_jM_k}S_1(\omega)H_j(\omega)H_k(-\omega)$$

وقتی بجای $f_1(t)$ فقط $f_2(t)$ را داشته باشیم:

$$S_{y_1}(\omega) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi_{1j}\psi_{1k}\psi_{2j}\psi_{2k}}{M_jM_k}S_2(\omega)H_j(\omega)H_k(-\omega)$$

۳-روش جایگزین برای تحلیل ارتعاش تصادفی سیستمهای چند درجه آزادی

آنچه در بخش قبل گفته شد تحلیل پاسخ سیستم‌های چند درجه آزادی به تحریک تعینی و تصادفی با روش تحلیل مودال کلاسیک بود. در این روش ابتدا مساله چند درجه آزادی با استفاده از مختصات مودال متعامد، به سیستم‌های یک‌درجه آزادی مستقل تبدیل شده و با همان روش سیستم‌های یک درجه آزادی حل می‌شوند. روشی که در ادامه تشریح می‌شود، تحلیل مساله مستقیماً با استفاده از روش مشابه سیستم‌های یکدرجه آزادی بدون نیاز به تحلیل مودال می‌باشد. تنها اصلاحی که باید انجام شود، استفاده از یک تابع پاسخ فرکانسی مختلط تعمیم‌یافته (یا تابع پاسخ به ضربه واحد معادل) بصورت ماتریسی از توابع می‌باشد.

تحلیل تعینی

دیدیم معادله حرکت یک سیستم چند درجه آزادی با ماتریس‌های جرم و سختی و میرایی و بردار نیروی تحریک $\{f\}$ بصورت زیر است:

$$[m]\{\ddot{y}\} + [c]\{\dot{y}\} + [k]\{y\} = \{f\}$$

ماتریس $[H(\omega)]$ شامل جابجایی‌های پاسخ فرکانسی مختلط به گونه‌ای تعریف می‌شود که پاسخ جابجایی‌های حالت پایدار بصورت زیر باشد:

$$\{y(t)\} = [H(\omega)]\{a\}e^{i\omega t}$$

که در آن، $\{a\}$ دامنه تحریک‌های حالت پایدار و ω فرکانس تحریک است.

وقتي توابع تحریک تابعی از زمان باشند:

$$\{f(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{F(\omega)\}\, e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

و تبدیل فوریه آن:

$$\{F(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\{f(t)\}\, e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

و پاسخ جابجایی بصورت:

$$\{y(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{Y(\omega)\}\, e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

که در آن:

$$\{Y(\omega)\} = [H(\omega)]\{F(\omega)\}$$

تبدیل فوریه $\{y(t)\}$ است.

معادلات مشابهی با سیستم یک‌درجه آزادی در فصول قبل بدست آمد.

پاسخ فرکانسی مختلط $[H(\omega)]$

بر اساس روابط بالا، پاسخ یک سیستم دو درجه آزادی بصورت زیر بیان خواهد شد:

$$y_1(t) = [H_{11}(\omega)a_1 + H_{12}(\omega)a_2]e^{i\omega t}$$

با قراردادن $a_2 = 0$ و $a_1 = 1$ همچنین:

$$H_{11}(\omega) = \rho_{11}(\omega)e^{i\theta_{11}(\omega)}$$

داریم:

$$y_1(t) = \rho_{11}(\omega)e^{i(\omega t+\theta_{11})}$$

ترم $H_{11}(\omega)$ از ماتریس $[H(\omega)]$ برابر تابع مختلطی از فرکانس مبین دامنه $\rho_{11}(\omega)$ و زاویه فاز $\theta_{11}(\omega)$ پاسخ جابجایی حالت پایدار در درجه آزادی اول به تحریک هارمونیک با دامنه واحد در درجه آزادی اول است.
بطور مشابه، $H_{jk}(\omega)$ بیانگر دامنه $\rho_{jk}(\omega)$ و زاویه فاز $\theta_{jk}(\omega)$ پاسخ جابجایی حالت پایدار در درجه آزادی j ام به تحریک هارمونیک با دامنه واحد درجه آزادی k ام است.
برای تعیین $[H(\omega)]$ با قراردادن $\{f(t)\} = \{a\}e^{i\omega t}$ و $\{y(t)\} = [H(\omega)]\{a\}e^{i\omega t}$ در معادله حرکت یعنی:

$$[m]\{\ddot{y}\} + [c]\{\dot{y}\} + [k]\{y\} = \{f(t)\}$$

نتیجه خواهد شد:

$$(-\omega^2[m] + i\omega[c] + [k])[H(\omega)]\{a\} = \{a\} \implies [H(\omega)] = (-\omega^2[m] + i\omega[c] + [k])^{-1}$$

علامت ۱- به معنی معکوس ماتریس می‌باشد.

پاسخ ضربه واحد $[h(t)]$

مطابق همان تعریفی که برای پاسخ فرکانسی مختلط $[H(\omega)]$ داشتیم، ترم $h_{jk}(t)$ از ماتریس پاسخ ضربه $[h(t)]$ برابر پاسخ جابجایی در درجه آزادی j ام به تحریک ضربه واحد در درجه آزادی k ام است.

قبلاً داشتیم:

$$F_k(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = 1$$

$$y_j(t) = h_{jk}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y_j(\omega)\, e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$Y_j(\omega) = H_{jk}(\omega)F_k(\omega) = H_j(\omega)$$

با جایگزینی $Y_j(\omega)$ از رابطه قبل در رابطه دوم داریم:

$$h_{jk}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{jk}(\omega)\, e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

و همچنین:

$$H_{jk}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{jk}(t)\, e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

تحریک تصادفی ایستا

درنظر بگیرید پاسخ جابجایی $y_j(t)$ در درجه آزادی j ام از یک سیستم چند درجه آزادی به یک تحریک تصادفی ایستا که در درجه آزادی k ام اعمال می‌شود. مجدداً فرض می‌شود تحریک تصادفی $f_k(t)$ دارای میانگین صفر، تابع خودهمبستگی $R_k(\tau)$ و چگالی طیفی $S_k(\omega)$ باشد. می‌خواهیم تابع خودهمبستگی $R_j(\tau)$ و چگالی طیفی $S_j(\omega)$ را برای پاسخ ایستای جابجایی $y_j(t)$ بدست آوریم.

بنا به تعریف:

$$R_j(\tau) = E\left[y_j(t)y_j(t+\tau)\right]$$

پاسخ $y_j(t)$ بر حسب تابع تحریک $f_k(t)$ و تابع پاسخ ضربه $h_{jk}(t)$ برابر است با:

$$y_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\theta)\, h_{jk}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

با جایگزینی در رابطه قبل داریم:

$$R_j(\tau) = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\theta_1)\, h_{jk}(\theta_1)\mathrm{d}\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t+\tau-\theta_2)\, h_{jk}(\theta_1)\mathrm{d}\theta_2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_k(\tau-\theta_2+\theta_1)h_{jk}(\theta_1)\, h_{jk}(\theta_1)\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2$$

شبیه این رابطه قبلاً برای سیستم یک درجه آزادی نیز بدست آمده است.

برای چگالی طیفی $y_j(t)$ داریم:

$$S_j(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_j(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

که برابر خواهد بود با:

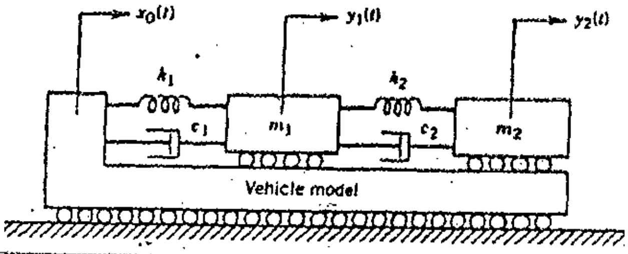
$$S_j(\omega) = H_{jk}(\omega)H_{jk}^*(\omega)S_k(\omega)$$

که در آن:

$$H_{jk}^*(\omega) = H_{jk}(-\omega)$$

مثال

سیستم دو درجه آزادی مطابق شکل زیر مفروض است. دو جرم m_1 و m_2 روی وسیله نقلیه قرار دارند و این وسیله نقلیه با شتاب $\ddot{x}_0(t)$ حرکت می‌کند (مشابه ساختمان دو طبقه با تحریک زلزله در پایه ساختمان). اگر شتاب $\ddot{x}_0(t)$ وسیله نقلیه، یک فرآیند تصادفی اغتشاش سفید با چگالی طیفی S_0 باشد، میانگین مربع جابجایی نسبی جرم m_1 را تعیین کنید.



حل

معادله حرکت سیستم بصورت زیر است:

$$m_1\ddot{y}_1 = (k_1x_0 + c_1\dot{x}_0) - (k_{11}y_1 + k_{12}y_2) - (c_{11}\dot{y}_1 + c_{12}\dot{y}_2)$$

$$m_2\ddot{y}_2 = \qquad - (k_{21}y_1 + k_{22}y_2) - (c_{21}\dot{y}_1 + c_{22}\dot{y}_2)$$

و به شکل ماتریسی:

$$[m]\{\ddot{y}\} + [c]\{\dot{y}\} + [k]\{y\} = \begin{Bmatrix}(k_1x_0 + c_1\dot{x}_0)\\ 0\end{Bmatrix}$$

که در آن:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix},\quad [k] = \begin{bmatrix}(k_1 + k_2) & -k_2\\ -k_2 & k_2\end{bmatrix},\quad [c] = \begin{bmatrix}(c_1 + c_2) & -c_2\\ -c_2 & c_2\end{bmatrix}$$

برای نوشتن معادله بر حسب جابجایی‌های نسبی باید جایگزین کنیم: $y_1 = z_1 + x_0$ و $y_2 = z_2 + z_1 + x_0$

نتیجه خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0\\ m_2 & m_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{z}_1\\ \ddot{z}_2\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_2\\ 0 & c_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_2\\ 0 & k_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} z_1\\ z_2\end{Bmatrix} = -\ddot{x}_0\begin{Bmatrix} m_1\\ m_2\end{Bmatrix}$$

حال تابع پاسخ فرکانسی پاسخ متناظر با تحریک $\ddot{x}_0$ را بدست می‌آوریم.

اگر تعریف کنیم:

$$\omega_1^2 = k_1/m_1, \qquad \omega_2^2 = k_2/m_2, \qquad \mu = m_2/m_1$$
$$\xi_1 = c_1/2\sqrt{k_1 m_1}, \qquad \xi_2 = c_2/2\sqrt{k_2 m_2}$$

با تقسیم طرفین معادله بالا بر m_1 و استفاده از پارامترهای بالا داریم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\xi\omega_1 & +2\mu\xi_2\omega_2 \\ 0 & -2\xi_2\omega_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega_1^2 & +\mu\omega_2^2 \\ 0 & -\omega_2^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix}$$
$$= \ddot{x}_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

در این مساله توابع تحریک برابر $f_1(t) = f_2(t) = \ddot{x}_0$ هستند.

قبلاً دیدیم:

$$[H(\omega)] = (-\omega^2[m] + i\omega[c] + [k])^{-1}$$

بنابراین:

$$[H_z(\omega)] = \begin{bmatrix} (+\omega^2 - i\omega 2\xi_1\omega_1 - \omega_1^2) & (i\omega 2\mu\xi_2\omega_2 + \mu\omega_2^2) \\ (\omega^2) & (\omega^2 - i\omega 2\xi_2\omega_2 - \omega_2^2) \end{bmatrix}^{-1}$$

پس از معکوس گیری داریم:

$$H_{11}(\omega) = (\omega^2 - i\omega 2\xi_2\omega_2 - \omega_2^2)/\Delta, \qquad H_{12}(\omega) = (-i\omega 2\mu\xi_2\omega_2 - \mu\omega_2^2)/\Delta$$
$$H_{21}(\omega) = -\omega^2/\Delta, \qquad H_{22}(\omega) = (\omega^2 - i\omega 2\xi_1\omega_1 - \omega_1^2)/\Delta$$

که در این روابط:

$$\begin{aligned}\Delta = \omega^4 - (i\omega)^3[2\xi_1\omega_1 + 2(1+\mu)\xi_2\omega_2] \\ - \omega^2[\omega_1^2 + (1+\mu)\omega_2^2 + 4\xi_1\xi_2\omega_1\omega_2] \\ + i\omega[2\xi_1\omega_1\omega_2^2 + 2\xi_2\omega_2\omega_1^2] + \omega_1^2\omega_2^2\end{aligned}$$

و نهایتاً:

$$H_{z1}(\omega) = H_{11}(\omega) + H_{12}(\omega) = [\omega^2 - i\omega(1+\mu)2\xi_2\omega_2 - (1+\mu)\omega_2^2]/\Delta$$
$$H_{z2}(\omega) = H_{21}(\omega) + H_{22}(\omega) = (-i\omega 2\xi_1\omega_1 - \omega_1^2)/\Delta$$

از آنجا که در این مساله هر دو تابع تحریک با هم برابرند قبلاً داشتیم:

$$S_{z_1}(\omega) = H_{z_1}(\omega)H_{z_1}^*(\omega)S_{\ddot{x}_0}(\omega)$$

بنابراین:

$$S_{z_1}(\omega) = |H_{z_1}(\omega)^2|S_0$$

که در آن:

$$H(\omega) = \frac{-i\omega^3 B_3 - \omega^2 B_2 + i\omega B_1 + B_0}{\omega^4 A_4 - i\omega^3 A_3 - \omega^2 A_2 + i\omega A_1 + A_0}$$

و همچنین:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \, d\omega$$

$$= \frac{(B_0^2/A_0)(A_2A_3 - A_1A_4) + A_3(B_1^2 - 2B_0B_0) + A_1(B_2^2 - 2B_1B_3) + (B_3^2/A_4)(A_1A_2 - A_0A_3)}{A_1(A_2A_3 - A_1A_4) - A_0A_3^2}$$

در این مساله:

$$A_0 = \omega_1^2\omega_2^2, \qquad A_1 = 2\xi_1\omega_1\omega_2^2 + 2\xi_2\omega_2\omega_1^2$$

$$A_2 = \omega_1^2 + (1+\mu)\omega_2^2 + 4\xi_1\xi_2\omega_1\omega_2, \qquad A_3 = 2\xi_1\omega_1 + 2(1+\mu)\xi_2\omega_2$$

$$A_4 = 1$$

$$B_0 = -(1+\mu)\omega_2^2, \qquad B_1 = -(1+\mu)2\xi_2\omega_2$$

$$B_2 = 1, \qquad B_3 = 0$$

و نهایتاً

$$E(z_1^2) = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_{z1}(\omega)|^2 \, d\omega$$

$$= (\pi S_0/\Delta)[2\xi_1\omega_1\omega_2^2[\mu^2 + \mu(1+\mu)^2(\omega_2/\omega_1)^2]$$

$$+ 2\xi_2\omega_2\omega_1^2\{[1 - (1+\mu)^2(\omega_2/\omega_1)^2]^2 + \mu(1+\mu)^2(\omega_2/\omega_1)^2\}$$

$$+ 8\xi_1\xi_2^2\omega_1\omega_2^2(1+\mu)^2[1 + (1+\mu)(\omega_2/\omega_1)^2]$$

$$+ 8\xi_2^3\omega_2^3(1+\mu)^2[(1+\mu) + (\xi_1/\xi_2)^2]]$$

تمرین سری هشتم:

مسا ئل ۶.۱ تا ۶.۱۲ کتاب Yang

(دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات اصفهان ،جزوه درس ارتعاشات تصادفی، گرد آوری و تنظیم: دکتر رضا اکبری، تابستان ۱۳۹۲)

پاسخ سیستمهای پیوسته به تحریک تصادفی

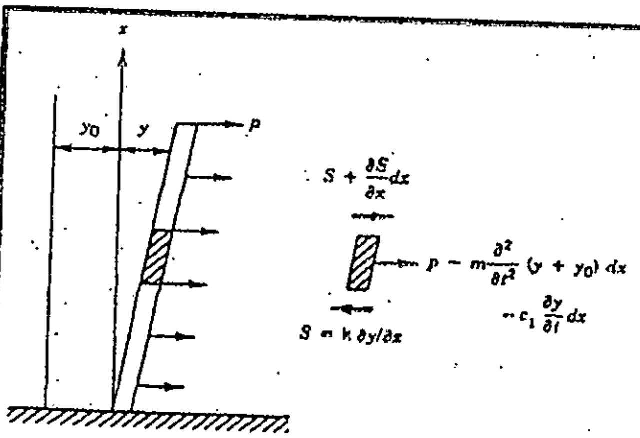
همزمان با توسعه معادلات ارتعاش تصادفی سیستمهای چند درجه آزادی در فصل قبل، در این بخش پاسخ ارتعاش تصادفی سیستمهای پیوسته ساده که مفاهیم پایه و روش تحلیل آنها با کمترین پیچیدگی ریاضی انجام می‌شود، مورد بررسی قرار می‌گیرد. دو سیستم پیوسته شامل تیر برشی و تیر خمشی مورد بررسی قرار می‌گیرند. نمونه‌های اندکی پیچیده‌تر مانند ورقها و سازه‌های پیوسته بزرگ مانند سدها بعنوان مطالب تکمیلی درصورت علاقمندی دانشجو، در کتابهای این مبحث موجود می‌باشد.

۱- تیر برشی

انتخاب تیرهای برشی بدلیل شباهت رفتار آنها با رفتار برشی ساختمانهای بلند مورد توجه بوده است و در این قسمت به آنها پرداخته خواهد شد.

ارتعاش تصادفی

تیر برشی شکل زیر به طول L، سختی برشی k، ضریب میرایی c_1 و جرم واحد طول m را درنظر بگیرید. تیر در پایه با مختصات $x=0$ گیردار و در انتها با مختصات $x=L$ آزاد است. بار گسترده $p(x,t)$ در طول تیر به آن وارد می‌شود.



زمانیکه پایه در برابر شتاب گذرای اختیاری $\ddot{y}_0$ قرار گیرد، جابجایی نسبی جانبی $y(x,t)$ با معادله زیر بیان می‌شود: (رابطه تعادل المان فوق)

$$m\frac{\partial^2(y+y_0)}{\partial t^2}+c_1\frac{\partial y}{\partial t}-k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=p(x,t)$$

اگر سرعت موج برابر $c=\sqrt{k/m}$ باشد داریم:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{c_1}{m}\frac{\partial y}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\ddot{y}_0+\frac{p(x,t)}{m}$$

با حل به روش مختصات مودال یعنی جمع حاصلضرب بردارهای مودشکلهای متعامد $\psi_j(x)$ در مختصات متعامد $Y_j(t)$ (روش بسط تابعی) داریم:

$$y(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(x)Y_j(t)$$

شکلهای مودی تیر برشی برابرند با:

$$\psi_j(x)=\sin\frac{\omega_j x}{c}$$

با فرکانسهای طبیعی برابر:

$$\omega_j = (2j - 1)\frac{\pi c}{2L}$$

که شرایط تعامد را ارضا می‌کنند:

$$c^2\psi_j''(x) + \omega_j^2\psi(x) = 0$$

$$\int_0^L \psi_j(x)\psi_k(x)\,dx = \frac{L}{2}\delta_{jk}$$

و در آن تابع دلتای کرونیکر بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{jk} = 1 \text{ for } j = k \text{ and is } 0 \text{ for } j \neq k.$$

با جایگزینی بسط تابع جواب در معادله اصلی و ضرب طرفین در ψ_j انتگرالگیری روی x و استفاده از روابط تعامد، معادله غیردرگیر سیستم یکدرجه آزادی زیر حاصل خواهد شد:

$$\ddot{Y}_j(t) + \beta_j\dot{Y}_j(t) + \omega_j^2 Y_j(t) = G_j(t)$$

که در آن:

$$G_j(t) = \frac{\int_0^L \left[-\ddot{y}_0(t) + \frac{p(x,t)}{m}\right]\psi_j(x)\,dx}{\int_0^L \psi_j^2(x)\,dx} \qquad \beta_j = \frac{c_1}{m}$$

جواب به کمک انتگرال دوهامل بدست می‌آید:

$$Y_j(t) = \int_{-\infty}^{t} G_j(t-\theta)h_j(\theta)\,d\theta$$

که در آن تابع پاسخ به ضربه واحد بصورت زیر است:

برای $t < 0$

$$h_j(t) = 0$$

و برای $t > 0$

$$h_j(t) = \frac{e^{-(1/2)\beta_j t}}{\omega_j\sqrt{1-(\beta_j^2/4\omega_j^2)}}\sin[\omega_j t\sqrt{1-(\beta_j^2/4\omega_j^2)}]$$

به کمک معادلات مذکور، جواب معادله که همان پاسخ $y(x,t)$ است بدست خواهد آمد.

درحالت خاص که $p(x,t) = 0$ باشد جواب بصورت زیر بدست می‌آید:

$$y(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(x)\left[-\int_0^L \psi_j(x)\,dx \Big/ \int_0^L \psi_j^2(x)\,dx\right]\int_{-\infty}^{t}\ddot{y}_0(t-\theta)h_j(\theta)\,d\theta$$

تابع خودهمبستگی $R_y(x,\tau)$ برای جابجایی نسبی $y(x,t)$ در هر موقعیت x برابر است با:

$$R_y(x,\tau) = E[y(x,t)y(x,t+\tau)]$$

درحالت فقط وجود شتاب تصادفی زمین $\ddot{y}_0(t)$ جابجایی نسبی از رابطه قبل (رابطه مربوط به $p(x,t)=0$) بدست می‌آید و خواهیم داشت:

$$R_y(x,\tau) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \psi_j(x)\psi_k(x) \frac{\int_0^L \psi_j(x_1)\,dx_1 \int_0^L \psi_k(x_2)\,dx_2}{\int_0^L \psi_j^2(x_1)\,dx_1 \int_0^L \psi_k^2(x_2)\,dx_2}$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau-\theta_2+\theta_1)h_j(\theta_1)h_k(\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2$$

که در آن، تابع خودهمبستگی تحریک ورودی $\ddot{y}_0(t)$ برابر است با:

$$R_0(\tau-\theta_2+\theta_1) = E[\ddot{y}_0(t-\theta_1)\ddot{y}_0(t+\tau-\theta_2)]$$

چنانچه بجای تحریک تصادفی پایه، فقط تحریک تصادفی گسترده $p(x,t)$ وجود داشت باشد، از ترم $p(x,t)/m$ بجای $-\ddot{y}_0(t)$ در معادله نیروی تعمیم یافته $G_j(t)$ استفاده می‌کنیم.

در این حالت، جابجایی نسبی $y(x,t)$ برابر خواهد بود با:

$$y(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) \frac{1}{m\int_0^L \psi_j^2(x_1)\,dx_1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^L p(x_1 t-\theta)\psi_j(x_1)\,dx_1\,h_j(\theta)\,d\theta$$

و تابع خودهمبستگی برابر خواهد بود با:

$$R_y(x,\tau) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_j(x)\psi_k(x)}{m\int_0^L \psi_j^2(x_1)\,dx_1 \int_0^L \psi_k^2(x_2)\,dx_2}$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^L\int_0^L E[p(x_1,t-\theta_1)p(x_2,t+\tau-\theta_2)]$$
$$\times\, \psi_j(x_1)\psi_k(x_2)h_j(\theta_1)h_k(\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2\,dx_1\,dx_2$$

در حوزه فرکانس، چگالی طیفی جابجایی نسبی $y(x,t)$ برابر است با:

$$S_y(x,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_y(x,\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

در حالت شتاب تصادفی پایه $-\ddot{y}_0(t)$، با جایگزینی تابع خودهمبستگی متناظر داریم:

$$S_y(x,\omega) = S_0(\omega)\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\psi_j(x)\psi_k(x)H_j(\omega)H_k(-\omega)$$

که در اینحالت:

$S_0(\omega)$ = spectral density of the input ground acceleration $\ddot{y}_0(t)$

$$a_{jk} = \text{constants} = \int_0^L \psi_j(x_1)\,dx_1 \int_0^L \psi_k(x_2)\,dx_2 \Big/ \int_0^L \psi_j^2(x_1)\,dx_1 \int_0^L \psi_k^2(x_2)\,dx_2$$

$\psi_j(x)$ = jth normal mode

$H_j(\omega)$ = frequency response function for the jth normal coordinate $Y_j(t)$

$$= \frac{1}{\omega_j^2 + i\omega\beta_j - \omega^2}$$

در حالت وجود فقط تحریک تصادفی گسترده $p(x,t)$ با جاگذاری تابع خودهمبستگی متناظر داریم:

$$S_y(x,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{jk}\psi_j(x)\psi_k(x)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^L\int_0^L R_p(x_1, x_2, \tau - \theta_2 + \theta_1)e^{-i\omega(\tau-\theta_2+\theta_1)}$$

$$\times\, \psi_j(x_1)\psi_k(x_2)h_j(\theta_1)e^{i\omega\theta_1}\,d\theta_1\, h_k(\theta_2)e^{-i\omega\theta_2}\,d\theta_2\,dx_1\,dx_2\Bigg\}\,d(\tau-\theta_2+\theta_1)$$

به شکل ساده تر:

$$S_y(x,\omega) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{jk}\psi_j(x)\psi_k(x)H_j(\omega)H_k(-\omega)$$

$$\times \int_0^L\int_0^L S_p(x_1, x_2, \omega)\psi_j(x_1)\psi_k(x_2)\,dx_1\,dx_2$$

که در آن:

where

$R_p(x_1, x_2, \tau)$ = space-time correlation for $p(x,t)$

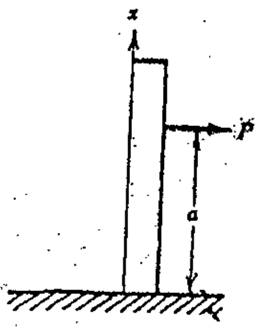
$$= E[p(x_1, t)p(x_2, t+\tau)]$$

$S_p(x_1, x_2, \omega)$ = space-frequency spectral density for $p(x,t)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_p(x_1, x_2, \tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

$$b_{jk} = \text{constants} = 1 \Big/ m^2 \int_0^L \psi_j^2(x_1)\,dx_1 \int_0^L \psi_k^2(x_2)\,dx_2$$

تحریک تصادفی متمرکز



چنانچه مطابق شکل، تحریک تصادفی ایستا با نیروی تصادفی در موقعیت $x = a$ ایجاد شود، همبستگی زمانی-فضایی تابع تحریک برابر است با:

$$E[p(x_1, t)p(x_2, t + \tau)] = \delta(x_1 - a)\delta(x_2 - a)R_p(\tau)$$

که در این رابطه، تابع $R_p(\tau)$ تابع خودهمبستگی بار تصادفی متمرکز در $x = a$ است. همچنین داریم:

$$\int_0^L \int_0^L E[p(x_1, t)p(x_2, t + \tau)]\, dx_1\, dx_2 = E[P(t)P(t + \tau)]$$

$$= \int_0^L \int_0^L \delta(x_1 - a)\delta(x_2 - a)R_p(\tau)\, dx_1\, dx_2 = R_p(\tau)$$

همبستگی متقابل نیروهای مودی نیز برابر است با:

$$R_{jk}(\tau) = E[G_j(t)G_k(t + \tau)]$$

$$= b_{jk} \int_0^L \int_0^L \psi_j(x_1)\psi(x_2)E[p(x_1, t)p(x_2, t + \tau)]\, dx_1\, dx_2$$

$$= b_{jk}\psi_j(a)\psi_k(a)R_p(\tau)$$

در این رابطه:

$$b_{jk} = \frac{4}{m^2L^2}$$

نهایتاً تابع خودهمبستگی برای جابجایی نسبی برابر است با:

$$R_y(x, \tau) = E[y(x, t)y(x, t + \tau)]$$

$$= E\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x)Y_j(t) \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)Y_k(t + \tau)\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_j(x)\psi_k(x) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_j(\theta_1)h_k(\theta_2)R_{jk}(\tau - \theta_2 + \theta_1)\, d\theta_1\, d\theta_2$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{m^2L^2}\right) \psi_j(x)\psi_k(x)\psi_j(a)\psi_k(a)I_{jk}$$

که انتگرال دوگانه را بصورت زیر نشان می‌دهند.

$$I_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_j(\theta_1)h_k(\theta_2)R_p(\tau + \theta_1 - \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2$$

تابع چگالی طیفی در این حالت برابر است با:

$$S_y(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_y(x, \tau)e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

با بررسی تابع خودهمبستگی بدست آمده در بالا مشاهده می‌شود که انتگرال روی τ فقط روی I_{jk} وارد می‌شود و داریم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} I_{jk}e^{-i\omega\tau}\,d\tau = S_p(\omega)H_j(\omega)H_k(-\omega)$$

که در آن:

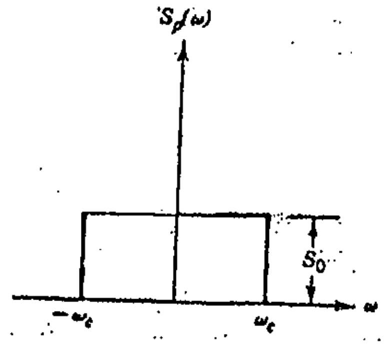
$$H_j(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_j(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

با ترکیب روابط بالا خواهیم داشت:

$$S_y(x,\omega) = S_P(\omega)\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{m^2L^2}\psi_j(x)\psi_k(x)\psi_j(a)\psi_k(a)H_j(\omega)H_k(-\omega)$$

مثال:

در مساله تیر برشی با بار متمرکز تصادفی، با فرض اینکه تابع تحریک دارای میانگین صفر و با چگالی طیفی بصورت اغتشاش سفید با باند محدود برابر S_0 (مطابق شکل زیر) باشد، میانگین مربع سرعت گروهی $E[v^2(x)]$ را برای حالتی که فرکانس قطع ω_c بین فرکانس طبیعی ω_N و ω_{N+1} قرار داشته باشد پیدا کنید.



$$S_p(\omega) = \begin{cases} S_0, & -\omega_c < \omega < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \end{cases}$$

حل:

نگاهی به تحلیل تابع خودهمبستگی برای جابجایی $y(x,t)$ این مساله نشان می‌دهد زمانیکه سرعت $v(x,t)$ بجای جابجایی $y(x,t)$ مدنظر باشد، تنها تغییری که در محاسبه تابع خودهمبستگی $v(x,t)$ اتفاق می‌افتد، تغییر در تابع پاسخ به ضربه واحد $h_j(\theta)$ و مشتق زمانی آن $\dot{h}_j(\theta)$ می‌باشد.

بنابراین، میانگین مربع سرعت به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$E[v^2(x)] = R_v(x,0)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{m^2L^2}\psi_j(x)\psi_k(x)\psi_j(a)\psi_k(a)I_{jk}$$

که در آن:

$$I_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{h}_j(\theta_1)\dot{h}_k(\theta_2)R_p(\theta_1-\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2$$

$$\dot{h}_j(t) = \frac{d}{dt}h_j(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\omega H_j(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

و همچنین:

$$i\omega H_j(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\dot{h}_j(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

و نیز:

$$R_p(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_p(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega$$

با جایگزینی در رابطه I_{jk} داریم:

$$I_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} S_p(\omega)\omega^2 H_j(\omega)H_k(-\omega)\,d\omega$$

از ترکیب رابطه مذکور با رابطه اول (رابطه $E[v^2(x)]$) جواب مساله که میانگین مربع سرعت در تیر برشی ناشی از تحریک تصادفی با بار متمرکز p در $x=a$ می‌باشد بدست می‌آید.

اگر بخواهیم حل را کمی جلوتر ببریم، فرض می‌کنیم مقدار نسبت زیر که **نسبت همپوشانی مودی** نام دارد آنقدر کوچک باشد

$$r = \frac{\text{modal bandwidth}}{\text{modal spacing}} = \frac{\beta_j}{\omega_j-\omega_{j-1}} = \frac{c_1L}{\pi mc}$$

بطوریکه داشته باشیم:

$$I_{jk} = 0 \qquad \text{for } j \neq k$$

با نگاهی به پهنای باند محدود تابع چگالی طیفی بار متمرکز p می‌توان دید:

$$I_{jj} = 0 \qquad \text{for } j > N$$

برای ترمهای باقیمانده I_{jj} بکمک معادله I_{jk} با قراردادن $S_p(\omega)=S_0$ برای تمام محدوده فرکانسی $-\infty < \omega < \infty$ داریم:

$$I_{jj} = \frac{\pi S_0}{\beta_j} = \frac{\pi S_0 m}{c_1}, \quad j = 1,2,\ldots,N$$

اکنون با جایگذاری در معادله $E[v^2(x)]$ داریم:

$$E[v^2(x)] = \frac{\pi S_0 m}{c_1} B\left(\frac{x}{L}, \frac{a}{L}, N\right)$$

که در آن:

$$B\left(\frac{x}{L}, \frac{a}{L}, N\right) = \sum_{j=1}^{N} \frac{4}{m^2L^2} \psi_j^2(x)\psi_j^2(a)$$

$$= \frac{4}{m^2L^2} \sum_{j=1}^{N} \sin^2 \frac{(2j-1)\pi x}{2L} \sin^2 \frac{(2j-1)\pi a}{2L}$$

۲-تیر خمشی

ارتعاش تعینی

تیر دو سر ساده یکنواخت به طول L، جرم واحد طول ρA مفروض است. اگر تیر در برابر نیروی میرایی ویسکوز c_1 در واحد طول و در واحد سرعت قرار گیرد و با نیروی جانبی $f(x,t)$ بر واحد طول تحریک شود، جابجایی جانبی $y(x,t)$ از حل معادله دیفرانسیل زیر بدست می‌آید:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + c_1\frac{\partial y}{\partial t} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x,t)$$

از حل به روش مختصات مودی داریم:

$$y(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j(t)\psi_j(x)$$

که برای تیر دو سر ساده:

$$\psi_j(x) = \sqrt{2}\sin\frac{j\pi x}{L}$$

و

$$\omega_j = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

در معادله زیر صدق می‌کنند:

$$EI\frac{d^4\psi_j}{dx^4} = \omega_j^2 \rho A \psi_j$$

شرط تعامد هم بصورت زیر است:

$$\int_0^L \rho A \psi_j \psi_k \, dx = m\delta_{jk}$$

که در آن $m = \rho AL$ و تابع دلتای کرونیکر نیز بصورت زیر است:

$$\delta_{jk} = 1 \text{ for } j = k \text{ and is } 0 \text{ for } j \neq k.$$

با جایگزینی تابع جواب در معادله و ضرب طرفین معادله در ψ_j و انتگرال‌گیری روی x و استفاده از خاصیت تعامد مودها داریم:

$$m\left(\frac{d^2y_j}{dt^2}+\beta_j\frac{dy_j}{dt}+\omega_j^2y_j\right)=f_j(t)$$

که در آن:

$$f_j(t)=\int_0^L f(x,t)\psi_j(x)\,dx$$

و پهنای باند مودی نیز برابر است با:

$$\beta_j=\frac{c_1}{\rho A}$$

با حل از طریق انتگرال دوهامل:

$$y_j(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h_j(\theta)f_j(t-\theta)\,d\theta$$

و با تابع پاسخ به ضربه واحد برابر با:

$$h_j(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{e^{-1/2(\beta_j t)}}{mp_j}\sin p_jt, & t\geq 0\end{cases}$$

که در آن:

$$p_j^2=\omega_j^2-\beta_j^2/4$$

جواب بصورت زیر بدست می‌آید:

$$y(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(x)\int_{-\infty}^{\infty}h_j(\theta)f_j(t-\theta)\,d\theta$$

و سرعت جانبی متناظر با مشتق گیری نسبت به زمان برابر است با:

$$y(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(x)\int_{-\infty}^{\infty}h_j(\theta)f_j(t-\theta)\,d\theta$$

ارتعاش تصادفی ایستا

اکنون ارتعاش تصادفی ایستای تیر خمشی با یک بار متمرکز P در نقطه $x=a$ را درنظر بگیرید. همبستگی زمانی-فضایی $f(x,t)$ برابر است با:

$$E[f(x_1,t_1)f(x_2,t_2)]=\delta(x_1-a)\delta(x_2-a)R_P(t_2-t_1)$$

که در آن، $R_P(\tau)$ تابع خودهمبستگی نیروی تحریک است. توجه شود که $\delta(x_1-a)$ تابع دلتای دیراک است.

بنابراین:

$$\int_0^L \int_0^L E[f(x_1, t) f(x_2, t+\tau)]\, dx_1\, dx_2 = E[P(t)P(t+\tau)] = R_P(\tau)$$

همبستگی متقابل نیروهای مودی برابر است با:

$$\begin{aligned} R_{jk}(\tau) &= E[f_j(t) f_k(t+\tau)] \\ &= \int_0^L \int_0^L \psi_j(x_1)\psi_k(x_2) E[f(x_1, t) f(x_2, t+\tau)]\, dx_1\, dx_2 \\ &= \psi_j(a)\psi_k(a) R_P(\tau) \end{aligned}$$

بعنوان یک معیار برای میانگین زمانی چگالی انرژی، میانگین مربع سرعت در موقعیت x را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} E(v^2) &= E\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}_j(\theta_1) f_j(t-\theta_1)\, d\theta_1 \right. \\ &\qquad \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}_k(\theta_2) f_k(t-\theta_2)\, d\theta_2 \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_j(x)\psi_k(x)\psi_j(a)\psi_k(a) I_{jk} \end{aligned}$$

که در آن، I_{jk} برابر است با:

$$I_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}_j(\theta_1)\dot{h}_k(\theta_2) R_P(\theta_1 - \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2$$

و از آنجا که:

$$\dot{h}_j(t) = \frac{d}{dt} h_j(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega H_j(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$i\omega H_j(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}_j(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

و همچنین:

$$R_P(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_P(\omega) e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

بنابراین:

$$I_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\dot{h}_j(\theta_1)\dot{h}_k(\theta_2) \int_{-\infty}^{\infty} S_P(\omega) e^{i\omega(\theta_1 - \theta_2)}\, d\omega \right] d\theta_1\, d\theta_2$$

(دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات اصفهان جزوه درس ارتعاشات تصادفی. گرد آوری و تنظیم: دکتر رضا اکبری. تابستان ۱۳۹۲)

با تغییر نوبت انتگرال گیری و استفاده از تابع پاسخ فرکانسی بجای تابع پاسخ به ضربه واحد داریم:

$$I_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} S_P(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \dot h_j(\theta_1)e^{-i\omega\theta_1}\,d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \dot h_k(\theta_2)e^{-i\omega\theta_2}\,d\theta_2\right]d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_P(\omega)\omega^2 H_j(-\omega)H_k(\omega)\,d\omega$$

مثال

بطور مشابه با مثال مربوط به تیر برشی، اگر بار تصادفی متمرکز P دارای میانگین صفر و اغتشاش سفید با چگالی طیفی با پهنای باند محدود مطابق مقدار زیر باشد، مطلوبست تعیین میانگین مربع سرعت گروهی $E[v^2(x)]$ برای حالتی که فرکانس قطع ω_c بین فرکانس طبیعی ω_N و ω_{N+1} قرار داشته باشد.

$$S_P(\omega) = \begin{cases} S_0, & -\omega_c < \omega < \omega \\ 0, & \omega_c < |\omega| \end{cases}$$

حل

فرض می‌کنیم مقدار نسبت همپوشانی مودی آنقدر کوچک باشد

$$r = \frac{\text{modal bandwidth}}{\text{modal spacing}} = \frac{\beta_j}{\omega_j - \omega_{j-1}} = \frac{c_1 L^2}{\pi^2(2j-1)\sqrt{EI/\rho A}}$$

بطوریکه داشته باشیم:

$$I_{jk} = 0 \quad \text{for } j \neq k$$

$$I_{jj} = 0 \quad \text{for } j > N$$

برای ترمهای باقیمانده I_{jj} از معادله I_{jk} با قراردادن $S_p(\omega) = S_0$ برای تمام محدوده فرکانسی $-\infty < \omega < \infty$ استفاده می‌کنیم. نتیجه خواهد شد:

$$I_{jj} = \frac{\pi S_0}{m^2\beta_j} = \frac{\pi S_0}{mc_1 L}, \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

و میانگین مربع سرعت برابر است با:

$$E(v^2) = \frac{\pi S_0}{mc_1 L} G\left(\frac{x}{L}, \frac{a}{L}, N\right)$$

که در آن:

$$G\left(\frac{x}{L}, \frac{a}{L}, N\right) = \sum_{j=1}^{N} \psi_j^2(x)\psi_j^2(a) = \sum_{j=1}^{N} 4\sin^2\frac{j\pi x}{L}\sin^2\frac{j\pi a}{L}$$

و بصورت دقیق:

$$G\left(\frac{x}{L}, \frac{a}{L}, N\right) = g\left(\frac{x}{L}, N\right) + g\left(\frac{a}{L}, N\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x-a}{L}, N\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x-L+a}{L}, N\right)$$

در این رابطه:

$$g(\xi, N) = N + \tfrac{1}{2} - \frac{\sin(2N+1)\pi\xi}{2\sin\pi\xi}$$

مطابق شکل، چگالی انرژی در نقطه $x = a$ و $x = L - a$ بیشتر از بقیه نقاط است. البته با افزایش تعداد مودهای مشارکت کننده به $N = 40$ چگالی طیفی به مقدار دقیق خود نزدیکتر می‌شود.

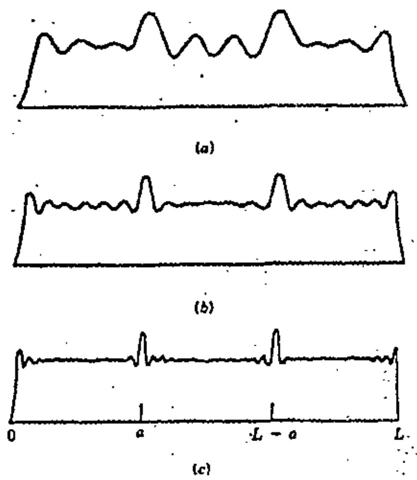


FIG. 7.3. Spatial variations of the ensemble mean square velocity for excitation bandwidth corresponding to (a) $N = 10$, (b) $N = 20$, and (c) $N = 40$.

تمرین سری نهم:
مسائل ۷.۱ تا ۷.۶ کتاب Yang

خصوصیات آماری فرآیندهای باند باریک

در بخشهای قبل، روابط کلی بین ورودی و خروجی یک سیستم خطی در برابر تحریک تصادفی مورد بررسی قرار گرفت. مشخصات تحریک با عبور از سیستم تغییر می‌کنند و خروجی حاصل می‌شود که در مهندسی برق به آن، فیلتر می‌گویند. در اکثر مسائل ارتعاشات، سیستم حداقل یک فرکانس تشدید دارد که در آن، خروجی‌های با دامنه‌های بزرگ از ورودی‌های کوچک تولید می‌شوند. برای سایر فرکانسها امکان عبور کم می‌شود (فیلتر فرکانسی) و در فرکانسهای خیلی بالا ممکن است جرم موثر آنقدر زیاد باشد که خروجی قابل اندازه‌گیری نباشد.

نمونه‌ای از تابع پاسخ فرکانسی مختلط $H(\omega)$ برای یک سیستم در شکل زیر نشان داده شده است. این تابع نشان می‌دهد چگونه مشخصات یک نویز باند پهن با عبور از این سیستم تغییر می‌کند. از آنجا که طیف خروجی به یک باند باریک فرکانسی در همسایگی فرکانس تشدید محصور می‌شود، پاسخ $y(t)$، یک فرآیند تصادفی باند باریک است و تاریخچه زمانی نمونه $y(t)$، یک موج سینوسی با دامنه و زاویه فاز متغیر مطابق شکل خواهد بود.

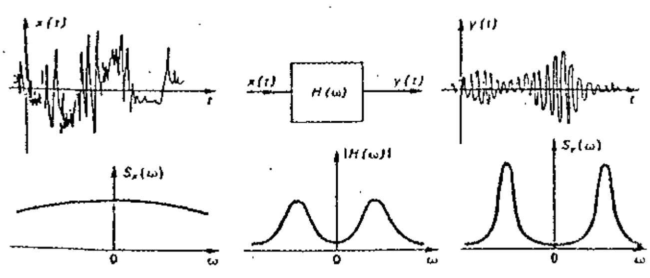
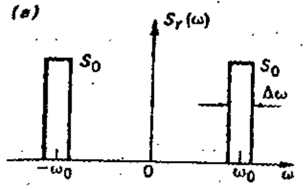
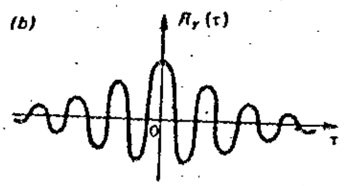


Fig. 8.1 Narrow band response of a resonant system excited by broad band noise

برای انجام چنین محاسباتی، فرض کنید تابع پاسخ فرکانسی دارای قله‌های بسیار تیز در طرفین فرکانس تشدید باشد بطوریکه چگالی طیفی پاسخ $S_y(\omega)$ مطابق شکل (a) باشد.





تابع خود همبستگی متناظر به صورت زیر خواهد بود (شکل (b)):

$$R_y(\tau) = 4S_0 \frac{\sin(\Delta\omega\, {}^{\tau}/_{2})}{\tau} \cos\omega_0\tau$$

اگر تحریک گوسی باشد، میتوان توزیع احتمال را برای y پیدا کرد و متعاقباً برای توزیع احتمال مشترک y و مشتق آن $\dot{y}$ به تابع چگالی احتمال مرتبه اول $p(y)$ و تابع چگالی احتمال مرتبه دوم $p(y,\dot{y})$ نیاز است.

هر دو تابع قبلاً تعریف شده‌اند و مشروط بر اینکه اطلاعات آماری زیر دردسترس باشند، قابل محاسبه‌اند:

$$m_y, m_{\dot{y}}, \sigma_y, \sigma_{\dot{y}} \;\&\; \rho_{y\dot{y}}$$

ابتدا میانگین y یعنی m_y را درنظر بگیرید. اگر میانگین غیر صفر باشد، چگالی طیفی y برابر تابع دلتای دیراک در $\omega = 0$ خواهد بود. همانطور که در شکل قبل پیداست، چون چگالی طیفی تابع دلتای دیراک را نشان نداد، بنابراین برای این فرآیند میانگین $m_y = 0$ است.

در مرحله بعد می‌دانیم چگالی طیفی $\dot{y}$ بصورت زیر است:

$$S_{\dot{y}}(\omega) = \omega^2 S_y(\omega)$$

تابع مذکور نیز در $\omega = 0$ تابع دلتای دیراک را نشان نمی‌دهد بنابراین میانگین $\dot{y}$ یا $m_{\dot{y}}$ نیز صفر است.

برای محاسبه واریانس σ_y^2 و $\sigma_{\dot{y}}^2$، به کمک روابطی که قبلاً ارائه شده است داریم:

$$\sigma_y^2 = E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 2S_0\Delta\omega$$

وهمچنین:

$$\sigma_{\dot{y}}^2 = E[\dot{y}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_y(\omega)\,\mathrm{d}\omega \cong 2S_0\omega_0^2\Delta\omega$$

که به ازای $\Delta\omega \ll \omega_0$ معتبرند.

درنهایت، کوواریانس نرمال شده برابر است با:

$$\rho_{y\dot{y}} = \frac{E[y\dot{y}]}{\sigma_y\sigma_{\dot{y}}}$$

در اینجا تابع همبستگی $E[y\dot{y}]$ باید محاسبه شود.

قبلاً دیدیم که آنرا می‌توان برحسب مشتق تابع خودهمبستگی بصورت زیر بیان کرد:

$$E[y\dot{y}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}R_y(\tau) \qquad \text{for} \quad \tau = 0$$

اگر تابع خودهمبستگی بصورت انتگرال فوریه تابع چگالی طیفی متناظر بیان شود داریم:

$$E[y\dot{y}] = i\int_{-\infty}^{\infty} \omega S_y(\omega)\mathrm{d}\omega$$

چون تابع چگالی طیفی بر حسب ω یک تابع حقیقی و زوج است، حاصلضرب آن در ω یک تابع حقیقی و فرد خواهد بود و انتگرال بالا برابر صفر خواهد بود. بنابراین:

$$E[y\dot{y}] = 0$$

بنابراین یکی از خواص فرآیند تصادفی ایستای $y(t)$ بدست آمد و آن اینست که y و مشتق‌اش $\dot{y}$ غیرهمبسته می‌باشند. بنابراین کوواریانس نرمال شده همواره برابر صفر خواهد بود.

اکنون همهٔ پارامترهای مورد نیاز را داریم و می‌توانیم آنها را در توابع چگالی احتمال قرار دهیم و خواهیم داشت:

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}} \qquad \& \qquad p(y,\dot{y}) = \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_{\dot{y}}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma_y^2}+\frac{\dot{y}^2}{\sigma_{\dot{y}}^2}\right)} = p(y)p(\dot{y})$$

هر دو تابع در شکل زیر ترسیم شده‌اند.

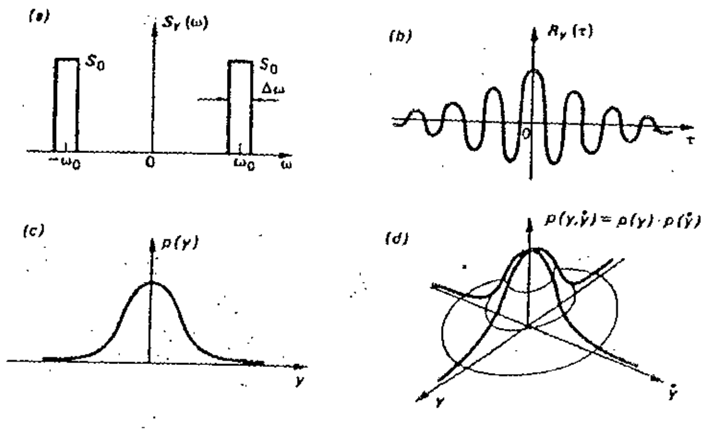


Fig. 8.2 Characteristics of a stationary, Gaussian, narrow band process

تحلیل نقاط برخورد

هرچند در بخش قبل تا حدودی به خواص فرآیند باند باریک $y(t)$ و به توصیف تجزیه فرکانسی و توزیع دامنه و سرعت آن پرداخته شد، یکی از مهمترین موضوعات، توزیع نقاط پیک این فرآیند (پاسخ) و اطلاعاتی در مورد دامنه متغیر موج سینوسی که این فرآیند را می‌سازد می‌باشد. فرض کنید میخواهیم بدانیم در یک پریود زمانی T چند سیکل از فرآیند $y(t)$، دارای دامنه بزرگتر از تراز $y = a$ می باشد (شکل زیر).

برای شکل نشان داده شده تنها سه سیکل موجود است. **هر نقطه برخورد یک رویداد محسوب می‌شود.** به بیان دیگر، در محدوده زمانی T سه نقطه برخورد دارای شیب مثبت با تراز $y = a$ وجود دارد که با نقطه سیاه نشان داده شده است.

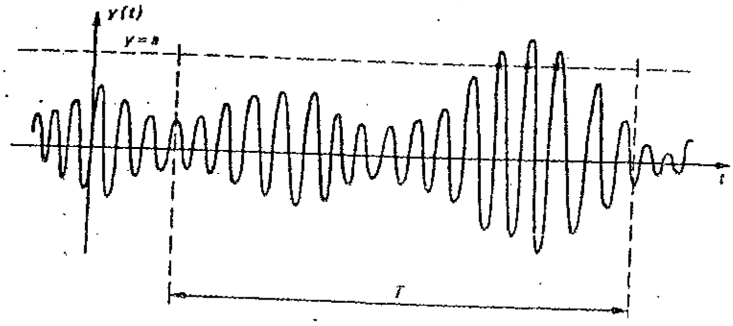


Fig. 8.3 Typical sample of a narrow band process

اکنون فرض کنید این شکل، یک تابع نمونه از گروهی از توابع است که فرآیند تصادفی ایستای $y(t)$ را می‌سازند. اگر $n_a^+(T)$ بیانگر تعداد برخورد دارای شیب مثبت خط $y = a$ در بازه زمانی T برای یک نمونه باشد، مقدار میانگین برای تمام نمونه‌ها برابر $N_a^+(T)$ خواهد بود، با این تعریف که:

$$N_a^+(T) = E[n_a^+(T)]$$

چون فرآیند ایستاست، اگر بازه زمانی بعدی T بلافاصله پس از بازه زمانی اول را درنظر بگیریم، نتیجه مشابهی بدست می‌آید و برای دو بازه با همدیگر (با کل زمان $2T$) خواهیم داشت:

$$N_a^+(2T) = 2N_a^+(T)$$

یعنی برای یک فرآیند ایستا، میانگین تعداد برخورد با بازه زمانی T متناسب است. بنابراین:

$$N_a^+(T) \propto T$$

یا:

$$N_a^+(T) = \nu_a^+ T$$

که در آن، ν_a^+، فرآوانی (نرخ متوسط) برخوردهای دارای شیب مثبت با تراز $y = a$ می باشد. اکنون ببینیم چگونه پارامتر ν_a^+ را می‌توان از روی توزیع احتمال $y(t)$ بدست آورد.

زمان کوتاه dt را از یک تابع نمونه درنظر بگیرید (شکل زیر). ازآنجا که فرض می‌شود که فرآیند باند باریک $y(t)$ یک تابع هموار بر حسب زمان است، بدون افت و خیز ناگهانی، اگر dt به اندازه کافی کوچک باشد، و اگر در ابتدای بازه زمانی (در نقطه t) $y < a$ باشد، فرآیند تنها می‌تواند خط $y = a$ را با شیب مثبت قطع نماید.

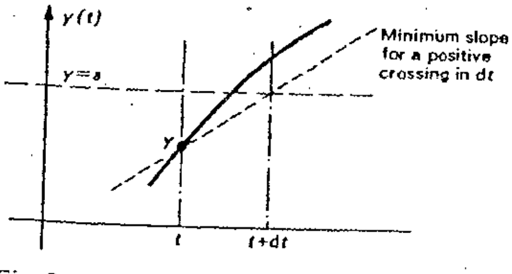


Fig. 8.4 Conditions for a positive slope crossing of $y = a$ in time interval dt

همچنین، اگر خط $y=a$ را به خط $t+dt$ برخورد دهیم، بسته به مقدار y در زمان t، در زمان t یک شیب حداقل وجود دارد (خط چین در شکل). که این شیب برابر است با:

$$\frac{a-y}{dt}$$

وچون یک برخورد با شیب مثبت با خط $y=a$ در بازه زمانی dt وجود دارد، داریم:

در زمان t:

$$y<a \quad \text{and} \quad \frac{dy}{dt} > \frac{a-y}{dt}$$

منظور اینست که اگر این روابط ارضا شوند احتمال وقوع یک برخورد در زمان dt بسیار بالاست.

برای اینکه ببینیم چه زمانی شرایط بالا در هر زمان دلخواه t ارضا می‌شوند، باید بفهمیم مقادیر y و $\dot{y}$ با درنظر گرفتن چگالی احتمال مشترک‌شان $p(y,\dot{y})$ چگونه توزیع می‌شوند.

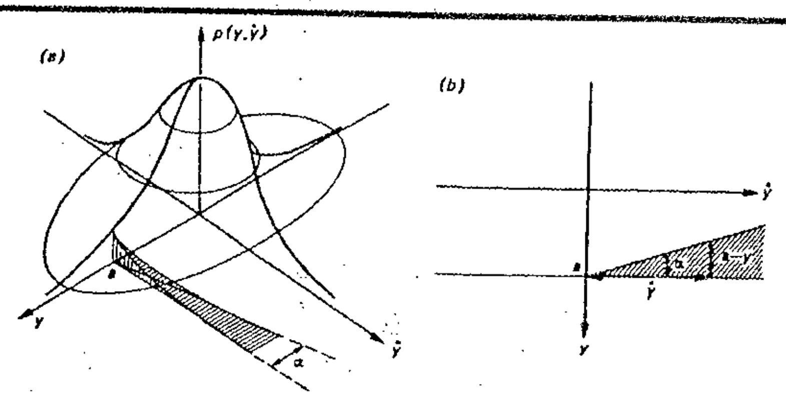
فرض می‌شود خط $y=a$ و بازه زمانی dt مشخص شده باشند. بنابراین، فقط باید مقادیر $y<a$ و مقادیر:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} > \frac{a-y}{dt}$$

که مبین گوه هاشورزده از مقادیر y و $\dot{y}$ در شکل زیر هستند را بررسی کنیم.

زاویه گوه برابر α به گونه‌ای انتخاب می‌شود که:

$$\tan\alpha = \frac{a-y}{\dot{y}} = dt$$



در اینصورت رابطه قبل ارضا می‌شود. اگر مقادیر y و $\dot{y}$ در این گوه هاشورزده قرار گیرند، یک برخورد دارای شیب مثبت با خط $y=a$ در زمان dt وجود دارد و اگر در این ناحیه قرار نگیرند برخوردی نخواهیم داشت.

احتمال اینکه در این گوه قرار گیرند را می‌توان از تابع چگالی احتمال مشترک $p(y,\dot{y})$ بدست آورد که برابر حجم ناحیه هاشورزده شکل (a) است. یعنی حجم ناحیه زیر سطح احتمال بالای گوه هاشورزده. بنابراین:

$$\text{Prob}\begin{pmatrix}\text{Positive slope crossing}\\ \text{of } y=a \text{ in time dt}\end{pmatrix} = \int\int p(y,\dot{y})\,dy\,d\dot{y} \quad \text{over the shaded wedge in Fig.}$$

$$= \int_0^\infty d\dot{y} \int_{a-\dot{y}\tan\alpha}^{a} dy\, p(y,\dot{y})$$

اگر $dt \to 0$، آنگاه زوایه گوه $\alpha = dt \to 0$ و داریم:

$$p(y, \dot{y}) = p(y = a, \dot{y})$$

نتیجه اینکه:

$$\text{Prob}\begin{pmatrix}\text{Positive slope crossing}\\ \text{of } y = a \text{ in time } dt\end{pmatrix} = \int_0^\infty d\dot{y} \int_{a-\dot{y}\tan\alpha}^{a} dy\, p(y = a, \dot{y})$$

ترم داخل انتگرال تابع y نخواهد بود و انتگرال داخلی برابر است با:

$$\int_{a-\dot{y}\tan\alpha}^{a} dy\, p(y = a, \dot{y}) = p(y = a, \dot{y})\dot{y}\tan\alpha$$

با قراردادن:

$$\tan\alpha = dt$$

خواهیم داشت:

$$\text{Prob}\begin{pmatrix}\text{Positive slope crossing}\\ \text{of } y = a \text{ in time } dt\end{pmatrix} = \int_0^\infty p(y = a, \dot{y})\dot{y}\, dt\, d\dot{y} = dt \int_0^\infty p(a, \dot{y})\dot{y}\, d\dot{y}$$

گفتیم میانگین تعداد برخورد با شیب مثبت در بازه زمانی T برابر است با: $\nu_a^+ T$. بنابراین میانگین تعداد برخوردها در زمان dt برابر است با: $\nu_a^+ dt$.

فرض کنیم $dt = 0.01s$ و فرآوانی $\nu_a^+ = 2.0$. در اینحالت میانگین تعداد برخورد در $0.01s$ برابر با 0.02 برخورد خواهد بود. گروهی متشکل از ۵۰۰ نمونه را درنظر بگیریم. هر نمونه یا یک برخورد در dt دارد یا

برخوردی ندارد، البته فرض می‌شود dt در مقایسه با پریود متوسط فرآیندهای باند باریک خیلی کوچک است. بنابراین تعداد نمونه‌های دارای برخورد با شیب مثبت باید برابر ۱۰ باشد چراکه: $10/500 = 0.02$. همچنین این عدد احتمال اینست که هر نمونه با انتخاب تصادفی، دارای یک برخورد در زمان dt باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{pmatrix}\text{Average no. of positive crossings}\\ \text{of } y = a \text{ in time } dt\end{pmatrix} = \text{Prob}\begin{pmatrix}\text{Positive slope crossing}\\ \text{of } y = a \text{ in time } dt\end{pmatrix}$$

و تنها زمانی صحیح است که dt کوچک و فرآیند $y(t)$ هموار باشد طوریکه بیش از یک برخورد با خط $y = a$ در زمان dt نداشته باشد.

با قبول رابطه بالا و قراردادن از رابطه ماقبل و همچنین رابطه قبلی $N_a^+(T) = \nu_a^+ T$ داریم:

$$\nu_a^+ dt = dt \int_0^\infty p(a, \dot{y})\dot{y}\, d\dot{y}$$

که در آن، dt از طرفین رابطه حذف و فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\nu_a^+ = \int_0^\infty p(a, \dot{y})\dot{y}\, d\dot{y}$$

این یک رابطه کلی است و برای هر توزیع احتمالی کاربرد دارد.

برای حالت خاص فرآیند گوسی خواهیم داشت:

$$p(a,\dot{y})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-a^2/2\sigma_y^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{y}}}e^{-\dot{y}^2/2\sigma_{\dot{y}}^2}$$

با جایگزینی در رابطه قبل داریم:

$$\nu_a^+=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-a^2/2\sigma_y^2}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{y}}}e^{-\dot{y}^2/2\sigma_{\dot{y}}^2}\dot{y}\mathrm{d}\dot{y}$$

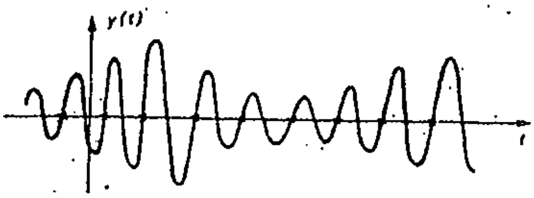
حاصل انتگرال بالا برابر است با:

$$\frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sqrt{2\pi}}$$

و نتیجه نهایی برابر خواهد بود:

$$\nu_a^+=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y}e^{-a^2/2\sigma_y^2}$$

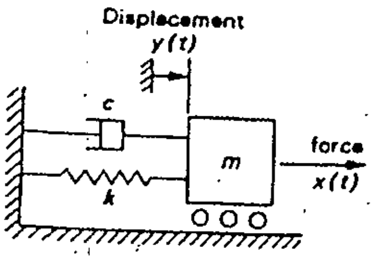
حالت خاص وقتی است که $a=0$ باشد که این حالت رابطه فوق برابر فرآوانی متوسط آماری برخوردها در سطح $y=0$ خواهد بود (مطابق شکل).



توجه شود که ν_0 یا متوسط گذری در عرض گروه بدست می‌آید و یا فرآوانی متوسط در طول محور زمان متفاوت است مگر برای حالتی که فرآیند ارگودیک باشد.

مثال

مطلوبست تعیین فرآوانی برخوردهای مثبت در تراز $y=a$ برای سیستم یک‌درجه آزادی شکل زیر وقتی در برابر تحریک اغتشاش سفید گوسی با چگالی طیفی برابر S_0 قرار گیرد.



حل

قبلاً دیدیم تابع پاسخ فرکانسی این سیستم از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$H(\omega)=\frac{1}{-m\omega^2+ic\omega+k}$$

و همچنین:

$$\sigma_y^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{-m\omega^2+ic\omega+k}\right|^2S_0\mathrm{d}\omega=\frac{\pi S_0}{kc}$$

تابع پاسخ فرکانسی که $\dot{y}(t)$ را به $x(t)$ مربوط می‌کند از حاصلضرب $H(\omega)$ در $i\omega$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$H'(\omega)=\frac{i\omega}{-m\omega^2+ic\omega+k}$$

و داریم:

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{i\omega}{-m\omega^2 + ic\omega + k} \right|^2 S_0 d\omega$$

و نهایتاً:

$$\sigma_y^2 = \frac{\pi S_0}{mc}$$

به کمک روابط قبل داریم:

$$\nu_a^+ = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} e^{-a^2/(2\pi S_0/kc)}$$

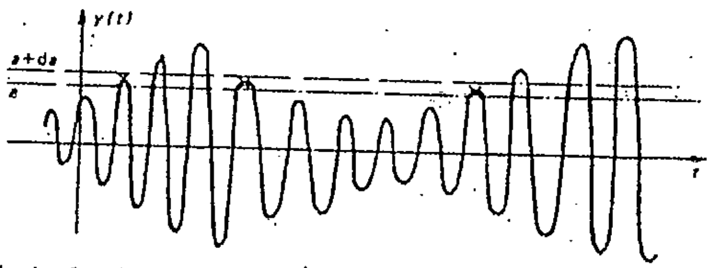
فرآوانی متوسط فرآیند با قراردادن $a = 0$ بدست می‌آید:

$$\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega_N}{2\pi}$$

که در آن، ω_N فرکانس طبیعی لرزاننده برحسب رادیان بر ثانیه است.

توزیع نقاط پیک

اگر فرآوانی برخوردها با خط $y = a$ را داشته باشیم، این محاسبات را می‌توان برای تعیین توزیع احتمال نقاط پیک تعمیم داد. اگر $p_p(a)da$ احتمال این باشد که مقدار یک پیک، که بطور تصادفی انتخاب می‌شود، در محدوده a تا $a + da$ باشد (مطابق شکل)، احتمال اینکه مقدار هر پیک از a بزرگتر باشد برابر است با:



اکنون در بازه زمانی T می‌دانیم که بطور میانگین تعداد $\nu_0^+ T$ پیک وجود دارد که فقط $\nu_a^+ T$ آنها دارای مقادیر بزرگتر از $y = a$ هستند (زیرا خط $y = 0$ برای هر سیکل کامل یک برخورد مثبت با فرآیند باند باریک دارد).

سهم سیکل‌هایی که مقدار پیک آنها از $y = a$ تجاوز می‌کند برابر است با:

$$\frac{\nu_a^+}{\nu_0^+}$$

و این باید احتمال این باشد که مقدار هر پیک، که بطور تصادفی انتخاب می‌شود، از $y = a$ تجاوز می‌کند.

بنابراین داریم:

$$\int_0^{\infty} p_p(a)\mathrm{d}a = \frac{\nu_a^+}{\nu_0^+}$$

با مشتق گیری نسبت به a داریم:

$$-p_p(a) = \frac{1}{\nu_0^+}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(\nu_a^+)$$

که یک نتیجه کلی برای **تابع چگالی احتمال وقوع پیک‌هاست.** این رابطه را می‌توان برای همه فرآیندهای باند باریک چکار برد مشروط بر اینکه فرآیند هموار باشد و هرسیکل با تراز میانگین $y = 0$ برخورد داشته باشد بطوریکه تمام ماکزیمم‌ها بالای خط $y = 0$ و تمام مینیمم‌ها زیر این خط قرار بگیرند.

معادله بالا برای هر توزیع احتمالی کاربرد دارد اما اگر $y(t)$ گوسی باشد، نتیجه ساده اما مهمی برای $p_p(a)$ بدست می‌آید. با جایگزینی:

$$\nu_a^+ = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y}e^{-a^2/2\sigma_y^2}$$

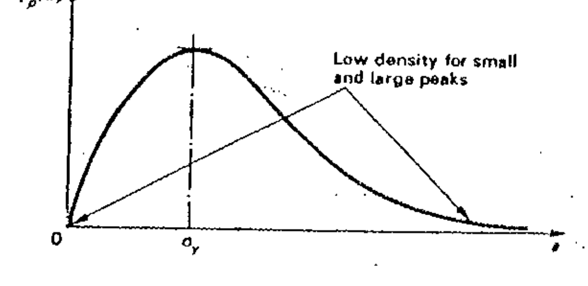
در رابطه قبل خواهیم داشت:

$$-p_p(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(e^{-a^2/2\sigma_y^2}\right) = -\frac{a}{\sigma_y^2}e^{-a^2/2\sigma_y^2}$$

یا

$$p_p(a) = \frac{a}{\sigma_y^2}e^{-a^2/2\sigma_y^2} \qquad 0 \le a \le \infty$$

که توزیع معروف ریلی می‌باشد و در شکل زیر نشان داده شده است.



ماکزیمم $p_p(a)$ در $a = \sigma_y$ یعنی انحراف معیار فرآیند y ایجاد می‌شود و مطابق شکل، بخش عمده‌ای از پیکها حوالی این نقطه رخ می‌دهند. احتمال پیداکردن پیک‌های بسیار کوچک یا بسیار بزرگ کم است و احتمال اینکه مقدار هر پیک، که تصادفی انتخاب می‌شود، از a تجاوز نماید برابر است با:

$$\text{Prob(Peak value exceeds } a) = e^{-a^2/2\sigma_y^2}$$

مثال

احتمال اینکه مقدار هر پیک در یک فرآیند باند باریک گوسی $y(t)$ از مقدار $3\sigma_y$ تجاوز نماید را پیدا کنید.

حل

با قرارداد $a = 3\sigma_y$ در رابطه قبل، احتمال مورد نظر برابر است با:

$$e^{-a^2/2\sigma_y^2} = e^{-4.5} = 0.011$$

بنابراین بطور متوسط، حدوداً فقط یک پیک از هر ۱۰۰ پیک از مقدار $3\sigma_y$ تجاوز می‌کند.

فراوانی نقاط ماکزیموم

آنالیز پیک‌ها که به توزیع ریلی برای فرآیندهای تصادفی منجر شد، با این فرض است که فرآیند باند باریک $y(t)$ شامل موج سینوسی با دامنه و زاویه فاز مختلف می‌باشد. اعتبار این فرض را می‌توان با محاسبه توزیع ماکزیموم‌های محلی $y(t)$ به روش دیگری تعیین کرد.

میدانیم وقتی $dy/dt = 0$ باشد y در یک اکسترمم قرار دارد و این اکسترمم وقتی ماکزیموم است که در همان زمان d^2y/dt^2 منفی باشد. بنابراین فراوانی ماکزیموم‌های $y(t)$ باید برابر فراوانی برخوردهای صفر منفی فرآیند جدید $\dot{y}(t)$ باشد و چون برای هر برخورد مثبت، یک برخورد منفی وجود دارد، این مقدار برابر

فراوانی برخوردهای صفر مثبت $\dot{y}(t)$ خواهد بود. بنابراین اگر μ_y برابر فراوانی ماکزیموم $y(t)$ باشد و $\nu^+_{\dot{y}=0}$ برابر فراوانی برخورد صفر با $\dot{y}(t)$ باشد، خواهیم داشت:

$$\mu_y = \nu^+_{\dot{y}=0}$$

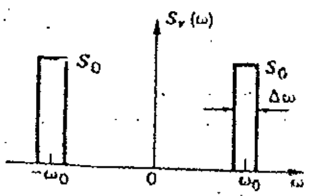
که در آن، $\nu^+_{\dot{y}=0}$ از رابطه زیر:

$$\nu_a^+ = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y} e^{-a^2/2\sigma_y^2}$$

با جایگزینی $\sigma_{\ddot{y}}$ بجای $\sigma_{\dot{y}}$ و همچنین $\sigma_{\dot{y}}$ بجای σ_y و نهایتا قراردادن تراز $\dot{y} = a = 0$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\mu_y = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\ddot{y}}}{\sigma_{\dot{y}}}$$

این فرمول یک عبارت کلی برای فراوانی ماکزیموم فرآیند تصادفی $y(t)$ است. برای یک فرآیند باند باریک تئوری که چگالی طیفی آن مطابق شکل زیر باشد و $\Delta\omega \ll \omega_0$ باشد داریم:



$$\sigma_{\dot{y}}^2 = E[\dot{y}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_y(\omega) d\omega \cong 2S_0\omega_0^2\Delta\omega$$

و بطور مشابه:

$$\sigma_{\ddot{y}}^2 = E[\ddot{y}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_y(\omega) d\omega \cong 2S_0\omega_0^4\Delta\omega$$

و از رابطه قبل فراوانی ماکزیموم بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\mu_y \cong \frac{\omega_0}{2\pi}$$

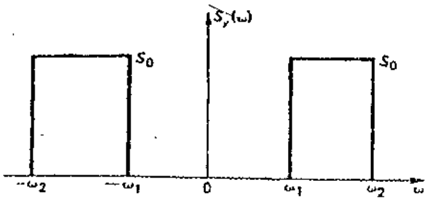
و در مقایسه با رابطه مربوط به فرآوانی برخوردهای صفر داریم:

$$\nu^+_{y=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y} \cong \frac{\omega_0}{2\pi}$$

بنابراین **فرآوانی برخوردهای صفر مثبت با فرآوانی ماکزیموم ها برابر شد** و این فرض که تنها یک پیک برای هر برخورد صفر وجود دارد ارضا گردید.

چنانچه پهنای فرآیند باند باریک به اندازه کافی باریک نباشد بطوریکه فرض $\Delta\omega \ll \omega_0$ ارضا نشود، این نتیجه گیری اندکی تغییر خواهد کرد.

با فرض چگالی طیفی $y(t)$ مطابق شکل، واریانس y و $\dot{y}$ و $\ddot{y}$ برابرند با:



$$\sigma_y^2 = E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)\mathrm{d}\omega = 2S_0(\omega_2 - \omega_1)$$

$$\sigma_{\dot{y}}^2 = E[\dot{y}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_y(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{2}{3}S_0(\omega_2^3 - \omega_1^3)$$

$$\sigma_{\ddot{y}}^2 = E[\ddot{y}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_y(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{2}{5}S_0(\omega_2^5 - \omega_1^5)$$

و فرآوانی ماکزیموم بصورت زیر خواهد بود:

$$\mu_y = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\ddot{y}}}{\sigma_{\dot{y}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3(\omega_2^5 - \omega_1^5)}{5(\omega_2^3 - \omega_1^3)}}$$

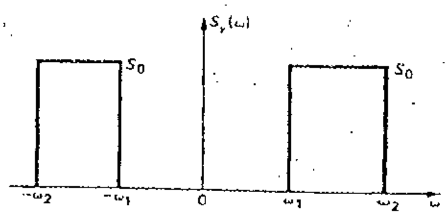
و در مقایسه با فرآوانی برخوردهای صفر:

$$\nu^+_{y=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(\omega_2^3 - \omega_1^3)}{3(\omega_2 - \omega_1)}}$$

که با هم برابر نیستند.

مثال

فرآوانی ماکزیموم‌ها و فرآوانی برخوردهای صفر یک فرآیند گوسی که چگالی طیفی آن مسطح و پهنای باند آن مطابق شکل برابر است با: $\omega_1/2\pi = 70.7$ Hz و $\omega_2/2\pi = 141.4$ Hz و مرکز فرکانسی آن برابر 100 Hz باشد را محاسبه کنید.



حل:

با جایگزینی در رابطه زیر:

$$\mu_y = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\ddot{y}}}{\sigma_{\dot{y}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3(\omega_2^5-\omega_1^5)}{5(\omega_2^3-\omega_1^3)}}$$

داریم:

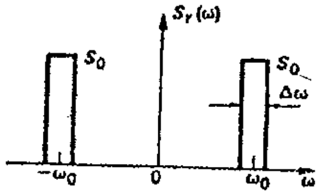
$$\mu_y = 115\ \mathrm{Hz}$$

و در رابطه:

$$\nu^+_{y=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(\omega_2^3-\omega_1^3)}{3(\omega_2-\omega_1)}}$$

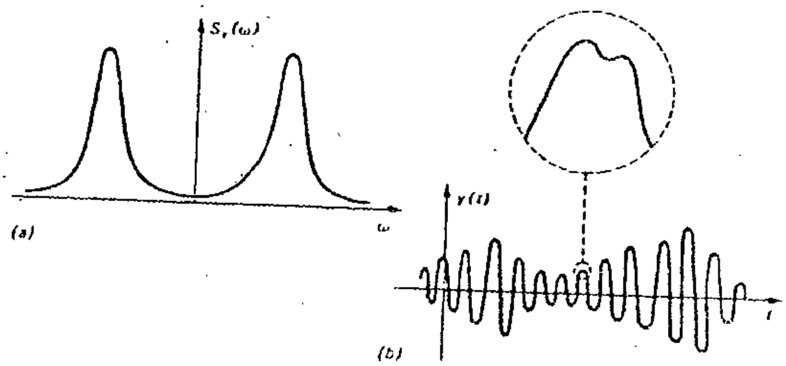
نیز داریم:

$$\nu^+_{y=0} = 108\ \mathrm{Hz}$$



علت این اختلاف اینست که زمانیکه چگالی طیفی فرآیند $y(t)$ مطابق شکل زیر شامل پهنای باد بسیار باریک باشد، فرآیند را می‌توان بصورت موج سینوسی با دامنه و زاویه فاز کاهشی (بصورت آهسته) بیان کرد.

Crandall نشان داد اگر چگالی طیفی باند باریک حالت کلی‌تری مطابق شکل زیر داشته باشد، مولفه‌های فرکانسی بالا، نامنظمی‌هایی را در فرم هموار موج سینوسی ایجاد می‌کنند که این نامنظمی‌ها ماکزیموم‌های دیگری را به همراه دارد.

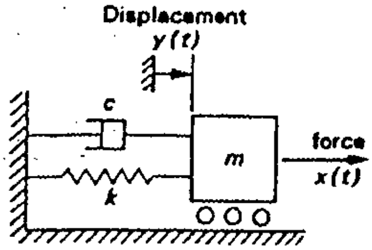


استفاده از توزیع بسیار کلی‌تر Weibull برای نقاط پیک (بجای توزیع ریلی) مشکل را حل می‌کند.

تمرین سری دهم:

مسائل 8.1 تا 8.4 کتاب Newland

۱-پاسخ حالت تشدید به تحریک باند پهن



سیستم یک درجه آزادی شکل زیر را درنظر بگیرید.

چنانچه تحریک در جهت نشان داده شده اعمال شود داریم:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = x(t)$$

از دینامیک سازه می‌دانیم چنانچه مشخصات سیستم شامل جرم، سختی، میرایی ویسکوز معادل و تابع تحریک به درستی تعریف شوند پاسخ حالت تشدید بدست می‌آید. همچنین، براساس تئوری تعامد مودی سیستمهای خطی، این معادله می‌تواند بیانگر یک مود واحد از یک سیستم چنددرجه آزادی باشد، به شرط اینکه جرم مودی، سختی مودی، میرایی و تحریک مودی تعریف شده باشند.

مساله ما، تعیین میانگین مربع مودی پاسخ، یعنی $E[y^2]$، زمانیکه سیستم در برابر تحریک باند پهن قرار گیرد می‌باشد.

برای ورودی اغتشاش سفید، این محاسبه در مثالی در بخش قبل انجام شده و دیدیم:

$$E[y^2] = \frac{\pi S_0}{kc}$$

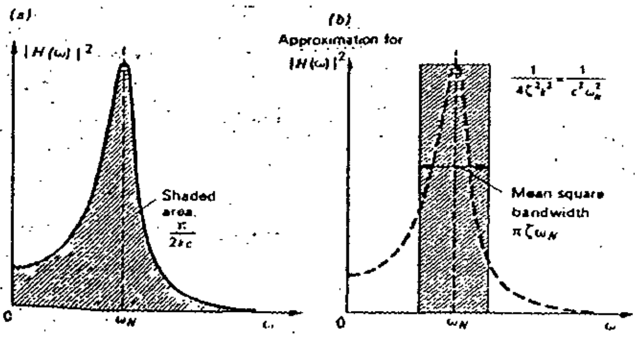
که S_0 مقداری ثابت و برابر عرض چگالی طیفی تابع تحریک اغتشاش سفید $x(t)$ یا عرض باند بازیک چگالی طیفی دوطرفه پاسخ $y(t)$ می باشد. اکنون ببینیم چگونه می‌توان این نتیجه را برای یک مود تشدید که فرکانس طبیعی و نسبت میرایی آن با $\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}}$ و $2\xi\omega_N = \frac{c}{m}$ برابرند تعمیم داد. براساس روابط پیشین داریم:

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_0 \mathrm{d}\omega = 2S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$$

که در آن، تابع پاسخ فرکانسی برابر است با:

$$H(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k}$$

نمودار تابع $|H(\omega)|^2$ در برابر ω مطابق شکل (a) است و انتگرال رابطه قبل برابر مساحت ناحیه هاشور زده در آن می‌باشد.



در شکل (b)، منحنی پاسخ (خط چین) با یک مستطیل طوری تقریب زده شده است که همان مساحت زیر منحنی را داشته باشد. اگر ارتفاع مستطیل برابر $1/4\xi^2k^2$ باشد، که ارتفاع آن برابر پیک منحنی $|H(\omega)|^2$ برای مقادیر کوچک میرایی باشد، عرض آن باید برابر $\pi\xi\omega_N$ باشد تا مساحت درست بدست آید.

این پهنای باند که بنام **پهنای باند میانگین مربع مودی** نامیده می‌شود، چنانچه پهنای باند تابع تحریک شامل ω_N بوده و نسبتاً مسطح باشد، تقریب سریعی برای محاسبه $E[y^2]$ خواهد بود.

بجای محاسبه دقیق میانگین مربع پاسخ، که قبلاً دیدیم اگر $S_x(\omega)$ ثابت نباشد از رابطه زیر بصورت عددی محاسبه می‌شود:

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \mathrm{d}\omega$$

تمام کاری که باید انجام دهیم اینست که مقادیر را در رابطه تقریبی زیر قرار دهیم:

$$E[y^2] = \sigma_y^2 (\text{since we are assuming } E[x] = 0)$$
$$\cong 2\begin{pmatrix}\text{Average value of } S_x(\omega) \\ \text{in the region of } \omega_N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Peak value} \\ \text{of } H(\omega)\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}\text{Mean square} \\ \text{bandwidth}\end{pmatrix}$$

که برای اکثر موارد از دقت کافی برخوردار است.

توجه شود که پهنای باند میانگین مربع $\pi\xi\omega_N$ از پهنای نیم‌توان که عرض بین دو نقطه است بطوریکه:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{2}|H(\omega_N)|^2$$

و تقریباً برابر $2\xi\omega_N$ است بزرگتر است.

قبلاً دیدیم برای تحریک اغتشاش سفید گوسی، فرآوانی متوسط آماری $y(t)$ (فرآوانی برخوردهای صفر با شیب مثبت) برابر است با:

$$\nu_0^+ = \frac{\omega_N}{2\pi}$$

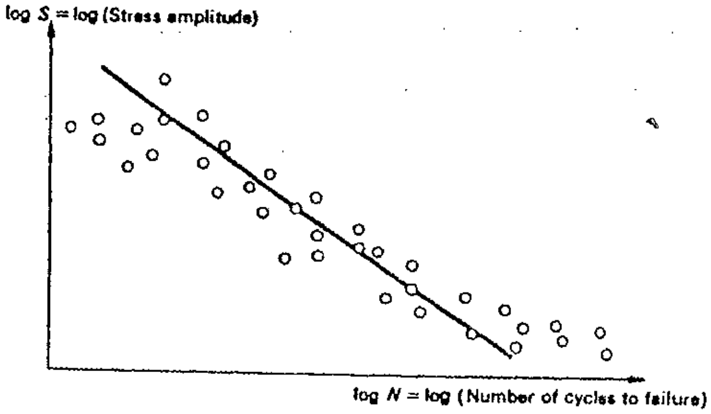
و برای فرآیند باند باریک گوسی، توزیع پیک‌ها برابر است با:

$$p_p(a) = \frac{a}{\sigma_y^2} e^{-a^2/2\sigma_y^2} \qquad 0 \le a \le \infty$$

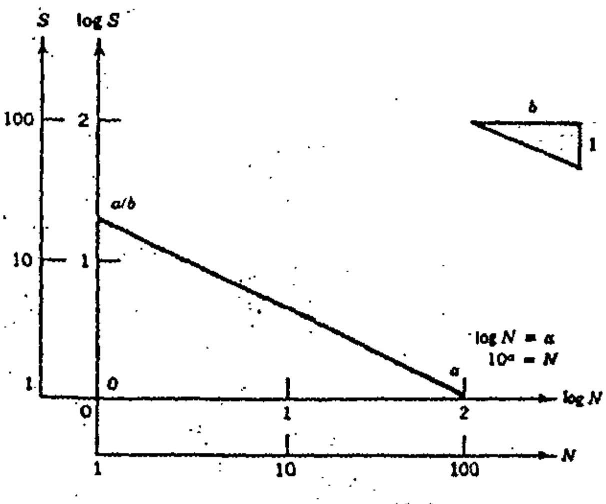
برای یک مود تشدید در برابر تحریک باند پهن، از تئوری حد مرکزی می‌دانیم حتی اگر ورودی گوسی نباشد خروجی به فرآیند گوسی تمایل دارد. همچنین، اگر تحریک اغتشاش سفید نباشد، مشروط به اینکه فرآیند باند پهن، فرکانس تشدید مود را شامل شود رابطه قبل برای ν_0^+ هنوز از دقت کافی برخوردار است. هر دو رابطه قبل را می‌توان با دقت کافی برای توصیف مشخصات هر مود تشدید در برابر تحریک باند پهن بکار گرفت.

۲-خستگی و گسیختگی ناشی از ارتعاش تصادفی

یکی از متداولترین گسیختگی‌های مکانیکی ناشی از ارتعاش، گسیختگی خستگی ناشی از انتشار تدریجی ترک در ناحیه با تنش بالا می‌باشد و بارهای تصادفی در این زمینه نقش مهمی را دارند. بررسی پدیده خستگی در برابر بارهای تصادفی از تعمیم تئوری تعینی خستگی حاصل می‌شود. ترک تحت تنشهایی که بشدت کم و زیاد می‌شوند، نسبت به حالتی که کمتر کم و زیاد می‌شوند سریعتر منتشر می‌شود و قانون خستگی ماده معمولاً با یک منحنی آزمایشگاهی معروف به منحنی $S-N$ بیان می‌شود (مطابق شکل). S بیانگر دامنه بار/تنش و N تعداد سیکلهای بار/تنش (با مقدار ثابت S) که منجر به گسیختگی می‌شود می‌باشند.



در واقع آزمونهای استاندارد خستگی در اعضای سازه نشان می‌دهند مهمترین پارامتر حاکم بر گسیختگی ناشی از خستگی، دامنه S سیکلهای بار/تنش هستند. اگر $N(S)$ برابر تعداد سیکلهای بارگذاری با دامنه ثابت S که منجر به گسیختگی می‌شوند باشد (که به آن عمرخستگی در دامنه S گویند)، تقریب خطی حاصل از نتایج آزمایش بین $N(S)$ و S روی محور لگاریتمی بصورت شکل زیر خواهد بود.



بنابراین:

$$\log N = a - b(\log S) \Rightarrow \log(NS^b) = a$$
$$\Rightarrow 10^a = NS^b = c$$

که در آن، ثابتهای b و c بستگی به مقاومت مصالح دارند.

داده‌های منحنی معمولاً از آزمایش خمش معکوس‌شونده بدست می‌آیند. تعداد سیکل‌های N تا لحظه گسیختگی برای هر مقدار S ثبت می‌شود و منحنی مذکور ترسیم می‌شود.

زمانی که تحریک تصادفی واقع می‌شود، گسیختگی بدلیل اثرات ترکیبی سیکلهای بار/تنش با دامنه‌های بسیار متفاوت رخ می‌دهد و منحنی $S-N$ بطور مستقیم کاربرد ندارد.

متاسفانه، درحال حاضر درک کاملی از مکانیزم پایه خستگی که بتوان نتایج آزمایشات با تنش ثابت را برای حالت تنشهای با تغییرات تصادفی با درصدی اطمینان بکار برد وجود ندارد. البته نظریات مختلفی برای شرایط بارگذاری تصادفی ارائه شده است و معروف‌ترین آنها، نظریه Palmgren-Miner است. این نظریه برای فرآیند باند باریک که سیکلهای بار/تنش مجزا را بتوان شناسایی کرد کاربرد دارد.

طبق نظریه ایشان، درصد خسارت D ناشی از n_i سیکل بار/تنش با دامنه S_i بصورت خطی افزایش می‌یابد. یعنی:

$$D = \frac{n_i}{N(S_i)}$$

که در آن، $N(S_i)$ برابر عمر خستگی در بار تکراری با دامنه ثابت S_i می‌باشد. برای گروهی از بارهای با دامنه متفاوت، درصد کل خسارت برابر است با:

$$D = \frac{n_1}{N(S_1)} + \frac{n_2}{N(S_2)} + \frac{n_3}{N(S_3)} + \cdots = \sum_i \frac{n_i}{N(S_i)}$$

گسیختگی خستگی با $D = 1$ یعنی خسارت ۱۰۰٪ تعریف می‌شود.

با تعمیم بارهای گروهی گسسته به یک متغیر پیوسته با دامنه S داریم:

$$D = \int_{S=0}^{\infty} \frac{n(S)}{N(S)} \mathrm{d}S$$

در واقع این روش می‌گوید: اگر n_i عدد سیکل بار/تنش در ترازی اتفاق افتد بطوریکه N_i عدد سیکل بار/تنش ثابت منجر به شکست شود، سهم خسارت ناشی از n_i سیکل برابر است با: n_i/N_i

در یک فرآیند باند باریک ناشی از اعمال تحریک باند پهن، میدانیم در زمان T بطور متوسط تعداد ν_0^+T سیکل بار/تنش وجود دارد که دارای $p_p(S)\mathrm{d}S$ مقدار پیک در محدوده S تا $S + \mathrm{d}S$ می‌باشد. با توجه به تعریف $N(S)$، یک سیکل با دامنه S دارای سهم خسارت $1/N(S)$ خواهد بود. چون در زمان T انتظار داریم تعداد $(\nu_0^+T)(p_p(S)\mathrm{d}S)$ سیکل از این تراز بار/تنش رخ دهند، متوسط سهم خسارت در این تراز تنش برابر است با:

$$E[D] = (\nu_0^+T)(p_p(S)\mathrm{d}S)\frac{1}{N(S)}$$

و متوسط خسارت ناشی از سیکلهای تمام ترازهای بار/تنش که در زمان T رخ می‌دهند برابر است با:

$$E[D] = (\nu_0^+T) \int_{S=0}^{\infty} \frac{1}{N(S)} p_p(S)\mathrm{d}S$$

این رابطه را می‌توان برای متوسط طول عمر قبل از وقوع گسیختگی بکاربرد (عمر خستگی) که بصورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \frac{1}{\nu_0^+ \int_0^{\infty} \frac{1}{N(S)} p_p(S)\mathrm{d}S}$$

و تنها درصورتیکه منحنی $S - N$ موجود باشد قابل استفاده است.

روابط لازم برای تعیین ν_0^+ و $p_p(S)$ در بخش قبل ارائه شد. این روش محاسبه، با خطاهای آماری (ناشی از طبیعت تصادفی تنشهای اعمالی) که می‌توان آنرا بطور تقریبی تعیین کرد و خطاهای آزمایشگاهی (ناشی از صرفنظر کردن از مکانیزم صحیح خستگی) که قابل محاسبه نیست همراه خواهد بود.

در عمل یافته‌اند که اگر پهنای باند در پیک حالت تشدید خیلی باریک نباشد (یعنی میرایی خیلی کم نباشد و تعداد سیکلهای تا گسیختگی $(N(S))$ خیلی زیاد باشد (بطوریکه $\xi N > 10^3$)، عمده خطا، خطای آزمایشگاهی است (ناشی از صرفنظرکردن از قانون خستگی). معمولاً عمر باقیمانده واقعی در محدوده مقادیر $0.3T$ تا $3T$ است.

با استفاده از توزیع ریلی نقاط پیک، (رابطه آزمایشگاهی عمر خستگی) و $\nu_0^+ = \omega_0/2\pi$، معادله انتگرالی بالا برابر خواهد بود با:

$$p_p(S) = \frac{S}{\sigma_S^2} e^{-S^2/2\sigma_S^2} \qquad 0 \le S \le \infty$$

$$N(S)S^b = c$$

$$E[D] = \frac{\omega_0}{2\pi}\frac{T}{c}\frac{1}{\sigma_S^2}\int_0^\infty S^{b+1} e^{-S^2/2\sigma_S^2} dS = \frac{\omega_0}{2\pi}\frac{T}{c}\left(\sqrt{2}\sigma_S\right)^b \Gamma\left(1+\frac{b}{2}\right)$$

در این رابطه $\Gamma(1+x) = \int_0^\infty e^{-y} y^x dy$ برابر تابع گاما می‌باشد.

مثال

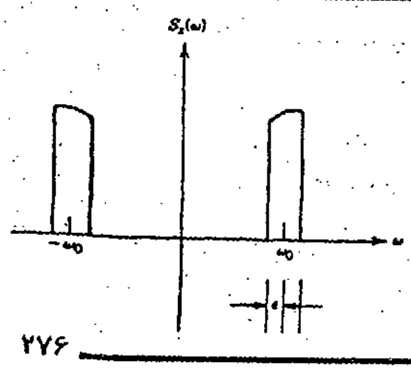
تحریک باند باریک گوسی و ایستای $x(t)$ روی سیستمی که پاسخ $y(t)$ آن با تابع پاسخ فرکانسی برابر $H(\omega) = \frac{1}{1+i(\omega/\omega_0)}$ بدست می‌آید اعمال می‌شود. یک عضو حساس به خستگی از این سیستم در معرض فرآیند تصادفی تنش ناشی از $y(t)$ قرار دارد. منحنی $S-N$ این عضو بصورت $S^b N = c$ است.

براساس تئوری Palmgren-Miner، دامنه A تحریک تعینی معادل $X_{eq} = A\sin\omega_0 t$ چقدر باشد تا این تحریک خسارت مشابهی در زمان یکسانی با خسارت ناشی از تحریک تصادفی $x(t)$ که دارای تابع چگالی طیفی زیر است ایجاد کند؟

$$S_x(\omega) = \begin{cases} S_0(\omega_0^2+\omega^2) & \text{for} \quad \omega_0-\varepsilon < |\omega| < \omega_0+\varepsilon \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

حل

تابع چگالی طیفی در شکل زیر نشان داده شده است.



در بارگذاری غیر تصادفی $p_p(S)dS = 1$ است و خسارت ناشی از بارگذاری تعینی برابر است با:

$$E[D] = \frac{(\nu_0^+ T)}{N} = \left(\frac{\omega_0 T}{2\pi}\right)\frac{S_a^b}{c}$$

که در این مساله برابر می‌شود با متوسط خسارت ناشی از بارگذاری تصادفی به شکل:

$$E[D] = \frac{\omega_0 T}{2\pi\, c}\left(\sqrt{2}\sigma_S\right)^b \Gamma(1+\frac{b}{2})$$

با مساوی قراردادن دو رابطه خسارت بالا خواهیم داشت:

$$S_a = \sqrt{2}\sigma_S\left[\Gamma(1+\frac{b}{2})\right]^{1/b}$$

کاری که باید انجام دهیم اینست که رابطه بین دامنه تنش S_a با دامنه A تحریک تعینی معادل X_{eq} را پیدا کنیم و رابطه آنرا با انحراف معیار تنش تصادفی σ_S و تابع چگالی طیفی معلوم $S_x(\omega)$ از تحریک تصادفی $x(t)$ بنویسیم.

در گام اول داریم:

$$\text{Deterministic Excitaion} \qquad X_{eq} = A\sin\omega_0 t = \frac{A}{2i}(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})$$

$$\text{Response} \qquad y = \frac{A}{2i}[H(\omega_0)e^{i\omega_0 t} - H(-\omega_0)e^{-i\omega_0 t}]$$
$$= \frac{A}{2}(\sin\omega_0 t - \cos\omega_0 t) = \frac{A}{\sqrt{2}}\sin(\omega_0 t - \theta)$$

$$\text{Response Stress} \qquad ky = \frac{kA}{\sqrt{2}}\sin(\omega_0 t - \theta)$$

که در این رابطه، k برابر ثابت فنر است و دامنه تنش برابر است با:

$$S_a = \frac{kA}{\sqrt{2}}$$

برای بخش دوم (تحریک تصادفی) داریم:

$$\sigma_s^2 = E[S^2] = k^2E(y^2) = k^2\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)\mathrm{d}\omega = 2k^2\int_{\omega_0-\varepsilon}^{\omega_0+\varepsilon}|H(\omega)|^2 S_x(\omega)\mathrm{d}\omega \cong 4\varepsilon\, k^2 S_0\,\omega_0^2$$

با جایگزینی σ_S از رابطه بالا و S_a از رابطه ماقبل در رابطه زیر:

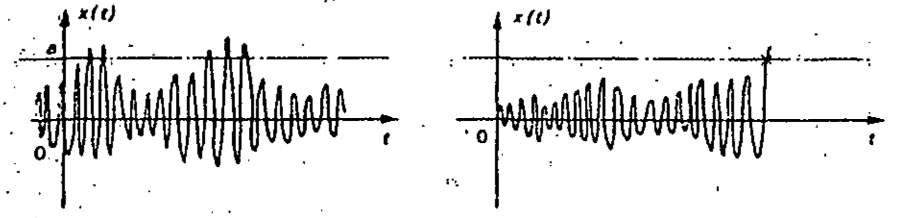
$$S_a = \sqrt{2}\sigma_S\left[\Gamma(1+\frac{b}{2})\right]^{1/b}$$

نتیجه خواهد شد:

$$A = 4\omega_0\sqrt{\varepsilon S_0}\left[\Gamma(1+\frac{b}{2})\right]^{1/b}$$

۳-تعمیم موضوع به سایر فرمهای گسیختگی

سایر فرمهای گسیختگی ناشی از ارتعاش تصادفی را نیز می‌توان درنظر گرفت (مثل گسیختگی ناشی از تسلیم). مثلاً اگر پاسخ برای بیش از یک کسر قابل قبول از کل زمان طی شده از تراز مشخصی بیشتر باشد گسیختگی رخ دهد (شکل a) یا اینکه اگر پاسخ برای دفعه اول به تراز تعریف شده برای تسلیم برسد گسیختگی رخ دهد (شکل b).



(a) Failure occurs if $x(t) > a$ for more than an acceptable fraction of the total elapsed time

(b) Failure occurs when $x(t)$ first reaches the level $x = a$

توجه شود که در این مسئله، فرآیند $x(t)$ پاسخ تصادفی نشسته است.

با فرض اینکه فرآیند $x(t)$ ارگودیک باشد و طول زمانی بسیار طولانی از تابع نمونه را درنظر بگیریم (در تئوری بطول بینهایت)، اگر $p(x)$ تابع چگالی احتمال فرآیند باشد، کسری از زمان صرف شده که x از a تجاوز نماید برابر است با:

$$\begin{pmatrix}\text{Fraction of elapsed}\\ \text{time for which } x > a\end{pmatrix} = \int_a^\infty p(x)\,\mathrm{d}x.$$

اگر $x(t)$ گوسی باشد، یعنی:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-x^2/2\sigma_x^2}$$

رابطه به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{pmatrix}\text{Fraction of elapsed}\\ \text{time for which } x > a\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(1 - \int_{x=0}^{a} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2\sigma_x^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\,\sigma_x}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{erf}\frac{a}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)$$

که در آن، تابع خطا بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{erf}\frac{a}{\sqrt{2}\sigma_x} \simeq 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sigma_x}{a} e^{-a^2/2\sigma_x^2}$$

بنابراین در اینحالت:

$$\begin{pmatrix}\text{Fraction of elapsed}\\ \text{time for which } x > a\end{pmatrix} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sigma_x}{a} e^{-a^2/2\sigma_x^2} \qquad (\text{for } a \gg \sigma).$$

مطابق شکل (a)، متوسط دفعاتی که فرآیند در هر بازه زمانی T با خط $x = a$ برخورد دارد برابر با $\nu_a^+ T$ می‌باشد. در زمان $\mathrm{d}T$، متوسط تعداد برخورد ها برابر $\nu_a^+ \mathrm{d}T$ خواهد بود. این به این معنی است که اگر تعداد زیادی بازه به عرض $\mathrm{d}T$ در نظر بگیریم، تنها کسر $\nu_a^+ \mathrm{d}T$ از تمام این بازه‌ها دارای یک برخورد خواهد بود (فرض میشود $\mathrm{d}T$ به قدری کوچک است که بیش از یک برخورد در یک بازه منفرد غیر ممکن است).

راه دیگر اینست که بگوییم احتمال یک برخورد در زمان $\mathrm{d}T$ برابر $\nu_a^+ \mathrm{d}T$ می‌باشد. بر این اساس، احتمال اینکه برخوردی در $\mathrm{d}T$ نداشته باشیم برابر است با:

$$1 - \nu_a^+ \mathrm{d}T = P_0(\mathrm{d}T)$$

حال اگر فرض کنیم که برخوردها بصورت تصادفی در طول محور زمان توزیع شده‌اند، چیزی که در یک بازه زمانی اتفاق می‌افتد کاملاً از چیزی که در بازه‌های مجاور اتفاق می‌افتد مستقل است و می‌توان نوشت:

$$P_0(T + \mathrm{d}T) = P_0(T) P_0(\mathrm{d}T) = P_0(T)(1 - \nu_a^+ \mathrm{d}T)$$

که $P_0(T)$ احتمال اینست که برخوردی در زمان T رخ ندهد. با بازنویسی این رابطه داریم:

$$\frac{P_0(T + \mathrm{d}T) - P_0(T)}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}P_0(T)}{\mathrm{d}T} = -P_0(T)\nu_a^+$$

که معادله دیفرانسل مرتبه اول برای $P_0(T)$ است و بصورت زیر حل می‌شود:

$$P_0(T) = Ce^{-\nu_a^+ T}$$

که در آن، C ضریب دلخواهی است. چون $P_0(0)$ احتمال اینست که هیچ برخوردی در بازه زمانی صفر نداشته باشیم و برابر واحد است بنابراین $C = 1$ خواهد بود و نتیجه می‌شود:

$$P_0(T) = e^{-\nu_a^+ T}$$

احتمال وقوع یک گسیختگی در زمان T برابر احتمال اینست که یک (یا بیشتر) برخورد در این زمان رخ دهد که برابر است با $1 - P_0(T)$ و نهایتاً احتمال وقوع یک گسیختگی در زمان T برابر است با:

نتیجه در شکل زیر ترسیم شده است.

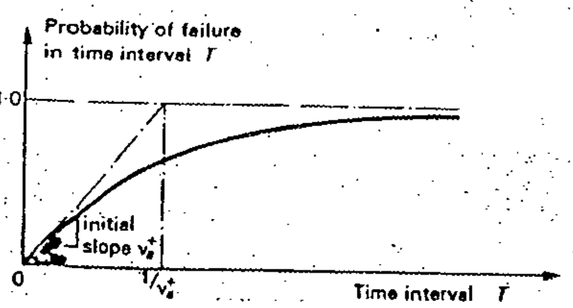


Fig. 14.5 Probability that a narrow band process $x(t)$ crosses the level $x = a$ at least once during time interval T

این نتیجه صرفاً برای یک فرآیند ارگودیک که برخوردها بطور تصادفی در محور زمان توزیع شوند صحیح است. از آنجا که پیکهای با دامنه بالا تمایل دارند بطور انبوه (خوشه‌ای) رخ دهند، بازه زمانی بین خوشه‌ها از فاصله متوسط بین برخوردها بزرگتر خواهد بود و احتمالی گسیختگی در زمان T از آنچه طبق رابطه قبل گفته شد کمتر است.

نکته جالب دیگر اینست که چگالی احتمال اولین تجاوز $p(T)$ را می‌توان از رابطه قبل بدست آورد. احتمال $p(T)\mathrm{d}T$ یک برخورد بین T و $T+\mathrm{d}T$ باید برابر **افزایش احتمال گسیختگی** بین T و $T+\mathrm{d}T$ باشد. بنابراین از رابطه قبل داریم:

$$P(T)\mathrm{d}T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(1 - e^{-\nu_a^+ T}\right)\mathrm{d}T$$

که منجر می‌شود به:

$$P(T) = \nu_a^+ e^{-\nu_a^+ T}$$

بعنوان تابع چگالی احتمال اولین عبور، مقدار میانگین زمان رسیدن به گسیختگی برابر است با:

$$E(T) = \int_0^\infty T\, p(T)\, \mathrm{d}T = \frac{1}{\nu_a^+}$$

و بنابراین:

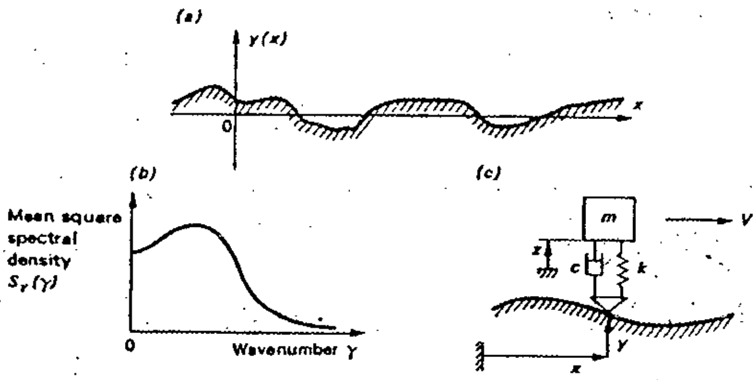
$$E(T^2) = \int_0^\infty T^2\, p(T)\, \mathrm{d}T = \frac{2}{(\nu_a^+)^2}$$

و انحراف معیار زمان رسیدن به گسیختگی برابر است با: $\sigma_T = \frac{1}{\nu_a^+}$ که با مقدار میانگین برابر است.

تمرین سری یازدهم: مسائل ۸.۶ تا ۸.۱۰ کتاب Yang

٤-تحریک ناشی از نامنظمی‌های تصادفی در سطح

شکل زیر نیمرخی از نامنظمی‌های ممکن روی یک سطح ثابت را نشان می‌دهد (مثلاً سطح جاده یا باند فرودگاه). ارتفاع y سطح یک محور افقی ثابت در برابر تابعی از فاصله در طول جاده نشان داده شده است. بجای تغییر با زمان، اینجا ارتفاع y تابعی از فاصله است. نامنظمی‌های با طول موج بلند با مولفه‌های با فرکانس کوتاه در حوزه زمان متناظرند و نامنظمی‌های با طول موج کوتاه با مولفه‌های با فرکانس بالا متناظرند.



فرکانس زاویه‌ای ω با واحد (rad/s) در این مساله با عددموج wave-number با پارامتر γ و واحد (rad/m or rad/ft) جایگزین می‌شود که نشان دهنده نرخ تغییر نسبت به فاصله است.

اگر پریود T مولفه متغیر زمانی با فرکانس ω بصورت $T = \frac{2\pi}{\omega}$ با واحد زمان داده شده باشد، آنگاه طول موج λ یک مولفه متغیر-فضایی با عدد موج γ برابر است با:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\gamma}$$

اکنون چگالی طیفی میانگین مربع برای متغیر ارتفاع y تابعی از عدد موج است (بجای فرکانس زاویه‌ای) و شکل نمونه آن مطابق شکل (b) است. در عمل $S_y(\gamma)$ را می‌توان با اندازه‌گیری y در بازه‌های بسیار نزدیک در طول محور x و سپس بکارگیری فرآیند محاسبات خاص پردازش سیگنال تعیین کرد. در شکل (b)، $S_y(\gamma)$ بصورت یک تابع یک طرفه از γ ترسیم شده است، بنابراین:

$$E[y^2] = \int_0^{\infty} S_y(\gamma)\,d\gamma.$$

یکی از کاربردهای جالب تئوری ارتعاشات تصادفی محاسبه پاسخ یک وسیله نقلیه متحرک به نامنظمی‌های سطح جاده است. شکل (c) یک مدل یکدرجه آزادی از یک وسیله نقلیه با یک سیستم تعلیق ساده را نشان می‌دهد که با سرعت ثابت V در طول سطح ناصاف حرکت می‌کند. نسبت به یک ناظر بر روی وسیله نقلیه متحرک، مختصات‌های y و z فقط تابعی از زمان هستند و معادله حرکت وسیله نقلیه برابر است با:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = c\dot{y} + ky.$$

ورودی سیستم تعلیق، پارامتر متغیر زمانی $y(t)$ است و اگر نسبت به زمان دارای چگالی طیفی $S_y(\omega)$ باشد، چگالی طیفی پاسخ وسیله نقلیه $S_z(\omega)$ برابر است با:

$$S_z(\omega) = |H(\omega)|^2 S_y(\omega)$$

که در آن:

$$H(\omega) = \frac{ci\omega + k}{-m\omega^2 + ci\omega + k}$$

مساله ما تعیین رابطه بین چگالی طیفی y نسبت به زمان یعنی $S_y(\omega)$ با چگالی طیفی اندازه‌گیری شده نسبت به فاصله یعنی $S_y(\gamma)$ می‌باشد.

از فصول قبل می‌دانیم رابطه چگالی طیفی زمانی دو طرفه $S_y(\omega)$ بصورت زیر است:

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

و تابع خودهمبستگی زمانی نیز بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_y(\tau) = E[y(t)y(t+\tau)]$$

تابع خودهمبستگی فضایی متناظر $R_y(X)$ نیز بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_y(X) = E[y(x)y(x+X)]$$

و متناظر آن، چگالی طیفی فضایی (دو طرفه) بصورت زیر است:

$$S_y(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_y(X)\,e^{-i\gamma X}\,dX$$

با فرض اینکه سرعت وسیله نقلیه برابر V و ثابت است، می‌توان بین $S_y(\omega)$ و $S_y(\gamma)$ رابطه برقرار نمود. اولاً بین تاخیر زمانی τ و تاخیر فضایی X یک رابطه وجود دارد، زیرا زمان لازم برای سیر وسیله نقلیه با سرعت V بین دو نقطه به فاصله X از یکدیگر در طول جاده برابر است با:

$$\tau = \frac{X}{V}$$

دوماً، چون یک سیکل با طول موج برابر $\lambda = 2\pi/\gamma$ در پریود T پوشش داده می‌شود، داریم:

$$T = \frac{\lambda}{V}$$

و بر اساس روابط قبل خواهیم داشت:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = V\frac{2\pi}{\lambda} = V\gamma$$

با جایگزینی در رابطه:

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

خواهیم داشت:

$$S_y(\omega = V\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_y\left(\tau = \frac{X}{V}\right)e^{-i(V\gamma)(X/V)}\cdot\frac{1}{V}\,dX$$
$$= \frac{1}{V}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_y(X)\,e^{-i\gamma X}\,dX$$

که نتیجه می‌شود:

$$S_y(\omega = V\gamma) = \frac{1}{V}S_y(\gamma)$$

یا بصورت معادل:

$$S_y(\omega) = \frac{1}{V}S_y\left(\gamma = \frac{\omega}{V}\right)$$

یعنی چگالی طیفی زمانی $S_y(\omega)$ مستقیماً از روی چگالی طیفی فضایی $S_y(\gamma)$ نیمرخ سطح بدست آمد. هر دو تابع چگالی طیفی دو طرفه (یعنی برای ω و γ از $-\infty$ تا ∞ تعریف شده‌اند) یا هر دو یکطرفه (یعنی برای ω و γ از 0 تا ∞ تعریف شده‌اند) هستند. اگر با طیف یک طرفه با واحدهای Hz/(میانگین مربع) یا $W_y(f)$ و (سیکل بر واحد طول)/(میانگین مربع) یا $W_y(1/\lambda)$ مواجه باشیم، داریم:

$$W_y(f) = 4\pi S_y(\omega = 2\pi f)$$

که در آن $S_y(\omega)$ طیف دوطرفه است. بطور مشابه:

$$W_y\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 4\pi S_y\left(\gamma = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

که در آن $S_y(\gamma)$ نیز دو طرفه است. در این حالت:

$$W_y(f) = \frac{1}{V}W_y\left(\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{V}\right)$$

مثال

مطلوبست پاسخ جابجایی جذر میانگین مربع وسیله نقلیه شکل قبل زمانیکه سیستم تعلیق این وسیله دارای فرکانس طبیعی و نسبت میرایی برابر:

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1{\cdot}5\ \text{Hz} \qquad \zeta = \frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{mk}} = 0{\cdot}1$$

باشد و سرعت سیر آن در دو حالت (a)- ۳۰ کیلومتر بر ساعت و (b)- ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت روی سطح جاده‌ای با چگالی طیفی فضایی یک طرفه برابر ۱۰۰ mm^2 بر (cycle/m) (ثابت) باشد.

حل

توجه شود که واحد چگالی طیفی برابر mm^2 بر (cycle/m) است.

چگالی طیفی زمانی یک طرفه متناظر برابر است با:

$$W_y(f) = \frac{100}{V}\ \text{mm}^2 \text{ per cycle/s}$$

که در آن، واحد سرعت برابر m/s است. بجای محاسبه دقیق می‌توانیم با استفاده از نتایج بخش قبل، جواب تقریبی را تعیین کنیم. در این حالت تابع پاسخ فرکانسی برابر است با:

$$\frac{ci\omega + k}{-m\omega^2 + ci\omega + k}$$

در مقایسه با:

$$\frac{1}{-m\omega^2 + ci\omega + k}$$

اما رابطه تقریبی واریانس بعنوان تقریب اولیه مناسب است، و داریم:

$$\sigma_z^2 \simeq \begin{pmatrix}\text{Average value of } W_y(f) \text{ in}\\ \text{the region of } f = f_N = \omega_N/2\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Peak value}\\ \text{of } H(f)\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}\text{Mean square}\\ \text{bandwidth in Hz}\end{pmatrix}$$

و داریم:

$$\sigma_z^2 \simeq \left(\frac{100}{V}\right)\left(\frac{k}{c\omega}\right)^2(\pi\zeta f_N)\ \text{mm}^2$$

با جایگزینی مقادیر در رابطه بالا داریم:

$$\sigma_z^2 \simeq \left(\frac{100}{V}\right)\left(\frac{1}{2\zeta}\right)^2(\pi\zeta f_N)\ \text{mm}^2$$

با قرار دادن:

$$f_N = 1{\cdot}5 \text{ and } \zeta = 0{\cdot}1$$

خواهیم داشت:

$$\sigma_z^2 \simeq \frac{375\pi}{V}\ \text{mm}^2$$

Hence, for $V = 30$ km/h, $\sigma_z = 12$ mm and, for $V = 100$ km/h, $\sigma_z = 6{\cdot}5$ mm.

یک وسیله نقلیه واقعی معمولاً در معرض ورودی‌هایی بیش از یک نقطه می‌باشد و حداقل چهار نقطه ورودی از روی جاده درنظر گرفته می‌شود (چهار چرخ وسیله نقلیه). برای سادگی اگر پاسخ $z(t)$ تنها از دو ورودی $y_1(t)$ و $y_2(t)$ حاصل شود، طیف پاسخ $S_z(\omega)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$S_z(\omega) = H_1^*(\omega)H_1(\omega)S_{y_1}(\omega) + H_1^*(\omega)H_2(\omega)S_{y_1y_2}(\omega) +$$
$$+ H_2^*(\omega)H_1(\omega)S_{y_2y_1}(\omega) + H_2^*(\omega)H_2(\omega)S_{y_2}(\omega)$$

اگر قرار دهیم:

$$y_1(t) = e^{i\omega t} \text{ with } y_2(t) = 0,$$

داریم:

$$z(t) = H_1(\omega)e^{i\omega t}$$

واگر قرار دهیم:

$$y_2(t) = e^{i\omega t} \text{ with } y_1(t) = 0,$$

داریم:

$$z(t) = H_2(\omega)e^{i\omega t}$$

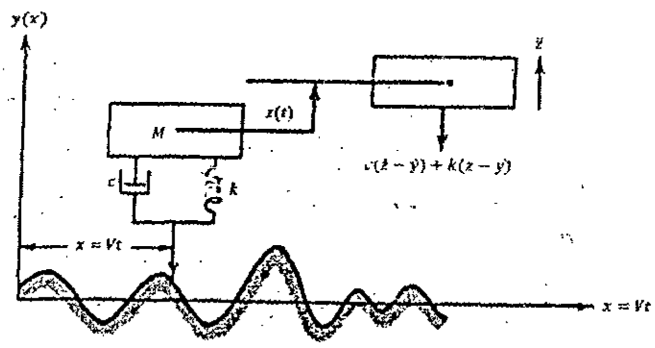
که در آن، $S_{y_1}(\omega)$، $S_{y_1y_2}(\omega)$، $S_{y_2y_1}(\omega)$ و $S_{y_2}(\omega)$ برابر چگالی طیفی زمانی و چگالی طیفی متقابل تحریک هستند.

برای یک سیستم خطی، توابع پاسخ فرکانسی $H_1(\omega)$ و $H_2(\omega)$ را بصورت تئوری می‌توان محاسبه یا از آزمایش وسیله نقلیه اندازه‌گیری کرد. مشروط بر اینکه مشخصات دینامیکی سیستم تعلیق عمدتاً خطی باشد (یعنی میرایی کولمب ناچیز باشد)، پاسخ ارتعاشی یک وسیله نقلیه به نامنظمی‌های سطح جاده از رابطه قبل قابل محاسبه است و اثر اعضای سیستم‌های تعلیق مختلف بصورت تئوری قابل ارزیابی است. این موضوع اکنون بسیارمورد علاقه محققین است و یکی از شاخه های مهم در موضوع دینامیک وسیله نقلیه به شمار می‌رود.

تمرین سری دوازدهم:
مسا له ۱۵.۱ کتاب Newland

۵-تحلیل پاسخ وسیله نقلیه با عبور از سطح دارای نامنظمی‌های تصادفی

مشابه قبل، مدل وسیله نقلیه ایده‌آل با جرم m و سختی ثابت k و ضریب میرایی c که با سرعت ثابت V در طول محور جاده حرکت می‌کند و زبری سطح جاده با $y(x)$ که $x = Vt$ می‌باشد مطابق شکل را درنظر می‌گیریم.



معادله حرکت مدل وسیله نقلیه بر حسب جابجایی، سرعت و شتاب وسیله نقلیه برابر است با:

$$-c(\dot{z}-\dot{y})+k(z-y)=-m\ddot{z}$$

با قراردادن $z-y=u$ داریم:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=-m\ddot{y}$$

چون $y(x)=y(Vt)$ بنابراین معادله حرکت به فرم سیستم‌های یکدرجه آزادی تبدیل خواهد شد.

نیروی فنر برابر است با:

$$k(z-y)=ku$$

و ارتعاش وسیله نقلیه $z=y+u$ به سادگی با حل معادله با داشتن $\ddot{y}(t)$ بدست می‌آید.

اکنون تابع $\ddot{y}(t)$ که بیانگر نیمرخ سطح راه $y(x)$ با $x=Vt$ است را بعنوان یک فرآیند تصادفی ایستا درنظر میگیریم. این فرآیند را بنام $Y(t)$ نامگذاری می‌کنیم.

می‌خواهیم یک مدل تصادفی برای $Y(t)$ بسازیم و با تابع ساده کسینوسی بر حسب زمان با دامنه α و فرکانس زاویه‌ای ω و زاویه فاز θ شروع می‌کنیم.

بنابراین:

$$y(t)=\alpha\cos(\omega t-\theta)$$

که در این رابطه، پارامترهای α و ω و θ تعینی با مقادیر حقیقی هستند. با این تابع ساده، جمع گسسته محدود N تابع را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y(t)=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\cos(\omega_n t-\theta_n)$$

و بیان انتگرالی بصورت زیر است:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(\omega)\cos[\omega t-\theta(\omega)]d\omega$$

و انتگرال مختلط آن بصورت زیر خواهد بود:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(\omega)\,e^{i[\omega t-\theta(\omega)]}d\omega$$

تا اینجا، توابع $y(t)$ همگی تعینی بودند. حال فرض می‌کنیم زوایه θ_n در معادله اول و $\theta(\omega)$ در معادلات بعدی، متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در محدوده ۰ تا 2π باشند. با این فرض، توابع قبلی، فرم پیوسته مختلط و گسسته یک فرآیند تصادفی $Y(t)$ خواهند بود.

الف-مدل گسسته

ابتدا مدل گسسته یعنی معادله اول از متغیر تصادفی $Y(t)$ را بررسی می‌کنیم. می‌خواهیم میانگین گروهی $E[Y(t)]$ و میانگین مربع $E[Y^2(t)]$ را با استفاده از توابع چگالی احتمال برای θ_n به ازای $n = 1, 2, \dots, N$ بصورت:

$$p(\theta_n) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \le \theta_n \le 2\pi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

را بدست آوریم.

میانگین گروهی برابر است با:

$$E[Y(t)] = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n E[\cos(\omega_n t - \theta_n)] = 0$$

(دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات اصفهان ،جزوه درس ارتعاشات تصادفی، گرد آوری و تنظیم: دکتر رضا اکبری، تابستان ۱۳۹۲)

زیرا:

$$E[\cos\theta_n] = \int_0^{2\pi} (\cos\theta_n)\left(\frac{1}{2\pi}\right) d\theta_n = 0$$

میانگین مربع گروهی برابر است با:

$$E[Y^2(t)] = E\left[\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \cos(\omega_n t - \theta_n) \sum_{m=1}^{N} \alpha_m \cos(\omega_m t - \theta_m)\right] = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\alpha_n^2$$

چراکه فرض کردیم θ_n و θ_m متغیرهای تصادفی مستقل هستند و داریم:

$$\begin{aligned} E[\alpha_n \cos(\omega_n t - \theta_n)\,\alpha_m \cos(\omega_m t - \theta_m)] &= \alpha_n \alpha_m E[\cos(\omega_n t - \theta_n)] E[\cos(\omega_m t - \theta_m)] \\ &= 0, \quad for\ m \neq n = \alpha_n^2 E[\cos^2(\omega_n t - \theta_n)] = \frac{\alpha_n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(\omega_n t - \theta_n)\, d\theta_n \\ &= \frac{1}{2}\alpha_n^2, \quad for\ m = n \end{aligned}$$

دو معادله بالا نشان می‌دهند فرآیند تصادفی $Y(t)$ شرط لازم برای ایستایی را دارد.

(دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات اصفهان ،جزوه درس ارتعاشات تصادفی، گرد آوری و تنظیم: دکتر رضا اکبری، تابستان ۱۳۹۲)

اگر شرایط ارگودیک بودن را کنترل کنیم داریم:

$$\langle Y(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left[\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\cos(\omega_n t-\theta_n)\right]\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N}\alpha_n \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\cos(\omega_n t-\theta_n)\,\mathrm{d}t = 0$$

و همچنین:

$$\langle Y^2(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left[\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\cos(\omega_n t-\theta_n)\sum_{m=1}^{N}\alpha_m\cos(\omega_m t-\theta_m)\right]\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\alpha_n^2$$

چراکه:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\alpha_n\cos(\omega_n t-\theta_n)\,\alpha_m\cos(\omega_m t-\theta_m) = 0,\quad for\ m\neq n$$
$$=\alpha_n^2\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(\omega_n t-\theta_n)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\alpha_n^2,\quad for\ m=n$$

که شرایط ارگودیک بودن را نیز دارد. یعنی میانگین‌های گروهی آن با میانگین‌های دائمی برابرند.

اگر چگالی طیفی دو طرفه دائمی (در فرآیند ارگودیک) را با $W(\omega)$ نشان دهیم، برای مولفه‌های کاملاً پریودیک داریم:

$$\langle y^2(t)\rangle = \sum_{n=1}^{N}2W(\omega_n)\Delta\omega$$

که $\Delta\omega = \omega_{n+1}-\omega_n$ پهنای باند فرکانسی می‌باشد.

بسته به انتخاب $\Delta\omega$ می‌توان فرض کرد که $W(\omega_n)$ مشارکت میانگین مربع از مولفه فرکانسی ω_n تقسیم بر پهنای باند فرکانسی یا میانیگن مربع بر پهنای باند فرکانسی می‌باشد. یعنی $W(\omega_n)$ در تمام بازه $\Delta\omega$ توزیع شده و در یک فرکانس خاص ω_n متمرکز نشده است.

با مساوی قراردادن دو رابطه قبل و جایگزینی $W(\omega_n)$ با چگالی طیفی گروهی $S(\omega_n)$ داریم:

$$\alpha_n = \sqrt{4S(\omega_n)\Delta\omega}$$

با جایگزینی α_n در معادله زیر:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\cos(\omega_n t-\theta_n)$$

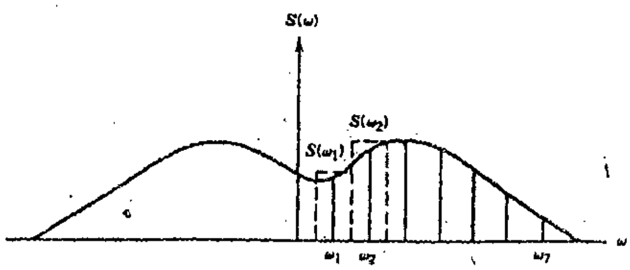
خواهیم داشت:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{4S(\omega_n)\Delta\omega} \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

که مبنای تولید توابع نمونه مصنوعی از یک تابع چگالی طیفی گروهی $S(\omega_n)$ از یک فرآیند تصادفی ارگودیک می‌باشد.

ب-تولید توابع نمونه مصنوعی

اگر تابع چگالی طیفی گروهی $S(\omega)$ فرآیند موجود باشد براساس مدل سری گسسته (یعنی معادله $y(t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$) می‌توان توابع نمونه مصنوعی از فرآیند تصادفی $Y(t)$ را تولید نمود. برای تولید یک نمونه، ابتدا محور مثبت فرکانس در تابع $S(\omega)$ را به N بازه مساوی تقسیم و فرکانس هر بازه را بنامهای $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ متناظر با $S(\omega_1), S(\omega_2), \dots, S(\omega_N)$ مطابق شکل نامگذاری می‌کنیم.



(دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات اصفهان ،جزوه درس ارتعاشات تصادفی، گرد آوری و تنظیم: دکتر رضا اکبری، تابستان ۱۳۹۲)

مثلا از روی شکل قبل، $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7$ و $S(\omega_1), S(\omega_2), \dots, S(\omega_7)$ و $\Delta\omega = \omega_1$ تعیین می‌شود. سپس، یک زاویه فاز θ_1 کاملاً تصادفی برای هر بازه بین ۰ تا 2π انتخاب می‌کنیم (متناظر با توزیع احتمال یکنواخت).
در انتها، سری داده‌های $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7$ و $S(\omega_1), S(\omega_2), \dots, S(\omega_7)$ و $\Delta\omega$ و $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_7$ را در معادله زیر قرار می‌دهیم:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{4S(\omega_n)\Delta\omega} \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

اکنون ما یک تابع نمونه دلخواه $y(t)$ برابر جمع هفت تابع پریودیک را تولید کرده‌ایم.

ج-مدل پیوسته

برای مدل پیوسته مختلط (معادله زیر) نتیجه مشابهی با مدل گسسته بدست می‌آید.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega)\, e^{i[\omega t - \theta(\omega)]} \mathrm{d}\omega$$

میانگین گروهی برابر است با:

$$E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega)\, e^{i\omega t} E[e^{-i\theta(\omega)}] \mathrm{d}\omega = 0$$

(دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات اصفهان ،جزوه درس ارتعاشات تصادفی، گرد آوری و تنظیم: دکتر رضا اکبری، تابستان ۱۳۹۲)

زیرا:

$$E[e^{-i\theta(\omega)}] = E[\cos\theta(\omega)] - iE[\sin\theta(\omega)]$$
$$= \int_0^{2\pi}(\cos\theta)\left(\frac{1}{2\pi}\right)\mathrm{d}\theta - i\int_0^{2\pi}(\sin\theta)\left(\frac{1}{2\pi}\right)\mathrm{d}\theta = 0$$

تابع خود همبستگی گروهی $R(\tau)$، زمانیکه $Y(t)$ بصورت مختلط درنظر گرفته شود و زمانیکه فقط بخش حقیقی آن در نظر گرفته شود برابر است با:

$$R(\tau) = E[Y(t)^{*}Y(t+\tau)]$$

که در آن، $Y(t)^{*}$ زوج مختلط $Y(t)$ می‌باشد. با جایگزینی $Y(t)^{*}$ و $Y(t+\tau)$ از عبارت انتگرالی نظیر در رابطه بالا داریم:

$$R(\tau) = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(\omega)\, e^{i[\theta(\omega)-\omega t]}\mathrm{d}\omega \int_{-\infty}^{\infty}\alpha(\omega')\, e^{i[\omega'(t+\tau)-\theta(\omega')]}\mathrm{d}\omega'\right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E\left\{\alpha(\omega)\alpha(\omega')e^{i[\theta(\omega)-\theta(\omega')]}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega'\right\}e^{it(\omega'-\omega)+i\omega'\tau}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}[\alpha(\omega)\mathrm{d}\omega]^2 e^{i\omega\tau}$$

وقتی انتگرال نسبت به ω' گرفته می‌شود داریم:

$E\left\{e^{i[\theta(\omega)-\theta(\omega')]}\right\} = 0$ برای $\omega' \neq \omega$ و $E\left\{e^{i[\theta(\omega)-\theta(\omega')]}\right\} = 1$ برای $\omega' = \omega$

از تعاریف پایه در مورد چگالی طیفی گروهی $S(\omega)$ داریم:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{i\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

از مقایسه دو رابطه قبل داریم:

$$\alpha(\omega)\mathrm{d}\omega = \sqrt{S(\omega)\mathrm{d}\omega}$$

با جایگزینی رابطه بالا در رابطه انتگرالی زیر:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\alpha(\omega)\, e^{i[\omega t-\theta(\omega)]}\mathrm{d}\omega$$

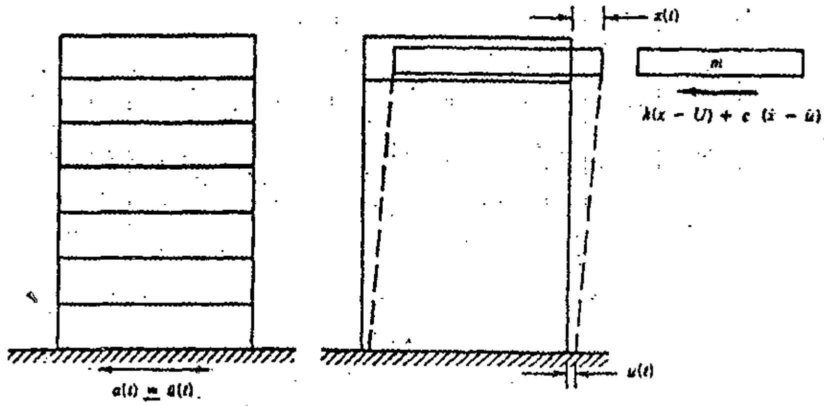
داریم :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{S(\omega)\mathrm{d}\omega}\, e^{i[\omega t-\theta(\omega)]}$$

که فرم انتگرالی معادله نظیر در مدل گسسته می‌باشد. البته حد پایین انتگرال را می‌توان صفر درنظر گرفت و انتگرال را با ضریب ۲ محاسبه نمود و ترم نمایی را نیز می‌توان با بخش حقیقی‌اش (تابع کسینوسی) جایگزین کرد. اهمیت ریاضی ترم غیرعادی $\sqrt{d\omega}$ را می‌توان با مقایسه دو رابطه نظیر مدل گسسته و مدل پیوسته فهمید. برخلاف انتگرال‌گیری عادی، این جمع شامل ترم $\sqrt{\Delta\omega}$ بجای $\Delta\omega$ می‌باشد.

۶-حرکت تصادفی زلزله (مدل غیر ایستا)

یک مدل ایده‌ال از یک سازه ساختمان بلند در برابر زلزله با شتاب تولیدی زمین برابر $a(t) \equiv \ddot{u}(t)$ با جرم کل m، سختی فنر برابر k و ضریب میرایی برابر c را مطابق شکل درنظر بگیرید. فرض می‌شود تمام جرم در شاهتیر سقف آخر متمرکز شده است.



با فرض صلب بودن شاهتیر فوقانی، جابجایی را برابر $x(t)$ در نظر می‌گیریم. هر دو ستون‌های مدل فرض می‌شوند الاستیک و فاقد جرم باشند. معادله حرکت سیستم برابر است با:

$$-c(\dot{x} - \dot{u}) - k(x - u) = m\ddot{x}$$

با تعریف جابجایی نسبی برابر:

$$(x - u) = y$$

خواهیم داشت:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + dy = -m\ddot{u} = -ma$$

نیروی برشی تولید شده از زلزله یعنی:

$$V = ky + c\dot{y}$$

را می‌توان با پیداکردن جابجایی نسبی y از حل معادله حرکت بدست آورد.

معادله حرکتی که برای مدل ساختمان بلند در برابر زلزله در بالا نوشته شد معادل با مدل وسیله نقلیه بود که قبلاً بررسی شد. اختلاف اصلی این دو مساله مهندسی در طبیعت بار وارده (در اینجا $(u(t)$) می‌باشد.

در مساله وسیله نقلیه فرض کردیم نیمرخ سطح جاده یک فرآیند ایستا باشد و خصوصیات اصلی آماری و احتمالی آن مستقل از زمان t بودند. در حالت زلزله، فرآیند تصادفی وضوحاً غیرایستاست. مشخصه وابستگی به زمان در فرآیند تصادفی، اهمیت اساسی دارد و نباید نادیده گرفته شود.

(متغیر x و فرآیند X در این مساله نظیر متغیر y و فرآیند Y در مدل وسیله نقلیه می‌باشد)

الف-مدل گسسته

در فرم گسسته این مساله، ابتدا با وابستگی زمانی فرآیند تصادفی با معرفی تابع تعینی $A(t,\omega)$ بر حسب زمان و فرکانس در مدل ایستای قبلی (وسیله نقلیه) کار را شروع می‌کنیم.

در ادامه مدل گسسته فرآیند تصادفی غیرایستای $X(t)$ (مشخصه شتاب زلزله $a(t)$) را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N} A(t,\omega_n)\alpha_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

فرآیند غیرایستای $X(t)$ در این معادله با فرآیند ایستای معادله نظیر در مدل وسیله نقلیه مشابه است (بجز در تابع تعینی $A(t,\omega)$ که نقش ضرایب N ترم با میانگین صفر را بازی می‌کند).

میانگین گروهی بصورت زیر خواهد بود:

$$E[X(t)] = \sum_{n=1}^{N} A(t,\omega_n)\alpha_n E[\cos(\omega_n t - \theta_n)] = 0$$

میانگین مربع گروهی فرآیند برابر است با:

$$E[X^2(t)] = \sum_{n=1}^{N} A(t,\omega_n)\alpha_n \cos(\omega_n t - \theta_n) \sum_{m=1}^{N} A(t,\omega_m)\alpha_m \cos(\omega_m t - \theta_m)$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{2} A^2(t,\omega_n)\alpha_n^2$$

توابع تعینی $A(t,\omega_n)$ را می‌توان متناظر با ضرایب α_n دانست و از نتایج بخش قبل استفاده کرد. یعنی با تعمیم چگالی طیفی گروهی $S(\omega)$ معادله نظیر وسیله نقلیه و با درنظر گرفتن وابستگی این تابع به زمان، $S(t,\omega_n)$ متناظر با فرکانس ω_n با پهنای باند فرکانسی $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n$ داریم:

$$E[X^2(t)] = \sum_{n=1}^{N} 2S(t,\omega_n)\,\Delta\omega$$

از مقایسه دو رابطه قبل خواهیم داشت:

$$A(t,\omega_n)\alpha_n = \sqrt{4S(t,\omega_n)\,\Delta\omega}$$

جایگزینی این معادله در معادله سری گسسته نتیجه می‌دهد:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{4S(t,\omega_n)\,\Delta\omega}\cos(\omega_n t - \theta_n)$$

مشاهده می‌شود اگر در معادله سری گسسته داشته باشیم:

$$A(t,\omega_n) = 1$$

آنگاه فرآیند $X(t)$ به یک فرآیند ایستا تبدیل می‌شود و همچنین چگالی طیفی ایستای $S(\omega_n)$ بصورت زیر:

$$\alpha_n = \sqrt{4S(\omega_n)\,\Delta\omega}$$

از مقایسه رابطه بالا با رابطه قبلی:

$$A(t,\omega_n)\alpha_n = \sqrt{4S(t,\omega_n)\,\Delta\omega}$$

میتوان رابطه بین چگالی طیفی ایستا و غیرایستا را بصورت زیر نوشت:

$$S(t, \omega_n) = A^2(t, \omega_n)S(\omega_n)$$

لازم به ذکر است فرآیند تصادفی غیرایستا ارگودیک نیست. البته با معرفی تابع تعینی $A(t, \omega_n)$ می‌توان فرآیند تصادفی غیرایستای $X(t)$ را بصورت فرآیند ایستای اصلاح‌شده معرفی کرد.

ب-مدل پیوسته

مجدداً با فرض وابستگی زمانی فرآیند تصادفی ایستا (متناظر مساله قبل در فرم پیوسته) با معرفی تابع تعینی $A(t, \omega)$ شروع می‌کنیم. یعنی:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t, \omega)\alpha(\omega)e^{i[\omega t - \theta(\omega)]}\, d\omega$$

زمانیکه $A(t, \omega) = 1$ باشد، به حالت مورد بررسی در مساله قبل تبدیل می‌شود. میانگین گروهی برابر است با:

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} A(t, \omega)\alpha(\omega)e^{i\omega t}E[e^{-i\theta(\omega)}]\, d\omega = 0$$

تابع خودهمبستگی گروهی $R(t, \tau)$ به زمان وابسته است. اگر فرآیند $X(t)$ را بصورت مختلط فرض کنیم و فقط بخش حقیقی آنرا درنظر بگیریم داریم:

$$R(t, \tau) = E[X(t)^* X(t + \tau)]$$

با جایگزینی $X(t)^*$ و $X(t, \tau)$ از دو رابطه قبل داریم:

$$R(t, \tau) = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} A(t, \omega)\alpha(\omega)e^{i[\theta(\omega) - \omega t]}\, d\omega \int_{-\infty}^{\infty} A(t, \omega')\alpha(\omega') \times e^{i[\omega'(t+\tau) - \theta(\omega')]}\, d\omega'\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [A(t, \omega)\alpha(\omega)\, d\omega]^2 e^{i\omega\tau}$$

و نهایتا تابع چگالی طیفی برابر است با:

$$R(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t, \omega)e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

مقایسه دو رابطه قبل نتیجه خواهد داد:

$$A(t, \omega)\alpha(\omega)\, d\omega = \sqrt{S(t, \omega)\, d\omega}$$

باجایگزینی در فرم پیوسته رابطه $X(t)$ نتیجه می‌دهد:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{S(t, \omega)\, d\omega}\, e^{i(\omega t - \theta(\omega))}$$

با جایگزینی $A(t,\omega) = 1$ داریم:

$$\alpha(\omega)\, d\omega = \sqrt{S(\omega)\, d\omega}$$

که با رابطه نظیر حالت ایستا برابر است.

همچنین؛ از مقایسه روابط قبل داریم:

$$S(t, \omega) = A^2(t, \omega) S(\omega)$$

که رابطه بین تابع چگالی طیفی در دو حالت ایستا و غیر ایستا می‌باشد.

تمرین سری سیزدهم:
مسائل ۴.۱، ۴.۲، ۴.۳، ۴.۴ و ۴.۵ کتاب Yang

سایر مباحث و موضوعات قابل بررسی در این درس:

۱-شبیه سازی محیط تصادفی
۲-اندازه گیری تابع پاسخ فرکانسی
۳-فرآیندهای غیر ایستا
۴-توزیع Weibull نقاط پیک
۵-ارتعاش تصادفی غیر خطی

پایان