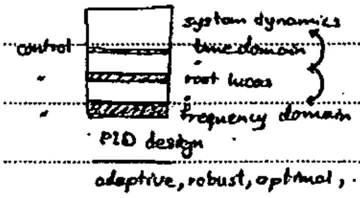
Subject: کنترل - یوسفی
Year. Month. Date. ( )

۸۸,۷,۵

معادل «کنترل» بینی ما در دانشگاه‌های دیگر System Dynamics است. در انتهای این ترم می‌رسیم به PID Design: که باید با کنترل 2 دنبال بشه.

در اکثر کاربردهای صنعتی PID به کار رفته و gain های کنترلی به روش سعی و خطا ایجاد می‌شوند. به عنوان این نوع کنترلر کلاسیک، تنها نوع کنترلی که به خوبی وارد صنعت شده، کنترلر خازنی!

درصد ارتباط درس ما به کنترل واقعی:



این gain های α و β و γ به کمک سعی و خطا معین می‌شوند.

$$u \rightarrow \boxed{\alpha u + \beta \int u\,dt + \gamma \frac{du}{dt}} \rightarrow y$$

* سرفصل مطالب:
- فصل اول: مقدمه‌ای بر سیستم‌های دینامیکی و کنترلی، تعاریف و مفاهیم
- فصل دوم: مدلسازی سیستم‌های دینامیکی
- فصل سوم: تحلیل حوزه‌ی زمانی (حالت گذرا و ماندا)، پایداری، خطای ماندا، عملیات کنترلی پایه
- فصل چهارم: روش مکان هندسی ریشه و طراحی کنترلر
- فصل پنجم: روش پاسخ فرکانسی و طراحی کنترلر
- فصل ششم: طراحی PID

* ارزشیابی:

میان ترم ۷ نمره
پایان ترم ۹ نمره
TA ۲ نمره
کلاس و پروژه MATLAB ۱ نمره
پروژه آزمایشگاهی ۱ نمره

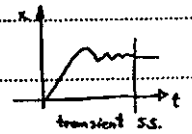
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

فصل اول بسیار مفصل و گسترده خواهد بود و شامل چیزهایی که احتمالاً آخر ترم می‌رسیم بگوییم.

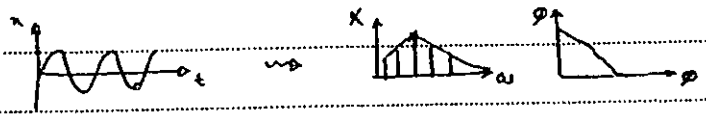
در فصل دوم کلیه کاملاً می‌فهمیم سیستم چیه!

در فصل سوم می‌فهمیم که کنترلر دوتا معیار داره: یکی پایداری که به حل transient برمی‌گرده و دومی خطای ماندا که حل Steady State سیستم برمی‌گرده. در درس ما کنترلر را به دو دلیل به کار می‌بریم: ۱. پایداری سیستم را بهبود ببخشه ۲. خطای ماندا که به ذات دینامیکی سیستم برمی‌گردد را کاهش دهد. در آخر یاد می‌گیریم با چند کنترلر ساده این کارها رو انجام بدهیم.



در فصل چهارم می‌رویم تو فضای لاپلاس و کار کردن با s ها.

در فصل پنجم باز هم به کمک جناب لاپلاس از حوزه‌ی زمانی می‌ریم توی حوزه‌ی فرکانسی و s یک مفهوم فرکانسی دارد.



۸۸/۷/۷

* منابع و مراجع:

Text. 1. Modern Control Eng., Ogata

Ref. 2. Modern Control Systems, Dorf

3. Automatic Control Systems, Kuo

4. Feedback Control of Dynamic Systems, Franklin

5. Linear Control Systems; Analysis and Design; Conventional & Modern, D'Azzo

6. Automatic Control Eng., Raven

7. , Nice

۸. سیستم‌های دینامیکی و کنترل، دکتر غفاری

فصل اول: مقدمه ای بر سیستم های کنترلی، تعاریف و مفاهیم

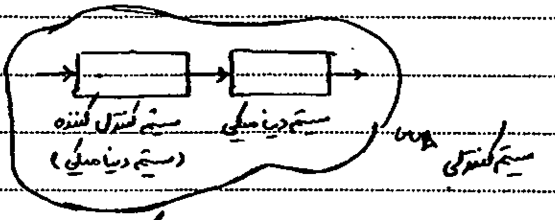
* سیستم: مجموعه ای از اجزای مرتبط با همدیگر که رفتار خاصی را تعقیب می کنند و دارای ورودی و خروجی های مشخصی هستند و دارای یک مرز فرضی مشخص باشد که آن را از محیط اطراف جدا می کند.

* سیستم دینامیکی: یک سیستم که رفتار آن متغیر با زمان باشد. به بیان ریاضی، رفتار آن با معادله دیفرانسیل بیان شود. و یا اینرسی باشد و حافظه هم داشته باشد (یعنی گذشته خود را به یاد می آورد).

هرچه پاسخ سیستم سریعتر باشد، میل سیستم به استاتیکی بودن آن (رفتارش) بیشتر است. سیستم دینامیکی طول می کشد از ورودی به خروجی برسد.

خودش پدیده یا کمیت بزرگ می تواند سیستم باشد (باید هم ورودی برایش تعریف کنیم هم خروجی) و در عین حال می تواند چندتا سیستم باشد. می شود روی یک پدیده چندتا سیستم تعریف کرد با مرزهای مختلف!

* سیستم کنترلی: یک سیستم دینامیکی است که قابلیت کنترل یک رفتار مشخص آن وجود داشته باشد.



* متغیر ورودی (علت): Input Variable (Manipulated Variable): متغیری است که امیدواریم با تغییر آن، متغیر خروجی را کنترل کنیم.

* متغیر خروجی (معلول): Output Variable (Controlled Variable): متغیری است که اندازه گیری می شود تا کنترل شود.

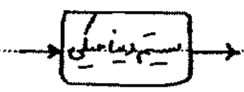
* متغیر حالت: State Variable: حداقل متغیرهای لازم که با داشتن آنها در هر لحظه وضعیت سیستم در آن

Subject:
Year. Month. Date. ( )

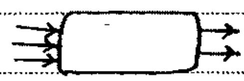
محیط مشخص گردد. (به طور کلی منظور همان درجات آزادی که اینجا برابر درجه معادله دیفرانسیل سیستم است). متغیرهای حالت منحصر به فرد نیستند و همینطور الزاماً کمیت‌های فیزیکی نیستند.

معمولاً خروجی، یک یا چند یا ترکیبی از متغیرهای حالت سیستم است.

* دیاگرام بلوک‌ها :



single input single output SISO



multi input multi output MIMO

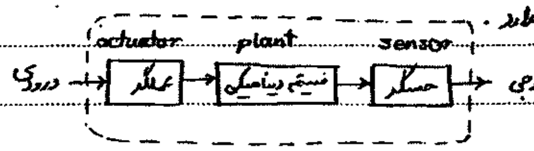
سیستم دینامیکی گاهی plant است و گاهی process است.
(plant: پدیده‌ی فیزیکی مشخص — process: فرآیند)

برای اینکه سیستم دینامیکی ما، کنترلی باشد، حداقل باید یک کنترل‌کننده به آن اضافه کنیم.

دو نوع سیستم کنترلی داریم:

* حلقه باز : Open loop

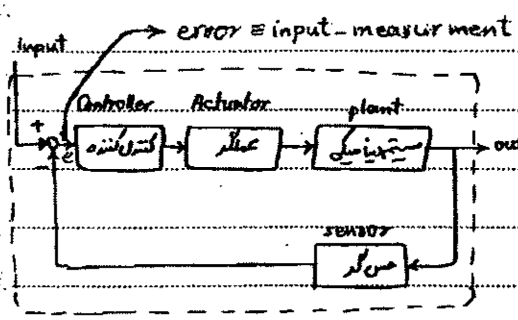
در سیستم کنترلی حلقه باز، خروجی هیچ تأثیری بر ورودی ندارد.



من به ورودی می‌دهم و امیدوارم خروجی مطلوب را بگیرم ولی ممکن است نگیرم.

مزیت: سیستم به طور offline تنظیم شده و ما جواب‌شو داریم پس پایدار است.

* حلقه بسته : Closed loop



سیستم‌های حلقه بسته، اصطلاحاً فیدبک (پس‌خورد) نامیده می‌شود (feed back). تا وقتی به عملگر

PAPCO

Subject: کنترل - یوسفی قمی

Year. Month. Date. ( )

معایب: عدم توانایی لازم برای جبران نویز و اغتشاش
نویز به وسیله‌ی سنسور های خروجی سوار می‌شود ولی نویزی
که توسط عملگر روی ورودی به سیستم دینامیکی وارد می‌شود
اغتشاش نامیده می‌شود.

دستور می‌دهد که $|e| < \varepsilon$
مزایا: توانایی مقابله با نویز و اغتشاش
معایب: ریسک ناپایداری (اضافه کردن کنترلر (یعنی افزودن
دینامیک) ممکن باعث ناپایدار شدن شود)

* مطالعه‌ی پایداری سیستم بعد از طراحی کنترلر فراموش نشود!

وقتی می‌گیم یک سیستم پایدار است یعنی برای تمام ناحیه‌ای که ما در نظر گرفته‌ایم پایدار باشد

مثال برای فیدبک: ABS (ترمز، Anti-Block System)، cruise، ECU (کنترل موتور)

۸۸/۷/۱۲

راه‌حل بعضی مسائل (مثلاً کنترل ارتعاشات ناخواسته)، ~~لزوماً~~ فقط استفاده از یک سیستم کنترلی active نیست. بعضی وقت‌ها فقط ایجاد تغییرات سخت‌افزاری یا نرم‌افزاری، مشکل را حل می‌کند.

مشاهده‌پذیری و کنترل‌پذیری سیستم به استفاده از سنسورهای مناسب و عملگرهای مناسب برای ورودی و خروجی‌های موردنظر برمی‌گردد.

اکثر سیستم‌های کنترلی معمولی که در حال حاضر استفاده می‌شوند مثلاً همان ABS و ECU خودروها، در نهایت یک PID دارند ولی هنر طراح، مدلسازی سیستم دینامیکی و ساماندهی ورودی و خروجی‌ها می‌باشد
پیاده سازی سیستم کنترلی

اگر قرار باشد Sys چندتا کار مختلف بکند و یا پارامترهایی که سیستم باهاش کار می‌کند به‌طور ناخواسته یا خواسته تغییر می‌کند، یک راه تعریف کردن task های کنترلی مختلف است و یک راه دیگر استفاده از روش‌های کنترلی دیگری مثل Robust Control یا Adaptive Control است.

ورودی الزاماً نیرو توی سیستم (مثلاً آبی که می‌ریزه توی مخزن) نیست بلکه یک مرجع است که از آن برای کنترل سیستم

Subject.
Year. Month. Date. ( )

خروجی ها از آن استفاده می‌کنیم (مثلاً خروجی را با آن مقایسه کنیم)

کنترلر P خیلی سیستم را فقط براساس لحظه‌ی حال کنترل می‌کند ولی با اضافه کردن مشتق یا انتگرال می‌توانیم بفهمیم در لحظه‌ی بعد یا لحظه‌های قبل رفتار سیستم چگونه است و براین اساس کنترلری بسازیم که می‌داند سیستم در گذشته کجا بوده، الان چگونه است و در آینده کجا خواهد رفت. PID

با توجه به بالا، PID خیلی خوب و کامل است و خیلی عمومی است، در یک موقعیت جواب ندهد. بسیاری از کنترلرهای دیگر مثل Robust در واقع تقویت کننده یا بهینه کننده‌ی این روش هستند.

همونطور که سیستم feedback داریم، سیستم feed forward هم داریم. اگر پارامترهای سیستم متغیر باشند بهتر است از Adaptive استفاده کنیم. مثلاً α و β و γ ی PID تابع زمان باشند.

PID معمولاً جواب می‌دهد ولی اون جوابی که ما دقیقاً می‌خواهیم را به ما نمی‌دهد. می‌شه حتی از توابعی PID استفاده کرد.

* اپراتور خطی L:

$$\begin{cases} L(\alpha u) = \alpha L(u) \\ L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2) \end{cases}$$

* تابع تحلیلی $F(s)$ در حوزه‌ی s:

اگر یک تابع و مشتقات آن در حوزه‌ی s وجود داشته باشند.

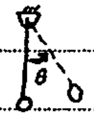
* قطب و صفرهای تابع تحلیلی $F(s)$: Poles and Zeros

مقادیری از s که $F(s)$ را صفر می‌کنند، صفرهای تابع و مقادیری از s که تابع را بی‌نهایت یا نامعین می‌کنند، قطب های تابع هستند.

مثلاً اگر $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ $A(s) = 0 \rightarrow$ صفرها o $B(s) = 0 \rightarrow$ قطب‌ها x

طبیعت کلاً غیرخطی است و خطی کردن یک تقریب مهندسی است

Subject: کنترل - [illegible]
Year. Month. Date. ( )



$ml\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$

خطی می‌کنیم ↓ $\sin\theta \simeq \theta$

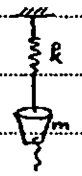
$ml\theta + mgl\theta = 0$

* قیود سیستم‌های دینامیکی در این درس:

۱- خطی بودن سیستم: معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم خطی است. (با حوزه لاپلاس)

۲- SISO

۳- Time Invarient یعنی سیستم غیر متغیر با زمان (پارامترهای سیستم مثلاً فرکانس یا l, g در آونگ بالا با زمان تغییر نکند)



مثلاً در جرم و فنر مقابل * غیرخطی باشد یا سطل آن سوراخ باشد (time varient)

با LTI: (linear time invarient) در MATLAB آشنا شوید

>> LTI view

✓ یک کم برگردیم روی دیاگرام بلوکی:

بلوک سنسور هم به نوبه‌ی خود یک سیستم دینامیکی است. اگر سنسور ما delay داشته باشد و ثابت زمانی آن بالا باشد، ما نمی‌توانیم سیستم را real time کنترل کنیم. ما دوست نداریم سنسورمان دینامیک باشد. بلوک سنسور معمولاً فقط یک gain است. پس ممکن است آن را در سیستم کنترلی نبینیم.

✓ شرط لازم برای اینکه بتونی یک سیستم رو کنترل کنی، اینه که اول سیستم رو شناسایی کنی. به ثابت زمانی سیستم احترام بذارید. اگر رعایتش نکنی، گرفتار می‌شوید.

* معادله‌ی دیفرانسیل سیستم LTI SISO:

$u \rightarrow \boxed{h} \rightarrow y$

$$h: a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در مثال‌های فیزیکی : $n \geq m$

۸۸,۷,۱۴

* سیگنال علّی : Causal Signal $\quad u(t)=0 \quad , \forall t<0$

ما با سیگنال‌های واقعی کار می‌کنیم پس در $t<0$ هیچ چیزی وجود ندارد.

* تبدیل لاپلاس ، Laplace Transform $\quad F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$

با توجه به سیگنال علّی، تابع علّی نیز به صورت زیر است.

* تابع علّی :

$$F: \underset{\substack{\uparrow \\ t}}{R^{+}} \to \underset{\substack{\uparrow \\ f(t)}}{R}$$

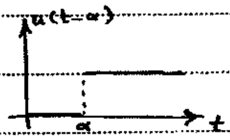
در تبدیل لاپلاس تابع علّی‌مان را به حوزه‌ی مختلط می‌بریم.

$$\text{لاپلاس}: R \to \mathbb{C} \quad , s=\sigma+j\omega$$

⊗ تبدیل لاپلاس خطی است.

* تابع پله‌ی واحد Unit Step

$$u(t-\alpha)=\begin{cases} 0 & t<\alpha \\ 1 & t \geq \alpha \end{cases}$$



برای System ID ، یکی از توابعی که به سیستم می‌دهیم، تابع پله است. اگر فقط یک فرصت داشته باشیم از ضربه δ استفاده می‌کنیم

* تابع تأخیر یافته : Delayed Function

$$f(t) \xrightarrow{\text{تأخیر به اندازه } \alpha} u(t-\alpha) f(t-\alpha)$$

$$\mathcal{L}\{u(t-\alpha) f(t-\alpha)\}=e^{-\alpha s} F(s)$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\}=\frac{1}{s}$$

* تابع ضربه‌ی واحد : Unit Impulse

$$\delta(t)=\begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t=0 \end{cases} \quad ; \int_{0}^{0^{+}} \delta(t)\, dt=1$$

PAPCO

برای تابع $f(t)$ پیوسته در $t=t_0$: $f(t)\,\delta(t-t_0)=f(t_0)\,\delta(t-t_0)$

$$\rightarrow \int_0^\infty f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

هرجا توان‌های s به طور جدا ظاهر شد، مشتق ضربه داریم.
$\mathcal{L}\{\delta(t)\}=1 \;;\; \mathcal{L}\left\{\frac{d^n\delta(t)}{dt^n}\right\}=s^n$

$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}f(t)\}=F(s+\alpha)$

$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}=\frac{s}{s^2+\omega^2} \;;\; \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\cos\omega t\}=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

$\mathcal{L}\{f(t/\alpha)\}=\alpha F(\alpha s)$

۹) هرگاه دو تابع دارای تبدیل‌های لاپلاس یکسان باشند، آن دو تابع برابرند.

$\mathcal{L}\{\delta(\alpha t)\}=\frac{1}{\alpha}(1)=\frac{1}{\alpha}$

$\Rightarrow \delta(\alpha t)=\frac{1}{\alpha}\delta(t)$

$\mathcal{L}\{\frac{1}{\alpha}\delta(t)\}=\frac{1}{\alpha}$

$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\dots-f^{(n-1)}(0)$

مثال: $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t)$

$\xrightarrow{\mathcal{L}} (ms^2+cs+k)X(s)-[sx(0)-\dot{x}(0)]m-[x(0)]c=F(s)$

در ارتعاشات پاسخ سیستم را می‌خواستیم ولی در Sys. Dyn. که هدف Sys. ID است پاسخ برامون مهم نیست

و در نتیجه خودمون رو از دست شرایط اولیه رها می‌کنیم.

* قضیه مقدار نهایی : Final Value Theorm

$x_{ss}=\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}sX(s)=x(\infty)$

steady state

در اثبات این قضیه، یک شرط وجود دارد (که خود بخود معلوم نمی‌شود و باید چک کرد).

شرط: سیستم پایدار باشد. به بیان دیگر قطب‌های $sX(s)$ همگی در سمت چپ محور موهومی یا روی مبدا باشند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: $X(s)=\frac{1}{s-\alpha}$ $\alpha>0$, $X(s)=\frac{1}{s^2+\beta}$ $\beta>0$ sys ناپایدار است.

$X(s)=\frac{1}{s(s+\alpha)}$, $\alpha>0 \rightarrow$ پایدار $\rightarrow x_{ss}=\lim_{s\to 0} sX(s)=\frac{1}{\alpha}$

- اگر $x(t)=e(t)=error$ داریم: $x_{ss}=e_{ss}=offset$

* قضیه‌ی مقدار اولیه: $x(0^+)=\lim_{s\to\infty} sX(s)$

* تجزیه‌ی کسرها (Partial Fraction) را هم بلد هستیم. $\frac{1}{(P_n)^m}=\sum_{i=1}^{m}\frac{P_{n-i}}{(P_n)^i}$

* LTI:

۱) اگر به اندازه‌ی τ در ورودی تأخیر ایجاد شود، در خروجی هم به همان اندازه تأخیر ایجاد می‌شود.

$u(t)\rightarrow \boxed{L} \rightarrow y(t)$

$y(t)=L(u(t))$ $y(t-\tau)=L(u(t-\tau))$

۲) هر عملیات خطی روی ورودی انجام شود، همان عملیات روی خروجی هم انجام می‌شود.

مثلاً $\int y(t)\,dt = L\left(\int u(t)\,dt\right)$

* پاسخ به ضربه‌ی واحد (Unit Impulse Response): $g(t)=L\{\delta(t)\}$

* پاسخ به پله‌ی واحد (Unit Step Response): $s(t)=L\{u(t)\}$

* پاسخ به شیب واحد (Unit Ramp Response): $L\{t\}$

برای شناسایی یک sys در حوزه‌ی زمان، یک سری سیگنال‌های خاص بخش می‌دهیم. همین سه تا بالایی‌ها. اگر رفتار sys رو در مقابل هرکدام از این سیگنال‌ها بفهمیم، تقریباً می‌توانیم کلی در مقابل سیگنال‌های دیگر هم چه رفتاری از خودش نشان می‌دهد.

* می‌گویند یک آزمایش ضربه کافی است. چرا؟ فرض کنیم $g(t)$ را داریم، به کمک همین می‌توانیم پاسخ به سیگنال‌های

دیدیم و هم داشتیم :

$$\begin{array}{lccccc} u(t): & t & \xleftarrow{\int} & u(t) & \xleftarrow{\int} & \delta(t) \\ & \downarrow \mathcal{L} & & \downarrow \mathcal{L} & & \downarrow \mathcal{L} \\ y(t): & \iint g(t) & \longleftarrow & \int g(t) & \longleftarrow & \underbrace{g(t)} \end{array}$$

↳ System ID (in time Domain)

? اگر ورودی کلی $u(t)$ بر سیستم L اعمال گردد ،

$$\otimes \quad y(t) = \int_0^t u(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = u(t) * g(t)$$

در درس ما، زیاد در حوزه‌ی زمان فعالیت نداریم و بیشتر در حوزه‌ی لاپلاس به سر می‌بریم. به همین دلیل کارهای زیر را با $g(t)$ می‌کنیم.

$g(t)$: ID سیستم دینامیکی در حوزه‌ی زمان (پاسخ به ضربه‌ی واحد) ← $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$

$$\otimes \rightarrow \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{u(t) * g(t)\} \xrightarrow[\text{eg. } y(0)=\dot{y}(0)=\dots=0]{\text{با فرض صفر بودن شرایط اولیه}} Y(s) = U(s) \cdot G(s)$$

↕

در هنگام Sys ID می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

* تابع تبدیل sys : Transfer Function

$$\rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{لاپلاس خروجی}}{\text{لاپلاس ورودی}}$$

↳ System ID in Laplace Domain

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

پس تابع تبدیل همان شناسنامه Sys در حوزه لاپلاس است.

* لاپلاس روی یک سیستم SiSo LTi :

($u(t) =$ ورودی ، $y(t) =$ خروجی)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0}$$

1) تابع تبدیل یک سیستم دینامیکی عبارت است از $\dfrac{\text{لاپلاس خروجی}}{\text{لاپلاس ورودی}}$ با فرض شرایط اولیه صفر.

2) بالاترین توان s در مخرج ، برابر است با مرتبه‌ی سیستم که معرف تعداد قطب‌های سیستم نیز هست . ← n

3) بالاترین درجه صورت معرف تعداد صفرهای سیستم است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۴) ریشه‌های مخرج قطب‌های سیستم و ریشه‌های صورت صفرهای سیستم را مشخص می‌کنند.

۵) «صفر مخرج» همان معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم است که مشخصات ذاتی سیستم همچون فرکانس طبیعی در سیستم‌های ارتعاشی را در بر دارد.

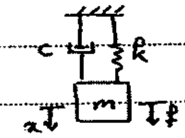
۶) تابع تبدیل هیچ اطلاعاتی از فیزیک مسئله نمی‌دهد (یعنی صرفاً با دیدن تابع تبدیل نمی‌توان تشخیص داد سیستم مکانیکی، الکتریکی، هیدرولیکی و ... است).

۷) اگر سیستم MIMO باشد، به طور مثال دارای p ورودی و q خروجی داشته باشد، در این صورت $p \times q$ تابع تبدیل در فرم ماتریسی خواهیم داشت.

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1q} \\ G_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ G_{p1} & \cdots & & G_{pq} \end{bmatrix}_{p \times q}$$

اگر بتوانیم این ماتریس را قطری کنیم، می‌توانیم سیستم MIMO را به چند تا سیستم SISO تبدیل کنیم.

- مثال:



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

$\downarrow \mathcal{L}$ (با فرض شرایط اولیه صفر)

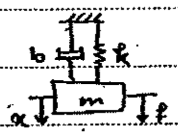
$$(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s) \longrightarrow G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

۸۸/۷/۱۹

* نحوه‌ی نمایش سیستم‌های دینامیکی (روش‌های تقریب دنیای واقعی به دنیای مهندسی)

۱. سیستم واقعی

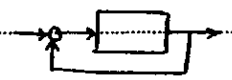
۲. مدل فیزیکی



۳. مدل ریاضی (معادله دیفرانسیل) (حوزه زمان) $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$

۴. تابع تبدیل (حوزه لاپلاس) (حوزه فرکانس) $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$

۵. دیاگرام جعبه‌ای Block Diagram



۶. گراف جریانی سیگنال Signal Flow Graph

* دیاگرام جعبه‌ای Block Diagram

$X(s), U(s), R(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s), C(s)$ $\quad C(s) = G(s).R(s)$

$sX(s) \longrightarrow \boxed{1/s} \longrightarrow X(s)$ $\quad$ عناصر حوزه زمانی $\rightarrow$ $\dot{x} \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow x$

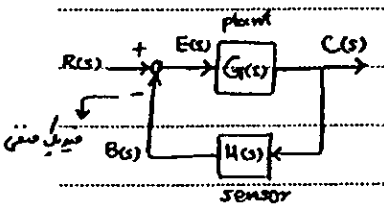
اپراتور انتگرال

$X(s) \longrightarrow \boxed{s} \longrightarrow sX(s)$ $\quad \rightarrow \quad x \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow \dot{x}$

* سیستم حلقه بسته Closed Loop
Feedback System

دیاگرام اصلی این سیستم که جلسات قبل رسم شده، حالا فرض کن کنترلر و محرکه سیستم اصلی را که درست پشت سرهم هستند،

اینجا داخل بلوک G(s) آورده‌ایم و باز اسم آن را plant گذاشته‌ایم.



برای اینکه بفهمیم رابطه C با R چیه، اول چندتا مسیر ساده رو می‌نویسیم.

خروجی = C
ورودی = R
خطا = E
سیگنال فیدبک = B

$R(s) \longrightarrow \boxed{?} \longrightarrow C(s)$

پس‌خور، بازخورد

* مسیر فیدفوروارد (رو به جلو): مسیر مستقیم از ورودی به خروجی فقط شامل $G(s)$
Feed Forward

* مسیر حلقه باز: $G(s).H(s)$

* مسیر حلقه بسته: $E = R - B = R - CH$

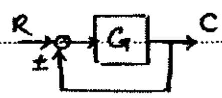
$$C = GE \rightarrow E = \frac{C}{G} \Rightarrow \frac{C}{G} = R - CH \Rightarrow C = RG - CGH \Rightarrow C(1+GH) = RG$$

پس داریم:

تابع تبدیل (فیدبک) حلقه بسته $\boxed{= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G}{1+GH}}$

- اگر B در ترمینال کم شود، Negative Feedback داریم، با تابع تبدیل بالا و اگر در ترمینال جمع شود، Positive Feedback داریم و تابع تبدیل آن هم همان تابع بالاست با یک منفی به جای مثبت $(1-GH)$.

- در اکثر مواقع $H(s) = 1$ است و بنابراین به سیستم زیر می‌رسیم:



Unity Feedback System

تابع تبدیل: $\frac{G}{1 \pm G}$

- معادله مشخصه‌های این سیستم‌ها هم عبارتند از:

معادله مشخصه سیستم کنترلی حلقه بسته: $1 + GH = 0$

Unity sys. معادله مشخصه: $1 + G = 0$

- ذهنیت پیش‌فرض ما Unity (Negative) Feedback Sys. است.

* خطا: در واقع همان اختلاف بین ورودی و خروجی است. $E(s) = R(s) - C(s)$
Error

ولی یک سیگنال خطای تحریک هم داریم :

Actuating Error Signal : $E(s) = R(s) - B(s)$

$$= R(s) - C(s)H(s)$$

پس در الگوهایی که $H(s)=1$ است، این دو با هم برابرند.

$H(s)=1 \rightarrow E'(s) = E(s)$

استاد می‌گوید به دو چیز علاقه‌مندند: رفتار $C(t)$ ($C(s)$) و $e(t)$ ($E(s)$) نسبت به ورودی

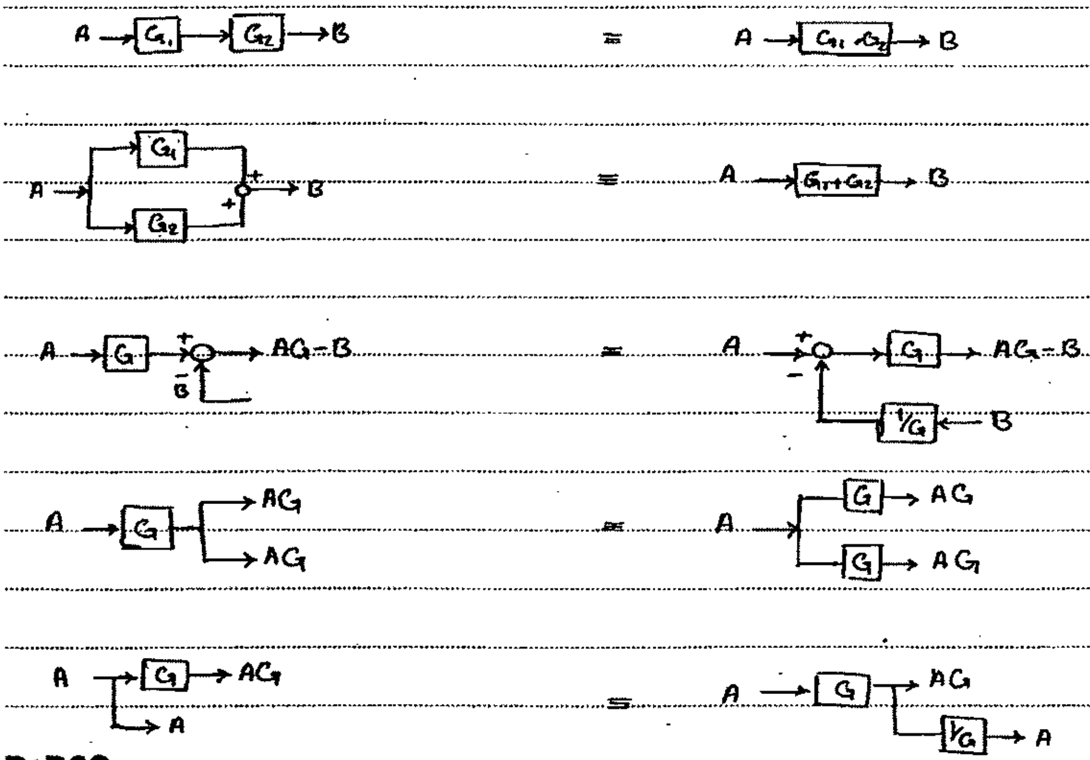
$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+GH} \qquad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G}{1+GH}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

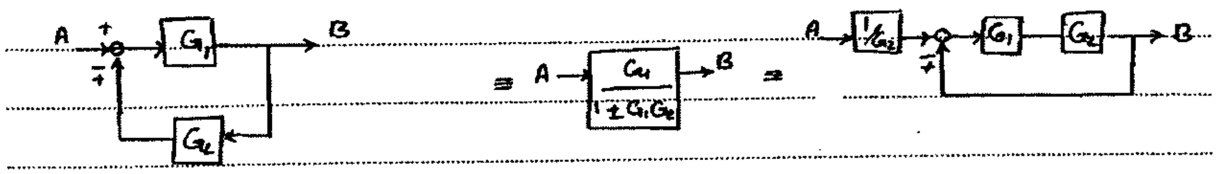
$$E(s) = R(s)\cdot\frac{1}{1+GH} \qquad C(s) = R(s)\cdot\frac{G}{1+GH}$$

قواعد بازی رو که یاد بگیرید، می‌تونید بازی کنید!!

* ساده‌سازی دیاگرام‌های جعبه‌ای :



Subject:
Year. Month. Date. ( )



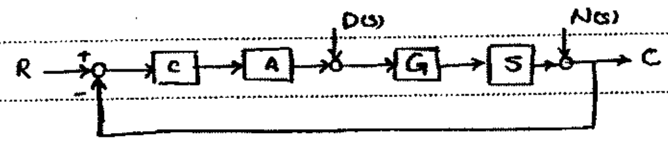
برای چک کردن درستی آخرین رابطه :

$$\frac{1}{G_2}\cdot\frac{G_1G_2}{1\pm G_1G_2}=\frac{G_1}{1\pm G_1G_2}$$

- یک بار دیگر بگوییم سراغ نویز و اغتشاش :

Process Noise = Disturbance → بعد از کنترلر یا محرک می‌نشیند روی سیگنال اصلی

Measurement " = Noise



اغلب اوقات ... S/N ratio ↝

- نویز سفید White Noise ← توزیع گوسی و میانگین صفر

انتظار می‌رود کنترلرهای ما ضمن این‌که این نویز را تحمل کنند و هم‌چنان رفتار سیستم پایدار بماند.

- تابع random در MATLAB توزیع نرمال دارد.

>> rand(...)

- پس اگر خواستید سر امتحان [struck] سؤال‌های مرتبط با پایداری را جواب بدهید باید یک نویز استاندارد را یک بار به عنوان D(s) و یک بار به عنوان N(s) بگذارید و با ورودی‌های مختلف (پله، ضربه، شیب) تست کنید و همین‌طور uncertainty هم مستقیم (robust بودن) آن را برهم بزنید (پارامترهای سیستم)

Robust Control : $(m+\Delta m)\ddot{x}+(b+\Delta b)\dot{x}+(k+\Delta k)x=f(t) \rightsquigarrow G(s)+\Delta G$

می‌گیم Δهای پارامترهای سیستم را به گونه‌ای تعیین می‌کند که سیستم با کنترلر $G+\Delta G$ پایدار بماند.

PAPCO

۸۸,۷,۲۱

جلسه قبل رسیدیم به اینکه برای چک کردن پایداری ، رفتار سیستم در برابر اغتشاش و نویز و همینطور robustness سیستم باید بررسی شود.

* مزایای سیستم کنترل حلقه بسته

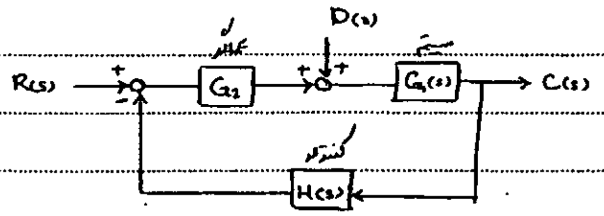
۱) حذف اثر اغتشاش

2) حذف اثر نویز

3) بهبود پایداری سیستم

4) کاهش خطای ماندگار سیستم

* کاهش (حذف) اثرات Disturbance



چون سیستم خطی است ، پس سوپرپوزیشن برقرار است

$D(s)=0 : C_R(s) = \frac{G_1 G_2}{1+HG_1G_2} R(s)$

$R(s)=0 : C_D(s) = \frac{G_1}{1+HG_1G_2} D(s)$

$\longrightarrow \underline{\underline{C(s) = C_D(s) + C_R(s) = \frac{G_1}{1+HG_1G_2} D(s) + \frac{G_1G_2}{1+HG_1G_2} R(s)}}$

پس با این حساب ، طراح H به گونه‌ای باید باشد که : $|HG_1G_2| \gg 1$ و همینطور $|HG_2| \gg 1$.

پس می‌رسیم به : $C(s) \cong \frac{1}{H(s)} R(s) + 0 = \frac{1}{H(s)} R(s)$

ممکن است تابع H(s) که در اینجا بدست می‌آوریم ، پیاده‌سازی آن عملاً غیرممکن باشد.

- برای کاهش (حذف) اثرات نویز هم کار مشابهی می‌توان انجام داد.

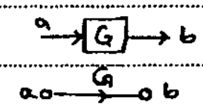
Subject:
Year. Month. Date. ( )

* انواع (دیاگرام) جریانی سیگنال Signal Flow Graph

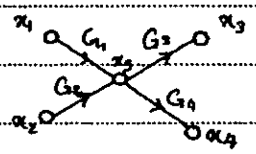
- استانداردها :

o : سیگنال

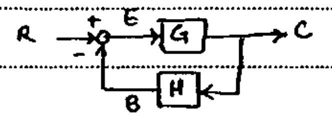
→ : تابع تبدیل



$b = aG$



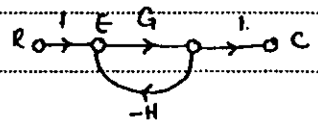
$= \quad x_5 = x_1G_1 + x_2G_2 \quad ; \quad x_3 = x_5G_3$



اینجا دیگر ترمینال نداریم. علامت ها در خود تابع تبدیل ظاهر می شوند.

اگر روی فلش چیزی ننویسیم، به طور پیش فرض تابع تبدیل 1 است.

$= \frac{G}{1+GH}$



- بهره (Gain) مسیر رو به جلو (Feed Forward) : P

همان تابع تبدیل مسیر است (در دیاگرام بالا همان G است)

- حلقه (loop) : مسیری که از یک گره شروع می شود و به همان گره (node) می رسد بدون اینکه دوبار از همان
حلقه بگذرد.

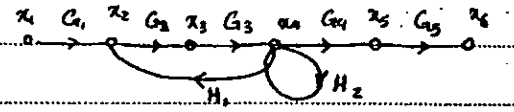
منظور «هیچ گره ای» بوده!

- بهره (Gain) حلقه : L

(در دیاگرام بالا همان $-GH$ است)

- مقدار هر node همان جمع جبری «ورودی» ها به آن node است.

● مثال:



$P = G_1G_2G_3G_4G_5$

$L_1 = G_2G_3H_1$

$L_2 = H_2$

* وقتی از سیستم تابع تبدیل داشته باشیم و در حوزه‌ی لاپلاس باشیم، از دیاگرام جعبه‌ای و اگر حالت‌های سیستم را داشته باشیم (State Space) از دیاگرام جریانی استفاده می‌کنیم.

* فرمول میسون (Mason):

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta}\sum P_k \Delta_k$$

$$\boxed{\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \cdots}$$

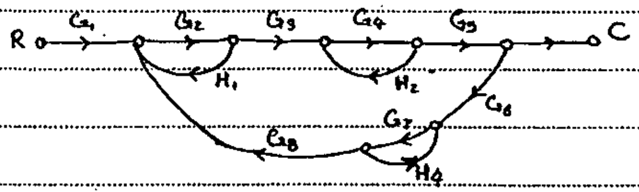
k: تعداد مسیرهای رو به جلو

- حلقه‌های بدون تماس در هیچ گره یا شاخه‌ای مشترک نیستند.

P_k: بهره‌ی هر یک از مسیرهای رو به جلو

Δ_k: دترمینان جزئی که از حذف مسیر kام بدست می‌آید

● مثال:



$k = 1$, $P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5$

$L_1 = G_2H_1$, $L_2 = G_4H_2$, $L_3 = G_7H_4$; $L_4 = G_2G_3G_4G_5G_6G_7G_8$

حلقه‌های بدون تماس: L_1, L_2, L_3

$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1L_2 + L_2L_3 + L_1L_3) - (L_1L_2L_3)$

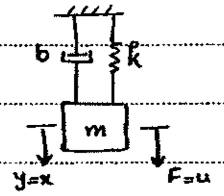
$\Delta_1 = 1 - (L_3) \rightarrow G(s) = \frac{1}{\Delta}(P_1\Delta_1)$

Subject:

Year.　Month.　Date.　(　)

اگر حلقه‌ی لمس نشده نبود، Δ_1 برابر یک بود. می‌گویند در اکثر مواقع Δ_k ها برابر یک هستند.

● مثال) سیستم روبرو را با a) دیاگرام جعبه‌ای b) گراف جریانی نشان دهید.



nodes : $x, \dot{x}, \ddot{x}$ ⟷ سیگنال‌ها : X, sX, s^2X

بلوک‌ها : $\boxed{1/m}$, $\boxed{b/m}$, $\boxed{k/m}$

۸۸/۷/۲۶

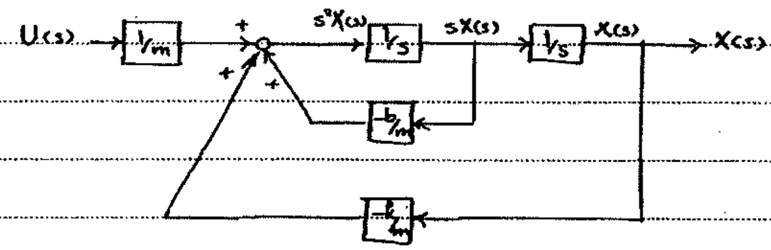
پاسخ مثال:

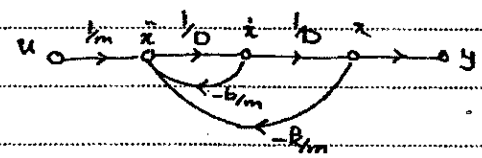
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u(t)$$

با فرض شرایط اولیه صفر $\downarrow \mathcal{L}$

$$ms^2X(s) + csX(s) + kX(s) = U(s) \longrightarrow s^2X(s) + \frac{b}{m}sX(s) + \frac{k}{m}X(s) = \frac{U(s)}{m}$$

$$s^2X(s) = \frac{U(s)}{m} - \frac{b}{m}sX(s) - \frac{k}{m}X(s)$$





قاعده‌ی میسون برای این مثال:

$k=1$　　$P = \frac{1}{ms^2}$　　$\Delta_1 = 1$

$L_1 = -\frac{b}{ms}$　　$L_2 = \frac{-k}{ms^2}$

حلقه‌های بدون تماس $= 0$

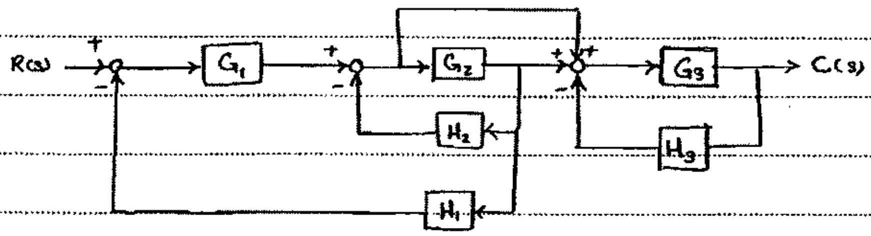
$$\Delta = 1 - \left(\frac{-b}{ms} - \frac{k}{ms^2}\right)$$

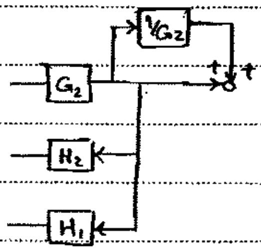
فرمول میسون : $G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{\Delta}\sum P_k\Delta_k = \frac{1}{\frac{ms^2+bs+k}{ms^2}}\left(\frac{1}{ms^2}\right) = \frac{1}{ms^2+bs+k}$

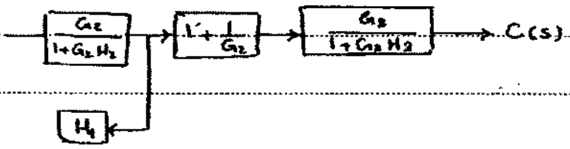
PAPCO

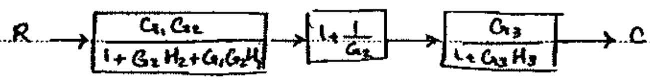
Subject: کنترل - یوسفی کیا
Year. Month. Date. ( )

● مثال: تابع تبدیل کل سیستم را بدست آورید









مرحله میسون: ① $k=2$
$$\begin{cases} P_1 = G_1G_2G_3 , & \Delta_1 = 1 \\ P_2 = G_1G_3 , & \Delta_2 = 1 \end{cases}$$

② $L_1 = -G_2H_2 \;,\; L_2 = -G_3H_3 \;,\; L_3 = -G_1G_2H_1$

حلقه‌های بدون تماس $(L_2 , L_1)\ (L_2 , L_3)$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + (L_1L_2 + L_2L_3)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta}\sum P_k\Delta_k = \left(\frac{G_1G_2G_3 + G_1G_3}{1 + G_2H_2 + G_3H_3 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2H_3 + G_1G_2G_3H_1H_3}\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* معادلات فضای حالت:

(نمایش سیستم های دینامیکی در فضای حالت)

لاپلاس معادله‌ی دیفرانسیل را تبدیل به معادله‌ی جبری می‌کند. فضای حالت معادله‌ی دیفرانسیل رسته‌ی n را تبدیل به n معادله‌ی دیفرانسیل رسته‌ی 1 می‌کند.

- حالت: حداقل اطلاعاتی از سیستم که با داشتن آنها و ورودی سیستم برای $t \geq 0$ بتوان پاسخ یا خروجی را به صورت یکتا تعیین کرد. متغیرهای حالت را معمولاً با x نشان می‌دهند.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_m, t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_m, t)$$

① متغیرهای حالت یکتا نیستند.

② ترکیب متغیرهای حالت، خود می‌تواند یک متغیر حالت دیگر باشد! و به همین دلیل متغیرهای حالت الزاماً متغیرهای فیزیکی نیستند.

- سیستم SISO (حالت خاص):

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = u(t)$$

مشتقات u صفر باشد.

برای تبدیل معادله رسته n به معادله‌های رسته 1، ما از فرم کانونیکال کنترل‌پذیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \cdots - a_0 x_1 + u(t) \end{cases}$$

دستگاه بالا را به فرم ماتریسی هم می‌توان درآورد.

ماتریس دینامیکی

$$\dot{X}_{n\times1} = A_{n\times n} X_{n\times1} + B_{n\times1} u_{1\times1}$$

که در اینجا می شود:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

خروجی را هم می توان برحسب همین حالت ها بیان کرد:

$$Y_{1\times1} = C_{1\times n} X_{n\times1} + D_{1\times1} u_{1\times1}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + 0u$$

معادلات فضای حالت
$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX + Du \end{cases}$$

برای بدست آوردن تابع تبدیل از معادلات فضای حالت لاپلاس می گیریم:

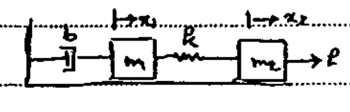
$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B + D$$

$$\det(sI-A)^{-1} = 0$$ معادله مشخصه سیستم

پس قطب ها (همان صفرهای معادله مشخصه) مقادیر ویژه ی ماتریس A هستند (که در این تساوی‌ها جزو نوشتن جابجا شوند)

● مثال:

در سیستم مکانیکی روبه رو با فرض اینکه موقعیت ها و سرعت ها متغیرهای حالت می باشند معادلات فضای حالت سیستم را بدست آورید.



$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = k(x_2-x_1) - b\dot{x}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 = k(x_1-x_2) + f \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

متغیرهای حالت : x_1 , $\dot{x}_1\,(V_1)$, x_2 , $\dot{x}_2\,(V_2)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{V}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{V}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -k/m_1 & -b/m_1 & k/m_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ k/m_2 & 0 & -k/m_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ V_1\\ x_2\\ V_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{m_2}\end{bmatrix}f$$

۸۸,۷,۲۸

مثال:

$$\begin{cases}\ddot{x}+\dot{x}+2x=u\\ y=3\dot{x}+4x\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\ddot{x}=-\dot{x}-2x+u\\ y=3\dot{x}+4x\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}s^2X(s)+sX(s)+2X(s)=U(s)\\ Y(s)=3sX(s)+4X(s)\end{cases}$$

$$\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^2+s+2}\quad,\quad\frac{Y(s)}{X(s)}=3s+4$$

متغیر حالت می‌تواند متفاوت از خروجی باشد

$$U(s)\longrightarrow\boxed{\frac{1}{s^2+s+2}}\xrightarrow{X(s)}\boxed{3s+4}\longrightarrow Y(s)\quad\Longrightarrow\quad U(s)\longrightarrow\boxed{\frac{3s+4}{s^2+s+2}}\longrightarrow Y(s)$$

حال نمایش فضای حالت:

$$\begin{aligned}x_1&=x\\ x_2&=\dot{x}\end{aligned}\longrightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_2-2x_1+u\end{cases}$$

$$y=3x_2+4x_1$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\quad,\quad y=\begin{bmatrix}4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$(sI-A)=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+1\end{bmatrix}\longrightarrow(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s(s+1)+2}\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow G(s)=\begin{bmatrix}4 & 3\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s^2+s+2}\underbrace{\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1\\ s\end{bmatrix}}=\frac{4+3s}{s^2+s+2}\ \checkmark$$

$\dot{x} = ax \longrightarrow x(t) = x_0 e^{at}$; $e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!}$

⊛ $\dot{X} = AX \longrightarrow X(t) = e^{At} X(0)$; $e^{At} = \sum \frac{A^k t^k}{k!}$

$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$; $e^{(0)} = I$; $AB = BA \Rightarrow e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t}$

$\frac{d(e^{At})}{dt} = Ae^{At}$; $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} \rightsquigarrow$ اثبات به کمک لاپلاس گرفتن از ⊛

$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX + Du \end{cases} \rightsquigarrow$ حل عمومی : $\dot{X} = AX \longrightarrow X(t) = e^{At} X(0)$ ⊛

* $\det(sI-A) = 0$: معادله مشخصه $\longleftarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

- اگر λ ها غیرتکراری باشند :

$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \rightsquigarrow$ در حالت خاص

- اگر λ های تکراری داشته باشیم ، آنگاه ترم های $te^{\lambda t}$ ، $t^2e^{\lambda t}$ در جواب ها (المان های ماتریس) ظاهر می شوند .

- جواب معادله دیفرانسیل ⊛ در حالت کلی اگر λ ها تکراری نباشند :

$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + a_n e^{\lambda_n t}$

● سؤال : اگر بخواهیم پاسخ سیستم فقط شامل یکی از مودهای دینامیکی باشد چه باید بکنیم ؟

داریم حل عمومی رو درنظر می گیریم . پس شرایط اولیه ما اگر منطبق بر شکل مود موردنظر باشد ، مسئله حل می شود .

⊛ - ماتریس e^{At} ، ماتریس انتقال حالت (State Transition Matrix) می گویند .

اگر A قطری باشد ، e^{At} هم قطری خواهد بود .

Subject:
Year. Month. Date. ( )

● مثال: اگر $\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X$ که $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ باشد، $\Phi(t) = e^{At}$ را پیدا کنید.

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} \longrightarrow (sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2+2s+1} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \rightsquigarrow e^{-t}, te^{-t}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} e^{-t}+te^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t}-te^{-t} \end{bmatrix}$$

حل کلی یعنی پاسخ به شرایط اولیه، یعنی حالت پاسخ به ضربه!

حالا حل ناهمگن:

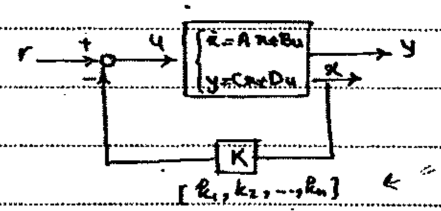
$$\dot{X} = AX + BU \longrightarrow X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} BU(\tau)\, d\tau$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$X(s) = \mathcal{L}\{e^{At}\}X(0) + \mathcal{L}\{e^{At}\}BU(s)$$

کنترل کننده

* طراحی کنترلر در فضای حالت:



k هم به صورت برداری است

y یا خروجی همان اندازه‌گیری است ولی ما چون برای x، $\dot{x}$ هم داریم، کار با حالت‌ها برامون راحت‌تره و ترجیح می‌دیم به جای فیدبک کردن خروجی به سیستم، حالت را اندازه بگیریم و به کنترلر بدهیم. چون دست آخر هم می‌توانیم خروجی را هم به صورت ترکیب همین حالت‌ها (که اندازه گرفتیم) بنویسیم.

$$u = r - KX \longrightarrow \begin{cases}\dot X = \overbrace{(A-BK)}^{A_c}X + Br \\ Y = \underbrace{(C-DK)}_{C_c}X + Dr\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\dot X = A_cX + Br \\ Y = C_cX + Dr\end{cases}$$

طراحی کنترلر در فضای حالت، به ما امکان کار با ماتریس‌های دینامیکی را می‌دهد.

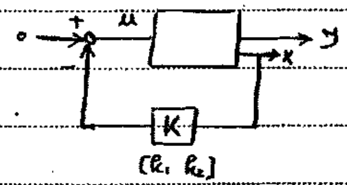
- گفتیم اگر قطب‌های سیستم در سمت چپ محور موهومی باشند سیستم پایدار است چرا که این قطب‌ها در نمای پاسخ‌های exponential سیستم ظاهر می‌شوند و "منفی" موجود در بخش حقیقی آنها، پاسخ‌های (error‌های) میرا شونده می‌دهد.

- روش Pole Placement

A_c = ماتریس دینامیکی سیستم کنترلی حلقه‌بسته ← $A-BK$

پس می‌توانیم با K طوری بازی کنیم که قطب‌های سیستم کنترلی حلقه‌بسته‌ی ما در سمت چپ محور موهومی بیفتند. ولی برای طراحی K محدودیت‌هایی از قبیل عدم وجود actuator مناسب وجود دارد.

● مثال: برای سیستم دینامیکی زیر کنترلر K را به گونه‌ای طراحی کنید که قطب‌های سیستم حلقه‌بسته در 3- و 4- قرار گیرند. (سیستم کنترلی رگولاتور ← ورودی (مرجع) برابر صفر)



$u = -KX$

$$\dot X = \begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}X + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \longrightarrow |sI-A| = s^2-2s+1 = (s-1)^2$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \rightarrow$ یک سیستم ناپایدار

$$A_c = A - BK = \begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ -2-k_1 & -1-k_2\end{bmatrix} \rightarrow sI - A_c = \begin{bmatrix}s-3 & -2\\ 2+k_1 & s+1+k_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |sI-A_c| = s^2 + s(-2+k_2) + (1+2k_1-3k_2) = \underbrace{(s+3)(s+4)}_{\text{قطب‌های سیستم}} \rightarrow k_1 = 19,\ k_2 = 9$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یکی از روش‌های طراحی کنترلر در فضای حالت است. قرار دادن کنترل‌کننده در مسیر pole placement

رو به جلو و کارهای از این قبیل نیز از روش‌های دیگر هستند.

۸۸،۸،۳

* مشاهده پذیری (Observability): اگر سنسور مناسب برای اندازه‌گیری خروجی نداشته باشی که از وضعیت

سیستم خبردار بشی، سیستم مشاهده‌پذیر نیست.

* کنترل پذیری (Controlability): اگر محرک (actuator) مناسب برای اعمال دستورات کنترلر نداشته

باشی، سیستم کنترل‌پذیر نیست.

اگر سیستم، طراحی اش به گونه‌ای باشد که بذات مشاهده‌ناپذیر یا کنترل‌ناپذیر باشد، با طراحی کنترلر هم نمی‌توانی

مشکل را حل کنی (و کنترلش کنی تا ناپایدار نشود).

- ماتریس کنترل‌پذیری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_c = [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{n-1}B]$$

اگر $\det(M_c) \neq 0$ باشد، سیستم کنترل‌پذیر است. (اثبات در فصل ۱۵ یا ۱۶ اگاتا)

* مثال:

$$\dot{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u \rightarrow |M_c| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{کنترل‌پذیر}$$

- یادآوری: اگر ماتریس حداقل دو سطر یا ستون وابسته داشته باشد، دترمینان آن صفر است.

* مثال:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \rightarrow |M_c| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{کنترل‌ناپذیر}$$

- ماتریس مشاهده‌پذیری را نیز به همین صورت تعریف می‌شود:

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

PAPCO

اگر $\det(M_o) \neq 0$ باشد، سیستم مشاهده‌پذیر است.

* سیستم سره $m = n$: proper

اگر درجه‌ی صورت و مخرج $G(s)$ برابر باشد با یک سیستم سره طرف هستیم.

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

* سیستم اکیداً سره $b_n = 0$: Strictly Proper

هنگامی که ضریب s^n در صورت ($b_n = 0$) برابر صفر باشد در این سیستم سره!

$$G(s) = \frac{b_n s^n + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

معمولاً سیستم‌های واقعی که ما با آنها سروکار داریم، اکیداً سره هستند.

$G(s) = C(SI-A)^{-1}B + D$; سیستم اکیداً سره $\rightarrow$ $b_n = D = 0$

* فرم کانونیک کنترل‌پذیری :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$C = [b_0 - a_0 b_n \,;\, b_1 - a_1 b_n \,;\, \cdots \,;\, b_{n-1} - a_{n-1} b_n]$

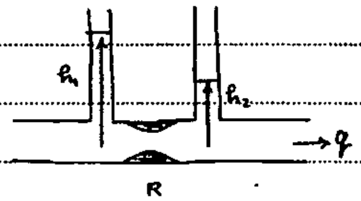
($b_n = 0$) اکیداً سره : $C = [b_0 \;\; b_1 \; \cdots \; b_{n-1}]$

اگر مشتقات u در خروجی ظاهر نشود : $C = [b_0 \;\; 0 \; \cdots \; 0]$

فصل دوم: مدل سازی و معادل سازی سیستم های دینامیکی

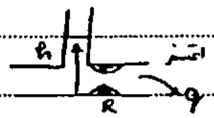
* الف) سیستم های دسته ۱:

۱) سیستم های هیدرولیکی:

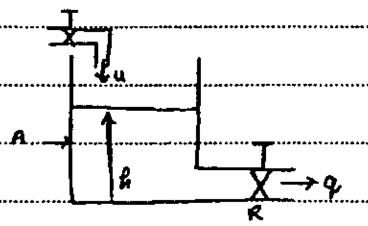


R: مقاومت هیدرولیکی: باعث کاهش هد می شود. (مسوب یا شیر)

$$\frac{m^3}{s} \quad q = \frac{h_1 - h_2}{R} \; m \Rightarrow [R] = \frac{s}{m^2}$$



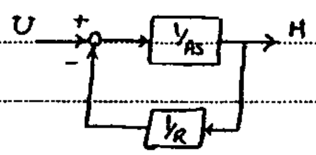
$$\to q = \frac{h}{R} \quad [\text{مشابه}: V = RI]$$



$$\begin{cases} q = \dfrac{h}{R} \\ A\dfrac{dh}{dt} = -q + u \end{cases}$$

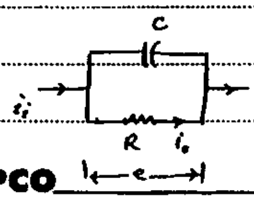
h: هد هیدرولیکی (فشار استاتیکی و ارتفاع)

$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+RAs}, \quad \frac{H(s)}{U(s)} = \frac{1}{As + \frac{1}{R}} = \frac{R}{1+RAs} \quad \underbrace{1+RAs = 0}_{s = -\frac{1}{RA}}$$



مخزن دارای دینامیک است و طول می کشد تا هد فرمان ها را عملی کند. A (سطح مقطع مخزن) که همان دینامیک سیستم است در مخرج ظاهر شده است.

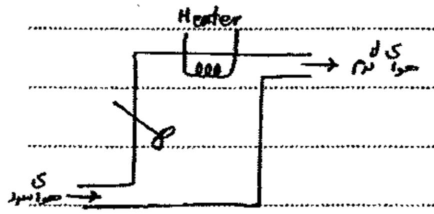
۲) سیستم های الکتریکی:



$$\begin{cases} i_o = e/R \\ C\dfrac{de}{dt} = i_i - i_o \end{cases}$$

$e \equiv h_o$, $i_i \equiv u$, $C \equiv A$ map $G(s) = \dfrac{E(s)}{I_o(s)} = \dfrac{R}{1+RCs}$ $\longrightarrow$ RC سیستم‌های مرتبه یک

3) سیستم حرارتی:



$\theta \equiv$ دمای سیال خروجی (°C) $\to h$

$C \equiv$ ظرفیت حرارتی سیال (kcal/°C) $\to A$

$R \equiv$ مقاومت حرارتی سر راه خروجی (°C s/kcal) $\to R$

$h_i \equiv$ نرخ حرارت ورودی (kcal/s) $\to q$

$h_o \equiv$ " " خروجی (")

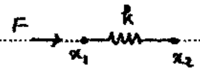
$$\begin{cases} h_o = \dfrac{\theta}{R} \\ C\dot{\theta} = h_i - h_o \end{cases}$$

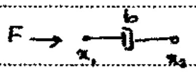
$$\longrightarrow G(s) = \frac{\Theta(s)}{H_i(s)} = \frac{R}{1+RCs}$$

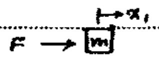
ب) سیستم‌های مرتبه دو:

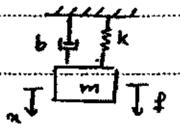
۱) سیستم مکانیکی:

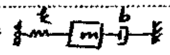
سیستم چرخشی

 $F = k(x_1 - x_2)$ $\quad M = k_t(\theta_1 - \theta_2)$

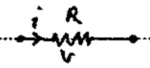
 $F = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ $\quad M = k_t(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$

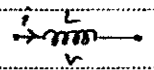
 $F = m\ddot{x}_1$ $\quad M = J\ddot{\theta}$

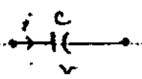


$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \longrightarrow G(s) = \dfrac{X(s)}{F(s)} = \dfrac{1}{ms^2+bs+k} \equiv$ 

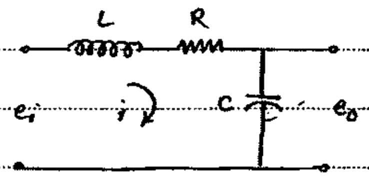
2) سیستم الکتریکی:

 $v = Ri$

 $v = L\dfrac{di}{dt}$

 $i = C\dfrac{dv}{dt}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$e_i = L\dfrac{di}{dt} + Ri + e_o \quad ; \quad i = C\dfrac{de_o}{dt} = C\dot{e}_o$

شارژ الکتریکی خازن $q = Ce_o$

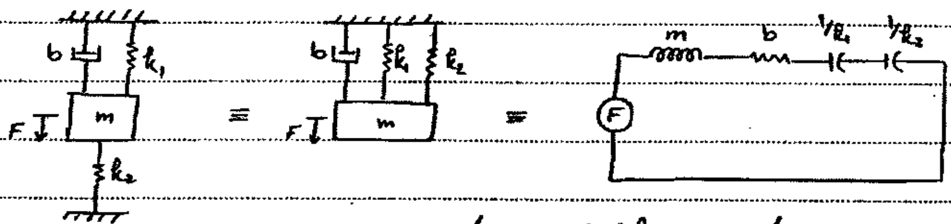
$G(s) = \dfrac{E_o(s)}{E_i(s)} = \dfrac{1}{CLs^2 + CRs + 1} \rightsquigarrow \boxed{G_1(s) = \dfrac{Q(s)}{E_i(s)} = \dfrac{1}{Ls^2 + Rs + 1/C}}$

* معادل‌سازی سیستم‌های دینامیکی :

۱) نیرو ـ ولتاژ : (!) به سری بودن مدار الکتریکی توجه کن (!)

المان‌های الکتریکی	المان‌های مکانیکی
L	M
R	b
$1/C$	k
e	f
q	x
i	$v = \dot{x}$

* مثال :



فرقی میان شارژ دو خازن است که در اینجا شارژ هر دو خازن یکی است

۸۸/۸/۵

در روش نیرو ـ ولتاژ ! اتصالات سری مکانیکی معادل اتصالات موازی الکتریکی و بالعکس خواهد بود.

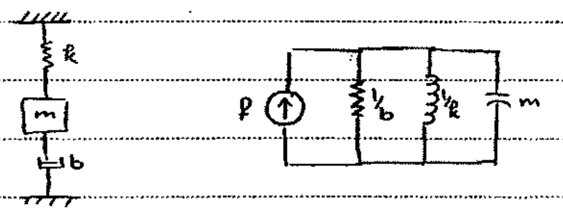
PAPCO

ب) نیرو - جریان:

الکتریکی	مکانیکی
C	m
$1/R$	b
$1/L$	k
φ شار الکتریکی	x
v	$\dot{x}$
i	f

در این روش می‌توان نشان داد، اتصالات سری مکانیکی معادل اتصالات سری الکتریکی و بالعکس خواهد بود.

● مثال:



* معادل سازی هیدرولیکی - الکتریکی:

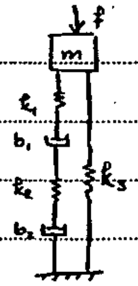
الکتریکی	هیدرولیکی
i	q
R	R
C	A
v	h

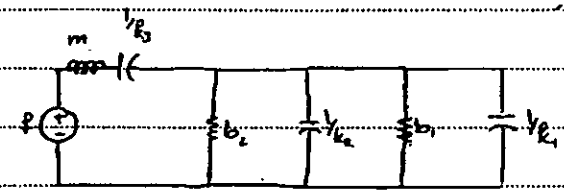
* معادل سازی حرارتی - الکتریکی: (نرخ انتقال گرما - جریان)

الکتریکی	حرارتی
i	h
R	R
C	C_T
v	θ

Subject.
Year. Month. Date. ( )

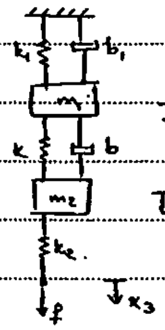
● مثال: معادل‌سازی نیرو-ولتاژ

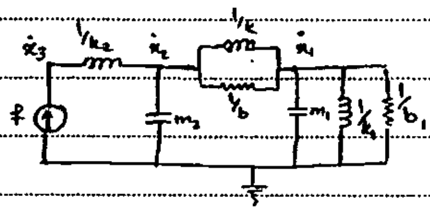




● مثال: معادل‌سازی نیرو-جریان

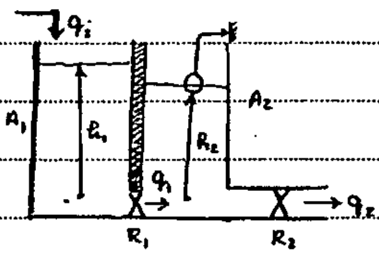
جالب





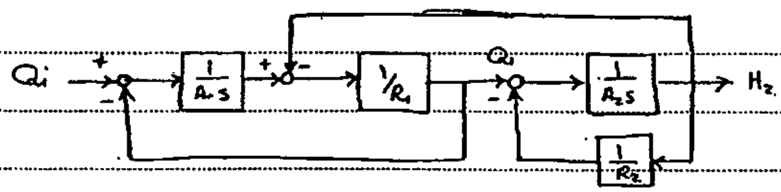
● مثال: h_2 = خروجی

q_i = ورودی



$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1 = q_i - q_1 \\ q_1 = (h_1 - h_2)/R_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 \dot{h}_2 = q_1 - q_2 \\ q_2 = h_2/R_2 \end{cases}$$



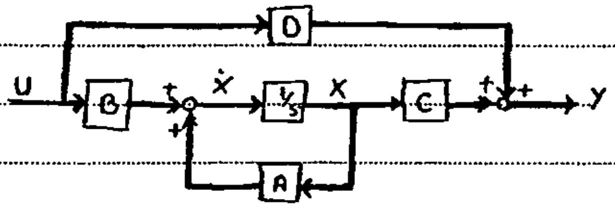
* نمایش معادلات فضای حالت به شکل دیاگرام جعبه‌ای :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

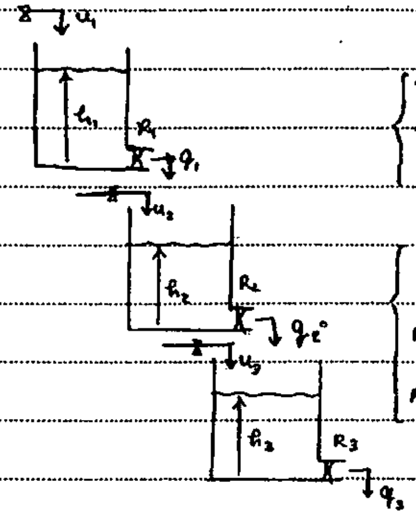
PAPCO

Subject: کنترل - یوسفی‌ها
Year. Month. Date. ( )



خط‌های سیگنال‌های ماتریسی کلفت‌اند!

● مثال: فضای حالت برای سیستم هیدرولیکی

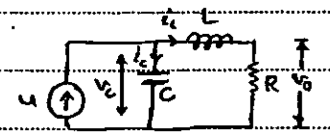


$$\begin{cases} x_1 = h_1 \\ x_2 = h_2 \\ x_3 = h_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = q_1 \\ y_2 = q_2 \\ y_3 = q_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1 = u_1 - q_1 \quad ; q_1 = h_1/R_1 \\ A_2 \dot{h}_2 = u_2 + q_1 - q_2 \quad ; q_2 = h_2/R_2 \\ A_3 \dot{h}_3 = u_3 + q_2 - q_3 \quad ; q_3 = h_3/R_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1A_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1A_2} & \frac{-1}{R_2A_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2A_3} & \frac{-1}{R_3A_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0$$

● مثال: معادلات حالت سیستم روبرو؟



$$\begin{cases} x_1 = v_C \\ x_2 = i_L \end{cases}$$

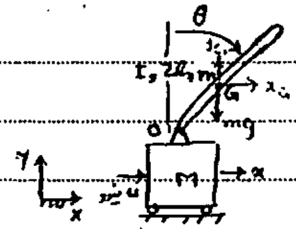
$$\begin{cases} y = v_0 \\ u = u \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_C = u - i_L = C\dfrac{dv_C}{dt} \quad (I) \\ v_C = L\dfrac{di_L}{dt} + R i_L \quad (II) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +1/C \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = v_0 = R i_L = R x_2 \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0$$

$$(I),(II),\ \mathcal{L}\{\ \} \rightarrow G(s) = \frac{V_0(s)}{U(s)} = \frac{R/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \qquad \text{یا}\ G(s) = C(sI-A)^{-1}B + \cancel{D}^{\,0}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



● مثال: معادلات فضای حالت برای معادله مرتبه ۲

اول با I حل کنید، در آخر از $I=\frac{1}{12}ml^2$ در برابر ml^2 صرف‌نظر کنید

در نقطه‌ی O نیروهای عکس‌العمل را بگیرید و سیستم را جدا کنید.

$$\begin{cases} x_G = x + l\sin\theta \\ y_G = l\cos\theta \end{cases}$$

با فرض نوسانات کوچک پیش بروید $\theta \ll 1$

$$\begin{cases} y_1 = \theta \\ y_2 = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \\ x_3 = x \\ x_4 = \dot{x} \end{cases}$$

دو درجه آزادی (دو تا مرتبه ۲) داریم، برای هرکدام دو متغیر حالت

جواب:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

میان‌ترم سه‌شنبه ۱۷ آذر

Subject: کنترل - پوسفزی

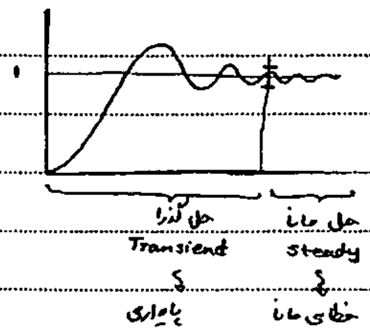
Year. Month. Date. ( )

فصل سوم: تحلیل حوزه زمانی ...

فرض می کنیم مدل سیستم را داریم ← $G(s)$ ← می رویم در حوزه زمان تحلیل می کنیم.

داده های آزمایشگاهی → پاسخ حوزه زمان → Sys. ID. ($G(s)$)

شناسایی سیستم در حوزه زمان

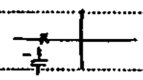


پایداری سیستم خودش را در حل گذرا نشان می دهد.

۱) سیستم های مرتبه اول (RC)

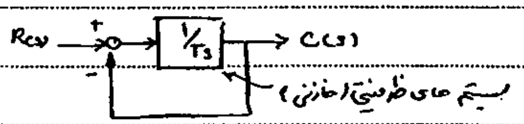
$G(s) = \frac{1}{1+Ts}$; $T = RC$ = ثابت زمانی

$s = -\frac{1}{T}$ قطب



$R(s) \rightarrow \boxed{\frac{1}{1+Ts}} \rightarrow C(s)$

اگر قطب حلقه باز روی مبدا باشد ← خازن ساده



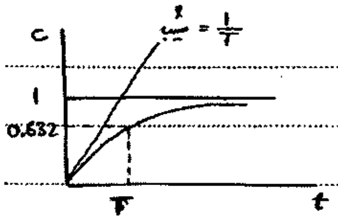
$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$

۱-۱) پاسخ به پله واحد

$R(s) = \frac{1}{s}$, $r(t) = u(t)$

$C(s) = \frac{1}{1+Ts} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{T}{1+Ts} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t) = (1 - e^{-t/T})u(t)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$C(0) = 0$, $C(\infty) = 1$, $C(T) = 1 - e^{-1} = 0.632 = 63.2\%$

$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{T} e^{-t/T}$, $\frac{dC}{dt}(0) = \frac{1}{T}$

شناسایی سیستم رتبه ۱ معادل است با یافتن T. اگر پاسخ یک سیستم به پله واحد مانند نمودار بالا بود می توان تصمیم بگیری که سیستم از یک RC رتبه ۱ است.

- برای یافتن T : ۱) می توانی از روی نمودار، زمان متناظر با پاسخ 0.632 (معیار 63.2%) را پیدا کنی.

۲) به کمک $\frac{dC}{dt}(0)$ مقدار $\frac{1}{T}$ و بنابراین T را بیابی. اگر ورودی پله نبودهم:

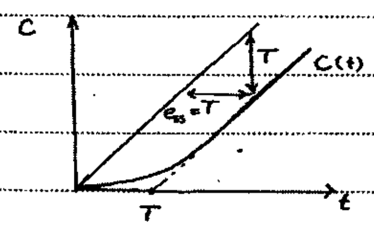
$\frac{C(\infty)}{\dot{C}(0)} \overset{Ke=1}{\underset{پله}{=}} \frac{1}{\frac{1}{T}} = T$

T به نحوی کند یا تند بودن پاسخ سیستم را نشان می دهد و به خاطر همین ثابت زمانی نامیده می شود.

۱-۲) پاسخ به شیب واحد

$r(t) = t \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$

$C(s) = \frac{1}{1+Ts} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{1+Ts} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C(t) = (t - T + Te^{-t/T})\, u(t)$.



خطای ماندگار به پله واحد $e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = r(\infty) - C(\infty) = 0$

خطای ماندگار ← شیب واحد $C(0) = 0$ $C(\infty) = \infty$ $e_{ss} = T$

به بی نهایت رفتن پاسخ سیستم الزاماً بیانگر ناپایدار بودن آن نیست. مثل اینجا!

شناسایی: محل تقاطع مجانب با محور افقی

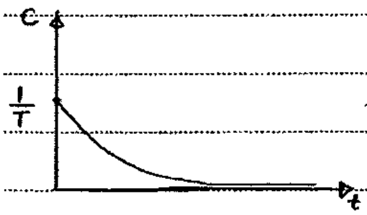
$\frac{dC}{dt} = 1 - e^{-t/T}$ پاسخ به پله واحد

همانطور که از قبل پیش بینی شد، پاسخ به پله، مشتق پاسخ به شیب است زیرا پله، خود، مشتق شیب است

PAPCO

۳-۱) پاسخ ضربه واحد: $r(t) = \delta(t)$, $R(s) = 1$

$$C(s) = \frac{1}{1+Ts} \cdot 1 \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$$

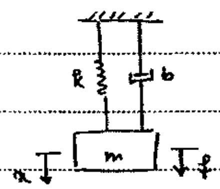


$c(0) = \frac{1}{T}$, $c(\infty) = 0$

$e_{ss} = 0$

شناسایی: $c(0) \rightarrow \frac{1}{T}$

۲) سیستم‌های رسته ۲



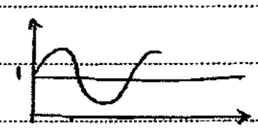
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+bs+k} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{X(s)}{F(s)/k} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

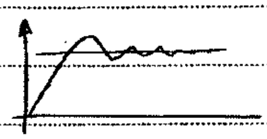
$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2}$$

- تقسیم بندی رفتاری سیستم‌های رسته ۲ برحسب ζ :

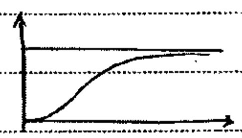
$\zeta = 0$: بدون میرایی، کاملاً نوسانی undamped



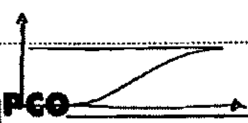
$0 < \zeta < 1$: زیر میرایی، نوسانی میرا شونده underdamped



$\zeta = 1$: میرایی بحرانی، بدون نوسان critical damped



$\zeta > 1$: فوق میرا، بدون نوسان over damped



Real Time Workshop & Xpc target → MATLAB ToolBox

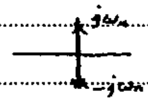
ما دوست داریم پاسخ سیستم حاصل در حالت زیر میرایی باشد.

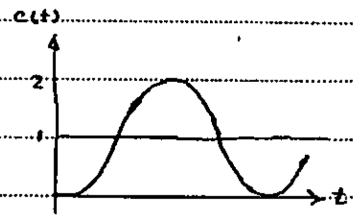
۸۸ ,۸ ,۱۲

* پاسخ سیستم‌های رسته ۲ به ورودی پله واحد:

$r(t) = u \qquad R(s) = \frac{1}{s}$

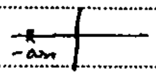
① $\zeta = 0 \qquad s^2 + \omega_n^2 = 0 \rightarrow s_{1,2} = \pm j\omega_n$



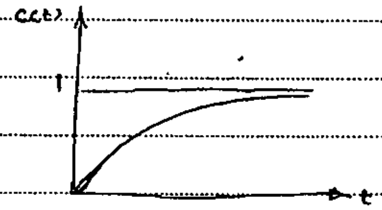


$c(t) = (1 - \cos\omega_n t)\,u(t)$

② $\zeta = 1 \qquad s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \rightarrow (s+\omega_n)^2 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -\omega_n$

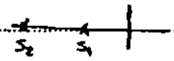


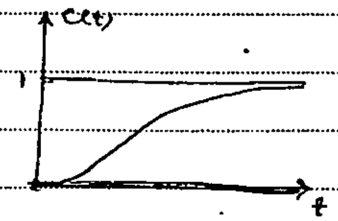
$c(t) = (1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t))\,u(t)$



③ $\zeta > 1 \qquad s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \rightarrow s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1})\,\omega_n$

$\rightarrow \begin{cases} s_1 = \omega_n(-\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}) \\ s_2 = \omega_n(-\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}) \end{cases}$





$c(t) = [1 - (e^{s_1 t} + e^{s_2 t})]\,u(t)$

- قطب غالب: Dominant Poles

با یک مثال بیان می‌کنیم. فرض کنید $s_1 = -1$ و $s_2 = -5$ پس s_1 قطب غالب است

$e^{-t} \qquad e^{-5t}$

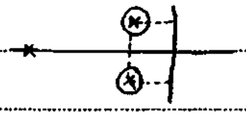
نسبت به اولی، اثر این در زمان بیشتر می‌ماند ← این پاسخ زودتر صفر می‌شود (به سمت صفر می‌رود)

می‌توانیم رفتار سیستم را فقط با همین یک قطب تقریب بزنیم.

قسمت موهومی قطب نوسان سیستم را در پاسخ به ورودی نشان می دهد و قسمت حقیقی آن میرایی را نشان می دهد.

آن قطبی که قسمت حقیقی اش به مبداء نزدیکتر است، قطب غالب است. $s = \sigma + j\omega$

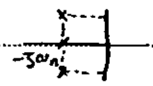
حُسن وجود قطب غالب این است که می توانیم سیستم های رسته بالاتر از ۲



را هم با یک سیستم رسته ی ۲ تقریب بزنیم.

در مسائل طبیعی (فیزیکی) معمولاً قطب ها به هم نزدیک نیستند و یک قطب غالب داریم.

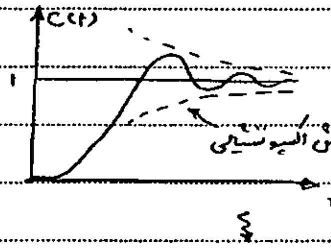
④ $0<\zeta<1$ $\quad s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0 \rightarrow s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j(\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n$



فرکانس میرا شونده $\omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\times\omega_n \rightarrow \omega_d<\omega_n$

فرکانس پیک $\omega_p=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \rightarrow \omega_p<\omega_d<\omega_n$

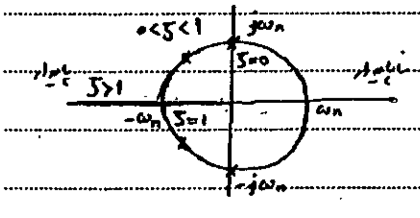
$$c(t)=\left[1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t+\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right]u(t)$$

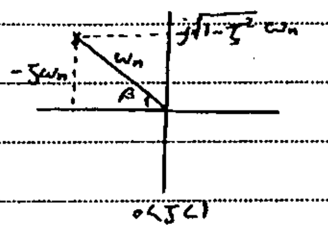


می خواهیم سریع به حل مطلوب برسیم، اول یک gain بزرگ می دهد، بعد کمش می کند.

$$\lim_{t\to\infty} e(t)=e_{ss}=\lim_{t\to\infty}(r(t)-c(t))=0$$

* معمولاً $0.5<\zeta<0.8$ انتخاب می شود.

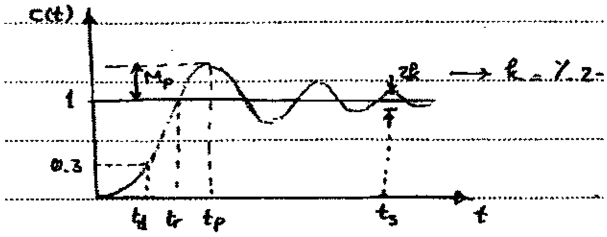




$\cos\beta=\zeta$ → System ID

زاویه ی β و فاصله تا مبدا را اگر بیابیم، سیستم را می توانیم شناسایی نماییم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$t_r \equiv$ rise time — زمان برخاست (صعود)

$t_d \equiv$ delay time — زمان تأخیر

$t_p \equiv$ peak time — زمان اوج

$t_s \equiv$ settling time — زمان نشست

$M_p \equiv$ overshoot — فراجهش

$$\text{حداکثر درصد جهش} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100$$

2nd order system with $0.4 < \zeta < 0.8$

$\Rightarrow t_r = \dfrac{\pi - \beta}{\omega_d}$ $\quad \cos\beta = \zeta \quad c(t_r) = 1$

$t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d} \quad \dfrac{dc}{dt}(t_p) = 0$

$M_p = c(t_p) - 1 = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$

if $c(\infty) \neq 1 \Rightarrow M_p = \dfrac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)}$

$t_s = 4T = \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$ (2%) $\quad$, $\quad t_s = 3T = \dfrac{3}{\zeta\omega_n}$ (5%)

داشته باشیم .

حالا اگر بخواهیم از پاسخ زمانی سیستم را شناسایی کنیم چه؟

$t_p = \frac{1}{2}(\text{زمان تناوب میرا شونده}) = \frac{\pi}{\omega_d}$

$\text{مشتق گیری} = 0 \longrightarrow \dot{c}(t) = 0$

$$M_p = c(t_p) - 1 = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \rightarrow \zeta = -\frac{\ln(M_p)}{\sqrt{1+\pi^2}} \simeq \boxed{-0.3\,\ln(M_p)}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

پس سیستم را اینطوری هم می توانیم شناسایی کنیم .

در مورد t_s:

%2 : $t_s = 4/\zeta\omega_n$

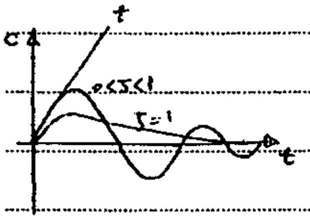
%5 : $t_s = 3/\zeta\omega_n$

Some notes for this page: Frequently, the peformance characteristics of a control system are specified in terms of the transient response to a unit-step input since it is easy to generate and is sufficiently drastic.

Subject: کنترل - یوسفی‌ها
Year. Month. Date. ( )

۸۸/۸/۱۹

* پاسخ به ضربه



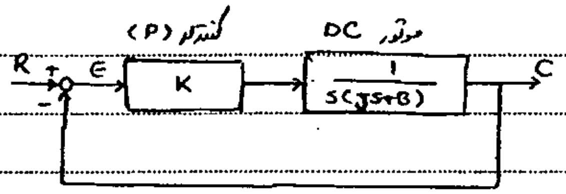
* پاسخ سیستم رتبه ۲ به شیب:

$$\frac{C}{R}=\underbrace{\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}_{G(s)} \quad ; R(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$E=R-C=R-GR=R(1-G)$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{s^2}\right)\left(-\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}+1\right)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s^2}\left(\frac{s(s+2\zeta\omega_n)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right)=\frac{2\zeta}{\omega_n}$$

● مثال: موتور DC



$r(t)=t \Rightarrow R(s)=\frac{1}{s^2}$

$$G(s)=\frac{\frac{k}{s(Js+B)}}{1+\frac{k}{s(Js+B)}}=\frac{k}{Js^2+Bs+k}=\frac{k/J}{s^2+\frac{B}{J}s+k/J}$$

$k/J=\omega_n^2 \Rightarrow \omega_n=\sqrt{k/J}$; $B/J=2\zeta\omega_n \Rightarrow \zeta=\frac{B}{2J\omega_n}=\frac{B}{2J\sqrt{k/J}}=\frac{B}{2\sqrt{kJ}}$

$e_{ss}=\frac{2\zeta}{\omega_n}=\frac{B}{k}$

* طراحی کنترلر

۱) پایداری : Stability ← باید همیشه پایدار باشد، نه فقط به ازای شرایط خاص! ← قضیه لیاپانوف

۲) عملکرد : Performance

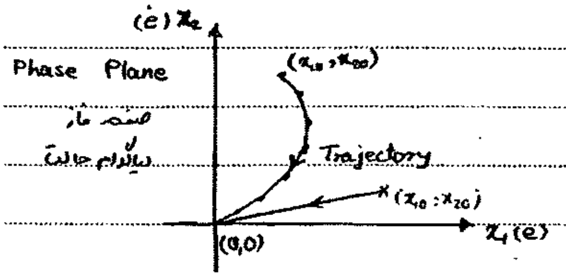
با توجه به روابط بدست آمده برای پاسخ به شیب، با افزایش k ، e_{ss} کاهش، ζ کاهش و ω_n

افزایش می یابد. کاهش e_{ss} را دوست داریم ولی کاهش ζ ، فراجهش را زیاد می کند که دوست نداریم.

خوب!

یک trade off پیش می آید، پس بهتره از یک PD یا PID یا PI استفاده کنیم.

* پایداری Stability :



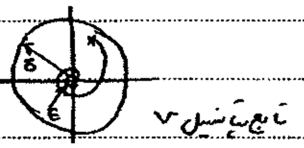
- رفتار (Behaviour) ← $x_1(t) , x_2(t)$
هر حالت برحسب زمان

- Trajectory ← $x_1 - x_2$
یک حالت برحسب حالت دیگر

رفتار یک سیستم در یک فضای n+1 بعدی (n حالت + زمان) تعریف می گردد.

اگر x_1 و x_2 را به یک نقطه ی خاص در صفحه فاز ببریم و مطمئن باشیم آنجا می ماند، پایدار است.

+ مفاهیم لیاپانوف :



حالا اگر نیرویی توی یک نقطه، ببر توی یک دایره به شعاع ϵ .

+ پایداری به روش لیاپانوف ←

اگر شرط اولیه ی ما (x_{10}, x_{20}) روی یکی از بردارهای ویژه (مودهای حرکت) قرار بگیرد، روی همان بردار می رود تا

صفر!

ω_1 $\quad V_1 = \Phi_1(x) = \alpha \begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix}$

ω_2 $\quad V_2 = \Phi_2(x) = \beta \begin{bmatrix}-0.5\\1\end{bmatrix}$

قطب غالب هم، اینجا مفهوم خودش را بازنشان می دهد.

همه ی اینها ما را می رساند به پایداری به روش لیاپانوف، ولی حالا برویم سراغ روش خودمان که منطبق بر همین

لیاپانوف است.

قطب‌های سیستم، اگر بیفتند سمت چپ محور موهومی، پایدار است.

- تعریف پایداری:

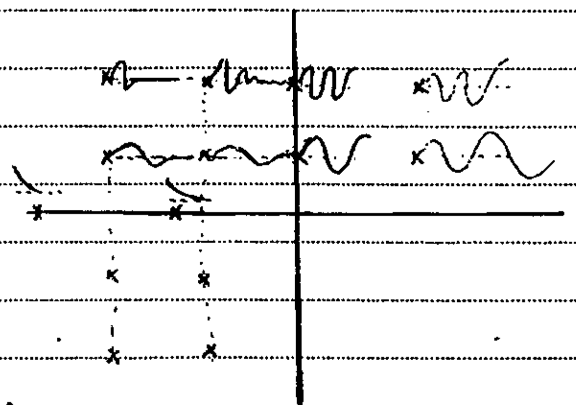
یک سیستم با معادله مشخصه‌ی $A(s)=0$ را پایدار می‌گوییم به شرط آنکه تمامی ریشه‌های معادله مشخصه (قطب‌های سیستم) در سمت چپ محور موهومی (Left Half Plane) قرار بگیرند.

قطب‌های روی محور موهومی معرف مرز ناپایداری است.

سیستم‌های BiBo (Bounded Input Bounded Output)، قطب‌هایشان روی محور موهومی است.

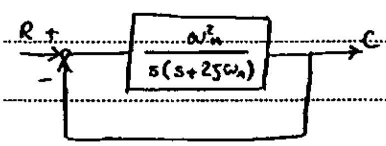
ζ = نسبت میرایی

میرایی = $\zeta\omega_n$



همانطور که از قبل می‌دانستیم، هرچه بالاتر برویم، فرکانس بیشتر می‌شود و هرچه چپ‌تر برویم میرایی بیشتر می‌شود.

● مثال: پاسخ به شیب واحد و پله واحد سیستم روبرو به شکل‌های زیر می‌باشد:

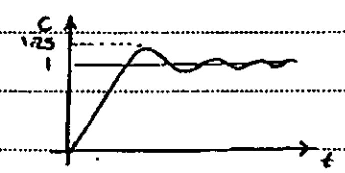


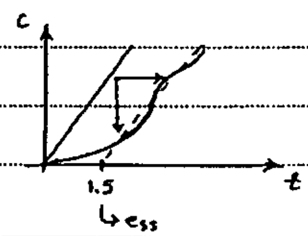
سیستم را شناسایی کنید.

$M_p = 1.25 - 1 = 0.25$

$\zeta = -0.3 \ln(M_p) = 0.4$

$\omega_n = \frac{2\zeta}{e_{ss}} = 0.5 \ rad/s$





Subject:
Year. Month. Date. ( )

* تابع تبدیل یک سیستم دینامیکی را به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$\frac{C}{R} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \quad ; \; n \geq m \; , \; a_0 \neq 0$$

← معادله مشخصه ی سیستم : $A(s) : a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n = 0$

- روش راث Routh : روشی برای تعیین محل نسبی ریشه های معادله ی $A(s) = 0$

• مثال : سیستم درجه ۲ $a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$ ← ضرایب معادله هر سه هم علامت باشند . $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0} > 0$

⇓

سیستم پایدار است

روش راث دو تا شرط دارد :

۱) شرط لازم پایداری : تمامی ضرایب معادله مشخصه غیر صفر و هم علامت باشند . ≡ شرط کافی ناپایداری

۲) شرط کافی پایداری : در ادامه توضیح داده خواهد شد . (اثباتش هم در کتاب هست)

• مثال :

$s^3 + 2s + 5 = 0$ شرط لازم را ندارد ← ناپایدار

$s^3 + 4s^2 - 2s + 5 = 0$ ″ ← ناپایدار

$s^3 + 4s^2 + 2s + 5 = 0$ شرط لازم را دارد ← می تواند پایدار باشد ← بعداً می گوییم پایدار است

$s^3 + 2s^2 + 3s + 10 = 0$ ″ ″ → ناپایدار ″ ″

← شرط کافی ناپایداری : حداقل یکی از ضرایب معادله مشخصه ، صفر یا نا هم علامت با بقیه باشد .

۸۸ , ۸ , ۲۴

← شرط کافی پایداری : جدول مشخصی به نام راث تشکیل می دهیم . در سطر اول ضرایب جملات با توان زوج و

هم جنس اولین جمله

در سطر دوم ، ضرایب جملات با توان فرد را می نویسیم .

عناصر سطرهای بعدی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\cdots$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$\cdots$
$\vdots$				
s^2	d_1	d_2	d_3	0
s	e_1	e_2	0	0
s^0	f_1	0	0	0

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} \quad , \quad b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1} \quad , \cdots$$

$$c_1 = \frac{b_1a_3 - b_2a_1}{b_1} \qquad c_2 = \frac{b_1a_5 - b_3a_1}{b_1} \quad , \cdots$$

تمامی اعضای یک سطر را می‌توان بر یک عدد مثبت ، ضرب یا تقسیم نمود.

شرط لازم ، ایجاب می‌کند تمام عناصر در سطر اول هم علامت باشند

برای بررسی شرط کافی ، کافی است به بررسی ستون اول بپردازیم . حالات مختلفی برای آن ممکن است :

حالت ۱) تمامی عناصر ستون اول مخالف صفر باشند.

شرط کافی پایداری : هیچ تغییر علامتی در ستون اول اتفاق نیفتد.

شرط لازم و کافی : همه ضرایب معادله مشخصه و همه ضرایب ستون اول مثبت (هم علامت) باشند.

- هر تغییر علامت در ستون اول ، معرف یک ریشه ناپایدار (یا ریشه در سمت راست محور موهومی) می‌باشد.

مثال : معادله‌ی مشخصه درجه ۲ $\quad$ شرط لازم $\quad a_0, a_1, a_2 > 0 \Longrightarrow a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$

s^2	a_0	a_2
s	a_1	0
s^0	a_2	

$> 0 \Longrightarrow$ شرط لازم = شرط کافی

مثال : معادله‌ی مشخصه درجه ۳ $\quad a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$

شرط لازم $\quad a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

s^3	a_0 a_2
s^2	a_1 a_3
s	$\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1}$ 0
s^0	a_3

شرط پایداری $\rightarrow a_1a_2-a_0a_3>0 \Rightarrow a_1a_2>a_0a_3$

حالت ۲) یکی از عناصر ستون اول صفر باشد و بقیه جملات مربوط به آن سطر غیر صفر باشد.

چند گام برای bypass کردن این صفر می پیمائیم:

* گام ۱) به جای 0، ϵ قرار می دهیم و جدول را کامل می کنیم.

* گام ۲) سپس ϵ را به 0^+ میل می دهیم.

در صورت هم علامت بودن عناصر بالا و پایین ϵ، دو ریشه روی محور موهومی خواهیم داشت. لیکن تغییر علامت ها را می شماریم که به ازای هر تغییر علامت، یک ریشه سمت راست خواهیم داشت سطر ϵ را نمی شماریم.

مثال: $s(s^3+2s^2+5s+2)=0$ یک قطب روی مبدا دارد ناپایدار است

s^4	1	5	0
s^3	2	2	0
s^2	4	0	
s	2	0	
s^0	0		

با انتقال محور موهومی ها در طول محور حقیقی و تکرار روش راث، می توان حتی مکان تقریبی ریشه ها را هم پیدا کرد.

مثال: $s^5+s^4+5s^3+5s^2+12s+10=0$

$+$	s^5	1	5	12
$+$	s^4	1	5	10
ε	s^3	$\cancel{0}\,\varepsilon$	2	0
$-$	s^2	$\frac{5\varepsilon-2}{\varepsilon}$	10	0
$+$	s	$2-\frac{10\varepsilon^2}{5\varepsilon-2}$	0	
$+$	s^0	10		

پس ۲ ریشه ناپایدار دارد.

حالت ۳) تمامی عناصر یک سطر صفر شوند.

- با استفاده از ضرایب سطر قبلی یک معادله کمکی تشکیل می‌دهیم.
- از معادله‌ی کمکی نسبت به s مشتق می‌گیریم.
- به جای سطر صفر، ضرایب معادله کمکی را قرار می‌دهیم.
- سپس کل تعداد تغییر علامت‌ها را مطابق حالات قبل ادامه می‌دهیم.

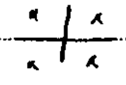
* ریشه‌های معادله کمکی خود جزئی از ریشه‌های معادله مشخصه می‌باشند (در واقع چندجمله‌ای کمکی، خود یکی از عوامل تجزیه می‌باشد).

نکته: حالات خاصی که در آن تمام عناصر یک سطر صفر می‌شود:

۱) حالتی که دو ریشه زوج موهومی داشته باشیم ← تغییر علامتی نمی‌بینیم.

۲) « « مختلف العلامة حقیقی داشته باشیم ← یک تغییر علامت

۳) « « دو جفت ریشه مزدوج مختلط متقارن نسبت به مبداء داشته باشیم.



↓ دو تغییر علامت

مثال :

$a_0s^3+a_1s^2+a_2s+a_3=0$

s^3	a_0	a_2
s^2	a_1	a_3
s	$\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1}$	0
s^0	a_3	0

کلی

if $\overbrace{a_1a_2=a_0a_3}^{*} \longrightarrow A(s)=a_1s^2+a_3s^0=0 \longrightarrow s_{1,2}=\pm j\sqrt{a_3/a_1}$

$A'(s)=2a_1s+0$

+	s^3	a_0	a_2
+	s^2	a_1	a_3
+	s	$2a_1$	0
+	s^0	a_3	0

حالا اگر * را رابطه بهم بریزیم می‌رسیم ؟

$a_1a_2=a_0a_3 \Rightarrow \frac{a_2}{a_0}=\frac{a_3}{a_1} \Rightarrow a_0s\left(s^2+\frac{a_2}{a_0}\right)+a_1\left(s^2+\frac{a_3}{a_1}\right)=0$

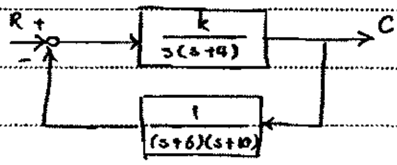
$\Rightarrow \left(s^2+\frac{a_2}{a_0}\right)(a_0s+a_1)=0$

$\Rightarrow s_{1,2}=\pm j\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}=\pm j\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} \quad , \quad s_3=-\frac{a_1}{a_0}$

$a_0=1 \Rightarrow s_{1,2}=\pm j\sqrt{a_2} \quad , \quad s_3=-a_1$

و هم چنین اگر $a_1a_2 \neq a_0a_3$ باشد ، ریشه ها به سمت ناپایداری می روند.

مثال : مقدار k را برای پایداری سیستم روبه‌رو تعیین کنید. قطب های مرز ناپایداری را بدست آورید.



معادله مشخصه : $s^4+20s^3+124s^2+240s+k=0$

شرط لازم : $k>0$

شرط کافی : $12-\frac{k}{112}>0 \Rightarrow k<1344$

$\Rightarrow \boxed{0<k<1344}$

+	s^4	1	124	k
+	s^3	$\cancel{20}$ 1	$\cancel{240}$ 12	0
+	s^2	112	k	0
?	s	$12-\frac{k}{112}$	0	0
+	s^0	k		

ما با مبداء کاری نداریم ولی هنگامیکه ریشه روی محور موهومی قرار می‌گیرد، آغاز ناپایداری است.

$k = 1344 \longrightarrow 112s^2 + 1344 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{12} = \pm j2\sqrt{3}$

$\Rightarrow s^4 + 20s^3 + 124s^2 + 240s + 1344 = (112s^2 + 1344)(\quad\dots\quad)$

$s_{3,4} = -10 \pm j2\sqrt{3}$

مثال: پایداری سیستم با معادله مشخصه زیر را بررسی کنید.

$s^6 + 4s^5 + 12s^4 + 16s^3 + 41s^2 + 36s + 72 = 0$

+	s^6	1	12	41	72
+	s^5	4(1)	16(4)	36(9)	0
+	s^4	8(1)	32(4)	72(9)	
+	s^3	$0(4)_{(1)}$	$0(8)_{(2)}$	0	
+	s^2	2	9		
−	s	$-5/2$	0		
+	s^0	9			

$\longrightarrow A(s) = s^4 + 4s^2 + 9$

$A'(s) = 4s^3 + 8s$

$\Rightarrow$ دو ریشه سمت راست

$A(s) = 0 \Rightarrow (s^2+3)^2 = 2s^2 \Rightarrow s^2 + 3 = \pm s\sqrt{2}$

$\Rightarrow s_{1,2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} \pm j\sqrt{10}) \quad , s_{3,4} = \frac{1}{2}(-\sqrt{2} \pm j\sqrt{10})$

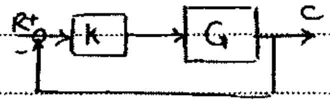
تقسیم کردن معادله مشخصه بر A(s) $\longrightarrow (s^4 + 4s^2 + 9)(s^2 + 4s + 8) = 0 \Rightarrow s_{5,6} = -2 \pm 2j$

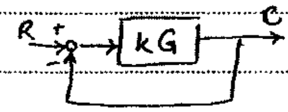
۸۸،۸،۲۹

* پایداری مطلق: ریشه‌ها سمت چپ باشند. $Re(s) < 0$

معمولاً برای مکان هندسی ریشه‌ها، تابع تبدیل مسیر رو به جلو را تحلیل می‌کنیم و تغییرات آن را تعیین می‌کنیم و سپس مسیر فیدبک را تفسیر می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم.

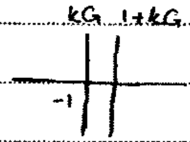
Subject:
Year. Month. Date. ( )





به اندازه‌ی ۱- بشیفت بده ! یا $1+kG=0 \to kG=-1$

حالا برو جای kG سیستم رو به جلو

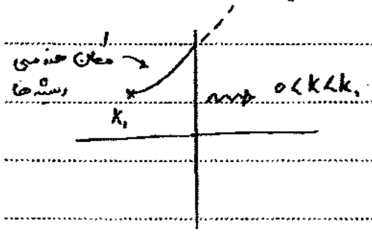


رو بررسی کن ! این تحلیل‌ها قابل

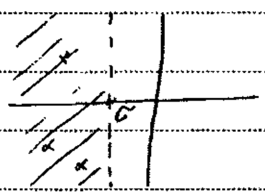
تعمیم به $1+kG$ هستند.

پایداری مطلق هنگامی وجود دارد که سیستم به ازای تمامی مقادیر k پایدار باشد.

* پایداری مشروط : یک رنج پایداری تعریف می‌کنیم ← $k_1<k<k_2$



* پایداری نسبی : همه‌ی ریشه‌ها ، سمت یک خط معین واقع شده باشند . وقتی مهم می‌شود که سرعت میرا شدن برای ما مهم باشد.



* آستانه یا مرز ناپایداری

- پایداری نسبی نسبت به خط σ ← $s \to \hat{s}+\sigma$

● مثال : سیستمی با معادله مشخصه $s^3+7s^2+17s+15=0$ را در نظر بگیرید. تحقیق کنید پایداری نسبی این سیستم را به خط $Re=-2$!

Subject: کنترل - پوستن کن

Year. Month. Date. ( )

با توجه به روش راث، سیستم مذکور پایدار مطلق است.

$$s \rightarrow \hat{s} - 2 \Rightarrow (\hat{s}-2)^3 + 7(\hat{s}-2)^2 + 17(\hat{s}-2) + 15 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{s}^3 + \hat{s}^2 + \hat{s} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\hat{s}+1)(\hat{s}^2+1) = 0 \Rightarrow \hat{s}_3 = -1 \Rightarrow s = -3$$

$$\hat{s}_{1,2} = \pm j \Rightarrow s = -2 \pm j$$

پس نسبت به خط 2- ، در آستانه‌ی ناپایداری قرار دارد (دو ریشه روی همین خط هستند)!

* خطای ماندگار Steady State Error (e_{ss})

$$H(s) \cdot G(s) = \frac{k(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s^N (T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}$$

انتگرالگیر

رتبه سیستم $= n+N$ نوع سیستم $= N$

- سیستم حداقل فاز: Minimum Phase

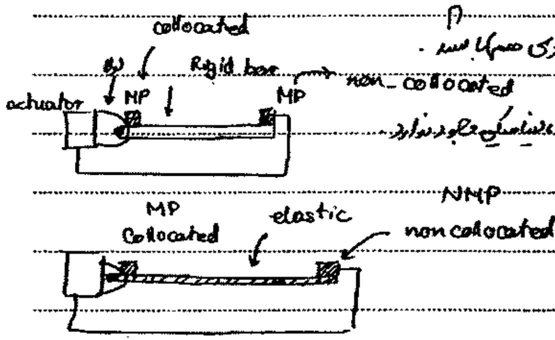
- سیستم غیر حداقل فاز: Non-Minimum Phase

اگر تمامی صفرها و قطب های یک سیستم سمت چپ محور موهومی قرار بگیرند، سیستم حداقل فاز داریم.

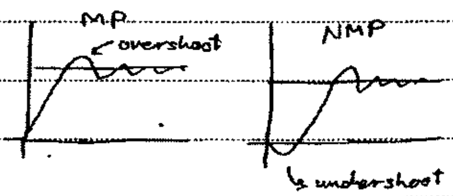
اگر حداقل یک صفر و یا یک قطب در نیم صفحه‌ی راست قرار بگیرد، سیستم غیر حداقل فاز داریم.

← مد نظر ما، سیستم‌های پایداری هستند که صفرهایی در RHP دارند.

Collocated : sensor , actuator در یک محل (روی هم) باشند.



بین حسگر و محرک الاستیسیته وجود ندارد.

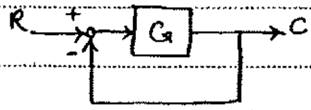


(dynamic → delay)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* خطای مانا برای سیستم های فیدبک منفی واحد :



1 - ثابت خطای مانای موقعیت برای ورودی پله واحد : (k_p)

$r(t) = u(t) \rightarrow R(s) = \frac{1}{s}$

$\lim_{t\to\infty} e(t) = e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{1+G} R(s)\right] = \lim_{s\to 0} \frac{1}{(1+G)} \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} G} = \frac{1}{1+\underbrace{G(0)}_{k_p}}$

$G(0) \triangleq k_p =$ ثابت خطای مانای موقعیت $= \lim_{s\to 0} G(s)$

$N = 0 \rightarrow k_p = k \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+k}$ ($k\uparrow \Rightarrow e_{ss}\downarrow$ but increases actuator saturation)

$N \geq 1 \rightarrow k_p = \infty \rightarrow e_{ss} = 0$

همانطور که می بینی انتگرال گیر خطای سیستم را کاهش می دهد.

2 - ثابت خطای سرعت برای ورودی شیب واحد (k_v) :

$r(t) = t \rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$

$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG} \rightarrow k_v = \lim_{s\to 0} sG \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{k_v}$

$N = 0 \rightarrow k_v = 0 \rightarrow e_{ss} = \infty$ $\Rightarrow$ همانطور که قبلاً گفته شد دلیلی ندارد پایدار باشد!

$N = 1 \rightarrow k_v = k \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{k}$

$N \geq 2 \rightarrow k_v = \infty \rightarrow e_{ss} = 0$

3 - ثابت خطای شتاب برای ورودی $t^2/2$ (k_a) :

$r(t) = \frac{t^2}{2} \rightarrow R(s) = \frac{1}{s^3}$

$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G} \frac{1}{s^3} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2+s^2G} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2G} \rightarrow k_a = \lim_{s\to 0} s^2 G \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{k_a}$

Subject. کنترل - پوسش ها
Year. Month. Date. ( )

$N=0 \rightarrow k_a=0 \rightarrow e_{ss}=\infty$

$N=1 \rightarrow k_a=0 \rightarrow e_{ss}=\infty$

$N=2 \rightarrow k_a=k \rightarrow e_{ss}=1/k$

$N\geq 3 \rightarrow k_a=\infty \rightarrow e_{ss}=0$

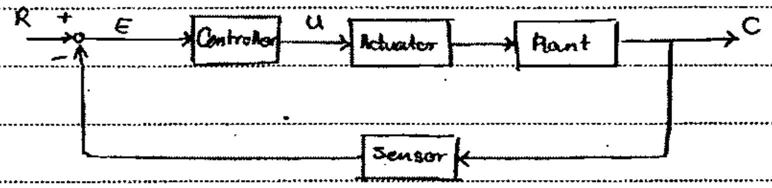
جدول e_{ss} :

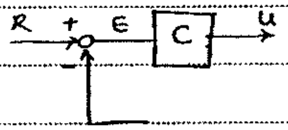
$t^2/2$	t	$u(t)$	نوع سیستم
∞	∞	$1/(k+1)$	0
∞	$1/k$	0	1
$1/k$	0	0	2
0	0	0	>2

۱، ۹، ۸۸

* عملیات کنترلی پایه

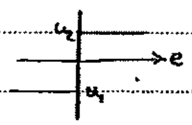
P، PD، PI، PID، Switching (غیرخطی)





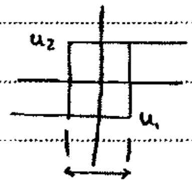
۱- Switching (دو وضعیتی) on-off

$$u(t)=\begin{cases} u_1 & e<0 \\ u_2 & e\geq 0 \end{cases}$$



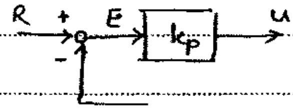
Subject:
Year. Month. Date. ( )

این کنترلرها ابتدا با یک شیر سلونوئیدی کار می‌کنند.



ناحیه تفاضلی

۲- کنترلر P (تناسبی) : Proportional



$$\frac{U(s)}{E(s)} = k_p$$

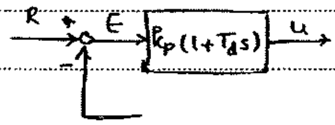
overshoot را کاهش می‌دهد ولی با خطای ماندگار کاری ندارد.

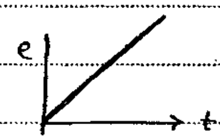
۳- کنترلر PD : تناسبی + مشتق‌گیر (Proportional - Derivative) :

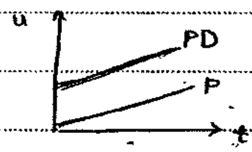
$$u(t) = k_p\left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}\right) \longrightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = k_p(1 + T_d s)$$

بهره یا gain کنترلر

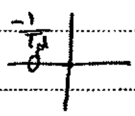
ثابت زمانی مشتق‌گیر







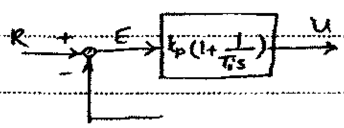
یک صفر اضافه می‌کند.



۴- کنترلر PI : تناسبی + انتگرال‌گیر (Proportional - Integrator) :

$$u(t) = k_p\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt\right) \longrightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = \frac{k_p + T_i k_p s}{T_i s}$$

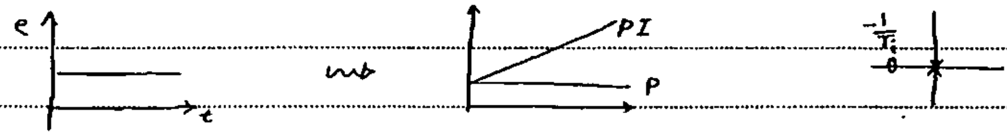
reset time ثابت انتگرال‌گیری



$$\text{Reset Rate} = \frac{1}{T_i}$$

Subject: کنترل - پوسفری

Year. Month. Date. ( )



۱ قطب در مبداء و یک صفر اضافه می‌کند.

D آینده را پیش‌بینی می‌کند و کارش تقریباً مثل دیر است و یک صفر به سیستم اضافه می‌کند. ← بهبود پایداری

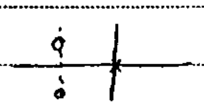
ولی نویزها را تقویت می‌کند. I کند کننده سیستم را به ما می‌دهد و روی حل‌ها و خطاهای ما اثر می‌گذارد.

۵- کنترلر PID : تناسبی + انتگرالگیر + مشتق‌گیر (Proportional + Integrator + Derivative)

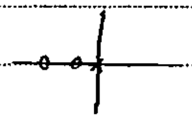
$$u(t) = k_p\left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt\right)$$

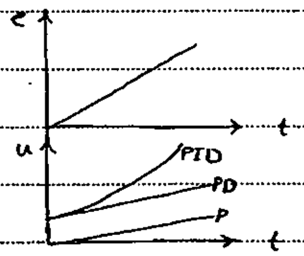
$$\Rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = k_p\left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right) = \frac{k_p + k_p T_i s + k_p T_d T_i s^2}{T_i s}$$

یعنی یک قطب در مبداء و دو تا صفر اضافه می‌کند.



یا





⊗ افزودن انتگرالگیر رتبه‌ی ناپایداری را افزایش می‌دهد.

چرا که یک s به مخرج تابع تبدیل اضافه می‌کند، یعنی درجه معادله مشخصه را بالاتر می‌برد.

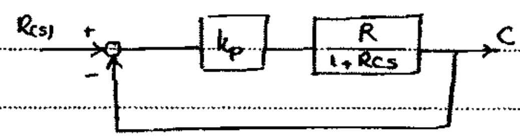
⊗ مثال: ← بعداً

* اثرات کنترل کننده‌های پایه بر روی سیستم‌های دینامیکی:

۱) اثر P روی سیستم رتبه‌ی ۱:

$G_p(s) = \frac{R}{1+RCs}$, $T = RC$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$G(s)=\frac{C}{R}=\frac{Rk_p}{1+Rk_p+Ts}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1+Ts}{1+Rk_p+Ts}$$

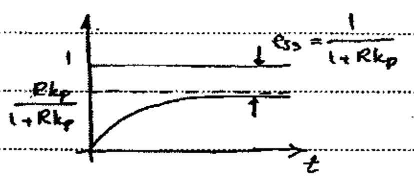
- خطای ماندگار برای ورودی پله واحد (u(t))

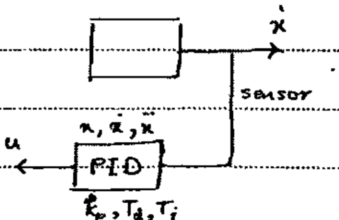
$r(t)=u(t)$, $R(s)=\frac{1}{s}$

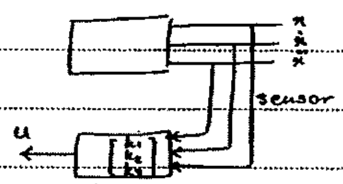
$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{s}\right)\frac{1+Ts}{1+Rk_p+Ts}=\frac{1}{1+Rk_p}$$

با توجه به بالا هرچه $k_p\uparrow$ داریم $e_{ss}\downarrow$ ولی قیدی داریم روی k_p که همان اشباع شدن actuator است.

$$C_{ss}=\lim_{s\to 0} sC(s)=\frac{Rk_p}{1+Rk_p}$$



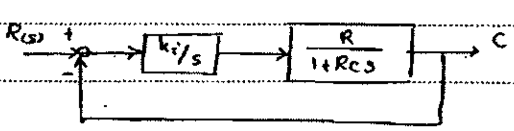




یک بهره‌ی برداری

مزیت استفاده از فضای حالت اینکه نیاز با استدلال لید و مشتق‌گیر کاری نداری.

اثر I :



$$\frac{E}{R}=\frac{s(Rcs+1)}{Rcs^2+s+Rk_i}$$

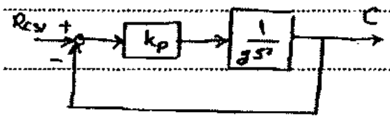
Subject: کنترل - [illegible]

Year. Month. Date. ( )

ابتدا پایداری سیستم کنترلی جدید باید چک شود : $R, k_i, C > 0$ ← سیستم پایدار است

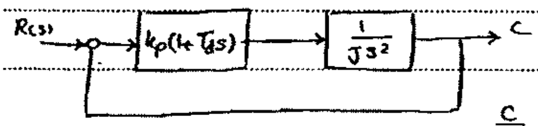
- خطای ماندگار برای ورودی پله واحد : $e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\,e(s) = 0$

● همون مثاله : مدل ساده شده‌ی موتور



$$\frac{C}{R} = \frac{k_p}{k_p + Js^2} = 0 \rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k_p}{J}}$$

پس کنترلر PD پیشنهاد می‌کنیم



$$\frac{C}{R} = \frac{k_p(1+T_d s)}{Js^2 + k_p T_d s + k_p}$$

ms $k_p, T_d, J > 0 \rightarrow$ سیستم پایدار است

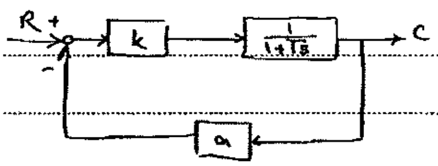
$$\begin{cases} k_p T_d / J = 2\zeta\omega_n \\ k_p / J = \omega_n^2 \end{cases}$$

با بازی کردن با k_p و T_d می‌توان میرایی را هم تغییر داد ms

* مزایای سیستم‌های کنترلی فیدبک :

۱) بهبود پایداری سیستم

۲) کاهش خطای سیستم



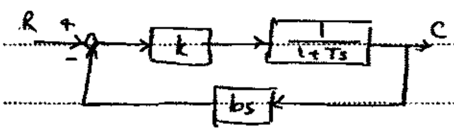
۳) کاهش ثابت زمانی

۴) کاهش حساسیت سیستم به نویز

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{k}{1+ka}}{1+\frac{T}{1+ka}s} \; ; \; T_1 = \frac{T}{1+ka} \; ; \; k\uparrow \; T_1\downarrow$$

۵) کاهش حساسیت سیستم به تغییر پارامترها و اغتشاشات

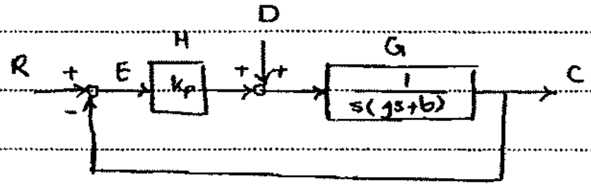
بازی با ثابت زمانی



$$\frac{C}{R} = \frac{k}{1+(T-bk)s} \qquad T-bk=0 \rightarrow b = \frac{T}{k} \rightarrow \frac{C}{R} = k$$

M,۹,۳

ادامه بررسی اثر کنترلرها :

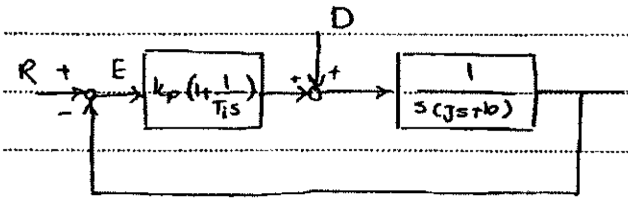


$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-G}{1+GH} = -\frac{1}{Js^2+bs+k_p}$$

$D(s) = \frac{d}{s}$ فرض: $\Rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{-d}{k_p} = \text{offset}$

پس افزایش k_p، مقدار e_{ss} را کاهش می‌دهد. اما آن را نمی‌تواند کاملاً از بین ببرد (اثر اغتشاش را)

حالا کنترلر را به PI تغییر می‌دهیم:



$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{s}{Js^3+bs^2+k_ps+\frac{k_p}{T_i}} = 0$$

$\lim_{s\to 0} sE = e_{ss} = 0$ ✓ خطای ماندگار را از بین برد ولی معادله مشخصه رتبه‌اش بالا رفت.

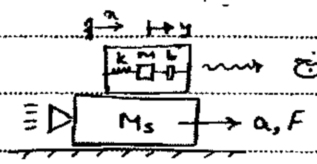
پس باید شرط کافی پایداری کنترل شود ← $bk_p > \frac{Jk_p}{T_i} \Leftarrow T_i > \frac{J}{b}$

اگر فقط یک I action داشته باشیم: $\frac{k_i}{s}$ ⇐ معادله مشخصه: $Js^3+bs^2+k_i=0$

سیستم ناپایدار با قطب‌های سمت راست

مثال:

شتاب‌سنج



$M \ll M_s$

Subject: کنترل - پوسفی‌ها

Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} M_s \ddot{x} = F & \rightarrow \ddot{x} = \dfrac{F}{M_s} \\ M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = M\ddot{x} \end{cases}$$

$$\rightarrow \ddot{y} + \frac{b}{M}\dot{y} + \frac{k}{M}y = \frac{F}{M_s} = a \quad \circledast$$

مطلوب : $y \equiv a$

شرایط اولیه : $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 2$

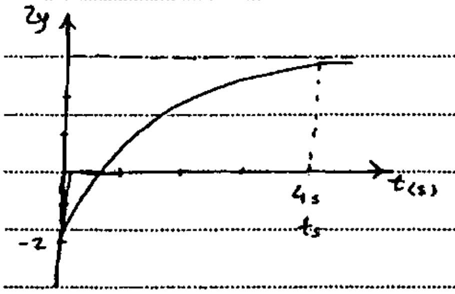
درنظر بگیریم : $a = \dfrac{F}{M_s} = P(t) \longrightarrow$ ورودی : $A(s) = \dfrac{P}{s}$

طراحی اولیه : $\dfrac{b}{M} = 3$, $\dfrac{k}{M} = 2$

$\longrightarrow P = 3$

$$\circledast \xRightarrow{\mathcal{L}} (s^2 - sy(0) - \dot{y}(0))\,\overbrace{Y(s)}^{} + 3(s - y(0))\,Y(s) + 2Y(s) = \frac{P}{s}$$

$$Y(s) = \frac{P}{2s} - \frac{P}{s+1} + \frac{(P-2)}{2(s+2)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{1}{2}\left(P - 2Pe^{-t} + (P-2)e^{-2t}\right)$$



پس طراحی خوبی نیست چون 4 ثانیه طول می‌کشد تا پاسخ درست را نشان دهد.

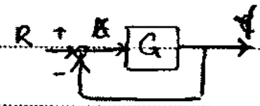
سعی دوم : $\dfrac{k}{M} = 32$, $\dfrac{b}{M} = 12 \longrightarrow t_s = 1\,s$

پس سختی و b بالا نیاز است ← خصوصیات مواد پیزوالکتریک

مثال : معادله دیفرانسیل یک سیستم مکانیکی به صورت زیر است. بدست آورید:

الف) تابع تبدیل . ب) خطای مانا به پله واحد پ) خطای مانا با قرار دادن یک انتگرالگیر در مسیر رو به جلو

$\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 3\dot{x} + 2x$



$\xrightarrow{\mathcal{L}} (s^2 + 5s + 4)Y(s) = (3s+2)X(s)$

$G(s) = \dfrac{3s+2}{s^2+5s+4}$, $R(s) = \dfrac{1}{s}$

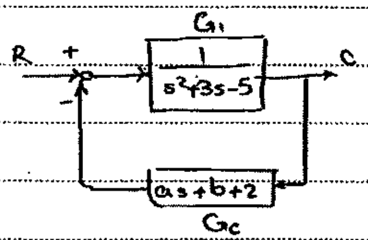
$\dfrac{X}{R} = \dfrac{1}{1+G} = \dfrac{s^2+5s+4}{s^2+8s+6} \Rightarrow e_{ss} = 2/3$

پله ، نوع صفر $\rightarrow e_{ss} = \dfrac{1}{1+k_p} = \dfrac{1}{1+1/2} = 2/3$

$\lim_{s\to 0} GH = 1/2$

$+I \rightsquigarrow e_{ss} = 0$

③ مثال : در سیستم کنترلی شکل روبه‌رو کنترلر G_c را به گونه‌ای طراحی کنید که سیستم حلقه بسته دارای حرکت نوسانی بدون میرایی باشد.



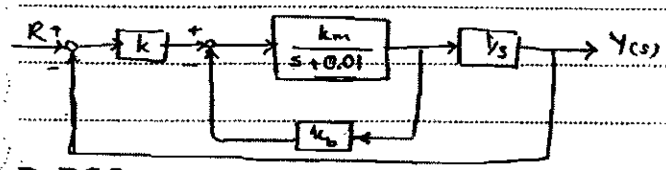
$G = \dfrac{G_1}{1+G_1G_c} = \dfrac{1}{s^2 + \underbrace{(3+a)}_{0} s + \underbrace{(b-3)}_{\omega_n^2}} \Rightarrow \omega_n^2 > 0 \rightarrow b-3>0 \rightarrow b>3$

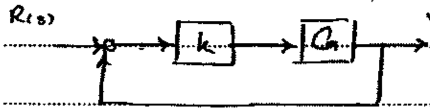
$\hookrightarrow a = -3$

● مثال : نمودار جعبه‌ای یک موتور DC کنترل شده با جریان آرمیچر به صورت روبرو می‌باشد.

الف) خطای مانا به ازای ورودی شیب واحد را بدست آورید.

ب) فرض کنید $k_m = 10$ و $k_b = 0.05$ باشند مقدار k را برای اینکه خطای مانا یک ٪ شود تعیین کنید.





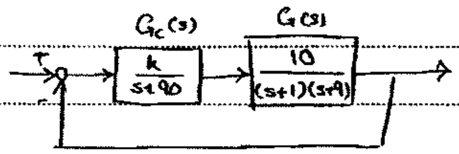
$$G(s) = \frac{1}{s} \times \frac{\frac{k_m}{s+0.01}}{1 + k_b \frac{k_m}{s+0.01}}$$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k k_m}{s(s+0.01+k_m k_b) + k k_m}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \longrightarrow E(s) = 1 - T(s) = \checkmark \longrightarrow e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\,E(s) = \frac{0.01 + k_m k_b}{k k_m}$$

$$e_{ss} = 1 \Rightarrow k = 0.051$$

مثال: ماهواره‌ای از یک سیستم کنترلی به شکل زیر جهت تنظیم Angle of Orientation استفاده می‌کند.



الف) سیستم بسته ۲ معادل را بدست آورید

ب) با استفاده از سیستم تقریبی رتبه ۲ فوق بهره k

را به گونه‌ای تعیین کنید که مقدار فراجهش $M_p < 0.15$ و

خطای ماندگار به ازای پله واحد کمتر از 0.12 باشد.

$$\text{Feed Forward}: \frac{10k}{(s+90)(s+1)(s+9)} \rightarrow ⊛$$

اثر دینامیک این نسبت به بقیه قابل صرف‌نظر کردن!

گاهی کنترلری که استفاده می‌کنیم خودش دینامیک دارد ولی

می‌توانیم آن را به گونه‌ای طراحی کنیم که اثر دینامیکش

قابل صرف‌نظر کردن باشد.

یک بهره استاتیکی تعریف می‌کنند. آرایش معادله ⊛ را به گونه‌ای تبدیل دهیم که اگر از دینامیک کنترلر صرف‌نظر

کردیم، استاتیک سیستم به هم نخورد.

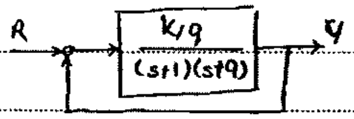
$$⊛ \rightarrow 90\left(1+\frac{s}{90}\right)(s+1)(s+9)$$

بهره استاتیکی $s \to 0$

$$\Rightarrow \frac{10k}{90\left(1+\cancel{\frac{s}{90}}\right)(s+1)(s+9)} \simeq \frac{k/9}{(s+1)(s+9)}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )



$T(s) = \frac{Y}{R} = \frac{k/9}{s^2+10s+9+k/9}$

$\zeta = -\frac{\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2+1}}$, $M_p = 0.15 \longrightarrow \zeta = 0.57$ and $M < 0.15 \Rightarrow \zeta > 0.57$

$2\zeta\omega_n = 10$, $\zeta = 0.57 \Rightarrow \omega_n = 8.8$

$\omega_n^2 = 9 + k/9 \Rightarrow k = 611$

$k < 611 \longrightarrow \omega_n < 8.8 \longrightarrow \zeta > 0.57 \longrightarrow M_p < 0.15$

$k_p = \lim_{s \to 0} GH = k/81$

$e_{ss} = \frac{1}{1+k_p} = 0.12 \rightarrow k = 594$ and $k > 594 \longrightarrow e_{ss} = 0.12$

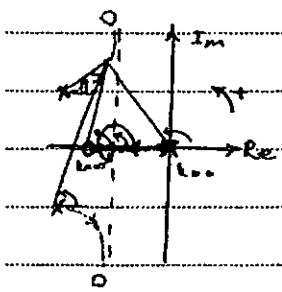
$\Rightarrow \quad 594 < k < 611$

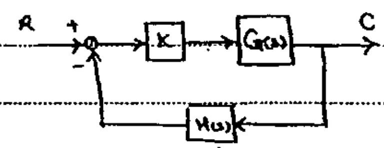
PAPCO

فصل ۴ : مکان هندسی ریشه‌ها و طراحی کنترلر

هدف یافتن یک روش ترسیمی برای مکان هندسی ریشه‌های حلقه بسته به کمک صفرها و قطب‌های سیستم مدار باز می‌باشد. این روش برای اولین بار توسط شخصی به نام W. R. Evans ابداع شده است. این روش می‌تواند ...

۸۸/۹/۸





تابع تبدیل مدار باز $G(s)\,H(s)$

معادله مشخصه سیستم مدار بسته $1 + G(s)\,H(s) = 0$

$k\,G(s)\,H(s)$

ما با این فرم کار می‌کنیم و اگر معادله مشخصه به این صورت $\rightarrow$ ۲ $1 + k\,G(s)\,H(s) = 0$

نبود، باید با آن بازی کنیم تا k به این صورت ظاهر شود.

هدف: رسم مکان هندسی ریشه‌های مدار بسته (برحسب k) به کمک صفرها و قطب‌های مدار باز.

$$1 + G(s)\,H(s) = 0 \Rightarrow \underbrace{G(s)\,H(s)}_{\text{یک تابع مختلط}} = -1 \rightarrow \begin{cases} \angle GH = \pm 180(2k+1) & \text{(I)} \rightarrow \text{مکان} \\ |GH| = 1 & \text{(II)} \rightarrow \text{بهره} \end{cases}$$

- نکات قبل از رسم مکان هندسی:

۱. مکان هندسی ریشه‌ها نسبت به محور حقیقی متقارن است.

۲. بدست آوردن معادله‌ی مشخصه به فرم $=0$

۳. ندارد.

۱. مشخص کردن قطب‌ها و صفرهای حلقه باز در صفحه

۲. تعداد شاخه‌ها $= n$ تعداد مجانب $= n-m$

۳. زاویه مجانب‌ها $= \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$ $k=1,2,\dots$

۴. محل تقاطع مجانب‌ها = نقطه‌ای روی محور Re $\sigma_a = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n-m}$

۵. نقطه‌ی شکست ← k ؟ $1+kGH=0 \Rightarrow \frac{dk}{ds}=0$

۶. زاویه خروج از یک قطب: $180 - (\sum$ زوایای قطب‌ها تا آن قطب$) + (\sum$ زوایای صفرها تا آن قطب$)$

۷. زاویه ورود به یک صفر: $180 - (\sum$ زوایای صفرها تا آن صفر$) + (\sum$ زوایای قطب‌ها تا آن صفر$)$

۸. k در یک نقطه‌ی مکان $=$ حاصلضرب طول بردار قطب‌ها تا آن / حاصلضرب ... صفرها تا

- قواعد رسم مکان هندسی:

۱. مکان برحسب تغییرات k یعنی $k: 0 \to +\infty$

۲. نقطه‌ی $k=0$ نقطه‌ی شروع مکان هندسی است که از قطب‌های حلقه باز شروع می‌شود.

۳. نقطه‌ی $k=+\infty$ معرف ختم مکان هندسی است که در واقع معرف صفرهای حلقه باز می‌باشد.

⚠ تبصره: قاعده‌ی ۲ و ۳ شامل قطب‌ها و صفرهای بی‌نهایت نیز می‌باشد.

۴. شاخه به مسیری که یک قطب در صفحه‌ی مختلط به ازای $k: 0 \to +\infty$ طی می‌کند، می‌گویند.

۵. تعداد شاخه‌ها در مکان هندسی ریشه‌ها برابر است با مرتبه‌ی معادله مشخصه سیستم!

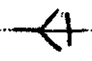
← اگر سیستم‌های غیرواقعی را هم در نظر بگیریم، قاعده اصلی می‌گوید که تعداد شاخه‌ها برابر $\max(n,m)$ است.

۶. اگر تعداد قطب‌ها و صفرهای حقیقی سمت راست یک نقطه روی محور حقیقی، عددی فرد باشد آن نقطه جزء مکان هندسی است.

۷. تعداد مجانب‌های مکان هندسی $n-m$ است.

۸. زاویه مجانب‌ها: $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$ ← $k=1,\dots,n-m$

$n-m=2$ $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ 

$n-m=3$ $\theta = \pi/3, \pi, 5\pi/3$ 

جهت مثبت زوایا در جهت مثبت مثلثاتی است.

Subject: کنترل - یوسفی‌ها

Year. Month. Date. ( )

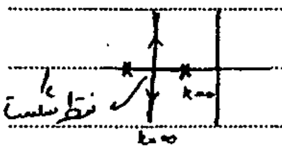
۹. محل تقاطع مجانب‌ها (که روی محور حقیقی است) از فرمول روبرو بدست می‌آید: $\sigma_a = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n-m}$

۱۰. نقطه‌ی شکست نقطه‌ای از صفحه‌ی s که در آن معادله مشخصه ریشه مکرر دارد.

(به این شرط که k حقیقی باشد) نقاط شکست b: $1 + kGH = 0 \rightarrow k = P(s) \rightarrow \frac{dk}{ds} = 0 \rightarrow s$

$\frac{dk}{ds} = 0$ با فرض اینکه ریشه‌های مکرر روی محور حقیقی باشند، نقاط شکست را می‌دهد.

قطب‌ها مثل جسم و صفرها مثل چاه هستند.



در نقاط b شکست شاخه‌ها به طور مساوی حول $360°$ تقسیم می‌شوند.

یک توضیح کوچک در مورد قاعده‌ی ۲ و ۳ و ۱۰:

فرض کن $GH = k\frac{A(s)}{B(s)}$

$A(s) = 0$ صفرهای مدار باز

$B(s) = 0$ قطب‌های مدار باز

$1 + GH = 0$ قطب‌های مدار بسته

$1 + k\frac{A(s)}{B(s)} = 0 \rightarrow B(s) + k(A(s)) = 0$

$k \rightarrow 0 \Rightarrow B(s) = 0$

$k \rightarrow \infty \Rightarrow A(s) = 0 \rightarrow$ اصطلاحاً رفع ابهام شود!

$\frac{d(GH)}{ds} = k\frac{A'(s)B(s) - B'(s)A(s)}{B^2(s)} = 0 \Rightarrow A'(s)B(s) - B'(s)A(s) = 0$

$1 + k\frac{A}{B} = 0 \Rightarrow k\frac{A}{B} = -1 \Rightarrow k = \frac{-B}{A} \Rightarrow \frac{dk}{ds} = 0 \rightarrow -(B'A - A'B) = 0$

۱۱. زاویه خروج از یک قطب به شکل زیر بدست می‌آید:

زاویه خروج از یک قطب $= 180 -$ (مجموع زوایای بین بقیه قطب‌ها تا آن قطب) $+$ (مجموع زوایای بین صفرها تا آن قطب)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

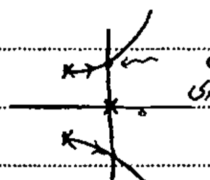
۱۱. زاویه‌ی ورود به یک صفر نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

(مجموع زوایای بین قطب‌ها تا آن صفر) + (مجموع زوایای بقیه صفرها تا آن صفر) − 180 = زاویه ورود به صفر (مختلط مشابهی)

⚠ روابط بالا برای صفرها و قطب‌های مختلط صادق است (۱۱ و ۱۲)

۱۲. تعیین k در هر نقطه از مکان: حاصلضرب طول بردارهایی که از قطب‌های GH تا s مکان رسم می‌شود تقسیم بر حاصلضرب طول بردارهایی که از صفرهای GH تا s مکان رسم می‌شوند.

۱۳. نقاط تقاطع با محور موهومی (آغاز ناپایداری):



با روش راث پیدا می‌شود

$\boxed{k \text{ بحرانی}}$

همان حالات خاصی است که از روش Routh-Hurwitz به دست می‌آید. یا می‌توانیم در شرط اندازه، ریشه‌ی s=jω گذاری تا هم ω و k به دست بیاید.

۱۴. حساسیت ریشه‌ها:

$$S_k^s = \frac{k}{s}\frac{ds}{dk}$$

sensitivity

ریشه‌ها به تغییرات k

در نقاط شکست حساسیت به سمت بی‌نهایت می‌رود.

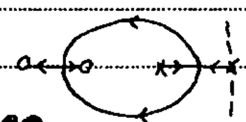
پس در طراحی سعی ما بر این خواهد بود که به اندازه‌ی کافی از نقاط شکست فاصله بگیریم.

⚠ باید توجه داشت که یک تغییر کوچک در موقعیت نسبی صفرها و قطب‌های مدار باز ممکن است باعث یک تغییر اساسی در شکل مکان هندسی شود.

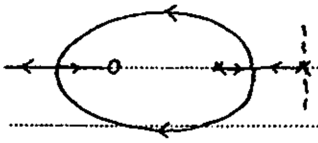
۸۸.۹.۱۰

۱۵. برخی از حالاتی که بخشی از مکان یک دایره یا قطعه‌ای از یک دایره خواهد شد:

۱) GH دارای دو قطب و دو صفر باشد (روی محور حقیقی)



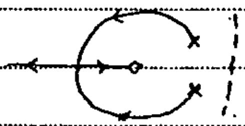
PAPCO



۲) دارای دو قطب و یک صفر روی محور حقیقی باشد.

مثال نقض

۳) دارای دو قطب مختلط و یک صفر حقیقی باشد مکان یک دایره خواهد شد، به مرکز آن صفر.



۱۶. اگر GH تابع مدار باز دارای عبارات غیرچندجمله‌ای باشد، در اینصورت باید از تقریب‌های چندجمله‌ای استفاده نمود تا بتوان مکان هندسی ریشه‌ها را رسم کرد. برای مثال تابع تأخیر

$$e^{-Ts} = 1 - Ts = \frac{1}{1+Ts} = \frac{1-\frac{T}{2}s}{1+\frac{T}{2}s} = \frac{1-\frac{T}{2}s+\left(\frac{Ts}{8}\right)^2}{1+\frac{T}{2}s+\left(\frac{Ts}{8}\right)^2}$$

۱۷. $H(s) = (s+1)$ و $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$ $\Leftarrow$ $GH = \frac{k}{s(s+2)}$

باید قطب و صفرهای حذف شده را به قطب و صفرهای GH اضافه کرد تا منحنی مکان هندسی صحیح بدست آید.

مثال:

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)} \quad \leadsto \quad 1 + kGH = 0$$

$z_1 = -1 \quad P_1 = 0 \quad P_2 = 1$ — تعداد شاخه‌ها $= 4$

$P_{3,4} = -2 \pm j2\sqrt{3}$ — تعداد مجانب‌ها $= 3$

$n = 4, \; m = 1 \quad n - m = 3$ — محل برخورد مجانب‌ها $= \frac{\sum P_i - \sum z_i}{n-m} = -\frac{2}{3}$

زاویه مجانب‌ها: $60, \; 180, \; 300$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

نقاط شکست : k برحسب s $\rightarrow k = -\dfrac{s(s-1)(s^2+4s+16)}{s+1}$

$\dfrac{dk}{ds} \Rightarrow s_{1,2} = -0.76 \pm j\,2.16 \xrightarrow{\text{polyval}} k = 30.25 \pm j\,3.19 \longrightarrow$ X نقطه شکست نیست

$s_3 = -2.26 \longrightarrow k = 7.05$

$s_4 = 1.45 \longrightarrow k = 3.07$

محل برخورد با محور موهومی : $1 + kGH = 0 \longrightarrow s^4 + 3s^3 + 12s^2 + (k-16)s + k = 0$

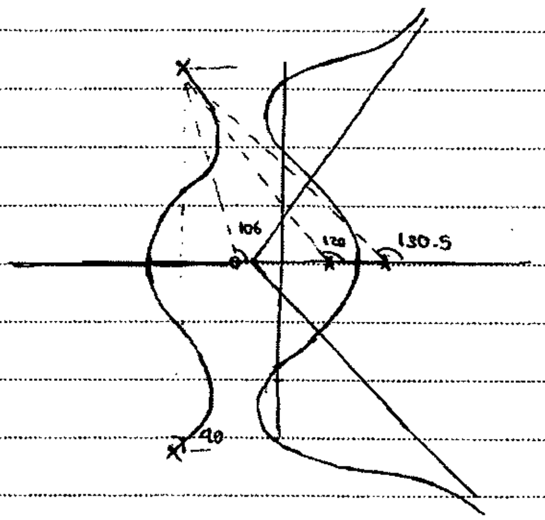
(آستانه ناپایداری)

s^4	1	12	k
s^3	3	$k-16$	0
s^2	$\frac{52-k}{3}$	k	0
s^1	$\frac{-k^2+59k-832}{52-k}$	0	
s^0	k		

احتمال وجود تقاطع با محور موهومی $\longrightarrow -k^2+59k-832=0 \longrightarrow k=35.7,\ k=23.3$

$A(s) = \dfrac{52-k}{3}s^2 + k = 0 \begin{cases} k=35.7 \rightarrow s_{1,2} = \pm j\,2.56 \\ k=23.3 \rightarrow s_{3,4} = \pm j\,1.56 \end{cases}$

زاویه خروج از قطب های مختلط : $\phi_{s=-2\pm j2\sqrt{3}} = 180 - (130.5 + 120 + 90) + (106) = -54.5^\circ$



PAPCO

MATLAB دستور : rlocus , polyval

مثال:

$$GH = \frac{k(s+4)}{s[(s+5)^2+4]}$$

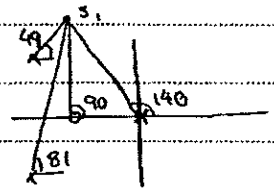
$z_1 = 4 \quad P_1 = 0 \quad P_{2,3} = -5 \pm 2j$

$$\begin{cases} \angle GH(s) = \pm 180(2k+1) & \rightarrow \text{پیدا کردن نقطه} \\ |GH(s)| = 1 & \rightarrow \text{پیدا کردن k مربوطه} \end{cases}$$

با سعی و خطاهای فراوان نقطه s_1 ای با مشخصات زیر بدست آمده است

$$\angle GH(s_1) = \angle(s_1+4) - \angle s_1 - \angle((s_1+5)^2+4)$$

$$= 90 - (49+81+140) = -180 \checkmark$$

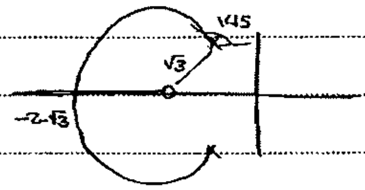


$$1 = |GH(s_1)| = k\frac{|s_1+4|}{|s_1||(s_1+5)^2+4|} \Rightarrow k = \frac{(5.2)(1.6)(5.5)}{3.4} = 13.5$$

مثال

$$G = \frac{k(s+2)}{s^2+2s+3}$$

$z_1 = -2 \quad P_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2}$



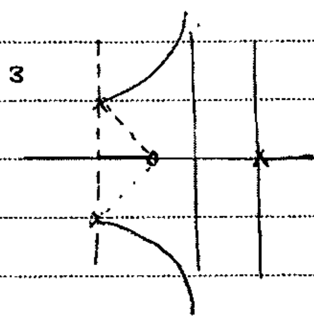
مثال

$$GH = \frac{s+4}{s((s+5)^2+4)}$$

$m = 1$
$\Rightarrow n - m = 2$ تعداد مجانب‌ها   با زاویه 90 و 270
$n = 3$

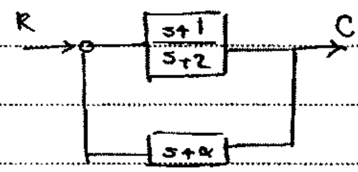
$z_1 = -4 \quad P_{1,2} = \pm 2j - 5 \quad P_3 = 0$ محل تقاطع مجانب‌ها $= -3$

زاویه خروج $= 55°$



Subject:

Year. Month. Date.

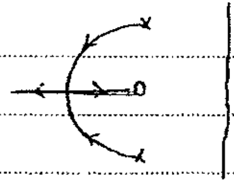


مثال: مکان ریشه‌های مدار بسته را نسبت به α رسم کنید.

$$1+GH=0 \rightarrow 1+\frac{(s+1)(s+\alpha)}{(s+2)}=0 \rightarrow s+2+s^2+(1+\alpha)s+\alpha=0$$

$$s^2+s+2+s+(1+\cancel{\alpha})\alpha=0$$

$$\rightarrow 1+\alpha\frac{s+1}{s^2+2s+2}=0 \Rightarrow$$



۸۸,۹,۲۲

* طراحی سیستم‌های کنترلی به کمک روش Root-locus

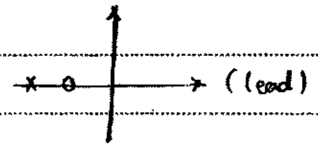
Compensation is the modification of system dynamics to satisfy the given specifications. The specifications may be given in terms of transient response requierments and of steady state requierments.

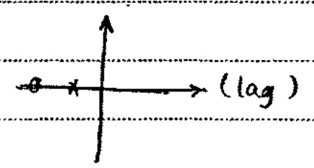
The design by the root locus method is based on reshaping the root locus of the system by adding poles and zeros to the systems openloop transfer function and forcing the loci to pass through the desired closed loop poles. The characteristic of the root locus design is its being based on the assumption that the closed loop system has a pair of dominant closed loop poles.

The redesign of original system or addition of a suitable device is called compensation. A device inserted into the system for the purpose of satisfying the specifications is called a compensator.

The addition of a pole to the open-loop transfer function has the effect of pulling the root locus to the right, tending to lower the systems relative stability and to slow down the settling of the response.

The addition of a zero to the openloop transfer function has the effect of pulling the root locus to the left, tending to make the system more stable and speed up the settling of the response.



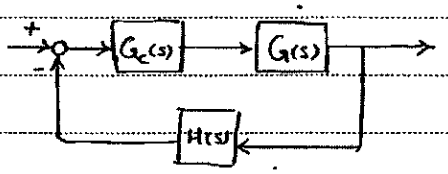


می‌توان نشان داد که lead و lag در حالات خاص (حالت حدی) به ترتیب همان PD و PI است.

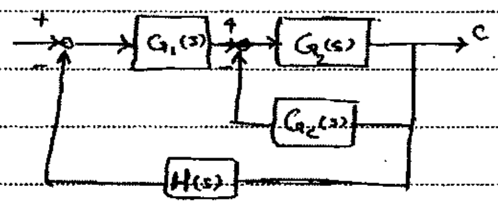
برای ساختن PID هم می‌توان از ترکیب lead + lag استفاده کرد.

* جبران کننده‌ها (Compensator) $G_c(s)$ ← سری و موازی

کنترل کننده‌ها



«سری»



«موازی»

جبران ساز پیش‌فاز (تقدم فاز) — Phase Lead Compensator

جبران ساز پس‌فاز (تأخیر فاز) — Phase Lag Compensator

جبران ساز پس-پیش‌فاز — Lag-lead Compensator

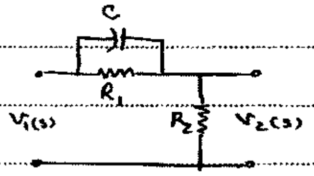
← $G_c(s)$

در این نوع کنترلر، تأخیر فاز در ناحیه‌ی فرکانس‌های پایین و تقدم فاز در ناحیه‌ی فرکانس‌های بالا اتفاق می‌افتد.

to aviod power dissipation, the series compensator is inserted at the lowest energy point in the feed forward path.

دلیل این نامگذاری این است که مثلاً وقتی یک lag اضافه می‌کنیم، یک تأخیر فاز در پاسخ مشاهده می‌شود.

* مدار الکترونیکی Phase Lead (a

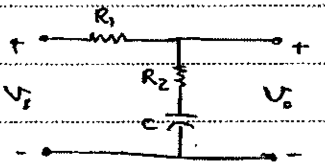


$$G_c(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)\frac{R_1Cs+1}{\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}s+1}=\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}$$

که در آن $T=R_1C>0$ و $\alpha=\frac{R_2}{R_1+R_2}$ ⟵ $0<\alpha<1$

پس برای طراحی یک lead کافی است α و T را بدست بیاوریم.

Phase lag (b



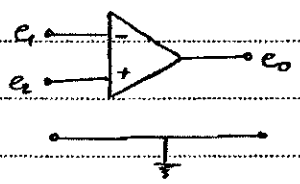
$$G_c(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{R_2Cs+1}{(R_1+R_2)Cs+1}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\,\frac{s+\frac{1}{R_2C}}{s+\frac{1}{(R_1+R_2)C}}$$

$$=\frac{1}{\beta}\,\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{T\beta}}$$

که در آن $T=R_2C$ و $\beta=\frac{R_1+R_2}{R_2}$ و $T>0$ و $\beta>1$

پس همانطور که مشاهده می‌شود تفاوت lead و lag فقط در پارامترهای α و β است.

* Operational Amplifiers (Op-Amp) ⟵ یک کلاس از IC ها

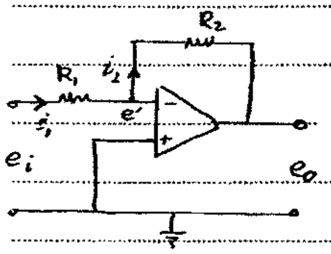


$e_o=k(e_2-e_1)$ ⟶ Differential Amp.

↳ dc , ac < 10Hz : $k=10^5-10^6$

ac ≅ 1MHz − 50MHz : $k=1$

در حالت ایده‌آل از Op-Amp جریانی عبور نمی‌کند.



نوع دیگری از Amplifier ها از همین کلاس:

→ Inverting Amplifier

$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1}$, $i_2 = \frac{e' - e_o}{R_2}$, $e_o = k(e' - 0)$

k مقدار خیلی بزرگ

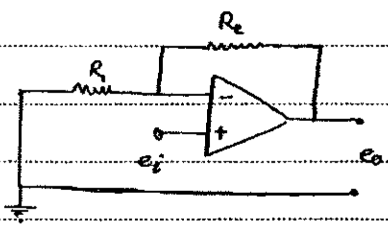
پس اگر بخواهیم e_o در رنج قابل قبولی باشد، باید $e' \to 0$ خیلی کوچک باشد.

$\Rightarrow i_1 = \frac{e_i}{R_1}$, $i_2 = \frac{-e_o}{R_2}$

جریانی از Op-Amp نمی‌گذرد: $i_1 = i_2 \to \frac{e_i}{R_1} = -\frac{e_o}{R_2} \Rightarrow e_o = -\frac{R_2}{R_1} e_i$

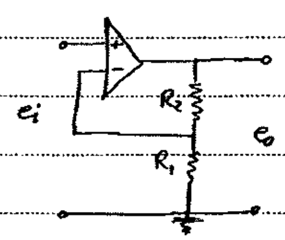
e.g. $R_2 = R_1 \to e_o = -e_i$

و یک نوع دیگر از همین کلاس:



→ Non-Inverting Amplifier

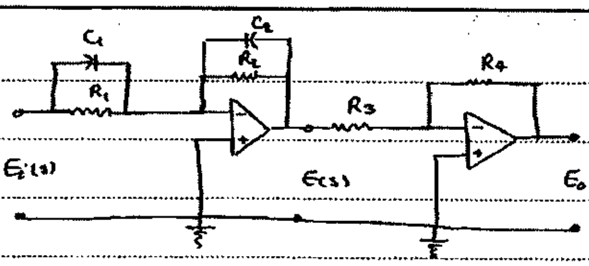
⇓



$\frac{e_i}{R_1} = \frac{e_o}{R_1 + R_2} \to e_o = \frac{R_1 + R_2}{R_1} e_i = (1 + \frac{R_2}{R_1}) e_i$

به کمک همین Amplifier ها مدارهایی می‌سازند که lead و lag را برای تولید می‌کنند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \underset{\hat{k}_c}{k_c} \times \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \quad ; \quad \underset{\beta}{\alpha} = \frac{R_2C_2}{R_1C_1} \quad , \quad T = R_1C_1 \quad , \quad \underset{\hat{k}_c}{k_c} = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}$$

Lead : $R_2C_2 < R_1C_1 \Rightarrow 0<\alpha<1$ $\qquad z = \frac{-1}{R_1C_1} \qquad P = \frac{-1}{R_2C_2}$

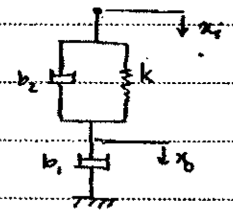
lag : $R_2C_2 > R_1C_1 \Rightarrow \beta>1$

۲) جبران‌سازهای lead برای بهبود رفتار گذرا و بهبود پایداری سیستم استفاده می‌شوند درصورتیکه از جبران‌سازهای lag برای بهبود رفتار ماندگار و کاهش خطای ماندگار استفاده می‌شود.

Mechanical lag & lead Networks *

چون مجموعه‌ای از المان‌ها است، شبکه خوانده می‌شود.

a) lag Network



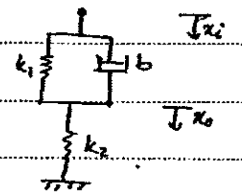
$$b_2(\dot{x}_i - \dot{x}_o) + k(x_i - x_o) = b_1\dot{x}_o$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = G_c(s) = \frac{1}{\beta}\,\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{T\beta}}$$

$$\beta = \frac{b_1+b_2}{b_2} \quad , \quad T = \frac{b_2}{k} \quad , \quad \beta>1 \rightarrow \text{lag} \checkmark$$

b) lead Network



$$b(\dot{x}_i - \dot{x}_o) + k_1(x_i - x_o) = k_2 x_o$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$G_c(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}$$

PAPCO

$$T = \frac{b}{k_1} \quad , \quad \alpha = \frac{k_1}{k_1+k_2} < 1 \rightarrow \text{lead} \checkmark$$

* طراحی lead به کمک مکان هندسی ریشه‌ها:

● مثال: فرض کنید تابع تبدیل حلقه باز به صورت زیر باشد.

$G(s) = \frac{4k}{s(s+2)}$, $H(s) = 1$

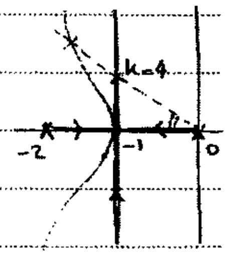
$P_1 = 0$, $P_2 = -2$ قطب‌های مدار باز

$k=4: \; 1 + GH = s^2 + 2s + 4 = 0 \Rightarrow P_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$ قطب‌های مدار بسته

هدف: تغییر قطب‌های مدار بسته به گونه‌ای که بدون تغییر میرایی، فرکانس طبیعی سیستم به $\omega_n = 4 \frac{rad}{s}$ برسد.

معادله مشخصه اولیه: $s^2 + 2s + 4 = 0 \rightarrow \omega_n = 2, \; \zeta = 0.5$

نهایی ״ : $\omega_n = 4$, $\zeta = 0.5$



با توجه به مکان هندسی، مشکلا با بازی کردن با k نمی‌توانیم به هدف مطلوب برسیم.
پس باید یک تابع تبدیل به سیستم اضافه کنیم. تا اینکه شکل مکان را تغییر بدهد.

$\zeta = 0.5 = \cos\beta \Rightarrow \beta = 60^\circ$

قطب‌های اولیه: $P_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$

قطب‌های مطلوب: $P_{1,2} = -2 \pm j\,2\sqrt{3}$

$$\rightarrow \boxed{G_c} \rightarrow \boxed{G} \rightarrow$$

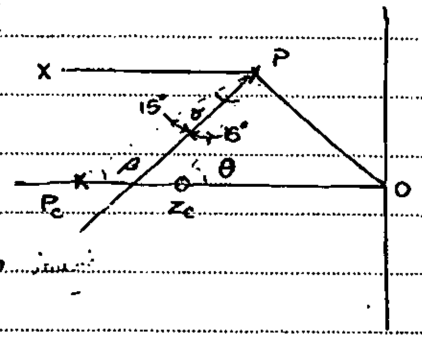
$G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$ $\qquad Z = -\frac{1}{T}$ $\qquad P = -\frac{1}{\alpha T}$

هدف: بدست آوردن α و T (اما باید k_c هم انتخاب کنیم)

$e_{ss} = \frac{1}{k_v}$ $\qquad k_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s)$ $\quad$ k_c را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که کمترین مقدار e_{ss} را داشته باشد.

با این فرض، مسئله به صورت زیر حل می‌شود.

شرط اینکه نقطه‌ای روی مکان باشد، آن بود که شرط زاویه را ارضا کند. صفرها زاویه را بیشتر و قطب‌ها زاویه را کمتر می‌کنند.



$$\angle \frac{4}{s(s+2)}\Big|_{s=-2\pm j2\sqrt{3}} = -210$$

$\hat{XPO}$ نیمساز

phase deficiency: $-180-(-210)=30^\circ$

$$30^\circ = \theta - \beta = \gamma = 30^\circ$$

Pz_c زاویه بردار ، PP_c زاویه بردار

می‌توانیم صفر و قطب را به بی‌نهایت حالت روی محور به گونه‌ای قرار بدهیم که زاویه γ ، 30° باشد ولی ما اول نیمساز بالا را رسم می‌کنیم بعد 15° این‌ور و آن‌ور خطوط PP_c و Pz_c را رسم می‌کنیم. درنتیجه خواهیم داشت:

$$z_c = -2.9 = -\frac{1}{T} \Rightarrow T = 0.345$$

$$P_c = \frac{-1}{\alpha T} \Rightarrow \alpha = 0.537 \qquad \Rightarrow G G_c = k_c \frac{s+2.9}{s+5.4}\,\frac{4}{(s+2)s}$$

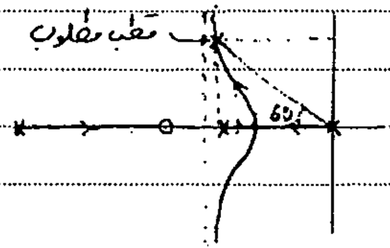
$P_c = -5.4$

$$|G_c G|\Big|_{s=-2\pm j2\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow 4k_c = 18.7 \Rightarrow k_c = 4.68$$

$$\boxed{\Rightarrow G_c(s) = 4.68\,\frac{s+2.9}{s+5.4}}$$

$k_v = \lim_{s\to 0} s\,G_c(s)\,G(s) = 5.02$ ✓ ⇒ برای ورودی شیب واحد: $e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{5.02}$

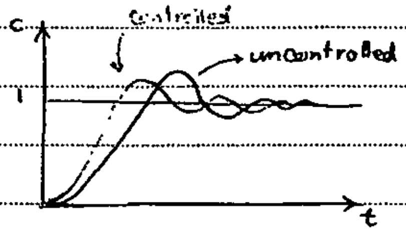
این lead به طور تقریبی مکان‌ها را در رفتار گذرای سیستم و در نتیجه در محل قطب‌ها و نیز k سیستم تغییر ایجاد کرده است. $k: 4 \to 18.7$



k هایی که zero را می‌سازند، بهره‌های استاتیکی هستند ولی k ای که محل قطب را مشخص می‌کند، مربوط به خود تابع تبدیل است. ما در طراحی lag سعی می‌کنیم با حفظ k مسیر، k_v را افزایش دهیم.

$$\text{قطب سوم} \equiv \frac{s(s+2)(s+5.4)+18.7(s+2.9)}{(s-(-2+j2\sqrt{3}))(s-(-2-j2\sqrt{3}))} = s+3.4$$

حالا ببینیم این کار ما، چه تغییری در رفتار گذرای سیستم داده است.



کلاً پاسخ پله را بررسی کنیم

از آنجایی که قطب سوم ما به اندازه‌ی کافی دور هست و همان قطب‌های زوج مختلط قطب‌های غالب سیستم هستند، رفتار سیستم را با یک سیستم درجه ۲ تقریب می‌زنیم.

* طراحی lag به کمک مکان هندسی ریشه‌ها:

$$G_c(s) = \hat{k}_c\beta\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = \hat{k}_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}$$

برای اینکه از تغییرات قابل ملاحظه در مکان هندسی ریشه‌ها پیشگیری نماییم، سهم lag در تغییر زاویه را باید کوچک در نظر بگیریم. مثلاً کمتر از ۵°. به همین دلیل معمولاً صفر و قطب‌های lag در نزدیکی مبداء و نزدیک به هم انتخاب می‌شوند اما همین امر نقطه ضعف عمده‌ی lag را به همراه دارد زیرا صفر نزدیک مبدا باعث ایجاد قطب‌های حلقه بسته در نزدیکی مبدا می‌شود و در نتیجه باعث ایجاد دنباله‌ی طولانی با دامنه‌ی اندک در پاسخ به ... خواهد شد.

فرض کنید در سیستمی رفتار مناسب گذرا با تغییر ساده‌ی gain درست یافتنی است اما می‌خواهیم رفتار ماندگار سیستم را تغییر دهیم، در اینصورت نیاز به یک lag خواهیم داشت. بالطبع اگر بخواهیم هم رفتار گذرا و هم رفتار ماندگار را

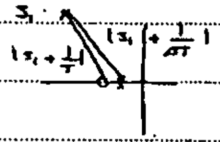
Subject:
Year. Month. Date. ( )

تغییر دهیم، به یک lag-lead نیاز خواهیم داشت

●● در مورد φ :

$$-5^\circ < \angle \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}\Bigg|_{s=s_1} < 0^\circ$$

$$G_c(s_1) = \left|\hat{k}_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}\right|_{s_1} \approx \hat{k}_c \qquad \left|\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}\right|_{s_1} \approx 1$$



$$k_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s)$$

$$\hat{k}_v = \lim_{s\to 0} s\,G_c(s)G(s) = k_v \lim_{s\to 0} G_c(s) = \hat{k}_c \beta k_v$$

طراحی: $k_v \longrightarrow \hat{k}_v = \hat{k}_c \beta k_v$

بنابراین k_v با فاکتور $\hat{k}_c\beta$ افزایش پیدا می‌کند.

با انتخاب $\hat{k}_c = 1$ ، k مربوط به قطب حلقه مطلوب با k مربوط به قطب اولیه یکسان خواهد بود. به عبارت دیگر محل قطب‌ها تغییری نمی‌کند.

$s \longrightarrow s=0 \qquad k\big|_{\text{استاتیکی}} = \beta \qquad \hat{k}_v = \beta k_v \quad$ در $\beta > 1$

$s = s_1 \qquad k\big|_{s_1} = 1$

طراحی : $k_v \longrightarrow \hat{k}_v$

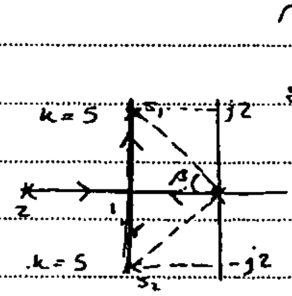
۸۸,۹,۲۹

●مثال:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

$\zeta = 0.45 \qquad K_v = 20$

$\cos\beta = 0.45 = \frac{1}{\sqrt{5}}$



PAPCO

جلسه فوق العاده : پنج شنبه ۸۸,۱۰,۱۰ ساعت ۲

Subject: کنترل سیستم‌ها

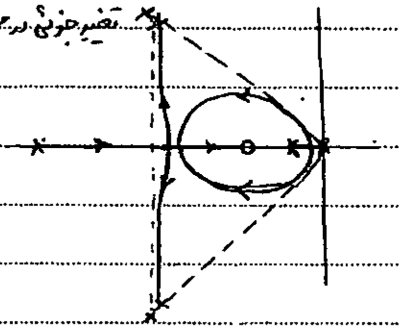
Year. Month. Date. ( )

$s_{1,2} = -1 \pm 2j \longrightarrow K = 5$ (از معادله مشخصه)

$k_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s) = \frac{5}{2} = 2.5$ خطای ماندگار به شیب واحد : $e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{2.5}$

$G_c(s) = \hat{k}_c \dfrac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}$; $\beta > 1$

تغییر جزئی در محل قطب حلقه بسته



$\dfrac{|z|}{|p|} = \beta = \dfrac{\hat{k}_c}{k_c} = \dfrac{k_c|_d}{k_c} = \dfrac{20}{2.5} = 8$

$\dfrac{|z|}{|p|} = 8$ e.g. $z = 0.1 \Rightarrow p = 0.0125$

$\angle \dfrac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \Bigg|_{s_1} = 1^\circ$ $\quad G_c(s) = 1\,\dfrac{s + 0.1}{s + 0.0125}$

تابع تبدیل سیستم جبران شده $T(s) = G(s)\,G_c(s) = \dfrac{5\,(s+0.1)}{s\,(s+2)(s+0.0125)}$

این مثال را حتماً با MATLAB حل کنید!

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل ۵ : روش پاسخ فرکانسی و طراحی کنترلر بکمک روش پاسخ فرکانسی

Frequency Response

پاسخ فرکانسی در واقع پاسخ ماندگار یک سیستم دینامیکی به ورودی هارمونیک می باشد .
این روش روشی ساده و دقیق است و بسیار در صنعت کاربرد دارد . با این روش در مورد پایداری مطلق و نسبی سیستم های دینامیکی می توان اظهار نظر کرد . از قابلیت های این روش بررسی سیستم های با تابع تبدیل غیرخطی مثل تابع تأخیر را نام برد.
می توان قابلیت

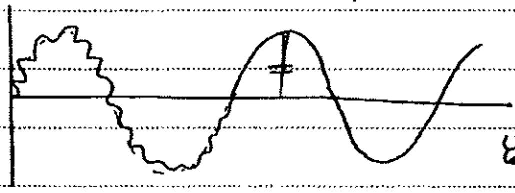
فعلاً فقط تابع تبدیل مدار باز را تحلیل می کنیم و همین کار برای تحلیل شدن مدار بسته هم کفایت می کند.

$s=\sigma+j\omega \xrightarrow{\text{حل ماند}} (s\to j\omega) : s=j\omega \Longrightarrow G(s)=G(j\omega)$

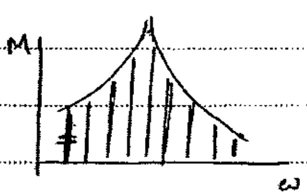
Free Vibration : $s_1=\sigma+j\omega=-\zeta\omega_n+j\omega_d$

اگر σ در طول زمان از بین می رود : اگر ارتعاشات آزاد سیستم مرتبه ۲ را به یاد بیاورید ، این σ هم در واقع همان $\zeta\omega_n$ است ، به وسیله یک exp در پاسخ سیستم ظاهر می شود .

حال اگر Forced Vibration داشته باشیم ، چه می شود؟



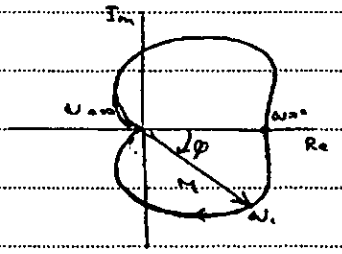
در روش پاسخ فرکانسی ، ورودی هارمونیک را با فرکانس های مختلف به سیستم اعمال می کنیم و دامنه ی ارتعاش سیستم در هر فرکانس را اندازه می گیریم .



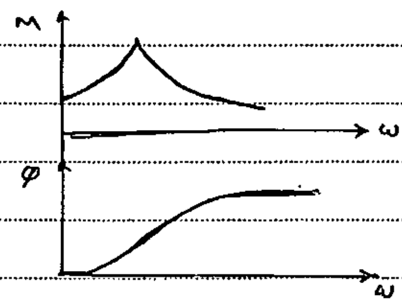
از این به بعد بیشتر با تابع تبدیل روبرو کار داریم:
$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega) = M\angle\varphi$
$= Me^{j\varphi}$
$= Re(G(j\omega)) + j\, Im(G(j\omega))$

*روش های مختلف ترسیم $G(j\omega)$:

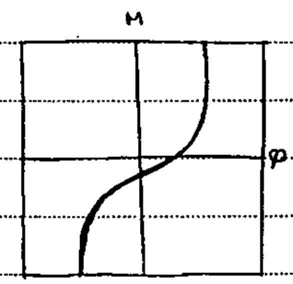
۱) روش Nyquist:
← پایداری



۲) دیاگرام Bode:
← تشخیص صفر و قطب ها



3) دیاگرام Nicholes:



● تابع تبدیل حلقه باز روبرو را در نظر بگیرید.

$R \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow C$

$r(t) = R \sin \omega_0 t$
$c(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi)$
$C(s) = G(s)R(s)$: حل با $s = j\omega \Rightarrow C(j\omega) = G(j\omega)R(j\omega)$

Subject:
Year. Month. Date. / /

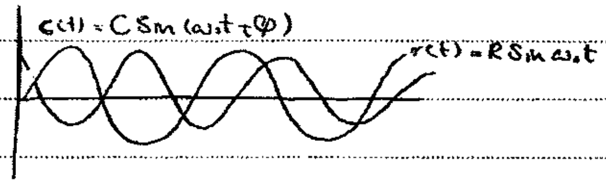
$$\Rightarrow \begin{cases} |C(j\omega)| = |G(j\omega)|\,|R(j\omega)| \\ \angle C(j\omega) = \angle G(j\omega) + \angle R(j\omega) \end{cases}$$

برای راحتی کار در نظر می‌گیریم : $\angle R(j\omega) = 0$

$$\Rightarrow c(t) = R|G(j\omega)| \sin(\omega_0 t + \angle G(j\omega)) = C \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$\angle G(j\omega) < 0$: Phase Lag پس‌فاز (تأخیر فاز)

$\angle G(j\omega) > 0$: Phase Lead پیش‌فاز (تقدم فاز)



$$G(s) = \frac{A_1(s)\,A_2(s)}{B_1(s)\,B_2(s)}$$

$$|G(s)| = \frac{|A_1|\,|A_2|}{|B_1|\,|B_2|} \qquad \angle G = \angle A_1 + \angle A_2 - \angle B_1 - \angle B_2$$

$$\angle(\alpha s + \beta) = \angle(\alpha j\omega + \beta) = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha\omega}{\beta}\right)$$

$$\angle(\alpha s + \beta)^3 = 3\tan^{-1}\left(\frac{\alpha\omega}{\beta}\right)$$

$$\angle \frac{1}{s(s+\beta)^3} = -\frac{\pi}{2} - 3\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$$

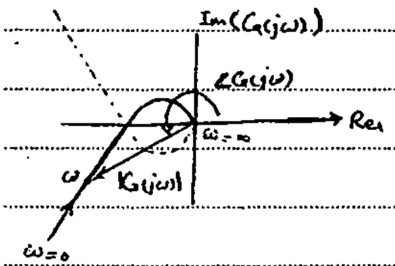
(1) دیاگرام و نمودار نایکوییست

به کمک این روش می‌توان پایداری و یا درجه ناپایداری را بررسی نمود. (چند قطب ناپایدار دارد). نمودار بر اساس

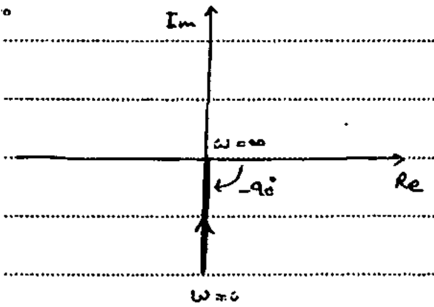
ω : $0 \to \infty$ رسم می‌شود و زاویه در جهت مثلثاتی نسبت به محور حقیقی اندازه‌گیری می‌شود.

بدون اینکه به کلیتی بر بخورد، $H=1$ در نظر می‌گیریم و G را رسم می‌کنیم و یا اصلاً GH را رسم می‌کنیم.

- رسم چند اپراتور اصلی:

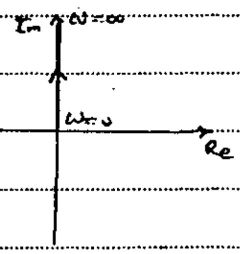


1) انتگرالگیر : $G(s) = \frac{1}{s}$



$$G(s) = G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}\angle -90$$

2) صفر : $G(s) = s$

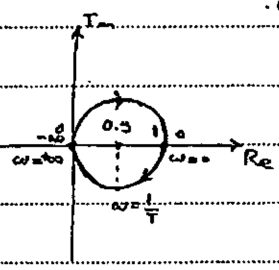


$$G(s) = G(j\omega) = j\omega = \omega\angle 90^\circ$$

یک نکته: ما $G(j\omega)$ $(\omega<0)$ را رسم می‌کنیم و چون $|G(j\omega)| = |G(-j\omega)|$, $\angle G(j\omega) = -\angle G(-j\omega)$

پس دیاگرام نایکوئیست از $-\infty$ تا صفر، قرینه دیاگرام از صفر تا $+\infty$، نسبت به محور حقیقی است.

3) $G(s) = \frac{1}{1+Ts}$



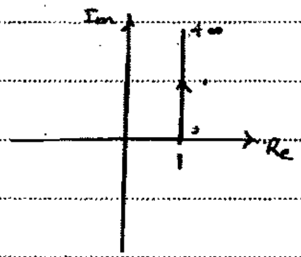
$$G(s) = G(j\omega) = \frac{1}{1+Tj\omega} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\angle -\tan^{-1}\frac{\omega T}{1}$$

$\omega=0 \to \frac{1}{1}\angle 0^\circ$ $\quad \omega=\frac{1}{T} \to \frac{\sqrt{2}}{2}\angle -45^\circ$ $\quad \omega=\infty \to 0\angle -90^\circ$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فیلم ندیدیم سر کلاس! ۸۸،۱۰،۸

۸۸،۵،۱۰

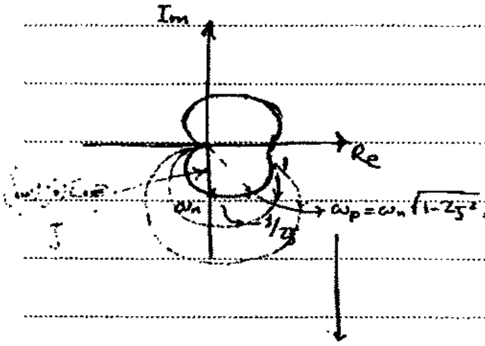


4) $G(s) = 1 + sT$

$G(j\omega) = 1 + j\omega T$

$|G(j\omega)| = \sqrt{1+\omega^2 T^2}$

$\angle(G(j\omega)) = \tan^{-1}\frac{\omega T}{1} = \tan^{-1}\omega T$



5) $G(s) = \dfrac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$

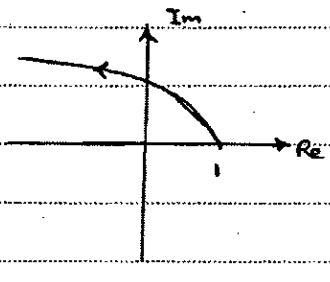
$G(j\omega) = \dfrac{1}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j}$

$@\ \omega = \omega_n \Rightarrow G(j\omega) = \dfrac{1}{j2\zeta} = -\dfrac{j}{2\zeta}$

$@\ \omega = 0 \Rightarrow 1$

$@\ \omega \to \infty \Rightarrow 0$

$M_p = M_r = \dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$

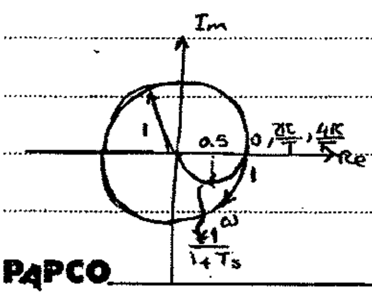


6) $G(s) = \frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1$

$G(j\omega) = \left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}$

$@\ \omega = 0 :\ 1$

$@\ \omega \to \infty :\ \infty$



7) Delay (تأخیر) $G(s) = e^{-Ts}$

$|G(j\omega)| = 1\ ,\ \angle -T\omega\frac{180}{\pi}$

همانطور که مشاهده می‌شود، $\frac{1}{1+Ts}$ در حوزه‌ی فرکانس‌های کوچک، تقریب خوبی برای تابع تأخیر است.

PAPCO

* رسم دیاگرام نایکوئیست :

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots} = \frac{K(1+sT_a)(1+sT_b)\cdots}{s^N (1+sT_1)(1+sT_2)\cdots}$$

برای سیستم‌های MP و با فرض $n > m$!

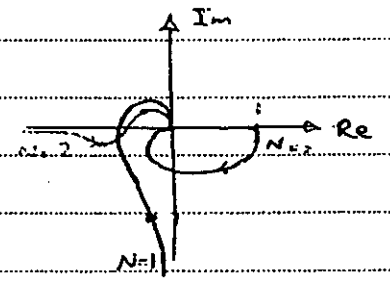
$\boxed{\omega = +\infty}$ $\varphi = -\frac{\pi}{2}(n-m)$ $\boxed{\omega = 0}$ $\varphi_i = -\frac{\pi}{2} N$

۱- نوع صفر ($N=0$) : منحنی روی محور حقیقی شروع می‌باشد. منحنی به مبداء ختم می‌شود و منحنی یعنی $\varphi_i = 0$ (محل شروع منحنی) نایکوئیست به یکی از محورها مماس خواهد شد. مماس بر منحنی، عمود بر محور حقیقی است. $\varphi_f = -\frac{\pi}{2}(n-m)$

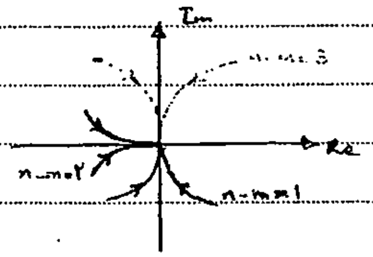
۲- نوع یک ($N=1$) : دامنه بی‌نهایت و فاز -90 می‌شود. منحنی به خط موازی با بخش منفی محور موهومی مجانب خواهد شد. $\varphi_i = -\frac{\pi}{2}$ منحنی به مبداء ختم می‌شود و منحنی نایکوئیست به یکی از محورها مماس خواهد شد.

۳- نوع دو ($N=2$) : دامنه بی‌نهایت و فاز -180 می‌شود و منحنی به خط موازی با بخش منفی محور حقیقی مجانب ! $\varphi_i = -\pi$ منحنی به مبداء ختم می‌شود و به یکی از محورها مماس می‌شود.

برای تفاوت روی شروع نمودار :



برای تفاوت روی نقطه انتهای نمودار :



Subject:

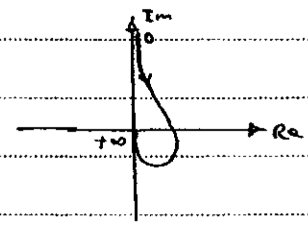
Year. Month. Date. ( )

PAPCO

اگر سیستم "غیر حداقل فاز" بود، قواعد صفحه پیش برایش برقرار نیست و باید رسم کنیم نایکوئیست اش را !!

مثال : $G(s)=\frac{0.5s-1}{s(s+1)}$

$G(j\omega)=\frac{j0.5\omega-1}{j\omega(1+j\omega)}$

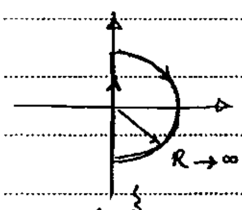


⊗ ما با معادله ی $F(s)=1+GH=0$ سروکار داریم که همانطور که گفته شد، می توان آن را به صورت $GH=-1$ نوشت. در نایکوئیست هم مثل مکان هندسی ریشه ها، GH را رسم می کنیم.

معادله $1+GH=0$ یعنی تابع $F(s)=1+GH$ را رسم کن و با 0 مقایسه کن. پس اگر بخواهیم GH را در نظر بگیریم، کافیست GH را رسم کنیم و حالا با -1 مقایسه کنیم. به همین دلیل در نایکوئیست، نقطه (-1) با اندازه ی 1 و فاز $-\pi$، خیلی مهم است و ما رفتار GH را در اطراف -1 بررسی می کنیم.

* مسیر نایکوئیست

مسیر نایکوئیست مسیر بسته ای است که تمام نیمه راست صفحه s را دربر می گیرد که در واقع شامل تمامی صفرها و قطب های GH در RHP می باشد. (یک نیم دایره به شعاع بی نهایت!)



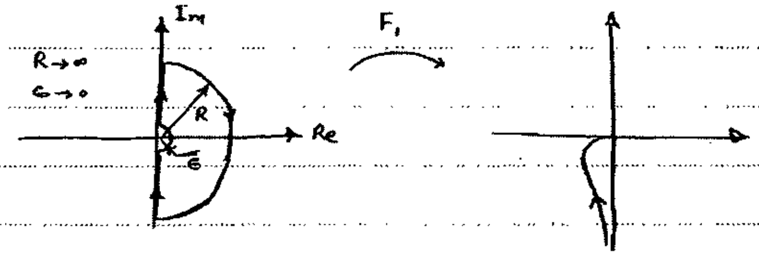
مسیر Nyquist ساعتگرد!

این مسیر در واقع ناحیه ی دامنه ی $F(s)$ را مشخص می کند. $F_1(s)=GH$

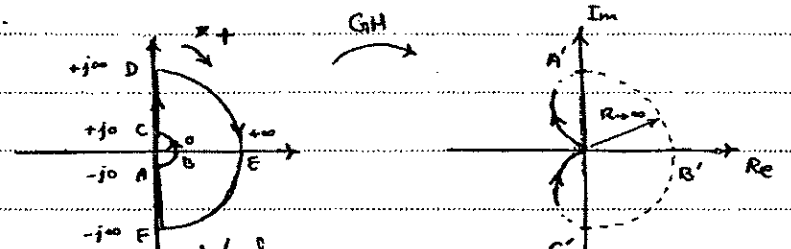
$F(s)$ صفحه ی s را به صفحه ی GH نگاشت می کند.

⚠ تبصره : اگر GH دارای قطب یا قطب هایی روی مبداء باشد، مبداء را با یک دایره کوچک به شعاع ε، از مسیر نایکوئیست بیرون می آوریم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مثال ٦: $GH(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$



مسیر اصلاح شده نایکوئیست

ما فقط با این بخشی که ωهای دلخواه ما رو داده کار داریم!

B: $s=+\varepsilon \rightarrow GH \rightarrow +\infty$

C: $s=+j\varepsilon \rightarrow GH \rightarrow -j\infty$

A: $s=-j\varepsilon \rightarrow GH \rightarrow +j\infty$

D, E, F: $\rightarrow GH \rightarrow 0$

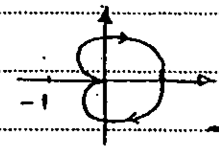
* معیار پایداری نایکوئیست — Nyquist Stability Criterion

- Z: تعداد صفرهای $1+GH$ در RHP ← قطب‌های مدار بسته
- P: تعداد قطب‌های GH در RHP ← قطب‌های مدار باز
- N: تعداد دوران‌های کامل منحنی نایکوئیست حول نقطه‌ی سم $(-1+j0)$
- شرط پایداری: $Z=0$ $(N+P=0)$, $N=-P$ — $Z=N+P$

مثلاً اگر دو قطب در سمت راست ناپایدار داشته باشد، منحنی نایکوییست باید دو دور خلاف جهت حول ۱- بچرخد!

● مثال: [redacted] سیستم درجه ۲

$$GH(s)=\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1}$$



$P=0 \xrightarrow{\text{شرط پایداری}} N=0$ $\longrightarrow N=0 \Longrightarrow$ پایدار

⊛ نتیجه:

الف- اگر $P\neq 0$ باشد، در اینصورت شرط پایداری $N=P$ است، یعنی نمودار نایکوییست باید N بار در خلاف جهت ساعتگرد، ۱- را دور بزند.

ب- اگر $P=0$ باشد، در اینصورت شرط پایداری $N=0$ است یعنی نایکوییست ۱- را نباید دور بزند.

(۲) اگر نایکوییست از ۱- بگذرد، سیستم در آستانه ناپایداری قرار دارد یا به عبارت دیگر قطب‌های حلقه بسته روی محور موهومی قرار دارند.

(۳) نتیجه‌گیری:

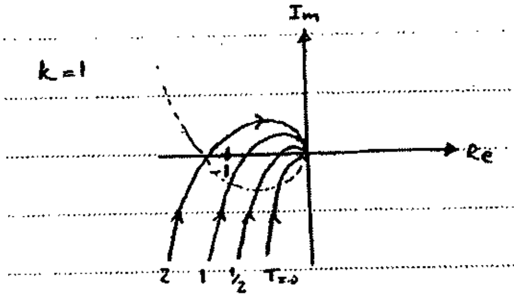
الف- فرض کنید نمودار، نقطه ۱- را دور زده است. اگر در جهت ساعت بود، سیستم ناپایدار است ولی اگر در جهت خلاف ساعت بود، $N=P$ (تعداد دوران‌ها برابر تعداد قطب‌های ناپایدار است)

ب- نقطه ۱- دور زده نشده است $\Leftarrow N=0 \Leftarrow P=0$ پایدار

$P\neq 0$ ناپایدار

Subject:
Year. Month. Date. ( )

● مثال: اثر تابع تأخیر e^{-Ts} بر روی $GH(s)=\frac{ke^{-Ts}}{s(s+2)}$

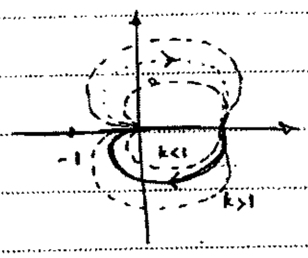


افزایش تأخیر در سیستم، ریسک ناپایداری را بالا می‌برد.

آن مقداری از T که به ازای آن نمودار از -1 می‌گذرد،

می‌شود آستانه‌ی ناپایداری!

● مثال: $GH(s)=\frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$, $T_1,T_2>0$, $k=1$

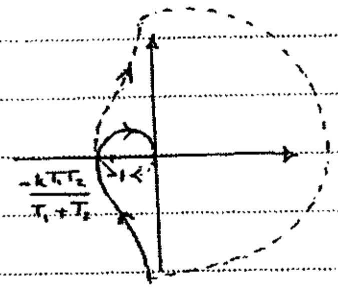


$P_1=-\frac{1}{T_1}$, $P_2=-\frac{1}{T_2} \to P=0$

$N=0 \to$ سیستم پایدار است!

(به ازای $\forall k>0$)

● مثال: $GH(s)=\frac{k}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$, $T_1,T_2>0$



$P=0 \to$ شرط پایداری: $N=0$

$A = \boxed{\frac{-kT_1T_2}{T_1+T_2}} > -1 \to$ شرط پایداری

$\Rightarrow k<\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$

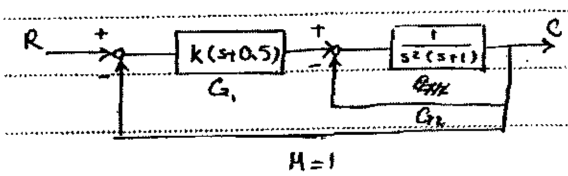
پس به ازای $0<k<\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$ پایدار است!

if $A<-1 \Rightarrow N=2$ ناپایدار

دور کامل شامل شاخه‌های جا

بی‌نهایت هم می‌شود! یادت نره ها!

● مثال: طراحی کنترلر به کمک نمودار Nyquist!

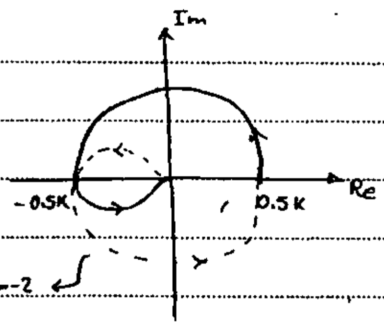


Subject: کنترل - پولس کل

Year. Month. Date. ( )

$$GH = G_1G_2H = G_1G_2 = \frac{k(s+0.5)}{s^3+s^2+1}$$

نایکوییست $\frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$ همیشه متقارن است !



$N=0$ یا $N=-2$

$P=?$

s^3	1	0
s^2	1	1
s^1	-1	0
s^0	1	

1 ، 2

$\rightarrow P=2 \rightarrow N=-P \Rightarrow N=-2 \xRightarrow{\text{نمودار}} -0.5K<-1 \Rightarrow 0.5K>1 \Rightarrow \boxed{K>2}$ شرط پایداری

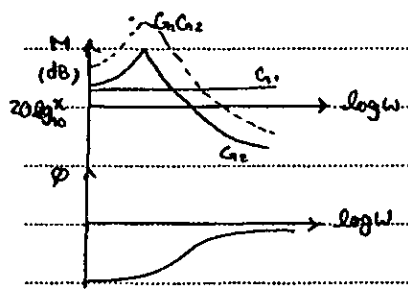
۷ نکته: نمودار نایکوییست معکوس :

$$1+GH=0 \Rightarrow \frac{1}{GH}+1=0 \Rightarrow 1+\frac{1}{GH}=0$$

پس فرقی نمی‌کند برای بحث پایداری که GH را بررسی کنیم یا $\frac{1}{GH}$!

این روش برای سیستم‌های کنترلی که دارای چندحلقه‌ی تودرتو می‌باشند، بسیار مفید خواهد بود و باعث کاهش

چشمگیر حجم محاسبات خواهد شد.



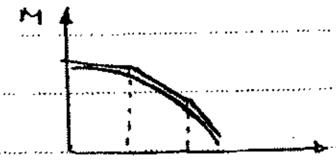
2 دیاگرام بود Bode Plot

مزیت نمودار لگاریتمی در اینجا این است که ضرب دامنه‌ها تبدیل به

جمع دامنه‌ها می‌گردد. می‌شود چند تا تابع تبدیل cascade را

با هم جمع کرد. $G_1G_2G_3$

مزیت دیاگرام این است که یک روش ترسیمی ساده به کمک مجانب‌ها است.

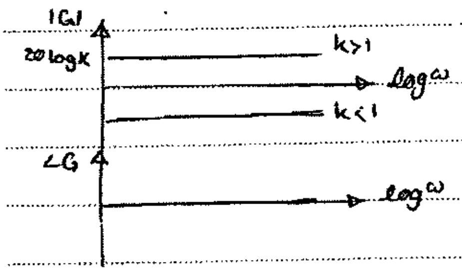


سهولت اصلاح دیاگرام بود با افزودن جبران‌سازها و کنترلرها نیز مزیت دیگر این روش است.

چهارمین مزیت: از روی این دیاگرام می‌توان به راحتی صفرها و قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز را حدس زد.

- رسم چند تابع تبدیل مشهور:

1) بهره ساده Gain



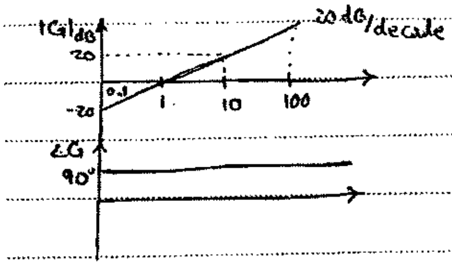
$G(s)=k$

$G(j\omega)=k \qquad |G(j\omega)|=k$

$\angle G(j\omega)=0$

$|G|_{dB}=20\log_{10}k$

2) مشتق‌گیر

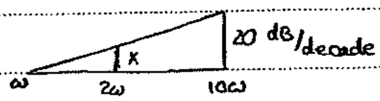


$G(s)=s$

$G(j\omega)=j\omega$

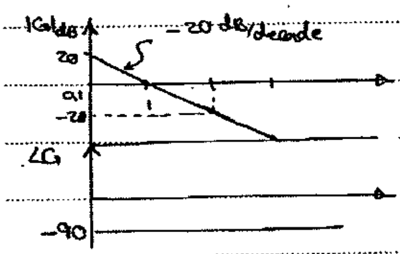
$|G(j\omega)|=\omega \qquad |G|_{dB}=20\log\omega$

$\angle G(j\omega)=90^\circ$



پس → $x=6\ dB/octave = 20\ dB/decade$

3) انتگرال‌گیر



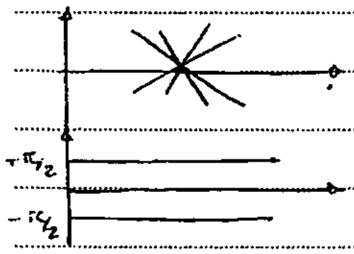
$G(s)=\frac{1}{s}$

$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}=\frac{-j}{\omega}$

$|G(j\omega)|_{dB}=20\log\frac{1}{\omega}=-20\log\omega$

$\angle G=-90=-\frac{\pi}{2}$

۴) صفر و قطب های چندگانه: $G(s)=s^{\pm p}$



خطوط با شیب های از مضرب $\pm 20\ dB/decade$

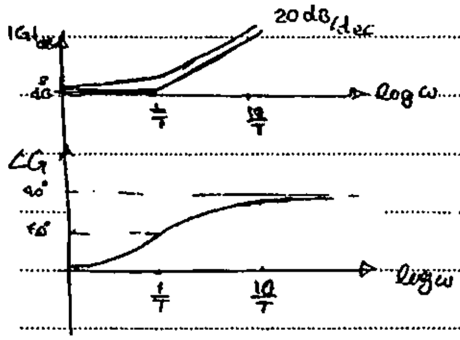
$|G|_{dB}=\pm 20p\log\omega \qquad \angle G=\pm p\frac{\pi}{2}$

پس به کمک دیاگرام بود می توانیم تابع تبدیل را شناسایی کنیم.

$$G=\frac{k(1+sT_a)\dots}{s^N(1+sT_1)\dots}$$

۸۸ / ۱۰ / ۱۳

5) صفر حقیقی ساده: $G(s)=(Ts+1)=T(s+\frac{1}{T})$



$G(j\omega)=1+j\omega T$

$|G(j\omega)|=\sqrt{1+\omega^2T^2}$, $\angle G(j\omega)=\tan^{-1}\omega T$

$|G(j\omega)|_{dB}=20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}$

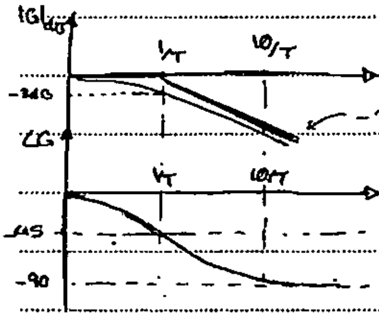
$\omega\to 0: \ |G|_{dB}=0 \quad \angle G=0$

$\omega\to\infty: \ |G|_{dB}=20\log\omega T \quad \angle G=90^\circ$

فرکانس گوشه $\omega=\frac{1}{T}$: corner frequency

$\omega=\frac{1}{T}: \ |G|_{dB}=20\log\sqrt{2}=3dB \quad \angle G=45^\circ$ ← محل تقاطع مجانب ها

حداکثر خطای مجانب ها نسبت به منحنی واقعی: $@\ \omega=\frac{1}{T} \quad 3dB$



6) قطب حقیقی ساده: $G(s)=\frac{1/T}{s+1/T}=\frac{\omega_1}{s+\omega_1}$

$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}$, $|G|_{dB}=-20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}$, $\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}\omega T$

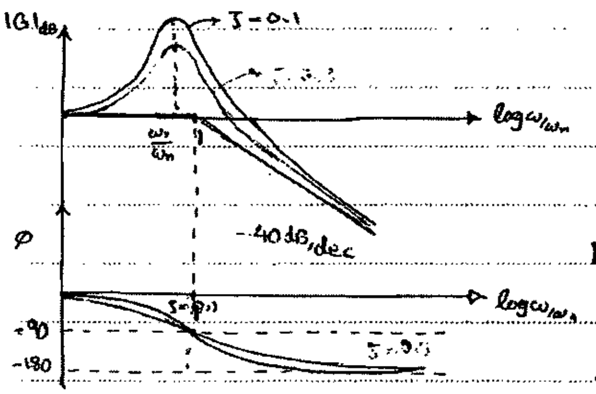
$\omega\to 0: \ |G|_{dB}=0 \quad \angle G=0 \qquad \omega\to\infty: \ |G|_{dB}=-20\log\omega T \quad \angle G=-90^\circ$

$\omega=\frac{1}{T}: \ |G|_{dB}\simeq -3dB \quad \angle G=-45^\circ$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

7) قطب مزدوج مختلط:

$$G(s)=\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1}$$



$$G(j\omega)=\frac{1}{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})+j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$|G(j\omega)|_{dB}=-20\log\sqrt{\left(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

$\omega\to 0: |G|_{dB}=0 \quad \angle G=0$ $\qquad \omega\to\infty: |G|_{dB}=-40\log\frac{\omega}{\omega_n} \quad \angle G=-180$

$\omega=\omega_n: |G|_{dB}=-20\log 2\zeta \qquad \angle G=-90^\circ$

$\omega_r=(\sqrt{1-2\zeta^2})\,\omega_n$

* تعیین توابع تبدیل از روی دیاگرام Bode

1) شیب مجانب‌ها باید مضربی از $\pm 20\,dB/dec$ باشد.

2) اگر شیب یک مجانب در $\omega=\omega_1$ به اندازه‌ی $-20\,dB/dec$ تغییر کند، در تابع تبدیل عامل $\frac{\omega_1}{s+\omega_1}=\frac{1}{Ts+1}$ $(\omega_1=\frac{1}{T})$ وجود دارد.

3) اگر شیب مجانب در $\omega=\omega_1$ به اندازه‌ی $+20\,dB/dec$ تغییر کند، آنگاه در تابع تبدیل عامل $\frac{1}{\omega_1}(s+\omega_1)=1+Ts$ $(\omega_1=\frac{1}{T})$ وجود دارد.

4) این قاعده را می‌توان به مضارب بالاتر شیب‌ها تعمیم داد، به طور مثال اگر تغییر شیبی به اندازه‌ی $-40\,dB$ در فرکانس ω_1 داشته باشیم، آنگاه یا یک قطب مزدوج مختلط در ω_1 داریم یا یک قطب مکرر در ω_1 داریم.

4) در سیستم‌های MP با داشتن منحنی دامنه در تمام گستره‌ی فرکانس از صفر تا بی‌نهایت $(+\infty)$، منحنی فاز به صورت یکتا مشخص می‌شود حال آنکه این موضوع در مورد NMP صادق نیست.

PAPCO

Subject: کنترل - پولسن کن

Year. Month. Date ( )

⊛ در سیستم های MP و NMP ، شیب نهایی برابر است با $-20(n-m)$ (شیب نهایی دیاگرام دامنه)

در سیستم های MP مقدار نهایی فاز برابر $-\frac{\pi}{2}(n-m)$ و مقدار فاز شروع برابر $-N\frac{\pi}{2}$ است.

⊛ از بین سیستم هایی که دامنه های یکسان دارند، سیستم های MP دارای تغییرات فاز کمتری خواهند بود.

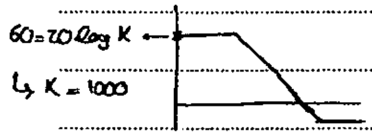
⊛ سیستم های NMP معمولاً نسبت به سیستم های MP با دامنه های یکسان، کندتر عمل می کنند.

⊛ عوامل موثر در NMP کردن سیستم ها:

الف - تأخیر e^{-Ts}

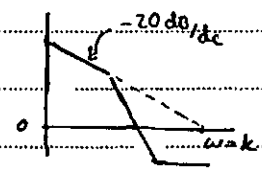
ب - وجود حلقه های داخلی ناپایدار

ج - تعیین بهره K از منحنی نمودار دامنه:



۱) نوع صفر (N=0) : شیب نوع منحنی صفر است.

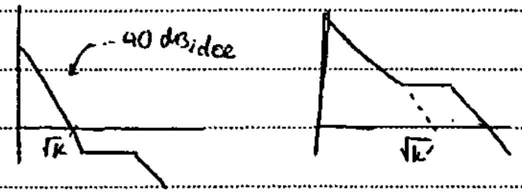
محل تقاطع منحنی با محور عمودی: 20 logK



2) نوع اول (N=1) : شیب نوع منحنی -20 dB/dec است

محل تقاطع خط -20 dB/dec یا امتداد آن با خط dB=0 یعنی gain است.

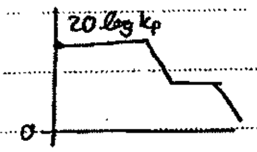
3) نوع دوم (N=2) :



* تعیین ثابت خطاها به کمک نمودار بد :

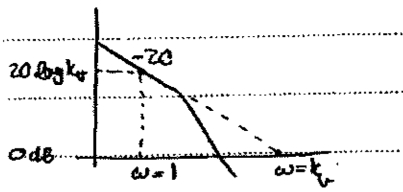
۱) نوع صفر $(N=0)$:

$$k_p = \lim_{s \to 0} G(s)$$

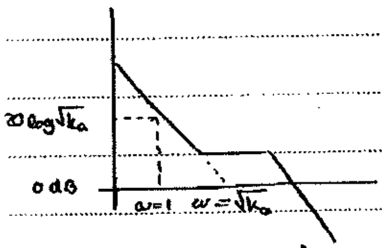


2) نوع اول $(N=1)$:

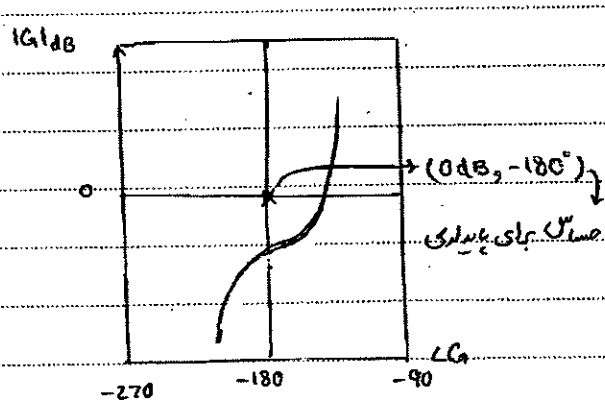
$$k_v = \lim_{s \to 0} s.G(s)$$



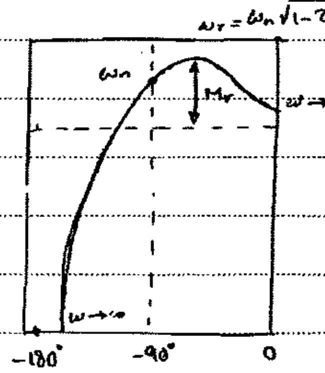
3) نوع دوم $(N=2)$:

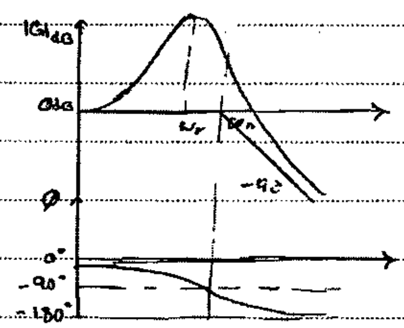


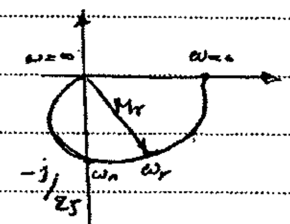
③ منحنی نیکولز Nicholes :



مثال: $G(j\omega) = \dfrac{1}{1+2\zeta(j\frac{\omega}{\omega_n})+(\frac{j\omega}{\omega_n})^2}$



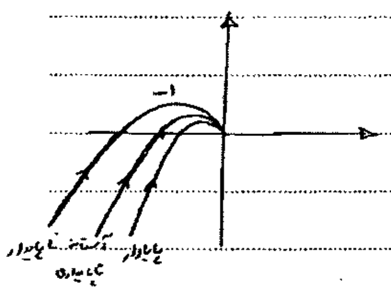


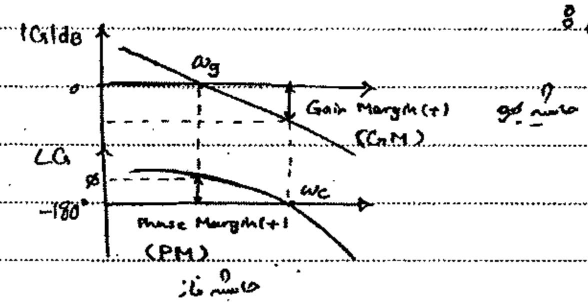


$\omega_n: \quad M = \frac{1}{2\zeta}$

$\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}=\omega_r: \quad M=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ → اختلاف‌شون خیلی کمه و معمولاً نقطه پیک و نقطه طبیعی را یکی در نظر می‌گیریم.

* پایداری:





آستانه ناپایداری هنگامی است که دامنه و فاز همزمان (برای یک فرکانس) به ترتیب یک و -180° شوند.

ω_g یا فرکانس عبور بهره، فرکانسی است که در آن $|G|=1$ باشد. $[|G|_{dB}=0]$

ω_c یا فرکانس عبور فاز، فرکانسی است که در آن $\angle G=-180^\circ$ باشد (فرکانس بحرانی).

حاشیه فاز: $PM=\pi+\phi$ برابر است با پیش‌فاز لازم در فرکانس عبور بهره برای قرار دادن سیستم در مرز ناپایداری! $\phi=\angle G|_{\omega_g}$

Subject:
Year.　　Month.　　Date.　( )

حاشیه بهره ، در شکل صفحه ی قبل پیداست . برای دست یافتن عکس دامنه ی $|G|$ در فرکانس عبور فاز .

$$k_g = \frac{1}{|G|}\Big|_{\omega_c} \quad , \quad GM \equiv 20\log k_g = -|G|_{dB}\Big|_{\omega_c}$$

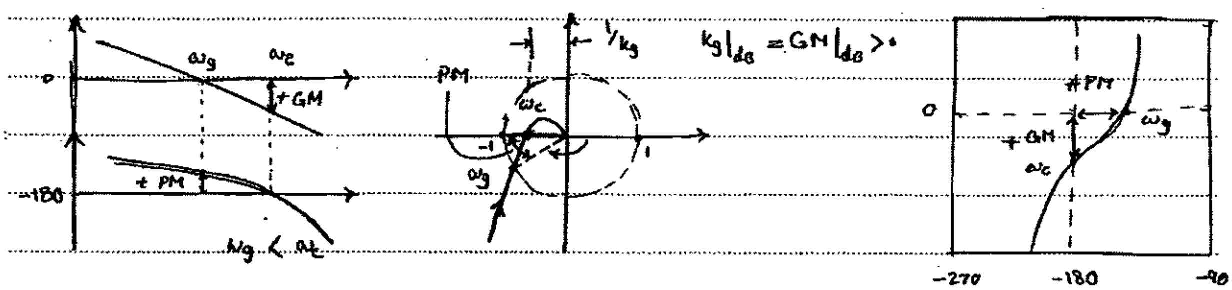
۲) نکته : حاشیه ی بهره در واقع نشان می دهد که بهره ی k را چه مقدار می توان زیاد کرد قبل از آنکه سیستم ناپایدار شود.

۳) نکته بعد : حاشیه ی فاز در واقع نشان می دهد که چه مقدار می توان فاز را کاهش داد قبل از آنکه سیستم ناپایدار شود.

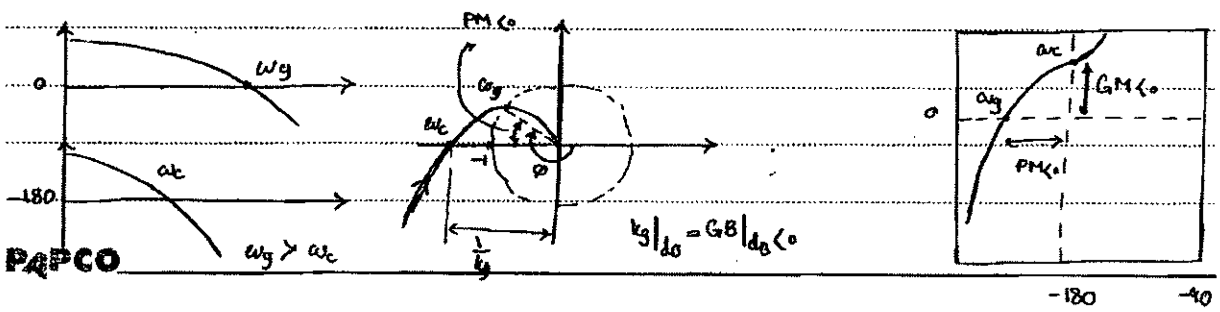
۴) نکته ی سوم : تعریف پایداری : یک سیستم مینیمم فاز زمانی پایدار است که $\boxed{GM_{dB}>0 \text{ و نیز } PM>0}$!

مقایسه نمودارها در ۲ حالت مختلف :

1. $GM>0$ و $PM>0$ (تنها حالت پایداری)



2. $GM<0$ و $PM<0$ (یکی از حالات ناپایداری)



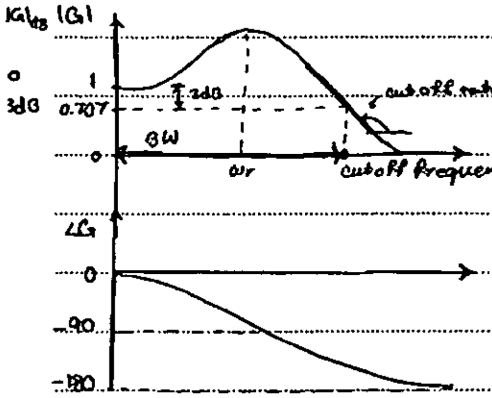
PAPCO

۵۱
Subject: کنترل
Year. Month. Date.

۸۸ / ۱۰ / ۱۵

۵) در سیستم های پایدار نوع ۲ حاشیه ی بهره بی نهایت است زیرا نمودار نایکوئیست محور حقیقی را قطع نمی کند.

● چند تعریف: BW: Band Width



توان ½ می شود

$20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = 20\log 0.707$

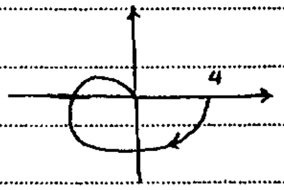
cut off rate شیب منحنی دامنه در فرکانس های بالا است

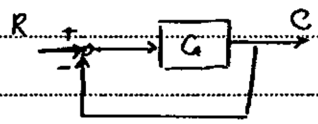
برحسب dB محاسبه می شود.

پهنای باند با زمان خیز نسبت عکس دارد. با فرکانس نسبت مستقیم و با ζ نسبت عکس دارد.

$\uparrow BW \equiv t_r \downarrow$ $\quad \uparrow BW \equiv \omega_n \uparrow$ $\quad \uparrow BW \equiv \zeta \downarrow$

● مثال:

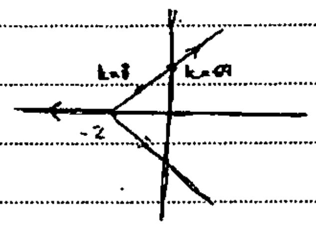


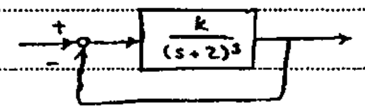


$R(t) = u(t) \Rightarrow C_{ss} = ?$

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+G} \Rightarrow C_{ss} = \lim_{s\to 0} sC(s) = \lim_{s\to 0} s \times \frac{1}{s} \times \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{4}{1+4} = 0.8$$

● مثال:



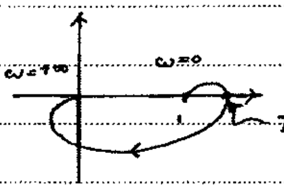


اگر در حالت اولیه k=8 باشد، gain margin سیستم چقدر است؟

$GM = \frac{64}{8} = 8$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

● مثال: دیاگرام نایکوییست یک سیستم $G(s)=\frac{1+Ts}{(1+s)^3}$ مطابق شکل زیر است. ناحیه‌ی قابل قبول T را تحت این شرایط بدست آورید. $?<T<?$



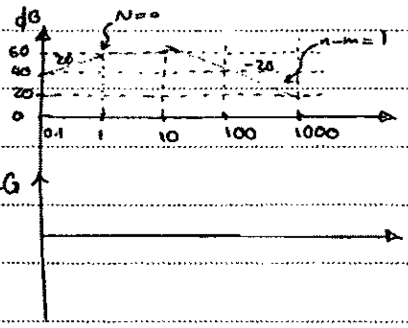
$$Im(G(j\omega)) = \frac{(1-3\omega^2)T\omega+(\omega^3-3\omega)}{(1-3\omega^2)^2+(3\omega-\omega^3)^2}=0 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{3-T}{1-3T}}$$

ω حقیقی $\Rightarrow \frac{3-T}{1-3T}>0 \Rightarrow$

		$1/3$		3	
$3-T$	+		+		−
$1-3T$	+		−		−
	+		−		+

$\Rightarrow 0<T<1/3$ & $T>3$

● مثال: فرض کنید دیاگرام بود تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم فیدبک واحد منفی به صورت زیر باشد. تابع تبدیل حلقه باز را بیابید.



$G(s)=?$

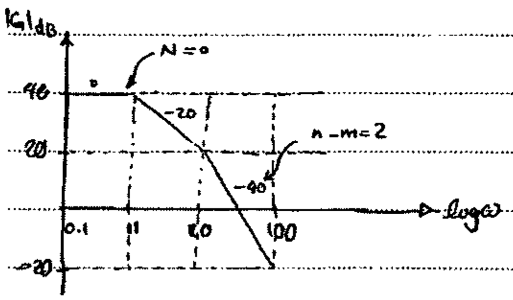
شیب شروع مثبت

$$G(s)=\frac{KS(1)(10)}{(s+1)(s+10)}$$

$60=20\log k \Rightarrow k=10^3$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{10000s}{(s+1)(s+10)}$$

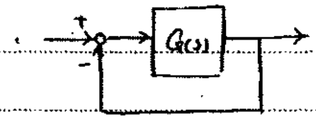
● مثال: تابع تبدیل را بدست آورید.



$$G(s)=\frac{100(1)(10)}{(s+1)(s+10)}=\frac{1000}{(s+1)(s+10)}$$

$20\log k=40 \Rightarrow k=100$

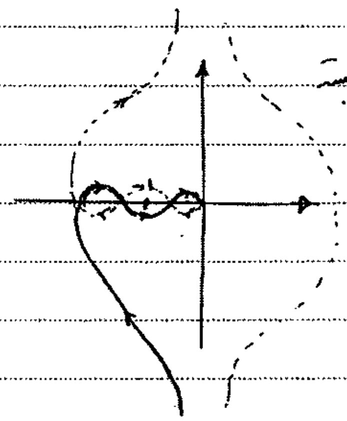
● سؤال: چنانچه در سیستم کنترلی زیر $G(s)$ پایدار باشد (یعنی $P=0$)، پایداری سیستم حلقه بسته را بررسی کنید.



$z = N + P$

شرط پایداری: $z=0 \rightarrow N=0$

N تعداد کل دوران های جهت ساعت



سیستم روبرو کاندیدای مناسبی است برای آنکه سیستم حلقه بسته پایدار باشد.

* طراحی کنترلر بر اساس پاسخ فرکانسی (دیاگرام بود)

↓

جبران ساز Compensator

- $\omega_c \equiv$ فرکانس عبور بهره (دامنه = 1)

- ناحیه فرکانس پایین: ناحیه‌ی بسیار پایین‌تر از فرکانس عبور بهره؛ مشخص کننده‌ی حالت ماندگار سیستم

- ناحیه فرکانس میانی: ناحیه نزدیک فرکانس عبور بهره؛ مشخص کننده‌ی ناحیه نزدیک به آستانه ناپایداری.

- ناحیه‌ی فرکانس بالا: ناحیه‌ی فرکانسی بسیار بالاتر از فرکانس عبور بهره

● در سیستم های کنترلی، بهره‌ی سیستم کنترل در این ناحیه می‌بایست تضعیف شود تا اثرات نویز حداقل شود. در ناحیه‌ی فرکانس پایین، بهره‌ی سیستم کنترلی باید به اندازه کافی بزرگ باشد تا خطای

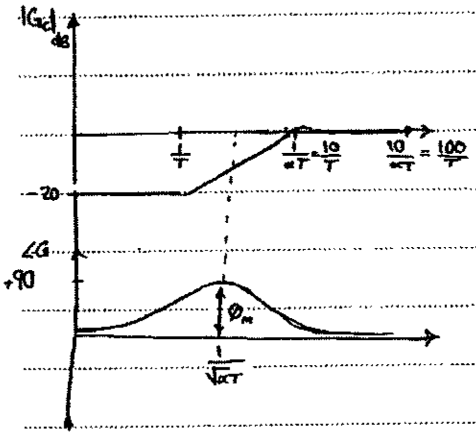
Subject:
Year. Month. Date. ( )

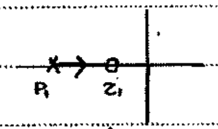
حاشیه کاهش دهد.

1) Phase Lead
پیش فاز

$G_c(s) = k_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}$, $0<\alpha<1$, $z=-\frac{1}{T}$, $p=-\frac{1}{\alpha T}$

$k_c=1$, $\alpha=0.1$





$|P|>|Z|$

φ_m = ماکزیمم زاویه‌ی پیش فازی ⟵ $\sin\varphi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$

$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$ = فرکانس مربوط به φ_m

$\frac{1}{T}$ و $\frac{1}{\alpha T}$ فرکانس‌های گوشه هستند.

⚠ دامنه را در فرکانس‌های بالا تقویت و در فرکانس‌های پایین تضعیف می‌کند. به نوعی یک High Pass Filter است. در فرکانس‌های پایین حدود 90% کاهش دامنه و در فرکانس‌های بالا حدود 90% افزایش دامنه داریم.

* طراحی جبران ساز Lead (پیش فاز):

می‌خواهیم جبران ساز پیش فازی طراحی کنیم که ess و PM (Phase Margin) مورد نظر ما را تأمین کند.

- مراحل طراحی:

1) یافتن k با بهره‌ی استاتیکی:

$G_c(s) = k_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} = \underbrace{k_c\alpha}_{K}\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$

$\to G_c(s)G(s) = k\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}G(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}\underbrace{[kG(s)]}_{G_1(s)}$, $G_1(s)=kG(s)$

* k را به گونه‌ای طراحی می‌کنیم که به ess مطلوب برسیم.

PAPCO

۲) دیاگرام Bode $G_1(j\omega)$ را رسم می‌کنیم.

* مادر lead می‌خواهیم فاز را افزایش بدهیم.

۳) یافتن حد فاز سیستم جبران نشده PM_0

۴) بدست آوردن زاویه پیش فاز لازم برای تأمین PM دلخواه (مطلوب)! $PM_d = PM_0 + \varphi$

$\varphi = PM_d - PM_0 + 5^\circ$

با شیطانی φ_m

۵) α به کمک رابطه‌ی $\sin\varphi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ بدست می‌آید

۶) $k_c = \frac{k}{\alpha}$ نیز بدست می‌آید.

۷) یافتن فرکانس عبور بهره‌ی جدید: فرکانسی که در آن دامنه‌ی سیستم جبران نشده‌ی G_1 برابر $-20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ باشد.

$G_c(s) = K\,\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} \longrightarrow \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}$

$\left|\frac{1+jT\omega_m}{1+j\alpha T\omega_m}\right| = \frac{|1+j\frac{1}{\sqrt{\alpha}}|^{1/2}}{|1+j\sqrt{\alpha}|^{1/2}} = \left(\frac{1+1/\alpha}{1+\alpha}\right)^{1/2} = (1/\alpha)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \xrightarrow{dB} 20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

میزان تغییر دامنه‌ی G_1 در فرکانس $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$ در اثر افزودن $G_c(s)$!

$-20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + 20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 0 \Rightarrow \omega_g$ فرکانس عبور بهره‌ی سیستم جبران شده

۸) بدست آوردن T $\left(\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T},\ \alpha\right) \longrightarrow T$

پس جبران ساز ما به این طراحی شد:

$G_c(s) = k_c\,\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}$

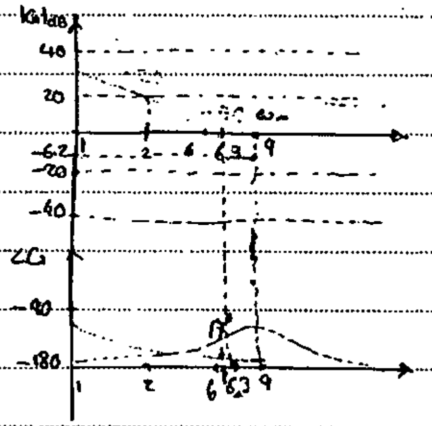
* مثال: $G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$ ، $PM = 50^\circ$ ، $k_v = 20\ sec^{-1}$

$G_c(s) = \underbrace{k_c\alpha}_{k}\,\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$

Subject.
Year. Month. Date.

① $G_c(s)G(s)$: $k_v=\lim_{s\to0} sG_c(s)G(s)=2k=20 \Rightarrow k=10$

② $G_1(s)$ رسم : $G_1(s)=\frac{4k}{s(s+2)}=\frac{40}{s(s+2)}$



③ PM سیستم جبران نشده یعنی $\omega_g=6.3 \to PM_o=17°$

$\varphi_m=PM_d-PM_o+5=50-17+5=38°$

$k_{v_o}=\lim_{s\to0} sG(s)=2$ شیب واحد $e_{ss}=\frac{1}{k_v}=\frac{1}{2}=0.5$

شیب واحد $e_{ss}|_d=\frac{1}{k_v}=\frac{1}{20}=0.05$ خطای ماندگار کم شده!

$\sin\varphi_m=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}=\sin38° \Rightarrow \alpha=0.24$

$k_c=\frac{k}{\alpha}=41.7$

$-20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=-6.2\,dB$

$|G_1(j\omega)|_{dB}=-6.2 \Rightarrow \omega_m=9\ rad/sec=\frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \Rightarrow T=\frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}}=\checkmark \rightarrow \begin{cases}\frac{1}{T}=4.41\\ \frac{1}{\alpha T}=18.4\end{cases}$

$G_c(s)=41.7\,\frac{s+4.41}{s+18.4}$

حتماً با MATLAB انجام بدهید!

PAPCO

* مشخصات جبران‌ساز پیش‌فاز

۱- بهبود پاسخ گذرا (اصلاح PM) به معنی اصلاح ضریب میرایی و فراجهش

۲- تاثیر کم بر خطای ماندگار ← هدف اصلاح حالت گذرا است و عملاً کاری به ماندگار نداریم.

3. افزایش رتبه سیستم به اندازه یک واحد

4. سریعتر شدن سیستم

5. افزایش پهنای باند

6. فرکانس عبور بهره را به سمت راست می‌کشد

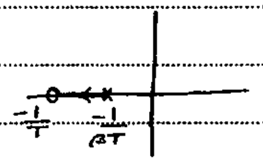
7. مانند فیلتر بالاگذر عمل می‌کند. High Pass Filter

9. نقطه ضعف: افزایش بهره در فرکانس‌های بالا به معنی تقویت نویز در فرکانس‌های بالا است.

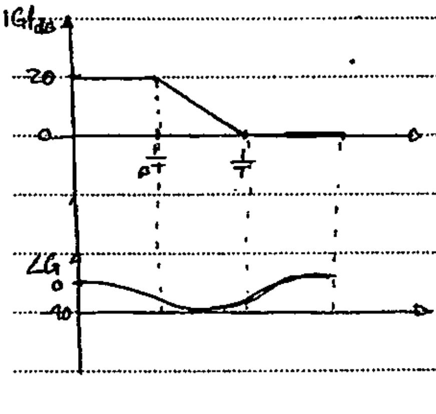
جمع‌بندی: معمولاً از Phase lead برای بهبود حاشیه فاز استفاده می‌کنیم

۲) Phase Lag

$G_c(s) = k_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}$, $\beta > 1$



$|P| < |z|$



برخلاف Lead، مانند Low pass filter عمل می‌کند یعنی در فرکانس‌های پایین تقویت می‌کند دامنه را و در فرکانس‌های بالا تضعیف می‌کند. این خاصیت برای Noise Rejection مفید است یعنی نویزها

غالباً High Frequency هستند

* خصوصیات سیستم کنترلی پس‌فاز :

1. کاهش خطای مانا

2. کند شدن سیستم

3. افزایش رتبه‌ی سیستم به اندازه یک واحد

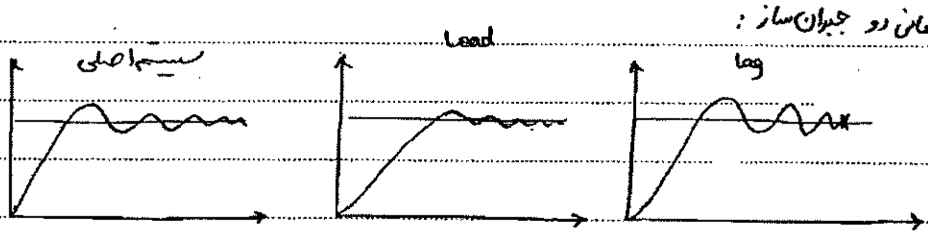
4. کاهش پهنای باند سیستم حلقه بسته

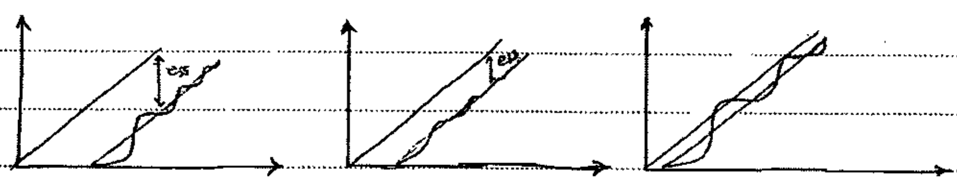
5. فرکانس عبور بهره را به سمت چپ می‌کشد

6. دامنه‌ها در فرکانس‌های بالا تضعیف می‌شوند. همانند فیلتر پایین‌گذر عمل می‌کند.

مقایسه: سیستم‌های به همراه lag معمولاً دارای پایداری نسبی کمتری در مقایسه با سیستم‌های به همراه Lead می‌باشند.

⊕ مقایسه پاسخ زمانی دو جبران‌ساز :





Subject: کنترل - پیوسته
Year. Month. Date. ( )

lead → درصد فراجهش کاهش یافته، زمان نشست کاهش یافته، e_{ss} نیز مقدار کمی کاهش یافته

lag → زمان نشست افزایش می‌یابد، e_{ss} به شدت کاهش می‌یابد.

* فرض بر این است که ما طراحی lag را خودمان می‌خواهیم

www.vepub.com
Publish Your Mind

Subject:

Year. Month. Date. ( )