مدار الکتریکی ۱

فصل اول :

تعریف مدار : به هر مجموعه‌ای از مسیرهای بسته که بتوانند جریان الکتریکی را از خود عبور دهند.

* تکیه‌ی اصولی مدارها مبتنی بر فشرده بودن مدارها است.

تعریف فشرده بودن مدار : میدان های الکتریکی و مغناطیسی در کل مدار با سرعتی برابر با سرعت نور (C) در طول مدار منتشر می‌شود اگر مدت زمان انتشار میدان الکتریکی و مغناطیسی (τ) و بیشترین طول مدار را با پارامتر d نشان داده شود و هم‌چنین دوره تناوب تغییرات مدار با T نام‌گذاری شود آنگاه مداری فشرده است که شرط زیر را دارا باشد :

$$\tau \ll T \Rightarrow \frac{d}{c} \ll \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{d}{c} \ll \frac{\lambda}{c}$$

$$\Rightarrow d \ll \lambda$$

با توجه به رابطه‌ی فوق مداری فشرده است که فرکانس مدار خیلی بزرگ نباشد.

* در درس مدار ۱ و مدار ۲ فقط مدار فشرده تدریس می‌شود.

کمیت اصلی مدار الکتریکی:

به طور کلی ۴ کمیت اصلی داریم:

① بار الکتریکی: 1. از خواص ماده است و به ۲ صورت ⊕ یا ⊖ وجود دارد.

2. بقا دارد. به عبارت دیگر جابجا می‌شود ولی از بین نمی‌رود.

3. پایه‌ترین بار الکتریکی برابر است با $e = -1.6 \times 10^{-19}\,C$

4. مقدار باری که از نقطه‌ی A در لحظه‌ی t عبور می‌کند ⟵ $q_A(t)$

② جریان الکتریکی:

جریان از حرکت بارها ناشی می‌شود و در هر نقطه، اندازه جریان در آن نقطه به صورت رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$I_A(t) = \frac{d\,q_A(t)}{dt} \Rightarrow A = \frac{C}{S}$$

1. جریان یک کمیت برداری است (علاوه بر اندازه‌ی جریان باید جهت مشخص کنیم)

* جهت جریان جهت حرکت بارهای ⊕ است. (به طور قراردادی ← ولی بارهای ⊕ ثابت‌اند و الکترون‌ها هستند که حرکت می‌کنند)

جریان یک آمپر : یعنی $6{,}25\times10^{18}$ الکترون از یک مقطع عبور کند.

$$q = ne$$

چگالی جریان سطحی :

$$\left(\frac{A}{m^2}\right) \quad J = \frac{I}{S}\left(\frac{A}{m^2}\right)$$

در داخل هادی های مدار فلزی چگالی جریان سطحی متناسب با میدان الکتریکی است.
و مقاومت تقریبا ثابت است.

$$J = \sigma E$$

σ ← قدرت رسانندگی

③ اختلاف پتانسیل الکتریکی :

مقدار کار لازم برای انتقال واحد بار ⊕ از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B. (بدون کار انجام شود)

$$\vec{F} = q.\vec{E}$$

④ فلوی مغناطیسی (wb)

قانون فارادی : اگر فلوی گذرنده از یک مسیر بسته با گذشت زمان تغییر کند در آن مسیر یک ولتاژ القا می‌شود.

- طبق قانون لنز - ولتاژ و جریان حاصل با عامل بوجود آورنده‌ی آن مخالفت می‌کند.

$$V_t = \frac{d\phi}{dt}$$

* اگر مدار فشرده نباشد به جای جریان مستقیم ، سیگنال های امواج داریم.

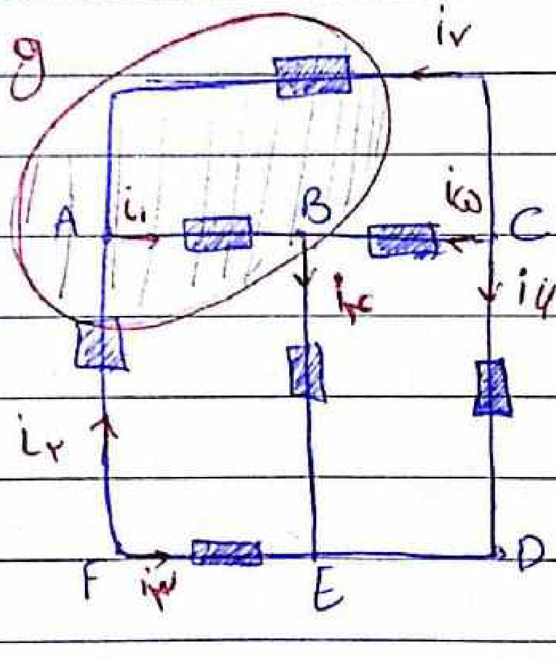
قوانین کیرشهف در مدارهای فشرده (KVL-KCL) :

مدارهای فشرده بعنوان مدار برای کمیت های زیر ۲ قانون داریم :

۱) قانون ولتاژ (KVL)

* در مدار فشرده تغییرات شار نسبت به زمان نداریم.

* در هر مسیر بسته ی مدار فشرده مجموع ولتاژ کلیه ی المان ها برابر صفر است.



قرارداد ۱ : جهت جریان هرشاخه در هر المان به نحوی انتخاب میشود که جریان از سر ⊕ وارد المان شود.

قرارداد ۲ : در طی کردن مسیر یک حلقه، حرکت از ⊕ به ⊖ را مثبت و حرکت از منفی ولتاژ به مثبت ولتاژ را منفی در نظر میگیریم.

ب) قانون جریان (KCL) کرشهف :

* با فرض فشرده بودن مدار جریان فقط در داخل مسیرها حرکت میکند و جریان نشتی نداریم.

بنابراین در هر گره مدار فشرده جمع جبری جریان‌های واردشونده با جمع جبری جریان‌ها خارج شونده برابر است.

KCl گره A → $i_2+i_3=i_1$

KCl گره B → $i_1+i_5=i_4$

KCl گره g → $i_3+i_5+i_2=i_4$ → نکته: همواره گره یک نقطه نیست می‌تواند یک مجموعه باشد مانند گره g (cut set)

* هدف از حل هر مدار تعیین ولتاژ و جریان شاخه ها (المان های مدار) در یک مسیر بسته می باشد.

* در هر مدار تمام ولتاژ ها مستقل نیستند بلکه با تعیین تعدادی از ولتاژ ها مابقی ولتاژها بدست می آید

به این مجموعه ولتاژهای مدار، ولتاژهای مستقل مدار گویند.

* در هر مدار تمام جریان ها مستقل نیستند بلکه با تعیین تعدادی از جریان ها مابقی جریان ها بدست می آید و به این مجموعه جریان های مستقل مدار گویند.

* معرفی المان ها و عناصر مدار و روابط حاکم بر آن:

در تئوری مدارها هر المان توسط ارتباطش با محیط بیرون معرفی می شود. لذا در این کتاب ما تنها به روابط خروجی المان توجه می کنیم و به ساختار فیزیکی المان کاری نداریم.

الف) مقاومت ایده آل (R):

به هر المانی که با رابطه یا روابط جبری ولتاژ و جریان مشخص شود یک مقاومت گویند.

مثال: مقاومت متغیر با زمان (1) $V = \underbrace{(1+\cos(\omega t))}_{R}\, i$

(2) $V = 2\frac{di}{dt}$ مقاومت نیست

(3) $V = 3i$ مقاومت 3Ω

(۴) $v = \begin{cases} ۲i & 0 < i < 1 \\ ۲i^۲ & 1 < i \\ 0 & i < 0 \end{cases}$ مقاومت

* واحد مقاومت اهم (Ω) است.

* رسانایی G ($\mho$) موهو
(S) زیمنس

$G = \frac{1}{R}$

ب) خازن ایده‌آل: (C)

C


هر المانی که با رابطه یا روابط جبری ولتاژ و بار الکتریکی مشخص شود خازن نام دارد.

(۱) $q = 1 - v^۲$ ✓
(۲) $q = ۲v$ ✓

* واحد خازن فاراد (F) می‌باشد.

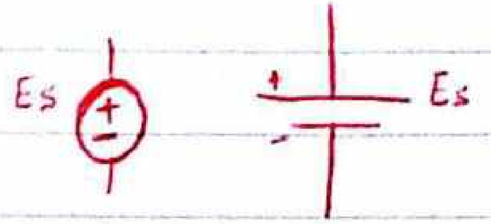
ج) سلف ایده‌آل: (L) (نماد L)

L

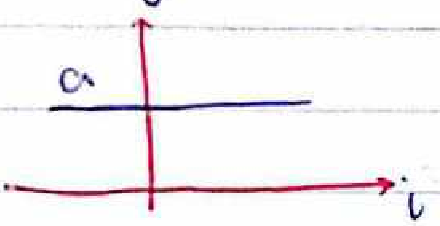

هر المانی که با رابطه و یا روابط جبری شار مغناطیسی و جریان مشخص شود سلف گویند.

$\varphi = ۲i^۲ + ۳i$ ✓
$\varphi = ۲i$ ✓

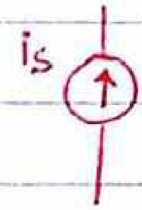
* واحد سلف H (هانری) می‌باشد.



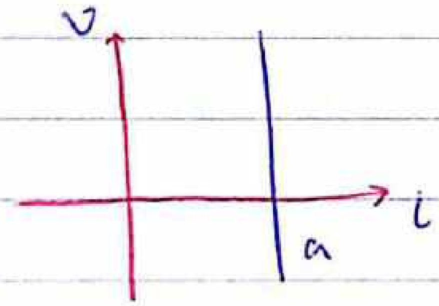
د) منابع ولتاژ مستقل:



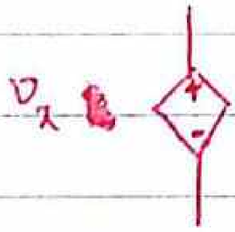
منبعی که ولتاژ آن بازای تمامی جریان های ورودی ثابت باشد.



ه) منبع جریان مستقل:

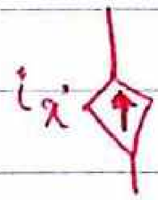


منبعی که جریان آن بازای تمامی ولتاژ ها ثابت باشد.



و) منبع ولتاژ وابسته:

منبعی که ولتاژ تولیدی آن به متغیر دیگری از مدار وابسته است.



ز) منبع جریان وابسته

منبعی که جریان تولیدی آن به متغیر دیگری از مدار وابسته است.

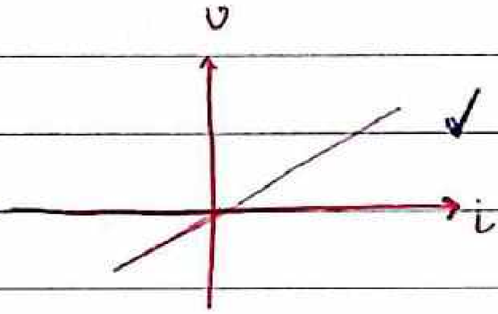
طبقه بندی المان ها :

المان های مدار را می توان براساس ویژگی آنها به چند روش دسته بندی کرد :

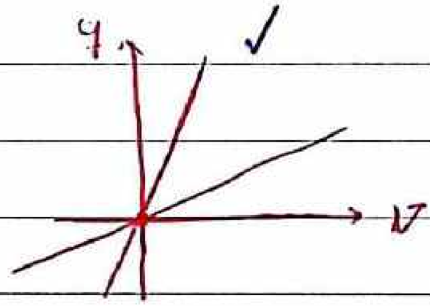
① الف) المان خطی و یا غیرخطی :

به المان دوپایه ای خطی گویند اگر منحنی مشخصه مولفه مشخص شونده المان خط راست گذرنده از مبدا باشد.

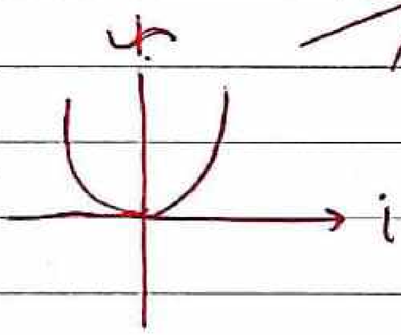
$v = 2i$



$q = (1 + \cos(2t))\,v$



$\varphi = 2i^2$ (غیرخطی)



به هر کمیت اصلی المان خطی تابعی از کمیت اصلی دیگر آن است.

② ب) متغیر و نامتغیر با زمان:

المان‌ها را متغیر با زمان گویند که مشخصه و رفتار المان با گذشت زمان تغییر کند.

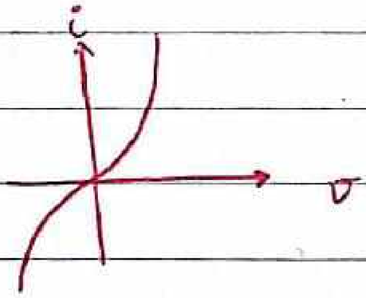
(1) $v = \underbrace{(1+\cos(t))}_{R}\, i$ ✓ مقاومت متغیر با زمان

(2) $\begin{cases} v = \sin(t) \\ I = \frac{1}{2}\sin(t) \end{cases}$ ✗ مقاومت نامتغیر با زمان

③ ج) المان‌های یک طرفه و دوطرفه:

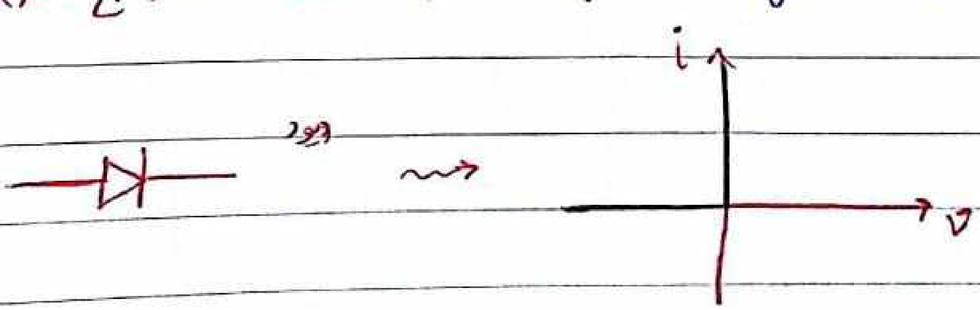
المان دوسری را دوطرفه گویند اگر ارتباط آن با مدار خارج به گونه‌ی اتصال سرهای آن بستگی نداشته باشد و بتوان سرهای آن را در مدار جابجا کرد بدون آنکه مشخصه المان تغییر کند.

$i = v^3$



المان دوطرفه

* المان دوطرفه دارای منحنی مشخصه‌ای می‌باشد که نسبت به مبدا متقارن است (تابع فرد)



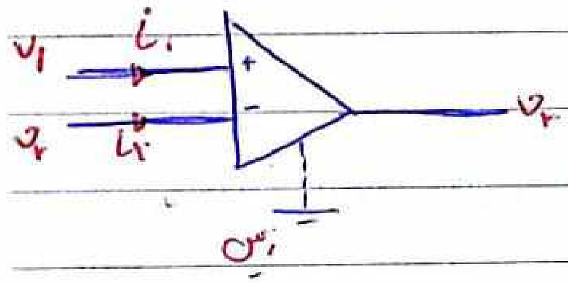
دیود یک المان یک طرفه است.

دیود ← در واقع یک کلید است که دارای on/off می‌باشد.

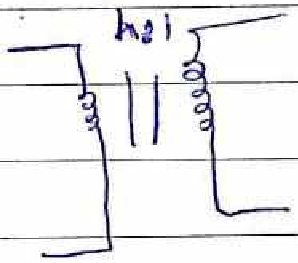
۴) تعداد سرهای المان :

برای توصیف المان با n سر ، n-1 رابطه نیاز است.

به عنوان مثال کلیه‌ی مقاومت‌ها ، خازن‌ها و سلف‌های دو سر با یک رابطه معرفی می‌شود.



$$\begin{cases} i_1 = i_2 = 0 \\ v_3 = K(v_1 - v_2) \end{cases}$$



مثال : روابط زیر چه نوع المان‌هایی را معرفی می‌کند :

الف) $v = (k\,e^{\frac{t}{T}})\,i$ (k و T مقادیر ثابت هستند)

مقاومت ، دو سر ، نامتغیر با زمان ، دو طرفه ، خطی ،

ب) $i = \begin{cases} 0 & -1 < v < 1 \\ v-1 & v \geq 1 \\ v+1 & v \leq -1 \end{cases}$

مقاومت ، دو سر ، نامتغیر با زمان ، دو طرفه ، غیرخطی

time

به المان های خطی و نامتغیر با زمان اصطلاحاً المان های LTI گویند.

Liner invariant

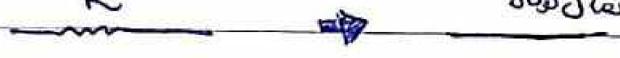
در درس مدار ۱ المان هایی که استفاده می شود LTI فرض می شود و غیر LTI در حوزه این درس نیست.

* روابط ولتاژ-جریان در المان های مدار LTI:

چون کمیت های قوانین KVL و KCL ولتاژها و جریان ها می باشند بنابراین لازم است روابط المان ها به صورت ولتاژ-جریان در نظر گرفته شود.

۱- مقاومت LTI: $v = Ri$

$R=0 \Rightarrow v=0$ R ⇒ اتصال کوتاه



$R=\infty \Rightarrow i = \frac{v}{R} = 0$ R ⇒ اتصال باز

۲- خازن: $q = Cv$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cv)}{dt} \rightarrow \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}$$

رابطه جریان برحسب ولتاژ → $\boxed{i = C\frac{dv}{dt}}$

نکته ۱ ← ولتاژ خازن تغییر آنی ندارد، چون نمی‌تواند جریان خازن بی‌نهایت باشد.

نکته ۲ ← اگر ولتاژ خازن مقدار ثابت باشد، جریان عبوری از خازن صفر می‌شود. (اتصال باز)

نکته ۳ ← ظرفیت خازن تابع مشخصات فیزیکی خازن است و تابعی از مقدار جریان و نرخ تغییرات ولتاژ دو سر نمی‌باشد.

نکته ۴ ←

$$\int_{t_0}^{t} i\,dt = \int_{t_0}^{t} c\frac{dv}{dt}\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt = v(t) - v(t_0)$$

مقدار اولیه ولتاژ خازن

رابطه ولتاژ بر حسب جریان ⇐ $$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v(t_0)$$ (شرط اولیه خازن)

سلف LTI :

$$v = L i$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow v = L\frac{di}{dt}$$

نکته ۱ ← جریان سلف تغییر آنی ندارد و ولتاژ سلف بی‌نهایت نمی‌شود.

نکته ۲ ← اگر جریان سلف مقدار ثابتی باشد ولتاژ دو سر سلف صفر می‌گردد (اتصال کوتاه)

نکته ۳ ← ظرفیت سلف به مشخصات فیزیکی سلف بستگی دارد و تابع ولتاژ و نرخ تغییر جریان آن نمی‌باشد.

نکته ۲ ←

$$\int_{t_0}^{t} v\,dt = \int_{t_0}^{t} L\,\frac{di}{dt}\,dt$$

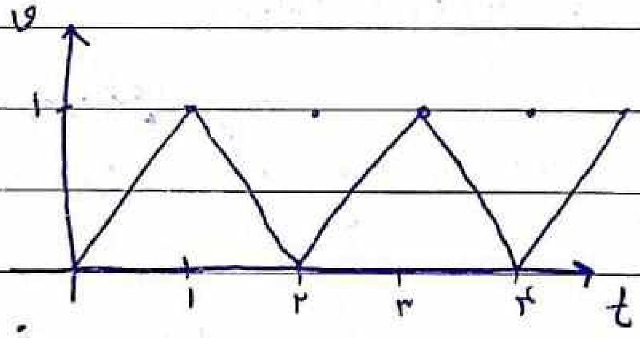
$$\Rightarrow i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt + i(t_0)$$

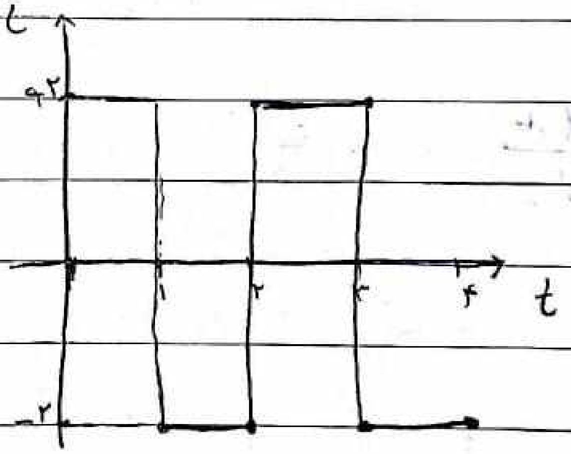
مقدار اولیه جریان سلف

(شرط اولیه سلف)

مثال ← درصورتیکه خازنی دارای ولتاژ نشان داده شده در شکل زیر باشد جریان خازن را برحسب زمان رسم کنید $C = 2F$ است.



$$i = C\frac{dv}{dt} \Rightarrow i = 2\frac{dv}{dt}$$

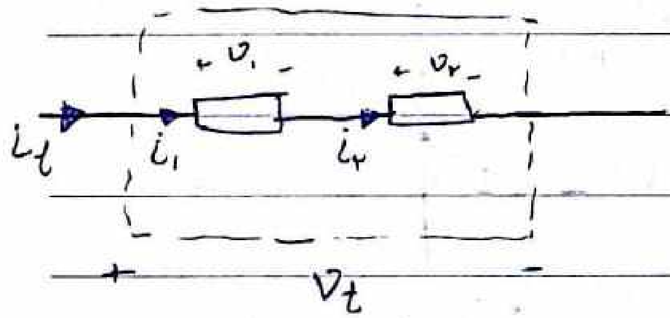


نکته ← در خازن ولتاژ تغییر آنی ندارد اما جریان می‌تواند تغییر آنی را داشته باشد.

انواع اتصال المان ها:

۱- اتصال سری ۲- اتصال موازی

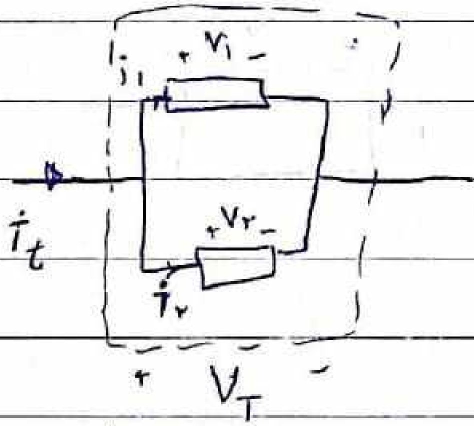
۱- اتصال سری ←



$$\begin{cases} V_T = V_1 + V_2 \\ i_T = i_1 = i_2 \end{cases}$$

نکته: در اتصال سری ولتاژهای المان ها بازای جریان یکسان باهم جمع می شوند

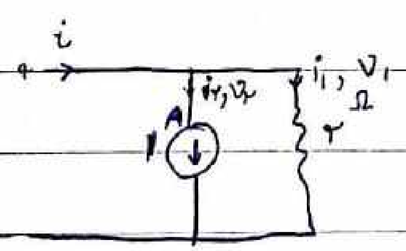
۲- اتصال موازی ←



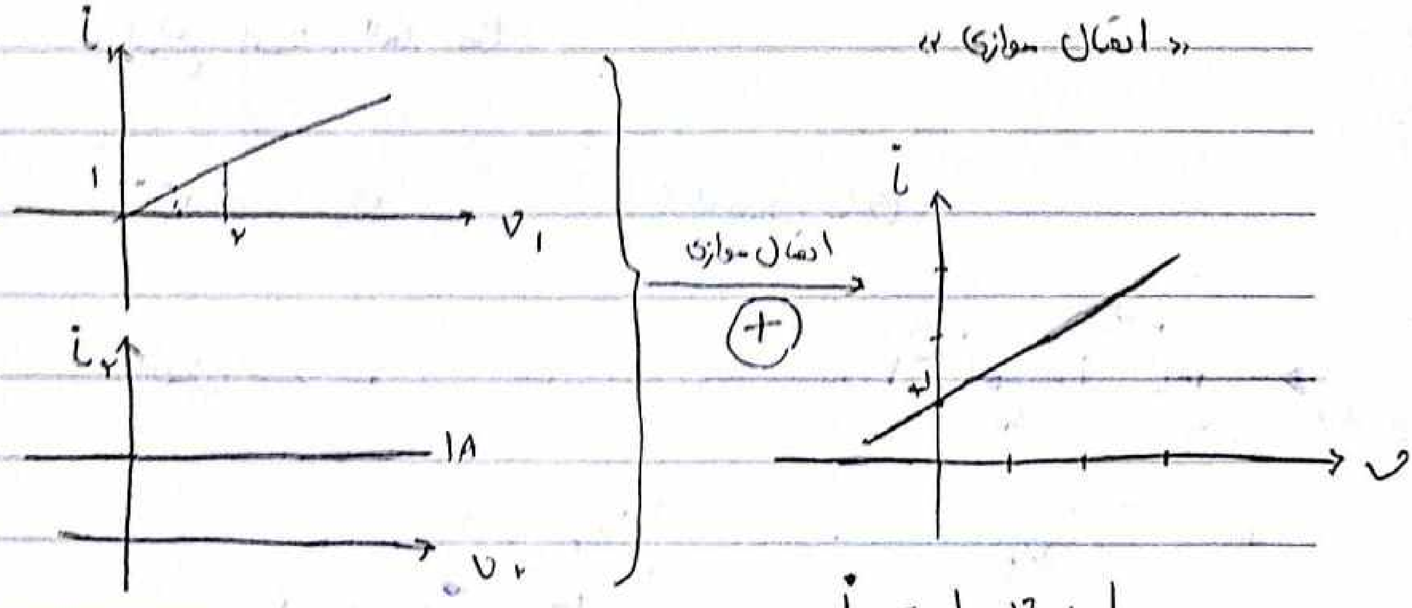
$$\begin{cases} V_T = V_1 = V_2 \\ i_T = i_1 + i_2 \end{cases}$$

نکته: در اتصال موازی جریان های المان ها بازای ولتاژهای یکسان بایکدیگر جمع می شوند.

مثال ← منحنی مشخصه $v - i$ را رسم کنید.

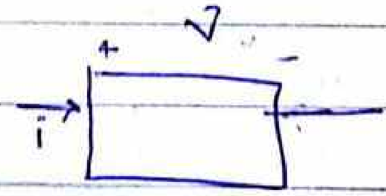


«اتصال موازی»



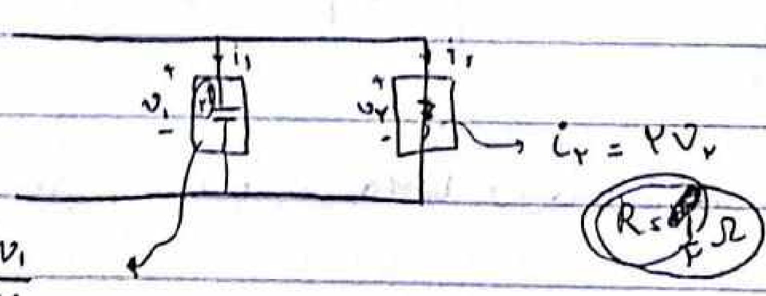
$$i = \frac{1}{2} v + 1$$

مثال: مدل مداری برای هر یک از روابط زیر را بدست آورید (سنتز کنید):



(الف) $$i = \underbrace{2\frac{\partial v}{\partial t}}_{1} + \underbrace{2v}_{2}$$

المان ها موازی اند.



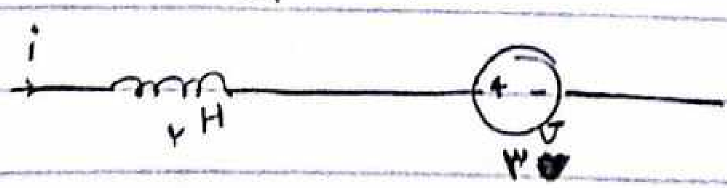
$i_2 = 2v_2$

$R = \frac{1}{2}\,\Omega$

$i_1 = 2\frac{dv_1}{dt}$

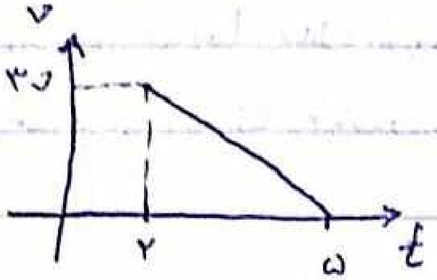
$C = 2F$

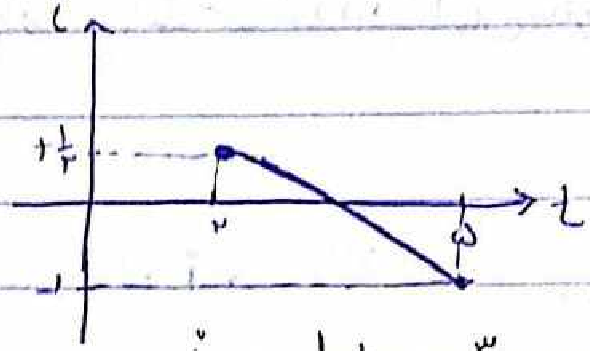
(ب) $$v = \underbrace{2\frac{di}{dt}}_{v_1} + \underbrace{3}_{v_2}$$



مثال ← تغییرات ولتاژ و جریان یک المان در بازه‌ی زمانی $2 \leq t \leq 5$ به صورت منحنی‌های زیر است

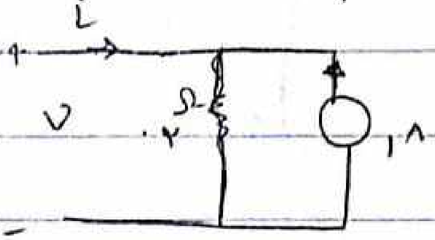
این المان را به صورت اتصال المان‌های LTI نشان دهید (سنتز):



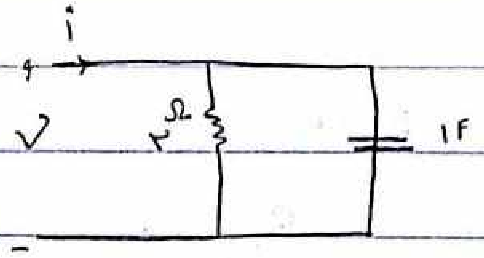


$v = -t + 5$ $\qquad$ $i = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$

راه حل اول : $i = \frac{v}{2} - 1$



راه حل دوم : $i = \frac{v}{2} + \frac{dv}{dt}$



نکته ← جواب سنتز، همواره منحصر به فرد نیست.

راه سوم ⇐ $i = \frac{v}{2} + 2\frac{di}{dt}$

$\Rightarrow \frac{v}{2} = i - 2\frac{di}{dt}$

سلف 2H- وجود ندارد

بنابراین رابطه اشتباه است.

* توان در عناصر الکتریکی :

در هر لحظه بین المان ها تبادل انرژی صورت می گیرد برای اینکه مشخص گردد که آیا المان به خارج از خود انرژی می دهد یا می گیرد از مفهوم توان استفاده می شود .

الف) توان لحظه ای :

$$P(t) = v(t) \times i(t)$$

$$w(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt$$

انرژی مبادله شده در بازه ی $t\ [t_0$

* مقاومت :

$$v(t) = R\, i(t)$$

$$\Rightarrow p(t) = v(t)\cdot i(t) = R\, i^2(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

$$\Rightarrow w(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} R\, i^2(t)\, dt = R \int_{t_0}^{t} i^2(t)\, dt$$

* خازن :

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$p(t) = C\, v(t) \frac{dv(t)}{dt}$$

$$w(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} C\, v(t) \frac{dv(t)}{dt} = \frac{C}{2} v^2(t) \Big|_{t_0}^{t} = \frac{1}{2} C v^2(t) - \frac{1}{2} C v^2(t_0)$$

سلف)

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$P(t) = L\, i(t)\frac{di(t)}{dt}$$

$$w(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} L\, i(t)\frac{di(t)}{dt}\,dt = \frac{1}{2}L\, i^2(t) - \frac{1}{2}L\, i^2(t_0)$$

ب) توان متوسط (P):

$$P = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} p(t)\,dt$$

توان متوسط — توان لحظه‌ای

مقاومت:

$$P = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int R\, i^2(t)\,dt = R\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} i^2(t)\,dt$$

$$P = R\, i^2 = \frac{v^2}{R} \longleftarrow$$ با فرض ثابت بودن جریان

خازن:

$$P = \lim_{\tau\to\infty}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\tau/2} C\, v(t)\frac{dv(t)}{dt}\,dt$$

$$= C\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{C}\left(\frac{1}{2}v^2\left(\frac{\tau}{2}\right) - \frac{1}{2}v^2\left(-\frac{\tau}{2}\right)\right) = \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

یعنی در واقع در خازن P برابر صفر است یعنی اتلاف گرما نداریم.

Subject: .... Date: ....

سلف)

$$P = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} L\, i(t)\frac{di(t)}{dt}\, dt$$

$$P = L \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{2} i^2\left(\frac{\tau}{2}\right) - \frac{1}{2} i^2\left(-\frac{\tau}{2}\right)\right) = 0$$

در سلف نیز $P=0$ است.

نکته: المان های سلف و خازن LTI توان متوسطی دریافت ندارند و تنها مقاومت توان متوسط تلف می‌کند.

* المان ها برحسب توان متوسط به ۳ دسته تقسیم می شوند:

۱. $P>0$ (توان متوسط مثبت) ← المان پسیو (غیرفعال)

۲. $P<0$ (توان متوسط منفی) ← المان اکتیو (فعال)

۳. $P=0$ (توان متوسط ندارد) ← المان خنثی

مثال: در مثال قبل انرژی مصرفی در مقاومت 2Ω را حساب کنید. (ص ۲۴۵)

راه اول ←

$$i_{\text{مقاومت}} = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} + 1$$

$$\Rightarrow P = 2\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{2}^{5}\left(-\frac{1}{2}t + \frac{5}{2}\right)^2 dt$$

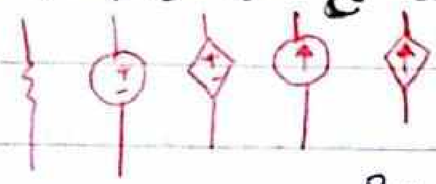
راه دوم ←

$$v_{\text{مقاومت}} = -t + 5$$

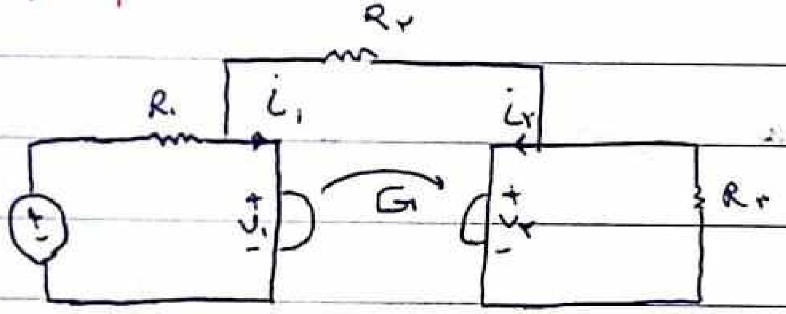
$$\Rightarrow P = \frac{1}{2}\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{2}^{5}(5-t)^2\, dt$$

«فصل دوم»

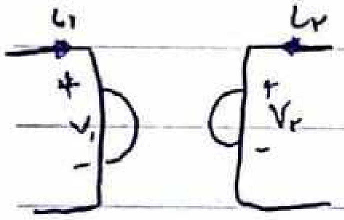
مدار مقاومتی: مداری که تنها شامل مقاومت و یا منابع مستقل یا وابسته باشد مدار مقاومتی نام دارد.



مثال:

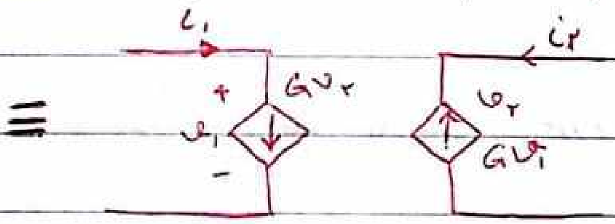


این مدار مقاومتی است

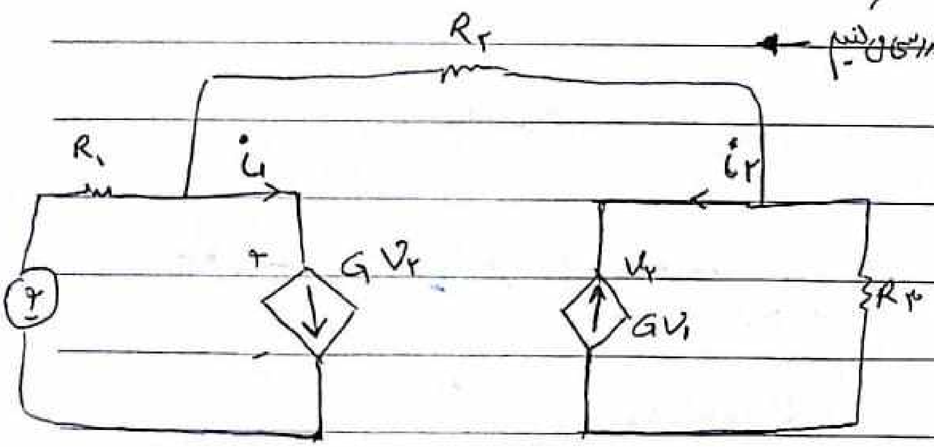


$$i_1 = G v_2$$
$$i_2 = -G v_1$$

نکته ← ژیراتور



حال مثال بالا را بررسی کنیم ←



Subject: Date:

هدف از حل مدار مقاومتی، تعیین ولتاژ ها و جریان های المان های مدار به گونه که معادلات KVL و KCL در مدار برقرار باشد.

روش حل مدار مقاومتی (LTI) :

الف) روش مش های اساسی :

در این روش مجهولات از جنس جریان هستند و از معادلات KVL استفاده می شود.

ب) روش گره های اساسی :

در این روش مجهولات از جنس ولتاژها هستند و از معادلات KCL استفاده می کنیم.

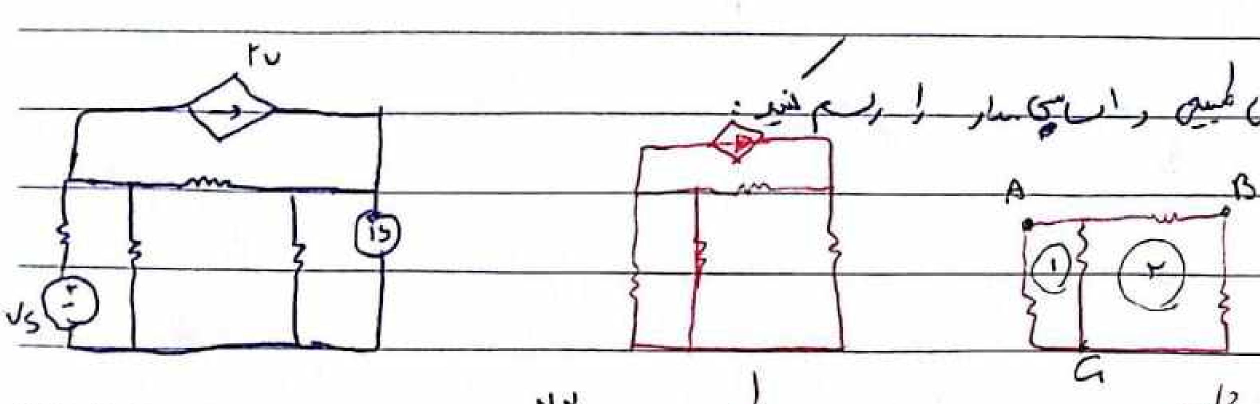
* مفهوم شکل طبیعی و شکل اساسی مدار :

اگر در یک مدار خطی منابع مستقل حذف شوند، شکل طبیعی مدار حاصل می شود.

اگر در یک مدار خطی منابع (مستقل یا وابسته) حذف شوند، شکل اساسی مدار حاصل می شود.

حذف منبع ولتاژ (اتصال کوتاه)   حذف منبع جریان (اتصال باز)

شکل طبیعی و اساسی مدار را رسم کنید:



طبیعی   شکل اساسی

SEVAN Note book

معرفی مش اساسی :

به هر مسیر بسته در شکل اساسی که شاخه‌ای درون آن نباشد یک مش اساسی گوییم.

مثال شکل ← ۲ مش اساسی دارد.

همانگونه که در فصل اول اشاره شد در یک مدار جریان تمام شاخه‌ها مستقل نمی‌باشد، به عبارت دیگر جریان بعضی از شاخه‌ها از روی شاخه‌های دیگر تعیین می‌شود.

به جریان‌هایی که با مشخص بودن آنها مابقی جریان‌های مدار مشخص می‌شود جریان‌های مستقل گویند.

نکته: تعداد مش‌های اساسی برابر تعداد جریان‌های مستقل است و برعکس.

گره اساسی :

به گره‌های مدار (نقاط دو سر المان) در شکل اساسی مدار گره‌های اساسی گویند.

همانگونه که در فصل اول اشاره شد در یک مدار ولتاژ تمامی شاخه‌ها مستقل نمی‌باشند به عبارت دیگر ولتاژ بعضی از شاخه‌ها از روی شاخه‌های دیگر بدست می‌آید.

به ولتاژهایی که با مشخص بودن آنها مابقی ولتاژهای مدار مشخص می‌شود ولتاژ مستقل گویند.

می‌توان نشان داد تعداد ولتاژهای مستقل مدار برابر با تعداد گره‌های اساسی مدار منهای یک می‌باشد.

تعداد جریان مستقل مدار (KVL) = تعداد مش‌های اساسی

تعداد ولتاژ مستقل مدار (KCL) = تعداد گره‌های اساسی − ۱

* روش حل مدار مقاومتی به کمک مش های اساسی :

در این روش به دنبال تعیین جریان مستقل مدار هستیم

1) الف) شکل اساسی مدار را رسم کرده و تعداد مش های اساسی را (m) را مشخص می کنیم.

2) ب) به تعداد مش های اساسی (m) جریان مجهول در m شاخه (غیرسری) در نظر می گیریم.
غیرسری : یعنی جریان خروجی نیز مستقل باشد.

3) ج) با نوشتن معادلات KCL بصورت ذهنی در گره های مدار اصلی جریان همه شاخه ها را برحسب جریان های مجهول و منابع جریان می نویسیم

4) د) در هر مش اساسی از مدار اصلی معادله KVL را می نویسیم. با این کار دستگاه m معادله m مجهول بدست می آید. مجهولات این معادله ها جریان های مستقل m مش اساسی می باشند.

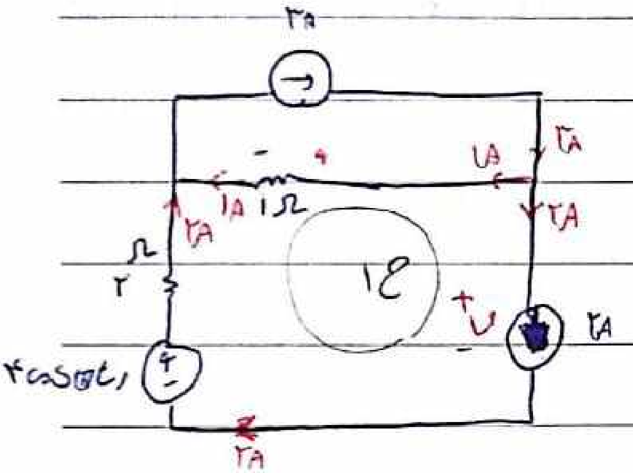
5) ه) در صورتی که در معادلات بدست آمده در مرحله قبل متغیر اضافی غیر از جریان مش های اساسی وجود داشت این متغیر اضافی را به کمک معادلات کمکی حذف می کنیم.

6) و) دستگاه m معادله m مجهول را حل می کنیم و جریان های مجهول را بدست می آوریم.

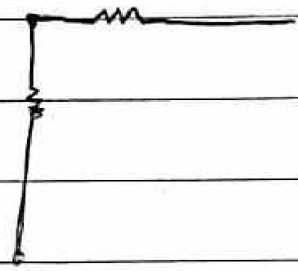
7) ز) با توجه به جریان های بدست آمده از مرحله قبل متغیر مورد سؤال مسئله را از روی این جریان ها تعیین می کنیم.

مثال:

در مدار زیر، ولتاژ منبع جریان $2A$ و توان متوسط آن را پیدا کنید.



شکل اساسی



0 = تعداد مش‌های اساسی

0 = تعداد جریان مجهول

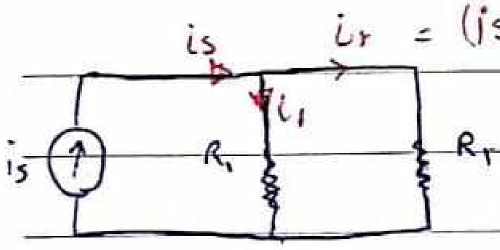
KVL حلقه 1 $\Rightarrow \quad -4\cos(\omega t) + 4 - 1 + v_s = 0$

$$\Rightarrow v_s = -3 + 4\cos(\omega t)$$

$$P_s = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t)\, i(t)\, dt = -6$$

جریان مقاومت‌ها را تعیین کنید.

$i_2 = (i_s - i_1)$



شکل اساسی

1 = تعداد مش اساسی

1 = تعداد جریان مجهول

KVL در M_1 $\longrightarrow \quad -R i_1 + R_2(i_s - i_1) = 0$

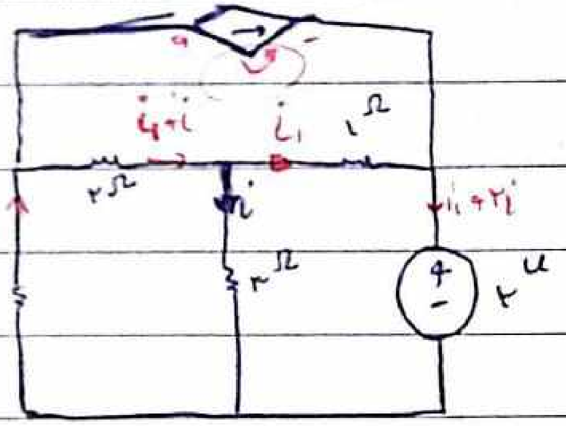
مدار تقسیم جریان

$$\Rightarrow i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}\, i_s$$

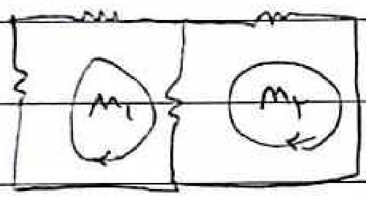
$$\Rightarrow i_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2}\, i_s$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{i_2}{i_1}$$

* در مدار زیر ولتاژ و جریان همه‌ی المان‌ها تعیین کنید و نشان دهید مجموع توان مصرفی برابر با صفر است.



شکل اساسی →



$m = 2$

۲ = تعداد معادلات مورد نیاز

M₁ در KVL → $2(i+i_1)+3i+1(3i+i_1)=0$

M₂ در KVL → $1i_1+2-3\times i=0$

$\Rightarrow i_1 = -\frac{16}{17}$ (A)

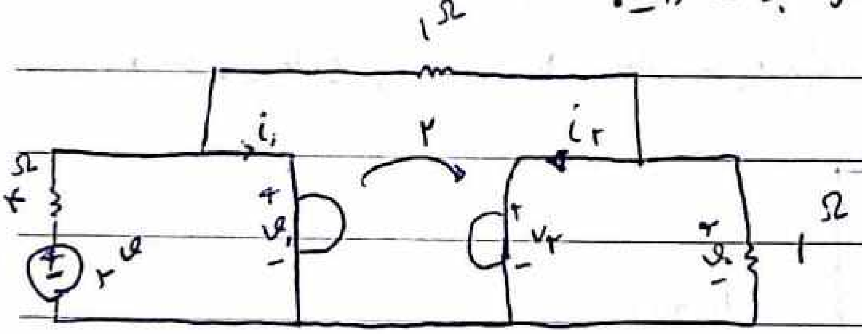
$i = \frac{6}{17}$ (A)

① در KVL → $-2(i+i_1)+v-1\times i_1=0$

$\Rightarrow v = 3i_1+2i$

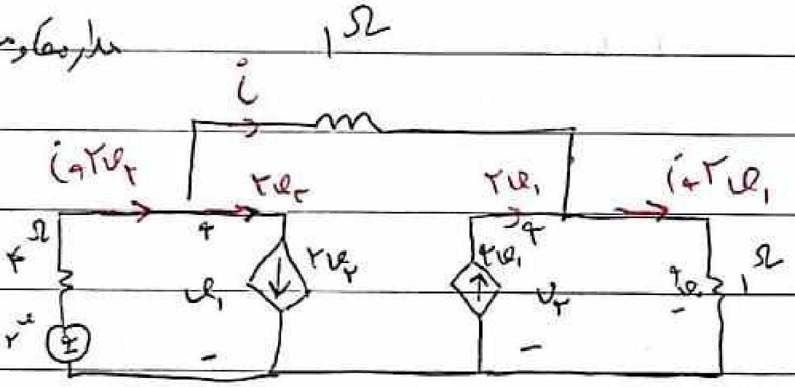
المان	جریان	ولتاژ	توان مصرفی
$R=2\Omega$	$-\frac{10}{17}$	$-\frac{20}{17}$	$\frac{200}{289}$
$R=3\Omega$	$\frac{6}{17}$	$\frac{18}{17}$	$\frac{108}{289}$
$R=1\Omega$ سمت چپ	$\frac{2}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{4}{289}$
$R=1\Omega$ سمت راست	$-\frac{16}{17}$	$-\frac{16}{17}$	$\frac{256}{289}$
۲V منبع ولتاژ	$-\frac{4}{17}$	۲V	$-\frac{136}{289}$
۲i منبع جریان	$\frac{12}{17}$	$-\frac{36}{17}$	$-\frac{432}{289}$

در مدار مقاومتی زیر ولتاژ v_o را بدست آورید.

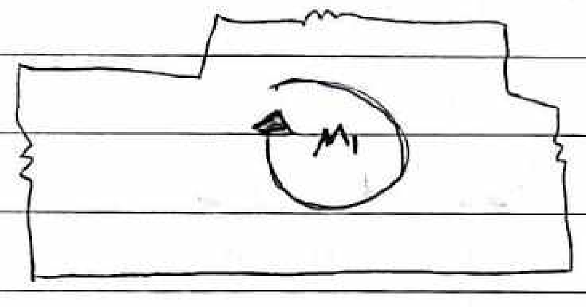


$$\begin{cases} i_1 = 2v_2 \\ i_2 = -2v_1 \end{cases}$$ روابط ژیراتور

مدار مقاومتی



شکل ابر سی



تعداد مش = ۱

تعداد جریان مجهول = ۱ (i)

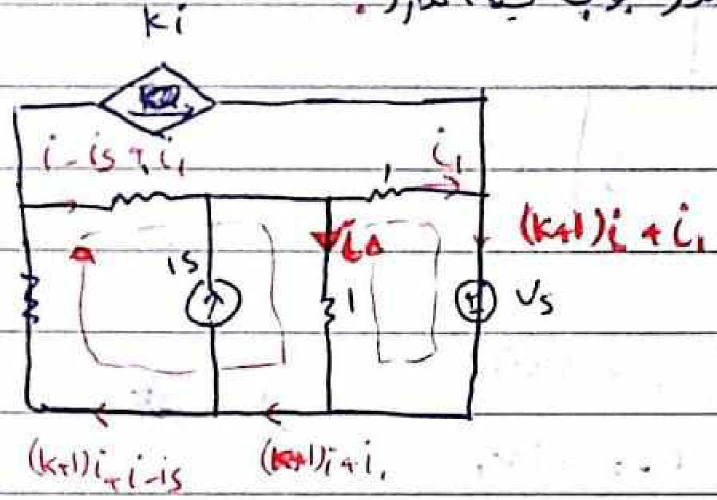
KVL در M_1 : $4i + 8v_2 + 2v_1 = 2$

معادلات کلی $\Rightarrow$
$$\begin{cases} 8v_2 + v_1 = 2 - 4i \\ 6v_2 - 2v_1 = i \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} v_1 &= -\frac{12}{17}i + \frac{2}{17} \\ v_2 &= -\frac{7}{17}i + \frac{4}{17} \end{aligned}$$

جواب یافته از آن $i = -\frac{2}{34} A$

$\Rightarrow v_o = v_2 = 1 \times (i + 2v_1) \Rightarrow v_o = \frac{9}{34}$

در مدار زیر به ازای چه مقدار "k" مدار جواب یکتا ندارد؟



تعداد مش ها : $m=2$

تعداد جریان مجهول : ۲ $\quad i_1 , i$

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \text{ در KVL} \\ m_2 \text{ در KVL} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (k+3)i + 2i_1 = 2i_s \\ -i + i_1 = -v_s \end{cases}$$

شرط نداشتن جواب یکتا

برای دستگاه معادله دو مجهول

$$\Rightarrow \operatorname{Det}\begin{vmatrix} k+3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow k+3+2=0 \Rightarrow k=-5$$

* حل مدار مقاومتی به کمک روش گره اساسی :

* در این روش مجهولات ولتاژهای مستقل مدار می‌باشد و شامل مراحل زیر است :

۱- شکل اساسی مدار را رسم کرده و تعداد گره‌های اساسی مدار را تعیین می‌کنیم (n)

۲- یک گره اساسی را زمین گرفته و به تعداد (n-1) ولتاژ مجهول در گره اساسی باقی مانده در نظر می‌گیریم.

۳- با نوشتن معادلات KVL به طور ذهنی، ولتاژ تمامی گره‌های غیر اساسی را از روی ولتاژ گره‌های اساسی مجهول و منابع ولتاژ می‌نویسیم.

۴- در هر گره اساسی از n-1 گره مجهول در نظر گرفته شده در قسمت (۲)، معادله KCL را در مدار اصلی می‌نویسیم. با این کار دستگاه (n-1) معادله و (n-1) مجهول بدست می‌آید. مجهولات همان ولتاژهای مستقل مدار می‌باشند.

۵- در صورتیکه در معادلات بدست آمده در مرحله قبل متغیر اضافی غیر از ولتاژ گره‌های اساسی وجود داشت این متغیر اضافی را به کمک معادلات کمکی دیگری حذف می‌کنیم.

۶- دستگاه (n-1) معادله و (n-1) مجهول بدست آمده از مرحله قبل را حل کرده و ولتاژهای مستقل مدار را در n-1 گره اساسی تعیین می‌کنیم.

۷- با توجه به ولتاژهای بدست آمده در مرحله قبل، متغیر مورد سؤال را تعیین می‌کنیم.

تفاوت روش گره و روش مش:

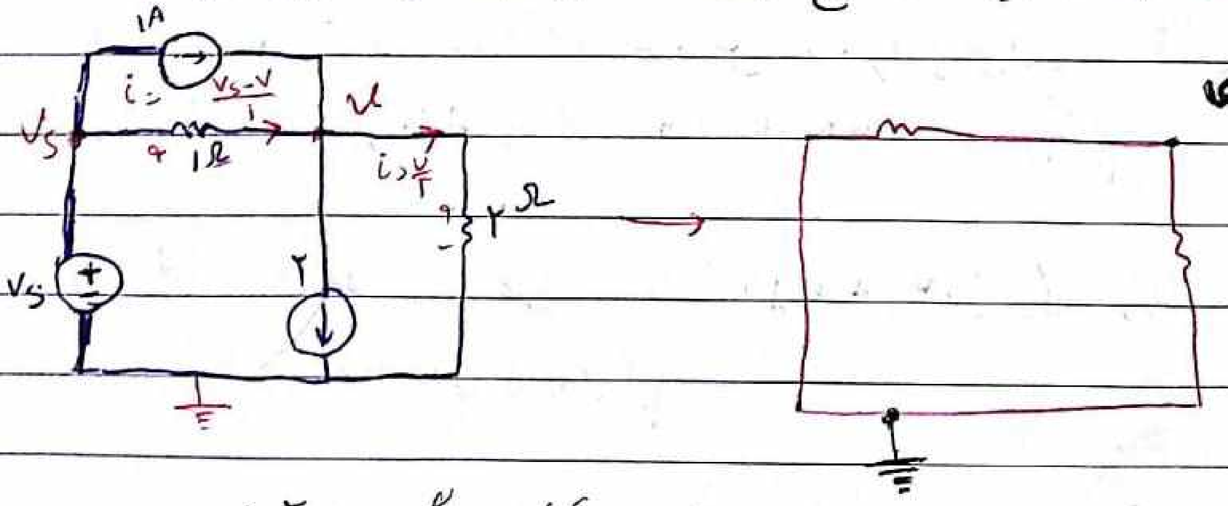
۱- در روش مش اساسی مجهولات از جنس جریان می باشند در حالیکه در روش گره اساسی مجهولات از جنس ولتاژ می باشند.

۲- در روش مش اساسی دستگاه معادلات به کمک معادلات KVL بدست می آید در حالیکه در روش گره اساسی دستگاه معادلات به کمک معادلات KCL بدست می آید.

نکته:

در هر مدار از دو روش مش اساسی و گره اساسی می توان برای حل استفاده کرد اما طبیعتاً روشی راحت تر است که دستگاه معادلات کوچکتری داشته باشد. در صورت یکسان بودن دستگاه معادلات روشی راحت تر است که متغیر مورد نظر سوال از جنس مجهولات آن روش باشد.

* در مدار زیر ولتاژ منبع جریان 1^A را برحسب V_s تعیین کنید:



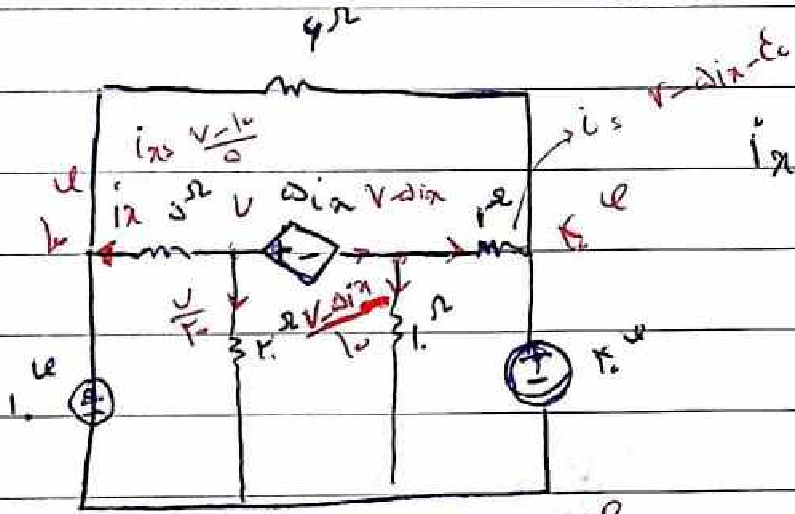
تعداد گره $n=2$

تعداد ولتاژ مجهول $n-1=1$

(ب) در گره KCl

$$V_S - V + 1 = \frac{V}{2} + 2 \Rightarrow V = \frac{2}{3}V_S - \frac{2}{3}$$

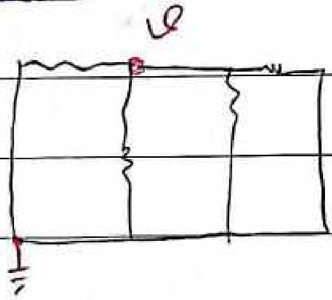
ولتاژ دو سر منبع $\Rightarrow V_S - V = \frac{V_S}{3} + \frac{2}{3}$



$i_x = ?$

حل به روش گره اساسی:

شکل اساسی =



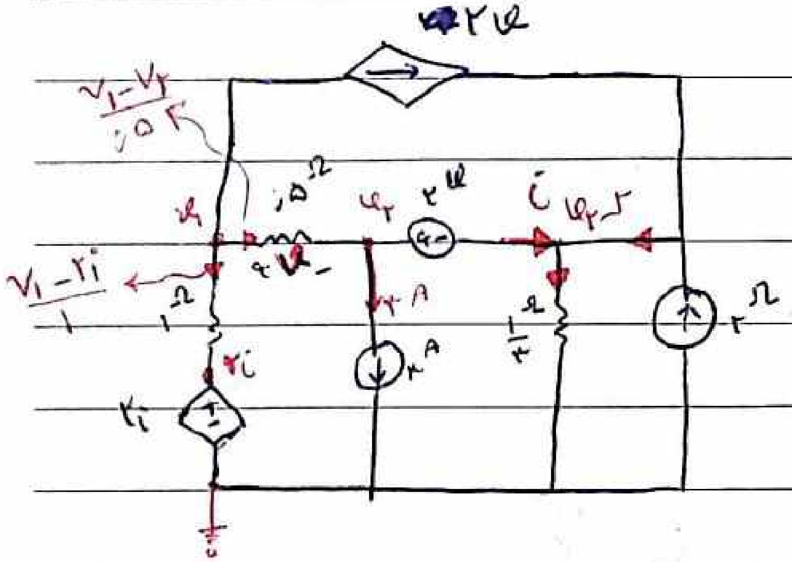
تعداد گره = ۲

تعداد ولتاژ مجهول ۱ (ط)

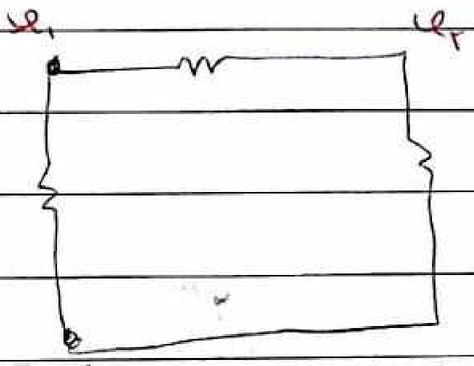
در گره ط KCl $\Rightarrow \frac{v}{20} + \frac{v-10}{5} + \frac{v-5i_x}{10} + V - 5i_x - 40 = 0$

در رابطه کلی $i_x = \frac{v-10}{5}$

$\Rightarrow v = 124\ \text{V} \qquad i_x = \frac{v-10}{5} = 22.8\ \text{A}$



به هر روشی جریان i را حساب کنید.



حل به روش گره

تعداد گره اساسی ⇐ $n=4$ ‏ ‏ ‏ ‏ تعداد معادلات مجهول ⇐ $n-1=3$

در گره v_1 KCL ⇒ $\frac{V_1-V_2}{0.5}+\frac{V_1-2i}{1}+2v=0$ (1)

در گره v_2 KCL ⇒ $4+i=\frac{v_1-v_2}{0.5}$ (2)

معادلات کمکی ⇒ $v=v_1-v_2$ (3) (5)

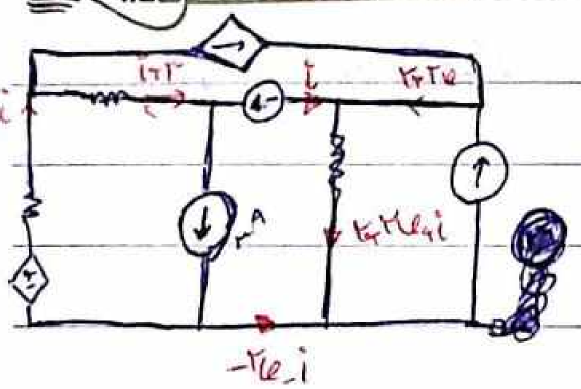
$i+3+2v=\frac{v_2-2}{\frac{1}{4}}$ (4)

$(3,4) \longrightarrow i=-2v_1+5v_2-8$ (6)

(1) در معادله (5,6) → $9v_1-14v_2=-16$

(2) در معادله (5,6) → $4v_1-7v_2=-5$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1=-6\ V \\ v_2=-\frac{19}{7}\ V \\ i=-\frac{47}{7}\ A \end{cases}$$



حل به روش مش اساسی :

KVL در مش ۱ : $-2i + (2v + i + 3) + v + 2 + \frac{1}{4}(i + 2 + 2v) = 0$

معادله کمکی : $v = \frac{1}{2}(3 + i)$

$$i = -\frac{47}{7}\ A$$

«« قضیه جمع آثار »»

در هر مدار خطی با منابع مستقل ، پاسخ مدار به ورودی ها برابر است با مجموع پاسخ های مدار به هر کدام از ورودی ها وقتی به تنهایی در مدار قرار گرفته اند.

نکته ۱ ←

اگر در مداری تمام منابع مستقل صفر شوند کلیه جواب ها صفر خواهد بود

نکته ۲ ←

در هر مدار هر متغیر دلخواه (ولتاژ ، جریان) از هر منبع ورودی یک اثر می بیند این اثر با تغییر مقدار منبع ثابت است.

مثال ←

الف) در مداری جریان i ناشی از منبع $2V$ ، منبع جریان $1A$ به صورت زیر است :

اثر منبع ولتاژ ۲ بر جریان i ، اثر منبع جریان بر جریان i

$$i = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{4}{3}\ A$$

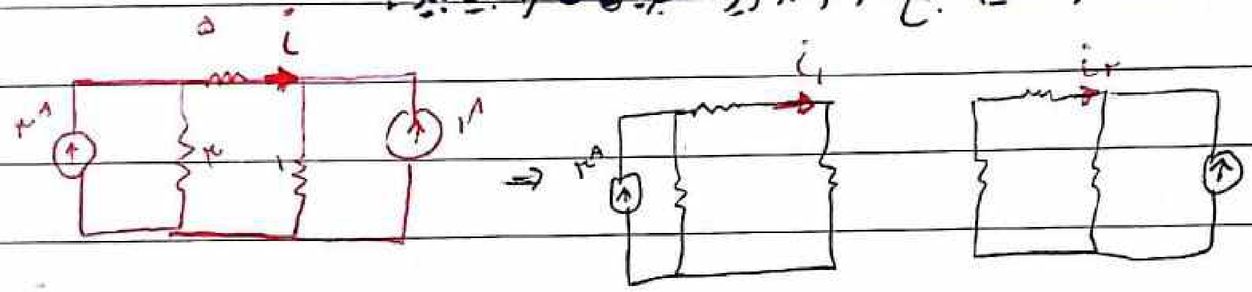
منبع ولتاژ ، منبع جریان

ب) اگر در مدار قبل ولتاژ از 2^{v} به 4^{v} و مقدار منبع جریان از 1^{A} به 3^{A} تغییر کند، جریان i چقدر خواهد بود؟

$$i = \frac{1}{3}\times 4 \;-\; \frac{2}{3}\times 3 = \frac{1}{3}^{A}$$

مثال:

با استفاده از قضیه جمع آثار در مدار زیر جریان i ها را بیابید:



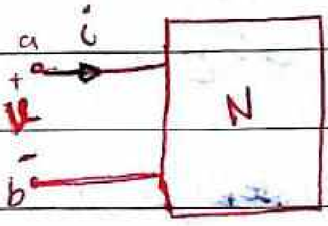
$$i = i_1 + i_2$$

$$i_1 = \frac{3}{3+6}\times 3 \qquad i_2 = (-1)\times\frac{-1}{1+8}\times 1 = -\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow i = +\frac{8}{9}^{A}$$

پ) در مثال قبل اگر منبع جریان 3^{A} شد به منبع جریان 10^{A} تغییر کند مقدار i چقدر است؟

$$i = \frac{3}{3+6}\times 10^{A} - \frac{1}{1+8}\times 1 = \frac{29}{9}^{A}$$



* معرفی رابطه تقارنی و معادله تونن و نورتن:

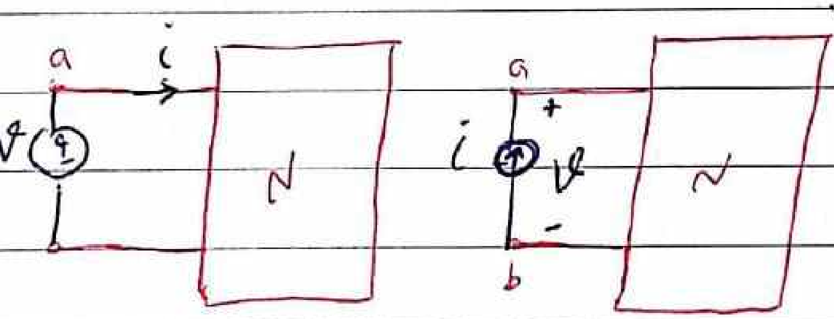
$$\left.\begin{aligned} v &= k_1 i + k_2 \\ i &= c_1 v + c_2 \end{aligned}\right\} \leftarrow \text{LTI}$$ در مدار مقاومتی

* k_1, k_2 و c_1, c_2 مقادیر ثابت اند.

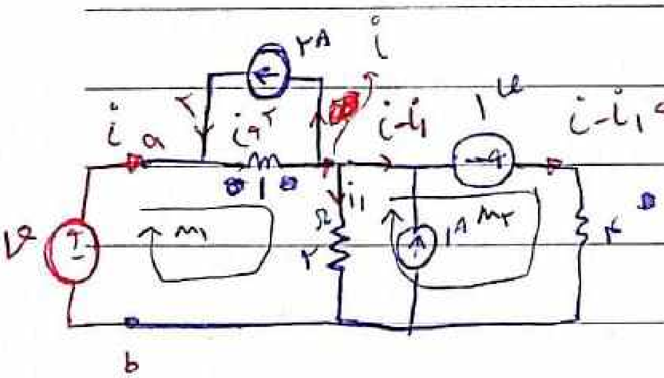
رابطه‌ی تعادلی: به رابطه‌ی ولتاژ و جریان که ارتباط یک شبکه را از قطب‌های a و b با خارج از آن مشخص می‌کند، رابطه تعادلی آن شبکه گویند، اگر شبکه مدار مقاومتی LTI باشد می‌توان نشان داد رابطه تعادلی به شکل زیر است.

روش تعیین رابطه تعادلی:

برای بدست آوردن رابطه‌ی تعادلی در یک مدار از ۲ سر a و b کافی است یکی از ۲ مدار زیر را تشکیل داد و سپس به روش گره یا مش در این معادلات مدار را به گونه‌ای حل کرد که تمامی متغیرها بغیر از v و i حذف شوند.



مثال: رابطه تعادلی زیر را تعیین کنید.



حل به روش مش ←

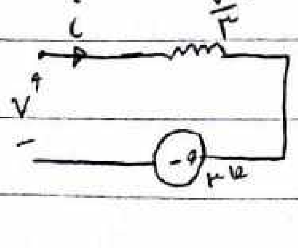
m_1 در KVL: $v = i + 2i_1 + 2$

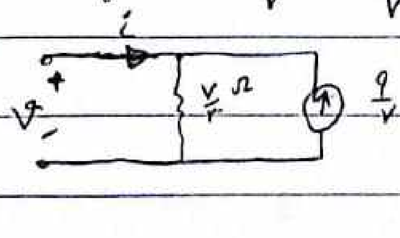
m_2 در KVL: $4i_1 = 2i + 3$

$\Rightarrow$ الف) $v = \frac{7}{2}i + 3$

ب) $i = \frac{2}{7}v - \frac{9}{7}$

معادل ⇒ مدار بالا





الف ب

Subject:............................ Date:............................

در شکل قبل هر کدام از رابطه‌های تقارنی الف و ب معادل مدار اصلی می‌باشد.

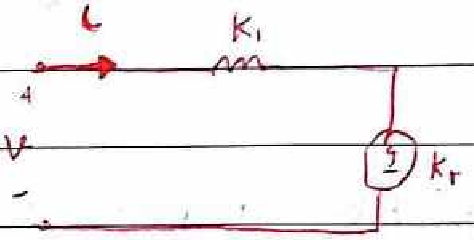
نکته ۱ ←

به رابطه تقارنی مقابل رابطه تونن گویند.

$v = k_1 i + k_2$

مقاومت معادل

ولتاژ تونن

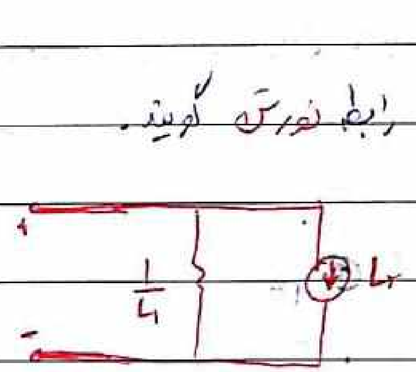


نکته ۲ ←

به رابطه تقارنی مقابل رابطه نورتن گویند.

$i = L_1 v + L_2$

جریان نورتن



نکات مهم ←

① منظور از پیدا کردن معادل تونن تعیین مقادیر k_1 و k_2 در رابطه‌ی $v = k_1 i + k_2$ می‌باشد
و منظور از پیدا کردن معادل نورتن تعیین مقادیر L_1 و L_2 در رابطه‌ی $i = L_1 v + L_2$ می‌باشد

② برای پیدا کردن معادل تونن و نورتن راه حل اصلی تعیین رابطه‌ی تقارنی مطابق با روش بیان شده در بخش قبل می‌باشد

۲۰) در بعضی از مسائل جهت تعیین معادل تونن و یا نورتن راه حل ساده تری وجود دارد که به شرح زیر می باشد:

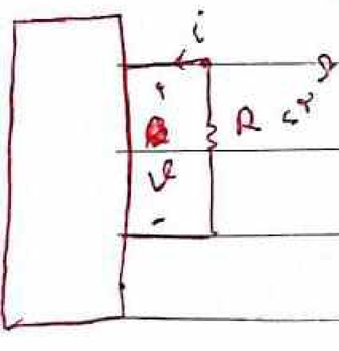
الف) برای تعیین k_2 (ولتاژ تونن) کافی است مدار را از دو سر a و b اتصال باز کرده و در این حالت ولتاژ ورودی را که همان k_2 می باشد بدست آوریم. (k_2 = ولتاژ اتصال باز)

ب) برای تعیین L_2 (جریان نورتن) کافی است مدار را از دو سر a و b اتصال کوتاه کرده و جریان عبوری از دو سر a و b را که همان L_2 می باشد تعیین کنیم. (L_2 = جریان اتصال کوتاه)

ج) برای تعیین مقاومت معادل (k_1 و یا $\frac{1}{L_1}$) کلیه منابع مستقل مدار را حذف کنیم و مقاومت دیده از دو سر ورودی را تعیین کنیم. ($k_1 \times L_1 = 1$)

۲۱) بهتر است در مسائلی که مدار شامل منابع وابسته می باشد از راه حل اصلی تعیین رابطه مداری برای پیدا کردن معادل تونن و نورتن استفاده شود.

مثال ۱: در مدار مقابل وقتی R به سمت ∞ میل می کند ولتاژ v برابر با ۳v می باشد و وقتی R به سمت صفر میل می کند جریان i برابر با ۳- است. به ازای $R=2\Omega$ جریان عبوری از مقاومت را تعیین کنید.



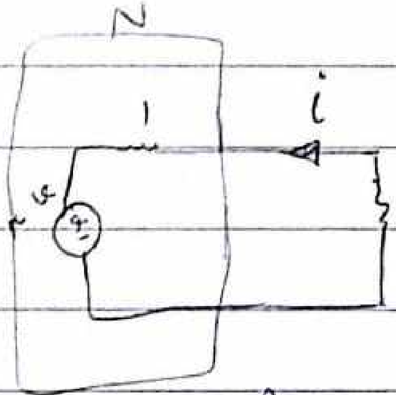
$$v = k_1 i + k_2 \qquad R \to \infty \Rightarrow v = 3 \Rightarrow k_2 = 3$$

$$i = L_1 v + L_2 \qquad R \to 0 \Rightarrow i = -3 \Rightarrow L_2 = -3$$

$$i = \frac{v_1}{k_1} - \frac{3}{k_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{k_1} = L_1 \\ -\frac{3}{k_1} = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = L_1 = 1$$

Subject:........................ Date:........................

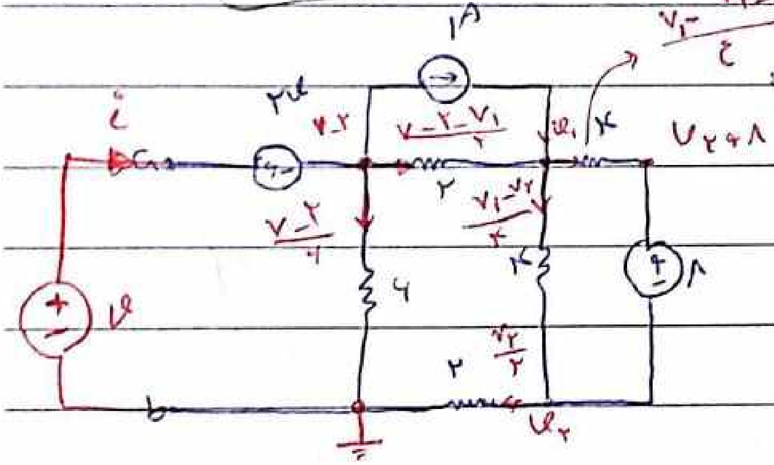


$V = i + 3$ ← معادل تونن

$i = V - 3$ ← معادل نورتن

$i = -1^{A}$

معادل تونن و نورتن را از دو سر ab بدست آورید



راه حل اول ←

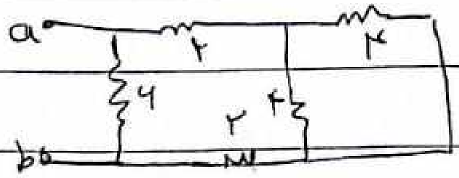
حل به روش گره اساسی ← $n = 4$, $n-1 = 3$, V_2, V_1

V_1 در گره KCL $\Rightarrow 1 + \frac{V-2-V_1}{2} = \frac{V_1-V_2}{4} + \frac{V_1-V_2-8}{4}$ (1)

V_2 در گره KCL $\Rightarrow \frac{V_1-V_2-8}{4} + \frac{V_1-V_2}{4} = \frac{V_2}{2}$ (2)

معادله i $\Rightarrow i = 1 + \frac{V-2-V_1}{2} + \frac{V-2}{6}$ (3)

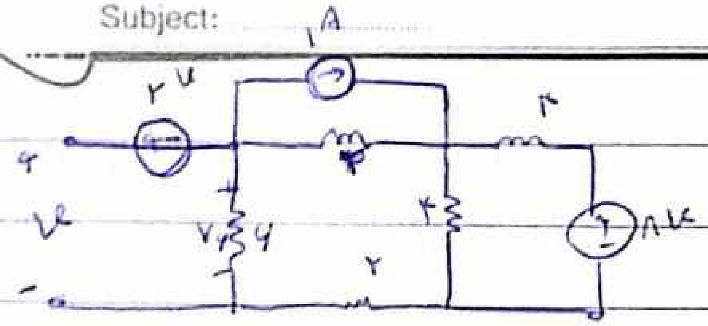
(1), (2), (3) $\Rightarrow \begin{cases} i = \frac{1}{3}V - 1 \\ V = 3i + 3 \end{cases}$



راه حل دوم ←

$R_{eq} = R_{th} = \left((4\|4) + 2 + 2\right)\|6 = 3$

Subject: Date:

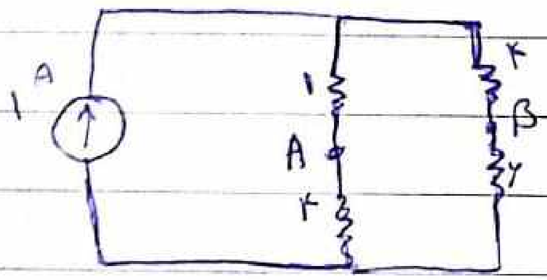


$k_r \, v = 2 \, v_6$

$\Rightarrow v_6 = 1$

$\Rightarrow k_r = 3$

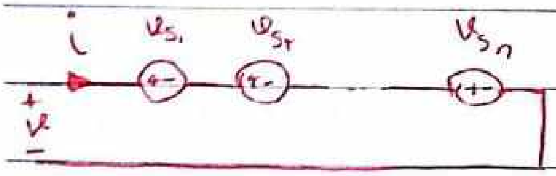
مثال

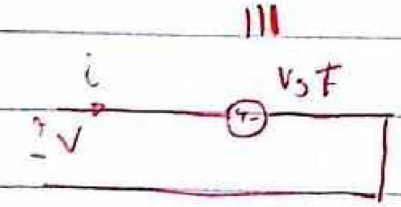


مقاومت معادل از دو سر A و B را تعیین کنید.

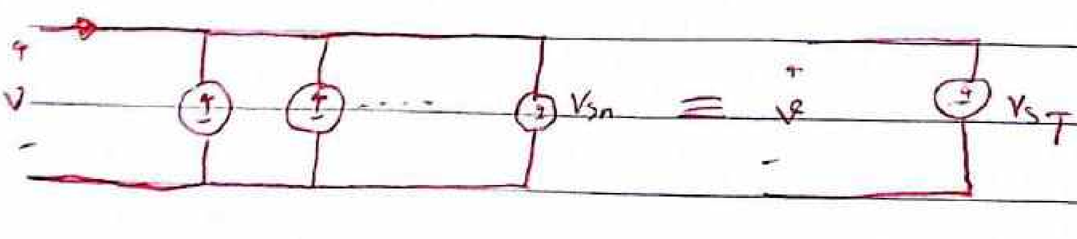
* بررسی چند مدار پرکاربرد :

الف) معادل منبع ولتاژ :



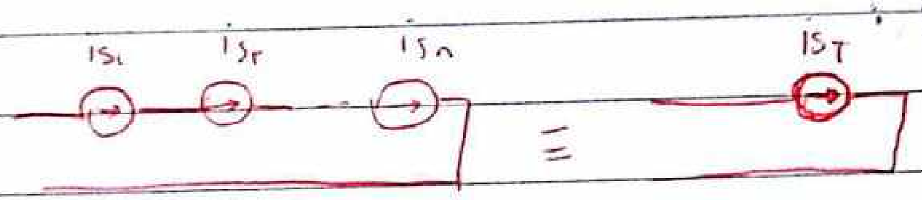


$$V_{sT} = \sum_{i=1}^{n} v_{si}$$

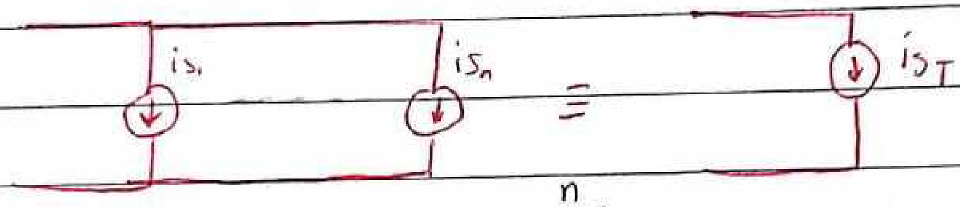


$$V_{sT} = V_{s1} = \dots = V_{sn}$$

ج) معادل منبع جریان سری :

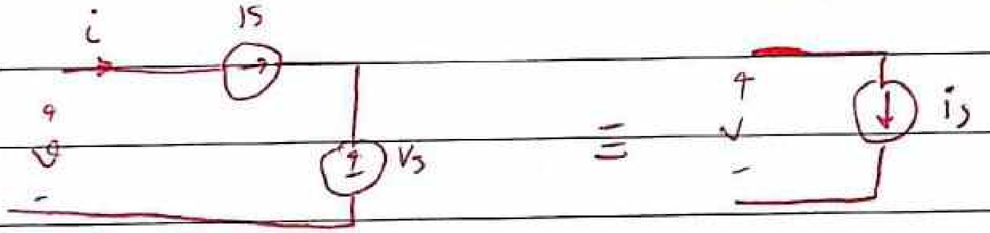


$$i_{s_T} = i_{s_1} = \dots = i_{s_n}$$



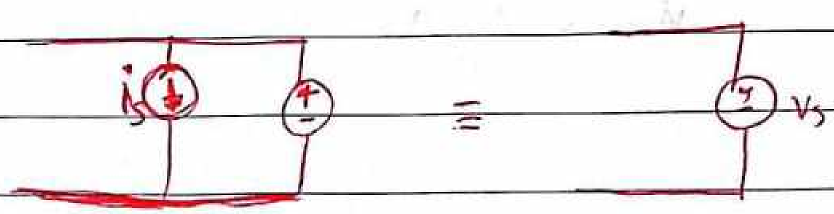
$$i_{s_T} = \sum_{k=1}^{n} i_{s_k}$$

۳. اتصال سری منبع ولتاژ و جریان :



هر المان به صورت سری با منبع جریان قابل حذف می باشد به غیر از اتصال باز

د) اتصال موازی منبع جریان و ولتاژ :



هر المان به صورت موازی با منبع ولتاژ قابل حذف است به غیر از اتصال کوتاه

معادل‌سازی مقاومت‌ها:

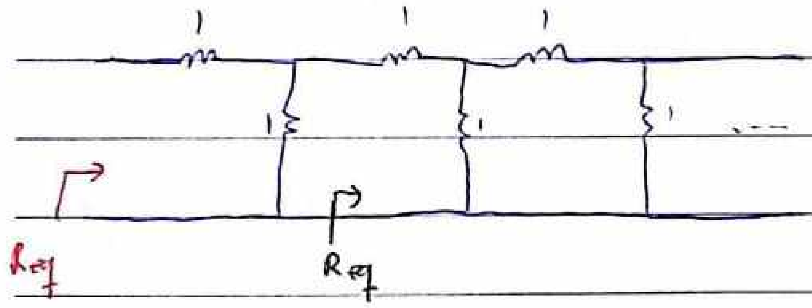
$$R_T = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

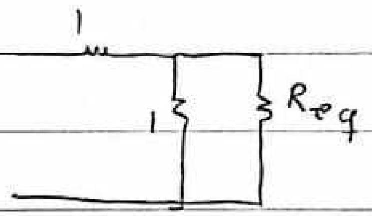
$$R_T \geq R_i$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

$$R_T \leq R_i$$

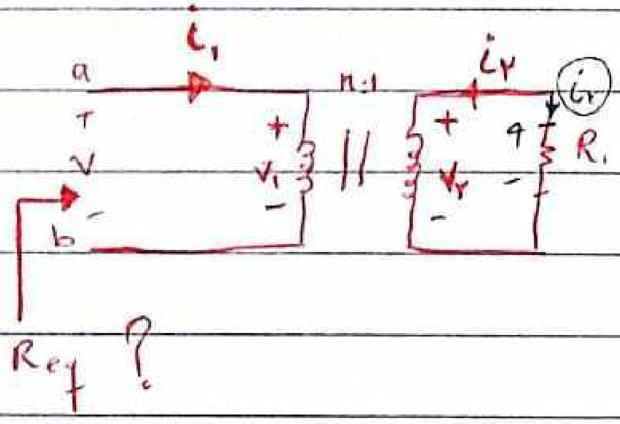
مثال ←



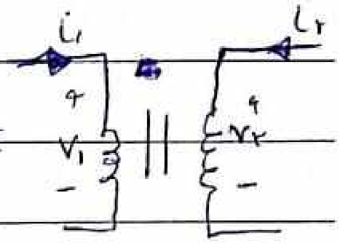


$$R_{eq} = 1 + (1 \parallel R_{eq})$$

مقاومت معادل را از دو سر a و b بیابید:

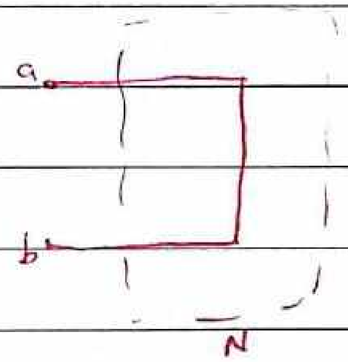


$$\begin{cases} v_1 = n v_2 \\ i_2 = -n i_1 \end{cases} =$$

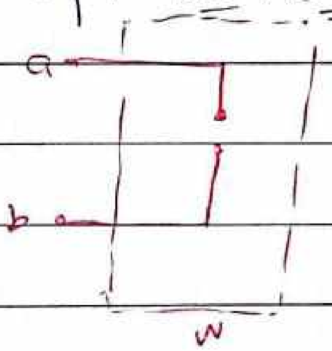


$$R_{eq} = \frac{V_1}{i_1} = \frac{nV_1}{-\frac{1}{n} i_2} = \frac{-n^2 \cdot -Ri_2}{i_2} = n^2 R$$

همواره معادل تونن و نورتن نداریم:



$v=0$
معادل نورتن نداریم



$i=0$
معادل تونن نداریم

فعال

* انتقال توان در مدارهای مقاومتی و قضیه ی انتقال توان حداکثر:

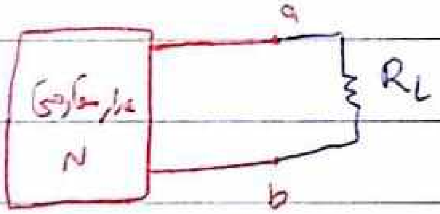
توان لحظه ای $= p(t) = v(t)\, i(t)$

توان متوسط $= P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t)\, i(t)\, dt$

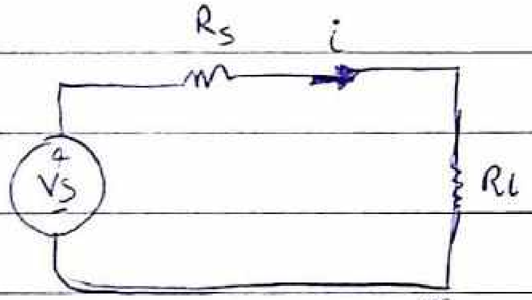
توان لحظه در یک مقاومت $= p(t) = v(t)\, i(t) = \begin{cases} R i^2(t) \\ \frac{v^2(t)}{R} \end{cases}$

توان متوسط در یک مقاومت $= P = \frac{1}{R} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v^2(t)\, dt$

قضیه انتقال توان حداکثر :



R_L چقدر باشد تا حداکثر توان از شبکه N به آن منتقل شود ؟



$$P_{R_L} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} R_L \, i^2(t) \, dt$$

$$P_{R_L} = \lim_{\tau \to \infty} \Big| \; - - - = R_1 \frac{V_s^2}{(R_1 + R_s)^2}$$ ← توان دریافتی از سوی مقاومت R_L

$$\frac{\partial P_{R_L}}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow V_s^2 \left[\frac{(R_s + R_L)(R_s - R_L)}{(R_s + R_1)^4} \right] = 0$$

$$\Rightarrow R_s = R_L$$

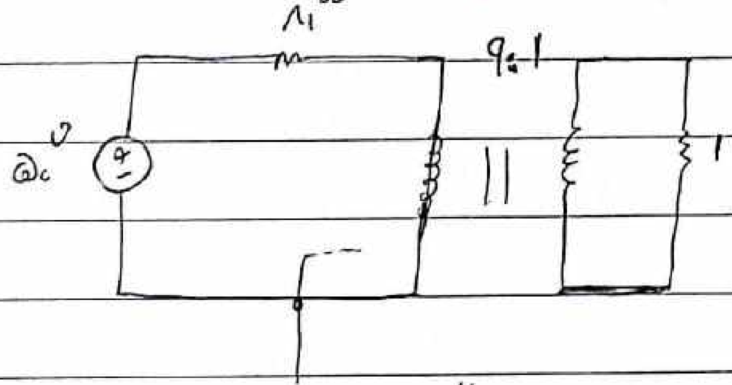
مقدار توان حداکثر $= P_{R_L\,max} = \frac{R_L}{(R_s + R_L)^2} V_s^2 \Big|_{R_s = R_L} = \frac{V_s^2}{4R_s}$

مثال ← تقویت کننده A ولتاژ مدار باز ۵ ولت و مقاومت معادل ۸۱ Ω را دارد، بلندگوی چند اهمی

برای تقویت کننده وصل شود، تا توان انتقالی به بلند حداکثر شود؟ بلندگوی ۸۱ Ω انتخاب شود.

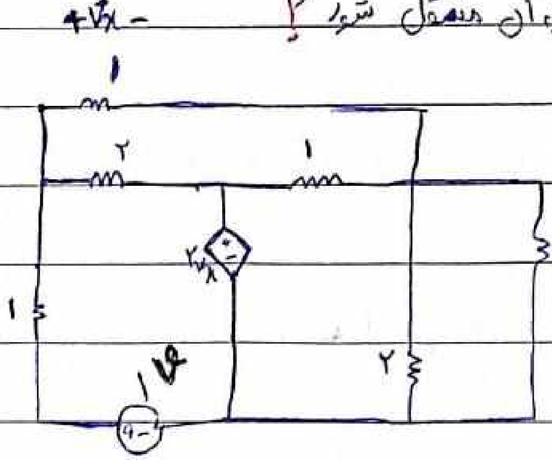
مثال ← در مثال قبل فرض کنیم بلندگو دارای مقاومت ۱ Ω باشد، اگر تقویت کننده های تقویت کننده A باشد

چه راهکاری برای انتقال توان حداکثر به بلندگو پیشنهاد می‌شود؟



$R_{eq} = 9^2 \cdot 1 = 81$

* مقاومت R چقدر باشد، تا حداکثر توان به آن منتقل شود؟



* در واقع باید معادل نورتن یا تونن مدار را بدست آوریم

پس R را حذف می‌کنیم و جای آن منبع ولتاژ قرار می‌دهیم R

$R = \frac{2}{9}$

$R = \frac{2}{3}$

«فصل سوم»

مدار غیر مقاومتی به مداری گفته می‌شود که در آن علاوه بر المان مقاومت و منابع سلف و خازن هم وجود دارد.

حل هر مدار مقاومتی توسط مش و گره منجر به حل معادله دیفرانسیل برای متغیر مجهول مورد نظر مسئله می‌باشد.

در حالت کلی حل معادلات دیفرانسیل متنوع است که در دروس دیگر تدریس می‌شود.

عموماً معادلات دیفرانسیلی که در مدارهای LTI ظاهر می‌شود معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت اند که در حالت کلی به شکل زیر قابل بیان می‌باشند:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y''(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

$$t>0$$

معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

- هر معادله تابع $y(t)$ مجهول مورد نظر می‌باشد که متناسب با جریان و یا ولتاژ مورد نظر می‌باشد.
- تابع $f(t)$ معروف به تابع ورودی هست به منابع مستقل مدار ارتباط دارد.

- به طور کلی حل یک مدار غیر مقاومتی به ۲ بخش زیر تقسیم می‌شود:

1. تعیین معادله دیفرانسیل برای متغیر مورد نظر
2. حل معادله دیفرانسیل و تعیین متغیر مورد نظر مسئله برحسب زمان

مقدمه ریاضی (نحوه حل معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت ✱)

الف) معرفی معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت :

درجه معادله دیفرانسیل ← بیشترین درجه مشتق تابع $y(t)$ در معادله دیفرانسیل

در حالت کلی برای حل یک معادله دیفرانسیل از مرتبه n به n شرط اولیه نیاز می باشد.

مجموعه شرایط اولیه $\left\{ y(t=0^-) , y'(t=0^-) , \dots , y^{(n-1)}(t=0^-) \right\}$

این مجموعه شرایط اولیه مربوط به المان های ذخیره ساز در مدار می باشد چرا که این المان ها مطابق با مطالب فصل اول دارای شرایط اولیه می باشند.

هدف از حل معادله دیفرانسیل ✱ تعیین تابع متغیر $y(t)$ برحسب زمان برای $t>0^-$ می باشد.

1) $$\underbrace{y(t)}_{\text{جواب کامل}} = \underbrace{y_p(t)}_{\text{جواب خصوصی}} + \underbrace{y_h(t)}_{\text{جواب همگن}}$$

جواب همگن ← جواب معادله دیفرانسیل ✱ برای حالتی که $f(t)=0$ باشد.

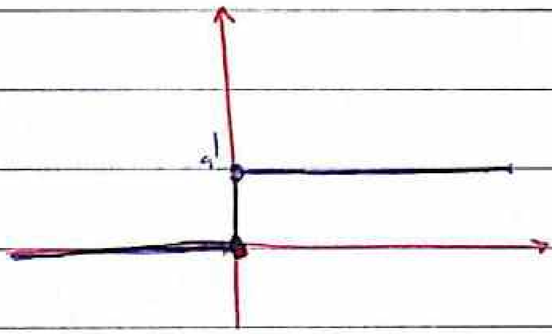
جواب خصوصی ← یک جواب از معادله دیفرانسیل ✱ است که شرایط اولیه

۲) $y(t)$ = جواب حالت صفر + جواب ورودی صفر

جواب ناشی از شرایط اولیه — جواب ناشی از ورودی ها

۱۴) معرفی تابع $f(t)$ در معادلات دیفرانسیل ★

۱- تابع پله $u(t)$



$$u(t)\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

نکته:

۱- تابع پله برای نشان دادن منبعی استفاده می‌شود که در لحظه $t=0$ وارد مدار می‌شود.

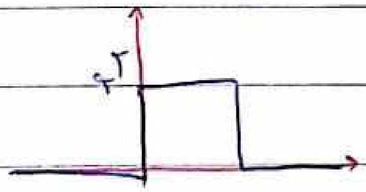
۲- اگر منبع در زمان $t=t_0$ وارد مدار شود از تابع $u(t-t_0)$ استفاده می‌شود.

مثال:

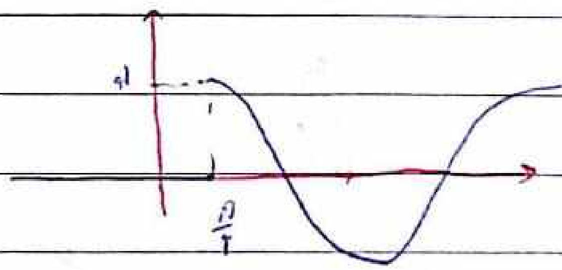
الف) $V_s = 2u(t) - 2u(t-1)$

ب) $i_s = \sin t\, u(t-\frac{\pi}{2})$

الف

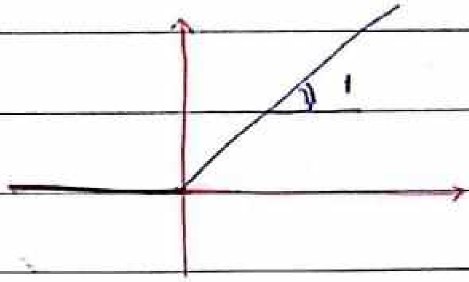


ب



۲- تابع شیب: $r(t)$

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & t>0 \end{cases}$$



نکات:

1

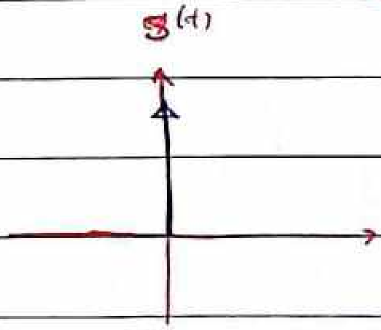
$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt} \Rightarrow r(t) = \int_{0^-}^{t} u(\tau)\,d\tau$$

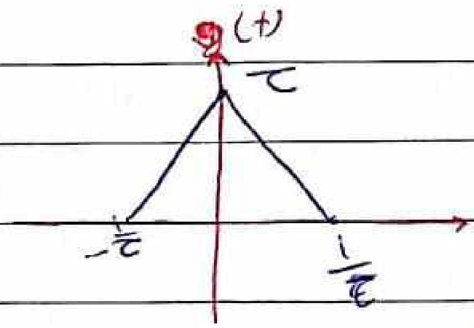
2-

$$r(t=0^+) = 0 = \int_{0^-}^{0^+} u(\tau)\,d\tau = 0$$

۳- تابع ضربه: $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t\neq 0 \\ \infty & t=0 \end{cases}$$





$$\delta(t) = \lim_{t\to\infty} g(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{t\to\infty} g(t)\,dt = \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = 1$$

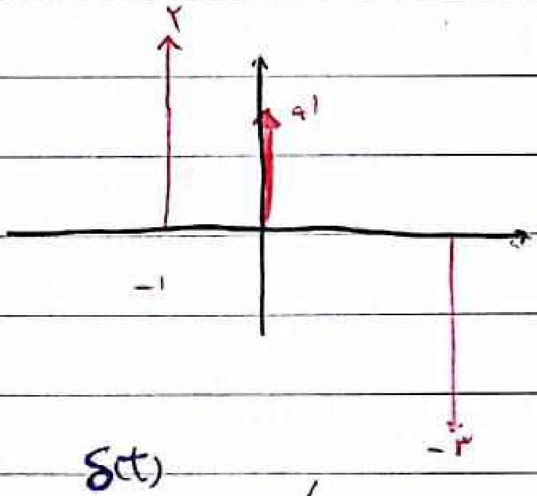
نکات:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt$$ ①

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$ ②

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\, dt$$

* تابع $x_1(t) = 2\delta(t+1) + \delta(t) - 3\delta(t-2)$ را رسم کرده و انتگرال تابع $\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} x_1(t)\, dt$ را بدست آورید.

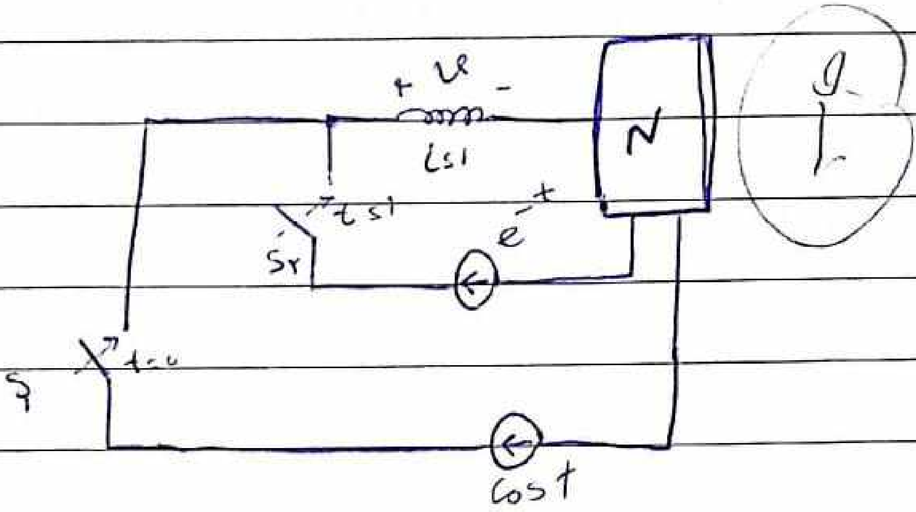


$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} x_1(t)\, dt = 2 + 1 = 3$$

③ بنابراین تابع ضربه برای تغییرات آنی استفاده می‌شود، هیچ منبع فیزیکی بصورت وجود ندارد ولی اگر منبعی در فاصله زمانی خیلی کوتاه مقداری بسیار زیاد ظاهر شود می‌توان آنرا بصورت تابع ضربه مدل کرد.

Subject:............................ Date:............................

مثال: در مدار زیر کلید S_1 در $t=0$ و کلید S_2 در $t=1$ بسته می‌شوند. جریان i و ولتاژ v را بدست آورید:



$$i(t) = \cos(t)\,u(t) + e^{-t}\,u(t-1)$$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = \frac{di(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow v(t) = \left[-\sin t\,u(t) + \cos(t)\,\delta(t)\right] + \left[-e^{-t}u(t-1) + \delta(t-1)e^{-t}\right]$$

$$v(t) = -\sin t\,u(t) + \delta(t) - e^{-t}u(t-1) + e^{-1}\delta(t-1)$$

خواص تابع ضربه:

1. $\delta(0^-) = \delta(0^+) = 0$

2. $f(t)\,\delta(t) = f(0)\,\delta(t)$

3. $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$

4. ~~$f(t)\,\delta(t-a) = f(a)\,\delta(t-a)$~~

۵. $$\int_{a^-}^{a^+} f(t)\,\delta(t-a)\,dt = f(a)$$

۶. $$\delta(f(t)) = \begin{cases} 0 & f(t)=0 \\ \infty & f(t)\neq 0 \end{cases}$$

۷. اگر t_i ها ریشه‌های معادله $f(t)=0$ باشد،

$$\int_{t_i^-}^{t_i^+} \delta(f(t))\,dt = \int_{t_i^-}^{t_i^+} \frac{\delta(u)\,du}{f'(t)} = \frac{1}{|f'(t_i)|}$$

$u = f(t)$

$du = f'(t)\,dt$

۸. $$\delta(f(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f'(t_i)|}\,\delta(t-t_i)$$

۹. $$\delta(-t) = \delta(t)$$

۱۰. $$\int_{a^-}^{a^+} f(t)\,\delta^{(n)}(t-a)\,dt = (-1)^n f^{(n)}(a)$$

Subject: .... Date: ....

نکته:

بررسی دقیق δ و u به عنوان تابع f(t) در معادله‌ی * :

۱. با توجه به این که تابع u(t) دارای انتگرال $\int_{0^-}^{0^+} u(t)\,dt = 0$ می‌باشد بنابراین لذا شرایط اولیه مدار در لحظه‌ی $t=0^-$ و $t=0^+$ یکسان است.

۲. با توجه به این که تابع δ(t) دارای انتگرال $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$ می‌باشد لذا شرایط اولیه مدار در لحظه‌ی $t=0^-$ و $t=0^+$ متفاوت است.

با توجه به دو نکته‌ی فوق اگر در طرف راست معادله دیفرانسیل * تابع δ و یا مشتقات آن ظاهر شده آنگاه لازم است شرایط اولیه مدار در $t=0^+$ از روی شرایط اولیه مدار در $t=0^-$ تعیین شود و اگر در طرف راست معادله دیفرانسیل * توابع δ و یا مشتقات آن ظاهر نشد شرایط اولیه مدار در لحظه‌ی $t=0^+$ با شرایط اولیه‌ی مدار در لحظه‌ی $t=0^-$ یکسان است.

ج) تعیین پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل مدار:

$$y = y_i + y_s$$

y_i: پاسخ ورودی صفر

y_s: پاسخ حالت صفر

با توجه به این که مدارهای بررسی شده در این فصل از نوع مدارهای LTI می‌باشند

نکته: پاسخ ورودی صفر مستقل از ورودی $(f(t))$ بوده و فقط تابع شرایط اولیه مدار می‌باشد.

پاسخ حالت‌های صفر مستقل از شرایط اولیه بوده و فقط تابع ورودی ها $(f(t))$ می‌باشد.

پاسخ حالت صفر مستقل از لحظه‌ی اعمال ورودی می‌باشد یعنی اگر

$$\text{if} \quad f(t) \longrightarrow y_{s_1}(t)$$

آنگاه

$$f(t-t_0) \longrightarrow y_{s_1}(t-t_0)$$

مثال: پاسخ ورودی صفر یک مدار برابر است با $y_i = (2e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$ در صورتیکه

این مدار ورودی $f_1 = \delta(t)$ وارد شود پاسخ حالت صفر معادل با این ورودی برابر با $y_{s_1} = (e^{-t} + 4e^{-2t})u(t)$ می‌باشد، مطلوب است کسب پاسخ کامل مدار به ورودی $f_2 = \frac{1}{2}\delta(t) + 2u(t-1)$

$$y_{2T} = y_{i_2} + y_{s_2} \qquad y_{i_2} = y_i = 2e^{-t} + 2e^{-2t}$$ چون شرایط اولیه ثابت است

$$f_1 = \delta(t) \xrightarrow{\text{پاسخ حالت صفر}} y_{s_1} = (e^{-t} + 4e^{-2t})\,u(t)$$

$$f_2 = \frac{1}{2}\delta(t) + 2u(t-1) \longrightarrow y_{s_2} = ?$$

$$y_{s_2} = \frac{1}{2}(e^{-t} + 4e^{-2t}) + 2\int_0^{t-1} (e^{-\tau} + 4e^{-2\tau})u(\tau)\, d\tau$$

چون $u(t)$ یک می‌شود

$$\int_0^{t-1} (e^{-\tau} + 4e^{-2\tau})u(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 2\left[-e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)} + 3\right] & t>1 \end{cases}$$

$$y_{s_2} = \frac{1}{2}(e^{-t}+te^{-2t})u(t) + 2(-e^{-(t-1)} - 2e^{-2(t-1)} + 3)u(t-1)$$

$$\Rightarrow y_{T_2} = y_{s_2} + y_{i_2}$$

۲) حل معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت معادله دیفرانسیل ☆

$$y_T = y_h + y_p$$

جواب همگن   جواب خصوصی

I) تعیین جواب همگن:

با اندکی دقت در معادله همگن فوق مشخص می‌شود تنها توابعی که دارای مشتقاتی به شکل خودشان باشند می‌توانند جوابی برای این معادله باشند. بنابراین توابعی به فرم Ae^{st} و یا ترکیبی از توابع نمایی به این شکل نیز می‌توانند جواب معادله همگن فوق باشند

$$y_h = Ae^{st} \rightarrow A\left[a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0\right]e^{st} = 0$$

با توجه به رابطه فوق برای تعیین پاسخ همگن «y_h» کافی است ریشه‌های معادله مشخصه را تعیین کرده و مطابق با الگوی زیر y_h را بدست آوریم:

جملات موجود در y_h بصورت مجموع توابع نمایی $e^{s_i t}$ هستند با این توضیح که اگر s_i ریشه‌ها غیر تکراری باشند جملات متناظر با این ریشه در «y_h» به صورت $A_i e^{s_i t}$ خواهد بود و اگر ریشه s_i تکراری باشد و در تکرار j ام قرار داشته باشیم آنگاه

جمله‌ی متناظر با آن در y_h بصورت $A_{ij}\, t^{j-1} e^{s_i t}$ خواهد بود.

توجه داشته باشید A_1 و A_{ij} که مقادیر ثابتی می‌باشند که توسط شرایط اولیه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل تعیین می‌شوند.

مثال: برای معادلات دیفرانسیل زیر جواب همگن را تعیین کنید.

$$y'' + 5y' + 6y(t) = 0$$

$$s^2 + 5s + 6 = 0 \quad \begin{cases} s = -2 \\ s = -3 \end{cases}$$

$$y_h = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t}$$

$$y^{(3)} + 8y^{(2)} + 16y^{(1)} = 0$$

$$s^3 + 8s^2 + 16s = 0 \quad \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_{21} = -4 \\ s_{22} = -4 \end{cases}$$

$$y_h = A_1 + A_{21} e^{-4t} + A_{22}\, t\, e^{-4t}$$

$$y^{(2)}(t) + 6y^{(1)}(t) + 11y(t) = 0$$

$$s^2 + 6s + 11 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -3 \pm j\sqrt{2}$$

$$y_h = A_1 e^{(-3+j\sqrt{2})t} + A_2 e^{(-3-j\sqrt{2})t}$$

$$y_h = e^{-3t}\left[A_1(\cos\sqrt{2}t + j\sin\sqrt{2}t) + A_2(\cos\sqrt{2}t - j\sin\sqrt{2}t)\right]$$

$$y_h = e^{-3t}\left[(A_1+A_2)\cos\sqrt{2}t + j(A_1-A_2)\sin\sqrt{2}t\right]$$

$$= e^{-3t}\left[B_1\cos\sqrt{2}t + jB_2\sin\sqrt{2}t\right]$$

مثال: جواب همگن متناظر با معادله‌ی مشخصه‌ی زیر را بدست آورید:

$$S(S^2+3)^2\left[(S+1)^2+1\right](S+2) = 0$$

$S_1 = 0 \quad S_2 = \sqrt{3}j \quad S_3 = -\sqrt{3}j \quad S_4 = -\sqrt{3}j \quad S_5 = \sqrt{3}j$

$S_6 = -1+j \quad S_7 = -1-j \quad S_8 = -2$

$$y_h = A_1 + (A_2\cos\sqrt{3}t + A_3\sin\sqrt{3}t) + (A_{21}t\cos\sqrt{3}t + A_{31}t\sin\sqrt{3}t)$$

$$+ e^{-t}(A_6\cos t + A_7\sin t) + A_8 e^{-2t}$$

با توجه به توضیحات فوق برای تعیین جواب همگن معادله دیفرانسیل ★ (y_h) کافی است ابتدا معادله مشخصه

را تعیین کرده سپس از روی ریشه‌های معادله‌ی مشخصه

ریشه‌های معادله مشخصه را فرکانس‌های طبیعی آن متغیر گویند.

II تعیین جواب خصوصی معادله ★ (y_p)

همانطور که قبلاً اشاره شد، جواب خصوصی معادله‌ی دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت (معادله ستاره ★) جوابی است که اثر $f(t)$ در آن وجود دارد.

به طور کلی اگر تابع $f(t)$ بصورت مجموع وزنی از توابع مختلف باشد $f(t)=\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(t)$
آنگاه پاسخ خصوصی y_p برابر با مجموع های وزنی
پاسخ های خصوصی بهر کدام از توابع $g_i(t)$ خواهد بود یعنی:

$$y_p=\sum_{i=1}^{n} C_i y_{p_i}$$

به طور کلی برای تعیین y_{p_i} ها حالات مختلفی وجود دارد که در ادامه بررسی می‌شود.

۱- اگر تابع $g_i(t)$ تابع $\delta(t)$ و یا مشتق تابع $\delta(t)$ از مرتبه m باشد،
بطوریکه $(m<n)$
آنگاه جواب خصوصی متناظر با این $g_i(t)$ برابر صفر خواهد بود. $y_{p_i}=0$

۲- اگر تابع $g_i(t)$ تابع مشتق $\delta(t)$ از مرتبه m باشد بطوریکه $(m\geq n)$
آنگاه جواب خصوصی متناظر با این $g_i(t)$ از جنس توابع ضربه و یا مشتقات آن خواهد بود.
که در بخش های بعدی بررسی می‌شود.

۳- اگر تابع $g_i(t)$ چند جمله‌ای از درجه "r" باشد، آنگاه جواب خصوصی متناظر با آن
برابر است با $y_{p_i}=t^m p(t)$ که در آن $p(t)$ چند جمله‌ای از درجه r، m تعداد ریشه‌های

$S=0$ در معادله‌ی مشخصه است.

۴ - اگر تابع ورودی به صورت $Ke^{\beta t}$ باشد، پاسخ خصوصی متناظر با آن برابر با $At^{L} e^{\beta t}$

خواهد بود که در آن L تعداد ریشه های $S=\beta$ در معادله مشخصه است.

مثال: جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را تعیین کنید:

$$y'' + 8y' + 17y = u(t) + e^{-t}u(t) + \underbrace{e^{-t}\sin(2t)\,u(t)}_{} \qquad t>0$$

$$\operatorname{Im}\{e^{-t}e^{j2t}\} = \operatorname{Im}\{e^{(-1+2j)t}\}$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$

معادله مشخصه $\Rightarrow S^2 + 8S + 17 = 0 \;\rightarrow\; S_1 = -4+j,\quad S_2 = -4-j$

$y_{p_1} = k_1$ $\qquad (m=0,\ r=0)$ ← مورد ۳

$y_{p_2} = k_2 e^{-t}$ $\qquad (L=0)$ ← مورد ۴

$y_{p_3} = \operatorname{Im}\{k_3 e^{(-1+2j)t}\}$ $\qquad (L=0)$ ← مورد ۴

$$y_p = k_1 + k_2 e^{-t} + \mathrm{Im}\left\{k_3 e^{(-1+2j)t}\right\}$$

$$y''_p + 8y'_p + 17y_p = 1 + e^{-t} + e^{-t}\sin 2t$$

$$y''_p = k_2 e^{-t} + \mathrm{Im}\left\{k_3(-1+2j)^2 e^{(-1+2j)t}\right\}$$

$$y'_p = -k_2 e^{-t} + \mathrm{Im}\left\{k_3(-1+2j)\, e^{(-1+2j)t}\right\}$$

با جایگذاری در معادله $\Rightarrow \quad k_1 = \frac{1}{17} \qquad k_2 = \frac{1}{10}$

$$k_3(-1+2j)^2 + k_3(-1+2j) + 17k_3 = 1$$

$$\Rightarrow k_3 = \frac{1}{(-1+2j)^2 + (-1+2j) + 17} = \frac{1}{6\sqrt{5}} e^{-j63^\circ}$$

$$y_p = \frac{1}{17} + \frac{1}{10}e^{-t} + \frac{1}{6\sqrt{5}} e^{-t}\,\mathrm{Sin}(2t - 63^\circ)$$

$$y^{(3)} + 5y^{(2)} + 4y^{(1)} = u(t) + 2t\,u(t) + e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) + \delta(t) + \cos(t)\,u(t) \qquad t>0$$

معادله مشخصه $\Rightarrow \quad s^3 + 5s^2 + 4s = 0 \quad \begin{cases} s = 0 \\ s = -1 \\ s = -4 \end{cases}$

$1 + 2t \xrightarrow{r=1,\ m=1} y_{p_1} = t(k_1 + k_2 t)$ ← $\boxed{\text{صورت ۳}}$

$e^{-t} \xrightarrow[L=1]{\beta=-1} y_{p_2} = k_3\, t e^{-t}$ ← صورت ۴

$\frac{1}{2}e^{-3t} \xrightarrow[m=0]{\beta=-3} y_{p_3} = k_4 e^{-3t}$ صورت ۲

$\delta(t) \longrightarrow y_{p_4} = 0$ مورد ۴

$\cos(t) = R_e\{e^{jt}\} \xrightarrow[L=0]{\beta=j} y_{p_5} = R_e\{k_5 e^{jt}\}$ مورد ۵

$$y_p = k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t e^{-t} + k_4 e^{-3t} + R_e\{k_5 e^{jt}\}$$

$$y_p^{(3)} + y_p^{(2)} + 4y_p^{(1)} = 1 + 3t + e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} + \cos(t)$$

$$k_1 = -\frac{3}{8}, \quad k_2 = \frac{1}{4}, \quad k_3 = -\frac{1}{3}, \quad k_4 = \frac{1}{12}, \quad k_5 = \frac{-1}{\sqrt{34}} e^{j31^\circ}$$

$$y_p = -\frac{3}{8}t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}te^{-t} + \frac{1}{12}e^{-3t} - \frac{1}{\sqrt{34}}\cos(t+31^\circ)$$

III تعیین شرایط اولیه معادله ★ در $(t=0^+)$

برای پیدا کردن جواب کامل معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت (معادله ★) تنها بخش مجهول باقی مانده ضرایب نامعلوم در جواب همگن می باشد.

برای تعیین این ضرایب مجهول نیاز داریم تا شرایط اولیه متغیر y در معادله دیفرانسیل ★ در لحظه $t=0^+$ (یعنی لحظه شروع به کار مدار) تعیین کنیم.

مشکل از آنجا شروع می شود که شرایط اولیه سلف ها و خازن ها و شرایط اولیه متغیر y در لحظه $t=0^-$ می باشد. بنابراین نیاز است تا شرایط اولیه متغیر y در لحظه $t=0^+$ از روی شرایط اولیه در لحظه $t=0^-$ بدست آوریم.

Subject: .... Date: ....

اگر در طرف دوم معادله دیفرانسیل ~~*~~ هیچ تابع δ و یا مشتقات آن نباشد:

* با توجه به توضیحات ابتدای فصل، شرایط اولیه در $t=0^+$ با شرایط اولیه در $t=0^-$ برای متغیر y یکسان است.

اما اگر در طرف دوم معادله دیفرانسیل * تابع δ و یا مشتقات آن باشد:

باید مطابق با مراحل زیر با شرایط اولیه $t=0^+$ را از روی شرایط $t=0^-$ تعیین کرد:

حالت اول) مرتبه ی بیشترین مشتق تابع $\delta(t)$ سمت راست معادله ی * کمتر از مرتبه ی معادله دیفرانسیل باشد: یعنی $(m<n)$

در این حالت با انتگرال گیری از طرفین معادله دیفرانسیل شرایط 0^+ را از روی شرایط 0^- تعیین می کنیم.

مثال: در معادله ی زیر شرایط 0^+ را برای متغیر y تعیین کنید:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = \delta'(t) - \delta(t) + u(t) + e^{-2t}u(t) & t>0 \\ y(0^-) = 1 \quad \text{و} \quad y'(0^-) = -1 \end{cases}$$

$$n=2 \,,\, m=1 \Rightarrow (m<n)$$

$$\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{t} \left(y'' + 4y' + 3y = \delta'(t) - \delta(t) + u(t) + e^{-2t}u(t)\right)$$

$$\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{t} y''\, dt\, dt = \int_{0^-}^{0^+}\left(y'(t) - y'(0^-)\right) dt = \int_{0^-}^{0^+} y'(t)\, dt = y(0^+) - y(0^-)$$

$$\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{t} 4y'\, dt\, dt = \int_{0^-}^{0^+} 4\left(y(t) - y(0^-)\right) dt = \int_{0^-}^{0^+} 4y(t)\, dt \longrightarrow 0$$

چون y دارای جنس تابع δ نیست.

Notebook SEVAN

$$\int_{0^-}^{0^+}\int_{0}^{t} 3y\,dt\,dt = \int_{0}^{t}\left(\int_{0^-}^{0^+} 3y\,dt\right)dt = 0$$

چون ضربه
تابع δ نیست

$$\int_{0^-}^{0^+}\int_{0}^{t} \delta'(t) = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\int\int -\delta(t) = -\int\int u(t)\,dt = 0$$

$$\int\int (1+e^{-2t})u(t) = \int_{0^-}^{0^+} \left(t + 0.5 - 0.5e^{-2t}\right)dt = 0$$

$$y(0^+) = 1 + y(0^-) \Rightarrow y(0^+) = 2$$

$y'(0^+)$ تعیین $\Rightarrow \int_{0^-}^{0^+} y'' + 4y' + 3y = \delta'(t) - \delta + e^{-2t}u(t)$

$$y'(0^+) - y'(0^-) + 4\left(y(0^+) - y(0^-)\right) + 0 = \underbrace{\delta(0^+) - \delta(0^-)}_{0} - 1 + 0$$

$$\Rightarrow y'(0^+) = -6$$

باتوجه به مثال فوق در یک معادله مرتبه n که در آن درجه مشتق تابع δ در سمت راست m که کمتر هم مرتبه معادله دیفرانسیل (n) می‌باشد برای تعیین شرایط اولیه در $t = 0^+$ $\{y(0^+), y'(0^+), \dots, y^{(n-1)}(0^+)\}$ به شکل زیر عمل می‌کنیم:

برای تعیین $y(0^+)$ از طرفین معادله ★ n بار انتگرال گرفته می‌شود.

برای محاسبه $y'(0^+)$ از طرفین معادله ★ $(n-1)$ بار انتگرال گرفته می‌شود

برای محاسبه $y^{(n-1)}(0^+)$ " " " " یک بار " " .

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حالت دوم:

مرتبه بیشترین مشتق تابع $\delta(t)$ در سمت راست معادله بیشتر یا مساوی مرتبه معادله دیفرانسیل باشد. $(m \geq n)$

در این حالت برخلاف حالت اول، y از جنس δ و یا مشتقات δ خواهد بود.

مثال: شرایط 0^+ را در معادله‌ی دیفرانسیل زیر تعیین کنید.

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 2\delta''(t) + \delta(t) + u(t) + e^{-3t}u(t) & t \geq 0^- \\ y(0^-) = 1 , \quad y'(0^-) = -1 \end{cases}$$

$m = 2 , n = 2 \Rightarrow (m = n) \leftarrow$ حالت دوم

در معادله دیفرانسیل فوق چون به وجود جمله‌ی $2\delta''(t)$ در تابع $\underbrace{f(t)}_{\text{جواب خصوصی}}$ معادله‌ی دیفرانسیل دارای جوابی از جنس تابع ضربه و یا مشتقات آن می‌باشد.

$$y'' + 3y' + 2y = 2\delta''(t) + \delta(t) + (1+1)u(t) \qquad 0^- \leq t \leq 0^+$$

$$\begin{cases} y'' = A\delta''(t) + B\delta'(t) + C\delta(t) + D u(t) + y''(0^-) \\ y' = A\delta'(t) + B\delta(t) + C u(t) + y'(0^-) \\ y = A\delta(t) + B u(t) + y(0^-) \end{cases} \qquad 0^- \leq t \leq 0^+$$

جایگذاری در معادله	
	$A = 2$
موثر در معادله دیفرانسیل	$B + 3A = 0$
در لحظات	$C + 3B + 2A = 1$
$0^- \leq t \leq 0^+$	$D + 3C + 2B = 2$

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = -6 \\ C = 15 \\ D = -31 \end{cases}$$

PaPCO

$$y'(0^+) = C + y'(0^-) = 14$$
$$y(0^+) = B + y(0^-) = -5$$

$$y_{p_1} = A\,\delta(t) = 2\delta(t)$$ جواب خصوصی مربوط به جمله $2\delta''(t)$

خلاصه کل بخش مقدمه ریاضی :

1- تعیین معادله مشخصه ، تعیین جواب های همگن (y_h)

2- تعیین جواب خصوصی (y_p)

3- تعیین شرایط اولیه (0^+) از روی شرایط اولیه (0^-)

4- تعیین ضرایب نامعلوم جواب همگن به کمک شرایط اولیه (0^+)

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید و متغیر $i(t)$ را بیابید:

$$\begin{cases} i'' + 2i' + 3i = \frac{1}{2}\delta'(t) + u(t) + 2e^{-t}u(t) \\ i(0^-) = 1 \quad , \quad i'(0^-) = 2 \end{cases}$$

معادله مشخصه = $s^2 + 2s + 3 = 0$
$$\begin{cases} s_1 = -1 + j\sqrt{2} \\ s_2 = -1 - j\sqrt{2} \end{cases}$$

جواب همگن — $i_h = e^{-t}\left(A_1 \cos(\sqrt{2}t) + A_2 \sin\sqrt{2}t\right)$

$$i_p = i_{p_1} + i_{p_2} + i_{p_3} = 0 + k_1 + k_2 e^{-t}$$ ← جواب خصوصی

m(n)

$$i_p'' + 2 i_p' + 3 i_p = u(t) + 2e^{-t}u(t)$$

$k_1 = \frac{1}{3}$

$k_2 = 1$

$$i_p = \frac{1}{3} + e^{-t}$$

تعیین شرایط اولیه (حالت اول):

$$\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{t}\left[i'' + 2i' + 3i = \frac{1}{2}\delta'(t) + u(t) + 2e^{-t}u(t)\right]$$

ازجنس δ نیست:

$$\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{t} i''\,dt\,dt = \int_{0^-}^{0^+}\left[i'(t) - i'(0^-)\right]dt = i(0^+) - i(0^-)$$

$$\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{t} 2i' = \int_{0^-}^{0^+}\left[2i(t) - 2i(0^-)\right] = 0$$

$$\int_{0^-}^{0^+}\int 3i = \int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{0^+} 3i = 0$$

$$i(0^+) - i(0^-) = \frac{1}{2} \Rightarrow i(0^+) = \frac{3}{2}$$

$$\int_{0^-}^{0^+}\left[i'' + 2i' + 3i = \frac{1}{2}\delta'(t) + u(t) + 2e^{-t}u(t)\right]$$

$$i'(0^+) - i'(0^-) + 2\left(i(0^+) - i(0^-)\right) = 0 \Rightarrow i'(0^+) = 1$$

$$i(t) = e^{-t}\left[A_1\cos\sqrt{2}\,t + A_2\sin\sqrt{2}\,t\right] + \frac{1}{3} + e^{-t} \qquad t \geq 0^+$$

$$i(0^+) = A_1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{6}$$

$$i'(0^+) = -A_1 + \sqrt{2}A_2 - 1 = 1 \Rightarrow A_2 = \frac{13}{6\sqrt{2}}$$

$$i(t) = e^{-t}\left[\frac{1}{6}\cos(\sqrt{2}t) + \frac{13}{6\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\right] + \frac{1}{3} + e^{-t} \qquad t \geq 0^+$$

جواب نهایی

$$\begin{cases} v'' + 3v' + 2v = \delta''(t) + \frac{1}{2}\delta'(t) + 3e^{-4t}u(t) \\ v(0^-) = v'(0^-) = 0 \end{cases}$$

ولتاژ $v(t)$ را بیابید ←

معادله مشخصه $\Rightarrow s^2 + 3s + 2 = 0 \Rightarrow s = -1,\ s = -2$

$$v_h = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$ جواب همگن

$$v_p = \underset{?}{v_{p_1}} + v_{p_2} + v_{p_3} = v_{p_1} + 0 + k_1 e^{-4t}$$

$$v_p'' + 3v_p' + 2v_p = \delta''(t) + 3e^{-4t} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}$$

$$v_p = \overset{?}{v_{p_1}} + \frac{1}{2}e^{-4t}$$ جواب خصوصی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تعیین شرایط 0^+ : حالت دوم :

$$\begin{cases} v'' = A\delta'''(t) + B\delta''(t) + C\delta'(t) + D\delta(t) + E\,u(t) + v''(0^-) \\ v' = A\delta''(t) + B\delta'(t) + C\delta(t) + D\,u(t) + v'(0^-) \\ v = A\delta'(t) + B\delta(t) + C\,u(t) + v(0^-) \end{cases}$$

$$v'' + ۳v' + ۲v = \delta'''(t) + \frac{1}{۲}\delta'(t) + ۳u(t)$$

$0^- < t < 0^+$

$A = 1 \qquad B = -۳ \qquad C = \frac{۱۵}{۲} \qquad D = -\frac{۳۳}{۲}$

$v(0^+) = C + v(0^-) \Rightarrow v(0^+) = \frac{۱۵}{۲}$

$v'(0^+) = D + v'(0^-) \Rightarrow v'(0^+) = -\frac{۳۳}{۲}$

$v_{p_1} = \delta'(t) - ۳\delta(t)$

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_۲ e^{-۲t} + \frac{1}{۲}e^{-۴t} + \delta'(t) - ۳\delta(t)$$

$t \geq 0$

$v(0^+) = A_1 + A_۲ + \frac{1}{۲} = \frac{۱۵}{۲} \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{۲}$

$v'(0^+) = -A_1 - ۲A_۲ - ۲ = -\frac{۳۳}{۲} \qquad A_۲ = \frac{۱۵}{۲}$

$$v(t) = -\frac{1}{۲}e^{-t} + \frac{۱۵}{۲}e^{-۲t} + \frac{1}{۲}e^{-۴t} + \delta'(t) - ۳\delta(t)$$

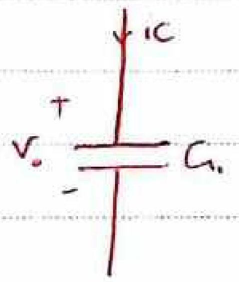
$t \geq 0^-$

جواب بخاطر مرحله (سعید اکبری)

* حل مدار غیرساکن و حتی به کمک تعیین معادله دیفرانسیل برای متغیر مورد نظر (روش آرام کردن)

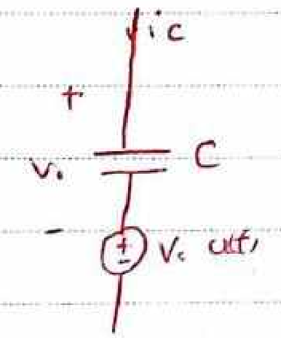
مراحل

① شرایط اولیه مدار (ولتاژ خازن‌ها و جریان سلف‌ها) را مطابق با الگوی زیر در مدار وارد می‌کنیم:



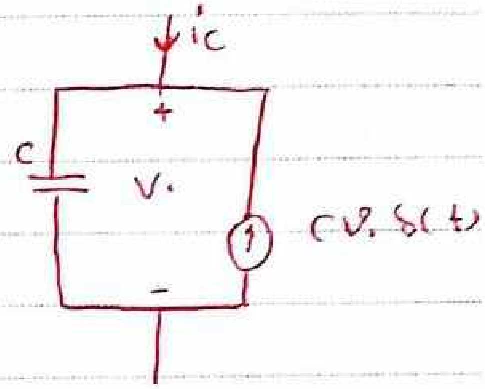
خازن با شرط اولیه

≡

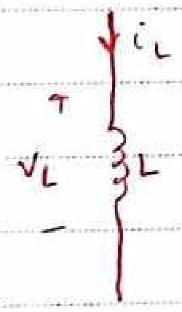


خازن بدون شرط اولیه

≡

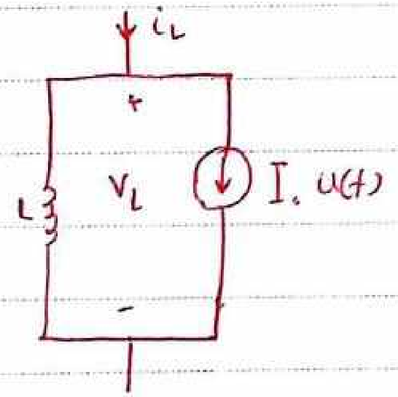


خازن بدون شرط اولیه



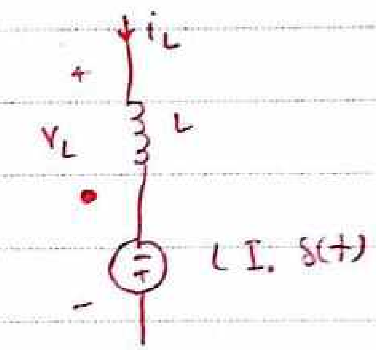
سلف با شرط اولیه

≡



سلف بدون شرط اولیه

≡



سلف بدون شرط اولیه

② هر منبع مستقل مدار، درصورتیکه زمان شروع آن مشخص نشده باشد و از طرفی مقدار منبع یک کمیت کدری (ازلی یا دائمی) باشد، با اضافه کردن تابع $u(t)$ به انتهای آن لحظه شروع به کار منبع را در مدار مشخص می‌کنیم.

③ به روش مش یا گره مطابق با مطالب فصل قبل ، معادلات مستقل مدار را برحسب جریان مش‌ها و یا ولتاژ گره‌های اساسی می‌نویسیم.

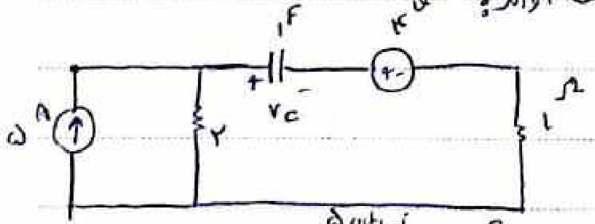
④ متغیر مجهول مورد نظر مسئله را برحسب متغیرهای مستقل (ولتاژ گره‌ها در روش گره و جریان مش‌ها در روش مش) بیان می‌کنیم.

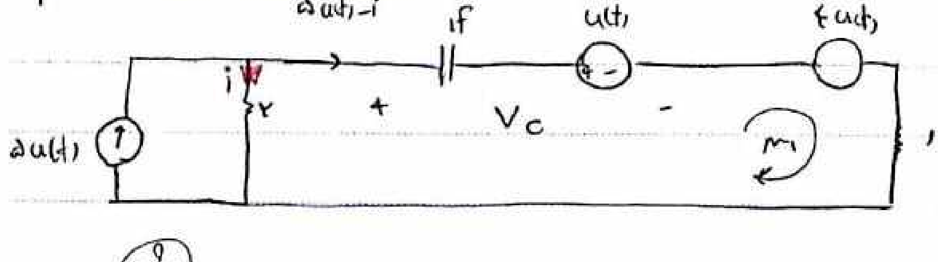
⑤ به کمک مرحله ۳ و ۴ معادله دیفرانسیل حاکم بر متغیر مجهول مورد نظر مسئله را بدست می‌آوریم.

⑥ در شرایط اولیه (0^-) متغیر مجهول مورد نظر تماماً برابر با صفر است.

⑦ معادله دیفرانسیل بدست آمده از مرحله ۵ را با توجه به شرایط اولیه تماماً صفر حل کرده و متغیر مورد نظر را در حوزه زمان بدست می‌آوریم. جواب‌های بدست آمده از این روش برای زمان‌های $t \geq 0^+$ صادق است.

مثال: ولتاژ اولیه خازن در مدار زیر برابر است با $V_{C_0} = 1^V$ مطلوب است محاسبه‌ی $i(t)$ و $V_C(t)$ برای لحظات $t \geq 0^+$ و همچنین انرژی خازن در لحظه $t \to \infty$ بدست آورید.





حل مش

$$-2i + V_C + 4u(t) + 5u(t) - i = 0 \Rightarrow 3i - V_C = 9u(t)$$

$$5u(t) - i = \frac{d(V_C - u(t))}{dt} \rightarrow i = 5u(t) - V_C' + \delta(t)$$

$$\begin{cases} 2v'_c + v_c = 4u(t) + 2\delta(t) \\ v_c(0^-) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2i' + i = 5u(t) + 10\delta(t) \\ i(0^-) = 0 \end{cases}$$

ج

$2s + 1 = 0 \implies s = -\frac{1}{2}$

$i_h = A_1 e^{-\frac{1}{2}t}$

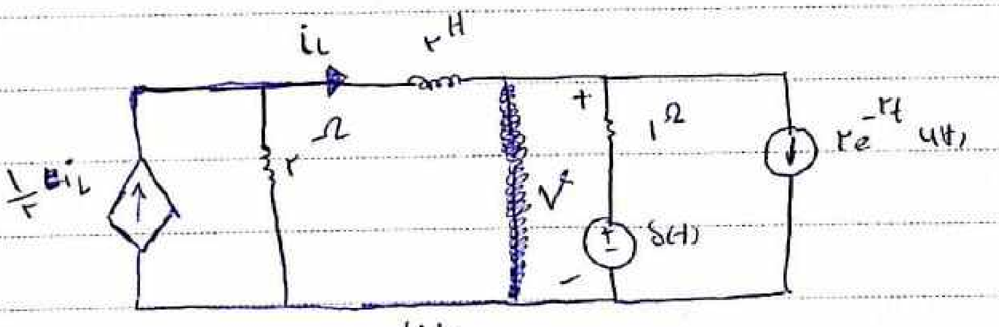
$i_p = 5$

$i(0^+) = \frac{10}{2} \implies A_1 = -\frac{5}{2}$

$i(t) = 5 - \frac{5}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \quad t \geq 0^+$

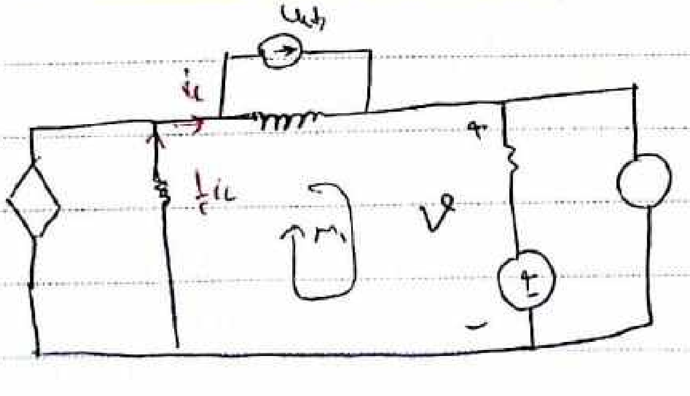
$v_c(t) = 2i - 4u(t) \implies v_c(t) = 4 - 5e^{-\frac{1}{2}t} \quad t \geq 0^+$

$W_c = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times v^2(t \to \infty) = \frac{1}{2} \times 1 \times 4^2 = 8$ ژ



$v(t) = ?$ $\quad t \geq 0^+$

$i_L(0^-) = 1\,A$



$\underline{V_0}$

مدار KVL $\Rightarrow 2 \times \frac{1}{2} i_L + 2\frac{d(i_L - u(t))}{dt} + i_L - 2e^{-2t}u(t) + \delta(t) = 0$

$2 i_L' + 2 i_L = \delta(t) + 2e^{-2t}u(t)$

تغییر متغیر $\Rightarrow v = i_L - 2e^{-2t}u(t) + \delta(t) \Rightarrow i_L = v + 2e^{-2t}u(t) - \delta(t)$

$$\begin{cases} v' + v = \delta'(t) - \delta(t) + 3e^{-2t}u(t) \\ v(0^-) = 0 \end{cases}$$

معادله مشخصه $\Rightarrow s+1 = 0 \longrightarrow s = -1$

$v_h = A_1 e^{-t}$

$v_p = v_{p_1} - 3e^{-2t}$

$$\begin{cases} v' = A\delta'(t) + B\delta(t) + C u(t) + v'(0^-) \\ v = A\delta(t) + B u(t) + v(0^-) \end{cases}$$

$v' + v = \delta' - \delta(t) + 3u(t) \qquad 0^- \le t \le 0^+$

$A = 1$

$B = -2$

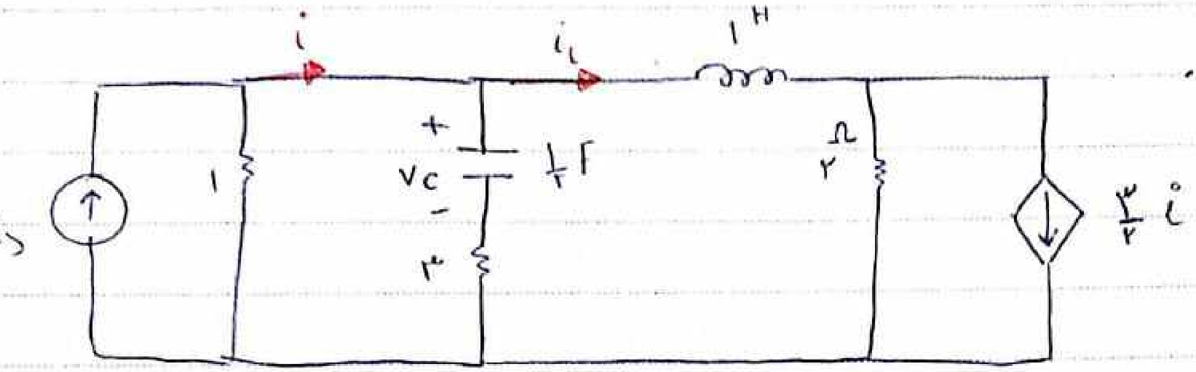
$v(0^+) = B + v(0^-) = -2 \qquad v = A_1 e^{-t} - 3e^{-2t} + \delta(t)$

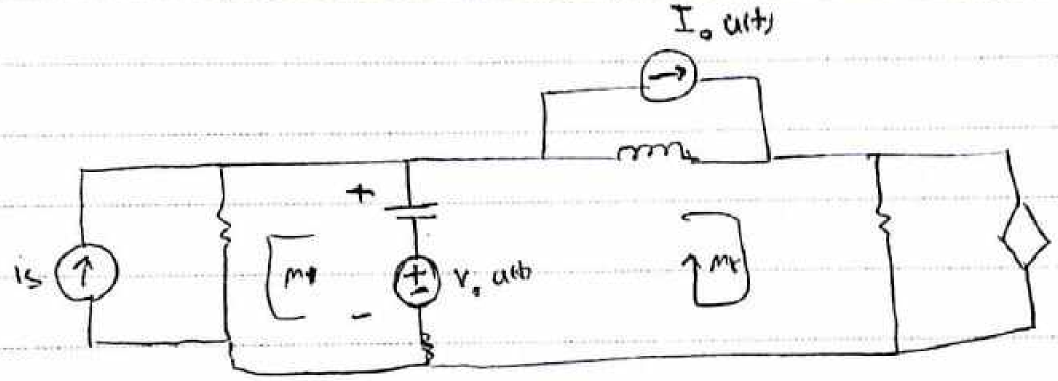
$v_{p_1} = \delta(t) \qquad \Rightarrow \qquad v(0^+) = -2 \Rightarrow A_1 = 1 \qquad t \ge 0^-$

جواب کل : $v(t) = e^{-t} - 3e^{-2t} \qquad 0^- \le t$

جواب تحول : $v(t) = e^{-t} - 3e^{-2t} \qquad t \ge 0^+$

در مدار زیر برای شرایط اولیه $v_C(0^-) = V_0$ ، $i_L(0^-) = I_0$ معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر متغیر i_L را بیابید.





KVL در m_1

$$-1\times(i_s - i) + V_C + 3(i - i_L) = 0$$

KVL در m_2

$$-3(i-i_L) - V_C + 1\times\frac{d\left(i_L - I_0 u(t)\right)}{dt} + 2\times\left(i_L - \frac{3}{2}i\right) = 0$$

$$\begin{cases} -6i + 5i_L - V_C + i_L' = I_0\,\delta(t) & (1) \\ 4i - 3i_L + V_C = i_s & (2) \end{cases}$$

(3)

معادله‌ی خازن $= \quad i - i_L = 0.5\,\frac{d\left(v_C - V_0 u(t)\right)}{dt} \Rightarrow i - i_L = 0.5\,V_C' - 0.5\,V_0\,\delta(t)$

$$\xrightarrow{(1),\,(2),\,(3)} \begin{cases} 2i_L'' + 2i_L' = 3i_s' + i_s + 2I_0\,\delta'(t) + (I_0 - 2V_0)\,\delta(t) \\ i_L(0^-) = i_L'(0^-) = 0 \end{cases}$$

معادله مشخصه $= 3s^2 + 2s = 0 \longrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ s = -1 \end{cases}$ فرکانس‌های طبیعی متغیر i_L

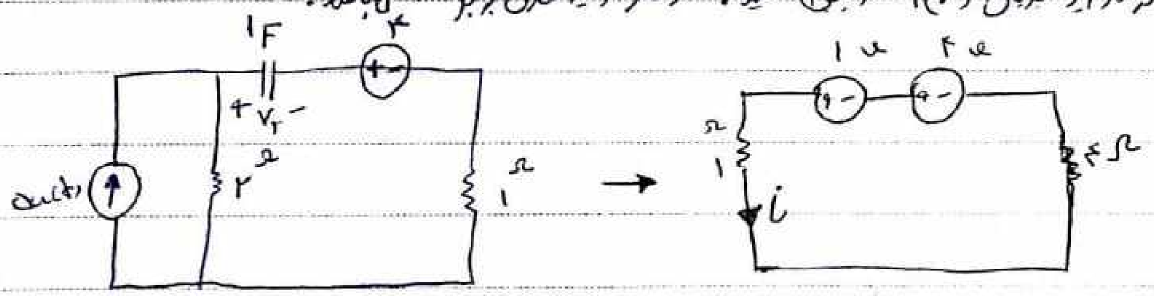
حل مدار در زمان‌های خاص

حل مدار در ($t = 0^-$)

منظور از زمان $t = 0^-$ زمانی است که المان‌های خازن و سلف تنها معادل با شرایط اولیه می‌باشند.

برای تعیین متغیر مدار در $t = 0^-$ کافی است به جای هر خازن منبع ولتاژ با مقدار شرایط اولیه خازن و به جای هر سلف منبع جریان با شرایط اولیه سلف قرار دهیم. سپس مدار مقاومتی حاصل را $t = 0^-$ حل کرده و متغیر مورد نظر را در $t = 0^-$ تعیین می‌کنیم.

مثال: در مدار زیر جریان $i(0^-)$ را تعیین کنید. ولتاژ اولیه خازن برابر 1^V می‌باشد.



مدار در $t = 0^-$

$\Rightarrow i(0^-) = i = \frac{5}{3}\,A$

حل مدار در $t = 0^+$

منظور از حل مدار در $t = 0^+$ یعنی حل مدار در لحظه شروع به کار مدار است.

روش اول برای محاسبه مقدار هر متغیر مدار در لحظه $t = 0^+$، استفاده از روش کلی حل مدارهای مقاومتی به کمک آرام کردن و تعیین معادله دیفرانسیل می‌باشد که البته روش دشواری است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در روش ساده‌سازی برای حل مدار در زمان $t=0^+$ کافی است در مدار آرام شده خازن را اتصال کوتاه و سلف را اتصال باز کنیم و

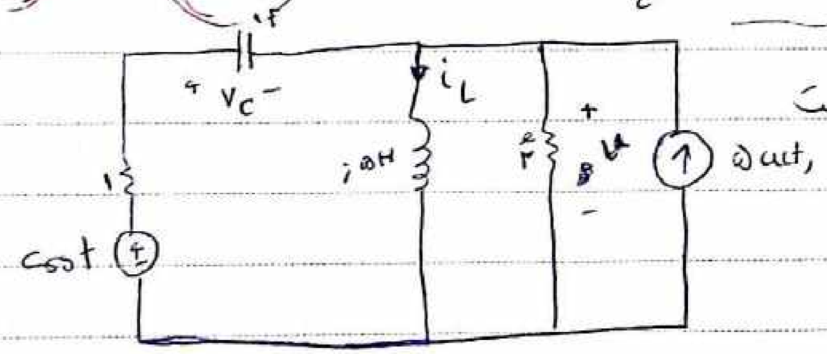
سپس مدار مقاومتی حاصل را در $t=0^+$ حل کرده و متغیر مورد نظر را تعیین می‌کنیم.

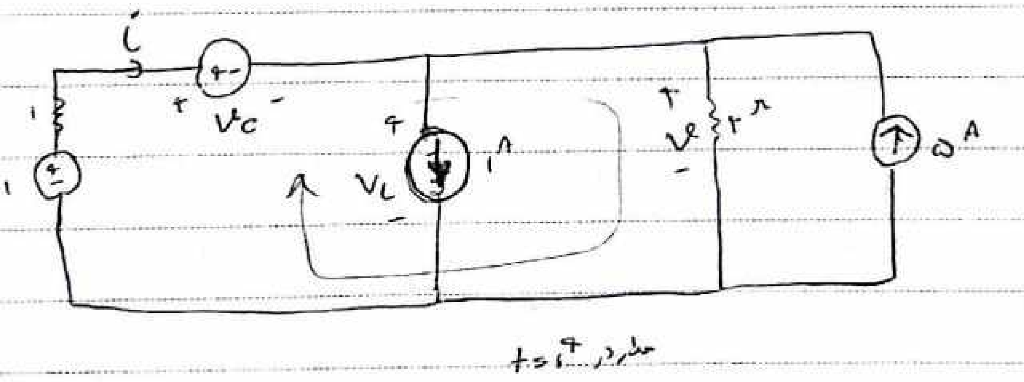
اتصال کوتاه کردن خازن در مدار آرام شده = جایگزین کردن خازن با منبع ولتاژ اولیه در مدار آرام نشده

اتصال باز کردن ~~خازن~~ سلف در مدار آرام شده = جایگزین کردن سلف با منبع جریان اولیه در مدار آرام شده

مثال) در مدار زیر $i_L(0^-) = 1^A$ و $v_C(0^-) = +2^V$ مطلوب است $V(0^+)$ و $V'(0^+)$: ← نکته!!

با شرایط 0^+ یکسان است





مدار در $t=0^+$

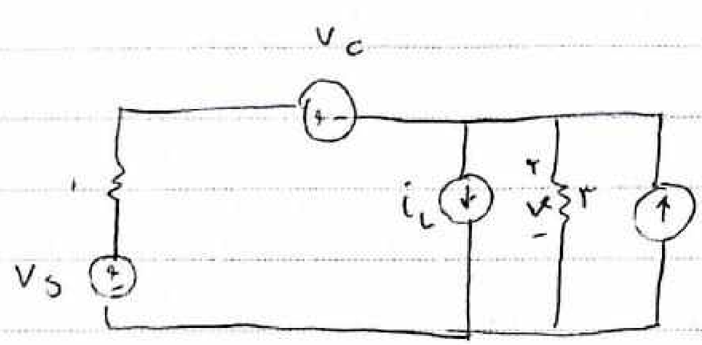
M_2 , KVL

$-1 + i + 2 + 2(i+4)$ $\Rightarrow V(0^+) = 2^V$

$v = 2\times(i+4)$

P4PCO

برای بدست آوردن $V'(0^+)$ باید پارامتری حل کنیم.



KVL در M۱

$$\begin{cases} -V_S + i + V_C + 2(i - i_L + i_S) = 0 \\ v = 2(i - i_L + i_S) \end{cases} \Rightarrow v = \frac{2}{3}(V_S - V_C) + \frac{2}{3}(i_S - i_L)$$

$$v'(0^+) = +\frac{2}{3}\cancel{V'_S} - \frac{2}{3}V'_C + \frac{2}{3}\cancel{i'_S} - \frac{2}{3}i'_L = -\frac{2}{3}V'_C - \frac{2}{3}i'_L$$

$(-\sin t)$ $\quad 0 \quad$ $(\delta(0^+))$ $\quad 0$

$$\begin{cases} i_C(0^+) = C\,V'_C(0^+) \Rightarrow V'_C(0^+) = \frac{1}{C}\,i_C(0^+) = \\ V_L(0^+) = L\,i'_L(0^+) \Rightarrow i'_L(0^+) = \frac{1}{L}\,V_L(0^+) \end{cases}$$

$-3 \qquad 3$

$$V'(0^+) = -\frac{2}{3}$$

نکته مهم

حل مدار در $t = 0^+$ به روش ساده گفته‌شده در این بخش تنها برای حالتی قابل استفاده است که

۱ـ مدار شامل حلقه خازنی نباشد (منظور از حلقه خازنی: حلقه‌ای شامل خازن و منابع ولتاژ باشد)

۲ـ مدار شامل کات‌ست سلفی نباشد (منظور از کات سلفی: کات‌ست شامل سلف و منابع جریان می‌باشد)

۳ـ مدار شامل منبع ضربه نباشد.

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} \Rightarrow v_C(0^+) = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_C\,dt + v_C(0^-)$$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow i_L(0^+) = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} v_L\,dt + i_L(0^-)$$

نکته ۱ ← با توجه به روابط فوق اگر جریان خازن یا ولتاژ سلف به صورت تابع $\delta(t)$ باشد روش کوتاه محاسبه مدار $t=0^+$ قابل استفاده نیست و این زمانی اتفاق می افتد که یا حلقه خازنی یا کات ست سلفی یا تابع ضربه در منابع مستقل ظاهر شود.

نکته ۲ ← اگر به هر کدام از ۳ دلیل فوق نتوان روش کوتاه در $t=0^+$ را استفاده کرد باید برای حل به روش اصلی تعیین و حل معادله دیفرانسیل * رجوع کرد.

ج) حل مدار $t=\infty$ (حالت ماندگار مدار) یا (حالت دائمی ثابت)

منظور از حل مدار در $t=\infty$ تعیین متغیر مورد نظر در مدار پس از اینکه زمان طولانی از شروع به کار مدار گذشته باشد. در تعیین جواب حالت ماندگار $t=\infty$ تنها منابع مدار تاثیر گذارند و شرایط اولیه سلف ها و خازن ها اثری ندارد چرا که اثر شرایط اولیه پس از گذشت زمان از شروع به کار مدار از بین می رود بنابراین در حل مدار در $t=\infty$ نیازی به آرام کردن مدار نیست.

با توجه به اینکه در مدار های LTI و مدارهای دائمی پس از گذشت زمان طولانی از کار مدار کلیه ولتاژها و جریان ها ثابت گردند

بنابراین خواهیم داشت:

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = 0$ ⟹ خازن اتصال باز

$v_L = L\frac{di_L}{dt} = 0$ ⟹ سلف اتصال کوتاه

بنابراین در حل مدار در $t = \infty$ کافی است تمام خازن ها را اتصال باز و تمامی سلف ها را اتصال کوتاه کنیم

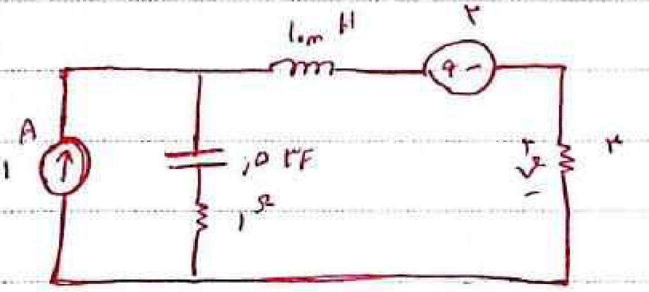
و سپس در مدار مقاومتی بدست آمده متغیر مورد نظر را تعیین کنیم.

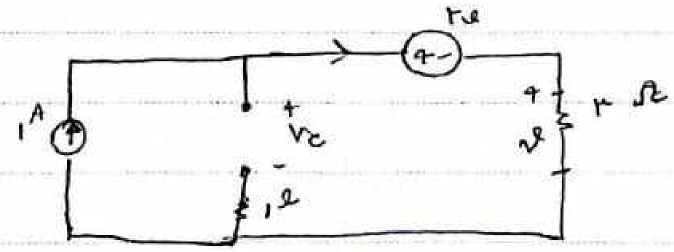
نکته) ← روش بیان شده در این بخش برای تعیین مقدار های متغیرهای مدار تنها در حالتی که مدار LTI با جواب یکتا و

دارای حالت دائمی ثابت (نه sin و cos نامیرا) باشد. صادق است.

مثال) مدار زیر در $t<1$ مدت زیادی کار کرده است. انرژی خازن و سلف را در $(t=1^-)$ بدست آورید

هم چنین مقدار $v'(1^-)$ را تعیین کنید؛





مدار در لحظه ماندگار $(t=1^-)$

انرژی خازن $= \frac{1}{2} C v_C^2(1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 10^{-6} \times 25 = 6.25\ \mu J$

انرژی سلف $= \frac{1}{2} L i_L^2(1) = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-3} \times 1 = 5\ mJ$

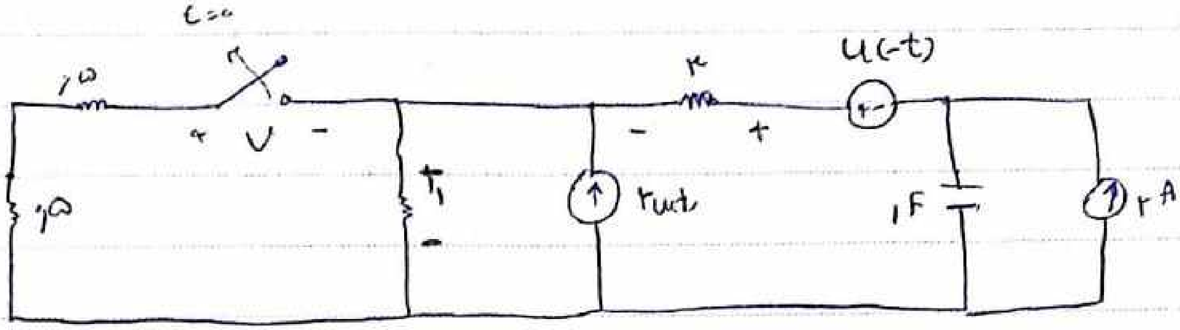
$i(1) = 1^A$

$v_C(1) = 5^V$

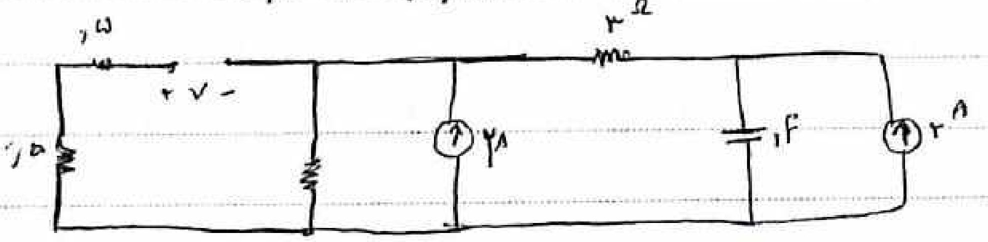
نکته

چون مدار در لحظه 1^- به حالت دائمی رسیده و تغییرات ندارد $v'(1) = 0$

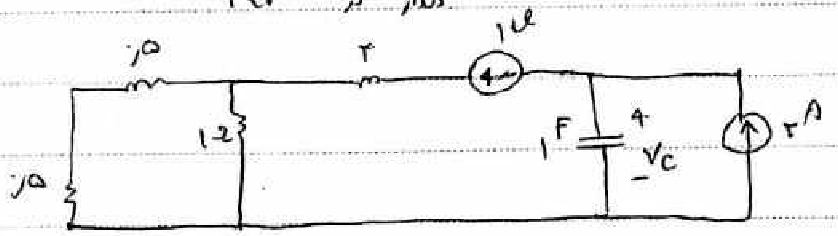
در مدار زیر مدار در $t<0$ مدت زیادی کار کرده است. کلید S در $t=0$ باز می‌شود، ولتاژ دو سر کلید در $t=0^+$ را بیابید:



مدار در $t>0$



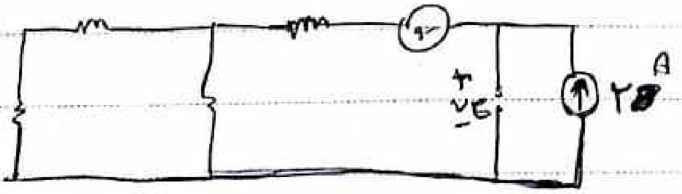
مدار در $t<0$



خازن در $t\le 0$ برای مدار فوق گفته شد بی‌نهایت است.

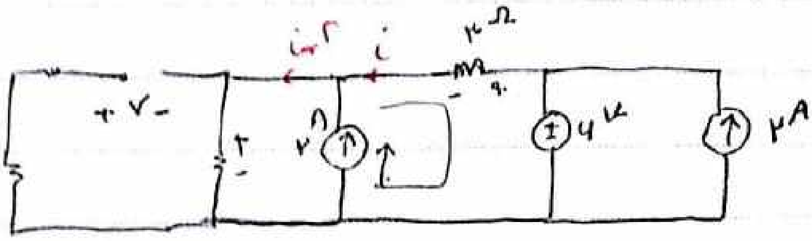
تعیین شرایط اولیه

$V_c(0) = 6^V$



مدار در $t\le 0$

$V_C(0^-) = 6^V \quad V(0^+) = ?$

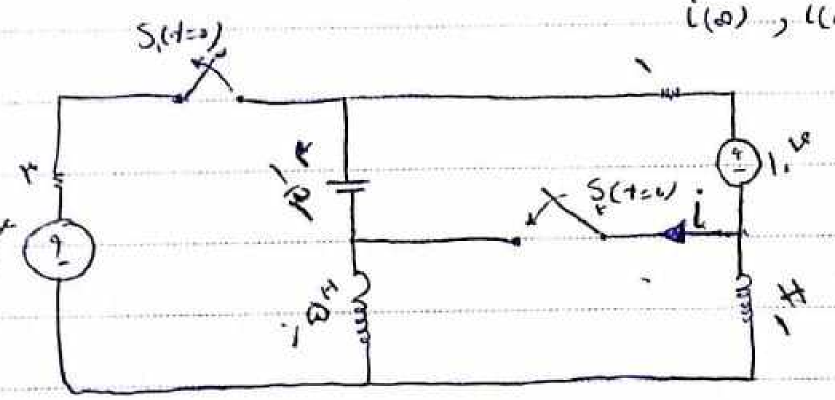


$V(0^+) = ?$

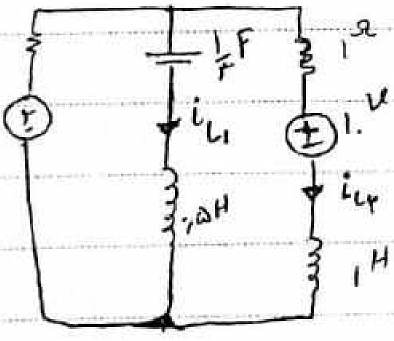
M در KVL $\Rightarrow \; -(i+2) - 3i + 6 = 0 \Rightarrow i(0^+) = 1A$ و $\boxed{V_s = -3^V}$

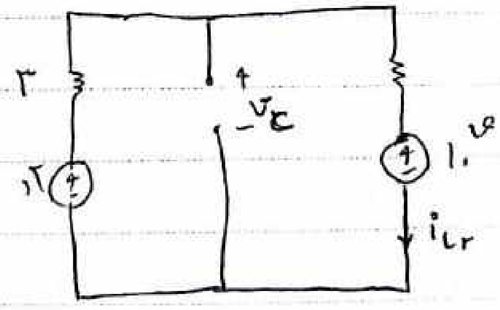
مثال)

در مدار زیر کلید S_1 در $t=0$ باز و کلید S_2 در $t=0$ بسته می‌شود مدار در $t<0$ مدت زیادی کارکرده است. مطلوب است $i(0^+)$ و $i(\infty)$



مدار در $t<0$ ←





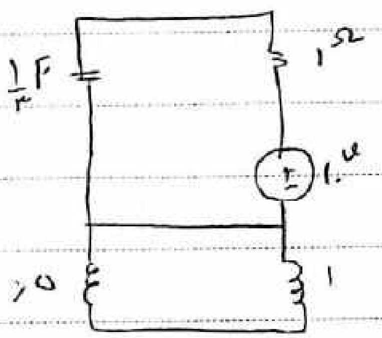
مدار در $t=0^-$

$V_C(0^-) = 10.5^V$

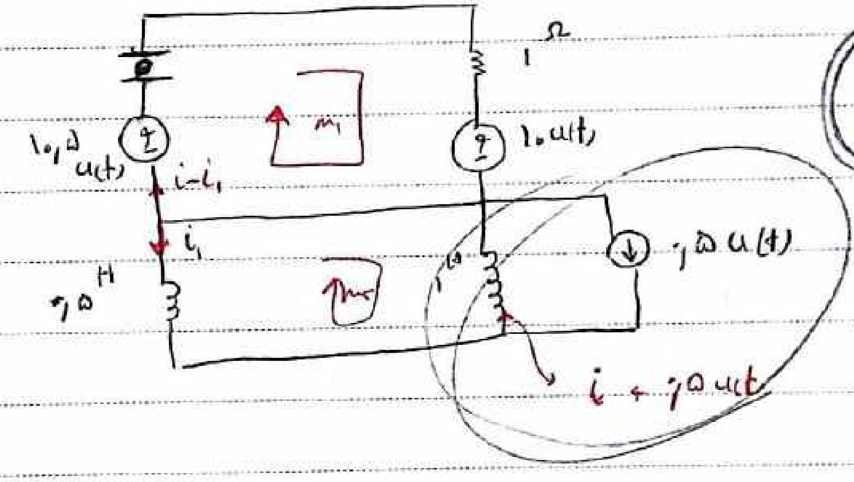
$i_{L_1}(0^-) = 0$

$i_{L_2}(0^-) = 4.5^A$

$i(0^+) = ?$, $i(\infty) = ?$



مدار در $t<0$



مدار آرام شده در $t>0$

نکته

به دلیل وجود گره سلفی از حل که نمی‌توان استفاده کرد و باید روش معادله دیفرانسیل حل شود:

حل به کمک معادله دیفرانسیل

M_1 در KVL $\Rightarrow -1.5\,u(t) + V_C + (i - i_1) + 10\,u(t) = 0$

M_2 در KVL $\Rightarrow 0.5\,i_1' + (i_1 + 0.5\,u(t))' = 0 \Rightarrow i_1' = -\frac{1}{3}\delta(t)$

معادله گره $(i - i_1) = \frac{1}{2} v_C'$

$$\Rightarrow \begin{cases} i' + 2i = -u(t) + \frac{1}{4}\delta(t) \\ i(0^-) = 0 \end{cases}$$

$$\left. i(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{3} \right]_{t>0} \Rightarrow \begin{cases} i(0^+) = \frac{1}{4}\,A \\ i(\infty) = -\frac{1}{3}\,A \end{cases}$$

- تعیین مرتبه مدار :-

مرتبه مدار = مرتبه‌ی معادله دیفرانسیل متغیر مدار = درجه معادله مشخصه متغیر مدار =
= تعداد شرایط اولیه معادله دیفرانسیل = تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار

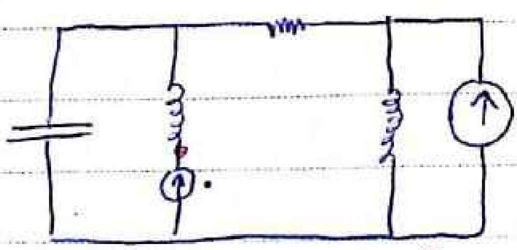
از آنجاکه شرایط اولیه‌ی مدار ناشی از المان‌های سلف و یا خازن می‌باشد پس طبیعتاً مرتبه‌ی مدار با تعداد سلف‌ها و خازن‌های موجود در مدار ارتباط دارد.
از آنجاکه شرایط اولیه‌ی مستقل مدار معرف مرتبه مدار می‌باشد. بنابراین مرتبه مدار را به صورت زیر می‌توان محاسبه کرد:

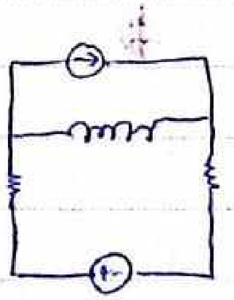
h = (تعداد سلف ها + تعداد خازن ها) − (تعداد حلقه‌های خازنی + تعداد کات‌ست سلفی)

حلقه خازنی:
حلقه‌ای که شامل فقط خازن و یا منابع ولتاژ مستقل و یا منابع (ولتاژ وابسته با شرایط خاص) باشد.
کات‌ست سلفی:
کات‌ستی که فقط شامل سلف و یا منابع جریان مستقل و یا منابع (جریان وابسته با شرایط خاص) باشد.

در مدارهای زیر مرتبه مدار را مشخص کنید:

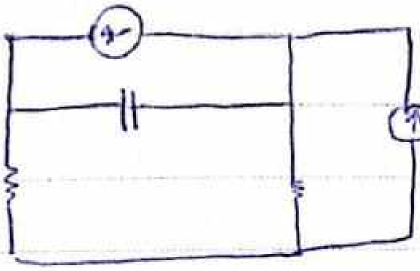
مثال:



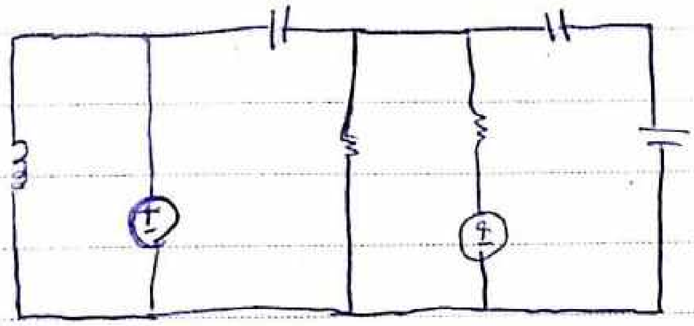


(خ 1 + س 2) − (حخ 0 + کس 1) = 2

(0 + 1) − (0 + 0) = 1



$(۱+۰)+(۱+۰)=۰$

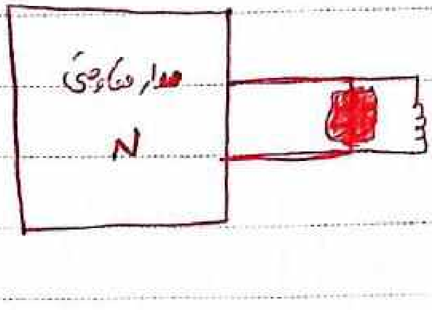


$(۳+۱)-(۱+۰)=۳$

حل مدارهای مرتبه اول :

هر مدار مرتبه اول خطی با ورودی های ثابت را می توان به روش ساده تری بدون نیاز به تعیین معادله دیفرانسیل حل کرد:

$$y_h = Ae^{st}$$



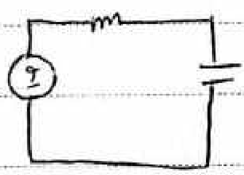
$$y_h = Ae^{st}$$

کل جواب هر متغیر مرتبه اول به صورت زیر بیان می شود :

$$y(t) = A e^{st} + B \qquad t \geq 0^+$$

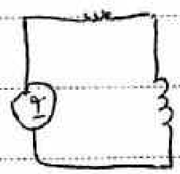
$$y(0^+) = A + B$$
$$y(t = \infty) = B$$
$$\Rightarrow \quad B = y(t = \infty)$$
$$A = y(0^+) - y(\infty)$$

$$y(t) = \Big[y(0^+) - y(\infty) \Big] e^{st} + y(\infty) \qquad t \geq 0^+$$



$$V_C = V_{th} - R_{eq}\, i \qquad \frac{i}{C} = V'_{th} - R_{eq}\, i'$$
$$V'_C = V'_{th} - R_{eq}\, i'$$

معادله مشخصه $\Rightarrow R_{eq} S + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow S = -\frac{1}{R_{eq} C}$



$$V_{th} - R_{eq}\, i = L i' \Rightarrow L i' + R_{eq}\, i = V_{th}$$

معادله مشخصه $\Rightarrow LS + R_{eq} = 0 \Rightarrow S = -\frac{R_{eq}}{L}$

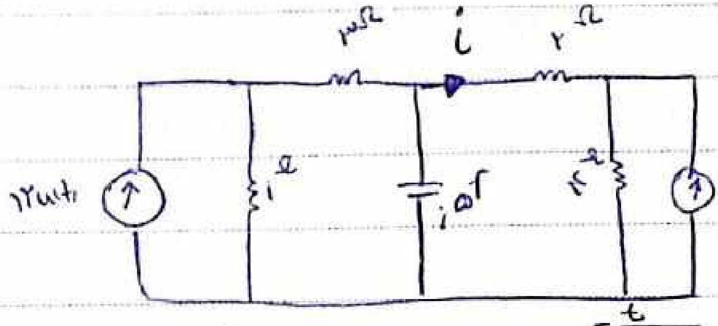
در هر مدار مرتبه اول خطی با ورودی های ثابت هر متغیر دلخواه $y(t)$ برای زمان ها $t \geq 0^+$ از رابطه زیر تعیین می شود.

$$y(t) = \Big[y(0^+) - y(\infty) \Big] e^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty)$$

$$\tau = \begin{cases} R_{eq} C & \text{مدار مرتبه اول خازنی} \\ \frac{L}{R_{eq}} & \text{مدار مرتبه اول سلفی} \end{cases}$$

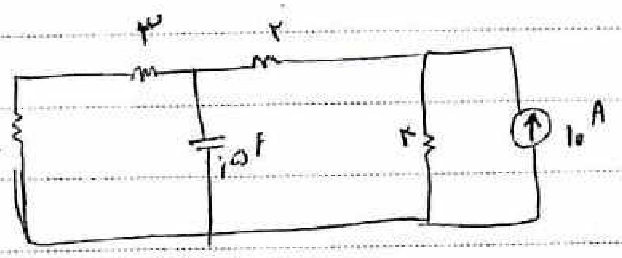
R_{eq} مقاومت معادل دیده شده از دو سر خازن (سلف)

در مدار زیر i را برای $t \geq 0$ تعیین کنید. (کنکور)

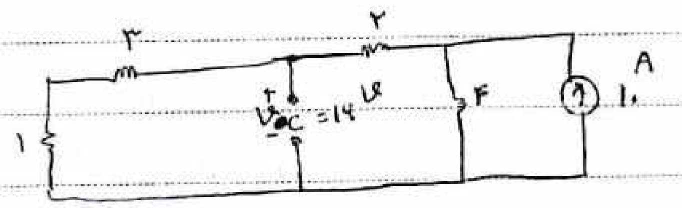


$$i(t) = \left[i(0^+) - i(\infty) \right] e^{-\frac{t}{C\,R_{eq}}} + i(\infty) \qquad t \geq 0^+$$

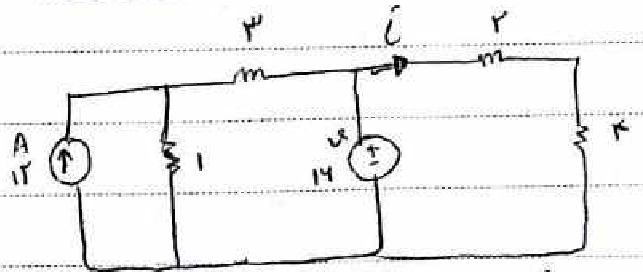
نیاز به شرایط اولیه $V_C(0)$ می‌باشد



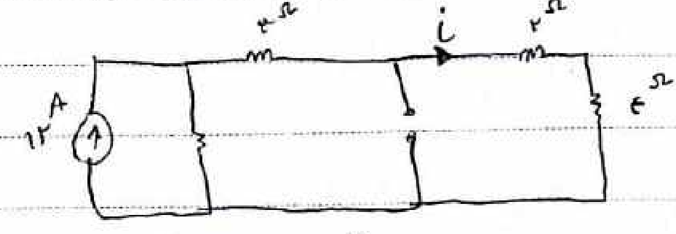
مدار در $t<0$



مدار در $t=0^-$

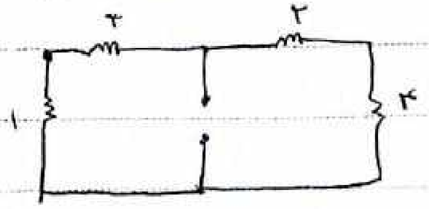


$i(0^+) = \frac{۱۶}{۶}$ A



مدار در $t = \infty$

$i(\infty) = ۱٫۲$ A



تعیین مقاومت R_{eq}

$R_{eq} = \frac{۲۴}{۱۰} = ۲٫۴$

$$i(t) = \left(\frac{۱۶}{۶} - ۱٫۲ \right) e^{-\frac{t}{۱٫۲}} + ۱٫۲$$

- مدارهای مرتبه دوم :

شکل کلی معادله دیفرانسیل تک متغیر در مدار مرتبه دوم : (فرم استاندارد)

$$y^{(2)}(t) + 2\alpha y^{(1)}(t) + w_n^2 y(t) = f(t)$$

$\alpha \triangleq$ فرکانس تضعیف

$w_n \triangleq$ فرکانس تشدید

معادله مشخصه $= S^2 + 2\alpha S + w_n^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - w_n^2} \\ S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - w_n^2} \end{cases}$

ریشه های معادله مشخصه (فرکانس طبیعی)

پارامترهای مهم در مدار مرتبه دوم :

۱) ضریب کیفیت Q :

$$Q = \frac{w_n}{2\alpha}$$

معیاری برای بررسی سرعت مصرف انرژی می باشد .

هرچه $Q\uparrow$ باشد انرژی دیرتر تلف می شود

۲) ضریب میرایی ξ

$$\xi = \frac{\alpha}{w_n}$$

$\downarrow$ کسی (حرف یونانی)

انواع حالات مرتبه دوم :

۱- میرایی بحرانی : ($\xi = 1$, $Q = \frac{1}{2}$)

$$\xi = 1 \Rightarrow \alpha = \omega_n \rightarrow \begin{cases} s_1 = -\alpha \\ s_2 = -\alpha \end{cases} \Rightarrow y(t) = A_1 e^{-t} + A_2 t e^{-t}$$

۲- میرایی شدید : ($\xi > 1$ یا $Q < \frac{1}{2}$)

$$\xi > 1 \Rightarrow \alpha > \omega_n \quad \begin{vmatrix} s_1 \\ s_2 \end{vmatrix}$$ (دو ریشه‌ی نابرابر حقیقی) $\Rightarrow y(t) = A_1 e^{+s_1 t} + A_2 e^{+s_2 t}$

۳- میرایی ضعیف : ($\xi < 1$ یا $Q > \frac{1}{2}$)

$$\xi < 1 \Rightarrow \alpha < \omega_n \quad \begin{vmatrix} s_1 \\ s_2 \end{vmatrix}$$ مختلط و مزدوج می‌باشند

$$\Rightarrow y(t) = e^{-\xi \omega t} \left[A\cos\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t\right) + B\sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t\right) \right]$$

* نوسانات میرا شونده نیز می‌گویند.

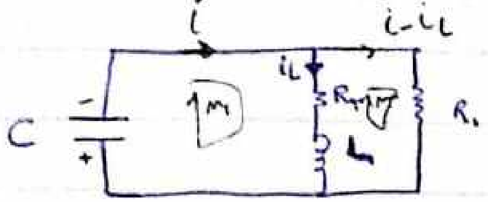
۴- نوسانی ($\xi \rightarrow 0$ و $Q \rightarrow \infty$)

$$\xi \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha = 0 \quad \begin{cases} s_1 = j\omega_n \\ s_2 = -j\omega_n \end{cases}$$ موهومی خالص و مزدوج

$$y(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$$

مثال (تکمیلی)

در مدار زیر مقدار R_1 را به گونه‌ای تعیین کنید که i_L دارای رفتار نوسانی باشد:



$$\begin{cases} v_C + R_2 i_L + L i_L' = 0 \Rightarrow \dfrac{i}{C} + R_2 i_L' + L i_L'' = 0 & (1) \\ -L i_L' - R_2 i_L + R_1 (i - i_L) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)\text{ و }(2)} \quad i_L'' + \underbrace{\left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C}\right)}_{2\alpha} i_L' + \underbrace{\frac{R_1 + R_2}{C R_1 L}}_{\omega_n^2} i_L = 0$$

$$\text{نوسانی} \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C} = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{-L}{C R_2}$$

• فصل چهارم ۲

حالت دائمی سینوسی :

همانطور که قبلاً اشاره شد، جواب کامل هر متغیر مدار مجموع دو جواب گذرا (ناشی از شرایط اولیه) و جواب دائمی (ناشی از منابع مستقل) می‌باشد.

به طور کلی در حالت ماندگار $t \to \infty$ جواب گذرا از بین می‌رود و تنها جواب دائمی باقی می‌ماند.
بنابراین برای تعیین حالت دائمی در یک مدار تنها کافی است اثر منابع مستقل بررسی شوند و نیازی به بررسی شرایط اولیه و اثر آنها در مدار نمی‌باشد.

انواع پاسخ حالت دائمی :

۱- پاسخ حالت دائمی ثابت : منابع مدار از جنس منابع DC می‌باشند.

۲- پاسخ حالت دائمی سینوسی : منابع مدار از جنس منابع sin یا cos می‌باشند.
(حالت اول یک قسمتی از حالت دوم می‌باشد زمانیکه فرکانس صفر است)

۳- پاسخ حالت دائمی متناوب :

در حالت کلی برای بدست آوردن پاسخ حالت دائمی سینوسی با استفاده از روش بیان شده در فصل قبل (یعنی حل معادله دیفرانسیل) استفاده کرد. اما این راه طولانی است. بنابراین در این فصل بنا داریم برای تعیین حالت دائمی sin در مدارها را بدون حل معادله دیفرانسیل بدست آوریم.

* اساس روش بیان شده در این فصل جهت حل مدار حالت دائمی سینوسی استفاده از یک تبدیل ریاضی بنام تبدیل فازوری می‌باشد:

مقدمه ریاضی: اعداد مختلط و تبدیل فازوری:

$Z = \underbrace{a}_{Re} + j\underbrace{b}_{Im}$ نمایش دکارتی

$Z = \underbrace{r}_{\text{دامنه}} e^{\overbrace{j\theta}^{\text{فاز}}}$ نمایش قطبی

$$e^{j\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$a = r\cos\theta \quad , \quad b = r\sin\theta$$

$$j = \sqrt{-1} = \sqrt{i^2}$$

$$Z_1 \pm Z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

$$Z_1 \times Z_2 = r_1 r_2 \, e^{j(\theta_1+\theta_2)} = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1)$$

$$Z_1 / Z_2 = r_1/r_2 \, e^{j(\theta_1-\theta_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + j(b_1a_2 - b_2a_1)}{a_2^2+b_2^2}$$

$$Z^n = r^n e^{jn\theta}$$

دکارتی	قطبی
aj	$ae^{j\frac{\pi}{2}}$
$-aj$	$ae^{-j\frac{\pi}{2}}$
$-a$	$ae^{j\pi}$
a	ae^{j0}
$\frac{a}{j}$	$ae^{-j\frac{\pi}{2}}$

تعریف فازور:

در حقیقت X را فازور تابع سینوسی $x(t)$ گویند، بطوریکه:

$$x(t) = \underbrace{A}_{\text{دامنه}} \cos(\underbrace{\omega}_{\text{فرکانس}} t + \underbrace{\phi}_{\text{فاز}})$$

$$X = \underbrace{A}_{\text{دامنه}} e^{j\underbrace{\phi}_{\text{فاز}}}$$

فازور سیگنال $x(t)$

تبدیل فازوری ⟵

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{X e^{j\omega t}\right\}$$

⟵ عکس تبدیل فازوری

مثال) فازور توابع زیر را بدست آورید:

۱) $v(t) = 2\cos(\pi t + 30^\circ)$

۲) $i(t) = -\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4})$

۳) $i(t) = 10\sin(\pi t - \frac{\pi}{4})$

① $\Rightarrow V = 2e^{j\frac{\pi}{6}}$ $\quad V = 2\angle\frac{\pi}{6}$ → ?

② $\Rightarrow i = -\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$ $\quad i = \frac{1}{2}\angle\frac{3\pi}{4}$

③ $\Rightarrow 10\cos(\pi t - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow I = 10e^{-j\frac{3\pi}{4}}$

در این مدار در حالت دائمی sin از آنجایی که کلیه منابع به شکل توابع sin و یا cos با دامنه و فرکانس و فاز ثابت می باشند بنابراین هر متغیر مدار نیز بصورت تابع sin و یا cos دارای دامنه و فاز مربوط به خود می باشد که فرکانس کلیه متغیر ها با فرکانس منابع مستقل مدار یکسان است.

با توجه به توضیحات فوق هدف از حل یک مدار در حالت دائمی sin و تعیین متغیر ها در آن مدار در واقع مشخص کردن دامنه و فاز آن متغیر می باشد.

خواص تبدیل فازور:

۱- خطی بودن:

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xrightarrow{\text{فازور}} a_1 X_1 + a_2 X_2$$

۲- مشتق:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\text{فازور}} j\omega X$$

۳- انتگرال:

$$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt \xrightarrow{\text{فازور}} \frac{X}{j\omega}$$

نگاه به مدار از دید فازوری:

۱- در مدار حالت دائمی سینوسی با یک فرکانس ، رابطه KVL برای فازور ولتاژ ها در هر حلقه برقرار است:

۱) هر حلقه ← $\sum_{k} V_k = 0$

نتیجه خاصیت خطی بودن

۲- در مدار حالت دائمی سینوسی با یک فرکانس، روابط KCL بین فازور جریان ها در هر گره برقرار است.

$$\sum_k I_k = 0$$ در هر گره

نتیجه خطی بودن

۳- یک مقاومت LTI در حالت دائمی sin در حوزه فازور همچنان مقاومت است.

$$v(t) = R\,i(t) \xrightarrow{\text{فازور}} V = R\,I$$

فازور ولتاژ ←
فازور جریان ←

(نتیجه خطی بودن)

۴- یک خازن و یا یک سلف LTI در حالت دائمی sin در حوزه فازور به مقاومت تبدیل می شوند.

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \xrightarrow{\text{فازور}} V_L = j\omega L\, I_L$$

فازور ولتاژ ←
→ فازور جریان

(خاصیت خطی بودن و مشتق)

$$i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \xrightarrow{\text{فازور}} I_C = j\omega C\, V_C$$

فازور جریان ←
→ فازور ولتاژ

نکته:

فاز ولتاژ سلف 90° از فاز جریان آن جلوتر است.

$$\angle V_L = 90^\circ + \angle I_L$$

فاز ولتاژ خازن 90° از فاز جریان خازن عقب تر است.

$$\angle V_C = -90^\circ + \angle I_C$$

با توجه به ۵ نکته‌ی فوق هر مدار غیر مقاومتی در حالت دائمی sin که بصورت تک فرکانس (کلیه منابع مدار دارای فرکانس یکسان باشند) قابل تبدیل به مدار مقاومتی بوده بطوریکه هر المان آن توسط جدول زیر جایگزین می‌شود:

	حوزه زمان	حوزه فازور	
	R	R	
	C	$\frac{1}{j\omega C}$	
	L	$j\omega L$	
$V_s = A\cos(\omega t+\phi)$	v_s	V_s	$V_s = Ae^{j\phi}$
$i_s = A\cos(\omega t+\phi)$	i_s	I_s	$I_s = Ae^{j\phi}$

مراحل حل مدار در حالت دائمی sin بکمک تبدیل فازوری:

۱) با فرض اینکه کلیه منابع مستقل مدار هم فرکانس باشند، به کمک جدول فوق کلیه المان‌های مدار را از حوزه‌ی زمان به حوزه‌ی فازور تبدیل می‌کنیم.

۲) مدار مقاومتی بدست آمده در مرحله‌ی قبل را در حوزه‌ی فازور به کمک روش گره اساسی یا مش اساسی مطابق مطالب فصل ۲ حل می‌کنیم، و فازور متغیر مورد نظر در مدار را تعیین می‌کنیم.

۳) با استفاده از رابطه‌ی $x(t) = Re\{X e^{j\omega t}\}$ از جواب بدست آمده در مرحله قبل عکس تبدیل فازوری گرفته و متغیر مورد نظر را در حوزه‌ی زمان تعیین می‌کنیم.

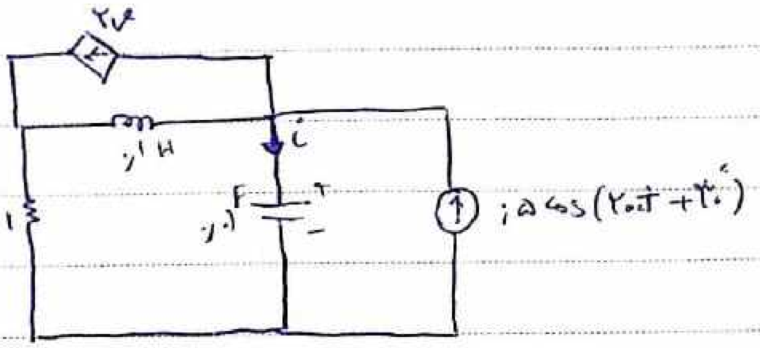
نکته ۱: با توجه به روش فوق جهت حل مدار در حالت دائمی sin به کمک تبدیل فازوری نیاز داریم مدار تک فرکانس باشد.

نکته ۲: شرایط اولیه در حل مدار در حالت دائمی sin اثری ندارد، چرا که جواب ناشی از شرایط اولیه گذرا بوده و از بین می‌رود.

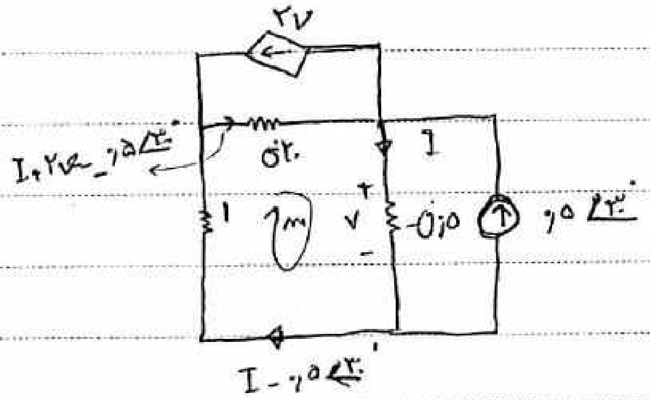
Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال ۷ : $i(t)$



$\omega = 200 \ \frac{rad}{s}$



حل با روش مش ←

M_1 در KVL

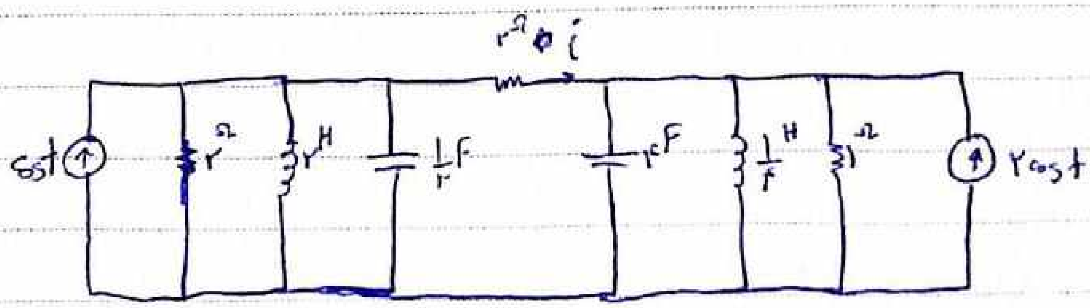
$(I - 0.5\angle 30^\circ) + j20(2V + I - 0.5\angle 30^\circ) - j0.5 I = 0$

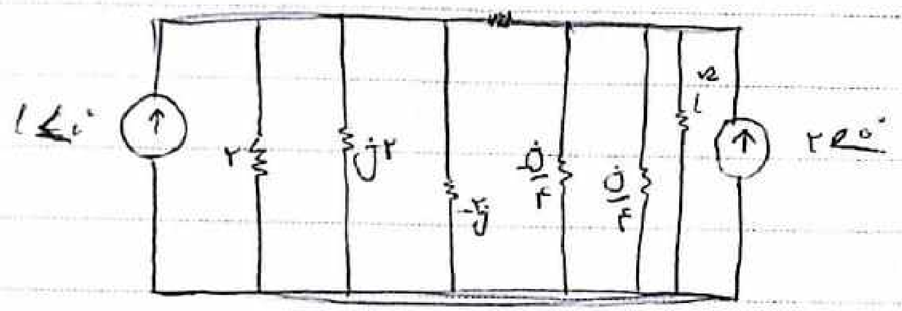
از طرفی : $V = -j0.5 I$

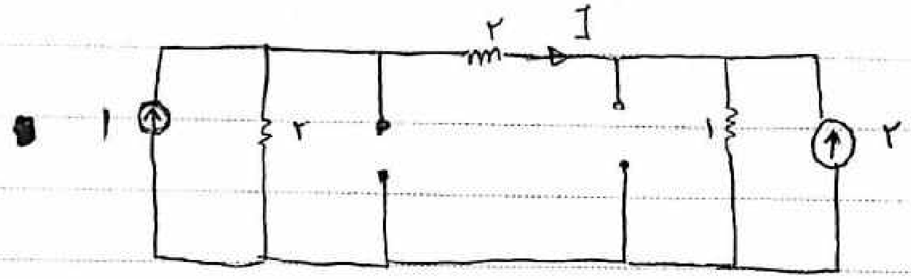
$$I = \frac{(0.5 - j10)e^{j30}}{41 + j19.5} = \frac{10.01\angle 117.1}{28.42\angle 43.8} = 0.35\angle 73.3$$

$i(t) = Re\{Ie^{j\omega t}\} = 0.35\cos(200t + 73.3^\circ)$

مثال ←







قضیه جمع آثار $\Longrightarrow$ $I = \frac{2}{2+3}\times 1 - \frac{1}{4+1}\times 2 = 0$

$i(t) = 0$

قضیه جمع آثار در حالت دائمی sin :

همانطور که در فصل دوم اشاره شد، قضیه جمع آثار بیان می‌کند که پاسخ مدار به ورودی‌های مستقل

برابر مجموع پاسخ‌های مدار به هر کدام از ورودی‌ها است زمانی که هر ورودی به تنهایی در مدار قرار گیرد.

منبع ۱ $\quad x_1 = A_1 \cos(w_1 t + \phi_1)$

منبع ۲ $\quad x_2 = A_2 \cos(w_2 t + \phi_2)$

$\vdots$

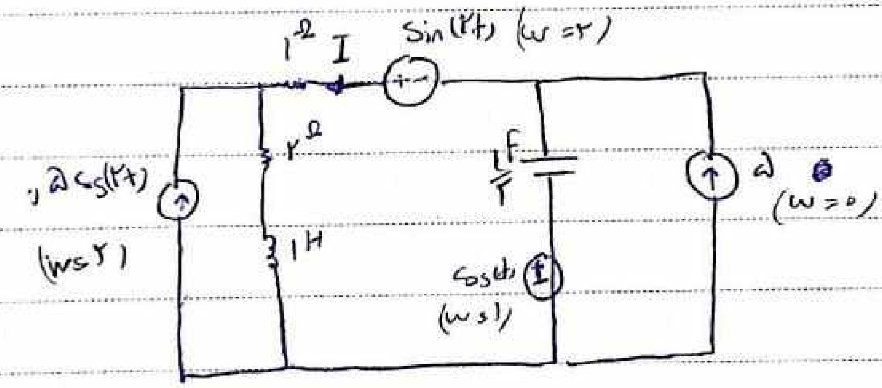
منبع n $\quad x_n = A_n \cos(w_n t + \phi_n)$

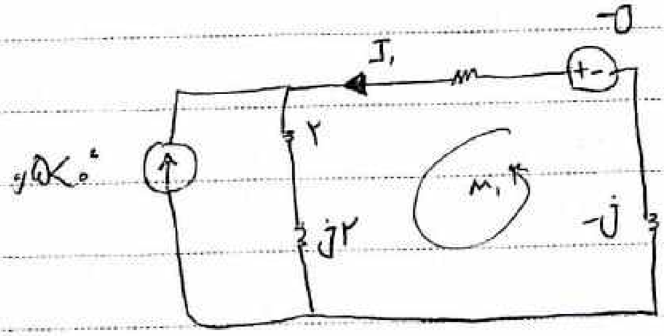
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_n(t)$$

جواب مدار به متغیر y زمانی که فقط
منبع x_1 قرار دارد.

با توجه به قضیه جمع آثار اگر در مداری منابع با فرکانس‌های متفاوت وجود داشت، برای تعیین جواب هر متغیر در حالت دائمی سینوسی کافی است کلیه منابع با فرکانس ω_1 را نگه داشت، و سایر منابع را حذف کرد سپس جواب حالت دائمی این مدار را برای متغیر مورد نظر تعیین کرده همین روند را برای سایر منابع با فرکانس‌های ω_2 و پس از آن منابع با فرکانس‌های ω_3 و ... تکرار می‌کنیم و در نهایت جواب بدست آمده در هر مرحله را با یکدیگر جمع می‌کنیم تا جواب کل بدست آید.

در مدار زیر در حالت دائمی سینوسی جریان i را بدست آورید.



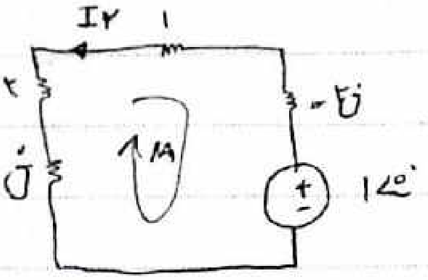


جمع آثار ← (ω=2)

مش M_1، KVL ⇐ $2(I_1 + \frac{1}{2}) + 2j(I_1 + \frac{1}{2}) - j(I_1) - (-j) + I_1 = 0$

$$I_1 = \frac{-1-2j}{j+2} = 0.71\, e^{j225^\circ} \Rightarrow I_1^{(1)} = 0.71 \cos(2t + 225^\circ)$$

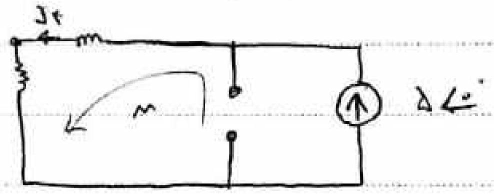
$(\omega = 1)$



M_1 در KVL $\Rightarrow \quad I_2 = \dfrac{1\angle 0^\circ}{3-j} = 0.32\, e^{j18.4}$

$I_2(t) = 0.32 \cos(t + 18.4^\circ)$

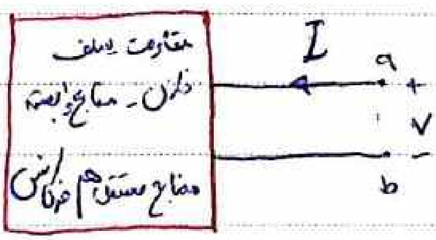
$(\omega = 0)$



$I_3 = 5 \quad \Rightarrow \quad I_3(t) = 5$

$I(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) = 5 + 0.32\cos(t + 18.4^\circ) + 0.71\cos(3t + 225^\circ)$

رابطه ی متعارلی (معادل) تونن و نورتن در حالت دائمی سینوسی :



$$\begin{cases} V = Z_{eq}\, I + V_{th} & \text{رابطه تونن} \\ I = \dfrac{1}{Z_{eq}} V + I_N & \text{رابطه نورتن} \end{cases}$$

به رابطه‌ی بین فازور ولتاژ (V) و فازور جریان (I) از دو سر a و b در یک مدار خطی N ، رابطه مداری از دو سر a و b گویند که در حالت کلی به دو صورت معادل تونن یا نورتن مطابق روابط فوق قابل بیان است

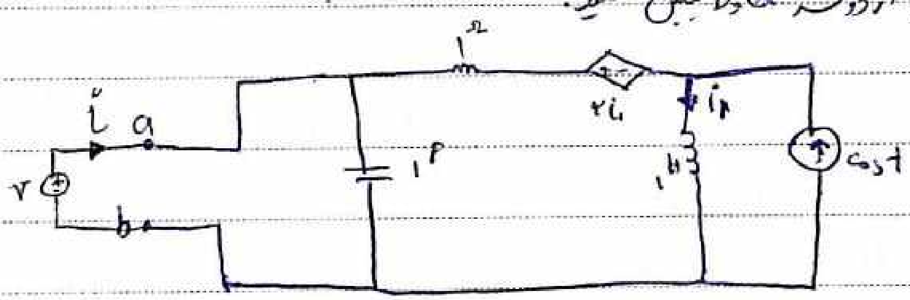
نکته ۱: عموماً رابطه ترمینالی یا معادل تونن و نورتن میان مدارهایی تعریف می‌شود که منابع آن هم فرکانس باشد.

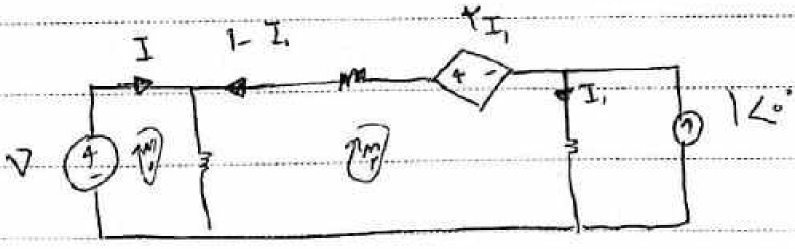
نکته ۲ – ۳ کمیت I_N و V_{th} و Z_{eq} اعداد کلی اعداد مختلط ثابتی هستند که تابع فرکانس منابع مدار باشد.

نکته ۳ – جهت تعیین رابطه ترمینالی و یا معادل تونن و نورتن می‌توان از کلیه روش‌های بیان شده در فصل ۲ برای مدار مقاومتی استفاده کرد [روش اصلی و روش کوتاه]

نکته ۴ – ۲ مدار هم فرکانس در حالت دائمی سینوسی را معادل یکدیگر گویند زمانی که رابطه ترمینالی آنها با یکدیگر برابر باشند.

مثال: رابطه ترمینالی مدار زیر را از دو سر a و b تعیین کنید:





M1 در KVL $\Rightarrow -V + (-j)(I+1-I_1) = 0$

M2 در KVL

$$-(-j)(I+1-I_1) - (LI_1) + 2I_1 + jI_1 = 0 \Rightarrow I_1 = -\frac{j}{2}I + \frac{(1-j)}{3}$$

$$V = \underbrace{\left(\frac{1}{3} - j\right)}_{Z_{eq}} I + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}j\right)}_{V_{th}}$$

تعریف امپدانس :

$$Z = \frac{V}{I}$$

فازور

به نسبت فازور ولتاژ به فازور جریان در هر المان یا دسته‌ای از المان‌ها امپدانس آن ساختار گویند.

نکته ۱:

در حالت کلی امپدانس (Z) عددی مختلط و تابع فرکانس می‌باشد.

نکته ۲:

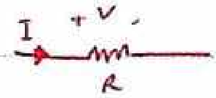
قسمت حقیقی Z را با R (مقاومت المان) و قسمت موهومی را با X (راکتانس) المان گویند.

$$Z = R + jX = |Z|\, e^{j\theta}$$

نکته ۳:

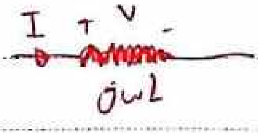
امپدانس در چند حالت خاص:

۱- امپدانس مقاومتی خالص :



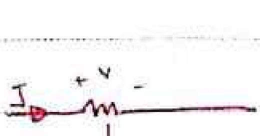
$(X=0)\ (\theta=0),\ (Z=R)$

۲- امپدانس موهومی خالص سلفی :



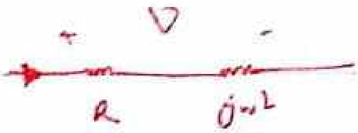
$(X=\omega L)\ (\theta=90^\circ),\ (R=0)\ (Z=jX)$

۳- امپدانس موهومی خالص خازن :



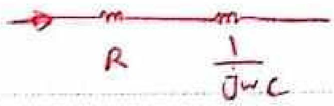
$\left(X=\frac{-1}{C\omega}\right)\ (\theta=-90^\circ),\ (R=0)\ (Z=jX)$

۴. امپدانس خط سلفی (اندوکتیو) :



$(X = \omega L > 0)$ $(0 < \theta \leq 90^\circ)$ $(R \neq 0)$

۵. امپدانس خطی خازنی (کاپاسیتیو) :



$(X = \frac{-1}{\omega C} < 0)$ $(-90^\circ < \theta \leq 0^\circ)$ $(R \neq 0)$

تعریف ادمیتانس :

$$Y = \frac{I}{V} \Longrightarrow$$ فازور

به نسبت فازور جریان به فازور ولتاژ در حوزه‌ی فرکانس یا وارونی از امپدانس‌ها ادمیتانس گویند.

نکات :

۱. دقت کنید Y کمیتی مختلط و تابعی از فرکانس می‌باشد.

۲. قسمت حقیقی Y را با G (هدایت الکتریکی) و قسمت Y را با B (سوسپتانس).

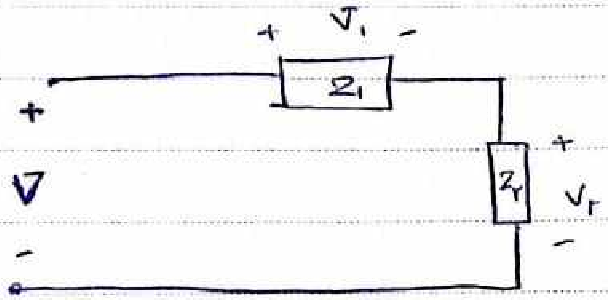
$$Y = G + jB = |Y| e^{j\theta}$$

۳. طبق تعریف $Z = \frac{1}{Y}$, $Y = \frac{1}{Z}$

۴. در صورتی که ادمیتانس دارای قسمت موهومی منفی باشد ادمیتانس سلفی بوده و در صورتی که مثبت باشد ادمیتانس خازنی است.

در مدار شکل زیر $Z_2 = 3+4j$ و $V_2 = 18$ و $|V| = 28$ اگر Z_1 اندوکتیو باشد و

$|Z_1| = 3$ و امپدانس Z_1 را محاسبه کنید.



$$I = \frac{V_2}{Z_2} = \frac{18}{3+4j} = 3.6 \angle -53.13^\circ$$

$$V = V_1 + V_2 \Rightarrow |V| = |V_1 + V_2| \Rightarrow 28 = |V_1 + 18| \Big\} \Rightarrow 28 = \big||V_1|\cos\theta + 18 + j|V_1|\sin\theta\big|$$

$$V_1 = |V_1| \angle \theta = |V_1|\cos\theta + j|V_1|\sin\theta$$

$$(28)^2 = (|V_1|\cos\theta + 18)^2 + (|V_1|\sin\theta)^2$$

$$V_1 = Z_1 I$$

$$|V_1| = |Z_1||I| = 3 \times 3.6 = 10.8$$

$$(10.8\cos\theta + 18)^2 + (10.8\sin\theta)^2 = (28)^2$$

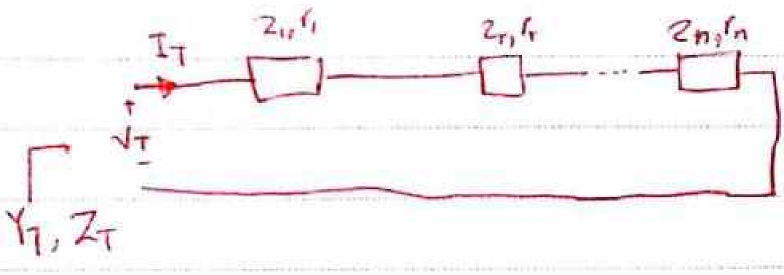
$$\cos\theta = 0.93 \Rightarrow \theta = 22^\circ$$

$$V_1 = 10.8 \angle 22$$

$$Z_1 = \frac{V_1}{I} = \frac{10.8 \angle 22}{3.6 \angle -53.13} = 3 \angle 75.13$$

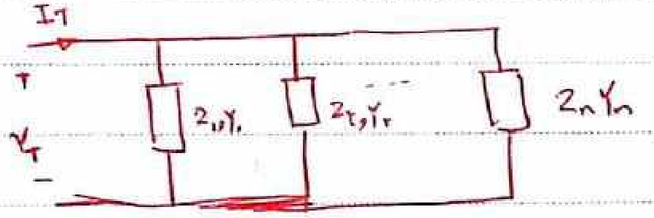
Subject:
Year. Month. Date. ( )

ارتباط امپدانس با ادمیتانس :



$$Z_T = Z_1 + \dots + Z_n$$

$$(Y_T)^{-1} = (Y_1)^{-1} + \dots + (Y_n)^{-1}$$



$$(Z_T)^{-1} = (Z_1)^{-1} + \dots + (Z_n)^{-1}$$

$$Y_T = Y_1 + \dots + Y_n$$

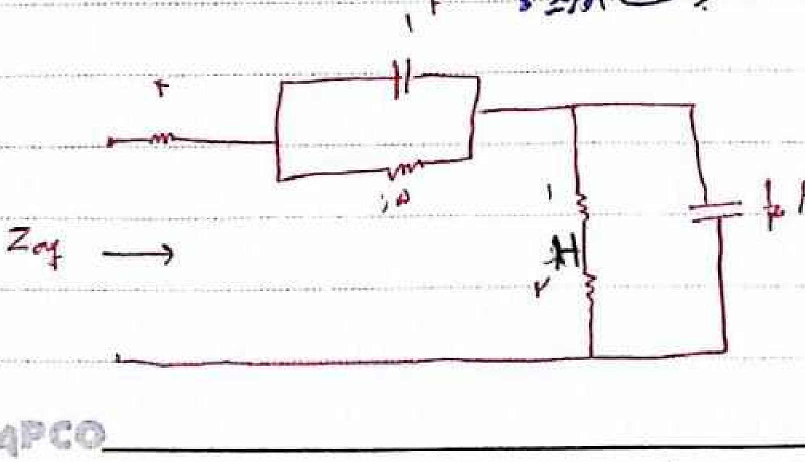
نکته ←

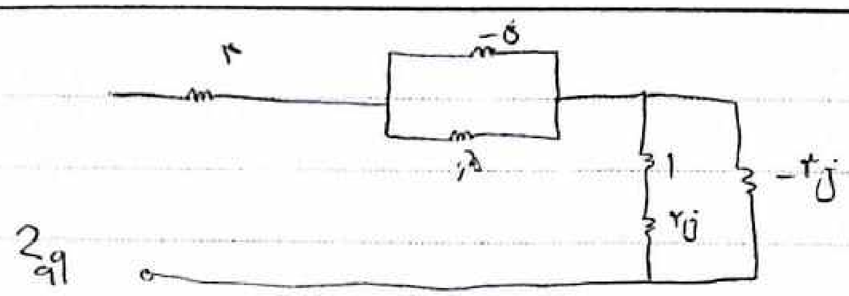
در مورد مقاومت ها داشتیم مقاومت معادل در اتصال موازی کوچکتر از هر کدام مقاومت ها است.

" " " " " " " " سری " بزرگتر " " " "

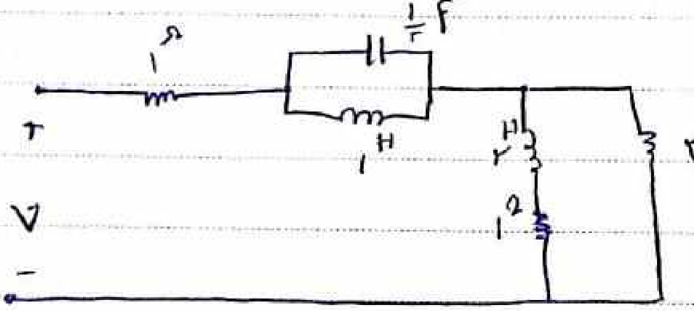
عبارت فوق در مورد امپدانس و ادمیتانس صادق نیست.

* در مدار زیر امپدانس معادل (Z_{eq}) را به ازای $\omega=1$ بدست آورید.





$$Z_{eq} = \left[(1+2j)\,||\,(-4j)\right] + 4 + \left[(1.5)\,||\,(-j)\right] = 8.9 + j1.2$$



در چه فرکانسی V و I هم فاز اند؟

نکته

$\frac{V}{I} = Z$ ⟶ برای اینکه هم فاز باشد باید Z عددی حقیقی باشد.

$$Z = (1) + \left(-\frac{4j}{\omega}\,||\,j\omega\right) + \left(3\,||\,(1+2j\omega)\right)$$

آشنا

$$Im\{Z\} = 0 \Rightarrow \frac{-4\omega}{\omega^2-4} + \frac{9\omega}{2(4+\omega^2)} = 0 \quad \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \sqrt{68} \end{cases}$$

توان در حالت دائمی سینوسی:

$p(t) = v(t) \cdot i(t)$

در حالت کلی: $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$

$i(t) = i_m \cos(\omega t + \phi_i)$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_m i_m \cos(\omega t + \phi_v)\cos(\omega t + \phi_i)$$
$$= \frac{1}{2} V_m i_m \left[\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)\right]$$

(توان لحظه‌ای) $p(t) = \frac{1}{2} V_m i_m \cos(\phi_v - \phi_i) + \frac{1}{2} V_m i_m \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)$

مستقل از زمان — وابسته به زمان

توان متوسط $\Rightarrow P_{av} = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} p(t)\,dt = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i)$

اختلاف فاز ولتاژ و جریان $= \theta = \phi_v - \phi_i$

مقاومت خالص $Z = R$ 　 $\phi_v = \phi_i \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow P_{av} = \frac{1}{2} V_m I_m = \frac{1}{2} R I_m^2$

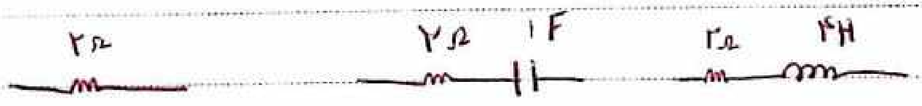
$Z = jL\omega$ 　 $\phi_v - \phi_i = 90 = \theta \Rightarrow P_{av} = 0$

$Z = \frac{1}{jC\omega}$ 　 $\phi_v - \phi_i = -90 = \theta \Rightarrow P_{av} = 0$

$Z = R + jX$ 　 $\phi_v - \phi_i = \theta \Rightarrow P_{av} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta) = \frac{1}{2} R I_m^2$

با توجه به روابط فوق در یک امپدانس مختلط Z توان مصرفی متوسط تنها مربوط به بخش مقاومتی R می‌باشد و قسمت راکتانس (X) توان متوسطی مصرف نمی‌کند.

مثال: در سه المان زیر به ازای جریان یکسان عبوری توان متوسط ها باهم برابرند چون مقاومت ها باهم برابرند.



ولی به ازای ولتاژ یکسان توان ها باهم برابر نیستند.

تعریف توان مختلط:

$$S = \frac{1}{2} V \cdot \underbrace{I^*}_{\text{مزدوج جریان}} = \frac{1}{2} V_m I_m e^{j(\phi_v - \phi_i)}$$

$$S = \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i)}_{} + j\underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \sin(\phi_v - \phi_i)}_{}$$

$P(av)$ توان حقیقی (what) (اکتیو) 　　　　 Q توان مجازی (VaR) (راکتیو)

مقاومت خالص ← $Z = R \Rightarrow \phi_v = \phi_i \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow Q = 0$

$Z = jL\omega \Rightarrow \phi_v - \phi_i = 90 \Rightarrow \theta = 90 \Rightarrow Q = \frac{1}{2} V_m i_m > 0$

$Z = \frac{1}{Cj\omega} \Rightarrow \phi_v - \phi_i = -90 \Rightarrow \theta = -90 \Rightarrow Q = -\frac{1}{2} V_m i_m < 0$

$Z = R + jx \Rightarrow \phi_v - \phi_i = \theta \Rightarrow Q = \frac{1}{2} V_m i_m \sin\theta$

$= \frac{1}{2} i_m^2 |z| \sin\theta \Rightarrow Q = \frac{1}{2} x i_m^2$

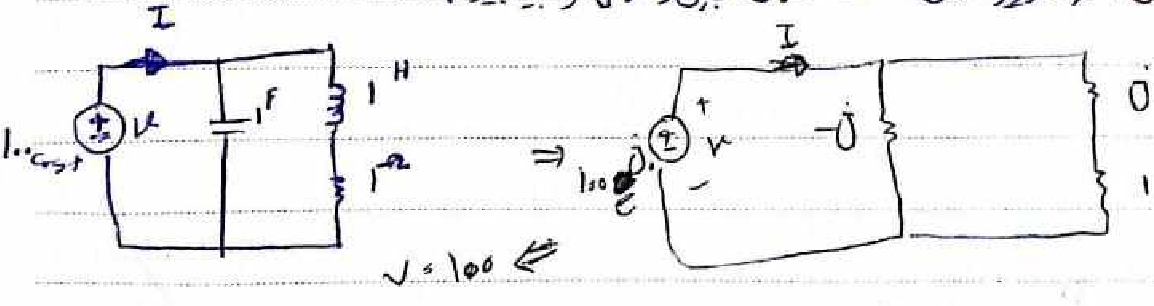
?

(۳۰) با توجه به روابط فوق در امپدانس مختلط Z توان راکتیو مربوط به بخش راکتانس (x) می باشد و بخش مقاومتی R توان راکتیو ندارد.

عموماً توان اکتیو برای ما کار مفید (بار) انجام می دهد. لذا در اغلب موارد ما به دنبال افزایش P_{ave} (کاهش Q) هستیم اما در بعضی از وسایل به دلیل وجود سیم پیچ θ به سمت °۹۰ میل می کند. که این امر خود سبب کاهش P_{av} و افزایش Q می باشد.

برای رفع این مشکل می توان یک خازن را به صورت موازی با بار اندوکتیو در نظر گرفت تا θ به سمت صفر میل کند. با این کار توان اکتیو انتقالی به بار بیشتر می شود. به این عمل اصلاح یا تصحیح ضریب توان گویند.

مثال: در مدار زیر توان مختلط، توان ظاهری و حقیقی را بیابید:



$$I = \frac{100}{(j+1) \parallel (-j)} = 50 + 50j$$

$$S = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} \times 100 \times (50 - 50j) = 2500 - 2500j$$

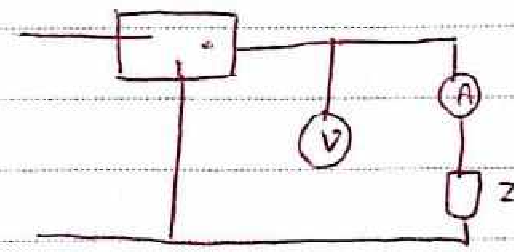
$$f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$ A: دامنه

$$\text{مقدار موثر} = \lim_{\tau \to \infty} \sqrt{\frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} |f(t)|^2 \, dt}$$

$$= \lim_{\tau \to \infty} \sqrt{\frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} A^2 \cos^2(\omega t + \phi)} = \sqrt{\frac{A^2}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{1+\cos(2\omega t + 2\phi)}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{مقدار موثر} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

مثال: در مدار زیر آمپرمتر مقدار 10^A و ولت‌متر مقدار 130^V و وات‌متر 500^W را نشان می‌دهد. Z را تعیین کنید.



ولت‌متر: اندازه مقدار موثر ولتاژ را اندازه‌گیری می‌کند.
آمپرمتر: اندازه مقدار موثر جریان را اندازه‌گیری می‌کند.
وات‌متر: اندازه‌ی توان اکتیو را اندازه‌گیری می‌کند.

$i_m = 10\sqrt{2}$ $\quad v_m = 130\sqrt{2}$ $\quad P_{av} = 500$

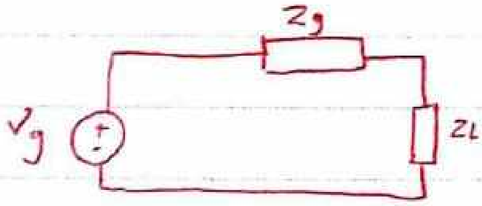
$$P_{av} = \frac{1}{2} i_m v_m = \frac{1}{2} R i_m^2 = 500 \Rightarrow R = 5\,\Omega$$

$$|Z| = \frac{|V|}{|I|} = \frac{130\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = 13$$

$$Z = R + jX \Rightarrow |Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$13 = \sqrt{5^2 + x^2} \Rightarrow x = \pm 12 \rightarrow z = 5 \pm 12j$$

قضیه انتقال توان حداکثر :



$$Z_L = R_L + j x_L$$
$$Z_g = R_g + j x_g$$

به ازای چه شرایطی بر روی Z_L توان الکتریکی در بار ماکزیمم می‌شود؟

بررسی جواب سؤال فوق برای سه حالت مختلف !

الف- حالت اول بار Z_L و امپدانس Z_g هر دو مختلط هستند.

$$P_{av} = \frac{1}{2} R_L |I_L|^2 = \frac{1}{2} R_L \left| \frac{v_g}{Z_L + Z_g} \right|^2$$

توان الکتریکی در بار

$$P_{av} = \frac{1}{2} R_L \frac{|V_g|^2}{(R_L+R_g)^2 + (x_L+x_g)^2}$$

شرط ماکزیمم شدن

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{av}}{\partial x_L} = 0 \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{2}|V_g|^2\left[-2(x_L+x_g)R_L\right]}{(R_L+R_g)^2 + (x_L+x_g)^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial P_{av}}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{2}|V_g|^2\left[(R_L+R_g)^2 + (x_L+x_g)^2 - 2(R_L+R_g)R_L\right]}{(R_L+R_g)^2 + (x_L+x_g)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow x_L = -x_g$$

$$(R_L+R_g)^2 - 2(R_L+R_g)R_L = 0 \Rightarrow R_L = R_g \ ✓ \qquad R_L = -R_g \ ✗$$

شرط تطبیق امپدانس برای حالت اول : $Z_L = Z_g^*$

ب) حالت دوم: بار و امپدانس منبع Z_g هر دو حقیقی باشند $(X_L = X_g = 0)$

$$P_{av} = \frac{1}{2} R_L |I_L|^2 = \frac{1}{2} R_L \left| \frac{V_g}{R_L + R_g} \right|^2$$

$$P_{av} = \frac{1}{2} R_L \frac{|V_g|^2}{(R_L + R_g)^2}$$

شرط max شدن توان ماکسیمم

$$\frac{\partial P_{av}}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow (R_L + R_g)^2 - 2(R_L + R_g) = 0$$

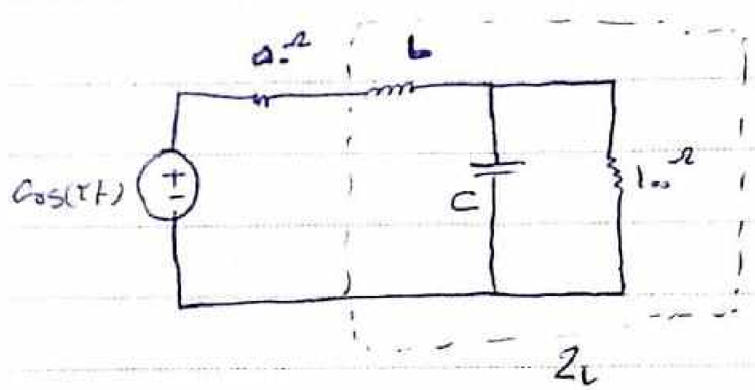
$R_L = R_g$ ⇐ شرط تطبیق امپدانس برای حالت دوم

ج) حالت سوم: بار مقاومتی و امپدانس منبع مختلط باشند: $(X_L = 0)$

$$P_{av} = \frac{1}{2} R_L |I_L|^2 = \frac{1}{2} \left| \frac{V_g^2}{R_L + R_g + jX_g} \right| = \frac{1}{2} \frac{|V_g|^2}{(R_L + R_g)^2 + (X_g)^2}$$

$$\frac{\partial P_{av}}{\partial R_L} = 0 \rightarrow (R_L + R_g)^2 + X_g^2 - 2(R_L + R_g) R_L = 0$$

$R_L = \sqrt{R_g^2 + X_g^2} = |Z_g|$ ⇐ شرط تطبیق امپدانس برای حالت سوم



مثال:

مقدار L و C را در مدار زیر طوری انتخاب کنید تا اکثر توان از منبع به بار برسد.

$$Z = \left(100 \,\|\, \frac{1}{j2C}\right) + j2L = \cancel{\quad}$$

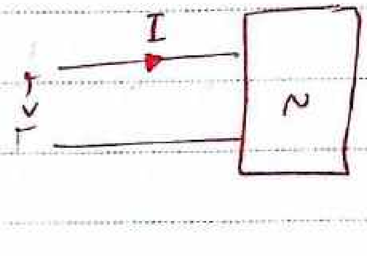
$$= \underbrace{\frac{(0.01)}{(0.01)^2 + 4C^2}}_{R_L} + j\underbrace{\left(2L - \frac{2C}{(0.01)+4C^2}\right)}_{X_L}$$

شرط ماکزیمم توان $\Rightarrow \begin{cases} X_L = 0 \\ R_L = R_g \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{0.01}{(0.01)^2 + 4C^2} = 50 \\ 2L - \frac{2C}{(0.01) + 4L^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0.005\ F \\ L = 25\ H \end{cases}$

— تشدید —

به پدیده هم‌فاز شدن ولتاژ و جریان در مدار فازوری تشدید گویند.

$\angle V = \angle I$ ⇒ تشدید



نتایج تشدید :

۱. نتایج هم فاز شدن جریان و ولتاژ، حقیقی شدن امپدانس (Z) و ادمیتانس (Y) خواهد بود. به عبارت دیگر Z و Y قسمت موهومی ندارند.

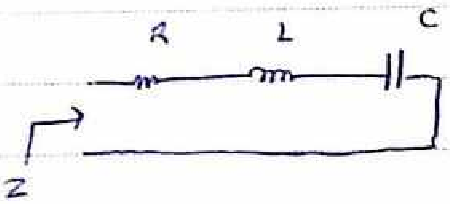
۲. از آنجا که Z و Y تابعی از فرکانس می‌باشند لذا پدیده تشدید نیز تابعی از فرکانس است.

به عبارت دیگر Z و Y ممکن است تنها در یک فرکانس قسمت موهومی خود را از دست بدهند و لذا تنها در همان فرکانس تشدید داریم.

۳. در حالت تشدید توان مختلط تحویلی مولد حقیقی می‌باشد. $S = P + jQ_x$ (در حالت تشدید)

بررسی چند مدار در حالت تشدید :

الف) مدار RLC سری :

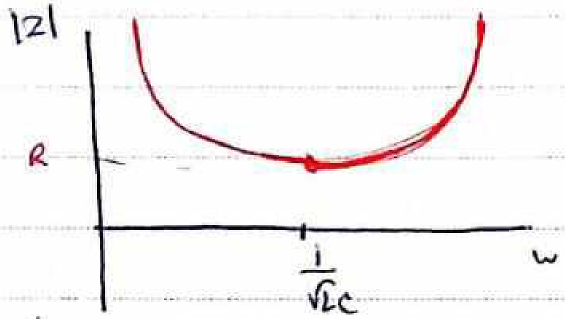


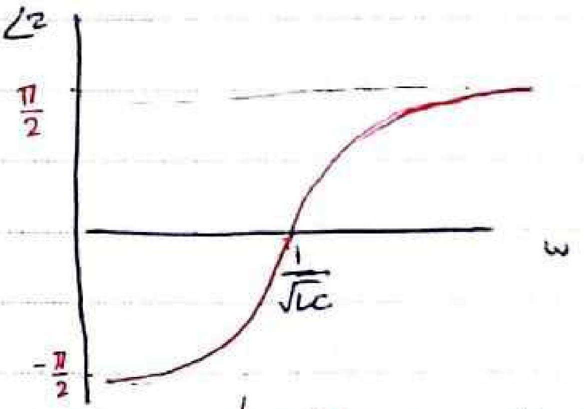
شرط تشدید $= I_m\{Z\} = 0 \Rightarrow I_m\left\{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right\} = 0$

$$I_m\left\{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right\} = 0 \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

فرکانس تشدید

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \qquad \angle Z = \tan^{-1}\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

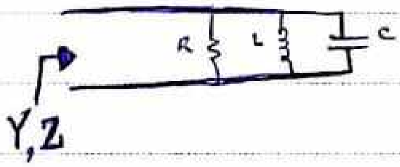




② در مدار RLC سری امپدانس برای فرکانس بیشتر از فرکانس تشدید سلفی

① با توجه به شکل فوق در مدار RLC سری در فرکانس تشدید امپدانس min می‌شود. بوده و برای کمتر از فرکانس تشدید خازنی می‌باشد

ب) مدار RLC موازی:

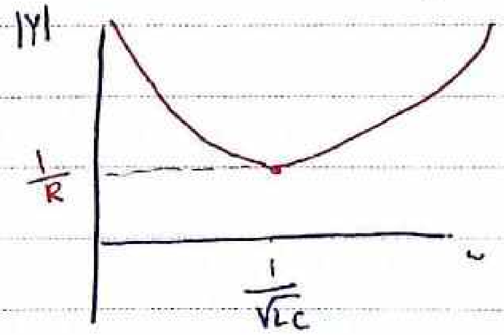


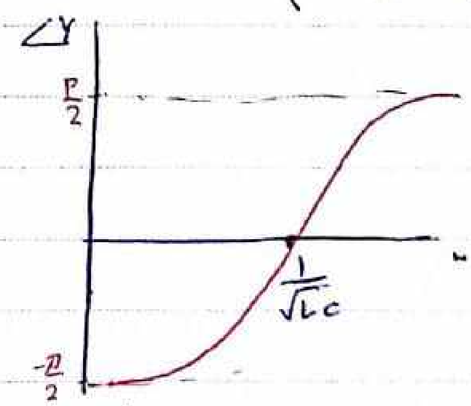
$$\text{شرط تشدید} = I_m\{Y\} = 0 \Rightarrow I_m\left\{\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}\right\} = 0$$

$$I_m\left\{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{L\omega}\right)\right\} = 0 \Rightarrow C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

فرکانس تشدید

$$|Y| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{L\omega}\right)^2} \qquad \angle Y = \tan^{-1}\left(\frac{C\omega - \frac{1}{L\omega}}{R}\right)$$



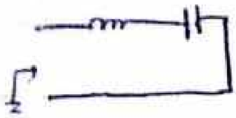


① با توجه به شکل فوق در مدار RLC موازی در فرکانس تشدید اندازه ادمیتانس min می‌شود.

② در مدار RLC موازی برای فرکانس‌های بیشتر از فرکانس تشدید مدار خازنی بوده و برای فرکانس کمتر از فرکانس تشدید مدار سلفی می‌باشد.

نکته: فاز مثبت در امپدانس معادل با سلف و فاز مثبت در ادمیتانس معادل با خازن می‌باشد.

ج) مدار LC سری ←

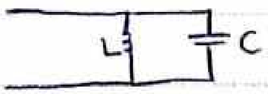


شرط تشدید $I_m\{jLw + \frac{1}{jCw}\} \Rightarrow Lw - \frac{1}{Cw} = 0 \Rightarrow w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

فرکانس تشدید.

در فرکانس تشدید $Z = 0$ ← اتصال کوتاه

د) مدار LC موازی ←



$I_m\{Y\} = 0 \Rightarrow I_m\{\frac{1}{jLw} + jCw\} = 0 \Rightarrow w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

فرکانس تشدید

در فرکانس تشدید مدار LC موازی اتصال باز می‌شود.

Subject:
Year.　　Month.　　Date.　( )

فصل پنجم: (تزویج مدارها)

منظور از تزویج به حالتی گفته می‌شود که جریان و ولتاژ یک شاخه به جریان و ولتاژ شاخه‌های دیگر بستگی دارد.

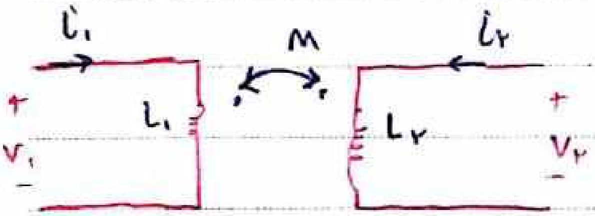
تا ابتدای این فصل کلیه المان‌های LTI فرض می‌شد به صورت مستقل از یکدیگر رفتار می‌کنند اما در واقع در محیط آزمایشگاهی المان‌های سلف بر یکدیگر اثر می‌گذارند.

همان طور که در فصل اول اشاره شد، جریان عبور کننده از یک سیم پیچ باعث عبور شار مغناطیسی از سیم پیچ می‌شود که در حالت المان‌های LTI این شار متناسب با جریان عبوری از سیم پیچ بوده و نسبت شار به جریان ($L = \frac{\phi}{i}$) اندوکتانس سلف گویند.

وقتی دو سیم پیچ در کنار یکدیگر قرار دارند شار مغناطیسی یک سیم پیچ می‌تواند بر سیم پیچ دیگر اثر بگذارد.

این اثر را تحت عنوان القای متقابل بین سیم پیچ‌ها (تزویج) می‌شناسند.

مدار نمایش دو سلف با تزویج متقابل:

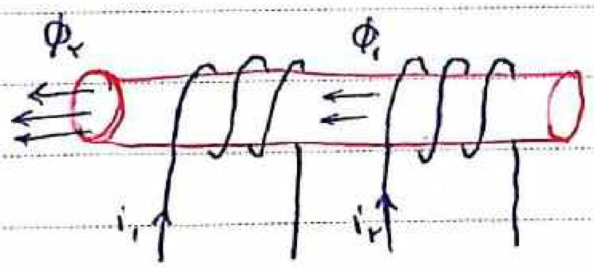


$$\begin{cases} \phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

زمان
$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

فازور $\longrightarrow$
$$\begin{cases} V_1 = jL_1 \omega I_1 + jM\omega I_2 \\ V_2 = jL_2 \omega I_2 + jM\omega I_1 \end{cases}$$

تکمیل از این بخش تا هنگامی که به یک سلف در مدار می رسیدیم ولتاژ آن را به صورت اندازه ی سلف در مشتق جریان آن در نظر می گرفتیم اما از این بخش به بعد در صورت وجود تزویج برای هر سیم ولتاژ یک سلف علاوه بر جمله ی فوق جملات دیگری نیز که اثر تزویج این سلف با سلف های دیگر را نشان می دهد نیز باید در نظر گرفته شود سوالی که اینجا مطرح است این است که اثر سلف ها بر روی یکدیگر (تزویج) آیا تقویتی است و یا تضعیفی طبیعتاً در حالت تقویتی مقدار تزویج با مقدار مثبت در روابط فوق جایگزین می شود و در حالت تضعیف مقدار M با مقدار منفی در روابط فوق جایگزین می شوند.

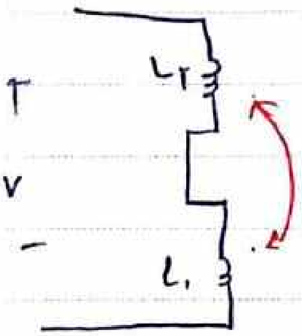


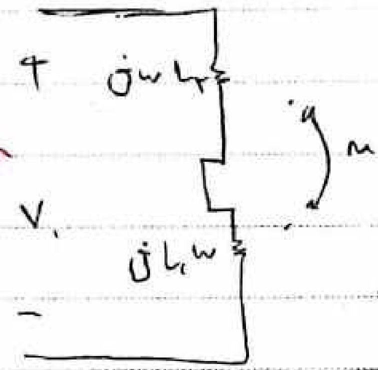
$M>0$

برای نشان دادن اثر تزویج مثبت و یا منفی برای مدل های فیزیکی فوق در یک مدار از قانون سر نقطه دار به عبارت دیگر اگر هر دو جریان در نظر گرفته شده برای دو سلف دارای تزویج از سر نقطه دار وارد و یا هر دو خارج شوند آنگاه $M>0$ خواهد بود و اگر یکی از جریان ها از سر نقطه دار وارد و جریان دیگر از سر نقطه دار از سلف خارج شود $M<0$ خواهد بود.

مثال ← در مدار شکل زیر، الف) نسبت ولتاژ V به جریان I را در حوزه ی فازور تعیین کنید.

ب) مدار از ورودی معادل با چه المانی است؟



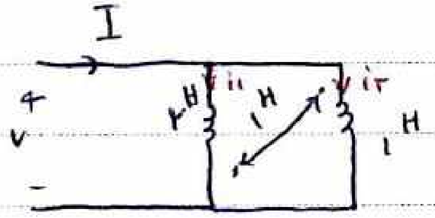


$$-V + (jL_2\omega I - jM\omega I) + (jL_1\omega I - jM\omega I) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{V}{I} = j\omega\left[L_1 + L_2 - 2M\right]$$

$\boxed{\text{نسبت } \frac{V}{I} \text{ نشان می‌دهد که مدار از ورودی معادل با یک سلف است.}}$

مثال: L_{eq} ؟

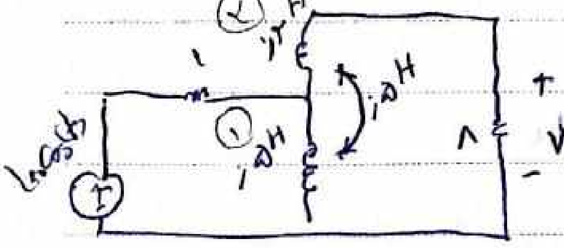


باید $\frac{V}{I}$ را بدست آوریم:

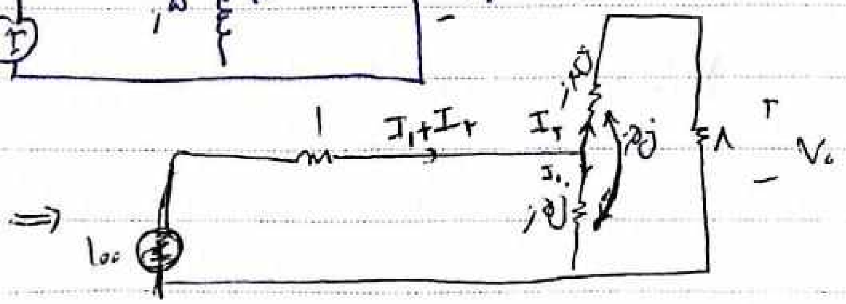
$$\left.\begin{aligned} V &= 2j\omega I_1 - j\omega I_2 \\ V &= j\omega I_2 - j\omega I_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_2 = \frac{3}{j\omega}V,\quad I_1 = \frac{2}{j\omega}V$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{5}{j\omega}V \Rightarrow \frac{V}{I} = j\omega\frac{1}{5} \to L_{eq} = \frac{1}{5}$$

مثال: از حوزه ی فازور ولتاژ V_o را تعیین کنید:



$\Rightarrow$



روش مش = ۲ مش

Subject:
Year. Month. Date. ( )

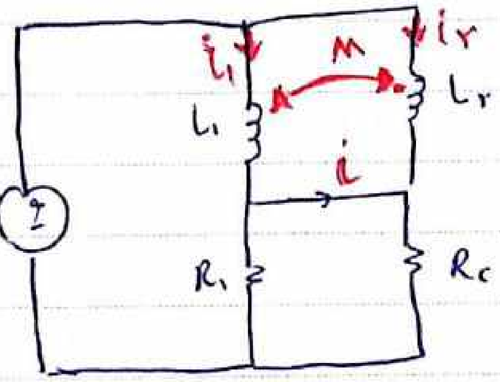
M_1 در KVL $\rightarrow -100 + I_1 + I_2 + (j5 I_1 - j5 I_2) = 0$

M_2 در KVL $\rightarrow -(+j5 I_1 - j5 I_2) + (j1 I_2 - j5 I_1) + 8 I_2 = 0$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{100}{5.7 - j8.15}$$

$$V = 8 I_2 = \frac{800}{5.7 - j8.15} \Rightarrow |V| = \frac{800}{\sqrt{(5.7)^2 + (8.15)^2}} = 80.7$$

در مدار شکل زیر M چقدر باشد که جریان از شاخه ی وسط عبور نکند ؟ $(i=0)$



M_1 در KVL $= -R_1(I_1 - i) + R_2(I_2 - i) = 0$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{R_2}{R_1} i_1$$

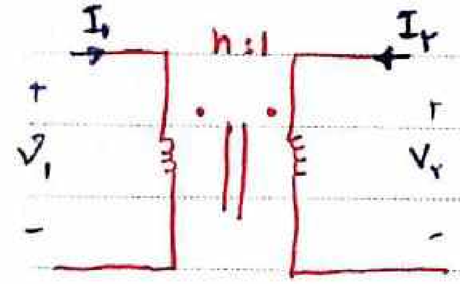
M_2 در KVL $= -(jL_1 w i_2 + jMw i_1) + (jL_2 w i_1 + jMw i_2) = 0$

$$M(i_2 - i_1) = L_1 i_2 - L_2 i_1 \Rightarrow M = \frac{L_1 i_2 - L_2 i_1}{i_2 - i_1}$$

نکته ← اگر تعداد سلف های تزویج بیشتر از ۲ عدد باشد، روش های استفاده شده در مثال های فوق همچنان صادق است. فقط با این تفاوت که تعداد علامت تزویج مربوط به هر سلف افزایش می یابد.

ترانسفورماتور :

تعداد حلقه سیم پیچ ها به ترتیب [illegible] است.

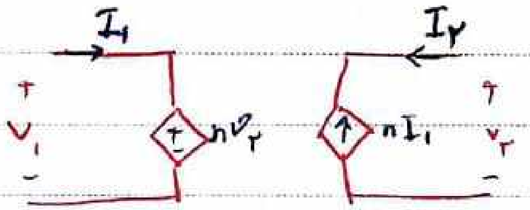


ترانسفورماتور یک حالت خاصی از تزویج می باشد.

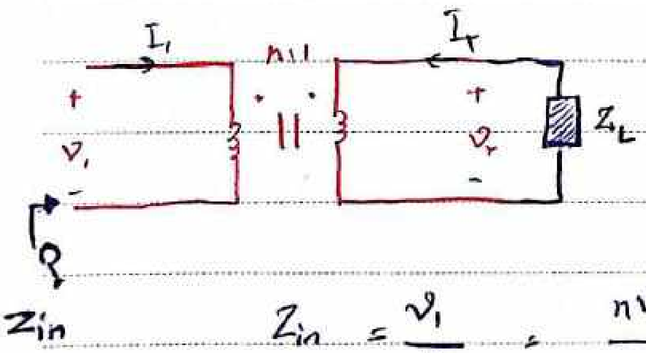
روابط معرف یک ترانس

$$\begin{cases} V_1 = n V_2 \\ I_1 = -\frac{1}{n} I_2 \end{cases}$$

مدل مداری ترانسفورماتور :



انتقال امپدانس در ترانسفورماتور :

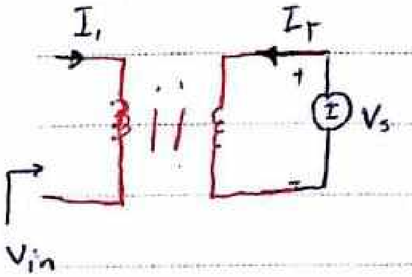


$$Z_L = \frac{V_2}{-I_2}$$

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{nV_2}{-\frac{1}{n} I_2} = n^2 \frac{V_2}{-I_2} = n^2 Z_L$$

$$\boxed{Z_{in} = n^2 Z_L}$$

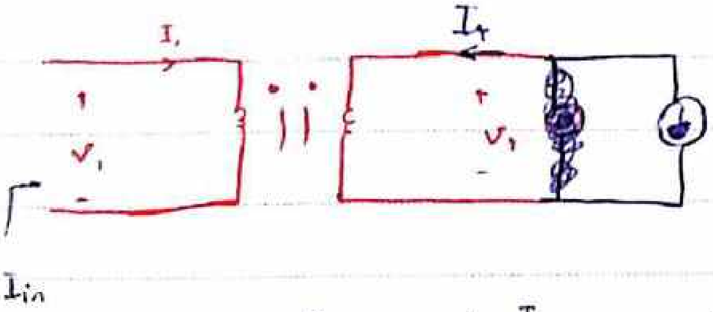
انتقال منبع ولتاژ در ترانسفورماتور :



$$V_{in} = V_1 = nV_2 = nV_s$$

$$\boxed{V_{in} = nV_s}$$

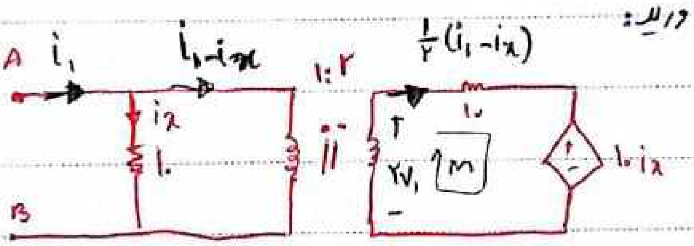
اتصال منبع جریان :



$$I_{in} = -\frac{1}{n} I_2 = -\frac{1}{n}(-i_s) = \frac{i_s}{n}$$

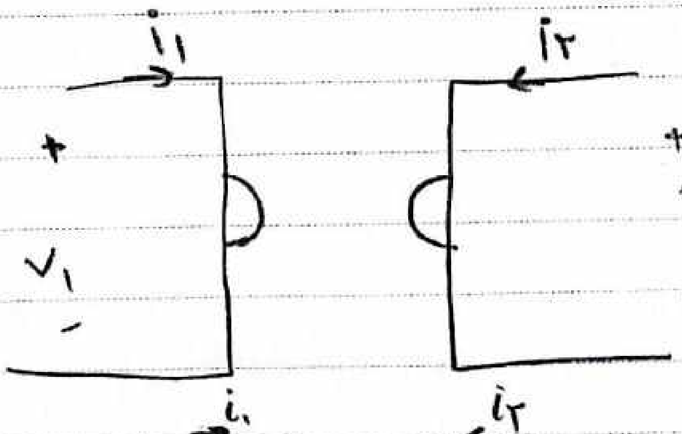
$$\boxed{I_{in} = \frac{i_s}{n}}$$

مثال : مقاومت معادل دیده شده از دو سر A و B را بدست آورید:

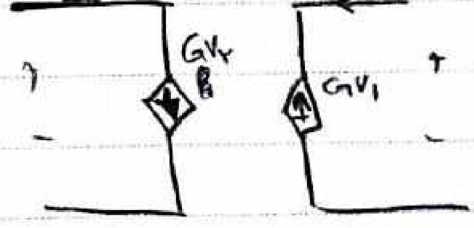


$$\left.\begin{aligned} &M_1 , KVL \Rightarrow -2v_1 + 10\left(\frac{i_1 - i_x}{2}\right) + 10 i_x = 0 \\ &\text{ولی} \rightarrow v_1 = 10 i_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{v_1}{i_1} = \frac{10}{3}$$

ژیراتور :



$$\begin{cases} i_1 = G V_2 \\ i_2 = -G V_1 \end{cases}$$



Subject:

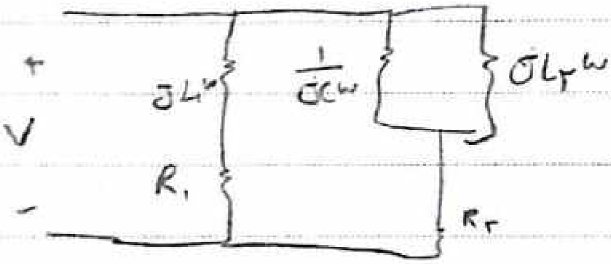
Year. Month. Date. ( )

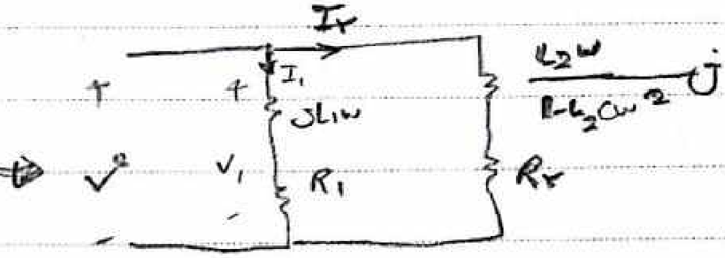
$v_L = i'_L + 2\delta(t)$

$i_C = (v_C - 2u(t))$

$$\begin{cases} v''_C + 2v'_C + v_C = 4\delta'(t) + 4\delta(t) + 4u(t) \\ v_C(0) = \end{cases}$$

سوال 1 :





$I = \frac{V}{Z} \Rightarrow I_1 = |I_1| \angle (\measuredangle Z_1)$

$I_2 = |I_2| \angle (\measuredangle Z_2)$

$\varphi_1 = \varphi_2$

$Z_1 = R_1 + jL_1\omega \Rightarrow \measuredangle Z_1 = \tan^{-1}\left(\frac{L_1\omega}{R_1}\right)$

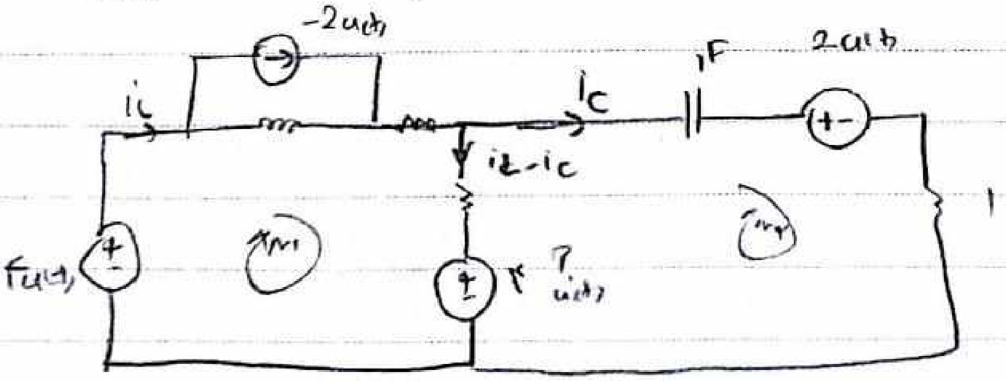
$Z_2 = R_2 + \frac{L_2\omega}{1-L_2C\omega^2} j \Rightarrow \measuredangle Z_2 = \tan^{-1}\left(\frac{L_2\omega}{R_2(1-L_2C\omega^2)}\right)$

$\Rightarrow \frac{L_1\omega}{R_1} = \frac{L_2\omega}{R_2(1-L_2C\omega^2)}$ $\neq 0$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_2C}}\sqrt{1-\frac{R_1L_2}{L_1R_2}} \Rightarrow 1-\frac{R_1L_2}{L_1R_2} > 0 \Rightarrow \boxed{\frac{L_1}{R_1} > \frac{L_2}{R_2}}$

سوال ۴ س۳

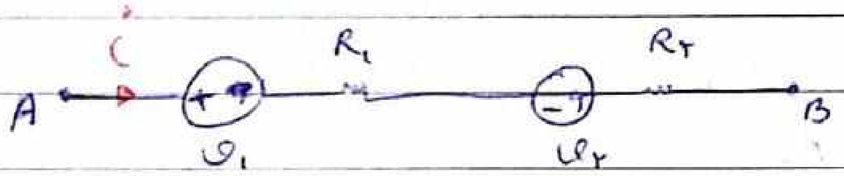
$I_L(0^-) = -2 \qquad V_C(0^-) = 2$



$m_1 \rightarrow -2u(t) + V_L + i_L + i_L - i_C + 4u(t) = 0 \Rightarrow V_L + 2i_L - i_C = 0$

$m_2 \rightarrow -4u(t) + i_C - i_L + V_C + i_C = 0 \Rightarrow V_C + 2i_C - i_L = 4u(t)$

Subject: .... Date: ....



$v_B = ?$

سوال ۹ - سری ۲

$I = 0$

$V_{ab} = I\,G = 0 \Rightarrow V_a = V_b$

$$\left.\begin{array}{l} V_{ab} = V_{cb} \Rightarrow Z_1 I_1 = Z_c I_2 \Rightarrow \\ V_{ad} = V_{bd} \Rightarrow Z_4 I_1 = Z_2 I_2 \Rightarrow \end{array}\right\} Z_1 Z_2 = Z_3 Z_4$$

سوال ۳

$$\left.\begin{array}{l} I_{s}(j\omega) = 5\angle 0 \\ v(j\omega) = 3\, e^{-\frac{\pi}{4}} \end{array}\right\} \Rightarrow Z(j\omega) = \frac{v}{I_s} = 0.6\, e^{-\frac{\pi}{4}}$$

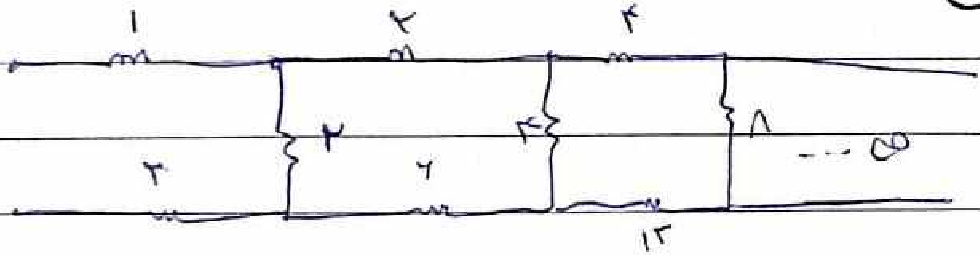
$I_s = 3\, e^{\frac{\pi}{8}}$

$Z_2 = Z_1(-j\omega) = 0.6\, e^{\frac{\pi}{4}}$

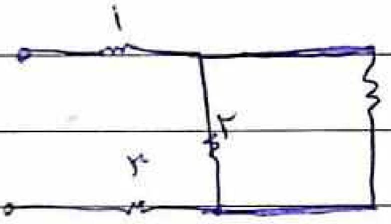
$v = Z I_s = 1.8\, e^{\frac{3\pi}{8}}$

$v(t) = 1.8 \cos\left(t + \frac{3\pi}{8}\right)$

۳



$R_{eq} = ?$

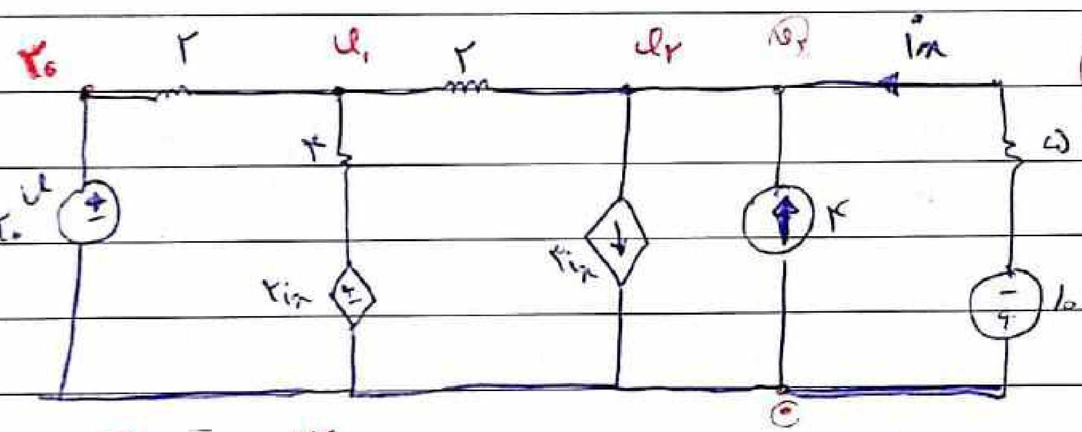


$\Rightarrow R_T = 1 + (2 \,||\, R_{eq}) + 3$

$R_{eq} = 5.7\,\Omega$

۴

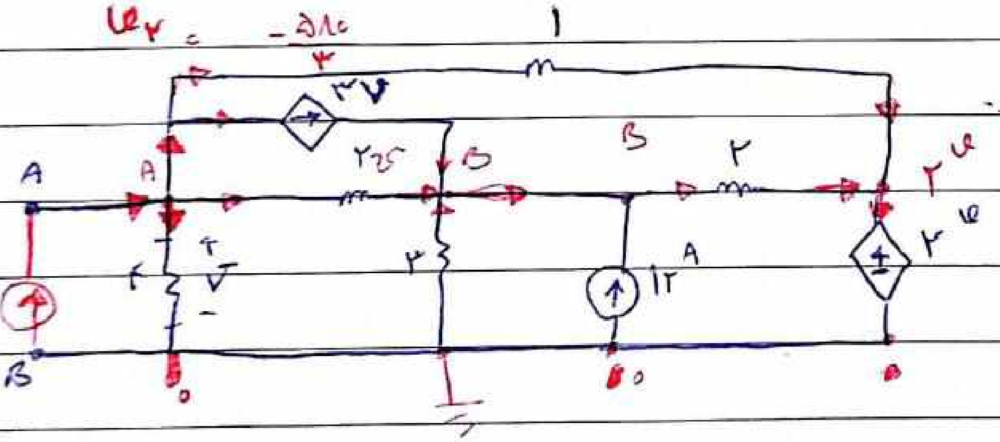
$v_1, v_2\,?$



$v_1 = \frac{-144}{3}$

$v_2 = \frac{-516}{3}$

۵



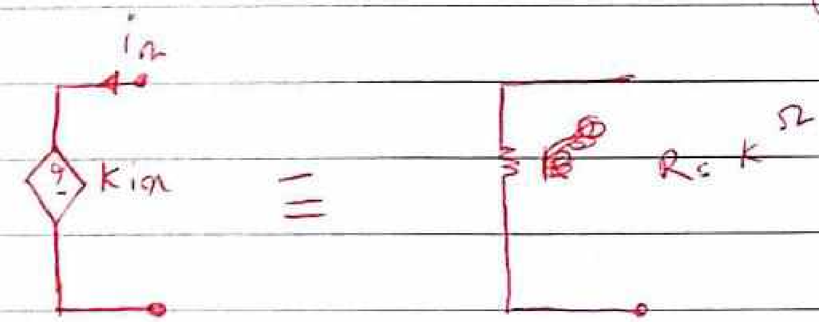
مقاومت‌ها و نورتن الف.

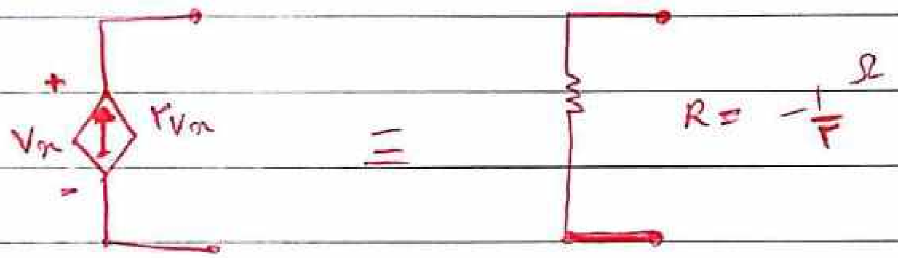
رابطه‌ی ترمینال؟

معادل تونن؟

$v_1 = \frac{7}{38} I + \frac{24}{38}$

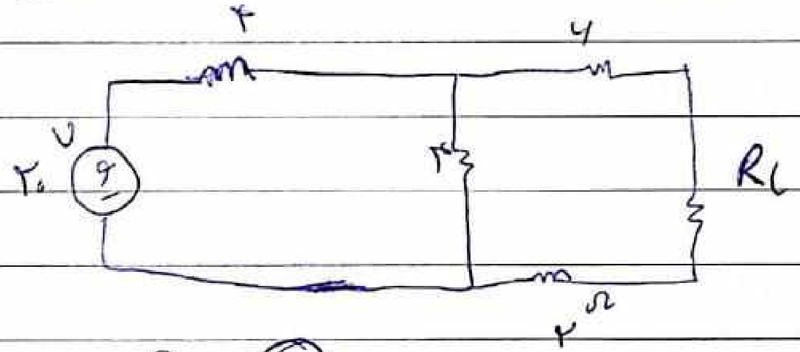
Subject: .... Date: ....





مثال:

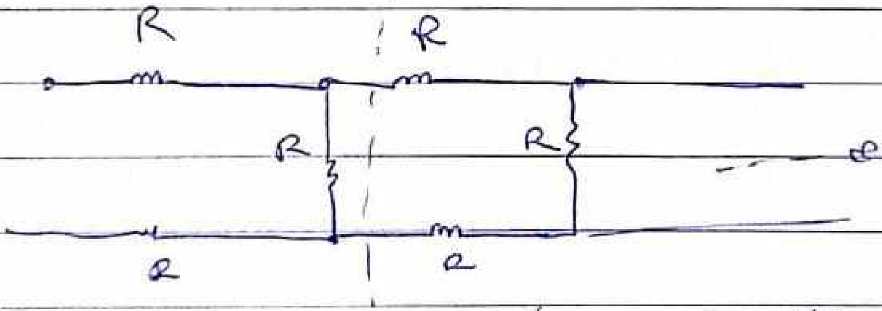
۱



$R_L = ?$ ۱۰

$P_{max} = ?$ ۲۵

۲



$= (R \| R_T) + ۲R$

$R_{eq} = ۲/۷R$

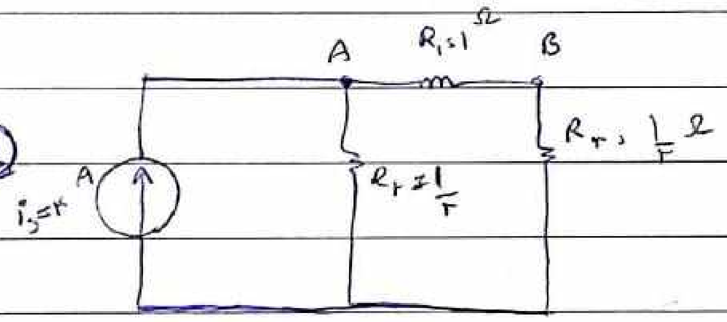
Subject:.................. Date:..................

$V(t) = \frac{1}{4} C \frac{di(t)}{dt}$

$i = \frac{24}{4} - \frac{11}{4} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{4}{4}$

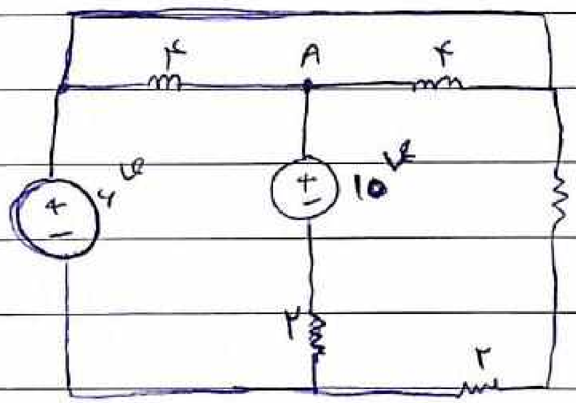
$V(3) = \frac{1}{4} \times \frac{42}{21} \times \frac{4}{4} = \frac{42}{42}$

. تمرین منزل ۶

① 

$V_B = 0.5$

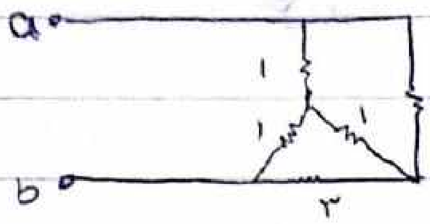
$V_A = 1.5\,V$

② 

$P = I \times V = 10$

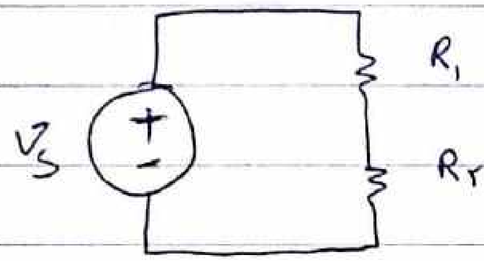
SEVAN Note book

مثال ۱:



$R_{eq} = ۱,۵\,\Omega$

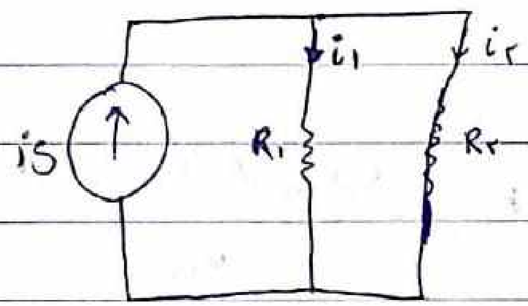
نکته ←



$$v_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} v_S$$

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} v_S$$

نکته ←



$$i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2} i_S$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2} i_S$$

تمرین ۱ سری ۴

قانون پایستگی بارها →

$$Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2'$$

$i = 2v_2$, $\frac{di}{dt} = 2\frac{dv_2}{dt}$

حل ←

$$i = C\frac{dv}{dt} \Rightarrow 2v_1 = C\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{2}C\frac{di}{dt}$$

$$v_1 = v \Rightarrow v = \frac{1}{4}C\frac{di}{dt}$$

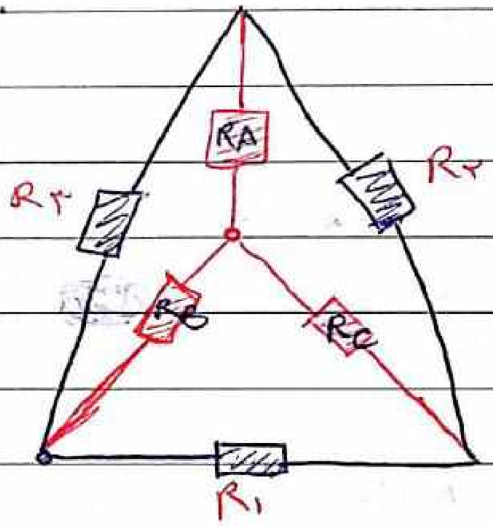
$$w(2,5) = \int_2^5 v(t)\, i(t)\, dt = \int_2^5 \frac{1}{4}C\frac{di}{dt}\, i(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{4}C\left[\frac{i(t)^2}{2}\right]_2^5 = 8 \Rightarrow C = \frac{64}{21}$$

۱۲d

Subject:............................ Date:............................

→ حل تمرین مدار الکتریکی ۱ — استاد محمد ابارشی



تبدیل مثلث به ستاره :

تبدیل ستاره به مثلث :

$$R_a = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad R_1 = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_a}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad R_2 = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_b}$$

$$R_c = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad R_3 = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_c}$$

$$\text{if} \Rightarrow R_1 = R_2 = R_3 \;\text{و}\; R_A = R_B = R_C \Rightarrow R_{\text{مثلث}} = 3R_{\text{ستاره}}$$