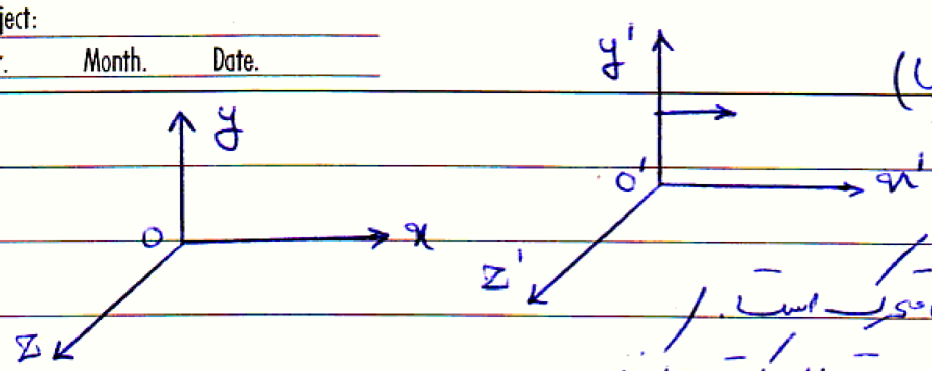
فیزیک جدید   کنت اس کرین   ترجمه: منیژه رهبر - بهرام معلمی   مرکز نشر دانشگاهی   ویرایش دوم

Subject:
Year.   Month.   Date.

فیزیک مدرن (لاله موسوی)



دستگاه O ساکن و دستگاه O' متحرک است.
دستگاه O' در امتداد محور xها با سرعت u حرکت می‌کند.

$$x = vt + x_0 \qquad x' = x - ut \longrightarrow x = x' + ut$$

مکان (از دیدگاه ناظر O') $\begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases}$ از دیدگاه ناظر O $\begin{cases} y = y' \\ z = z' \end{cases}$

سرعت O' $\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$ O $\begin{cases} v_x = v'_x + u \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}$

شتاب $\begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \longrightarrow$ شتاب ثابت است

مثال) دو اتوبوس با سرعت ثابت در یک جاده و در یک جهت حرکت می‌کنند. اتوبوس A با سرعت 60 km/h و اتوبوس B با سرعت 40 km/h، نسبت به ناظری که روی زمین است در حرکت اند. سرعت اتوبوس A نسبت به اتوبوس B چقدر است؟

(ناظر روی زمین O، $V_x = 60$ و O' داخل اتوبوس B با سرعت $u = 40$ حرکت می‌کند)

$$V_A = 60 \qquad V_x = 60$$
$$V_B = 40 \qquad \xrightarrow{A} \; \xrightarrow{B} \qquad u = 40 \qquad V'_x = 60 - 40 = 20$$

V'_y

مثال) یک هواپیما نسبت به هوای ساکن با سرعت 320 km/h به طرف شرق حرکت می‌کند. بنابراین برای ناظری که روی زمین است، بادی با سرعت 65 km/h به طرف شمال می‌وزد. از نظر ناظر روی زمین، سرعت هواپیما را چقدر اندازه می‌گیرد؟

راستای شمال محور y، شرق محور x   سرعت نسبت به ناظر ساکن در دستگاه ساکن؟

Year. Month. Date.

دستگاه متحرک، باد است.

$u = ٦٥\ km/h$

$v'_y = ٣٢٠\ km/h$

$v'_x = ٠$

y شرق ، x شمال

O' را جسم طوری انتخاب کنید که در راستای x قرار گیرد.

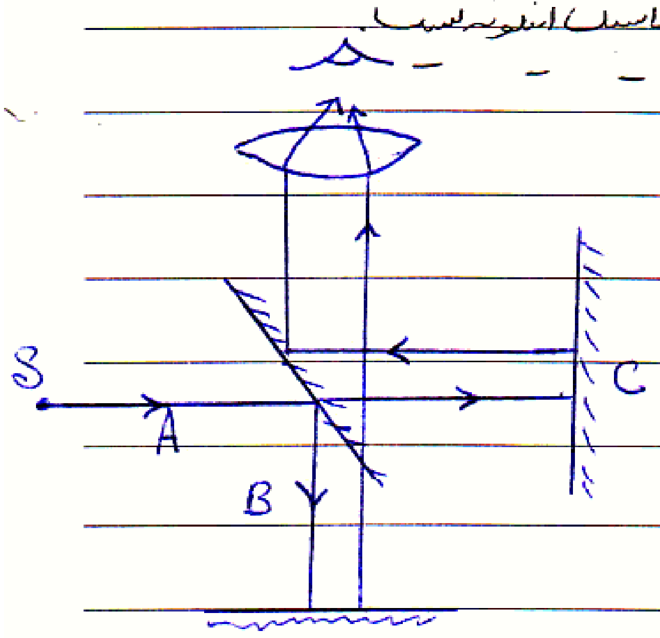
$v_x = v'_x + u = ٠ + ٦٥ = ٦٥$

$v_y = v'_y = ٣٢٠\ km/h$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(٦٥)^2 + (٣٢٠)^2}$

اگر جهت حرکت هواپیما را بخواهد ← $tg\theta = \frac{v_y}{v_x}$

اندازه‌ی سرعت نور در همه راستاها یکسان است (در فیزیک مدرن) اما در فیزیک کلاسیک اینطور نیست.



آزمایش مایکلسون ـ مورلی

نوارهای روشن و تاریک مشاهده شد.

دلیل ایجاد نوارهای تداخلی: ۱ـ اختلاف راه ۲ـ اختلاف زمان

اصول موضوعی انیشتین:

۱ـ اصل نسبیت: قوانین فیزیک در همه‌ی چارچوب‌های مرجع لخت یکسان هستند.

۲ـ اصل ثابت سرعت نور: سرعت نور در فضای آزاد در تمام چارچوب‌های مرجع لخت دارای مقدار ثابت c است.

پیامدها: ۱ـ اتساع زمان ۲ـ انقباض فضا

۱ـ اتساع زمان

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

۲ـ انقباض فضا

$$l = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

l_0 و Δt_0 طول و زمان واقعی می‌باشند (در همه‌ی موارد)

l طولی می‌باشد که همراه با ناظر ساکن یا متحرک می‌باشد.

Subject:

Year. Month. Date.

مثال) مئون‌ها (میون‌ها) ذرات ناپایداری با طول عمر ۲/۲ میکروثانیه هستند. این ذرات بر اثر برخورد پرتوهای کیهانی با مولکول‌های هوا با سرعت‌های بسیار زیاد در قسمت بالای جو تولید می‌شود. ارتفاع جو را در چارچوب سطح زمین ۱۰۰ کیلومتر در نظر بگیرید و کمینه‌ی سرعتی را بیابید که مئون‌ها با آن سرعت تا رسیدن به سطح زمین دوام می‌آورند؟

$l_0 = 100\,km$

$\Delta t_0 = ۲/۲\,\mu s$

$v = c \quad u = ?$ $\qquad x = v\Delta t \qquad l_0 = c\Delta t \qquad \Delta t = \frac{l_0}{c} = \frac{100\,km}{300{,}000\,km/h} = \frac{1}{3000}\,h$

$\Delta t = ۳۳۴\,\mu s \qquad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \Rightarrow ۳۳۴ = \frac{۲/۲}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

$\sqrt{1-u^2/c^2} = \frac{۲/۲}{۳۳۴} \Rightarrow 1-u^2/c^2 = \left(\frac{۲/۲}{۳۳۴}\right)^2 \Rightarrow u = c\sqrt{1-\left(\frac{۲/۲}{۳۳۴}\right)^2} = ۰/۹۹۹۹۷۸c$

مثال) ناظر O روی سکویی به طول ۶۵m در یک ایستگاه فضایی ایستاده است. یک موشک با سرعت ۰/۸c موازی لبه‌ی سکو از کنار آن عبور می‌کند. ناظر متوجه می‌شود در یک لحظه‌ی خاص جلوی موشک با ابتدای سکو و هم‌زمان با آن عقب موشک با انتهای دیگر آن در یک خط قرار می‌گیرند.

الف) از نظر ناظر O زمان لازم برای اینکه موشک از یک نقطه‌ی خاص سکو بگذرد چقدر است؟

ب) طول سکون موشک چقدر است؟ ج) از نظر ناظر 'O در موشک طول سکو چقدر است؟

د) از نظر ناظر 'O چقدر طول می‌کشد تا ناظر O طول کامل موشک را بپیماید؟

ه) از نظر ناظر O، دو سر موشک هم‌زمان با دو سر سکو منطبق می‌شوند. آیا این رویدادها برای 'O هم‌زمان هستند؟

طول واقعی موشک = l_0
$\left.\begin{matrix}\Delta t \\ D\end{matrix}\right\}$ از دید ناظر O'

$\left.\begin{matrix}l \\ \Delta t_0 \\ D_0\end{matrix}\right\}$ از دید ناظر O

Subject:
Year. Month. Date.

$D_0 = 65m \quad u = 0/8c \quad O \rightarrow l = D_0 = 65m$

الف) $\Delta t_0 = \frac{l}{u} = \frac{65}{0/8 \times 3 \times 10^8} = 0/27 \mu s$ Δt_0 آن چیزی است که ناظر O اندازه می‌گیرد

ب) $l = l_0 \sqrt{1-u^2/c^2}$ طول ویژه یا طول موشک $l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ طول سکوی l

$l_0 = \frac{65}{\sqrt{1-0/64}} = 108 m$

ج) $D = D_0 \sqrt{1-u^2/c^2} = 65\sqrt{1-0/64} = 39 m$

طول واقعی موشک

دوره برای کسی اتفاق می‌افتد که همراه است

د) $\Delta t = \frac{l_0}{u} = \frac{108}{0/8c} = 0/45 \mu s$

هـ) خیر

اثر دوپلر نسبیتی

$\nu' = \nu \frac{V \pm V_0}{V \pm V_s}$

$c = \nu\lambda$ ν : بسامد چشمه ν' : بسامدی که ناظر O می‌شنود

$\nu = \frac{c}{\lambda}$ یا $\lambda = \frac{c}{\nu}$

V_0 : سرعت ناظر نسبت به محیط V : سرعت امواج در محیط

V_s : سرعت چشمه نسبت به محیط

$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}}$ درست ν : بسامد λ : طول موج

مثال) سرعت دور شدن یک کهکشان از زمین به گونه‌ای است که خط آبی هیدروژن با طول موج 434nm در 600 نانومتری (در گستره‌ی سرخ طیف) نشان داده می‌شود. سرعت کهکشان نسبت به زمین چقدر است؟

$$\frac{c}{400} = \frac{c}{434}\sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}} \qquad \frac{434}{400} = \sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}} \rightarrow \left(\frac{434}{400}\right)^2 = \frac{1-u/c}{1+u/c}$$

$$\rightarrow \frac{u}{c} = 0/31$$

معادلات تبدیلات مکانی و زمانی لورنتس :

$O\,(x, y, z, t)$

$O'\,(x', y', z', t')$

u سرعت در راستای x

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{cases}$$

$$O' \xrightarrow[\text{طول } L_0]{\text{[illegible]}} L_0 = x'_2 - x'_1$$

$$O \longrightarrow L = x_2 - x_1$$

$$x'_1 = \frac{x_1 - ut_1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \quad , \quad x'_2 = \frac{x_2 - ut_2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - ut_2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} - \frac{x_1 - ut_1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \Rightarrow x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} - \frac{u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$t_1 = t_2$$

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \Rightarrow L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \Rightarrow L = L_0\sqrt{1-(u/c)^2}$$

تبدیلات زمانی لورنتس:

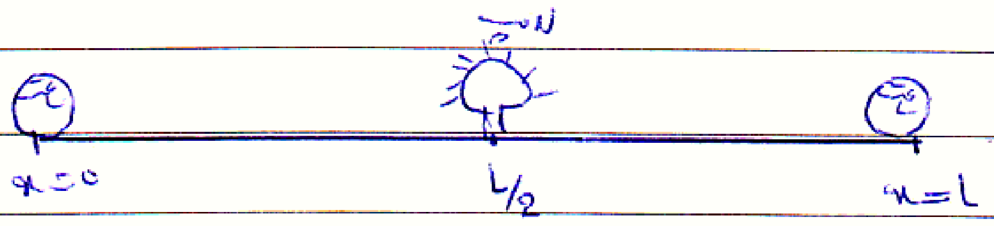
$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u/c^2}}$$

$$y = y' \Longrightarrow dy' = dy \qquad v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt'} = \frac{dy}{\dfrac{dt - u/c^2\, dx}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}}$$

$$v'_y = \frac{dy/dt}{\dfrac{1 - u/c^2\; dx/dt}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}} \Longrightarrow \boxed{v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - \dfrac{u}{c^2} v_x}}$$

$$\boxed{v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u/c^2\, v_x}} \qquad \boxed{dt' = \frac{dt - (u/c^2)\,dx}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}}$$

هم‌زمان‌سازی:



شعاع نور

$$x = ct$$

$$\frac{L}{2} = ct \rightarrow t = \frac{L}{2c}$$

$$t' = \frac{t - u/c^2\, x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$t'_1 = \frac{t_1 - u/c^2\, x_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{L/2c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad t_1 = t_2 = \frac{L}{2c}$$

$$t'_2 = \frac{t_2 - u/c^2\, x_2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{L/2c - u/c^2\, L}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \Longrightarrow \Delta t' = t'_1 - t'_2 = -\frac{L/2c - u/c^2\, L}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{L/2c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$\Delta t = \frac{u/c^2\, L}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

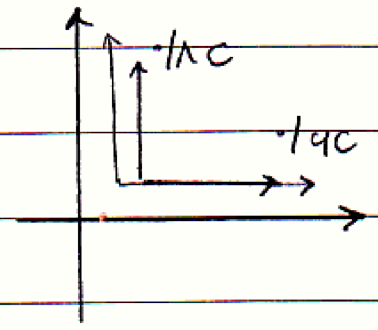
$\Rightarrow$ آزمایشی که در دستگاه ثابت انجام می‌شود دارای اختلاف زمانی است که ناظری که در دستگاه متحرک است می‌بیند.

مثال) دو موشک با ایستگاه فضایی حرکت در راستای … نسبت به ناظری که در ایستگاه خود دارد در …

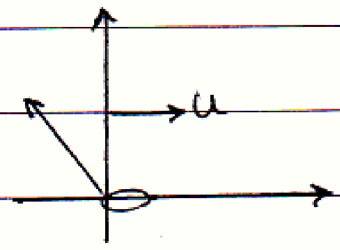
عمود برهم حرکت می‌کنند. موشک (۱) با سرعت $0.6c$ و موشک (۲) با سرعت $0.8c$ نسبت به ایستگاه

$u = 0.6c$

فضایی حرکت می‌کنند. سرعت موشک (۲) نسبت به ناظر واقع در موشک (۱) چقدر است؟



$$\begin{cases} u = 0.6c \\ v_x = 0 \\ v_y = 0.8c \end{cases}$$



سرعت ۱ در دید ناظر یکسان است. $(0.6c)$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} = \frac{-0.6c}{1} = -0.6c$$

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u v_x/c^2} = \frac{0.8c\sqrt{1 - 0.36}}{1} = 0.64c$$

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{(-0.6c)^2 + (0.64c)^2} = ?$$

$$tg\theta = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{0.64c}{-0.6c}$$

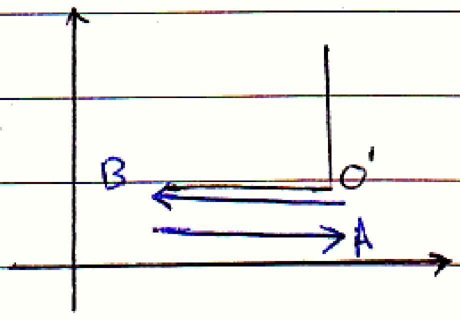
مثال) دو سفینه فضایی از جهت‌های مخالف به زمین نزدیک می‌شوند. از نظر یک ناظر روی زمین

سفینه A با سرعت $0.7c$ و سفینه B با سرعت $0.8c$ در حرکتند. سرعت سفینه A از نظر

دستگاه متحرک را روی B قرار دهیم.

واقع در سفینه B چقدر است؟ سرعت سفینه B از نظر ناظر واقع در سفینه A چقدر است؟

الف)



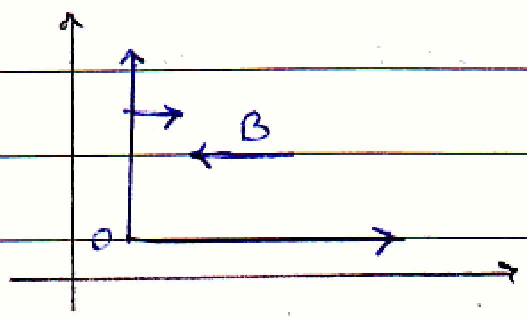
$$v_A = 0.7c$$

$$v_B = 0.8c \qquad u = -0.8c$$

$$v_{xA} = 0.7c$$

$$v'_{xA} = \frac{v_x - u}{1 - u v_x/c^2} = \frac{0.7c + 0.8c}{1 + 0.8 \times 0.7} = \frac{1.5c}{1.56}$$

ب)



$u = 0.7c \qquad v_{xB} = -0.8c \qquad v'_{xB} = \dfrac{v_{xB} - u}{1 - u v_{xB}/c^2} = \dfrac{-0.8c - 0.7c}{1.56}$

$v'_{xB} = \dfrac{-1.5c}{1.56}$

مثال) موشک A با سرعت 0.8c یک ایستگاه فضایی را ترک می‌کند. ابتدا موشک B در همان جهت با سرعت 0.6c به حرکت در می‌آید سرعت موشک A از دید موشک B چقدر است؟

دستگاه متحرک را روی B انتخاب می‌کنیم و سرعتش هم u می‌شود.

$u = 0.6c$

$v_{xA} = 0.8c$

$v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - u v_x/c^2} = \dfrac{0.8c - 0.6c}{1 - 0.48} = \dfrac{0.2c}{0.52}$

مثال) یکی از خط‌های گسیلی قوی از کهکشان‌های دوردست ناشی از هیدروژن که دارای طول موج 122nm است.

الف) یک کهکشان با چه سرعتی از ما دور شود تا این خط طیفی در ناحیهٔ مرئی و در 366nm مشاهده شود؟

ب) اگر کهکشان با همان سرعت به سوی ما حرکت می‌کرد، طول موج خط چقدر می‌شد؟

الف) $\dfrac{c}{366} = \dfrac{c}{122}\sqrt{\dfrac{1-u/c}{1+u/c}} \longrightarrow \left(\dfrac{122}{366}\right)^2 = \dfrac{1-u/c}{1+u/c} \Rightarrow u = k$

ب) $\dfrac{c}{\lambda'} = \dfrac{c}{122}\sqrt{\dfrac{1+k/c}{1-k/c}} \longrightarrow \lambda' = \ldots$

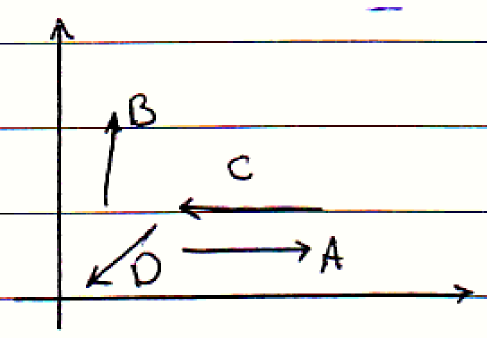
علامت‌ها عوض می‌شود چون از ما دور نمی‌شود.

مثال) چند سفینهٔ فضایی یک ایستگاه فضایی را همزمان ترک می‌کنند. نسبت به ناظر در ایستگاه، A با

سرعت 0.6c در جهت x، B با سرعت 0.5c در جهت y، C با سرعت 0.5c

در جهت x– و D با سرعت $0/5c$ با زاویه 45° بین جهت‌های منفی y و x حرکت می‌کند.

مولفه‌های سرعت، جهت‌ها و سرعت‌های B، C و D را از دیدگاه A بیابید.



$u = 0/6c$

$$\begin{cases} V_{Bx} = 0 \\ V_{By} = 0/5c \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{Cx} = -0/5c \\ V_{Cy} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{Dx} = -0/5c\cos 45 \\ V_{Dy} = -0/5c\sin 45 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} v'_x = \dfrac{V_x - u}{1 - V_x u/c^2} = \dfrac{0 - 0/6c}{1} = -0/6c \\ v'_y = \dfrac{V_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - V_x u/c^2} = \dfrac{0/5c\sqrt{1-0/36}}{1} = 0/4c \end{cases}$$

$$C \begin{cases} v'_x = \dfrac{-0/5c - 0/6c}{1+0/3} \\ v'_y = 0 \end{cases} \qquad v'_C = v'_{xC}$$

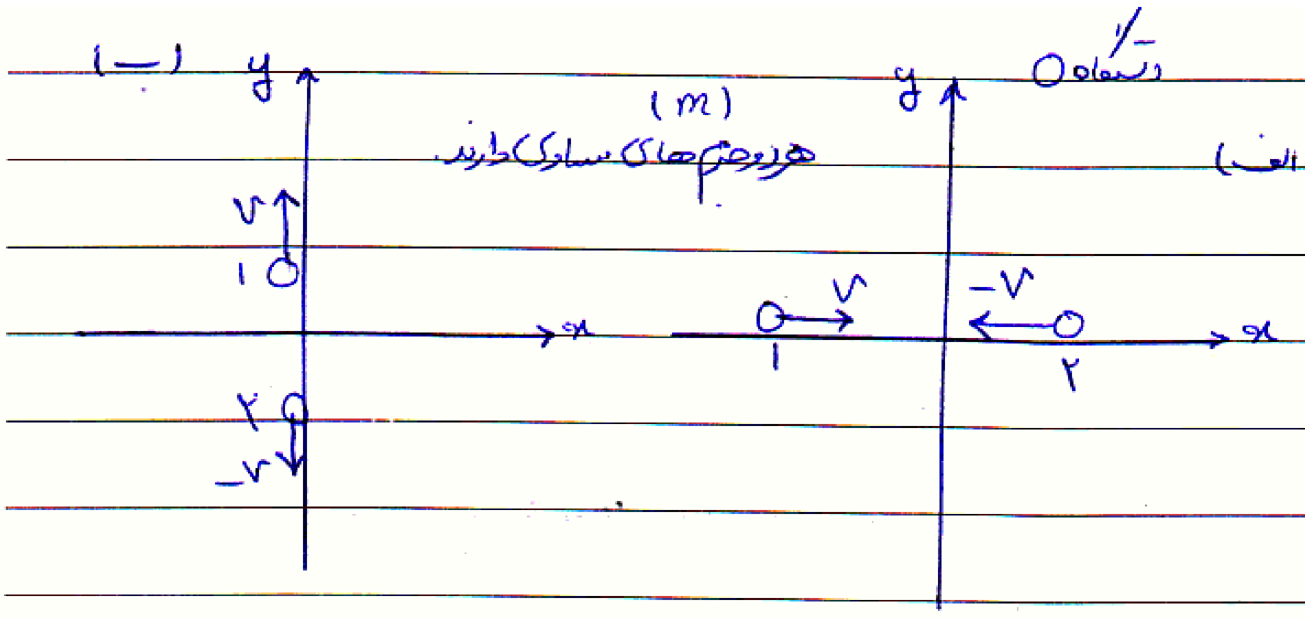
$$v'_B = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} \qquad tg\alpha = \frac{v'_y}{v'_x}$$

$$D \begin{cases} v'_x = \dfrac{-0/35c - 0/6c}{1+0/42} = \dfrac{0/95c}{1/42} \\ v'_y = \dfrac{-0/35c \times 0/8}{1/42} = ? \end{cases}$$

$$v'_D = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} \qquad tg\beta = \frac{v'_y}{v'_x}$$

فصل ۲ سوال ۵، ۶، ۱۱، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۶،

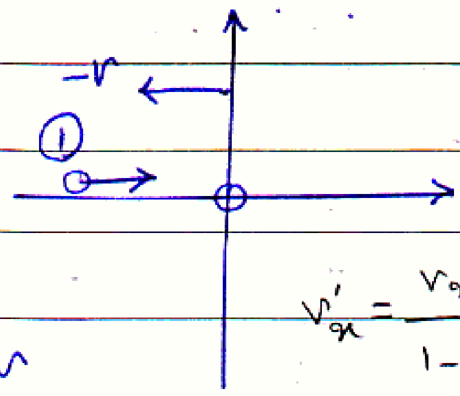
دینامیک نسبیتی: دستگاه O



قبل از برخورد $\begin{cases} P_{x_i} = mv + m(-v) = 0 \\ P_{y_i} = 0 \end{cases}$

بعد از برخورد $\begin{cases} P_{x_f} = 0 \\ P_{y_f} = mv - mv = 0 \end{cases}$

دستگاه O' نسبت به O با سرعت u حرکت می‌کند.



$v'_{2x} = 0$

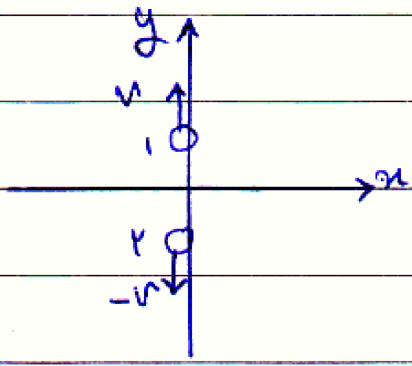
$$v'_{x_1} = \frac{v-(-v)}{1-\frac{v(-v)}{c^2}} = \frac{2v}{1+v^2/c^2}$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u/c^2}$$

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - v_x u/c^2}$$

$$p'_{ix} = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = m\frac{2v}{1+v^2/c^2} + m(0) = \frac{2mv}{1+v^2/c^2}$$

$p'_{iy} = 0$ سرعت ذره در دستگاه متحرک



$v_{x2} = 0$ $\qquad v'_{x_1} = \frac{0-(-v)}{1-0} = v$

$v_{x_1} = 0$

$v_{y_1} = v$ $\qquad v'_{x2} = \frac{0-(-v)}{1} = v$

$v_{y2} = -v$

$$v'_{y_1} = \frac{v\sqrt{1-u^2/c^2}}{1} = v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad v'_{y2} = -v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$ m جرم سکون ذره

$$P = m'v = \frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad \text{یا} \quad \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

مثال) تکانه‌ی یک پروتون که با سرعت $0/86c$ در حرکت است چقدر است؟

جرم پروتون $= 1/67\times10^{-27}\,kg$

$$P=\frac{1/67\times10^{-27}\times 0/86c}{\sqrt{1-(0/86)^2}}$$

انرژی جنبشی : اگر در سطوحی انرژی سکون ذره را در حالی که حرکت می‌کند نشان دهیم انرژی سکون ندارد. مثل امواج (فوتون)

E_0 : انرژی سکون E : انرژی نسبی

$$K=E-E_0$$

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad E_0=mc^2 \qquad K=\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-mc^2$$

الکترون $E_0=0/511\ MeV$

پروتون $E_0=938\ MeV$

انرژی نسبی $E=\sqrt{(pc)^2+(\underbrace{mc^2}_{E_0})^2}$

اندازه حرکت خطی

برای فوتون $E_0=0 \rightarrow mc^2=0 \Rightarrow E=\sqrt{(pc)^2}=pc$

$$\Rightarrow E=pc$$

مثال) انرژی جنبشی و انرژی کل نسبیتی یک پروتون با انرژی سکون $938\ MeV$ که با سرعت $0/86c$ حرکت می‌کند چقدر است؟

$$P=\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad pc=\frac{mcv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{(mc^2)\frac{v}{c}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$pc=\frac{(938\ MeV)\,0/86}{\sqrt{1-(0/86)^2}}=1580\ MeV$$

$$E=\sqrt{(pc)^2+E_0^2}=\sqrt{(1580)^2+(938)^2}=1837\ MeV$$

$$K=E-E_0=1837-938=899\ MeV$$

مثال) سرعت و تکانه‌ی یک الکترون که انرژی سکون 0/511MeV دارد و انرژی جنبشی 10 MeV را بیابید؟

$E_0 = 0.511\ MeV$

$K = 10\ MeV \qquad K = E - E_0 \Rightarrow E = 10 + 0.511 = 10.511\ MeV$

$E = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2} \qquad E = 10.511\ MeV \qquad p = ? \qquad c = 3\times10^8 \qquad E_0 = 0.511\ MeV$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \Rightarrow 10.511 = \frac{0.511}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \Rightarrow u = ?$$

مثال) یک شتاب‌دهنده باریکه‌ای از مزون‌های K مثبت یا کائون با انرژی سکون 498 MeV و انرژی جنبشی 325 MeV تولید می‌کند. کائون را در نظر بگیرید که به دو مزون P یا پیون با انرژی سکون 140 MeV واپاشید. انرژی جنبشی هر یک از پیون‌ها را در حالت خاصی که در آن پیون‌ها موازی یا پادموازی جهت کائون اولیه حرکت می‌کنند بیابید؟

$$\left.\begin{aligned} E_{0K} &= 498\ MeV \\ K_K &= 325\ MeV \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} K_K &= E_K - E_{0K} \\ E_K &= K_K + E_{0K} = 498 + 325 = 823\ MeV \end{aligned}$$

$$E_K = \sqrt{(pc)^2 + E_{0K}^2} \Rightarrow pc = \sqrt{E_K^2 - E_{0K}^2} = \sqrt{(823)^2 - (498)^2} \qquad p_K c = 655\ MeV$$

$$E_{0\pi} = 140\ MeV \qquad p_K = p_{1\pi} + p_{2\pi} \xrightarrow{\times c} p_K c = p_{1\pi} c + p_{2\pi} c$$

$$655 = p_{1\pi} c + p_{2\pi} c \quad (1) \qquad E_K = E_{1\pi} + E_{2\pi}$$

$$823 = \sqrt{(p_{1\pi}c)^2 + E_{0\pi}^2} + \sqrt{(p_{2\pi}c)^2 + E_{0\pi}^2} \quad (2)$$

$p_{1\pi} = 668\ MeV \qquad p_{2\pi} = -13\ MeV \Leftarrow$ (1) و (2) دو معادله 2 مجهول

$$K_1 = E_1 - E_0 = \sqrt{(p_{\pi}c)^2 + E_{0\pi}^2} - E_{0\pi}$$

$$K_1 = \sqrt{(668)^2 + (140)^2} - 140 = 543 \text{ MeV}$$

$$K_2 = \sqrt{(-13)^2 + (140)^2} - 140 = 0/6 \text{ MeV}$$

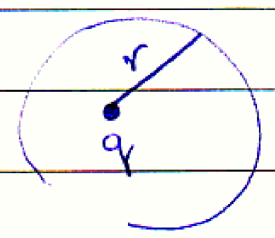
مثال) یک پیون که دارای انرژی سکون 135 MeV است. این پیون به دو پرتو گاما (تابش الکترومغناطیسی که با سرعت نور حرکت می‌کنند) واپاشیده می‌شود. یک پیون را با سرعت ۰/۹۸c در آزمایشگاه حرکت می‌کند، اگر به دو پرتو گاما با انرژی مساوی واپاشیده می‌شود. این دو پرتو با جهت حرکت، زاویه‌های مساوی θ می‌سازند. زاویه θ و انرژی‌های دو پرتو گاما را بیابید. (پرتو گاما انرژی سکون ندارد.)

* صفحه‌ها ۱۰۰

Subject:
Year. Month. Date.

« فصل سوم »

خواص دوگونه امواج الکترومغناطیسی : ۱..



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

میدان مغناطیسی $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\varphi}$

موج تخت :

$$E = E_0 \sin(kz - \omega t + \varphi)$$

$$B = B_0 \sin(kz - \omega t + \varphi)$$

موج الکترومغناطیسی تخت در امتداد محور zها

عدد موج $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ (بسامد زاویه‌ای $\omega = 2\pi\nu$) بسامد

سرعت نور $c = \nu\lambda$

E_0 در راستای محور zها نام تخت یا تخت

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

شار انرژی بردار پوینتینگ

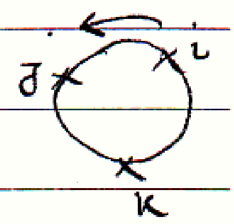
شار انرژی یا انتقال انرژی از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر را با $\vec{S}$ نشان می‌دهند

زمانیکه E و B بر هم عمود باشند مقدار max را دارد.

(x در راستای E)

(y در راستای B)

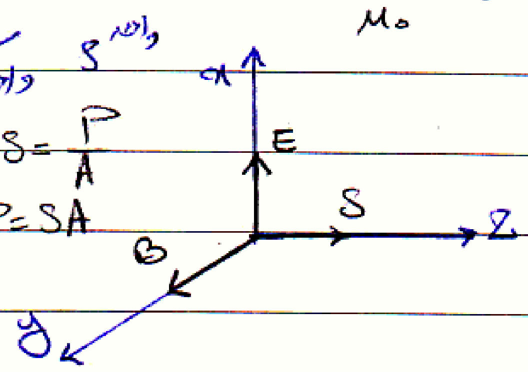
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}E_0B_0\sin^2(kz - \omega t + \varphi)(\hat{i}\times\hat{j})$$



$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}E_0B_0\sin^2(kz - \omega t + \varphi)\hat{k}$$

واحد S انرژی بر واحد سطح و واحد زمان $S = \frac{P}{A}$

$\frac{\text{انرژی}}{\text{زمان}} = $ توان P ، $P = SA$



$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

* دو حالت زیر را در نظر بگیرید : ۱..

الف) شار انرژی امواج الکترومغناطیسی را در نقطه‌ای روی محور z در زمان t و هم توان الکترومغناطیسی را

موج تخت بالا به این گیرنده می‌رسد. تعیین می‌کنیم. گیرنده طوری قرار گرفته است که سطح حساس آن (I) بر محور z عمود است به طوری که حداکثر سیگنال دریافت می‌شود، در این صورت توان ورودی به گیرنده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

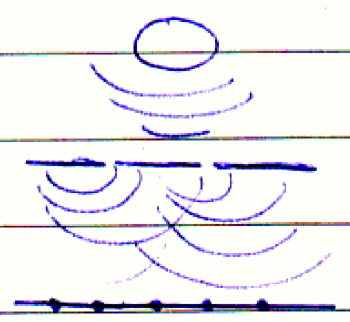
توان $P = \overset{\text{اندازه}}{S} A = \frac{1}{\mu_0} B_0 E_0 \sin^2(kz - \omega t + \varphi) A$

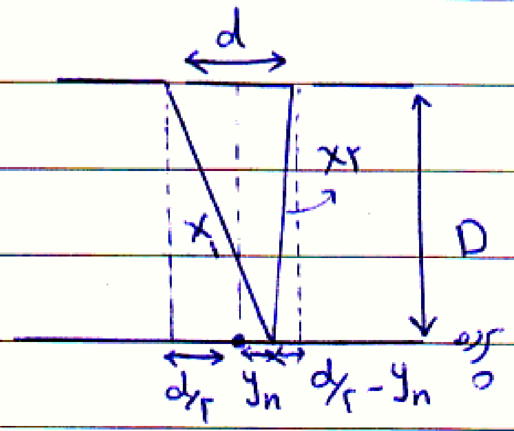
$$P = \frac{E_0^2}{c \mu_0} A \sin^2(kz - \omega t + \varphi)$$

شدت $I = \frac{\overset{\text{میانگین زمانی توان}}{\bar{P}}}{A}$ میانگین زمانی توان $\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\text{توان}}{P}\, dt$

* از این آزمایش دو نتیجه حاصل می‌شود: ۱- شدت (میانگین توان به ازای واحد سطح) با E_0^2 متناسب است، یعنی شدت با مربع دامنه متناسب است. ۲- شدت بر حسب زمان با بسامد 2ν نوسان می‌کند؛ البته چون این افت و خیزها مشاهده نمی‌شود به همین دلیل میانگین زمانی توان در نظر گرفته می‌شود.

$$I = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{E_0^2}{2 \mu_0 c} \qquad \int \sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad \int \sin^2 t\, dt = 1/2$$

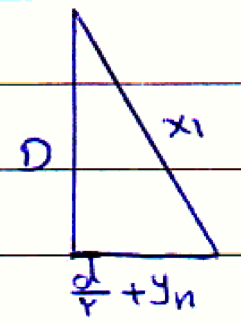




تداخل سازنده $|x_1 - x_2| = n\overset{\text{معرف طول موج}}{\lambda}$ $\quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

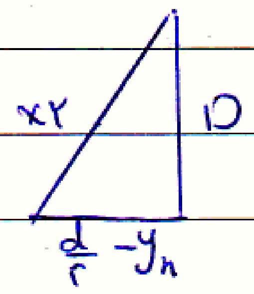
تداخل ویرانگر $|x_1 - x_2| = (n + \frac{1}{2})\lambda$ $\quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

$y_n = ?$



$$x_1^2 = D^2 + \left(\frac{d}{2} + y_n\right)^2$$

$$x_2^2 = D^2 + \left(\frac{d}{2} - y_n\right)^2$$

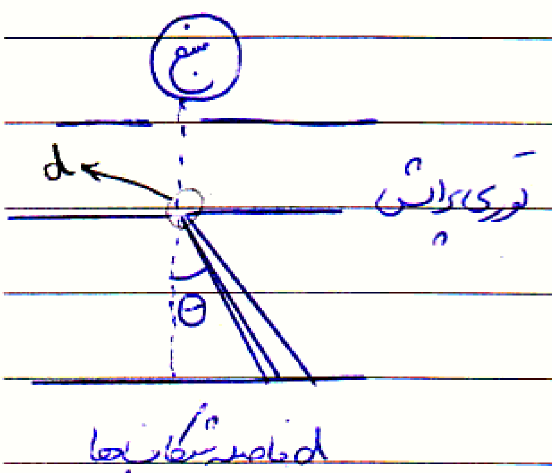


$$x_1^2 - x_2^2 = \left(\frac{d}{2} + y_n\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - y_n\right)^2$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \left(\frac{d^2}{4}\right) + y_n^2 + dy_n - \frac{d^2}{4} - y_n^2 + dy_n$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 2dy_n \qquad x_2 \simeq D \,,\, x_1 \simeq D$$ برای جمع

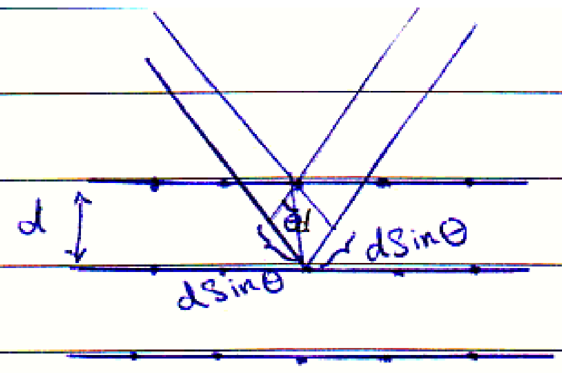
$$\underbrace{|x_1 - x_2|}_{n\lambda}(\cancel{2}D) = \cancel{2}dy_n \Rightarrow y_n = |x_1 - x_2|\frac{D}{d} \Rightarrow y_n = \frac{n\lambda D}{d}$$



$$d\sin\theta = n\lambda$$

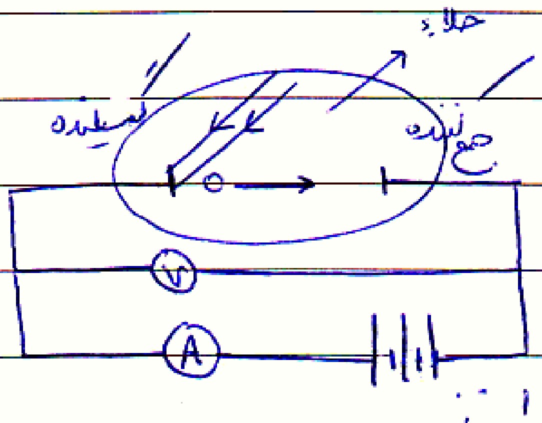
* وسیله‌ی دیگر برای مشاهده‌ی تداخل امواج نور، توری پراش است. مزیت توری پراش، توان تفکیک بالای آن است. با این وسیله می‌توانیم طول موج‌هایی را که بسیار نزدیک به هم هستند تا حد بسیار خوبی از هم جدا کنیم. اما توجه کنید که برای دستیابی به تداخل‌ها در زوایای θ، مثلاً تعدادی که به ازای آن‌ها $\sin\theta$ در گستره‌ی ۰/۳ تا ۰/۵ قرار گیرد باید d از مرتبه‌ی چند برابر طول موج باشد. برای اشعه‌های با طول موج خیلی کوتاه

(پراش اشعه‌ی X و گاما) ساختار شبکه‌ای بلور کریستال است.



براگ $2d\sin\theta = n\lambda$

اثر فوتوالکتریک:



$K_{max} = eV_s \longrightarrow$ پتانسیل ایست

ϕ : تابع کار، حداقل انرژی مورد نیاز برای کندن الکترون از سطح فلز

* نظریه‌ی کلاسیک در مورد اثر فوتوالکتریک:

۱- بیشینه‌ی انرژی جنبشی باید با شدت تابش (بسامد) متناسب باشد. هرچه روشنایی بیشتر باشد، الکترون‌ها باید انرژی جنبشی بیشتری داشته باشند. غ

۲- اثر فوتوالکتریک باید در همه‌ی بسامدها و طول موج‌ها اتفاق بیافتد. غ در بسامد خاصی لازم است تا اثر فوتوالکتریک صورت بگیرد.

۳- نخستین الکترون‌ها باید پس از برخورد اولین تابش به سطح، در بازه‌ی زمانی حدود ثانیه گسیل شوند. غ در همان زمان

در کلاسیک h وجود ندارد.

$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$ برای ذرات کوانتومی

$p = \frac{h}{\lambda}$ ← ثابت پلانک

$\boxed{K = h\nu - \phi}$

کمترین انرژی، فقط الکترون را جدا می‌کند، انرژی برای حرکت ندارد. $K = 0$

$h\nu_s = \phi$ ← بسامد قطع

$\nu_s = \frac{\phi}{h}$

طول موج قطع $\lambda_c = \frac{hc}{\phi}$

$h = 6{,}57 \times 10^{-34}\ j.s$

مثال) الف: انرژی و تکانه (اندازه حرکت) یک فوتون نور سرخ با طول موج 650nm چقدر است؟

ب: طول موج یک فوتون با انرژی 2,4 eV چقدر است؟

الف) $\lambda = 650\,nm = 650\times10^{-9}\,m$ $\boxed{hc = 1240\ eV.nm}$

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\ eV.\cancel{nm}}{650\ \cancel{nm}} = 1,91\ eV$$

$$E = pc \rightarrow p = \frac{E}{c} = 1,91\ \frac{eV}{c}$$

ب) $E = 2,4\ eV$ $\lambda = ?$

$$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow 2,4\,eV = \frac{1240\ eV.nm}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 517\ nm$$

مثال) تابع کار تنگستن 4,52 eV است.

الف) طول موج قطع تنگستن چقدر است؟

ب) بیشینه انرژی جنبشی الکترون‌ها در صورتیکه نور با طول موج 198nm بتابد چقدر است؟ ج) پتانسیل ایست در این حالت چقدر است؟

$\phi = 4,52\ eV$

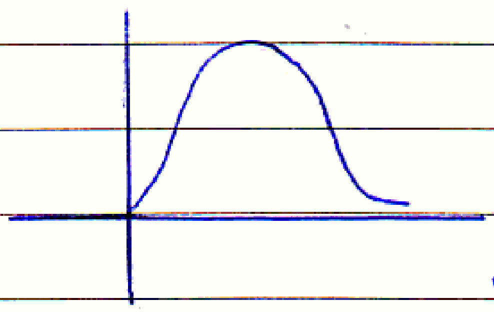
الف) $$\lambda_c = \frac{hc}{\phi} = \frac{1240\ eV.nm}{4,52} = 274\ nm$$

ب) $$K_{max} = h\nu - \phi = \frac{hc}{\lambda} - \phi = \frac{1240}{198} - 4,52 = 1,74\ eV$$

$\lambda = 198\ nm$

ج) $$V_s = \frac{K_{max}}{e} = \frac{1,74\,eV}{1\,e} = 1,74\ V$$

تابش جسم سیاه:



قانون استفان بولتزمن $\rightarrow$ $I = \sigma T^4$ شدت

ثابت بولتزمن $\sigma = 5,670499\times10^{-8}\ \frac{W}{m^2.K^4}$

* طی سری آزمایشات دیده شد در تمام طول موج ها با افزایش دما افزایش می‌یابد یعنی با بالا رفتن دمای یک شی تابان،

انرژی گسیلی آن بیشتر می‌شود. $(I = \sigma T^4)$ این قانون که قانون استفن بولتزمن معروف است.

* قانون جابجایی وین : طول موجی که تابش گسیلی در آن به بیشینه مقدارش می‌رسد با افزایش دما

کاهش می‌یابد یعنی با دما نسبت عکس دارد. $\lambda_{max} \propto \frac{1}{T} \Rightarrow \lambda_{max} . T = 2.898 \times 10^{-3} \ m.K$

* در توجیه طیف تابشی جسم سیاه، پلانک پیشنهاد کرد که یک اتم نوسان کننده فقط می‌تواند انرژی را در بسته‌های گسسته

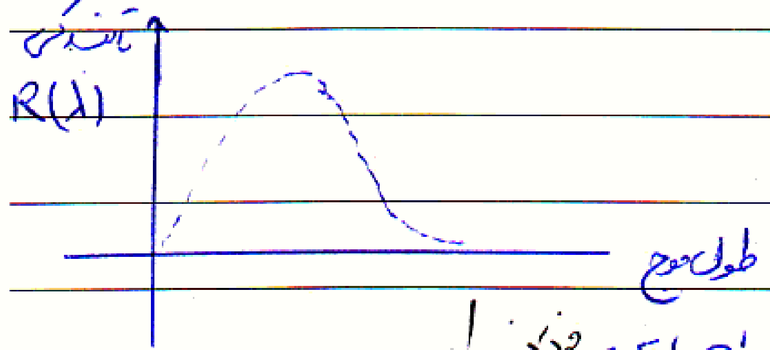
(به نام کوانتوم) جذب و بازگسیل کند. اگر انرژی این کوانتوم‌ها، با بسامد تابش متناسب می‌بود، با زیاد شدن بسامد،

انرژی آن‌ها نیز زیاد می‌شد. چون هیچ موج منفردی نمی‌تواند حاوی انرژی بیش از KT باشد، هیچ موج ایستاده‌ای

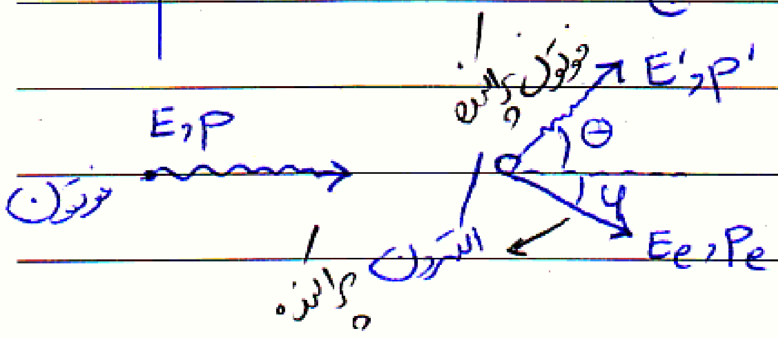
وجود نداشت که انرژی کوانتوم آن بزرگتر از KT باشد. این موضوع شدت تابش در بسامدهای زیاد را عملاً محدود

می‌کرد.

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$



اثر کامپتون :



قانون پایستگی انرژی $\quad E + m_e c^2 = E_e + E'$

قانون پایستگی تکانه $\quad (P_{a_i}) = (P_{a_f})$

$$\begin{cases} P = P_e \cos\phi + P' \cos\theta \\ 0 = P_e \sin\phi - P' \sin\theta \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date.

$(P_{y_i}) = (P_{y_f}) \qquad 0 = P' \sin\theta - P_e \sin\varphi$

$$\begin{cases} ① \; P_e \sin\varphi = P' \sin\theta \Rightarrow P_e^2 \sin^2\varphi = P'^2 \sin^2\theta \\ ② \; P_e \cos\varphi = P - P' \cos\theta \Rightarrow P_e^2 \cos^2\varphi = (P - P'\cos\theta)^2 \end{cases}$$

$$\frac{①}{②} \Rightarrow \boxed{tg\varphi = \frac{P' \sin\theta}{P - P' \cos\theta}}$$

$$① + ② \Rightarrow P_e^2 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = P'^2 \sin^2\theta + P^2 + P'^2 \cos^2\theta - 2PP'\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{P_e^2 = P^2 + P'^2 - 2PP'\cos\theta} \qquad \leftarrow P_e^2 c^2 + (m_e c^2)^2$$

$$E_e = E + m_e c^2 - E' \qquad E_e^2 = (P_e c)^2 + (m_e c^2)^2$$

$$(E + m_e c^2 - E')^2 = \underbrace{P^2 c^2}_{E^2} + \underbrace{P'^2 c^2}_{E'^2} - 2PP'c^2 \cos\theta + (m_e c^2)^2$$

$$\cancel{E^2} + \cancel{(m_e c^2)^2} + \cancel{E'^2} + 2E(m_e c^2) - 2EE' - 2E'(m_e c^2) = \cancel{E^2} + \cancel{E'^2} - 2PP'c^2\cos\theta + \cancel{(m_e c^2)^2}$$

$$2E(m_e c^2) - 2E'(m_e c^2) = 2EE' - 2EE'\cos\theta$$

$$\cancel{2}(m_e c^2)(E - E') = \cancel{2}EE'(1 - \cos\theta) \Rightarrow \frac{E - E'}{EE'} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{\cancel{E}}{\cancel{E}E'} - \frac{\cancel{E'}}{E\cancel{E'}} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta) \qquad \boxed{\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)}$$

$$E = \frac{hc}{\lambda}, \quad E' = \frac{hc}{\lambda'} \qquad \frac{1}{\frac{hc}{\lambda'}} - \frac{1}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$$

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{hc}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)}$$

مثال) برای پرتوهای X به طول موج ۰/۲۴ nm ، پراکندگی کامپتون صورت می‌گیرد و بیشینه پراکنده

در زاویه‌ی ۶۰ نسبت به باریکه‌ی ورودی مشاهده می‌شود، بیابید:

الف) طول موج پرتوهای X پراکنده

ب) انرژی فوتون‌های پرتو X پراکنده

ج) انرژی جنبشی الکترون‌های پراکنده

د) جهت حرکت الکترون‌های پراکنده

$E_0 = m_e c^2 = 0/511\ MeV = 511 \times 10^3\ eV$ برای الکترون

$\lambda = 0/024\ nm$

$\theta = 60^\circ$

الف) $\lambda' = ?$ $\qquad \lambda' - \lambda = \dfrac{hc}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$

$$\lambda' = 0/024 + \frac{1240\ ev.nm}{511 \times 10^3\ ev}(1 - \cos 60) \Rightarrow \lambda' = 0/0252\ nm$$

ب) $E' = \dfrac{hc}{\lambda'} = \dfrac{1240}{0/0252} = 5141\ ev$

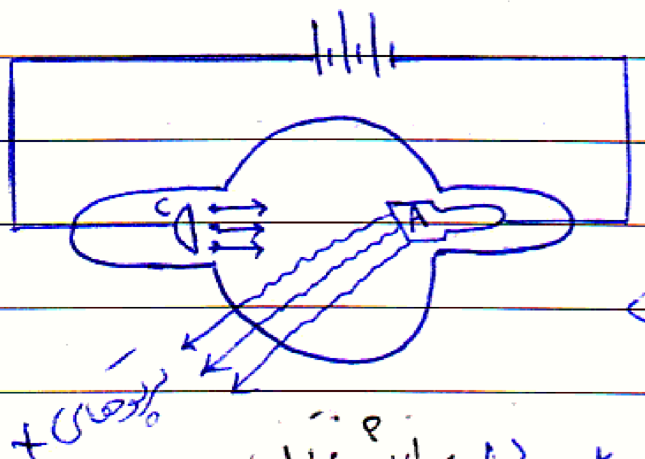
ج) $\boxed{K_e = E - E'} = 5167 - 5141 = 26\ ev \qquad E = \dfrac{hc}{\lambda} = 5167\ ev$

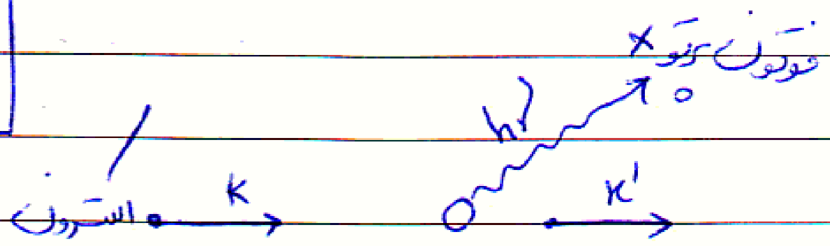
د) $tg\varphi = \boxed{\dfrac{P'\sin\theta \times c}{P - P'\cos\theta \times c} = \dfrac{E'\sin\theta}{E - E'\cos\theta}} = \dfrac{5141 \times \sin 60}{5167 - 5141 \cos 60} \qquad tg\phi = 1/715$

$\phi = 59/7^\circ$

فرآیند تابش ترمزی و تولید اشعه‌ی X :

فوتون + الکترون ← الکترون





انرژی فوتون $\Leftarrow h\nu = K - K'$

بیشترین انرژی فوتون $\qquad h\nu_{max} = K \Rightarrow \dfrac{hc}{\lambda_{min}} = K$

$K' = 0$

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{k} = \frac{hc}{eV} \qquad k = eV$$

فرایند تولید زوج :

$$h\nu = \underbrace{E_+}_{\text{انرژی پوزیترون}} + \underbrace{E_-}_{\text{انرژی الکترون}}$$

فوتون گاما در اثر برخورد، زوج الکترون و پوزیترون را ایجاد می‌کند.

$$h\nu = (m_e c^2 + K_+) + (m_e c^2 + K_-)$$

فوتون چیست؟ ویژگی‌های آن را بنویسید؟

تمرینات دوره ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۲۲ - ۲۴ - ۱۴ - ۸ -

را نمی‌خواهد ۴ - ۲ -

- فوتون‌ها مانند موج الکترومغناطیسی، با سرعت نور حرکت می‌کنند.

- جرم و انرژی سکون آن‌ها صفر است.

- حامل انرژی و تکانه‌اند. بین آن‌ها و بسامد و طول موج موج الکترومغناطیسی رابطه‌های $E = h\nu$ و $p = \frac{h}{\lambda}$ برقرار است.

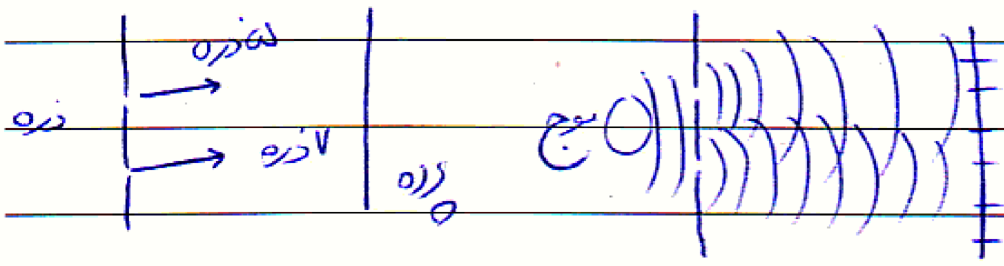
- در تشکیل و جذب تابش، فوتون‌ها می‌توانند تولید یا نابود شوند.

- فوتون‌ها مانند الکترون‌ها می‌توانند با سایر ذرات برخوردهای ذره گونه انجام دهند.

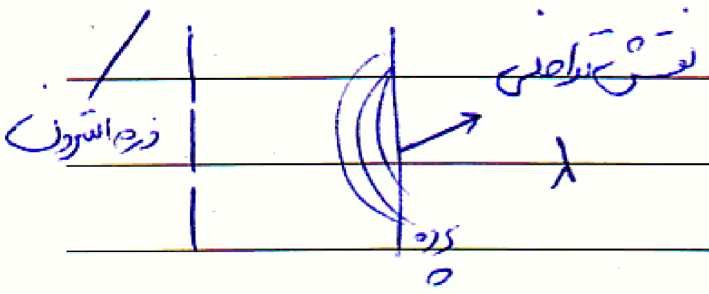
سایر خواص فوتون‌ها از مطالعه شرح حتی آنها به دست می‌آید. از جمله آن‌ها می‌توان نقش فوتون در انتقال نیروی الکترومغناطیسی و انحراف آن‌ها در میدان گرانشی را نام برد.

فصل ۴) خواص موج گونه ذرات

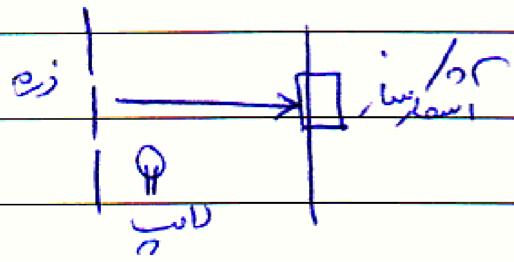
در کلاسیک :



در کوانتوم :



نقش تداخلی که به وسیله نور (لامپ) از بین می‌رود.



رابطه عدم قطعیت برای امواج کلاسیک :

$y = y_1 \sin k_1 x$ $\lambda = \frac{2\pi}{k_1}$

$y = y_1 \sin k_1 x + y_2 \sin k_2 x \rightarrow$ (دو موج را با هم جمع)

در فیزیک کلاسیک : $\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$ از مرتبه یک است.

Δk خطا در اندازه‌گیری k

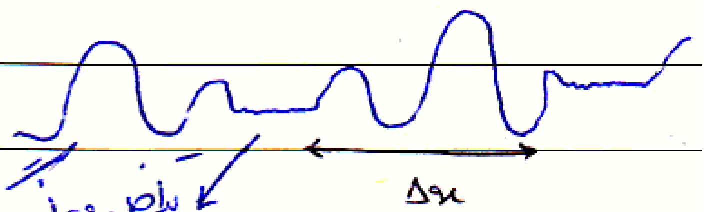
Δ خطا

اگر بتوانیم مکان را دقیق اندازه بگیریم، نسبت دیگر را نمی‌توانیم اندازه بگیریم :

$\Delta x \to \infty$

$\Delta k \sim \frac{1}{\infty} \to \Delta k = 0$

$\Delta \omega \cdot \Delta t \sim 1$ انرژی و زمان



بسته موج [illegible] (امواج [illegible])

مثال ۱) در جریان یک اندازه‌گیری که [illegible]، طول موج [illegible] 200 cm، [illegible] :

حداقل عدم قطعیت در طول موج را [illegible] از این اندازه‌گیری به دست آید چقدر است؟

$$\Delta x \cdot \Delta k \sim 1 \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$$

[illegible] k را با خطا

$$\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta\lambda \qquad \Delta x \cdot \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta\lambda \sim 1 \Rightarrow \Delta\lambda \sim \frac{\lambda^2}{2\pi \Delta x}$$

$\lambda = 20\ cm$

$\Delta x = 200\ cm$

$$\Delta\lambda \sim \frac{(20)^2}{2\pi(200)} \rightarrow \Delta\lambda \sim 0.3\ cm$$

($\pi \to 3.14$)

روابط عدم قطعیت هایزنبرگ :

$\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$

ثابت پلانک

تکانه $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hk}{2\pi}$

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$\frac{h}{2\pi} = \hbar$

$p = \hbar k \Rightarrow k = \frac{p}{\hbar}$

p اندازه حرکت خطی (تکانه خطی)

$$\Delta k = \frac{\Delta p}{\hbar} \Rightarrow \Delta x \cdot \frac{\Delta p}{\hbar} \sim 1 \Rightarrow$$

$$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$$

$\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$

$\Delta \omega \cdot \Delta t \sim 1$

$$E = h\nu = \frac{h\omega}{2\pi} = \hbar\omega \Rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\Delta E}{\hbar}$$

$$\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \frac{\Delta E}{\hbar} \cdot \Delta t \sim 1 \Rightarrow \Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$$

مثال ۲) الکترونی با سرعت $3.6\times10^6\ m/s$ در جهت x حرکت می‌کند. می‌توانیم سرعت آن را با دقت ۰٫۱٪ اندازه بگیریم.

الف) با چه دقتی می‌توانیم به طور همزمان مکان آن را هم تعیین کنیم؟ ($\hbar = 1.05\times10^{-34}$ ژ.ث)

ب) در مورد مکان آن در جهت y چه می‌توانیم بگوییم؟

$v = 3.6\times10^6\ m/s$

جرم الکترون $m = 9.11\times10^{-31}\ kg$

$P_x = mV_x = 9.11\times10^{-31} \times 3.6\times10^{6} = 3.3\times10^{-24}$ kgm/s

$\Delta P_x = \%1\, p_x = 3.3\times10^{-26}$ kgm/s

$\Delta x \cdot \Delta P_x \sim \hbar \Rightarrow \Delta x \sim \dfrac{\hbar}{\Delta P_x}$ $\quad \Delta x \sim \dfrac{1.05\times10^{-34}}{3.3\times10^{-26}} = 3.2\ nm$

ب) چون در جهت x حرکت می‌کند پس در جهت y مولفه‌ای ندارد دیگر $V_y=0 ,\ \Delta P_y = 0 \Rightarrow \Delta y = \infty$

پس در مورد حرکت کاملاً هیچ اطلاعی نداریم

$P_y = mV_y = 0 \Rightarrow \Delta y \cdot \Delta P_y \sim \hbar \Rightarrow \Delta y \sim \dfrac{\hbar}{0} \Rightarrow \Delta y = \infty$

$\Delta x = \infty \qquad \Delta x = L \qquad P$ میانگین

$\Delta P_x = 0 \qquad \Delta P_x \sim \dfrac{\hbar}{L} \qquad \langle P \rangle = 0$

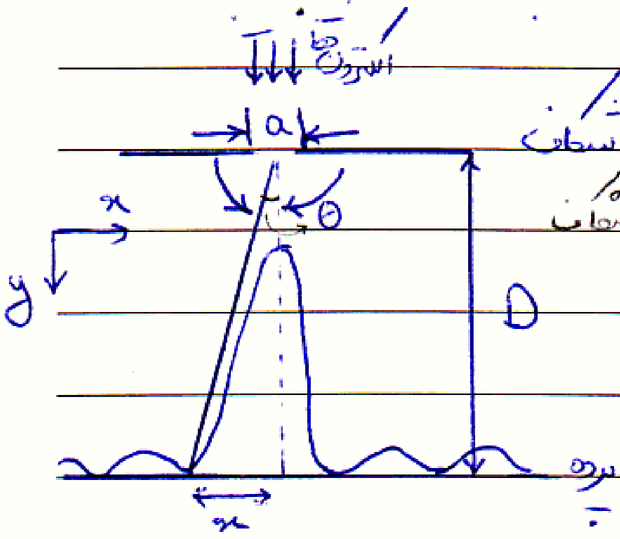
$\Delta x \cdot \Delta P_x \sim \hbar \Rightarrow \Delta P_x \sim \dfrac{\hbar}{\infty} = 0$

$$\boxed{\sigma_A = \sqrt{(A^2)_{\text{میانگین}} - (A_{\text{میانگین}})^2}} \qquad \Delta P_x = \sqrt{\langle P_x^2\rangle - (\langle P\rangle)^2} \Rightarrow$$

اول به توان ۲ بعد میانگین — اول میانگین بعد به توان ۲

$$\boxed{\Delta P_x = \sqrt{\langle P_x^2 \rangle}}$$

مثال) باریکه‌ای از الکترون‌ها که دارای انرژی جنبشی معین هستند در جهت y حرکت می‌کنند. از شکافی به پهنای a می‌گذرند. عدم قطعیت در مولفه x تکانه یکی از الکترون‌ها را پس از عبور از شکاف بیابید.



شکاف: قبل از ورود به شکاف $P_x = 0 \quad \Delta P_x = 0 \Rightarrow \Delta x = \infty$

بعد از ورود به شکاف $\Delta x = a \quad \Delta P_x \sim \dfrac{\hbar}{a}$

$\Delta P_y = \hbar k \quad k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \quad P_y = \hbar k$

$\sin\theta \sim tg\,\theta = \dfrac{P_x}{P_y} = \dfrac{\hbar/a}{\hbar k} = \dfrac{1}{ak} = \dfrac{\lambda}{2\pi a}$

چون θ زاویه کوچکی است

$a \sin\theta = \dfrac{\lambda}{2\pi} \rightarrow$ برای اولین کمینه روی پرده

مثال) در واپاشی بتازا، الکترون‌ها از هسته‌ی اتم خارج می‌شوند. فرض می‌کنیم الکترون‌ها پیش از گسیل در هسته‌ی مادر ایستاده‌اند و گاهی یکی از آن‌ها می‌گریزد و در آزمایشگاه مشاهده می‌شود. قطر هسته را تقریباً $1\times10^{-14}\,m$ بگیرید و با استفاده از اصل عدم قطعیت کمترین انرژی جنبشی این الکترون‌ها را برآورد کنید؟

فمتومتر

$\hbar c = 197\ MeV.fm$

$1\,fm = 10^{-15}\,m$

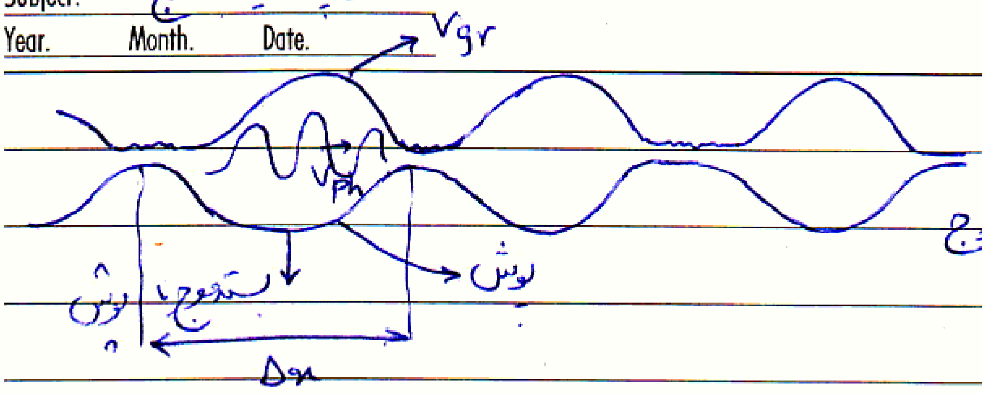
$E_0 = 0/511\ MeV \qquad \Delta x = 1\times10^{-14}\,m = 10\,fm$

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \sim \hbar \Rightarrow \Delta p_x \sim \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar c}{c\Delta x} \qquad \Delta p_x \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \Rightarrow c\Delta p_x \sim \frac{\hbar c}{\Delta x}$$

$$c\Delta p_x \sim \frac{197}{10} = 19/7\ MeV \qquad K = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2} - E_0$$

$$K = \sqrt{(19/7)^2 + (0/511)^2} - (0/511) = 19\ MeV \qquad c\Delta p_x = cp_x$$

Subject: سرعت گروه یا پوش یا بسته موج
Year. Month. Date.



سرعت فاز: سرعت تک تک امواج داخل بسته موج V_{ph}

V_{gr} : سرعت بسته موج

برای اینکه یک موج سینوسی بصورت تابعی برحسب زمان باشد ؛ $y = A\cos(kx - \omega t)$

سینوسی ثابت $\longrightarrow$ $y = A\cos kx$

بسته‌های موج :

$$\underbrace{y_1 = A\cos k_1 x}_{\text{عدد موج}} \qquad \Delta k = k_2 - k_1$$

$$k_2 = \Delta k + k_1$$

$$\begin{cases} y_1 = A\cos k_1 x \\ y_2 = A\cos k_2 x \end{cases}$$

تداخل

$$y = y_1 + y_2 = A\cos k_1 x + A\cos k_2 x$$

$$y = A(\cos k_1 x + \cos k_2 x)$$

$$y = 2A\left(\cos\frac{(k_1+k_2)}{2}x \cdot \cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)x\right)$$

$$y = 2A\left(\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x \cdot \cos\left(\frac{\Delta k}{2}\right)x\right)$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad y = A\cos(kx - \omega t)$$

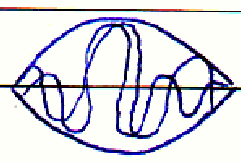
موج سینوسی :

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\left(\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

$$V_{\text{گروه}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \qquad \frac{\Delta k}{2}\left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right)$$

$$V_1 = \frac{\omega_1}{k_1} \qquad V_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad V_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

$$V_2 = \frac{\omega_2}{k_2}$$



تمرینات ۲، ۵، ۶، ۷، ۱۱، ۱۴، ۱۵، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۲، ۳۱، ۳۲، ۳۳

Subject:

Year. Month. Date.

دوبروی $p=\frac{h}{\lambda}$

انرژی $\boxed{E=\hbar\omega}$ $\boxed{\text{تکانه } p=\hbar k}$

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d\omega}{dE}\times\frac{dE}{dp}\times\frac{dp}{dk}=\frac{1}{\hbar}\times\frac{dE}{dp}\times\hbar=\frac{dE}{dp}\qquad \boxed{v_g=\frac{dE}{dp}}$$

$$E=\hbar\omega\longrightarrow\frac{dE}{d\omega}=\hbar\qquad p=\hbar k\Longrightarrow\frac{dp}{dk}=\hbar$$

$$E=\frac{p^2}{2m}\longrightarrow\frac{dE}{dp}=\frac{2p}{2m}=\frac{p}{m}\qquad E=\frac{p^2}{2m}\Longrightarrow dE=\frac{2p\,dp}{2m}=\frac{p}{m}dp$$

سرعت گروه $v_g=\frac{dE}{dp}=\frac{p}{m}=\frac{mv}{m}=v$ سرعت ذره

فصل ۵

معادله شرودینگر

در فیزیک تابع موج نوسانی دارد

* ویژگی‌ها:

۱- در معادله شرودینگر، اصل پایستگی انرژی باید صادق باشد. (منظور از انرژی، انرژی مکانیکی است.) نسبیتی نیست

$E=K+U$

انرژی مکانیکی، انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل

۲- این معادله باید با فرض دوبروی سازگار باشد.

$$p=\frac{h}{\lambda}\Longrightarrow\lambda=\frac{h}{p}$$

$$p=\hbar k\xrightarrow[\text{موج دوبروی ذره آزاد}]{\text{انرژی جنبشی مربوط}}E=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2k^2}{2m}\qquad K=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

انرژی جنبشی، عدد موج

$U=0$ $\boxed{E=K}$

۳- باید جواب‌های آن شبیه تابع موج در فیزیک باشد. تابع موج

$$\psi(x,t)=A\sin(kx-\omega t)$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}\qquad\omega=2\pi\nu$$

Subject:
Year. Month. Date.

p انرژی جنبشی K k عدد موج

$$t=0 \rightarrow \psi(x,0)=\psi(x)=A\sin kx$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx}=Ak\cos kx \qquad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=-Ak^2\sin kx=-k^2(A\sin kx)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-k^2\psi(x)=-\frac{2mK}{\hbar^2}\psi(x)$$

انرژی جنبشی $K=\frac{\hbar^2k^2}{2m} \Longrightarrow k^2=\frac{2mK}{\hbar^2}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=K\psi(x)=(E-U)\psi(x)$$

$$E=K+U \Longrightarrow K=E-U$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+U\psi(x)=E\psi(x)}$$ فرم روشن معادله شرودینگر

معادله فوق، معادله‌ای یک بعدی مستقل از زمان شرودینگر است چون فقط برحسب x است.

احتمال و بهنجارش:

چگالی احتمال $p(x)=|\psi(x)|^2$

$$\text{احتمال}=\int p(x)\,dx=\int|\psi(x)|^2\,dx$$ $\psi(x)=A\sin kx$

شرط بهنجارش $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2\,dx=1}$$

همیشه $-\infty$ تا $+\infty$ نیست اگر در مورد ذره آزاد باشد یعنی $-\infty$ تا $+\infty$ است چون ذره هر جایی می‌تواند حرکت کند.

مقدار میانگین $$\langle x\rangle=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,x\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx}$$

اگر عبارت مورد نظر تابعی باشد ⟸ خودش را جا می‌شود

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\, x\, dx$$

با هم برابرند

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) f(x)\, dx$$

ذره‌ی آزاد در یک بعد:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U\,\psi(x) = E\,\psi(x)$$

ذره‌ی آزاد تحت تأثیر هیچ پتانسیلی نیست.

$U = 0$ برای ذره آزاد

ذره‌ی مقید تحت تأثیر پتانسیل است

پس پتانسیل یعنی محدودیتی بر ذره‌ها از خارج اعمال

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - E\,\psi(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \overbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}^{k^2}\psi(x) = 0$$

$E > 0$ آزاد

$E = 0$

$E < 0$

هسته

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad K = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad E = \cancel{U} + K \Rightarrow E = K$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0}$$

خارج

$$\psi_1(x) = A\sin(kx)$$

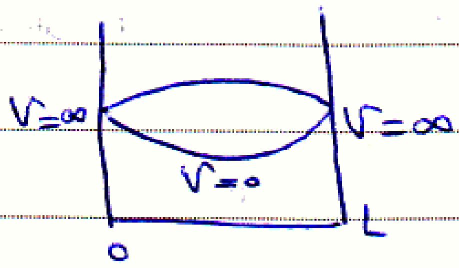
$$\psi_2(x) = B\cos(kx)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U\psi(x) = E\,\psi(x) \Longrightarrow \psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) =$$

$$U = 0 \quad E > 0 \qquad A\sin kx + B\cos kx$$

ذره در جعبه ۱ بعدی :

$$U(x)=\begin{cases}0 & 0<x<L\\ \infty & x>L\ ,\ x<0\end{cases}$$



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U\psi(x)=E\psi(x)\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=E\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)=0\Longrightarrow K^2=\frac{2mE}{\hbar^2}\Longrightarrow E=\frac{\hbar^2K^2}{2m}=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$\begin{cases}\psi_1(x)=A\sin Kx \longrightarrow x=0 \Rightarrow \psi(0)=0\\ \psi_2(x)=B\cos Kx \longrightarrow x=0 \Rightarrow \psi(0)=B\end{cases}$$ غ ق ق

$$\psi(x)=A\sin Kx\ \xrightarrow[\psi(L)=0]{x=L}\ \sin KL=0=\sin n\pi\quad (n=1,2,\dots)$$

$$KL=n\pi\Longrightarrow K=\frac{n\pi}{L}$$

$$\int_0^L|\psi(x)|^2dx=1\Longrightarrow A^2\int_0^L \sin^2Kx\,dx=1$$

$$\frac{A^2}{2}\int_0^L(1-\cos 2Kx)\,dx=1\longrightarrow A^2\Big(L-\frac{1}{2K}\underbrace{\sin 2KL}_{K=\frac{n\pi}{L}}-0\Big)=1$$

$$\frac{A^2}{2}L=1\longrightarrow A^2=\frac{2}{L}\Longrightarrow A=\sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\Longrightarrow E=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\qquad\qquad \psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$n=1,2,3,\dots$

$n=1 \longrightarrow E_1 = \dfrac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = E_0$ انرژی حالت پایه

$n=2 \longrightarrow E_2 = \dfrac{4\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = 4E_0$

$n=3 \longrightarrow E_3 = 9E_0$ حالت‌های برانگیخته

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi}{L} x$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi}{L} x$$

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{3\pi}{L} x$$

احتمال حضور ذره در اولین حالت برانگیخته در بازه‌ی $(0 < x < L/4)$

$$\int_0^{L/4} |\psi_2(x)|^2 dx = \int_0^{L/4} \frac{2}{L} \sin^2 \frac{2\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{2}{L} \times \frac{1}{2} \int_0^{L/4} \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{L}\right) dx =$$

مثال) الکترونی در یک ناحیه‌ی انرژی به طول $1\times10^{-10}\ m$ به دام افتاده است.

الف) برای برانگیختن الکترون از حالت پایه به نخستین حالت برانگیخته چقدر انرژی باید اعمال شود؟

ب) در حالت پایه، احتمال یافتن الکترون در ناحیه‌ی $x = 0/9\times10^{-10}\ m$ تا $x = 0/11\times10^{-10}\ m$ چیست؟

ج) در نخستین حالت برانگیخته، احتمال یافتن الکترون بین $x = 0$ و $x = 0/25\times10^{-10}\ m$ چقدر است؟

$L = 1\times 10^{-10}\ m$

$n=1$

$n=2$

الف) $\begin{cases} E_1 = E_0 \\ E_2 = 4E_0 \end{cases} \Rightarrow E_2 - E_1 = 4E_0 - E_0$

$E_0 = \dfrac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = 37\,eV$

$\Delta E = 3E_0$

$\Delta E_{1,2} = 3\times 37$

$m = 9.11\times 10^{-31}\ kg$

$\Delta E_{12} = 111\,eV$

$\hbar = 1.05\times 10^{-34}\ J.s$

ب) $P = \displaystyle\int_{x=0.09\times 10^{-10}}^{x=0.11\times 10^{-10}} |\psi_1(x)|^2\,dx = \frac{2}{L}\int_{0.09\times 10^{-10}}^{0.11\times 10^{-10}} \sin^2\frac{\pi}{L}x\,dx = 0.38\ \%$

ج) $P = \displaystyle\int_{x=0}^{x=0.25\times 10^{-10}} |\psi_2(x)|^2\,dx = \frac{2}{L}\int_0^{0.25\times 10^{-10}} \sin^2\frac{2\pi}{L}x\,dx = 0.25\ \%$

مثال) نشان دهید که مقدار میانگین x در مسئله ذره در جعبه بدون توجه به حالتهای کوانتومی عبارت است از: $L/2$.

$\langle x\rangle = \displaystyle\int_0^L |\psi_n(x)|^2\,x\,dx \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\frac{n\pi}{L}x$

$\langle x\rangle = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L \left(\sin^2\frac{n\pi}{L}x\right)x\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L \left(1-\cos 2\frac{n\pi}{L}x\right)x\,dx$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \qquad \langle x\rangle = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \left[x\,dx - x\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx\right]$

$\langle x\rangle = \dfrac{1}{L}\left[\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^L - \displaystyle\int_0^L x\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx\right]$

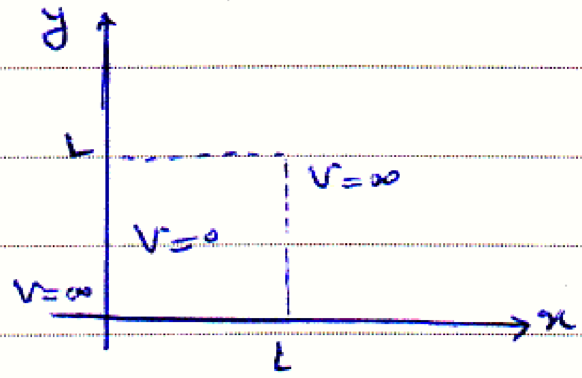
$\langle x\rangle = \dfrac{1}{L}\dfrac{L^2}{2} - \displaystyle\int_0^L x\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx = \frac{L}{2}$

با توجه به مراحل صفر می‌شود

$$\int_0^L x\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx \quad \begin{cases} x=u \longrightarrow dx=du \\ \cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx=dv \Rightarrow \frac{1}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{L}x=v \end{cases}$$

$$=\cancel{\frac{xL}{2n\pi}\sin\frac{n\pi L}{x}}\Big|_0^L-\frac{L}{2n\pi}\underline{\int \sin\frac{2n\pi}{L}x\,dx}-\cos\frac{2n\pi}{L}x\Big|_0^L=0$$

ذره در جعبه دو بعدی:



$$U(x,y)=\begin{cases}0 & 0\leq x\leq L\ ,\ 0\leq y\leq L \\ \infty & \text{در جاهای دیگر}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\psi(x=0)=\psi(x=L)=0 \\ \psi(y=0)=\psi(y=L)=0\end{cases}$$ شرایط مرزی

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r)-\overset{U}{\cancel{V}}\psi(r)=E\psi \qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\overset{f(x)g(y)}{\psi(x,y)}-\underbrace{\overset{U}{\cancel{V}}(x,y)\psi(x,y)}_{0}=E\psi(x,y)$$

$$\psi(x,y)=f(x)g(y)\ ,\quad E=E_x+E_y$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\cdot g(y)+\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}\cdot f(x)\right]=E\,f(x)g(y)$$

طرفین تقسیم بر $f(x)g(y)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{g(y)}\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}\right]=E_x+E_y$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}=E_x f(x)\ ,\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 g(y)}{dy^2}=g(y)E(y)$$

$$f(x)=A_1\sin k_1x+B_1\cos k_1x\longrightarrow f(x)=A_1\sin k_1x$$

$$g(y) = A_2 \sin k_2 y + B_2 \cos k_2 y \longrightarrow g(y) = A_2 \sin k_2 y$$

$$f(x=L)=0 \longrightarrow A_1 \sin k_1 L = 0 \longrightarrow \sin n_x \pi \qquad k_1 L = n_x \pi$$

$$k_1 L = n_x \pi \longrightarrow k_1 = n_x \frac{\pi}{L}$$

$$f(x) = A_1 \sin \frac{n_x \pi x}{L} \xrightarrow{A_1 = \sqrt{\frac{2}{L}}} f(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n_x \pi x}{L}$$

$$g(y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n_y \pi y}{L} \qquad \psi(x,y) = f(x)\, g(y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n_x \pi x}{L} \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n_y \pi y}{L}$$

$$\psi(x,y) = \frac{2}{L} \sin \frac{n_x \pi x}{L} \sin \frac{n_y \pi y}{L}$$

$$E_x = \frac{n_x^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \quad E_y = \frac{n_y^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \Longrightarrow E = E_x + E_y$$

$$\boxed{E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2) \qquad n_x, n_y = 1, 2, 3, \ldots}$$

$$\boxed{\psi(x,y) = \frac{2}{L} \sin \frac{n_x \pi x}{L} \sin \frac{n_y \pi y}{L}}$$

$$n_x = 1,\ n_y = 1 \longrightarrow \begin{cases} \psi(x,y) = \frac{2}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \\ E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (1+1) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{mL^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_x = 1,\ n_y = 2 & \psi_{1,2}(x,y) = \frac{2}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{L}, \quad E = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \\ n_x = 2,\ n_y = 1 & \psi_{2,1}(x,y) = \frac{2}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L}, \quad E = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \end{cases}$$

حالت واگن

* حالت واگن (تبهگن) : به حالتی گفته می‌شود که به ازای یک مقدار انرژی چند تابع موج وجود داشته باشد.

حالت واگنی فقط برای سیستم‌های متقارن است. ←

$$E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{L^2}+\frac{n_y^2}{L'^2}\right)$$

مثال) انرژی حالت پایه یک ذره در یک چاه یک بعدی نامتناهی ۲٫۴ eV است. اگر پهنای چاه ۲ برابر شود انرژی حالت پایه چه مقدار می‌شود؟

$$E=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$n=1\longrightarrow E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$L'\longrightarrow 2L\qquad E'=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m(2L)^2}=\frac{1}{4}E_1$$

مثال) ذره‌ای در یک جعبه دو بعدی به طول L و پهنای 2L محبوس است. مقادیر انرژی عبارت اند:

$$E=\overbrace{\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}}^{K}\left(n_x^2+\frac{n_y^2}{4}\right)$$

۲ تا از پایین‌ترین ترازهای واگن را بیابید؟

حالت نامتقارن است باید n ها را طوری انتخاب کنیم که سیستم متقارن شود.

$$\psi(x,y)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\frac{2}{L'}}\sin\frac{n_x\pi x}{L}\sin\frac{n_y\pi y}{L'}$$

$$\psi(x,y)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n_x\pi x}{L}\sqrt{\frac{2}{2L}}\sin\frac{n_y\pi y}{2L}$$

$$\begin{cases} n_x=1,\ n_y=4\longrightarrow 1+4=5K & E=5E_0\\ n_x=2,\ n_y=2\longrightarrow 4+1=5K & E=5E_0\end{cases}$$

فصل ۵ . نوسانگر هماهنگ ساده (یک بعدی)

$$F=-Kx \longrightarrow U=-\int F\,dx=\frac{1}{2}Kx^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{1}{2}Kx^2\psi=E\psi$$

$$\psi(x)=Ae^{-ax^2} \qquad \frac{d\psi(x)}{dx}=-2Aaxe^{-ax^2}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=-2Aae^{-ax^2}+(-2Aax)(-2ax)e^{-ax^2}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=-2Aae^{-ax^2}+4Aa^2x^2e^{-ax^2}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-2a+4a^2x^2)A\cancel{e^{-ax^2}}+\frac{1}{2}kx^2A\cancel{e^{-ax^2}}=EA\cancel{e^{-ax^2}} \Rightarrow \frac{\hbar^2a}{m}-\frac{2\hbar^2a^2x^2}{m}+\frac{1}{2}kx^2=E$$

$$\frac{\hbar^2a}{m}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}k-\frac{2\hbar^2a^2}{m}\right)}_{0}x^2=E+0\times x^2$$

$$\frac{1}{2}k-\frac{2\hbar^2a^2}{m}=0$$

$$\frac{1}{2}k=\frac{2\hbar^2a^2}{m}\longrightarrow a^2=\frac{mk}{4\hbar^2}$$

$$a=\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}$$

$$E=\frac{\hbar^2a}{m}$$

$$E=\frac{\cancel{\hbar^2}}{m}\,\frac{\sqrt{mK}}{2\cancel{\hbar}}$$

$$E=\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{K}{m}}=\frac{1}{2}\hbar\omega_0$$ انرژی پایه نوسانگر

$$\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (n=0,1,\ldots,\ldots)$$

فقط برای نوسانگر ساده کوانتومی

$n=0$ برقرار.

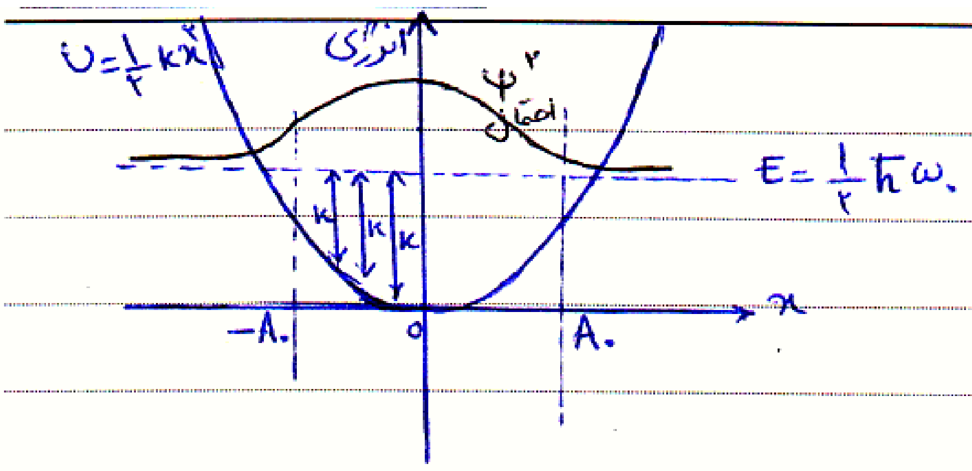
$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \omega=2\pi\nu$$

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}$$

$$T=\frac{1}{\nu}=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$\psi(x)=Ae^{-ax^2} \qquad \boxed{a=\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



$$\int|\psi(x)|^2dx=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2dx=1 \Rightarrow A^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2ax^2}dx=1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ *$$

$$A^2\sqrt{\frac{\pi}{2a}}=1 \Rightarrow A^2=\sqrt{\frac{2a}{\pi}} \Rightarrow A=\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}$$

$$a=\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar} \Rightarrow A=\left(\frac{\cancel{4}\sqrt{mk}}{\cancel{4}\hbar\pi}\right)^{1/4}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_0^2=\frac{k}{m} \qquad A=\left(\frac{\sqrt{mk}}{\pi\hbar}\right)^{1/4}=\left(\frac{\sqrt{m^2\omega_0^2}}{\pi\hbar}\right)^{1/4}=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

$$k=m\omega_0^2$$

$$A=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

$$\psi(x)=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi(x,t)=\psi(x)e^{-i\omega t}$$

$$\psi(x,t)=\left(A'e^{ikx}+B'e^{-ikx}\right)e^{-i\omega t}$$

$$\psi(x,t)=A'e^{i(kx-\omega t)}+B'e^{-i(kx+\omega t)}$$

ورودی $\xrightarrow{A'}$

$\xrightarrow{A'}$ $\xleftarrow{B'}$ $\xrightarrow{C'}$

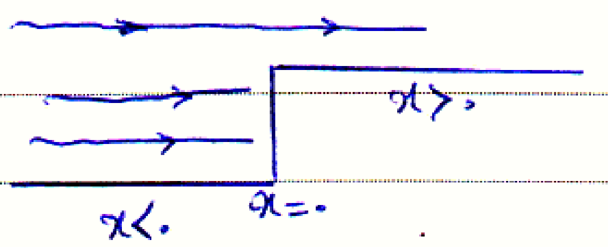
بازتاب $B' \longleftarrow$

توان بازتاب $=\left|\frac{B'}{A'}\right|^2$

توان ترابت $=\left|\frac{C'}{A'}\right|^2 \longleftarrow$

پله‌ها و سدها :

پله $E > U_0$



$$\begin{cases} x<0 & \psi_1(x) = \underbrace{Ae^{ik_1 x}}_{\text{ورودی}} + \underbrace{Be^{-ik_1 x}}_{\text{بازتابی}} \\ x>0 & \psi_2(x) = \underbrace{Ce^{ik_2 x}}_{\text{عبوری}} + De^{-ik_2 x} \end{cases}$$

چون مانعی وجود ندارد که بخواهد بازتاب شود. $\Longrightarrow D=0$

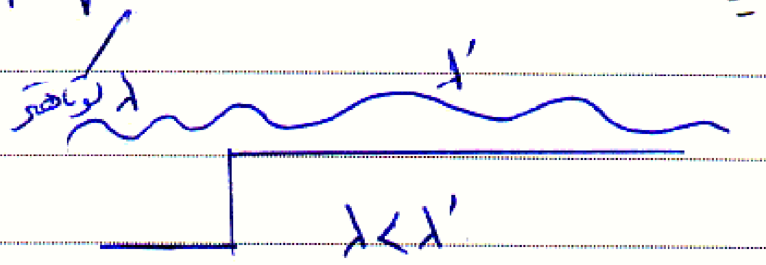
$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad , \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}$$

$$\text{توان بازتاب} = \left|\frac{B}{A}\right|^2 \qquad \text{توان عبور} = \left|\frac{C}{A}\right|^2$$

$$K = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow p = \sqrt{2mK}$$

چون موج‌های کوتاه‌تر انرژی بیشتری دارند.

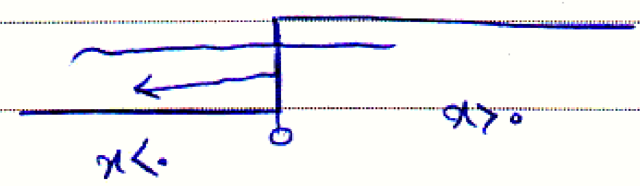
$$p = \frac{h}{\lambda}$$



پله $E < U_0$

از نظر کلاسیک عبور نمی‌کند اما از نظر کوانتوم عبور می‌کند.

کلاسیک می‌گه هیچ عبور نمی‌کند ولی کوانتوم می‌گه یک ذره عبور می‌کند.



$$\begin{cases} x<0 & \psi_1(x) = Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x} \\ x>0 & \psi_2(x) = Ce^{k_2 x} + De^{-k_2 x} \end{cases} \qquad C=0$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$$

چون توانش مثبت است. $(e^{k_2 x})$ درحالیکه وقتی موج به پله می‌رسد نزول پیدا می‌کند درحالیکه $Ce^{k_2 x}$ یک تابع صعودی است.

فرض کنیم در ناحیه‌ای Δx احتمال به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه‌اش می‌رسد.

$$e^{-2k_2 \Delta x} = e^{-1}$$

$$2k_2 \Delta x = 1 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2k_2}$$

میزان نفوذ در این سد $\Delta x = \dfrac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0-E)}}$

اگر قرار باشد ذره در ناحیه‌ی $x>0$ وارد شود باید انرژی حداقل $U_0 - E$ باشد.

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar \Rightarrow \Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E}$$

$$\Delta E = U_0 - E + K \qquad \Delta t \sim \frac{\hbar}{U_0 - E + K}$$

سرعت حرکت ذره $V = \sqrt{\dfrac{2K}{m}}$ $\leftarrow$

میانگین $\Delta x = \dfrac{1}{2} V \Delta t = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2K}{m}} \times \dfrac{\hbar}{U_0 - E + K}$

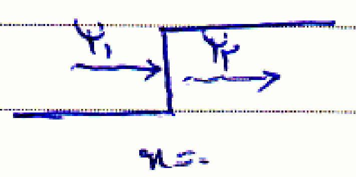
$$K \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0 \quad , \quad K \to \infty \Rightarrow \Delta x \to 0$$

$$\Delta x_{max} = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_0-E)}} \qquad \Delta x = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0-E)}}$$

شرایط مرزی: خود تابع موج و مشتقش در مرز باید پیوسته باشند.

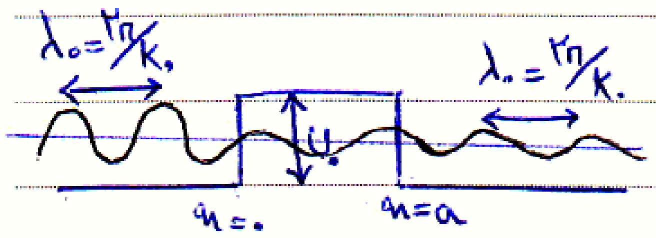
$$\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0)$$

$$\psi_1'(x=0) = \psi_2'(x=0)$$



مفهوم پیوستگی:
اگر موجی از سد گذشت باید بتوان از سد
برداشت شود (از سمت نزدیک)

سد انرژی پتانسیل:



فصل ۵ : ۲ـ۴ـ۵ـ۷ـ۹ـ۱۶ـ۲۱ـ۲۵ـ۳۲

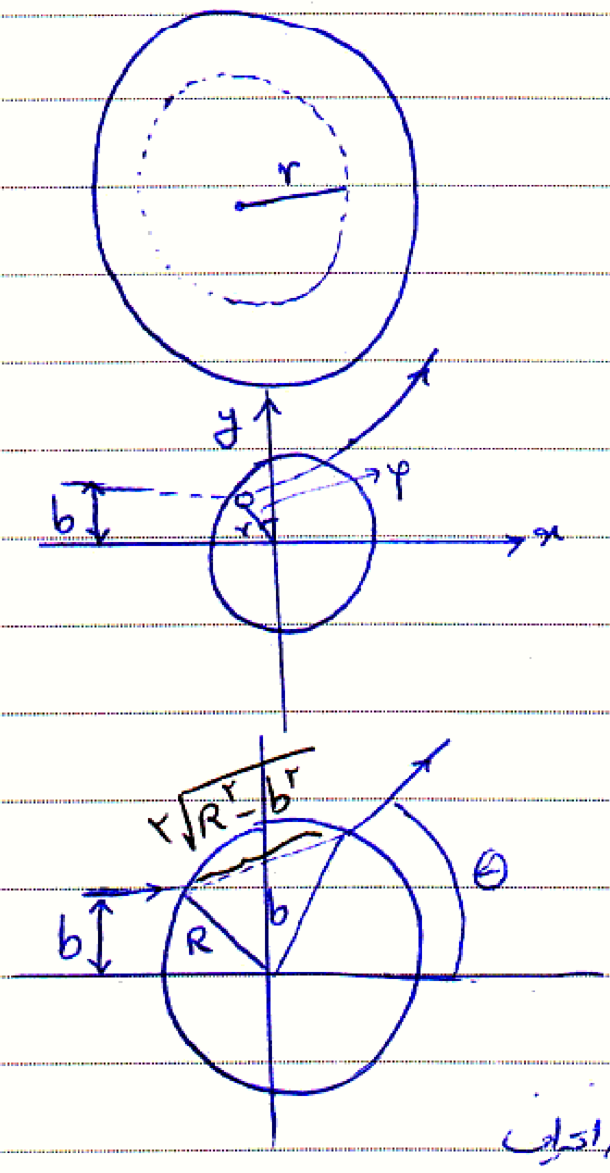
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$U(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ U_0 & 0\leqslant x\leqslant a \\ 0 & x>a \end{cases}$$

$E<U_0$

$$\psi(x)=\begin{cases} \psi_1(x)=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x} & x<0 \\ \psi_2(x)=Ce^{k_2x}+De^{-k_2x} & 0\leqslant x\leqslant a \\ \psi_3(x)=Ee^{ik_1x}+\cancel{Fe^{-ik_1x}}_{\,0} & x>a \end{cases}$$

فصل ۶ : مدل اتمی



$$F=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r=kr$$

فقط توضیح مدلهای اتمی خوانده شود.

$$\text{ضربه}\ \Delta P_y=\int F_y\,dt$$

$$F_y=F\cos\phi$$

$q=ZE$

$$F=\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r=kr$$

$$\cos\phi=\frac{b}{r}$$

$$\Delta P_y\simeq\int zkr_0\frac{b}{r}\,dt=\boxed{zkbj}$$

$$\text{زاویه انحراف}:\ \theta=\frac{2zkb}{mv^2}\sqrt{R^2-b^2}$$

مدل اتمی تامسون :

در مدل اتمی تامسون فرض شد Z الکترون در داخل کره ای یکنواخت با بار مثبت Ze و شعاع ۷ قرار گرفته اند و بارهای الکتریکی نوسان کننده امواج الکترومغناطیسی تابش می کنند که بسامد آن با بسامد این نوسان یکسان است. براساس مدل تامسون انتظار داریم که تابش گسیل شده از اتم ها دارای این بسامد مشخص باشد اما تجربه نشان داد که چنین نیست. بسامدهای محاسبه شده همان بسامد تابش گسیل شده از اتم ها نیستند. جدی ترین نارسایی مدل تامسون در پراکندگی ذرات باردار از اتم ها نمایان می شود. آزمایش نشان داد که (توسط رادرفورد) پراکندگی اتم تامسون در زوایای بزرگ حدود 10^8 برابر از واقعیت کمتر است.

مدل اتمی رادرفورد - بوهر :

در این مدل بارهای مثبت را در هسته در نظر گرفتند و الکترون ها را متحرک در ترازهای اطراف هسته. در ترازهای پایا، الکترون اطراف هسته می چرخد ولی تابش نمی کند فقط زمانیکه به آن مقداری انرژی داده شود و از یک تراز به تراز دیگر گسیل شود آن گاه تابش انجام می شود. این مدل فقط برای اتم های هیدروژن گونه برقرار است. (یعنی اتم هایی که در لایه ی آخرشان فقط یک الکترون دارد.)

+ تعریف نوترون