# ریاضی مهندسی



استاد بحرینی

کد: ۱۴۹۷

Subject:
Year. Month. Date. (1)

«ریاضی مهندسی»

کتاب ـ جلد دوم

اعداد مختلط ـ تابع مختلط ـ توابع مقدماتی ($\sinh z$ ، $e^z$ ، $\sin z$ ، $\ln z$ و ...) نگاشت ـ انتگرال مختلط انتگرال لوران ـ تحلیل مانده‌ها و حل بعضی از انتگرال‌های حقیقی ـ سری و انتگرال فوریه ـ توابع متعامد ـ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (موج ـ گرما ـ پتانسیل ـ دیریکله) ـ معادلات دیفرانسیل ناهمگن ـ تبدیلات فوریه و لاپلاس

میان ترم ← ۵ نمره حذفی ← از اعداد مختلط تا نگاشت    پایان ترم ← ۱۵ نمره

← هفته اول یا دوم آذر

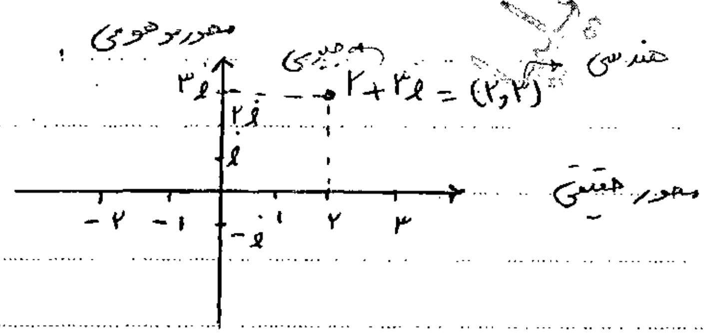
جلسه اول:

اعداد مختلط:

با فرض $i=\sqrt{-1}$ عدد مختلط می‌گوییم $z=x+iy \quad (x,y\in R)$

اگر $y=0$ ، $z=x$ می‌شود یعنی هر عدد حقیقی عدد مختلط است.

$x=Re(z)$ حقیقی    $y=Im(z)$ موهومی




اگر $z=a+bi$ و $w=c+di$ دو عدد مختلط باشند آن‌گاه:

① $z\pm w=(a\pm c)+(b\pm d)i$

② $z\cdot w=(ac-bd)+i(bc+ad)$

④ $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc+ad}{c^2+d^2} i$

تعریف: مزدوج عدد مختلط $z=x+iy$ را با نماد $\bar{z} = x-iy$ تعریف می‌کنیم (قرینه نسبت به محور افقی)

ثابت می‌شود:

① $\bar{\bar{z}} = z$

② $z=\bar{z} \iff z\in \mathbb{R} \iff Im(z)=0$

③ $z+\bar{z} = 2Re(z)$ , $z-\bar{z} = 2i\, Im(z)$

$x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ , $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

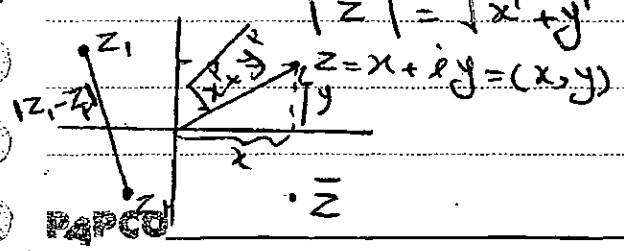
④ $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$

⑤ $\overline{z . w} = \bar{z} . \bar{w}$ , $(\overline{z^n} = \bar{z}^n)$

⑥ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

⑦ $z\bar{z} = x^2+y^2 \geq 0$

تعریف: قدر مطلق عدد $z$ را به صورت $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ تعریف می‌کنیم، به عبارت دیگر اگر $z=x+iy$
که فاصله نقطه تا مبدأ مختصات (هندسی)
باشد آنگاه: $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$



Subject:
Year. Month. Date. ۱۲

نکته: اگر r و $z_0$ ثابت باشد معادله دایره است یعنی معادله دایره‌ای به مرکز $z_0$ و شعاع r

$|z-z_0|=r$

ثابت می‌شود:

① $|z|\geq 0$ , $|z|=0 \iff z=0$

② $|\bar{z}|=|z|$

③ $|Re(z)|\leq|z|$ , $|Im(z)|\leq|z|$

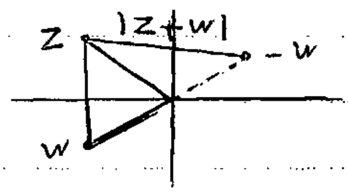
④ $|z.w|=|z|.|w|$ $\quad (|z^n|=|z|^n)$

⑤ $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$

⑥ $|z\pm w|\leq|z|+|w|$

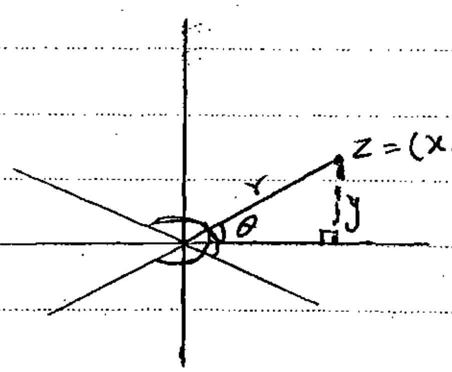
نامساوی‌های مثلث

⑦ $\big||z|-|w|\big|\leq|z\pm w|$






فرم قطبی اعداد مختلط:




$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$\theta =$ کوچکترین زاویه با محور مثبت x

$-\pi<\theta=Arg(z)\leq\pi$

$$z = x + iy = r\cos\theta + i r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r e^{i\theta}$$

رابطه اویلر: $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

| | |
|---|---|
| $\pi - \theta_0$ | $\theta_0$ |
| $\theta_0 - \pi$ | $-\theta_0$ |

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad$ $\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

مثال: فرم قطبی اعداد زیر را بنویسید:

$\sqrt{3} + i \Rightarrow r = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \qquad \theta = tg^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \theta = \pi/6$

$= 2e^{\pi/6\, i}$

$\sqrt{3} - i \Rightarrow r = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \qquad \theta = tg^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \theta = -\pi/6$

ربع ۴ $= 2e^{-\pi/6\, i}$

$-\sqrt{3} + i \Rightarrow r = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \qquad \theta = tg^{-1}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \theta = +5\pi/6$

ربع ۲ $= 2e^{+5\pi/6\, i}$

$-\sqrt{3} - i \Rightarrow r = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \qquad \theta = tg^{-1}\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \theta = -5\pi/6$

ربع ۳ $= 2e^{-5\pi/6\, i}$ $\qquad \pi/6 - \pi$

مثال:

$(1-i)^{24} = ?$

$1 - i = \sqrt{2}\, e^{-\pi/4\, i}$

$(1-i)^{24} = \left(\sqrt{2}\, e^{-\pi/4\, i}\right)^{24} = 2^{12} e^{-6\pi i} = 2^{12} e^{0} = 2^{12}$

ریشه اعداد مختلط:

$w$ را ریشه $n$ام $z$ گوییم اگر $w^n = z$ باشد.

فرض کنیم $z = re^{i\theta}$ فرم قطبی عدد $z$ باشد اگر $w = \rho e^{i\varphi}$ ریشه $n$ام $z$ باشد آنگاه

$$re^{i\theta} = z = w^n = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}$$

$$r=\rho^n \quad , \quad 2k\pi + \theta = n\varphi$$

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad , \quad \varphi = \frac{2k\pi+\theta}{n}$$

$$w_k = \sqrt[n]{r}\; e^{\frac{2k\pi+\theta}{n} i} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

از معادله درجه یک می‌توان n جواب پیدا کرد.

مثال : معادلات زیر را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید.

① $z^3 = 8i \longrightarrow r = \sqrt{0+64} = 8 \qquad \theta = tg^{-1}(\infty) \Rightarrow \theta = \pi/2$

$$\sqrt[3]{8}\, e^{\frac{2k\pi+\theta}{3} i}$$

$$z_k = 2 e^{\frac{2k\pi + \pi/2}{3} i} \qquad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = 2e^{\pi/6\, i} = 2(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2e^{5\pi/6\, i} = 2(\cos 5\pi/6 + i \sin 5\pi/6) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2e^{9\pi/6\, i} = 2(\cos 9\pi/6 + i \sin 9\pi/6) = -i$$

② $z^4 + z^2 + 1 = 0 \longrightarrow (z^2)^2 + z^2 + 1 = 0 \longrightarrow z^2 = a$

$$a^2 + a + 1 = 0 \qquad \Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 \qquad a = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

الف) $z^3 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1 e^{\frac{2\pi}{3} i}$ $\qquad r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \qquad \theta = tg^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$

$z_k = \sqrt[3]{1}\, e^{\frac{2k\pi + 2\pi/3}{3} i} \qquad k = 0, 1, 2$

الف) $z^3 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ $\qquad r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \qquad \theta = tg^{-1}(+\sqrt{3}) = -\frac{2\pi}{3}$

$z_k = \sqrt[3]{1}\, e^{\frac{2k\pi - 2\pi/3}{3} i} \qquad k = 0, 1, 2$

(۲) $z^4 = 1 \longrightarrow z^4 - 1 = 0 \Rightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$

$\Rightarrow (z^2 - i^2)$

$(z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = \pm 1 \\ z = \pm i \end{cases}$

تذکر: ریشه‌های معادله $z^n = 1$ را ریشه‌های n ام واحد می‌نامند.

$|z^n| = |1| \Rightarrow |z| = 1$

تمرین: نشان دهید ریشه‌های n ام واحد رئوس یک n ضلعی منتظم می‌باشد.

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

رابطه دموآور: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$n=2 \Rightarrow \underline{\cos^2\theta - \sin^2\theta} + \underline{(2\cos\theta\sin\theta)}\, i = \underline{\cos 2\theta} + i\,\underline{\sin 2\theta}$

تمرین: به کمک رابطه دموآور مقدار رابطه زیر را حساب کنید:

$A = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = ?$ $\quad A + Bi$

$B = 1 + \sin\theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta$

تابع مختلط:

یک تابع مختلط از مجموعه $C$ به مجموعه $C$ تعریف می‌شود.

$$f: C \longrightarrow C$$

$$z \longrightarrow f(z) = w$$

دامنه $D_f = \{ z \in C ;$ یک عدد مختلط باشد $f(z) \}$

برد $R_f = \{ f(z) ; z \in D_f \}$

مثال:

$f_1(z) = z^2 + 2iz - \bar{z} + i$ $\qquad D_{f_1} = \{C\}$

$f_2(z) = \sqrt{z^2 - 4}$ $\qquad D_{f_2} = \{C\}$ $\qquad$ * در توابع مختلط رادیکال محدودیت ایجاد نمی‌کند

$f_3(z) = \dfrac{z + iz^2}{z^2 + 2z}$ $\qquad D_{f_3} = C - \{0, -2\}$

$f_4(z) = \dfrac{\sqrt{1+z}}{4 + |z|}$ $\qquad D_{f_4} = C$

$f_5(z) = \sqrt[4]{z}$ $\qquad D_{f_5} = C$ $\qquad$ توابع چندمقداری

با فرض $z = x + iy$ خواهیم داشت:

$$w = f(z) = f(x+iy)$$
$$= u(x,y) + i\, v(x,y)$$

با انجام محاسبات، ضابطه‌های $u$ و $v$ بدست می‌آیند.

$u(x,y) = Re(f(z))$ $\qquad v(x,y) = Im(f(z))$

مثال: $f(z)=z^3+iz^2-2i+3$ $\quad Re(f)=?$ $\quad I_m(f)=?$

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $\quad z=x+iy$

$f(z)=f(x+iy)=(x+iy)^3+i(x+iy)^2-2i+3$

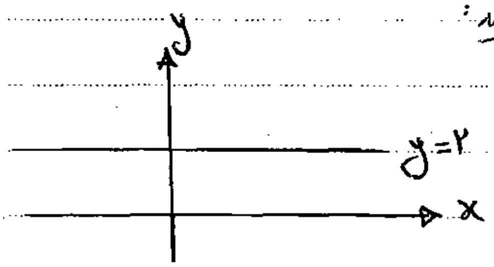
$\underline{x^3}+3x^2yi\,\underline{-3xy^2}-iy^3+ix^2\,\underline{-iy^2}\,\underline{+2xyi^2}-2i\,\underline{+3}$

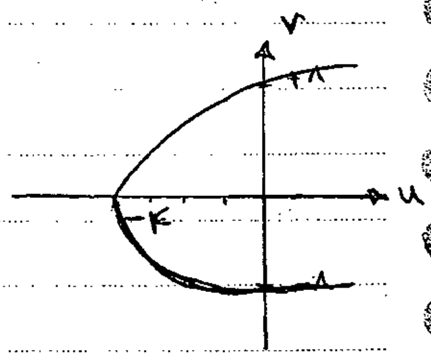
$=(x^3-3xy^2-2xy+3)+i(3x^2y+x^2-y^3-y^2-2)$

مثال: $f(z)=z^3+iz^2-2i+3$ $\quad Re(f)=?$ $\quad Im(z)=?$



مثال: تصویر خط $y=2$ را تحت نگاشت $f(z)=z^2$ رسم کنید:




$f(z)=f(x+iy)=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$

$\begin{cases}u=x^2-y^2\\ v=2xy\end{cases} \xrightarrow{y=2} \begin{cases}u=x^2-4\\ v=4x\end{cases} \Rightarrow u=\frac{1}{16}v^2-4$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه دوم:

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \to f(z) = w$

اگر $z = x + iy \Rightarrow f(z) = u(x,y) + v(x,y) \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = Re(z) \\ v(x,y) = Im(z) \end{cases}$

تعریف همسایگی:

$N_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| < \varepsilon \}$

* اگر مرکز همسایگی جز همسایگی نباشد یعنی اگر $z_0$ حذف شود آنگاه همسایگی را همسایگی محذوف می‌گوییم.

تعریف حد: فرض کنید تابع $f(z)$ در یک همسایگی محذوف $z_0$ تعریف شده باشد می‌گوییم:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

اگر و تنها اگر:

$\forall_\varepsilon \exists \delta \forall_z \in D_f (0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon)$

مثال: ثابت کنید:

$$\lim_{z \to 1-i} (3z - i + 2) = 5 - 4i$$

اثبات: $\forall_\varepsilon \exists_\delta \forall_z \in \mathbb{C} (0 < |z - (1-i)| < \delta \Rightarrow |(3z - i + 2) - (5 - 4i)| < \varepsilon)$

$|(3z - i + 2) - (5 - 4i)| = |3z + 3i - 3| = 3|z - (1-i)| = 3\delta < \varepsilon$

کافی است $\delta < \varepsilon/3$ فرض شود. (تعریف حد برقرار است)

قضیه:

الف) $\lim\limits_{z\to z_0} c = c$ ب) $\lim\limits_{z\to z_0} z^n = z_0^n$

ج) $\lim\limits_{z\to z_0} (f \overset{\times}{\pm} g)_{(z)} = \lim\limits_{z\to z_0} f_{(z)} \overset{\times}{\pm} \lim\limits_{z\to z_0} g_{(z)}$

د) $\lim\limits_{z\to z_0} (\frac{f}{g})_{(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f_{(z)}}{\lim\limits_{z\to z_0} g_{(z)}}$ $(\lim\limits_{z\to z_0} g_{(z)} \neq 0)$

قضیه: فرض کنید تابع $f(z) = u + iv$ در همسایگی محذوف $z_0 = x_0 + iy_0$ تعریف شده باشد در این صورت

$$\lim_{z\to z_0} f_{(z)} = w_0 \iff \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = Re(w_0) \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = Im(w_0) \end{cases}$$

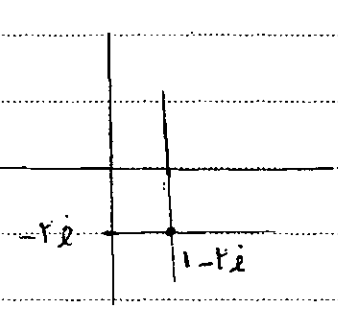
مثال: آیا حد وجود دارد یا ندارد:

$$\lim_{z\to 1-2i} \frac{\bar{z} - \overline{(1-2i)}}{z-(1-2i)} = ?$$

$$\frac{\bar{z}-\overline{(1-2i)}}{z-(1-2i)} = \frac{x-iy-(1+2i)}{x+iy-(1-2i)} = \frac{(x-1)-(y+2)i}{(x-1)+(y-2)i} \times \frac{(x-1)-(y-2)i}{(x-1)-(y-2)i} =$$

$$\frac{(x-1)^2-(y+2)^2-2(x-1)(y+2)i}{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \dfrac{(x-1)^2-(y+2)^2}{(x-1)^2+(y-2)^2} \\[2ex] v(x,y) = \dfrac{-2(x-1)(y+2)i}{(x-1)^2+(y-2)^2} \end{cases}$$




اگر u یا v حد نداشته باشد حد وجود ندارد.

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{(x-1)^2-(y+2)^2}{(x-1)^2+(y-2)^2} \Rightarrow \begin{cases} +1 & \text{روی مسیر } y=-2 \\ -1 & \text{روی مسیر } x=1 \end{cases}$$

حد مورد نظر وجود ندارد زیرا بر روی مسیر مختلف حد یکسان نشد.

* اگر حد برابر مقدار تابع باشد آنگاه یک تابع پیوسته داریم.

تعریف: می‌گوییم تابع $f(z)$ در نقطه $z_0$ پیوسته است اگر و تنها اگر:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

قضیه: توابع چندجمله‌ای در هر نقطه از $C$ پیوسته‌اند.

قضیه: اگر توابع $f$ و $g$ پیوسته باشند آنگاه توابع $f/g$ (به شرط ناصفر بودن $g$) و $f\cdot g$ و $f\pm g$ نیز پیوسته‌اند.

نتیجه: توابع گویا در دامنه تعریفشان پیوسته‌اند.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن که تابع $f(z)$ در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ پیوسته باشد آن است که

$Re(f)$ و $Im(f)$ در نقطه $(x_0, y_0)$ پیوسته باشند.

مثال: پیوستگی تابع $f$ در مبدأ را ثابت کنید:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

در هر نقطه از اعداد مختلط پیوسته است

در حد ۰ را می‌گذاریم ولی در پیوستگی نمی‌گذاریم.

$$\forall_\varepsilon \exists \delta \ \forall z \in \mathbb{C} \ \left(|z-0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\bar{z}^2}{z} - 0\right| < \varepsilon\right)$$

$$\left|\frac{\bar{z}^2}{z} - 0\right| = \frac{|\bar{z}|^2}{|z|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z|$$

بنابراین کافی است $\delta \leq \varepsilon$ فرض شود.

مشتق: فرض کنید تابع $f(z)$ در همسایگی $z_0$ تعریف شده باشد. مشتق تابع $f(z)$ در نقطه $z_0$ را با نماد $f'(z_0)$ نمایش می‌دهیم به صورت حد زیر (در صورت وجود حد) تعریف می‌کنیم.

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

به طور معادل:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال: مشتق پذیری توابع را در نقطه $z=i$ بررسی کنید:

الف) $f(z)=z^{3}$ $\qquad f'(i)=?$

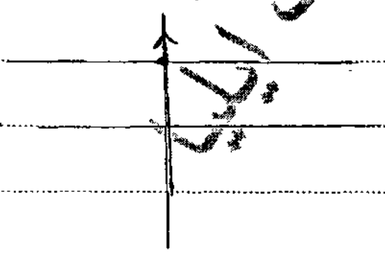
$$f'(i)=\lim_{z\to i}\frac{f(z)-f(i)}{z-i}=\lim_{z\to i}\frac{z^{3}-i^{3}}{z-i}=\lim_{z\to i}\frac{\cancel{(z-i)}(z^{2}+i^{2}+iz)}{\cancel{(z-i)}}$$

$$=\lim(z^{2}+i^{2}+iz)=i^{2}+i^{2}+i^{2}=3i^{2}=-3$$

ب) $f(z)=\bar{z}$ $\qquad f'(i)=?$

$$f'(i)=\lim_{z\to i}\frac{f(z)-f(i)}{z-i}=\lim_{z\to i}\frac{\bar{z}-\bar{i}}{z-i}=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x-iy+i}{x+iy-i}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x-(y-1)i}{x+(y-1)i}$$



$$\begin{cases}-1 & \text{روی مسیر } x=0\\ +1 & \text{روی مسیر } y=1\end{cases}$$

حد وجود ندارد ← تابع مشتق ندارد

قضیه: الف) اگر $f(z)=c \Rightarrow f'(z)=0 \quad \forall z\in C$

ب) اگر $f(z)=z^{n} \Rightarrow f'(z)=nz^{n-1} \quad \forall z\in C$

ج) $(f\pm g)'(z)=f'(z)\pm g'(z)$

PAPCO

د) $(f g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

ه) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{(g(z))^2}$

و) $(f \circ g)'(z) = g'(z) \cdot f'(g(z))$

معادلات کوشی-ریمان:

$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$

قضیه شرط لازم کوشی-ریمان: فرض کنید تابع $f(z) = u + iv$ در همسایگی $z_0 = x_0 + iy_0$ تعریف شده باشد. اگر $f'(z_0)$ موجود باشد آن‌گاه مشتقات جزئی $u$ و $v$ در نقطه $(x_0, y_0)$ موجود بوده و معادلات کوشی-ریمان به فرم زیر برقرار می‌باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

تذکر: اگر $f'(z_0)$ موجود باشد آن‌گاه $f(z)$ در نقطه $z_0$ پیوسته است.

مثال: نشان دهید معادلات کوشی-ریمان برای تابع زیر در همه‌ی نقاط برقرار است.

$f(z) = z^3 \rightarrow f'(z) = 3z^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$f(z)=f(x+iy)=(x+iy)^3=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$$

$$\begin{cases} u=x^3-3xy^2 \\ v=3x^2y-y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x=3x^2-3y^2 \\ v_y=3x^2-3y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} u_y=-6xy \\ v_x=6xy \end{cases}$$

تذکر: عکس قضیه در حالت کلی برقرار نیست، برای مثال نشان دهید تابع داده شده $f$ در مبدأ مختصات مشتق پذیر نمی باشد ولی هر دو معادله کوشی ـ ریمان در مبدأ مختصات برقرار می باشد.

$$f(z)=\begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z} & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases} \qquad f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \qquad z=x+iy$$

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\bar{z}^2}{z}-0}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2}{z^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x-iy)^2}{(x+iy)^2}=$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2-2xyi}{x^2-y^2+2xyi}$$

قضیه شرط کافی کوشی - ریمان: فرض کنید تابع $f(z)=u+iv$ در همسایگی $z_0=x_0+iy_0$ تعریف شده باشد
اگر توابع $u$ و $v$ و مشتقات جزئی در نقطه $(x_0,y_0)$ پیوسته بوده و هر دو معادله کوشی-ریمان در
این نقطه برقرار باشند آنگاه تابع $f(z)$ در نقطه $z_0$ مشتق پذیر بوده و رابطه زیر برقرار است:

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

مثال: نقاط مشتق پذیری توابع زیر را تعیین کنید:

الف) $f(z)=\bar{z}=x-iy$

$$\begin{cases} u=x \\ v=-y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_x=1 \\ v_y=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} u_y=0 \\ v_x=0 \end{cases}$$

مجموعه نقاط مشتق پذیری $=\{\varnothing\}$

در هیچ نقطه ای برقرار نیست در هیچ نقطه ای مشتق ندارد

ب) $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$

$$\begin{cases} u=x^2+y^2 \\ v=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_x=2x \\ v_y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_y=2y \\ v_x=0 \end{cases}$$

$$f'(0)=u_x(0,0)+iv_y(0,0)=0$$

فقط در مبدأ مختصات معادلات کوشی-ریمان برقرار است فقط در مبدا مشتق دارد.

ج) $f(z) = \overbrace{\cos x \cosh y}^{u} + i\,\overbrace{\sin x \sinh y}^{v}$

$\begin{cases} u = \cos x \cosh y \\ v = \sin x \sinh y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_x = -\sin x \cosh y \\ v_y = \sin x \cosh y \end{cases} \underset{u_x = v_y}{\Rightarrow} \quad \sin x \cosh y = 0 \quad \boxed{x = k\pi}$

$\begin{cases} u_y = \cos x \sinh y \\ v_x = \cos x \sinh y \end{cases} \underset{}{\overset{u_y = -v_x}{\Longrightarrow}} \quad \cos x \sinh y = 0 \quad \boxed{x = k\pi \pm \pi/2 \text{ یا } y = 0}$

$-2\pi \quad -\pi \quad \pi \quad 2\pi$

$f'(k\pi + 0i) = 0$

د) $f(z) = f(x+iy) = (x^2+y^2) + (2xy)i$

$\begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = 2xy \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_x = 2x \\ v_y = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} u_y = 2y \\ v_x = 2y \end{cases}$

نقاط مشتق پذیر

ه) $f(z) = f(x+iy) = (x^2-y^2) + (2xy)i$

حق $\begin{cases} u = x^2-y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$ مو $\rightarrow \begin{cases} u_x = 2x \\ v_y = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} u_y = -2y \\ v_x = 2y \end{cases}$

تعریف: می‌گوییم تابع f در نقطه z تحلیلی است اگر در همسایگی از این نقطه مشتق پذیر باشد. تابعی که در همه‌ی نقاط اعداد مختلط تحلیلی باشد را تابع تام می‌نامیم.

Subject:
Year. Month. Date. ۱۰

* به طور کلی توابع چند جمله‌ای تام هستند و توابع گویا در دامنه تعریفشان تحلیلی هستند.

تعریف: تابع حقیقی دو متغیره $u(x,y)$ را هارمونیک می‌نامیم اگر

لاپلاسین

$$\nabla^2 u = u_{xx}+u_{yy}=0$$

* اگر یک تابع تحلیلی داشته باشیم تابع هارمونیک داریم و اگر یک تابع هارمونیک داشته باشیم حتماً مشتق آن تحلیلی است.



جلسه سوم:

شرط هارمونیک: $u_{xx}+u_{yy}=0$

مثال: $u(x,y)=x^2-y^2$

$$u_x=2x \rightarrow u_{xx}=2$$
$$u_y=-2y \rightarrow u_{yy}=-2$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad \checkmark$$

* اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه توابع $u$ و $v$ هارمونیک می‌باشند.

اثبات: $f$ تحلیلی $\Rightarrow \begin{cases} u_x=v_y \rightarrow u_{xx}=v_{yx} \\ u_y=-v_x \rightarrow u_{yy}=-v_{xy} \end{cases}$



$$u_{xx}+u_{yy}=v_{yx}-v_{xy}=0$$ ریاضی II

به روش مشابه به هارمونیک $v$ نتیجه می‌شود.

* اگر $u(x,y)$ هارمونیک باشد آنگاه تابع هارمونیک $v(x,y)$ یافت می‌شود به طوری که $f(z)=u+iv$ تحلیلی است. تابع $v(x,y)$ را مزدوج هارمونیک $u(x,y)$ می‌نامند.

مثال: هارمونیک بودن $u$ را بررسی کنید در صورت هارمونیک بودن تابع تحلیلی $f(z)$ را طوری تعیین کنید که $f(1-i)=3+2i$ ، $u=Re(f)$ ، $v=Im(f)$

$v(x,y)$

$$u(x,y)=y^3-3x^2y-y^2+x^2-2x+y+3$$

$$u_x=-6xy+2x-2 \rightarrow u_{xx}=-6y+2$$
$$u_y=3y^2-3x^2-2y+1 \rightarrow u_{yy}=6y-2$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \checkmark$$

چون $u$ هارمونیک است $\Rightarrow$ تابع هارمونیک $v(x,y)$ یافت می‌شود به طوری که

$$u_x=v_y \quad , \quad u_y=-v_x$$

$$v_y=u_x=-6xy+2x-2 \xrightarrow{\int_y} v_{(x,y)}=-3xy^2+2xy-2y+g_{(x)}$$

$$\xrightarrow[\text{کوشی-ریمان}]{u_y=-v_x \text{ معادله دوم}} \cancel{3y^2}-3x^2-\cancel{2y}+1=-[-\cancel{3y^2}+\cancel{2y}+g'_{(x)}] \Rightarrow$$

$$g'_{(x)}=3x^2-1 \xrightarrow{\int_x} g_{(x)}=x^3-x+c$$

$$\Rightarrow \boxed{v(x,y)=-3xy^2+2xy-2y+x^3-x+c}$$

$$f(z) = f(x+iy) = u + iv$$

$$= (y^3 - 3x^2y - y^2 + x^2 - 2x + y + 4) + i\,(-3xy^2 + 2xy - 2y + x^3 - x + c)$$

$$f(1-i) = 3 + 2i$$

$$\xrightarrow[y=-1]{x=1} (\cancel{-1} + 3 \cancel{-1} \cancel{+1} \cancel{-2} \cancel{-1} \cancel{+4}) + i(-3 \cancel{+1} \cancel{-2} \cancel{+2} \cancel{-1} + c) = 3 + 2i$$

$$\cancel{3} + i(-3 + c) = \cancel{3} + 2i \Rightarrow -3 + c = 2 \Rightarrow \boxed{c = 5}$$

$$\begin{cases} z = x + iy \\ z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \\ z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \end{cases} \qquad f(z) = iz^3 + z^2 - 2z - iz + 4 + 5i$$

مثال: کلیه توابع هارمونیک به فرم $u(x,y) = f\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$ را تعیین کنید. $v(x,y) = f\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ با فرض $t = \frac{x^2+y^2}{x} \Rightarrow u = f(t)$

$$t = x + \frac{y^2}{x}$$

$$u_x = \frac{\partial t}{\partial x} \cdot f'(t) = \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) \cdot f'(t)$$

$$\rightarrow u_{xx} = \frac{2y^2}{x^3} f'(t) + \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \cdot f''(t) = \frac{2y^2}{x^3} f'(t) + \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)^2 f''(t)$$

$$u_y = \frac{\partial t}{\partial y} \cdot f'(t) = \frac{2y}{x} \cdot f'(t)$$

$$\rightarrow u_{yy} = \frac{2}{x} f'(t) + \frac{2y}{x} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \cdot f''(t) = \frac{2}{x} f'(t) + \frac{4y^2}{x^2} \cdot f''(t)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$u_{xx}+u_{yy} = \left(\frac{2y^2}{x^3}+\frac{2}{x}\right) f'(t) + \left[\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)^2 + \frac{4y^2}{x^2}\right] f''(t)$$

$$= \frac{2(y^2+x^2)}{x^3} f'(t) + \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^2 f''(t) = \left(\frac{2t}{x^2} f'(t) + \left(\frac{t}{x}\right)^2 f''(t)\right) \times x^2$$

$$2t\, f'(t) + t^2 f''(t) = 0 \Rightarrow \frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{-2t}{t^2} = \frac{-2}{t}$$

$$\ln f'(t) = -2\ln t + \ln c_1 = \ln\frac{c_1}{t^2}$$

$$f'(t) = \frac{c_1}{t^2} \rightarrow f(t) = -\frac{c_1}{t} + c_2$$

$$u(x,y) = -\frac{c_1 x}{x^2+y^2} + c_2$$

نمونه سؤال امتحانی: اگر تابع $f(z)$ تحلیلی بوده و قدر مطلق $f(z)$ عددی ثابت باشد نشان دهید $f(z)$ ثابت است.

$f(z)$ ← تحلیلی ← معادلات کوشی ریمان برقرار است.

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

$$|f(z)| = c \rightarrow$$

$$1\quad z=0 \Rightarrow |z|=0$$

$$z = x+iy \quad \begin{cases} u_x=1 \\ v_y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} u_y=0 \\ v_x=0 \end{cases} \Rightarrow$$ مقدار $\boxed{z=0}$ برقرار

تابع نمایی و لگاریتم :

تعریف : $\forall z \in C$

$$z = x + iy \Rightarrow f(z) = e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

تابع نمایی $e^z$ یک تابع تحلیلی (تام) است.

$$\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x = e^x \cos y \\ v_y = e^x \cos y \end{cases} \qquad \begin{cases} u_y = -e^x \sin y \\ v_x = e^x \sin y \end{cases}$$

بنا بر قضیه شرط‌های کوشی - ریمان ، تابع $f(z) = e^z$ تام بوده و

$$\frac{d}{dz}(e^z) = u_x + i v_x = e^z$$

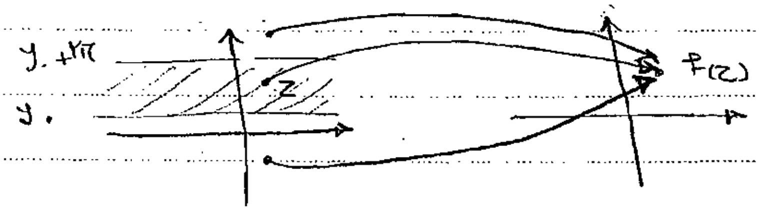
بعضی از خواص $e^z$ :

- $e^z \neq 0 \quad \forall z \in C$

- $|e^z| = e^x , \quad \arg(e^z) = y$ $\qquad \arg(e^z) = \operatorname{Arctg} \dfrac{\sin y}{\cos y}$ بخش موهومی / بخش حقیقی

- $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} . e^{z_2}$

- $e^{z_1 - z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$




- $e^{z + 2k\pi i} = e^z$ تابع نمایی متناوب است ← یک به یک نیست ← در حالت کلی وارون پذیر (معکوس پذیر) نیست.

اما اگر دامنه تعریف محدود شود تابع معکوس پذیر می‌شود.

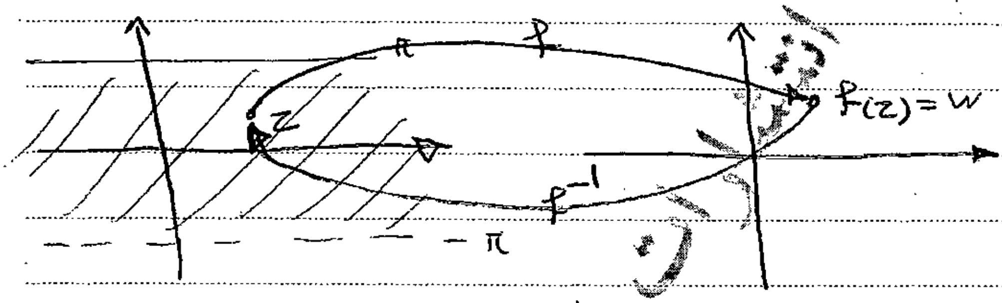
مسئله: ثابت کنید تابع $f(z)=e^z$ از مجموعه به روی ...

$$A_{y_0}=\{z=x+iy \mid x\in R,\ y_0<y\leq y_0+2\pi\}$$

به مجموعه $\{\}-C$ یک به یک و پوشاست.

$$w=f(z)=e^z$$

$$z=e^w \Rightarrow w=Ln|z|+i(Arg z+2k\pi)$$




در حالت کلی دو مثال Ln تعریف می‌شود.

$$f^{-1}(z)=Ln z=Ln|z|+i(Arg(z)+2k\pi)$$

$$\Rightarrow Ln z=Ln|z|+i\,Arg(z) \quad \text{شاخه اصلی لگاریتم}$$

مثال: مقادیر اصلی را به دست آورید:

$$Ln(1-\sqrt{3}i)=Ln 2-\frac{\pi}{3}i$$

$$Ln(-2i)=Ln 2-\frac{\pi}{2}i$$

$$Ln(-e)=1+\pi i \qquad Ln(e)\ 1+0i=1$$

بعضی از خواص Ln :

$$-\ Ln(z_1 \cdot z_2) \equiv Ln\, z_1 + Ln\, z_2 \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi i)$$

$$-\ Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv Ln\, z_1 - Ln\, z_2 \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi i)$$

$$-\ Ln\, z^2 \equiv 2\, Ln\, z \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi i)$$

$$-\ Ln\, e^z = z \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi i)$$

$$-\ e^{Ln z} = z \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi i)$$

$$z = x + iy$$

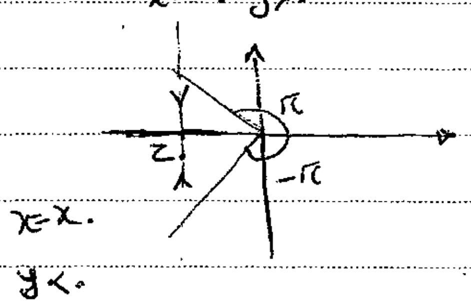
$$Ln\, z = Ln\sqrt{x^2+y^2} + i\ tg^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} Ln(x^2+y^2) \\ v = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v_y = \dfrac{1/x}{1+(y/x)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_y = \dfrac{y}{x^2+y^2} \\ v_x = \dfrac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: نشان دهید تابع $Arg(z)$ در مبدأ مختصات و بخش منفی محور حقیقی ناپیوسته و در باقی نقاط صفحه مختلط پیوسته است.




$$\lim_{z\to z_0} Arg(z) = \text{حد ندارد}$$

می‌مسیر $x=x_0$ یکبار $y$ منفی و یک بار مثبت است.

* تابع $Ln z$ به جز در مبدأ و بخش منفی محور حقیقی (افقی) در بقیه نقاط پیوسته، مشتق‌پذیر و تحلیلی است

* در بخش منفی تعریف می‌شود اما پیوسته نیست



نقاط غیرتحلیلی $Ln z$ $\begin{cases} Im(z)=0 \\ Re(z)\leq 0 \end{cases}$

در نقاط مشتق‌پذیری این رابطه را داریم:

$$\frac{d}{dz}(Ln z)=\frac{1}{z}$$

مثال: نقاط مشتق‌پذیری $f$ را بیابید و ضابطه‌ی مشتق را در این نقاط تعیین کنید:

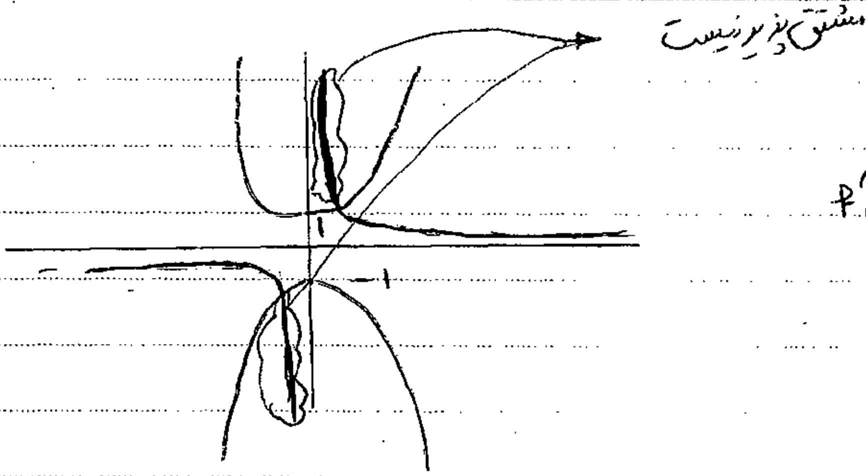
$f(z)=Ln(z^2-i+1)$ $\qquad x^2-y^2+2xyi-i+1$

$\begin{cases} Im(z^2-i+1)=0 \\ Re(z^2-i+1)\leq 0 \end{cases}$ $\qquad z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$

$\Rightarrow \begin{cases} 2xy-1=0 \rightarrow y=\frac{1}{2x} & \text{تابع هموگرافیک} \\ x^2-y^2+1\leq 0 \rightarrow y^2-x^2\geq 1 & \text{هذلولی} \end{cases}$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ۱۴




$$f'(z) = \frac{2z}{z^2 - i + 1}$$

تابع توانی

* تعریف: ثابت $a \neq 0 , a \neq 1 , a \in c$

درهمه‌ی نقا — متناوب

تحلیلی — $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$ → تابع تام

— $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$ → درهمه‌ی نقاط مشتق پذیر نیست

→ درنقاط مشتق پذیری $\operatorname{Ln} z$ مشتق دارد.

— $\frac{d}{dz}(a^z) = a^z . \operatorname{Ln} a \qquad \forall a \in c$

— $\frac{d}{dz}(z^a) = a\, z^{a-1}$ درنقاط تحلیلی که $\operatorname{Ln} z$ تحلیلی است

$f(z) = w = a^z \iff f^{-1}(z) = \log_a^z$ در دامنه وارون پذیری تابع $e^z$

تمرین: مقدار اصلی اعداد داده شده را بیابید:

- $i^i$
- $i^{i^i}$
- $(1+\sqrt{3}i)^{(1+\sqrt{3}i)}$

PaPCO

$$* \; i^{a} = e^{a \operatorname{Ln} i} = e^{a(\operatorname{Ln}|i| + i \arg(i))}$$

$$- \; i^{i} = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\operatorname{Ln} 1 + i \operatorname{Arctg}(1/0))} = e^{i(\pi/2 \, i)} = \boxed{e^{-\pi/2}}$$

$\operatorname{Ln} 1 = 0$ $\qquad$ $\operatorname{Arctg}(1/0) = \pi/2$ $\qquad$ ربع اول

$$- \; i^{i^{i}} \Rightarrow i^{i} = e^{-\pi/2} \qquad ?$$

$$= e^{-\pi/2 \, i}$$

$$- \; (1+\sqrt{3}i)^{(1+\sqrt{3}i)} = e^{(1+\sqrt{3}i)\operatorname{Ln}(1+\sqrt{3}i)} = e^{(1+\sqrt{3}i)(\operatorname{Ln}2 + i\pi/3)} =$$

$$e^{\operatorname{Ln}2 + i\pi/3 + \sqrt{3}\operatorname{Ln}2\, i - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi i}$$

$$= e^{(\operatorname{Ln}2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi) + i(\pi/3 + \sqrt{3}\operatorname{Ln}2)}$$

$\operatorname{Ln}(1+\sqrt{3}i) = \operatorname{Ln}2 + i\,\pi/3$

$\sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\operatorname{Arctg}(\sqrt{3}/1) = \pi/3$

PAPCO

جلسه چهارم:

توابع مثلثاتی:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

تعریف: به ازای هر $z \in C$، توابع $\sin z$ و $\cos z$ به فرم زیر تعریف می‌شوند:

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \cot g\, z = \frac{\cos z}{\sin z} \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z} \qquad \csc = \frac{1}{\sin z}$$

قضیه: توابع $\sin z$ و $\cos z$ تام بوده و $(\sin z)' = \cos z$ و $(\cos z)' = -\sin z$

مثال: نقاط پیوستگی، مشتق‌پذیری و تحلیلی تابع $f(z) = \cos \bar{z}$ را تعیین کنید.

$$f(z) = f(x+iy) = \cos(x-iy) = \cos x \cos iy + \sin x \sin iy$$

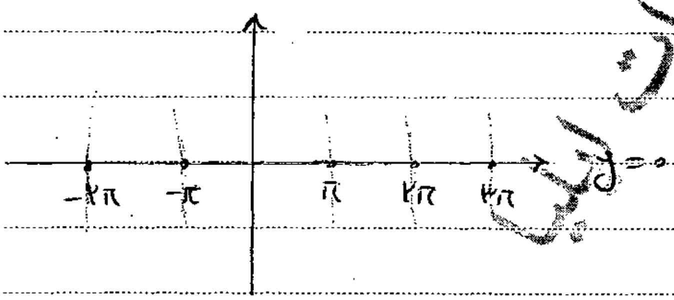
$$\begin{cases} \cos iy = \dfrac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \cosh y \\ \sin iy = \dfrac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = i\sinh y \end{cases} \Rightarrow = \cos x \cosh y + (\sin x \sinh y)\, i$$

$$\begin{cases} u=\cos x \cosh y \\ v=\sin x \sinh y \end{cases}$$

در همه‌ی نقاط پیوسته است

$$\begin{cases} u_x=-\sin x \cosh y \\ v_y=\sin x \cosh y \end{cases} \xrightarrow{u_x=v_y} \sin x \cosh y=0 \Rightarrow \boxed{x=k\pi}$$

$$\begin{cases} u_y=\cos x \sinh y \\ v_x=\cos x \sinh y \end{cases} \xrightarrow{u_y=-v_x} \cos x \sinh y=0 \Rightarrow x=k\pi+\pi/2 \text{ یا } y=0$$




نقاط مشتق پذیری $=\{z=x+iy \mid y=0 \;,\; x=k\pi\}$

در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست.

* نکته: در دامنه و درون مشتق‌پذیری تابع نمایی، توابع $\sin^{-1} z$ و $\cos^{-1} z$ و توابع معکوس سایر نسبت‌های مثلثاتی نیز تعریف می‌شود.

حل: $f(z)=w=\sin z$ , $f^{-1}(z)=?$

$e^{-iw}\cdot e^{iw}=e^{0}=1$

$z=\sin w \longrightarrow z=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}=\frac{(e^{iw})^2-1}{2ie^{iw}} \Rightarrow$

$(e^{iw})^2-2ize^{iw}-1=0$

$\Delta=(-2iz)^2-4(1)(-1)=4-4z^2$

$\Rightarrow e^{iw}=\frac{2iz+\sqrt{4-4z^2}}{2}=iz+\sqrt{1-z^2}$

$\Rightarrow iw=Ln(iz+\sqrt{1-z^2}) \Rightarrow f^{-1}(z)=-i\,Ln(iz+\sqrt{1-z^2})$

تعریف: به ازای هر $z\in C$، نسبت های $\sinh z$ و $\cosh z$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$\sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$ و $\cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

قضیه: توابع $\sinh z$ و $\cosh z$ تام بوده و $(\sinh z)'=\cosh z$ و $(\cosh z)'=\sinh z$ $(\forall z\in C)$

مثال: بخش های حقیقی و موهومی $f(z)=tgh\,z$ را بدست آورید.

$tgh z=\frac{\sinh z}{\cosh z}=\frac{\sinh(x+iy)}{\cosh(x+iy)}=\frac{\sinh x\cosh iy+\cosh x\sinh iy}{\cosh x\cosh iy-\sinh x\sinh iy}$

$=\frac{\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y}{\cosh x\cos y-i\sinh x\sin y}=\frac{(\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y)(\cosh x\cos y+i\sinh x\sin}{(\cosh x\cos y)^2+(\sinh x\sin y)^2}$

× مزدوج مخرج

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{\sinh x \cosh x \cos^2 y - \sinh y \cosh x \sin^2 y}{\cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x\,(1-\cos^2 y)} = \text{---} \\ \\ v = \dfrac{\sinh^2 x \sin y \cos y + \cosh^2 x \sin y \cos y}{\sinh^2 x + \cos^2 y\,(\underbrace{\cancel{\cosh^2 x - \sinh^2 x}}_{1})} = \text{---} \end{cases}$$

مثال: معادله را حل کنید:

$$\cosh z = 1 + i$$

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z = 1 + i \Rightarrow z = \cosh^{-1}(1+i)$$

$$e^z + \frac{1}{e^z} = 2 + 2i \Rightarrow (e^z)^2 - (2+2i)e^z + 1 = 0$$

$$\Delta = (-2-2i)^2 - 4(1)(1) = \cancel{4} - 4 + 8i - \cancel{4} = -4 + 8i$$

$$e^z = \frac{2+2i \pm \sqrt{-4+8i}}{2} = 1 + i \pm \sqrt{2i-1}$$

$$z = \operatorname{Ln}(1 + i + \sqrt{2i-1}) = \text{---}$$

مثال: معادله را حل کنید:

$$\sinh z = i$$

$$\sinh(x+iy) = i = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

یعنی $v = 1\,,\ u = 0$

$$\begin{cases} \sinh x \cos y = 0 \longrightarrow x = 0 \ \text{یا}\ y = k\pi + \pi/2 \\ \cosh x \sin y = 1 \end{cases}$$

PAPCO

اگر $x=0 \Rightarrow \cosh x = 1 \longrightarrow \sin y = 1 \Rightarrow y = k\pi$

بخشی از جواب $\boxed{z = 0 + k\pi i}$

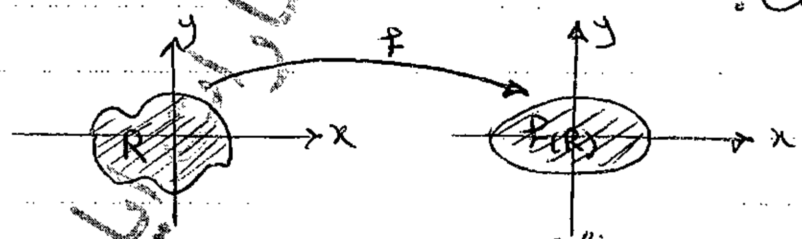
اگر $y = k\pi + \pi/2 \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } k \text{ فرد} \longrightarrow \cosh x = -1 & \text{غ ق ق} \\ \text{اگر } k \text{ زوج} \longrightarrow \cosh x = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

بخشی از جواب $\boxed{z = 0 + i(2k\pi + \pi/2)}$

نگاشت:

$f: C \longrightarrow C$

$z \longrightarrow f(z) = w$




تصویر ناحیه $R$ تحت نگاشت $f$، $f(R)$ می‌شود.

انواع نگاشت: انتقال - دوران - انعکاس - دوخطی (موبیوس) - مثلثاتی $\sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$ - نمایی

نگاشت انتقال:

$f(z) = z + b \quad , \quad b = b_1 + i b_2 \quad (b_1, b_2 \in R)$

$= x + iy + b_1 + i b_2 = (x + b_1) + i(y + b_2)$

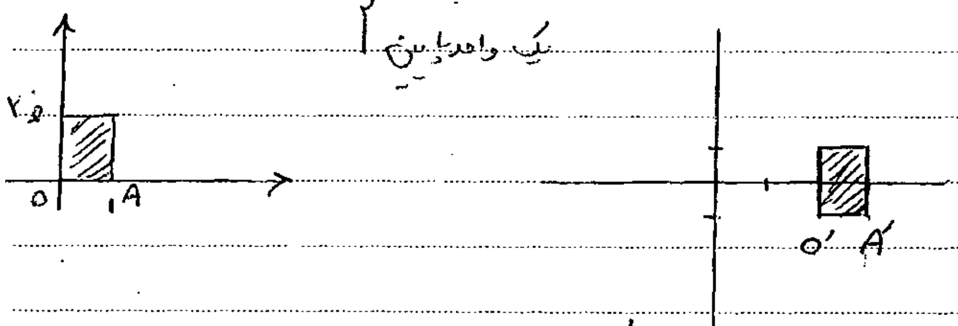
$\Rightarrow \begin{cases} u = x + b_1 \\ v = y + b_2 \end{cases} \qquad (x, y) \longrightarrow (x + b_1, y + b_2)$

مثال: تصویر این ناحیه را تحت نگاشت f تعیین کنید:

$f(z) = z - i + 2$

۲ واحد به راست

یک واحد پایین



* شکل و زاویه و اندازه و فاصله تحت نگاشت انتقال تغییر نمی‌کند بلکه فقط جابه‌جا می‌شود.

نگاشت دوران:

$f = az \quad (a \in \mathbb{C})$

$|f(z)| = |a| . |z|$

زاویه دوران

$\arg(f(z)) = \operatorname{Arg}(a) + \arg(z)$

$|a| < 1 \rightarrow$ فاصله تا مبدأ کم‌تر می‌شود (انقباض)

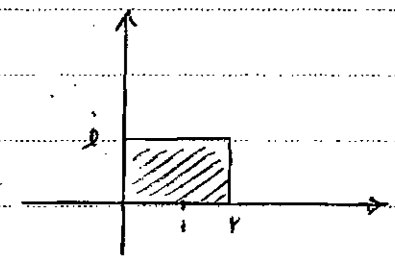
$|a| > 1 \rightarrow$ فاصله تا مبدأ بیشتر می‌شود (انبساط)

$|a| = 1 \rightarrow$ فاصله تا مبدأ ثابت می‌ماند

* نوع شکل عوض نمی‌شود ولی اندازه‌ی آن تغییر می‌کند.

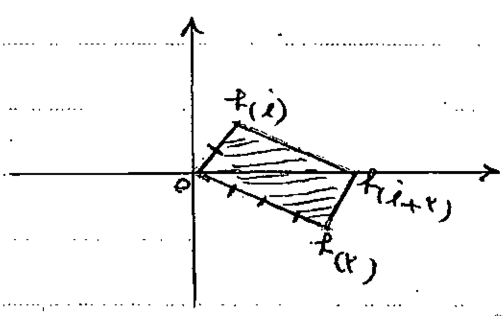
مثال: تصویر ناحیه را تحت نگاشت داده شده در بیاورید:

$f(z) = (\sqrt{3} - i)\, z$




$|\sqrt{3} - i| = 2$

$Arg(\sqrt{3} - i) = -\pi/6$

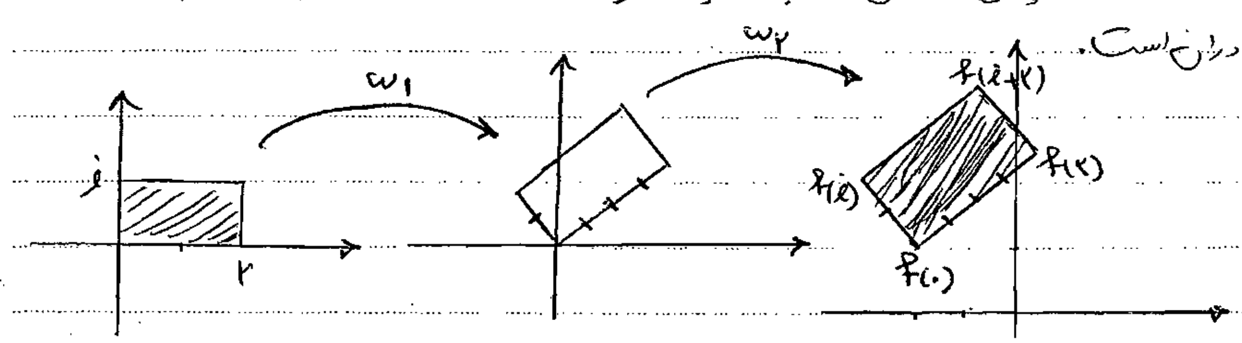





مثال: تصویر ناحیه را به دست آورید:

$f(z) = (1+\sqrt{3}\, i)\, z + i - 2$

از ترکیب دو نگاشت است چون دوران ضرب شده پس اولویت با نگاشت دوران است.




$$\begin{cases} \text{دوران}: w_1 = (1+\sqrt{3}\, i)\, z \longrightarrow |1+\sqrt{3}\, i| = 2 \quad Arg(1+\sqrt{3}\, i) = \pi/3 \\ \text{انتقال}: w_2 = w_1 + i - 2 \end{cases}$$

نگاشت انعکاسی:

این نگاشت در صفر تعریف نمی‌شود و به صورت روبه‌رو است: $w=\frac{1}{z}$

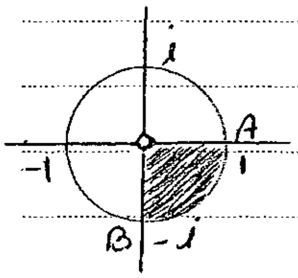
یعنی نقاط داخل دایره به بیرون دایره منتقل می‌شود و برعکس. اگر $|z|<1 \Rightarrow |w|>1$

اگر $|z|=1 \Rightarrow |w|=1$

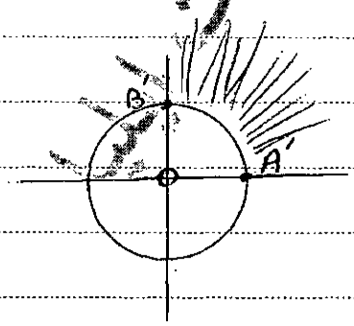
اگر $|z|>1 \Rightarrow |w|<1$

مثال: تصویر را تحت نگاشت بیابید:

$w=\frac{1}{z}$




$\frac{1}{-i}=i$




معادله خط یا دایره در دستگاه اعداد مختلط به فرم زیر است:

$Az\bar{z}+Bz+C\bar{z}+D=0 \qquad (A, B, C, D \in \mathbb{C})$

$A=0$ خط $\rightarrow$
- $D=0 \rightarrow$ منحنی از مبدأ عبور می‌کند
- $D\neq 0$ منحنی از مبدأ عبور نمی‌کند

$A\neq 0$ دایره $\rightarrow$
- $D=0 \rightarrow$ دایره‌ای که از مبدأ می‌گذرد
- $D\neq 0 \rightarrow$ دایره‌ای که از مبدأ نمی‌گذرد

Subject:
Year. Month. Date. ۱۹

نگاشت $\frac{1}{z}$ نقاط صفحه را به کجا می‌برد:

اگر $w=\frac{1}{z} \Rightarrow z=\frac{1}{w}$

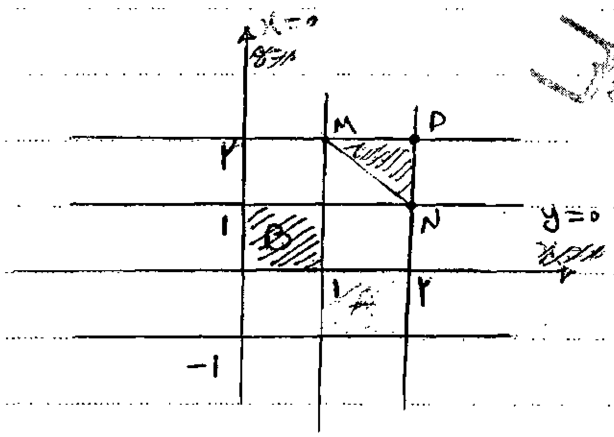
$$\left(A\cdot\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{\bar{w}}+B\cdot\frac{1}{w}+C\cdot\frac{1}{\bar{w}}+D=0\right)\times w\bar{w}$$

$$A+B\bar{w}+Cw+Dw\bar{w}=0$$

$A=0 \to D\neq 0 \to$ خطی که از مبدأ عبور نمی‌کند $\xrightarrow{\text{تصویر}}$ دایره‌ای که از مبدأ می‌گذرد.

$A=0 \to D\neq 0 \to$ دایره‌ای که از مبدأ عبور می‌کند $\xrightarrow{\text{تصویر}}$ خطی که از مبدأ عبور نمی‌کند.

مثال: تصویر خط $x=a$ و $y=b$ را تحت نگاشت $\frac{1}{z}$ انعکاس تعیین کنید:




* هرچه به مبدأ نزدیک‌تر شویم فاصله تصویر آن در بی‌نهایت می‌افتد.

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2} \longrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v=\dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

اگر $x=a\neq 0 \rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{a}{a^2+y^2} \\ v=\dfrac{-y}{a^2+y^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow u^2+v^2=\frac{a^2}{(a^2+y^2)^2}+\frac{y^2}{(a^2+y^2)^2}=\frac{1}{(a^2+y^2)}\times \frac{a}{a}=\frac{u}{a}$$

$$\Rightarrow \left(u-\frac{1}{2a}\right)^2+v^2=\frac{1}{4a^2}$$

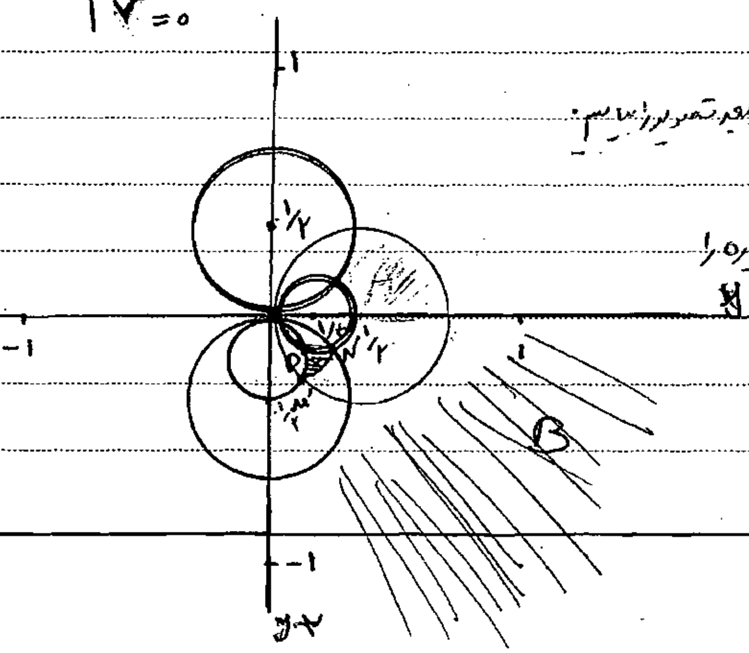
اگر $x=0 \rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=-\frac{1}{y} \end{cases}$

اگر $y=b\neq 0 \rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+b^2} \\ v=\dfrac{-b}{x^2+b^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow u^2+v^2=\frac{1}{x^2+b^2}=\frac{-v}{b} \Rightarrow \boxed{u^2+\left(v+\frac{1}{2b}\right)^2=\frac{1}{4b^2}}$$

دایره‌های با مرکز روی محور عمودی

اگر $y=0 \rightarrow \begin{cases} u=\frac{1}{x} \\ v=0 \end{cases}$




می‌توان معادله خط MN را بنویسیم و بعد تصویر را بیابیم.

۳ نقطه از دایره را داریم پس می‌توان دایره را رسم کرد. مرکز دایره روی عمود منصف ۲ پاره خط است.

جلسه پنجم ۲۰:

نگاشت خطی:

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (a,b,c,d\in C)$$

می توان اول تقسیم را انجام داد و جمله مخرج را در صورت ایجاد کرد.

$$w=\frac{\frac{a}{c}(cz+d)+b-\frac{ad}{c}}{(cz+d)}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c}}{(cz+d)}$$

$bc\neq ad$ شرط دوخطی بودن نگاشت است.

بهتر است نگاشت دوخطی را به مراحل و نگاشت های زیر تبدیل کرد.

$w_1=cz \rightarrow$ نگاشت دوران

$w_2=w_1+d \rightarrow$ نگاشت انتقال

$w_3=\frac{1}{w_2} \rightarrow$ نگاشت انعکاس

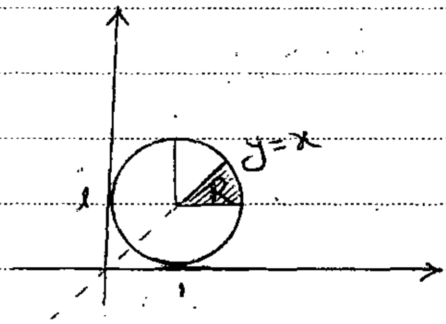
$w_4=\frac{bc-ad}{c}w_3 \rightarrow$ نگاشت دوران

$w_5=w_4+\frac{a}{c} \rightarrow$ نگاشت انتقال

مثال: تصویر ناحیه $R$ را تحت نگاشت زیر تعیین کنید:

Subject
Date

$$w = \frac{2z - i}{iz + 1 - i}$$



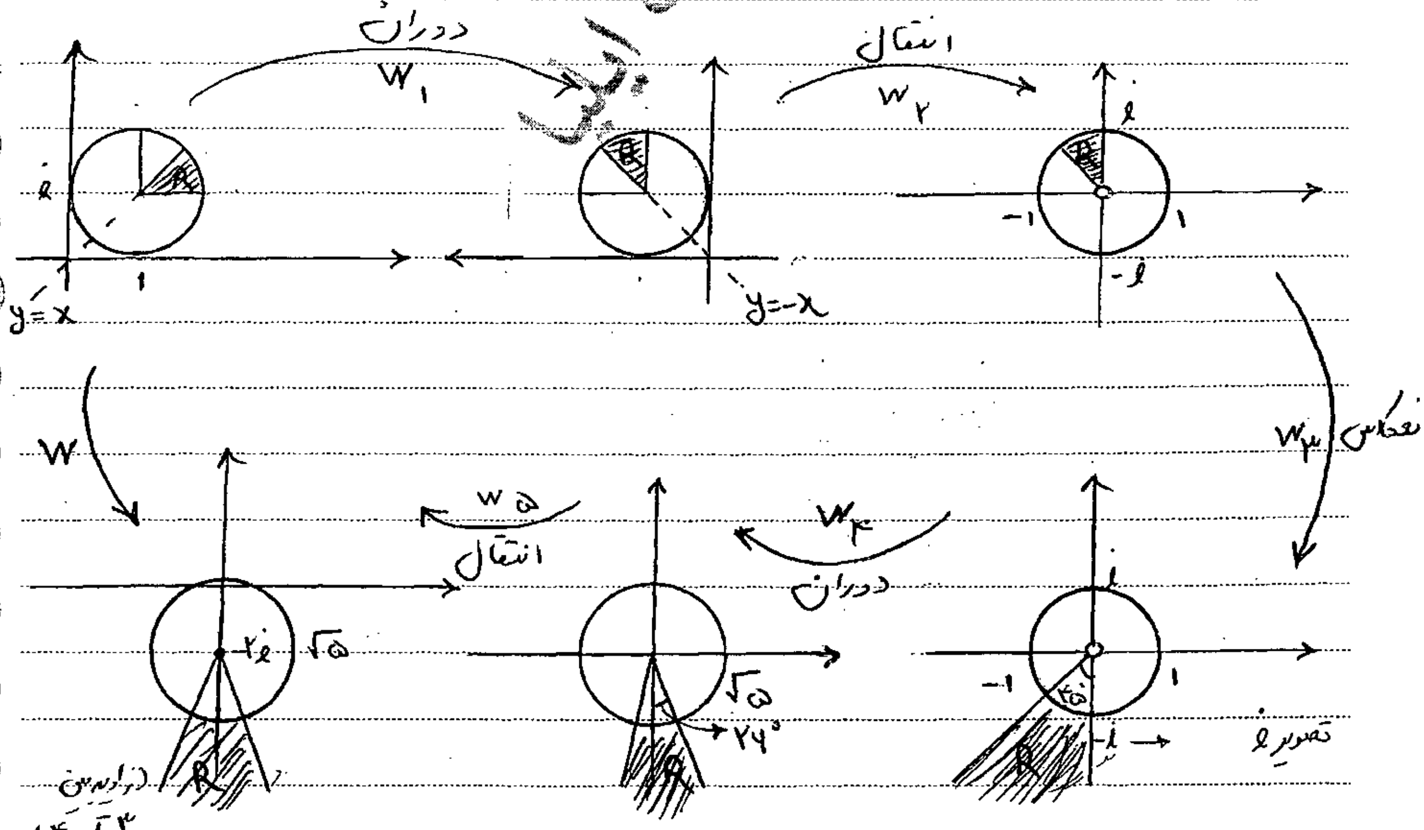

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$\frac{-2i\,(iz+1-i) + i + 2}{(iz+1-i)} = -2i + \frac{i+2}{iz+1-i}$$

$w_1 = iz$ $\qquad w_2 = w_1 + 1 - i$ $\qquad w_3 = \dfrac{1}{w_2}$

$\arg tg\left(\frac{1}{0}\right) = \pi/2$

$w_4 = (i+2)\, w_3$ $\qquad w_5 = -2i + w_4$



نگاشت نمایی:

$w=e^z$

اگر $z=x+iy \Rightarrow |w|=|e^z|=|e^x\cos y+ie^x\sin y|=e^x$

$$\arg(w)=tg^{-1}\left(\frac{e^x\sin y}{e^x\cos y}\right)=y$$

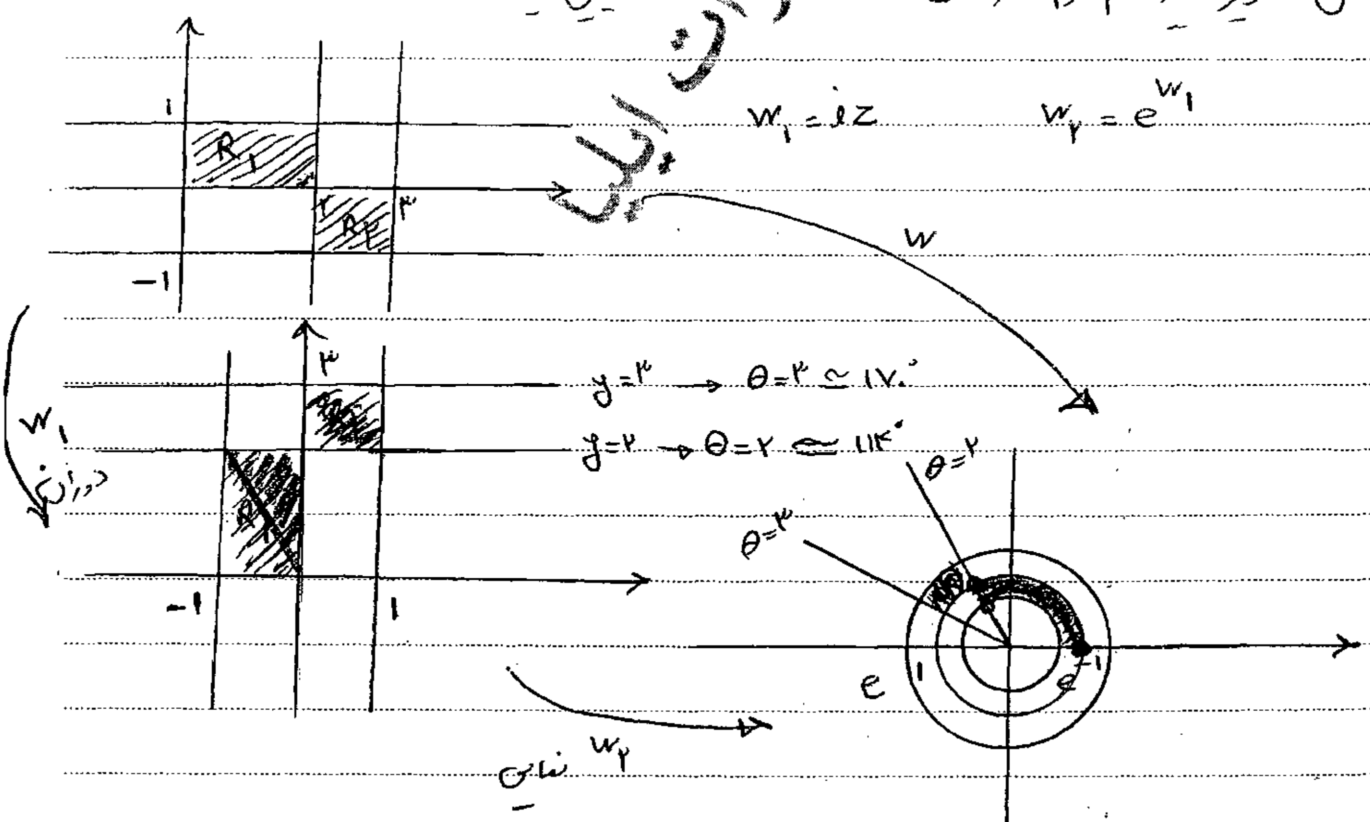
* خطوط عمودی $x=a$ تحت نگاشت نمایی تبدیل به دایره به شعاع $e^x$ می‌شوند

* خطوط افقی $y=b$ تحت نگاشت نمایی تبدیل به شعاع‌های y رادیان می‌شوند

مثال: تصویر ناحیه $R_1, R_2$ را تحت نگاشت $w=e^{iz}$ تعیین کنید:

$w_1=iz \qquad w_2=e^{w_1}$





Subject
Date

نگاشت مثلثاتی:

$w=\cos z$

اگر $z=x+iy \Rightarrow w=\cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=\cos x\cosh y \\ v=-\sin x\sinh y \end{cases}$$

$$\left(\frac{u}{\cosh y}\right)^2+\left(\frac{v}{\sinh y}\right)^2=\cos^2 x+(-\sin x)^2=1$$

$$\left(\frac{u}{\cos x}\right)^2-\left(\frac{v}{\sin x}\right)^2=(\cosh y)^2-(-\sinh y)^2=1$$

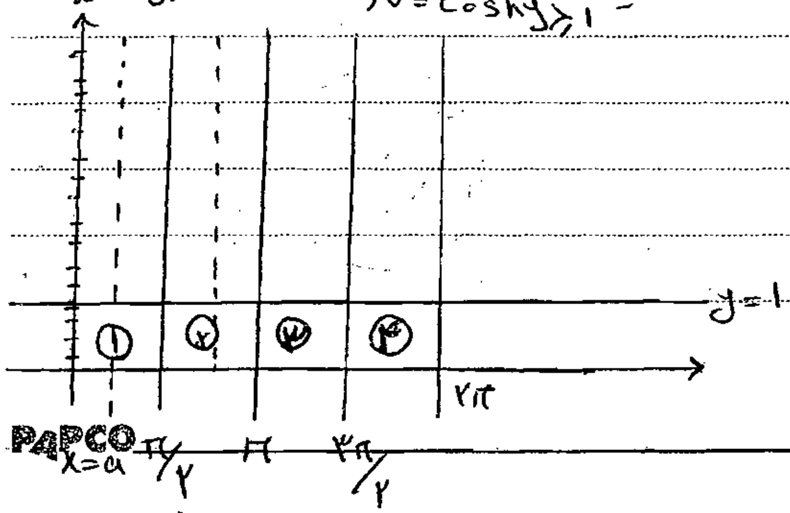
* خطوط افقی $y=b\neq 0$ تحت نگاشت مثلثاتی تبدیل به بیضی می‌شوند

* خطوط عمودی $x\neq k\pi, k\pi+\pi/2$ تحت نگاشت مثلثاتی تبدیل به هذلولی می‌شوند.

مثال: تصویر ناحیه‌ها را تحت نگاشت $w=\cos z$ تعیین کنید.

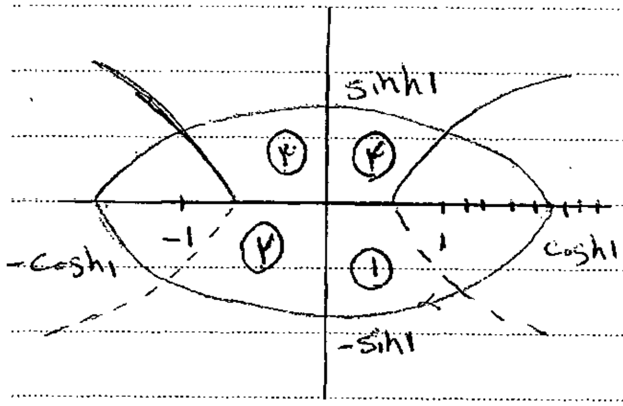
$x=0, y>0 \to v=0, u=\cosh y\geq 1$

$x=0, y>0 \to v=0, u=\cosh y\geq 1$




$x=\pi/2, y>0 \to u=0, v=-\sinh y\leq 0$

میان‌ترم سه ۱۲ آذر




ربع ① $\frac{u^2}{\cos^2 a} - \frac{v^2}{\sin^2 a} = 1$

اگر $y=1 \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 x} + \frac{v^2}{\sinh^2 x} = 1$

اگر $y=0 \Rightarrow 0 \le x \le 2\pi \to v=0 \,,\, u=\cos x$

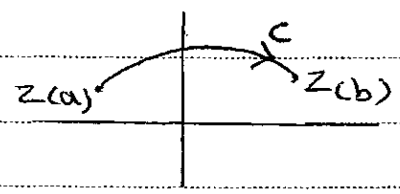


انتگرال مختلط

کمان – کمان ساده – کمان بسته – کانتور

کمان c: یک کمان از $t=a$ تا $t=b$ عبارت است از

$z(t) = x(t) + i\,y(t) \quad (a \le t \le b)$




کمان c را مشتق‌پذیر گوییم اگر مؤلفه‌های آن مشتق‌پذیر باشد یعنی: $z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$

Subject
Date

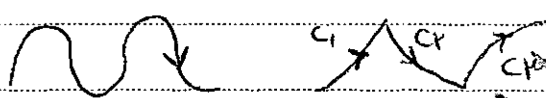
* منظور از کمان مشتق پذیر پیوسته این است که $Z'(t)$ موجود باشد و پیوسته باشد.

* منظور از کمان هموار این است که کمان مشتق پذیر پیوسته باشد و $Z'(t) \neq 0$ باشد (روی منحنی نقطه زاویه دار نداشته باشیم)

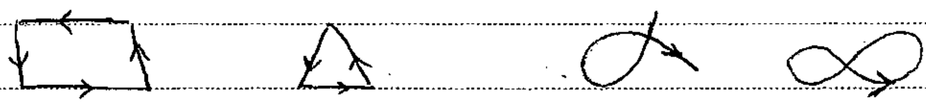
* منظور از کمان ساده این است که $Z(t)$ یک به یک باشد.

* منظور از کمان بسته این است که ابتدا و انتهای خم بر هم منطبق باشند.

**کانتور (مسیر):** عبارت است از اجتماع تعدادی کمان هموار به طوری که انتهای کمان n ام بر ابتدای کمان n+1 ام منطبق باشد.




$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$



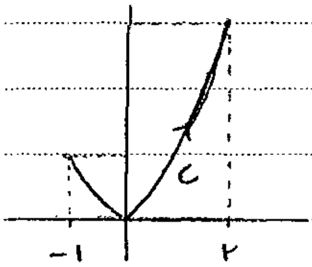
کانتور ساده و بسته

فرض کنید C یک کمان هموار باشد. $C: Z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b)$

اگر تابع مختلط $f(z)$ در نقاط C تعریف شده باشد آنگاه انتگرال f روی C به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t=a}^{t=b} f(Z(t)) \cdot Z'(t)\, dt$$

مثال: از تابع $f(z)=z^2+\bar{z}$ روی مسیر $y=x^2$ از $(-1,1)$ تا $(2,4)$ انتگرال بگیرید.



اگر $\to x=t \to y=t^2$

$c: z(t)=t+t^2 i \qquad -1\le t\le 2$

$z'(t)=1+2ti$

$f(z(t))=(t+t^2 i)^2+(t-t^2 i)=t^2-t^4+2t^3 i+t-t^2 i$

$$\int_c f(z)\,dz=\int_{t=-1}^{t=2}(t^2-t^4+2t^3 i+t-t^2 i)(1+2ti)\,dt$$

$$=\int_{-1}^{2}(t^2-t^4+t-4t^4+2t^2)+i(2t^3-2t^5+2t^2+2t^3-t^2)\,dt$$

$$=\left(-t^5+\tfrac{1}{2}t^4+\tfrac{1}{3}t^3+\tfrac{1}{2}t^2\right)\Big|_{-1}^{2}+i\left(-\tfrac{1}{3}t^6+t^4+\tfrac{1}{3}t^3\right)\Big|_{-1}^{2}=\dots$$

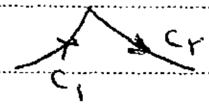
بعضی از خواص انتگرال معین:

① $\int_c (f(z)\pm g(z))\,dz=\int_c f(z)\,dz\pm\int_c g(z)\,dz$

② $\int_c k f(z)\,dz=k\int_c f(z)\,dz \qquad (k\in \mathbb{C})$

Subject
Date

۳) $\int_{c_1 \cup c_2} f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{c_2} f(z)\,dz$



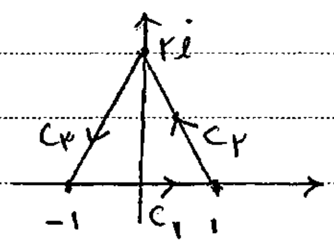

۴) $\int_c |dz| = \int_{t=a}^{t=b} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\;dt = L$ طول خم

۵) $\left|\int_c f(z)\,dz\right| \leq \int_c |f(z)|\cdot|dz|$

۶) $\int_{-c} f(z)\,dz = -\int_c f(z)\,dz$

* اگر جهت بر روی کانتور مشخص نباشد جهت مثلثاتی را جهت کانتور می‌گیریم.

مثال: از تابع $f(z) = \bar{z}^2$ روی مثلث با رئوس ۱- و ۱ و $2i$ انتگرال بگیرید.




$c = c_1 \cup c_2 \cup c_3$

$$\oint_c f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{3} \int_{c_i} f(z)\,dz$$

$c_1: \; y = 0 \qquad z(t) = t \qquad -1 \leq t \leq 1$

$f(z(t)) = t^2 \qquad z'(t) = 1$

P4PCO

Subject ۲۴
Date

$$C_2 : y+2x=2 \longrightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=2+2t \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} x=t \\ y=2-2t \end{cases}} \quad 0\leq t\leq 1 \qquad z(t) = -t + (2+2t)i \qquad -1\leq t\leq 0$$

$$z'(t) = -1+2i \qquad f(z(t)) = (-t-(2+2t)i)^2$$

$$C_3 : y-2x=2$$

$$\begin{cases} x=-t \\ y=2-2t \end{cases} \qquad z(t) = -t+(2-2t)i \qquad 0\leq t\leq 1$$

$$z'(t) = -1-2i \qquad f(z) = (-t-(2-2t)i)^2$$

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{-1}^{1} t^2 \cdot 1 \cdot dt + \int_{-1}^{0} (-t-(2+2t)i)^2 \cdot (-1+2i)\cdot dt$$

$$+\int_0^1 (-t-(2-2t)i)^2 \cdot (-1-2i)\, dt = \ldots$$

Subject
Date

جلسه ششم:

قضیه انتگرال کوشی:

فرض کنید $C$ یک کانتور ساده و بسته بوده و تابع $f(z)$ روی $C$ و درون $C$ تحلیلی باشد در این صورت

$$\oint_C f(z)\,dz=0$$

اثبات: با فرض $f(z)=u+iv$ و $z(t)=x+iy$ خواهیم داشت:

$$\oint_C f(z)\,dz=\oint_C (u+iv)(dx+idy)=\oint_C u\,dx-v\,dy+i\oint_C u\,dy+v\,dx$$

قضیه گرین

$$=\iint_R(-v_x-u_y)\,dA+i\iint_R(v_y-u_x)\,dA=0+0i=0$$

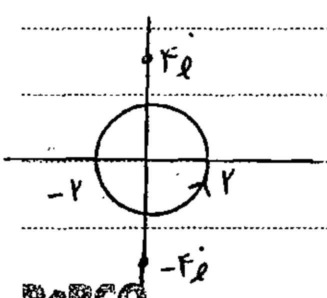
چون $f$ تحلیلی فرض شده طبق معادلات کوشی ریمان داریم: $u_x=v_y$ و $u_y=-v_x$

مثال:

برای حل اول باید نقاط غیر تحلیلی پیدا شود و وضعیت آن ها نسبت به کانتور مشخص شود.

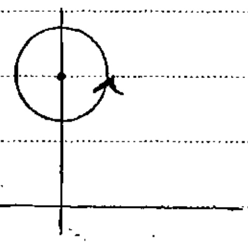
الف) $\oint_{|z|=2}\frac{z+\sin z}{z^2+16}\,dz=0$

نقاط $4i$ و $-4i$ نقاط غیر تحلیلی هستند که بیرون کانتور قرار دارند.




چون تابع روی دایره (کانتور) و داخل دایره تحلیلی است پس جواب انتگرال صفر است.

ب) $\oint_{|z-i|=1/2} \frac{e^{-z}}{z^2}\, dz = 0$



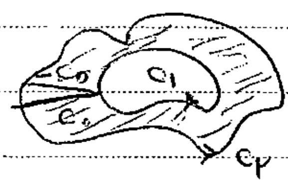
کانتور دایره‌ای به شعاع ۱/۲ و مرکز i چون تابع داخل و روی کانتور تحلیلی است

پس جواب انتگرال صفر است.

* اگر نقاط غیر تحلیلی روی کانتور داخل کانتور قرار نگیرد مقدار انتگرال برابر صفر است.

قضیه: فرض کنید $C_1$ و $C_2$ دو کانتور بسته و ساده، $C_1$ درون $C_2$ باشد. اگر تابع $f(z)$ در نقاط بین $C_1$ و $C_2$ و روی $C_1$ و $C_2$ تحلیلی باشد.

$$\oint_{C_2} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz$$



$C = C_0 \cup C_1 \cup (-C_0) \cup (-C_2)$ ساده و بسته است

اگر کانتور بزرگ داشتیم می‌توانیم آن را کوچک کنیم که با نقاط غیر تحلیلی برخورد نداشته باشد.

مثال: $I = \oint_C \frac{1}{z-z_0} dz = ?$

الف) اگر C یک کانتور ساده بسته بوده و $z_0$ خارج C باشد.

چون $z_0$ خارج کانتور است و تابع در نقاط داخل و روی کانتور تحلیلی است پس جواب انتگرال صفر است.

ب) اگر c یک کانتور ساده و بسته بوده و $z_0$ درون c باشد.

چون $z_0$ درون کانتور هست دایره‌ی $C_0$ به شعاع r و به مرکز $z_0$ وجود دارد که درون c قرار دارد.

$$C_0: z - z_0 = re^{i\theta} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$dz = rie^{i\theta}\,d\theta$$

طبق قضیه قبل چون نقاط تحلیلی اند

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{r}\cancel{e^{i\theta}}} \times \cancel{r}\, i\, \cancel{e^{i\theta}}\, d\theta = 2\pi i$$

قضیه فرمول انتگرال کوشی: فرض کنید c یک کانتور ساده و بسته بوده و $z_0$ درون c باشد. اگر تابع $f(z)$ در نقاط درون c و روی c تحلیلی باشد آنگاه:

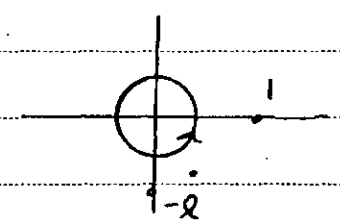
$$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

مثال: مطلوب است محاسبه:

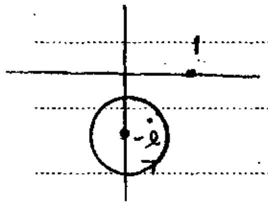
$$I = \oint_c \frac{(2z+i)\cos z}{(z-1)(z+i)}\,dz$$

(نقاط غیر تحلیلی تابع: $-i$ و $1$)

الف) $C: |z| = 0.5$ دایره‌ای به شعاع ۰٫۵ و مرکز مبدأ. نقاط غیر تحلیلی بیرون کانتور است پس جواب انتگرال صفر است.



ب) $C: |z+i| = 0/5$ دایره‌ای به مرکز $-i$ و شعاع ۰/۵

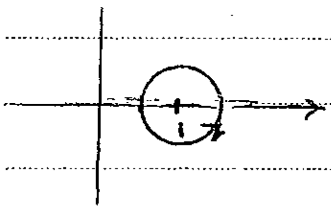


$$I = \oint_C \frac{\frac{2z+i\cos z}{z-1}}{z-(-i)}\,dz \qquad f_1 z$$

تابع $f_1 z$ روی دایره و داخل دایره تحلیلی است.

$$= 2\pi i\, f_1(-i) = 2\pi i \left(\frac{-i\cos(-i)}{-i-1}\right)$$

ج) $C: |z-1| = 0/5$ دایره‌ای به مرکز ۱ و شعاع ۰/۵، نقطه یک نقطه غیرتحلیلی در داخل دایره است

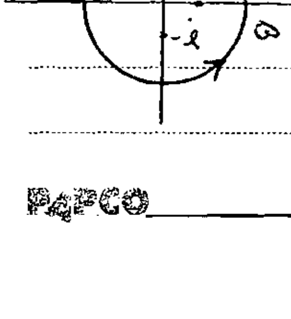


$$I = \oint_C \frac{\frac{(2z+i)\cos z}{(z+i)}}{(z-1)}\,dz \qquad f_2 z$$

تابع $f_2 z$ روی دایره و داخل کانتور تحلیلی است.

$$= 2\pi i\, f_2(1) = 2\pi i \left(\frac{(2+i)\cos(1)}{(1+i)}\right)$$

د) $C: |z| = 5$ دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۵ (هر دو نقطه درون کانتور است)



می‌توان کسر جلوی انتگرال را تجزیه کرد و انتگرال را به دو انتگرال تبدیل کرد.

$$\frac{2z+i}{(z-1)(z+i)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z+i)}$$

Subject

Date

$$\frac{A(z+i)+B(z-1)}{(z-1)(z+i)}=\frac{(A+B)z+(Ai-B)}{(z-1)(z+i)} \rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ Ai-B=i \end{cases}$$

$$A(1+i)=2+i \Rightarrow A=\frac{2+i}{1+i}$$

$$B=2-A=2-\frac{2+i}{1+i}=\frac{2+2i-2-i}{1+i}=\frac{i}{1+i}$$

$$I=\oint_c \frac{\frac{2+i}{1+i}\cos z}{z-1}\,dz+\oint_c \frac{\frac{i}{1+i}\cos z}{z-(-i)}\,dz$$

$$=2\pi i\,\frac{2+i\cos 1}{1+i}+2\pi i\,\frac{i\cos(-i)}{1+i}=2\pi i\left(\frac{2+i(\cos 1)}{1+i}+\frac{i\cos(-i)}{1+i}\right)$$

$$2\pi i\, f(z_0)=\oint_c \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$$ اگر از طرفین رابطه بشود نسبت به z. مشتق بگیریم می‌شود

$$2\pi i\, f'(z_0)=\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$

دوباره مشتق بگیریم

$$2\pi i\, f''(z_0)=\oint_c \frac{1\times 2\, f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz$$

$$\vdots$$

$$2\pi i\, f^{(n)}(z_0)=\oint_c \frac{n!\, f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

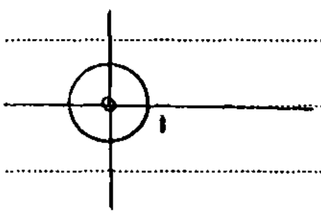
تعمیم فرمول انتگرال کوشی در حالت کلی :

فرض کنید C یک کانتور ساده و بسته بوده و $z_0$ درون C باشد. اگر تابع $f(z)$ در نقاط درون C و روی C تحلیلی باشد آنگاه مشتقات $f(z)$ از هر مرتبه‌ای در نقطه‌ی $z_0$ موجود بوده و در این نقطه تحلیلی بوده و داریم:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \Rightarrow \oint_C\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

مثال: انتگرال های زیر را حل کنید.

الف) $\oint_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^5}\,dz$

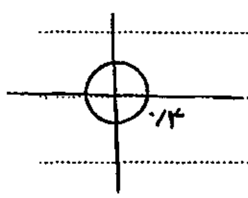


$f(z)=\sin z \qquad z_0=0 \qquad n=4$

$f'(z)=\cos z \to f''(z)=-\sin z \to f'''(z)=-\cos z \to f^{(4)}(z)=$

$=\frac{2\pi i}{4!}f^{(4)}(z_0)=\frac{2\pi i}{4!}\sin(z_0)=0$

ب) $\oint_{|z|=0.4}\frac{\mathrm{Ln}(2z-i)}{(3z+1)^2}\,dz$

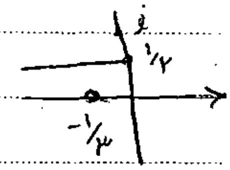


نقاط غیر تحلیلی Ln و ریشه‌ها مخرج : نقاط غیر تحلیلی

ریشه‌های مخرج : $(3z+1)^2=0 \to z=-\frac{1}{3}$

Subject
Date

صورت کسر: $\begin{cases} Im(2z - i) = 0 \\ Re(2z - i) \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y - 1 = 0 \\ 2x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1/2 \\ x \leq 0 \end{cases}$




$f(z) = \frac{1}{9} Ln(2z - i)$ , $z_0 = -1/4$ , $n = 1$

این توابع درست نیست زیرا باید دارای پرانتز $(z - z_0)$ باشد. باید $f(z)$ را تغییر داد.

$f'(z) = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{2z - i}$ $\quad f'(-1/4) = \frac{2}{9(-\frac{2}{4} - i)}$

$= \frac{2\pi i}{1!} f'(-1/4) = 2\pi i \frac{2}{-6 - i}$

ج) $\oint_{|z|=4} \frac{e^{-z} + z^3}{(3z-2)^3} dz$ نقاط غیرتحلیلی روی دایره یا درون دایره انتگرال ناصره

$(3z-2)^3 = 0 \longrightarrow 3z - 2 = 0 \longrightarrow z = 2/3$ می‌شود.

$f(z) = \frac{1}{27} e^{-z} + z^3$ $\quad z_0 = 2/3$ $\quad n = 2$

$f'(z) = \frac{1}{27}(-e^{-z} + 3z^2)$ $\quad f''(z) = \frac{1}{27}(e^{-z} + 6z)$

$= \frac{2\pi i}{2!} f''(z_0) = \dots$

$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}}$

اگر C دایره $z - z_0 = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ و $f(z)$ روی C کراندار باشد یعنی:

$|f(z)| \leq M$ $\quad \forall_z$ روی کانتور

می‌توان گفت مشتق مرتبه n ام کراندار است.

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \le \frac{n!}{2\pi}\oint_C \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}|dz| \le$$

$$\frac{n!}{2\pi}\oint_C \frac{M}{R^{n+1}}|dz| = \frac{n!}{\cancel{2\pi}}\cdot\frac{M}{R^{n+\cancel{1}}}\cdot\cancel{2\pi}\cancel{R}$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| \le \frac{M\cdot n!}{R^n}$$ نامساوی کوشی

قضیه لیوویل: هر تابع تام و کراندار، ثابت است.

نتیجه: توابع $\sin z$ و $\cos z$ از نظر قدر مطلق کراندار نمی‌باشند.

سری تیلور:

اگر تابع $f(z)$ در نقطه $z_0$ تحلیلی باشد، آنگاه از هر مرتبه‌ای در این نقطه مشتق‌پذیر بوده، در همسایگی این نقطه دارای نمایش سری تیلور به صورت زیر است:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

که در آن:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Subject
Date

از طرف دیگر، اگر $a_n$ دنباله ای از اعداد مختلط باشد آن گاه یک سری توانی حول $z_0$ به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ می باشد در صورتی که $R$ شعاع همگرایی این سری باشد آن گاه در دامنه همگرایی می توان از جمله های سری مشتق گرفت و بنابراین اگر:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad |z-z_0|<R$$

آن گاه:

$$g'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \qquad |z-z_0|<R$$

یعنی تابع $g(z)$ در نقطه $z_0$ تحلیلی است.

بنابراین اگر تابع $f(z)$ در نقطه $z_0$ غیر تحلیلی باشد آن گاه نمی توان آن را به صورت یک سری توانی با توان های مثبت و با جملات $(z-z_0)^n$ نمایش داد. (زیرا در غیر این صورت تابع تحلیلی می شود)

ولی می توان $f(z)$ را به صورت یک سری توانی با توان های مثبت و منفی با جملات $(z-z_0)^n$ به فرم زیر نمایش داد.

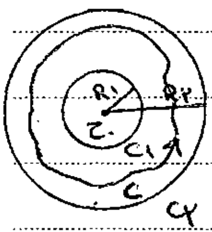
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}}_{\text{قسمت اصلی سری لوران}}$$

سری لوران یا لورانت

$$= \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

این سری را سری لوران یا لورانت $f(z)$ حول $z_0$ می نامند.

اگر تابع $f(z)$ در نقاط بین $c_1$ و $c_2$ و روی $c_1$ و $c_2$ تحلیلی باشد، $c_1$ و $c_2$ دایره های به مرکز $z_0$ و $c_1$ درون $c_2$ فرض می شود. در این صورت تابع $f(z)$ را می توان به صورت یک سری لوران به صورت زیر نمایش داد.




$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \qquad R_1 < |z-z_0| < R_2$$

$a_n$ ها و $b_n$ ها ضرایب سری لوران $f$ می نامیم که توسط فرمول های زیر محاسبه می شوند.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c (z-z_0)^{n+1} f(z) dz \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

که در آن $c$ یک کانتور ساده و بسته حول $z_0$ است به طوری که $c_1$ درون $c$ و $c$ درون $c_2$ باشد. همه ی انتگرال ها همگرا می باشند و ناحیه ی همگرایی را می توان با کوچک کردن $c_1$ و بزرگ نمودن $c_2$ تا جایی که از نقطه غیر تحلیلی عبور نکند گسترش داد.

Subject
Date

سری لوران در دامنه همگرایی منحصر به فرد است.

مهم ترین رابطه:

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i\, b_1$$

اساس قضیه

مثال: مقدار انتگرال را بیابید.

$$\oint_{|z|=1} z^2 e^{-1/z}\,dz = ? \quad = 2\pi i \times \frac{-1}{3!} = \frac{-\pi i}{3}$$

$$* \quad e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots \quad u \in C \quad *$$

$$e^{-1/z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} - \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots$$

$$z^2 e^{-1/z} = z^2 - z + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} + \cdots \qquad z \neq 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2!} \qquad a_1 = -1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_n = 0 \quad n \geq 3$$

$$b_1 = \frac{-1}{3!} \qquad b_2 = \frac{1}{4!} \quad , \ldots \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{(n+2)!}$$

PAPCO

Subject ۳۰
Date

جلسه هفتم:

مثال: سری های لوران تابع $f(z)=\dfrac{3z-2}{(z-2)(z+3)}$ را به دست آورید:

سری لوران حول $z=-3$:

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z+3}\cdot\frac{3z-2}{z-2}\longrightarrow$$ در $z=-3$ تحلیلی است

$$\frac{3z-2}{z-2}=\frac{3(z-2)+4}{z-2}=\frac{1}{z+3}\left[3+\frac{4}{z-2}\right]$$

$$z-2=z+3-5$$

$$* \quad \frac{1}{1-u}=1+u+u^2+u^3+\dots \qquad |u|<1$$

$$* \quad \frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+\dots \qquad |u|<1$$

$$=\frac{1}{z+3}\left[3+\frac{4}{(z+3)-5}\right]=\frac{1}{z+3}\left[3+\frac{-4/5}{1-\left(\frac{z+3}{5}\right)}\right]$$

از ۵ فاکتور می‌گیریم.

$$=\frac{1}{z+3}\left[3-\frac{4}{5}\left[1+\frac{z+3}{5}+\left(\frac{z+3}{5}\right)^2+\dots\right]\right] \qquad (|z+3|<5)$$

$$\frac{11/5}{z+3}-\frac{4}{(5)^2}-\frac{4}{5^3}(z+3)-\frac{4}{5^4}(z+3)^2-\dots \qquad (|z+3|<5)$$

$$f(z)=\frac{1}{z+3}\left[3+\frac{4}{(z+3)-5}\right]=\frac{1}{z+3}\left[3+\frac{\frac{4}{z+3}}{1-\frac{5}{z+3}}\right]$$

Subject

Date

$$= \frac{1}{z+3}\left[3 + \frac{4}{z+3}\left(1 + \frac{5}{z+3} + \left(\frac{5}{z+3}\right)^2 + \cdots\right)\right] \qquad \left|\frac{5}{z+3}\right| < 1$$

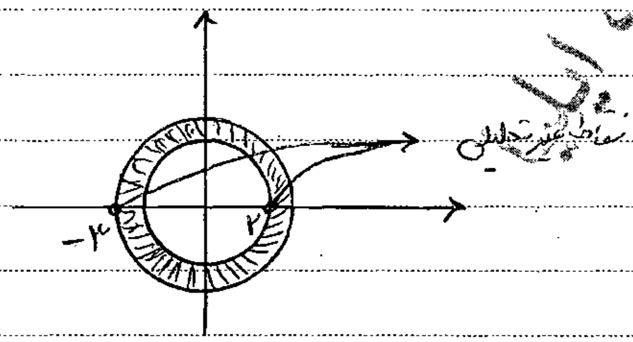
$$= \frac{3}{z+3} + \frac{4}{(z+3)^2} + \frac{4\times 5}{(z+3)^3} + \cdots \qquad (|z+3| > 5)$$

بطور مشابه سری‌های لوران حول $z=2$ ، یکی در دامنه همگرایی $|z-2|<5$ و دیگری در دامنه همگرایی $|z-2|>5$ به دست می‌آید.

یک بار به مرکز ۲ و شعاع ۵ نقاط داخل و بیرون دایره و یک بار به مرکز ۳- و شعاع ۵ نقاط داخل و بیرون دایره.

مثال ۱۰: مثال قبل را در دامنه همگرایی $2<|z|<3$ بنویسید.
سری لوران حول مبدأ:

$$\frac{3z-2}{(z+3)(z-2)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+3}$$




$$= \frac{(A+B)z + 3A - 2B}{(z-2)(z+3)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ 3A-2B=-2 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{4}{5} , B=\frac{11}{5}$$

$$f(z) = \frac{4/5}{z-2} + \frac{11/5}{z+3}$$

را از بسط مکلورن می‌گیریم — از علامت مکلورن می‌گیریم

PAPCO

* از عدد کوچکتر بگیریم نقاط همگرایی داخل دایره و اگر از متغیر کوچکتر بگیریم نقاط همگرایی بیرون دایره قرار دارد.

$$= \frac{4/5z}{1-2/z} + \frac{11/15}{\frac{z}{3}+1} = \frac{4}{5z}\left(1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\cdots\right) + \frac{11}{15}\left(1-\frac{z}{3}+\left(\frac{z}{3}\right)^2+\cdots\right) = \cdots$$

$$2<|z|<3 \leftarrow \left|\frac{2}{z}\right|<1 \qquad \left|\frac{z}{3}\right|<1$$

مثال: سری های لوران تابع $f(z)=\frac{\cos(1/z)}{z+2}$ را به دست آورید و به کمک آن مقدار $\oint_{|z|=1} f(z)\,dz$ را حساب کنید:

$$f(z) = \frac{1}{z+2}\cdot\cos\frac{1}{z} = \frac{1/2}{1+z/2}\cdot\cos\frac{1}{z}$$ حول نقطه صفر $\left|\frac{z}{2}\right|<1 \to |z|<2$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2-\left(\frac{z}{2}\right)^3+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\cdots\right)$$

$$\star\ \cos u = 1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\cdots\ \star$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}+\frac{z^2}{2^3}-\frac{z^3}{2^4}+\cdots\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\cdots\right)$$

$$= \cdots + (b_2)\frac{1}{z^2} + (b_1)\frac{1}{z} + (a_0) + (a_1)z + \cdots$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos 1/z}{z+2}\,dz = 2\pi i\, b_1 = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}\cdot(2n)!}$$

$$b_2 = \left(\frac{-1}{2\times 2!}+\frac{1}{2^3\times 4!}-\frac{1}{2^5\times 6!}+\cdots\right)$$

Subject
Date

$$b_1 = \left(+\frac{1}{2\times 2!} - \frac{1}{2^3\times 4!} + \frac{1}{2^5\times 6!} - \cdots\right)$$

$$a_0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\times 2!} + \frac{1}{2^5\times 4!} - \cdots\right)$$

$$a_1 = \left(\frac{-1}{2^2} + \frac{1}{2^4\times 2!} - \cdots\right)$$

سری حول $z=-2$ :

$$f(z) = \frac{1}{z+2}\cos\frac{1}{z}$$

با فرض $g(z)=\cos\frac{1}{z}$ $\Rightarrow$ g در نقطه $z=-2$ تحلیلی است

$$\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(-2)}{n!}(z+2)^n$$

$$= g(-2) + g'(-2)(z+2) + \frac{g''(-2)}{2!}(z+2)^2 + \cdots$$

$$f(z) = \frac{\overbrace{g(-2)}^{b_1}}{z+2} + \overbrace{g'(-2)}^{a_0} + \overbrace{\frac{g''(-2)}{2!}}^{a_1}(z+2) + \cdots$$



PAPCO

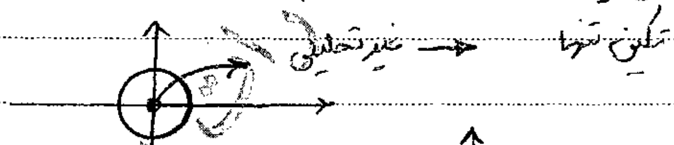
قضیه منفردها:

تکین (منفرد): اگر تابع $f(z)$ در نقطه $z_0$ غیر تحلیلی باشد آنگاه $z_0$ را یک منفرد یا تکین برای $f(z)$ می‌نامیم.

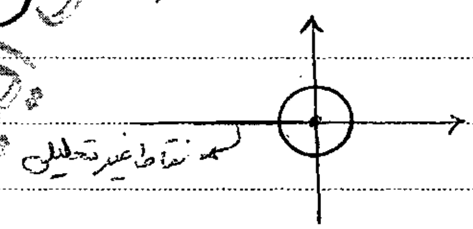
تکین تنها (منفرد جدا شده): اگر $z_0$ یک نقطه تکین $f(z)$ باشد ولی همسایگی محذوف از $z_0$ یافت شود به طوری که تابع $f$ در این همسایگی محذوف تحلیلی باشد آنگاه $z_0$ را تکین تنها یا منفرد جدا شده برای $f(z)$ می‌نامیم.

برای مثال $z=0$ یک نقطه تکین برای توابع $f(z)=\frac{1}{z}$ و $g(z)=\ln z$ است، این نقطه برای $f(z)$ تکین تنها است ولی برای $g(z)$ تکین تنها نمی‌باشد.

$f(z)=\frac{1}{z}$




$g(z)=\ln z$




اگر $z_0$ یک نقطه تکین تنها $f(z)$ باشد آنگاه حول $z_0$ دارای نمایش سری لوران به صورت زیر است:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

اگر در نمایش سری لوران فوق $k$ بزرگترین عدد طبیعی باشد که $b_k \neq 0$ آنگاه $z_0$ قطب مرتبه $k$ ام $f(z)$ می‌نامیم. قطب مرتبه اول را قطب ساده گویند. اگر در نمایش سری لوران فوق همه $b_n$ ها صفر باشد آنگاه

Subject
Date

$z_0$ را قطب رفع شدنی گویند.

اگر در نمایش سری لوران فوق تعداد نامتناهی از $b_n$ ها مخالف صفر باشد آنگاه $z_0$ را قطب اساسی $f(z)$ می نامیم.

مثال: $z=0$ در تمامی توابع تکین تنهاست.

$$f_1(z)=\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots \rightarrow b_n=0$$ پس از مشخصات قطب رفع شدنی

$$f_2(z)=\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}$$ قطب مرتبه اول یا قطب ساده (بالاترین توان مخرج)

قطب

$$f_3(z)=\frac{\sin z}{z^6}=\frac{1}{z^5}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z}-\frac{z}{7!}+\cdots$$ قطب مرتبه ۵ (بالاترین توان مخرج ۵)

قطب

$$f_4(z)=\sin\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots\rightarrow$$ بالاترین توان $\infty$ پس قطب اساسی

$$* \sin u = u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\cdots *$$

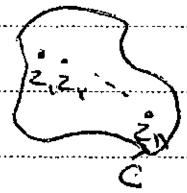
در هر یک از حالت های ذکر شده $b_1$ را مانده تابع $f(z)$ در نقطه $z_0$ می نامیم و با این علامت نشان می دهیم:

$$b_1=\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}\,(f(z))$$

* اگر قطب رفع شدنی باشد مانده تابع صفر است.

PAPCO

قضیه: فرض کنید C یک کانتور ساده و بسته باشد اگر تابع $f(z)$ روی C و درون C به جز احتمالاً در نقاط منفرد جدا شده $z_1, z_2, \ldots, z_n$ درون C تحلیلی باشد آنگاه:




$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j}(f(z))$$

کاری به قطب‌های بیرون کانتور و آن‌ها هم مرتبه نداریم.

* برای یافتن مانده تابع حول قطب اساسی تنها راه نوشتن سری لوران است.

قضیه: فرض کنید $z_0$ یک نقطه تکین تنها $f(z)$ باشد در این صورت $z_0$ یک قطب ساده $f(z)$ است اگر و تنها اگر حد زیر موجود و مخالف صفر باشد:

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

و در این صورت:

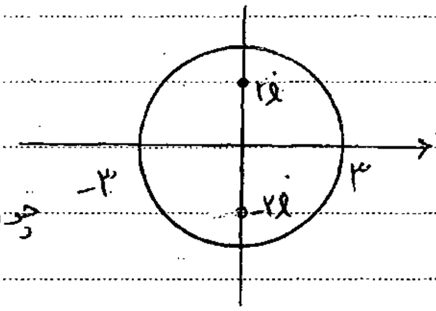
$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}(f(z)) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

مثال: حاصل انتگرال را بیابید:

$$I = \oint_{|z|=3} \overbrace{\frac{e^{-z}}{z^2+4}}^{f(z)}\,dz = ?$$

Subject
Date

$z^2+4=0 \Rightarrow z=\pm 2i$




چون دو قطب درون کانتور است پس مرتبه دوم است و مقدار انتگرال برابر است با:

$$I=2\pi i\left(\underset{z=2i}{\text{Res}}(f(z))+\underset{z=-2i}{\text{Res}}(f(z))\right)$$

$$K_1=\lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{e^{-z}}{z^2+4}=\lim_{z\to 2i}\cancel{(z-2i)}\frac{e^{-z}}{\cancel{(z-2i)}(z+2i)}=\frac{e^{-2i}}{4i}$$

$$K_2=\lim_{z\to -2i}(z+2i)\frac{e^{-z}}{z^2+4}=\lim_{z\to -2i}\cancel{(z+2i)}\frac{e^{-z}}{(z-2i)\cancel{(z+2i)}}=\frac{e^{2i}}{-4i}$$

$$I=2\pi i\left(\frac{e^{-2i}}{4i}+\frac{e^{2i}}{-4i}\right)=-\pi i\cdot\frac{e^{-2i}-e^{2i}}{2i}=-\pi i\sin 2$$

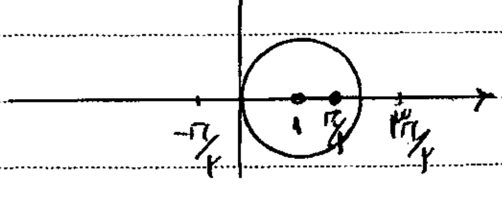
مثال: قطبهای درون کانتور را مشخص کنید:

بی‌نهایت قطب دارد

$$I=\oint_{|z-1|=1}\tan z\,dz=?$$

tg در نقاط $k\pi+\frac{\pi}{2}$ مشکل دارد.

$\cos z=0 \Rightarrow z=k\pi+\frac{\pi}{2}$



$$\lim_{z\to \pi/2}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\sin z}{\cos z}=\lim_{z\to\pi/2}\frac{z-\pi/2}{\cos z}^{\,-1}\cdot\lim_{z\to\pi/2}\sin z^{\,1}=-1$$

$$I=2\pi i\,\underset{z=\pi/2}{\mathrm{Res}}(tg(z))=-2\pi i$$

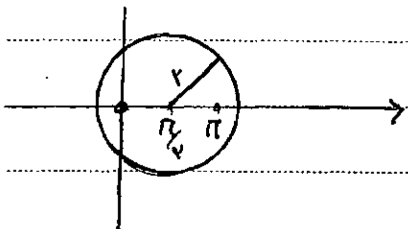
تذکر: اگر $z_0$ یک قطب ساده $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ باشد آنگاه

$$\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}(f(z))=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

مثال:

$$I=\oint_{|z-\pi/2|=2} z\,\mathrm{cotg}\,z\,dz \qquad \sin z=0\rightarrow z=k\pi$$

$$z\,\mathrm{cotg}\,z=z\cdot\cancel{\frac{\sin z}{\cos z}}\rightarrow z\cdot\frac{\cos z}{\sin z}$$




$z=0\rightarrow$ قطب رفع شدنی

$z=\pi\rightarrow$ قطب ساده

$$I=2\pi i\,\underset{z=\pi}{\mathrm{Res}}\left(z\frac{\cos z^{\,1}}{\cancel{\sin z}\ \cos z}\right)=2\pi i\cdot\pi=2\pi^2 i$$

$$\underset{z=\pi}{\mathrm{Res}}(z\cos tg z)=\frac{z\cos z}{\cos z}\Big|_{z=\pi}=\pi$$

Subject
Date

قضیه: فرض کنید $z_0$ یک نقطه تکین تنهای $f(z)$ باشد در این صورت $z_0$ یک قطب مرتبه $k$ برای $f(z)$ است اگر

تابع تحلیلی $\varphi(z)$ یافت شود به طوری که $\varphi(z_0)\neq 0$ و $\varphi(z)=(z-z_0)^k f(z)$ در این حالت:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}(f(z))=\frac{\varphi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

به عبارت دیگر:

$$\operatorname*{Res}(f(z))=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]$$

جلسه هشتم:

فرض کنید $p(z)$ یک تابع تحلیلی باشد اگر $p(z_0)=0$ باشد آنگاه $z_0$ یک صفر تابع $p(z)$ است آنگاه می‌توان نوشت اگر $n$ و $p(z)$ موجود باشد به طوری که

$$p(z)=(z-z_0)^n p(z) \quad , \quad p(z_0)\neq 0$$

و $p(z)$ تحلیلی باشد. در این حالت می‌گوییم $z_0$ یک صفر مرتبه $n$ام تابع $p(z)$ است.

مثال: $p(z)=z^3(z+2)^4(z-i)^2$

ریشه‌های تابع = صفرهای تابع $\longrightarrow \begin{cases} z=0 \to & \text{صفر مرتبه سوم} \quad p(z)=(z+2)^4(z-i)^2 \\ z=-2 \to & \text{صفر مرتبه چهارم} \quad p(z)=z^3(z-i)^2 \\ z=i \to & \text{صفر مرتبه دوم} \quad p(z)=z^3(z+2)^4 \end{cases}$

مثال: $z=0$ صفر مرتبه چندم تابع است: ← صفر مرتبه دوم است.

$p(z)=1-\cos z$

$$p(z)=\cancel{1}-(\cancel{1}-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots)=\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\dots$$

$$\xrightarrow[\text{فاکتور گرفت}]{\text{فقط می‌توان از } z^2} z^2\left[\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\dots\right]$$

اگر تابعی مانند $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ باشد که هر دو تحلیلی باشند ریشه‌های $q(z)$ احتمالاً قطب‌های $f(z)$ می‌باشند.

اگر $z$ صفر مرتبه $m$ ام تابع $q(z)$ و صفر مرتبه $n$ ام $p(z)$ باشد آنگاه:

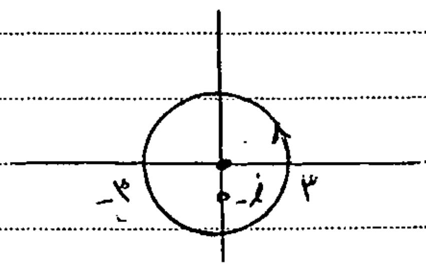
الف) اگر $n \geq m$ آنگاه $z$ قطب رفع شدنی است.

ب) اگر $n<m$ آنگاه $z$ قطب مرتبه $k=m-n$ ام تابع $f$ است.



مثال: $I=\oint_{|z|=3}\frac{(2z-1)dz}{z^2(z+i)^3}=?$ ، $f(z)$

$\frac{(2z-1)}{z^2(z+i)^3}\Rightarrow\begin{cases}z=0\\ z=-i\end{cases}$ هر دو قطب درون کانتور است




اگر $z^2(z+i)^3=0 \Rightarrow z=0$ یا $z=-i$

قطب مرتبه دوم است ← قطب مرتبه سوم است

Subject
Date

$$I = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0}(f(z)) + \operatorname*{Res}_{z=-i}(f(z))\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[z^2 \cdot f(z)\right] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{2z-1}{(z+i)^3}\right]'$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{2(z+i)^3 - 3(z+i)^2(2z-1)}{(z+i)^6} = \lim_{z\to 0}\frac{\cancel{(z+i)^2}\left(2(z+i)-3(2z-1)\right)}{(z+i)^{\cancel{6}\,4}} =$$

$$\frac{2i+3}{1} = 2i+3$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to -i}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+i)^3 f(z)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\left[\frac{2z-1}{z^2}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\left[\frac{\overbrace{2z^2-2z(2z-1)}^{2z^2-4z^2+2z}}{z^4}\right]' = \frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\left[\frac{-2z+2}{z^3}\right]'$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\frac{\overbrace{-2z^3-3z^2(-2z+2)}^{-2z^3+6z^3-6z^2}}{z^6} = \frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\frac{\cancel{z^2}(-2z+6z-6)}{z^{\cancel{6}\,4}} = \frac{1}{2}\lim \frac{4z-6}{z^4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4(-i)-6}{(-i)^4} = -2i-3$$

$$I = 2\pi i\,(2i+3-2i-3) = 0$$

PAPCO

Subject ۳۶
Date

تمرین:

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{(z-1)\,dz}{z\sin(\pi z)}$$



انتگرال توابع گویای مثلثاتی در بازه $[0, 2\pi]$:

$$I=\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، $z=e^{i\theta}$ استفاده می‌کنیم

$z=e^{i\theta} \quad 0\leq\theta\leq 2\pi \longrightarrow |z|=1$ کانتور دایره‌ای به مرکز صفر و شعاع یک است.

$$dz = i e^{i\theta}\,d\theta \rightarrow i z\,d\theta \longrightarrow \boxed{d\theta = \frac{dz}{iz}}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i} = \frac{\frac{z^2-1}{z}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}$$

PAPCO

Subject
Date

$$\boxed{\sin\theta = \frac{z^2-1}{2iz} \quad , \quad \cos\theta = \frac{z^2+1}{2z}}$$

$$I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \cdot \frac{dz}{iz} = \dots$$

تبدیل می شود به انتگرال مختلط ← انتگرال حقیقی است پس جواب باید حقیقی باشد.

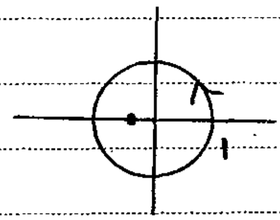
مثال:

$$I = \oint_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}+\cos\theta} = ?$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2}+\frac{z^2+1}{2z}} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{2\sqrt{2}z+z^2+1}{2z}} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2\sqrt{2}z+1}$$

اگر $z^2+2\sqrt{2}z+1=0 \longrightarrow \Delta = (2\sqrt{2})^2-4(1)(1)=4$

$$z = \frac{-2\sqrt{2}\pm 2}{2} = -\sqrt{2}\pm 1$$



نقطه $z=-\sqrt{2}+1$ داخل دایره است قطب ساده است.

$$f(z) = \frac{1}{z^2+2\sqrt{2}z+1}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{2}+1}(f(z)) = \lim_{z\to-\sqrt{2}+1} \cancel{(z-(-\sqrt{2}+1))} \cdot \frac{1}{\cancel{(z-(-\sqrt{2}+1))}(z-(-\sqrt{2}-1))} = \frac{1}{2}$$

$$I = 2\pi i \left(\frac{2}{i}\right) \operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{2}+1} f(z) = \frac{2}{\cancel{i}} \cancel{2}\pi \cancel{i} \times \frac{1}{\cancel{2}} = \boxed{2\pi}$$

PAPCO

$$\ast \ \cos n\theta = \frac{e^{ni\theta} + e^{-ni\theta}}{2} = \frac{z^n + z^{-n}}{2}$$ وقتی n یک عدد طبیعی باشد.

$$\ast \ \sin n\theta = \frac{e^{ni\theta} - e^{-ni\theta}}{2i} = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}$$

انتگرال توابع گویا در بازه $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{q(x)}\, dx$$

اگر: ۱) $P(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای باشند

۲) $q(x)$ فاقد ریشه حقیقی باشد

۳) درجه $q(x)$ حداقل ۲ واحد بیشتر از درجه $P(x)$ باشد

آنگاه با فرض $f(z) = \frac{P(z)}{q(z)}$ خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f(z))$$

سیگما بر روی کلیه قطب‌های بالای محور افقی گرفته می‌شود.

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)\cos(mx)}{q(x)}\, dx \quad , \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)\sin(mx)}{q(x)}\, dx$$

تحت شرایط ۳گانه‌ی قبل و با فرض $f(z) = \frac{P(z)}{q(z)} e^{imz}$ خواهیم داشت:

Subject
Date

$$I_1 = Re\left[2\pi i \sum Res(f(z))\right] \quad , \quad I_2 = Im\left[2\pi i \sum Res(f(z))\right]$$

مسلماً بر روی کلیه قطب های بالای محور افقی گرفته می‌شود.

مثال: انتگرال های زیر را حل کنید.

الف) $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+16)}$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+16)}$$

$$(z^2+1)(z^2+16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = \pm i \\ z = \pm 4i \end{cases}$$

قطب ساده ← ۲ بالای محور افقی ← ریشه‌های مخرج

$z=+4i$ , $z=+i$ قطب های بالای محور هستند، ساده هستند

$$\underset{z=+i}{Res} f(z) = \lim_{z \to +i} \cancel{(z-i)} \frac{1}{(z+i)\cancel{(z-i)}(z^2+16)} = \frac{1}{30i}$$

$$\underset{z=+4i}{Res} f(z) = \lim_{z \to 4i} \cancel{(z-4i)} \frac{1}{(z^2+1)\cancel{(z-4i)}(z+4i)} = \frac{1}{-15(8i)}$$

$$A = 2\pi \cancel{i} \left( \frac{1}{30\cancel{i}} + \frac{1}{-120\cancel{i}} \right) = 2\pi \left( \frac{\overset{3}{\cancel{4-1}}}{\underset{40}{\cancel{120}}} \right) = \boxed{\frac{\pi}{20}}$$

ب) $B=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^2-2x+2}$

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2-2z+2}$$

اگر $z^2-2z+2=0 \Rightarrow z=1\pm i$

$z=1+i$ قطب بالای محور افقی است و قطب ساده است.

$$\underset{z=1+i}{\mathrm{Res}}\,f(z)=\lim_{z\to 1+i}\cancel{(z-(1+i))}\frac{e^{iz}}{\cancel{(z-(1+i))}(z-(1-i))}=\frac{e^{i(1+i)}}{2i}=\frac{e^{i-1}}{2i}$$

$$=\frac{e^{-1}\cdot e^{i}}{2i}=\frac{e^{-1}(\cos 1+i\sin 1)}{2i}$$

$$B=\mathrm{Re}\left[2\pi i\,\underset{z=1+i}{\mathrm{Res}}(f(z))\right]=\mathrm{Re}\left[\cancel{2}\pi \cancel{i}\cdot\frac{e^{-1}\cos 1+(e^{-1}\sin 1)i}{\cancel{2i}}\right]=\boxed{\pi e^{-1}\cos 1}$$

ج) $C=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(3x)\,dx}{(x^2+x+1)^2}$

$$f(z)=\frac{ze^{3iz}}{(z^2+z+1)^2}$$

$z^2+z+1=0 \rightarrow z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ ریشه‌های مخرج

Subject
Date

قطب بالای محور است مرتبه دوم است. $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\underset{z=-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i}{\operatorname{Res}} f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i}\frac{d}{dz}\left[\cancel{\left(z-\left(-\tfrac12+\tfrac{\sqrt3}{2}i\right)\right)^2}\cdot\frac{ze^{3iz}}{\cancel{\left(z-\left(-\tfrac12+\tfrac{\sqrt3}{2}i\right)\right)^2}\left(z-\left(-\tfrac12-\tfrac{\sqrt3}{2}i\right)\right)^2}\right]$$

$$\cancel{\left(z-\left(-\tfrac12-\tfrac{\sqrt3}{2}i\right)\right)}\left(\left(e^{3iz}+3izе^{3iz}\right)\left(z-\left(-\tfrac12-\tfrac{\sqrt3}{2}i\right)\right)-2ze^{3iz}\right)$$

$$\lim_{z\to-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i}\frac{\left(e^{3iz}+3ize^{3iz}\right)\left(z-\left(-\tfrac12-\tfrac{\sqrt3}{2}i\right)\right)^2-2\left(z-\left(-\tfrac12-\tfrac{\sqrt3}{2}i\right)\right)ze^{3iz}}{\left(z-\left(-\tfrac12-\tfrac{\sqrt3}{2}i\right)\right)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=\frac{\left(1+3i\left(-\tfrac12+\tfrac{\sqrt3}{2}i\right)\right)\left(-\tfrac12+\tfrac{\sqrt3}{2}i-\left(-\tfrac12-\tfrac{\sqrt3}{2}i\right)\right)-2\left(-\tfrac12+\tfrac{\sqrt3}{2}i\right)}{\left(-\tfrac12+\tfrac{\sqrt3}{2}i\right)-\left(-\tfrac12-\tfrac{\sqrt3}{2}i\right)^3}\,e^{3i\left(-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i\right)}$$

$$=\frac{\left(\cancel{1}-\tfrac{3i}{2}-\tfrac{3\sqrt3}{2}\right)\sqrt3\,i+1-\cancel{\sqrt3\,i}}{(\sqrt3\,i)^3}\,e^{-\frac{3i}{2}-\frac{3\sqrt3}{2}}$$

$$=\frac{+\frac{3\sqrt3}{2}-\frac92 i+1}{-3\sqrt3\,i}\cdot e^{-\frac{3\sqrt3}{2}}\cdot e^{-\frac32 i}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{3\sqrt3}{2}\right)-\frac92 i}{-3\sqrt3\,i}\cdot e^{-\frac{3\sqrt3}{2}}\cdot\left(\cos\tfrac32-i\sin\tfrac32\right)$$

$$C=\operatorname{Im}\left[2\pi i\underset{z=-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i}{\operatorname{Res}} f(z)\right]=\frac{2\pi}{-3\sqrt3}\,e^{-\frac{3\sqrt3}{2}}\left[-\left(1+\frac{3\sqrt3}{2}\right)\sin\tfrac32-\tfrac92\cos\tfrac32\right]$$

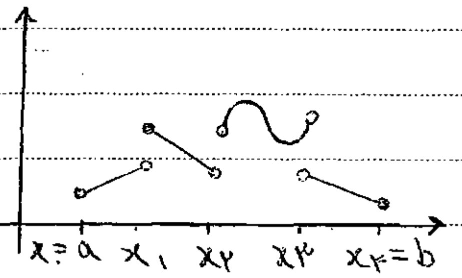
PAPCO

Subject ۳۹
Date

جلسه نهم:

سری فوریه توابع حقیقی:

تعریف تابع پیوسته قطعه‌ای: تابع $f$ در فاصله $I$ پیوسته قطعه‌ای است اگر تعداد نقاط ناپیوستگی در این بازه محدود بوده و در هر نقطه از این فاصله حد چپ و حد راست $f$ موجود باشد.






تابع متناوب: تابع $f(x)$ متناوب است اگر:

$$\forall x \in R \quad \exists T \quad f(x+T)=f(x)$$

کمترین مقدار مثبت $T$ را دوره تناوب $F$ می‌نامیم.

$\sin, \cos \rightarrow T=2\pi$

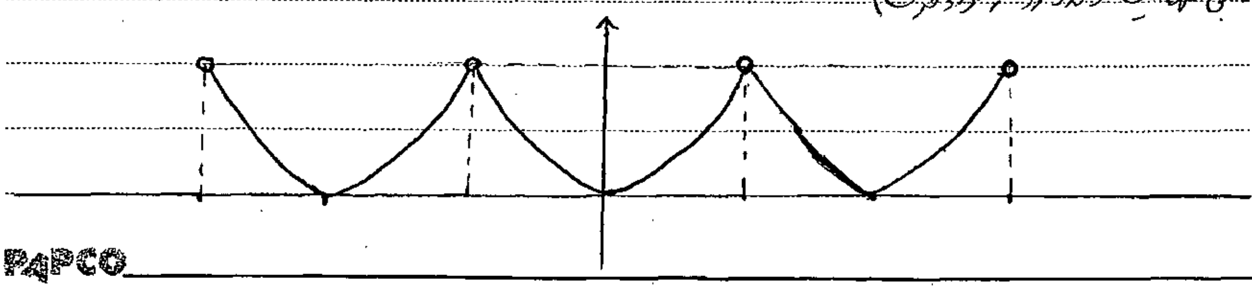
$tg, cotg \rightarrow T=\pi$

مثال:

یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب ۲ است $T=2$

$$\begin{cases} f(x)=x^2 & |x|<1 \\ f(x+2)=f(x) \end{cases}$$

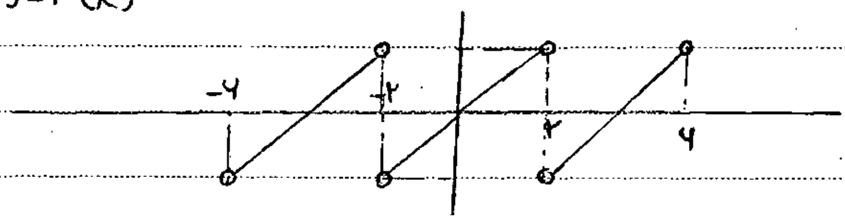
(تا بی‌نهایت ادامه دارد از هر دو طرف)



Subject
Date

مثال : $x$

$$\begin{cases} f(x) = x & |x|<2 \qquad T=4 \\ f(x+2)=f(x) \end{cases}$$




اگر یک تابع پیوسته قطعه‌ای باشد با دوره تناوب T برای این تابع سری فوریه تعریف می‌کنیم.

$$\text{سری فوریه تابع متناوب } f \text{ با دوره تناوب } T \ * = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\right]$$

ضرایب فوریه

① $$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(x)\, dx$$

② $$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx \qquad (n=1,2,\dots)$$

③ $$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx \qquad (n=1,2,\dots)$$

اگر $f$ زوج باشد ← $b_n$ ها همه صفر است.

اگر $f$ فرد باشد ← $a_0$ و $a_n$ ها صفر می‌شود.

زوج $f \rightarrow a_0 , a_n \rightarrow 2\int_0^{T/2} \ldots$

فرد $f \rightarrow b_n \rightarrow 2\int_0^{T/2} \ldots$

* تابع $f$ زوج است یعنی $f(-x) = f(x)$ و یا نمودار نسبت به محور $y$ ها قرینه است.

* تابع $f$ فرد است یعنی $f(-x) = -f(x)$ و یا نمودار نسبت به مبدأ مختصات قرینه است.

مثال: سری فوریه تابع $f$ را بیابید:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & |x| < \pi \\ f(x+2\pi) = f(x) \end{cases}$$

تابع زوج است.

زوج است $f \rightarrow b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

$$F_{\text{سری فوریه}} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{2\pi}x\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \ldots$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

Subject
Date

$$a_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{x^2}{n}\cancelto{0}{\sin(nx)} + \frac{2x}{n^2}\cos(nx) - \frac{2}{n^3}\cancelto{0}{\sin(nx)}\Big]_0^{\pi}$$

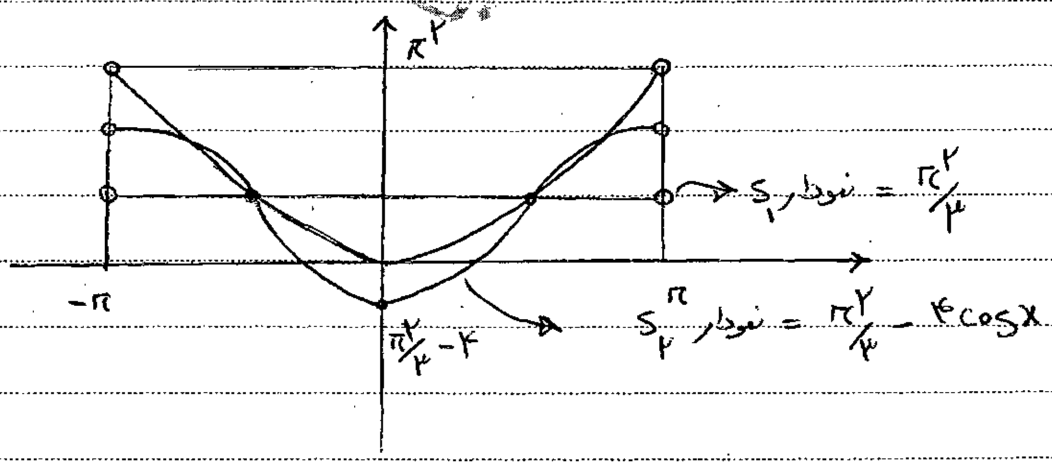
$*\ \sin(n\pi) = 0$ $\qquad$ $*\ \cos(n\pi) = (-1)^n$

$$= \frac{4\cancel{\pi}}{\cancel{\pi} n^2}\cos n\pi \Rightarrow a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

جدول جزء به جزء

| مشتق | انتگرال |
|---|---|
| $x^2$ | $\cos(nx)$ |
| $2x$ | $\frac{1}{n}\sin nx$ |
| $2$ | $-\frac{1}{n^2}\cos nx$ |
| $0$ | $-\frac{1}{n^3}\sin nx$ |

$S_n =$ مجموع n جمله اول سری فوریه



روش جدولی جزء به جزء (جدول جزء به جزء):

$$\int P(x) \times \begin{Bmatrix}\cos kx\\ \sin kx\\ e^{kx}\end{Bmatrix} dx$$

| مشتق | | انتگرال |
|---|---|---|
| $P(x)$ | $+$ | $\cos kx$ |
| $P'(x)$ | $-$ | $\frac{1}{k}\sin kx$ |
| $P''(x)$ | $+$ | $\vdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $0$ | $-$ | |

جواب انتگرال = حاصل ضرب خود با علامت جمع جبری



تضمین نمایش سری فوریه:

اگر تابع $f$ متناوب با دوره‌ی تناوب $T$ و در هر بازه پیوسته قطعه‌ای باشد آن‌گاه سری فوریه تابع $f$ به طور منحصر به فرد توسط رابطه $*$ تعریف می‌شود. $a_n$ و $b_n$ ها ضرایب فوریه تابع $f$ بوده و توسط روابط ①، ②، ③، ④ محاسبه می‌شوند. اگر در هر نقطه مشتق چپ و مشتق راست موجود باشد آن‌گاه سری فوریه $f = f(x)$ است به جز در نقاط ناپیوستگی.

اگر تابع $f$ در نقطه $x_0$ ناپیوسته باشد آن‌گاه مقدار سری فوریه به ازای $x_0$ برابر است با میانگین حد چپ و حد راست $f$ در این نقطه یعنی:

$$\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$$

Subject
Date

در مثال قبل داریم:

$$\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cdot\cos(nx)=\begin{cases}x^2 & |x|<\pi\\ \pi^2 & |x|=\pi\end{cases}$$

اگر $x=0 \Rightarrow \dfrac{\pi^2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cdot\cos(0)=(0)^2$

$$\Rightarrow 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{-\pi^2}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\Rightarrow \boxed{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}} \quad (1)$$

اگر $x=\pi \Rightarrow \dfrac{\pi^2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos(n\pi)=\pi^2$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^{2n}=\pi^2-\frac{\pi^2}{3}=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}} \quad (2)$$

$(1)+(2) \Rightarrow 1+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{25}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{8}$ یکی از نتایج سری فوریه

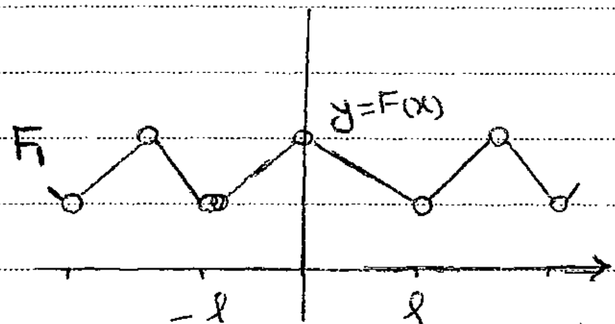
PAPCO

جلسه دهم:

سری‌های فوریه سینوسی و کسینوسی:

فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه $(0, l)$ تعریف شده و پیوسته باشد.

هدف: نمایش $f$ به صورت سری فوریه است.




گسترش زوج $f$

$$\begin{cases} F_1(x) = \begin{cases} f(x) & 0<x<l \\ f(-x) & -l<x<0 \end{cases} \\ F_1(x+2l) = F_1(x) \quad (x \in R) \end{cases}$$

$F_1(x)$ یک تابع زوج متناوب با دوره تناوب $T=2l$، پیوسته قطعه‌ای است بنابراین دارای نمایش سری فوریه است:

$$F_1 \text{ سری فوریه } = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{2l} x\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} F_1(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{2l} \int_{-l}^{l} F_1(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{2l} x\right) dx \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

با توجه به پیوستگی تابع $F_1$ در بازه $(0,\ell)$ خواهیم داشت:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\qquad (0<x<\ell)$$

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\,dx$$

«سری فوریه کسینوسی $f$»

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx\qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

به طور مشابه با استفاده از گسترش فرد $f$ خواهیم داشت:

گسترش فرد $f$

$$\begin{cases}F_2(x)=\begin{cases}f(x) & 0<x<\ell\\ -f(-x) & -\ell<x<0\end{cases}\\ F_2(x+2\ell)=F_2(x) \qquad (x\in R)\end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\qquad (0<x<\ell)$$

«سری فوریه سینوسی $f$»

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx\qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

مثال: سری های فوریه سینوسی و کسینوسی تابع $f$ را بیابید:

$$f(x)=\begin{cases}x & 0<x<1\\ 2-x & 1<x<2\end{cases}$$

Subject ۴۳
Date

سری فوریه سینوسی:

$$f_{\text{سری فوریه سینوسی}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \qquad (0<x<2)$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 x\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx + \int_1^2 (2-x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx \Rightarrow$$

جدول جزء به جزء:

| مشتق | | انتگرال | مشتق | | انتگرال |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $+$ | $\sin(\frac{n\pi}{2}x)$ | $2-x$ | $+$ | $\sin(\frac{n\pi}{2}x)$ |
| $1$ | $-$ | $\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}x)$ | $-1$ | $-$ | $\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}x)$ |
| $0$ | | $\frac{-4}{(n\pi)^2}\sin(\frac{n\pi}{2}x)$ | $0$ | | $\frac{-4}{(n\pi)^2}\sin(\frac{n\pi}{2}x)$ |

$$= \left[\frac{2x}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) + \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_0^1\right] +$$

$$\left[\frac{2(2-x)}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) - \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_1^2\right] \Rightarrow$$

$\sin(n\pi)=0$

$$= \left[\cancel{\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)} + \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right] + \left[0 - \frac{4}{(n\pi)^2}\cancel{\sin(n\pi)} - \cancel{\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}\right.$$

$$\left. + \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \Rightarrow \boxed{b_n = \frac{8}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

اندیس‌های زوج همه صفر است
اندیس‌های فرد یا یک است یا ۱-

$(n=4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3)$

Subject
Date

$F$ سری فوریه سینوسی $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$

$= \frac{8}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{2} x - \frac{8}{9\pi^2} \sin \frac{3\pi}{2} x + \frac{8}{25\pi^2} \sin\left(\frac{5\pi}{2} x\right) \cdots \quad (0<x<2)$

تمرین: به طور مشابه سری فوریه کسینوسی را بدست آورید:

فرم مختلط سری فوریه:

اگر $f(x)$ تابعی پیوسته تکه‌ای و متناوب با دوره تناوب $T=2\pi$ باشد آنگاه سری فوریه و ضرایب فوریه $f$ عبارتند از:

$$\text{سری فوریه } f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

با توجه به روابط

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} \quad , \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$$

با انجام محاسبات ساده می‌توان سری فوریه تابع $f$ را به فرم

$$\underbrace{\text{سری فوریه } f}_{\text{فرم مختلط}} = \text{سری فوریه } f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

نوشت که $c_n$ها طبق روابط زیر به دست می‌آیند:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\dots)$$

Subject

Date

مثال: فرم مختلط سری فوریه f را بیابید.

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x} & |x| < \pi \\ f(x+2\pi) = f(x) & (x \in R) \end{cases} \qquad T = 2\pi$$

سری فوریه f به فرم مختلط $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} e^{-inx}\, dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+ni)x}\, dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{-(1+ni)}\, e^{-(1+ni)x}\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-1}{(1+ni)}\left[e^{-(1+ni)\pi} - e^{(1+ni)\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-1}{(1+ni)}\left[e^{-\pi}(\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} + i\,\underbrace{\sin(n\pi)}_{0}) - e^{\pi}(\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} + i\,\underbrace{\sin(n\pi)}_{0})\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi} \cdot \frac{1}{1+ni} \cdot \underbrace{\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}}_{\sinh\pi} = (-1)^n \cdot \frac{1}{1+ni} \cdot \frac{\sinh\pi}{\pi}$$

سری فوریه f به فرم مختلط $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1-ni}{1+n^2} \cdot \frac{\sinh\pi}{\pi}\, e^{inx} = e^{-x} \quad |x| < \pi$

$(-\pi < x < \pi)$

PAPCO

## انتگرال فوریه:

فرض کنید تابع $f(x)$ در هر بازه، پیوسته قطعه‌ای بوده و بر روی R مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد (یعنی $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ همگرا باشد) در این صورت می‌توان $f$ را به فرم انتگرال فوریه

$$f \text{ انتگرال فوریه } = \int_{0}^{\infty} (A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx))\,dw$$

نمایش داد که در آن $A(w)$ و $B(w)$ را ضرایب انتگرال فوریه $f$ می‌نامند و طبق زیر محاسبه می‌شوند:

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(wx)\,dx$$

و

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(wx)\,dx$$

انتگرال‌های فوق همگرا بوده و اگر در هر نقطه مشتق چپ و مشتق راست موجود باشند آنگاه انتگرال فوریه $f$ مساوی $f(x)$ خواهد بود (به جز در نقاط ناپیوستگی)

اگر تابع $f$ در $x_0$ ناپیوسته باشد آنگاه مقدار انتگرال فوریه در نقطه $x_0$ برابر است با میانگین حد چپ و حد راست $f$ در این نقطه یعنی

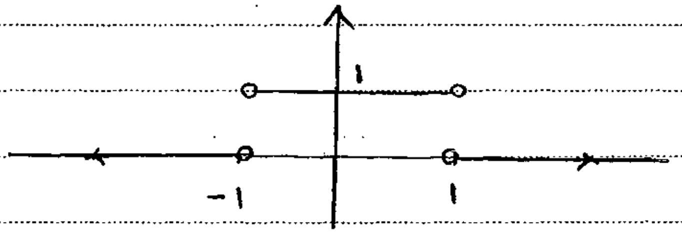
$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

نمایش انتگرال فوریه منحصر به فرد است.

Subject
Date

مثال: انتگرال فوریه تابع $f$ را بدست آورید. چه نتایجی می توان گرفت؟

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}1\,dx=2$$ مطلقاً انتگرال پذیر است

$f$ زوج است $\Rightarrow B(w)=0$

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(wx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}1\cdot\overbrace{\cos(wx)}^{\text{تابع زوج}}\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\cos(wx)\,dx=\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin wx}{w}\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin w}{w}$$

$f$ انتگرال فوریه $=\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{2\sin w}{\pi w}\cdot\cos(wx)\,dw$ $\qquad * \displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2} *$

می توان نتیجه گرفت:

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin w}{w}\cdot\cos(wx)\,dw=\begin{cases}1 & |x|<1\\ \frac{1}{2} & |x|=1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

یا

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin w}{w}\cos(wx)\,dw=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & |x|<1\\ \frac{\pi}{4} & |x|=1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

تمرین: انتگرال فوریه تابع f را بدست آورید چه نتایجی می‌توان گرفت

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2} \qquad x\in R$$

(نمونه سؤال امتحان)

چون پیوسته است مقدار انتگرال برابر تابع است.

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\cos(wx)\,dx$$

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\sin(wx)\,dx$$

با فرض $g(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+2}e^{iwz}$ . و به کمک قضیه مانده‌ها انتگرال‌ها حل می‌شود.

Subject
Date

## انتگرال های فوریه سینوسی و کسینوسی:

فرض کنید تابع $f(x)$ در هر بازه $(0, T)$ ، $T>0$ پیوسته قطعه‌ای بوده و برای $(0, \infty)$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد (یعنی $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ همگرا باشد). در این صورت مشابه بحث سری فوریه سینوسی و سری فوریه کسینوسی می‌توان $f$ را بر روی $R$ گسترش داد. (گسترش های زوج و فرد)

گسترش زوج $\rightarrow F_1(x) = \begin{cases} f(x) & x>0 \\ f(-x) & x<0 \end{cases}$

گسترش فرد $\rightarrow F_2(x) = \begin{cases} f(x) & x>0 \\ -f(-x) & x<0 \end{cases}$

بنابراین دو مدل انتگرال فوریه برای $f$ به دست می‌آید که عبارتند از:

انتگرال فوریه کسینوسی $f$ $= \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega x)\, d\omega$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x)\, dx$$

انتگرال فوریه سینوسی $f$ $= \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega x)\, d\omega$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(\omega x)\, dx$$

Subject ۴۷
Date

مثال: انتگرال های فوریه سینوسی و کسینوسی تابع f را بدست آورید و نشان دهید می توان نوشت:

$f(x) = e^{-kx}$ $(x>0$ و $k>0$ ثابت$)$

$(0,\infty) \rightarrow$ پیوسته

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,dx = \frac{-1}{k} e^{-kx}\Big]_0^\infty = \frac{+1}{k}$$ مطلقاً انتگرال پذیر

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kx}\,\underbrace{\cos(wx)}_{f(t)}\,dx$$ با روش جز بجز ۲ بار یا از روش تبدیل لاپلاس انتگرال را حل می کنیم.

فرمول های تبدیل لاپلاس:

$$* \; L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = F(s)$$

$$* \; L(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$* \; L(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

جواب با تبدیل لاپلاس $A(w) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{k}{k^2+w^2}$

$\Rightarrow f =$ انتگرال فوریه کسینوسی $= \int_0^\infty \frac{2k}{\pi(k^2+w^2)} \cos(wx)\,dw \quad x>0$

PAPCO

Subject
Date

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kx}\sin(\omega x)\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega}{k^2+\omega^2}$$

$\Rightarrow$ f انتگرال فوریه‌ی سینوسی $= \displaystyle\int_0^\infty \frac{2\omega}{\pi(k^2+\omega^2)}\sin(\omega x)\,d\omega \qquad x>0$

در نقاط پیوستگی انتگرال برابر خود تابع است.

نتیجه ①:

$$\frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{k^2+\omega^2}\,d\omega = e^{-kx} \qquad x>0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{k^2+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2k}e^{-kx} \qquad x>0$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin(\omega x)}{k^2+\omega^2}\,d\omega = e^{-kx} \qquad x>0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\omega\sin(\omega x)}{k^2+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2}e^{-kx} \qquad x>0$$

* به این روابط انتگرال های لاپلاس می گویند.

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)+\omega\sin(\omega x)}{1+\omega^2}\,d\omega = \begin{cases} \pi e^{-x} & x>0 \\ \pi/2 & x=0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

(به ازای $K=1$)

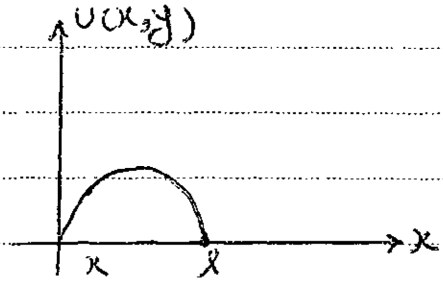
$x=0$ در صفر پیوسته نیست میانگین می گیریم.

اگر $x<0 \Rightarrow -x>0 \Rightarrow \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\cos(-\omega x)}{1+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2}e^{x} \\ \int_0^\infty \frac{\omega\sin(-\omega x)}{1+\omega^2}\,d\omega = -\frac{\pi}{2}e^{x} \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 0$

Subject ۴۸
Date

جلسه یازدهم :

معادله موج (حالت یک بعدی و همگن):




فرض کنید یک قطعه سیم با طول $l$ و با چگالی جرم یکنواخت $\rho$ به نقاط $x=0$ و $x=l$ متصل شده و تحت نیروی کشش ثابت $T$ قرار دارد. سیم را مرتعش نموده‌ایم. می‌خواهیم مختصات نقطه $x$ را در لحظه $t$ یعنی $U(x,t)$ را وقتی که ارتعاش فقط در امتداد (عمود) محور قائم است را تعیین کنیم.

شرایط مرزی همگن: $U(0,t)=U(l,t)=0$ اگر هر دو صفر نباشد ناهمگن است.

شرایط اولیه:
$$\begin{cases} U(x,0)=f(x) & \text{حالت اولیه} \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0)=g(x) & \text{سرعت اولیه} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\rho}{T}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \longrightarrow \text{معادله موج}$$

با فرض $\dfrac{\rho}{T}=\dfrac{1}{c^2} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ، $0<x<l$ و $t>0$
معادله موج یک بعدی

$$\begin{cases} U(0,t)=U(l,t)=0 & (1) \\ U(x,0)=f(x) & (2) \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0)=g(x) & (3) \end{cases}$$

Subject
Date

روش ضربی یا جداسازی متغیرها:

در این روش تغییر متغیر زیر را به کار می‌بریم و در معادله دیفرانسیل جایگذاری می‌کنیم.

$U(x,t) = F(x).G(t) \leftarrow$ تغییر متغیر

$$\Rightarrow F(x)\,G''(t) = c^2\,F''(x).\,G(t)$$

$$\Rightarrow \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = K$$ مقدار ثابت

مستقل از $x$ ← | → مستقل از $t$

برای $K$ سه حالت در نظر می‌گیریم:

$K=\lambda^2 \quad , \quad K=0 \quad , \quad K=-\lambda^2$

* اگر $K=+\lambda^2>0 \Rightarrow \dfrac{F''(x)}{F(x)}=\lambda^2$

$$\Rightarrow F''(x)-\lambda^2F(x)=0 \xrightarrow{\text{تغییر تابع}} m^2-\lambda^2=0 \rightarrow m=\pm\lambda$$

$$\Rightarrow F(x)=c_1\cosh(\lambda x)+c_2\sinh(\lambda x)$$

$$\left.\begin{array}{l} F(0).G(t)=U(0,t)=0 \Rightarrow F(0)=0 \Rightarrow c_1=0 \\ F(l).G(t)=U(l,t)=0 \Rightarrow F(l)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$c_2\sinh(\lambda l)=0 \Rightarrow c_2=0 \Rightarrow F(x)=0 \Rightarrow U\equiv 0$ ✗ غیرممکن

اگر $k=0 \Rightarrow F''(x)=0 \Rightarrow F(x)=c_1x+c_2$

مشابه حالت قبل:

$F(0)=0 \Rightarrow c_2=0$

$F(l)=0 \Rightarrow c_1 l=0 \Rightarrow c_1=0$

$\Rightarrow F(x)=0 \Rightarrow u\equiv 0 \quad x$ غیر ممکن

پس: $\dfrac{G''(t)}{c^2G(t)} = \dfrac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda^2$

مستقل از $x$ ←  → مستقل از $t$

$$\begin{cases} F''(x)+\lambda^2F(x)=0 \xrightarrow{\text{مفسر}} m^2+\lambda^2=0 \Rightarrow m=\pm\lambda i \\ G''(t)+c^2\lambda^2G(t)=0 \xrightarrow{\text{مفسر}} m^2+c^2\lambda^2=0 \Rightarrow m=\pm c\lambda i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x)=c_1\cos(\lambda x)+c_2\sin(\lambda x) \\ G(t)=c_3\cos(c\lambda t)+c_4\sin(c\lambda t) \end{cases}$$

مشابه حالت قبل:

$$\left.\begin{matrix} F(0)=0 \Rightarrow c_1=0 \\ F(l)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c_2\sin(\lambda l)=0$$

$$c_2 \neq 0 \Longrightarrow \sinh(\lambda \ell)=0 \Longrightarrow \lambda \ell = n\pi \Longrightarrow \boxed{\lambda=\frac{n\pi}{\ell} \quad n\in Z-\{0\}}$$

مقادیر ویژه معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} F_n(x)=C_{2,n}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \\ G_n(t)=C_{3,n}\cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)+C_{4,n}\sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) \end{cases}$$

با فرض: $C_{2,n}\cdot C_{4,n}=b_n \quad , \quad C_{2,n}\cdot C_{3,n}=a_n$

داریم:

$$U_n(x,t)=F_n(x)\cdot G_n(t)$$

$$=\left[a_n\cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)+b_n\sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

بنابراین جواب معادله موج با شرایط مرزی ① عبارت است از:

$$\boxed{U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)+b_n\sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right]\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)}$$

جواب معادله

به منظور تعیین $a_n$ها و $b_n$ها به ترتیب از ② و ③ استفاده می کنیم:

$$② \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)=U(x,0)=f(x)$$

سمت چپ تساوی، سری فوریه سینوسی تابع $f(x)$ است بنابراین:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \qquad (n=1,2,\dots)}$$

$$(3) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{l}\, b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = g(x)$$

$$\Rightarrow \frac{cn\pi}{l}\, b_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \Rightarrow$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \qquad (n=1,2,\dots)}$$

مثال: معادله را حل کنید:

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} & 0\le x\le \pi,\ t\ge 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \begin{cases} x & 0\le x\le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2}\le x\le \pi \end{cases} \end{cases}$$

* اگر در شرایط مرزی به جای مقدار، شیب خط را داده بود، سری فوریه کسینوسی بدست می‌آید.

با فرض:

$$u(x,t) = F(x)\cdot G(t)$$

$$\Rightarrow F(x)\,G''(t) = 9\,F''(x)\,G(t)$$

Subject
Date

$$\Rightarrow \frac{G''(t)}{9G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} F''(x) + \lambda^2 F(x) = 0 \\ G''(t) + 9\lambda^2 G(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x) \\ G(t) = c_3 \cos(3\lambda t) + c_4 \sin(3\lambda t) \end{cases}$$

مشابه حالت های قبل :

$$① \Rightarrow \left.\begin{matrix} F(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ F(\pi) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c_2 \sin(\lambda\pi) = 0$$

$$c_2 \neq 0 \Rightarrow \sin(\lambda\pi) = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda\cancel{\pi} = n\cancel{\pi}}_{\text{مقادیر ویژه}} \Rightarrow \boxed{\lambda = n \quad n \in Z - \{0\}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_n(x) = c_{2,n} \sin(nx) \\ G_n(t) = c_{3,n} \cos(3nt) + c_{4,n} \sin(3nt) \end{cases}$$

$$c_{2,n} \cdot c_{3,n} = a_n \qquad c_{2,n} \cdot c_{4,n} = b_n$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(3nt) + b_n \sin(3nt)\right] \cdot \sin(nx)}$$

Subject ۵۱
Date

یک سؤال ۲/۵ - ۳ نمره حتماً در امتحان داریم.

چون $u(x,0)=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) = 0 \Rightarrow \boxed{a_n = 0 \quad (n=1,2,\dots)}$

شرط سوم معادله $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 3n\, b_n \sin(nx) = u_t(x,0) = \dots$

$$3n\, b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_t(x,0)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\sin(nx)\,dx\right)$$

$$= \dots = A \Rightarrow b_n = \frac{A}{3n}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{3n}\sin(3nt)\sin(nx)}$$

تمرین:

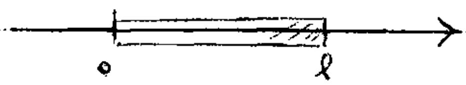
$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} & 0 \le x \le \pi,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 \le x \le \pi \end{cases} \end{cases}$$

Subject

Date

معادله گرما (حالت یک بعدی و همگن):

میله‌ای با طول $l$ و چگالی جرم یکنواخت $\rho$ و دارای عایق در نظر بگیرید.



$u(x,t)$ = گرما در لحظه $t$ و در نقطه‌ای با طول $x$

$u(x,0)=f(x) \rightarrow$ شرط اولیه

$u(0,t)=u(l,t)=0 \rightarrow$ شرایط مرزی

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ معادله گرما

$$\begin{cases} u_t=c^2u_{xx} & 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t)=u(l,t)=0 & (1) \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

تفکیک متغیر $\rightarrow u(x,t)=F(x).G(t)$

$$F(x)G'(t)=c^2F''(x)G(t)$$

$$\Rightarrow \frac{G'(t)}{c^2G(t)}=\frac{F''(x)}{F(x)}=-\lambda^2$$

Subject
Date

$$\Rightarrow \begin{cases} F''(x)+\lambda^2 F(x)=0 \longrightarrow m^2+\lambda^2=0 \longrightarrow m=\pm\lambda i \\ G'(t)+c^2\lambda^2 G(t)=0 \longrightarrow m+c^2\lambda^2=0 \longrightarrow m=-c^2\lambda^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x)=c_1\cos(\lambda x)+c_2\sin(\lambda x) \\ G(t)=c_3\, e^{-c^2\lambda^2 t} \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow F(0)=0 \Rightarrow c_1=0$, $F(\ell)=0$ $\Big\}\Rightarrow c_2\sin(\lambda\ell)=0$

$$c_2\neq 0 \Rightarrow \sin(\lambda\ell)=0 \Rightarrow \lambda\ell=n\pi \Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{n\pi}{\ell} \quad n\in \mathbb{Z}-\{0\}}$$

مقادیر ویژه

$$F_n(x)=c_{2,n}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$G_n(t)=c_{3,n}\, e^{-\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

با فرض : $c_{2,n}\cdot c_{3,n}=a_n$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)}$$

با استفاده از (۲) ضرایب $a_n$ ها را حساب می‌کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = u(x,0) = f(x) \Rightarrow$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \qquad (n=1,2,3,\dots)}$$

مثال: معادله را حل کنید:

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} & 0<x<1,\ t>0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & (1) \\ u(x,0) = 2-5\cos(7\pi x) & (2) \end{cases}$$



تغییر متغیر $u(x,t) = F(x)G(t)$

$$\Rightarrow F(x)G'(t) = 4F''(x)G(t)$$

$$\Rightarrow \frac{G'(t)}{4G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F''(x)+\lambda^2F(x)=0 \to m^2+\lambda^2=0 \to m=\pm\lambda i \\ G'(t)+4\lambda^2G(t)=0 \to m+4\lambda^2=0 \to m=-4\lambda^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x)=c_1\cos(\lambda x)+c_2\sin(\lambda x) \to F'(x)=-\lambda c_1\sin(\lambda x)+\lambda c_2\cos(\lambda x) \\ G(t)=c_3e^{-4\lambda^2 t} \end{cases}$$

معمولاً یک معادله ناهمگن را ... حل کنیم، معادله ناهمگن را همگن کنیم که یک معادله همگن با شرایط ... حل کنیم.

Subject

Date

① $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} F'(0)=0 \Rightarrow \lambda c_2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ یا } c_2 = 0 \\ F'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -\lambda c_1 \sin\lambda = 0$

$c_1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = n\pi \qquad n \in \mathbb{Z}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_n(x) = c_{1,n}\cos(n\pi x) \\ G_n(t) = c_{2,n}\, e^{-4n^2\pi^2 t} \end{cases}$$

با فرض: $c_{1,n} \cdot c_{2,n} = a_n$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-4n^2\pi^2 t} \cdot \cos(n\pi x)}$$

② $\Rightarrow a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\pi x) = 2 - 5\cos(7\pi x)$

$a_0 = 2$

$a_7 = -5$

$a_n = 0 \qquad (n \neq 0, 7)$

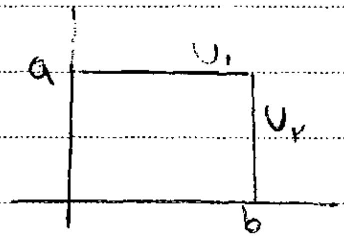
بنابراین جواب معادله:

$$\boxed{u(x,t) = 2 - 5e^{-4\times 49\pi^2 t} \cdot \cos(7\pi x)}$$

PAPCO

معادله پتانسیل (حالت یک بعدی و همگن):

$U(x,y)$ = گرما در نقطه $(x,y)$



اگر دو ضلع بود

میزان گرما در ۳ ضلع دیگر صفر است.

$$\begin{cases} U(0,y)=U(b,y)=U(x,0)=0 \\ U(x,a)=f(x) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$$ معادله پتانسیل

اگر دو ضلع گرما داشته باشد به دو مسئله تبدیل می‌کنیم و در نهایت $U_1+U_2$

$$\begin{cases} U_{xx}+U_{yy}=0 \qquad 0\le x\le b ,\ 0\le y\le a \\ U(0,y)=U(b,y)=U(x,0)=0 \quad ① \\ U(x,a)=f(x) \quad ② \end{cases}$$

* شرایط همگن روی هر ضلعی باشد ضریب آن را ① + می‌گیریم.

تفکیک متغیر: $U(x,y)=F(x)\,G(y)$

$$F''(x)\,G(y)+F(x)\,G''(y)=0$$

$$-\frac{G''(y)}{G(y)} = +\frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda^2$$ به علامت ها توجه شود.

$$\begin{cases} F''(x) + \lambda^2 F(x) = 0 \\ G''(y) - \lambda^2 G(y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) \\ G(y) = C_3 \cosh(\lambda y) + C_4 \sinh(\lambda y) \end{cases}$$

$$① \Rightarrow \left.\begin{matrix} F(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \\ F(b) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C_2 \sin(\lambda b) = 0 \xrightarrow{C_2 \neq 0} \sin\lambda b = 0$$

$$G(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$\lambda b = n\pi$$

$$\boxed{\lambda = \frac{n\pi}{b} \qquad n \in Z - \{0\}}$$

$$F_n(x) = C_{2,n} \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right)$$

$$G_n(y) = C_{4,n} \sinh\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

با فرض $C_{2,n} \cdot C_{4,n} = a_n$ داریم:

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right)}$$ جواب

Subject ۵۴
Date

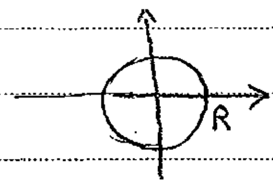
جلسه دوازدهم:

معادله دیریکله:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 & (0\leq r\leq R\ ,\ 0\leq\theta\leq 2\pi) \\ u(R,\theta)=f(\theta) & ۴ \\ u(0,\theta)<\infty & ۱ \\ u(r,\pi)=u(r,-\pi) & ۲ \\ u_\theta(r,\pi)=u_\theta(r,-\pi) & ۳ \end{cases}$$

دیسک فلزی به شعاع R و با چگالی جرم ثابت روی محیط دیسک گرمای اولیه $f(\theta)$ را ایجاد نموده‌ایم (مستقل از زمان) می‌خواهیم بدانیم توزیع گرما چگونه است.

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \longrightarrow \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$




حل با روش جداسازی متغیرها (روش ضربی):

تغییر متغیر $\rightarrow u(r,\theta)=F(r)\cdot G(\theta)$ از داخلی‌ترین پرانتز مشتقات را پیدا کنیم

$$\frac{\partial u}{\partial r}=F'(r)\cdot G(\theta) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(rF'(r)\cdot G(\theta)\right)$$

$$=F'(r)\,G(\theta)+rF''(r)\,G(\theta)$$

Subject
Date

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = F(r)\, G''(\theta)$$

$$\xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}} \frac{1}{r}\left(F'(r)\,G(\theta) + r F''(r)\,G(\theta)\right) + \frac{1}{r^2} F(r)\,G''(\theta) = 0$$

$$r^2 F''(r)\,G(\theta) + r F'(r)\,G(\theta) + F(r)\,G''(\theta) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-\underbrace{\frac{r^2 F''(r) + r F'(r)}{F(r)}}_{\text{مستقل از } \theta} = \underbrace{\frac{G''(\theta)}{G(\theta)}}_{\text{مستقل از } r} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} G''(\theta) + \lambda^2 G(\theta) = 0 & \text{خطی مرتبه دوم} \\ r^2 F''(r) + r F'(r) - \lambda^2 F(r) = 0 & \text{کوشی - اویلر} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G(\theta) = c_1 \cos(\lambda\theta) + c_2 \sin(\lambda\theta) \\ F(r) = c_3 r^{\lambda} + c_4 r^{-\lambda} \end{cases}$$

یادآوری:

$$x^2 y'' + a x y' + b y = 0 \longrightarrow \text{تغییر متغیر} \quad z = \ln x$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (a-1)\frac{dy}{dz} + by = 0 \xrightarrow{\text{مشخصه}} m^2 + (a-1)m + b = 0$$

PAPCO

اگر $z = \ln r \Rightarrow \dfrac{d^2F}{dz^2} + \cancel{(1-1)\dfrac{dF}{dz}} - \lambda^2 F = 0$

$m^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow m = \pm\lambda \longrightarrow e^{-\lambda z} = r^{-\lambda} \ , \ e^{\lambda z} = r^{\lambda}$

② $\Rightarrow G(\pi) = G(-\pi) \Rightarrow C_1 \cos(\cancel{\lambda\pi}) + C_2 \sin(\lambda\pi) = C_1 \cos(\cancel{-\lambda\pi})$

$+ C_2 \sin(-\lambda\pi) = 2C_2 \sin(\lambda\pi) = 0$ (*)   sin ← تابع فرد   cos ← تابع زوج

④ $\Rightarrow G'(\pi) = G'(-\pi) \Rightarrow -\lambda C_1 \sin(\lambda\pi) + \lambda C_2 \cancel{\cos(\lambda\pi)} = -\lambda C_1 \sin(-\lambda\pi)$

$+ \lambda C_2 \cancel{\cos(-\lambda\pi)} = 2\lambda C_1 \sin(\lambda\pi) = 0$ (**)

از (*) و (**) $\Rightarrow$ $C_1$ و $C_2$ همزمان صفر نیستند $\Rightarrow \sin(\lambda\pi) = 0$ یعنی

$\Rightarrow \lambda\pi = n\pi \Rightarrow \boxed{\lambda = n \quad n \in \mathbb{Z}}$

مقادیر ویژه

① $\Rightarrow F(0) < \infty \xrightarrow{\text{اگر } \lambda = n > 0} C_4 = 0$

چون $\lambda$ به $n$ وابسته است درنتیجه جواب‌ها نیز به $n$ وابسته‌اند.

$$\left.\begin{cases} G_n(\theta) = C_{1,n}\cos(n\theta) + C_{2,n}\sin(n\theta) \\ F_n(r) = C_{3,n}\, r^n \end{cases}\right\} \Rightarrow U_n(r,\theta) = F_n(r)\cdot G_n(\theta)$$

Subject

Date

با فرض $c_{1,n} + c_{3,n} = a_n$ و $c_{2,n} + c_{3,n} = b_n$ داریم:

$$u_n(r,\theta) = r^n\left[a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\right]$$

$$\boxed{u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left[a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\right]}$$

جواب عمومی با شرایط داده شده.

با استفاده از (۴) مقادیر $a_n$ ها و $b_n$ ها را حساب می‌کنیم:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left[a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\right] = f(\theta)$$

سمت چپ تساوی فوق، سری فوریه $f$ می‌باشد، بنابراین:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta$$

$$R^n \cdot a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta$$

$$R^n \cdot b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cdot\sin(n\theta)\,d\theta$$

PAPCO

جواب دالامبر معادله موج:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

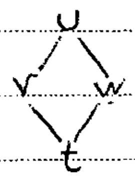
تغییر متغیر : $r = x - ct \quad , \quad w = x + ct$

* معادله شبه خطی:

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

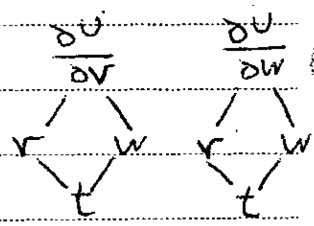
$$A(y')^2 - 2By' + C = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t}$$




$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial r} + c \frac{\partial u}{\partial w}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-c \frac{\partial u}{\partial r} + c \frac{\partial u}{\partial w}\right)$$



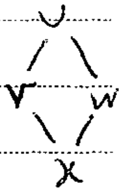

$$= -c \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) + c \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)$$

$$\Rightarrow -c\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \overset{-c}{\cancel{\frac{\partial r}{\partial t}}} + \frac{\partial^2 u}{\partial w \partial r} \cdot \overset{+c}{\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}}}\right] + c\left[\frac{\partial^2 u}{\partial w \partial r} \cdot \overset{-c}{\cancel{\frac{\partial r}{\partial t}}} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \cdot \overset{+c}{\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}}}\right]$$

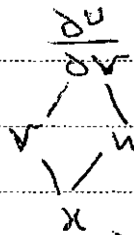
Subject
Date

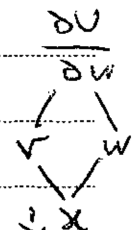
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial w\, \partial v} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \overset{1}{\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}} + \frac{\partial u}{\partial w} \cdot \overset{1}{\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial w}$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial w}\right)$$





$$\Rightarrow \left[\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \cdot \overset{1}{\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}} + \frac{\partial^2 u}{\partial v\, \partial w} \cdot \overset{1}{\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}}\right] + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial v\, \partial w} \cdot \overset{1}{\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \cdot \overset{1}{\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial v\, \partial w} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \qquad (2)$$

با قرار دادن ① و ② در معادله موج خواهیم داشت:

$$\cancel{c^2}\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial v\, \partial w} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}}\right) = \cancel{c^2}\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial v\, \partial w} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}}\right)$$

$$\Rightarrow 4\frac{\partial^2 u}{\partial v\, \partial w} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial v\, \partial w} = 0$$

$$\xrightarrow[v]{\text{انتگرال نسبت به}} \frac{\partial u}{\partial w} = F_1(w) \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } w} u = \int f_1(w)\, dw + g(v)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = f(w) + g(v)$$

توابع مختلط ← سری لوران

Subject ۹۵ | انتگرال مختلط ← چند قسمتی ← تحلیلی بودن ها ۲-۵ نمره

Date

نمره ۵/۲-۲ ← فرم مختلط یا انتگرال فوریه یا بیان کردن سری فوریه

۲ نمره ← تبدیل فوریه ۱ نمره ← معادله ناهمگن ۲ نمره ← روش جداسازی یا تغییر متغیر

جواب دالامبر معادله موج

$$\boxed{u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)}$$

اگر
$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} = 0 \xrightarrow{\int_v} \frac{\partial u}{\partial v} = f_1(w)$$

$$u = f_1(w)v + f_2(w)$$

معادلات ناهمگن:

الف) مستقل از زمان    ب) وابسته به زمان ـ مطرح نمی‌کنیم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Phi(x) & (0<x<l \ ,\ t>0) \\ u(0,t) = A \\ u(l,t) = B \\ u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

نیروی اضافی

شرایط مرزی:

اولیه:

حل معادله ناهمگن با تغییر متغیر:

$$u(x,t) = v(x,t) + \psi(x)$$ تغییر متغیر

(در گرما و پتانسیل هم همین گونه است)

Subject

Date

ضابطه $r(x)$ را طوری تعیین می‌کنیم که تبدیل یافته معادله بر حسب $v$ معادله همگن با شرایط همگن باشد

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r''(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r''(x)\right) + \Phi(x)$$

اگر $c^2(r''(x)) + \Phi(x) = 0$ باشد آنگاه معادله همگن می‌شود.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (0<x<l,\ t>0) \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 & \\ v(x,0) = f(x) - r(x) & \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = g(x) & \end{cases}$$



$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= v(0,t) + r(0) = A \Rightarrow r(0) = A \\ u(l,t) &= v(l,t) + r(l) = B \Rightarrow r(l) = B \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

شرایطی که باعث همگن شدن شرایط مرزی می‌شود.

با حل معادله فوق ضابطه $v(x,t)$ به دست می‌آید:

لذا: $u = \ldots\ldots$

Subject ۴۰

Date

مثال: معادله را به معادله همگن تبدیل کنید:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{4} u_{xx} - 3x + 5 & (0<x<1\ ,\ t>0) \\ u(0,t)=1 \\ u(1,t)=2 \\ u(x,0)=4x^3 - \sin x \end{cases}$$

تغییر متغیر: $u(x,t)=v(x,t)+\psi(x)$

$$v_t = \frac{1}{4}\left(v_{xx}+\psi''(x)\right) - 3x + 5$$

شرط همگن شدن معادله: $\frac{1}{4}\psi''(x) - 3x + 5 = 0 \rightarrow \psi''(x) = 12x - 20$

$$\rightarrow \psi'(x) = 6x^2 - 20x + c_1 \rightarrow \psi(x) = 2x^3 - 10x^2 + c_1 x + c_2$$

$$* \begin{cases} v_t = \frac{1}{4} v_{xx} & (0<x<1\ ,\ t>0) \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) - \psi(x) = 2x^3 + \sin x + 10x^2 - 9x - 1 \end{cases}$$

$$v(x,0) = u(x,0) - \psi(x) = 4x^3 + \sin x - 2x^3 + 10x^2 - 9x - 1$$

$$= 2x^3 + \sin x + 10x^2 - 9x - 1$$

PAPCO

Subject
Date

$v(0,t)=0 \rightarrow r(0)=u(0,t)=1 \Rightarrow \boxed{c_2=1}$

$v(1,t)=0 \rightarrow r(1)=u(1,t)=2$

$\Rightarrow 2-10+c_1+1=2 \Rightarrow \boxed{c_1=9}$

$$\Rightarrow r(x)=2x^3-10x^2+9x+1$$

با حل معادله * ضابطه $v(x,t)$ بدست می‌آید:

$$v(x,t)=---$$

بنابراین: $u(x,t)=v(x,t)+r(x)=---$



PAPCO

جلسه سیزدهم :

تبدیل فوریه کسینوسی و سینوسی :

اگر انتگرال های فوریه کسینوسی و سینوسی تابع $f(x)$ موجود باشد آن گاه تبدیل فوریه و تبدیل معکوس فوریه کسینوسی و سینوسی $f(x)$ به صورت زیر تعریف می شوند :

$$\begin{cases} F_c(f(x)) = \hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(wx)\,dx \\ F_c^{-1}(\hat{f}_c(w)) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(w)\cos(wx)\,dw \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_s(f(x)) = \hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin(wx)\,dx \\ F_s^{-1}(\hat{f}_s(w)) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(w)\sin(wx)\,dw \end{cases}$$

اگر انتگرال های فوریه کسینوسی و سینوسی $f(x)$ و $f'(x)$ موجود بوده و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ باشد آن گاه :

الف) $F_c(f'(x)) = wF_s(f(x)) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f(0)$

$$F_c(f'(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \underbrace{\overbrace{f'(x)\,dx}^{dv}}\ \underbrace{\cos(wx)}_{u}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(x)\cos(wx)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -w\,f(x)\sin(wx)\,dx\right]$$

Subject

Date

ب) $F_s(f'(x)) = -\omega F_c(f(x))$

$$F_s(f'(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f'(x)\sin(\omega x)\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(x)\sin(\omega x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \omega\, f(x)\cos(\omega x)\,dx\right]$$

درصورتی که انتگرال های فوریه کسینوسی و سینوسی $f''(x)$ نیز موجود بوده و $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ آنگاه:

الف) $F_c(f''(x)) = -\omega^2 F_c(f(x)) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f'(0)$

ب) $F_s(f''(x)) = -\omega^2 F_s(f(x)) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f(0)\,\omega$

نتیجه: اگر انتگرال های فوریه سینوسی و کسینوسی تابع $u(x,t)$ و $u_x(x,t)$ و $u_{xx}(x,t)$ نسبت به محور $x$ موجود بوده و $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$ , $\lim_{x\to\infty} u_x(x,t) = 0$ آنگاه:

$$\begin{cases} F_c(u(x,t)) = \hat{u}_c(\omega,t) \\ F_s(u(x,t)) = \hat{u}_s(\omega,t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_c(u_x) = \omega\,\hat{u}_s(\omega,t) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, u(0,t) \\ F_s(u_x) = -\omega\,\hat{u}_c(\omega,t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} F_c(u_t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_c(\omega,t) \\ F_s(u_t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_s(\omega,t) \end{cases}$$

PAPCO

$$\begin{cases} F_c(u_{xx}) = -\omega^2 \hat{u}_c(\omega,t) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, u_x(0,t) \\ F_s(u_{xx}) = -\omega^2 \hat{u}_s(\omega,t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, u(0,t)\,\omega \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} F_c(u_{tt}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}_c(\omega,t) \\ F_s(u_{tt}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}_s(\omega,t) \end{cases}$$

مثال: با تبدیل فوریه مناسب، حل کنید:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x>0,\ t>0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(x,0) = e^{-2x} \end{cases}$$

(از طرفین معادلات نسبت به $x$ تبدیل می‌گیریم)

چون مشتق نداده است پس تبدیل فوریه سینوسی است.

$$\begin{cases} F_s(u_t) = F_s(u_{xx}) \\ F_s(u(x,0)) = F_s(e^{-2x}) \end{cases}$$

با فرض $F_s(u(x,t)) = \hat{u}_s(\omega,t)$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_s(\omega,t) = -\omega^2 \hat{u}_s(\omega,t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \cancel{u(0,t)}^{\,0}\, \omega \\ \hat{u}_s(\omega,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-2x} \sin(\omega x)\, dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_s(\omega,t) + \omega^2 \hat{u}_s(\omega,t) = 0 \\ \hat{u}_s(\omega,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{4+\omega^2} \quad (1) \end{cases}$$

$$\hat{u}_s(\omega,t) = c\, e^{-\omega^2 t}$$

با توجه به ① داریم:

$$C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{4+\omega^2}$$

$$\hat{U}_S(\omega, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{4+\omega^2} e^{-\omega^2 t}$$

$$\Rightarrow U(x,t) = F_S^{-1}\left(\hat{U}_S(\omega,t)\right)$$

جواب

$$\boxed{u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{4+\omega^2} e^{-\omega^2 t} \sin(\omega x)\, d\omega}$$

$$* \; L(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2} \; * \qquad * \; y' + ay = 0 \longrightarrow y = c e^{-at} \; *$$

مثال: با تبدیل فوریه مناسب حل کنید:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (x>0 ,\, y>0) \\ u(0,y) = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} x & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases} \\ |u(x,y)| < M \end{cases}$$

چون مقدار داده شده از تبدیل سینوسی استفاده می‌کنیم اما اگر $u_x$ و یا $u_y$ داده بود از

تبدیل فوریه کسینوسی استفاده می‌کنیم.

$$F_S(u_{xx}) + F_S(u_{yy}) = 0$$

$$F_S(u(x,0)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0 x \sin(\omega x)\, dx$$

با فرض $F_S(U(x,y)) = \hat{U}_S(\omega,y)$ داریم:

$$\begin{cases} -\omega^2 \hat{U}_S(\omega,y) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\cancel{U(0,y)}^{\,0}\,\omega + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{U}_S(\omega,y) = 0 \\ \hat{U}_S(\omega,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{-x}{\omega}\cos(\omega x) + \frac{1}{\omega^2}\sin(\omega x)\right]\Big|_0^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{U}_S(\omega,y) - \omega^2\hat{U}_S(\omega,y) = 0 \xrightarrow{\text{مشخصه}} m^2 - \omega^2 = 0 \rightarrow m = \pm\omega \\ \hat{U}_S(\omega,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{-1}{\omega}\cos\omega + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega\right] \quad (1) \end{cases}$$

$$\hat{U}_S(\omega,y) = c_1 e^{\omega y} + c_2 e^{-\omega y}$$

باید داشته باشیم: $\lim_{y\to\infty}\hat{U}_S(\omega,y) < \infty$ لذا باید $c_1 = 0$ باشد.

$$\Rightarrow \hat{U}_S(\omega,y) = c_2 e^{-\omega y}$$

از شرط (1) نتیجه می‌شود:

$$c_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^2}\right]$$

$$\Rightarrow \hat{U}_S = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^2}\right]e^{-\omega y} \xrightarrow{\text{تبدیل معکوس}} U(x,y) = F_S^{-1}(\hat{U}_S(\omega,y))$$

جواب:
$$\boxed{U(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^2}\, e^{-\omega y}\sin(\omega x)\,d\omega}$$

Subject
Date

تبدیل فوریه:

اگر انتگرال فوریه تابع $f(x)$ موجود باشد آن گاه تبدیل فوریه و تبدیل معکوس فوریه به صورت زیر است:

$$F(f(x)) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$F^{-1}(\hat{f}(\omega)) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

درصورتی که انتگرال فوریه توابع $f'(x)$ و $f''(x)$ نیز موجود بوده و $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$ و $\lim_{|x|\to\infty} f'(x)=0$ آن گاه:

الف) $F(f'(x)) = i\omega\, F(f(x))$

ب) $F(f''(x)) = -\omega^2\, F(f(x))$

نتیجه این که اگر انتگرال فوریه توابع $u(x,t)$ و $u_x(x,t)$ و $u_{xx}(x,t)$ نسبت به $x$ موجود بوده و $\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t)=0$ و $\lim_{x\to\pm\infty} u_x(x,t)=0$ آن گاه:

$$F(u(x,t)) = \hat{u}(\omega,t)$$

$$F(u_x) = i\omega\, \hat{u}(\omega,t)$$

PAPCO

Subject ۷۴
Date

$- F(u_{xx}) = -\omega^2 \hat{u}(\omega, t)$

$- F(u_t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t)$

$- F(u_{tt}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u}(\omega, t)$

مثال: با تبدیل فوریه مناسب حل کنید

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} & (x \in R, t > 0) \\ u(x,0) = e^{-2|x|} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(u_t) = 9F(u_{xx}) \\ F(u(x,0)) = F(e^{-2|x|}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t) = -9\omega^2 \hat{u}(\omega, t) \longrightarrow \text{خطی مرتبه اول} \\ \hat{u}(\omega, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} \cdot e^{-i\omega x} dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t) + 9\omega^2 \hat{u}(\omega, t) = 0 \\ \hat{u}(\omega, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{4}{4+\omega^2} \quad (1) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x|} \cdot e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{+2x} \cdot e^{-i\omega x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2x} \cdot e^{-i\omega x} dx$$

Subject
Date

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(2-i\omega)x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(2+i\omega)x}\,dx =$$

$$\frac{1}{2-i\omega}\, e^{(2-i\omega)x}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{2+i\omega}\, e^{-(2+i\omega)x}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2-i\omega} + \frac{1}{2+i\omega} = \frac{4}{4+\omega^2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{(2-i\omega)x} = \lim_{x\to-\infty} e^{2x}(\cos\omega x - i\sin\omega x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{u}(\omega,t) = Ce^{-9\omega^2 t} \\ ① \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{4}{4+\omega^2} \end{cases} \Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{4}{4+\omega^2}\, e^{-9\omega^2 t}$$

$$\xrightarrow[\text{فوریه}]{\text{تبدیل معکوس}} u(x,t) = F^{-1}(\hat{u}(\omega,t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{4}{4+\omega^2}\, e^{-9\omega^2 t}\, e^{i\omega x}\, d\omega = \dots$$