«بسم الله الرحمن الرحیم»

دکتر تهرانی زاده

حمید کاظم

فهرست منابع و مراجع:

1) Rosenbluth, Design of Earthquake Resistant structure.
2) Green, N.B. Earthquake Resistant Building Design & Construction
3) Borg. Earthquake Engineering, Damage Assessment and Structural Design.
4) Newmark & Rosenbluth. Fundamental Of Earth-quake Engineering.
5) Clough & Pensien. Dynamics of structures.
6) Krinsha. Elements Of Earthquake Engineering.
7) Wiegel. Earthquake Engineering.

۱) ضوابط طراحی
۲) ضوابط طراحی و اجرا
۳) تئوری مهندسی زلزله
۴) تحلیل و تئوری
۵) دینامیک سازه
۶) تئوری و طراحی
۷) جمع آوری کتب سری مقالات مربوط به مهندسی زلزله

نحوه ارزیابی:

۱) تکالیف ٪15

۲) امتحان میان ترم ٪25

۳) امتحان پایان ترم ٪50

۴) پروژه ٪10

بخش اول: مهندسی زلزله   بخش دوم: زلزله شناسی مهندسی

زلزله: حادثه طبیعی به علت حرکات پوسته زمین است.

زلزله شناسی مهندسی: به بحث از نقطه ای می پردازد که تحول ایجاد می شود (کانون) تا نقطه ای که امواج به روی زمین انتقال پیدا می کنند.

مهندسی زلزله: بررسی رفتار سازه مقابل تکان های ناشی از زلزله می باشد.

---

* $g = 9.81 \frac{m}{s^2} = 386.06 \frac{in}{s^2} = 32.17 \frac{ft}{s^2}$

* 1 kips = 1000 lb وزنی $1\,ft = 12\,in$

* lb وزنی را اگر بر g تقسیم کنیم lb جرمی بوجود می آید.

* psi = Pound per square inch = $\frac{lb_{\text{وزنی}}}{in^2}$

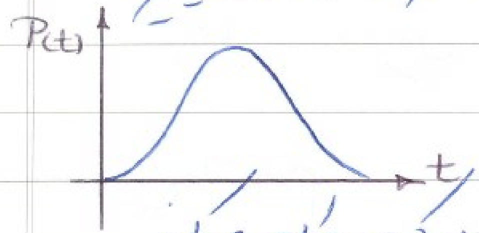
* kpsi = 1000 psi

$\frac{lb_{\text{جرمی}} \cdot in}{sec^2} = lb_{\text{وزنی}}$

حمید کاظم

فصل اول:
مقدمه‌ای بر دینامیک سازه

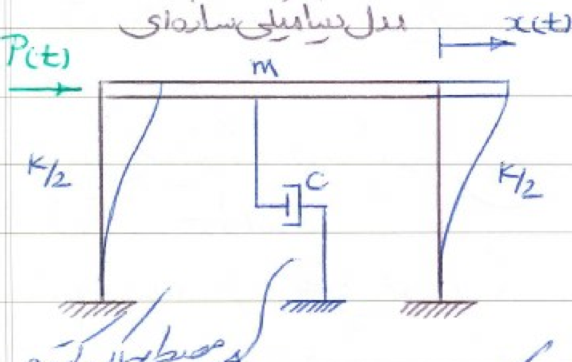
بار دینامیکی باری است که اندازه، جهت و نقطه اثرش با زمان تغییر کند.



هدف: تحمل سازه در مقابل بار.

در مسائل استاتیکی نیروها و تنش‌ها را در المان‌ها محاسبه کرده و طراحی می‌کنیم.
در مسائل دینامیکی آنچه اهمیت دارد تغییر مکان است. با تغییر مکان نیروها و تنش‌ها را محاسبه کرده، طراحی صورت می‌گیرد.

مدل دینامیکی سازه‌ای



سختی ستون:
- ارتفاع
- جنس
- صلبیت مقطع
- تکیه‌گاه

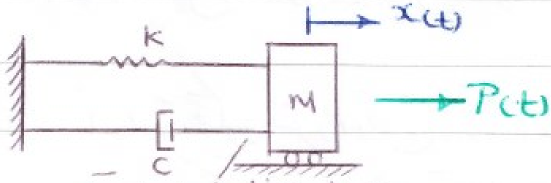
مقدار تغییر مکان به سختی ستون بستگی دارد.

یکی از عوامل بسیار مهم جرم ساختمان است.
عامل مهم دیگر میرایی سازه است که به اصطکاک کریستال‌های مصالح سازه بستگی دارد.

ابتدا باید معادله حرکت را تعیین کنیم.

معادله حرکت معادله‌ای است که از حل آن بتوان تابع حرکت (تغییر مکان) را بدست آورد.

مدل دینامیکی سازه‌ی قبل را به صورت زیر می‌توان نشان داد:



مدل دینامیکی سیستم
یک درجه آزادی

$x(t)$ تابع حرکت جرم

چون سقف صلب است تنها در یک جهت حرکت داریم. پس یک درجه آزادی دارد.

هر مدل سیستم یک درجه آزادی را باید به صورت بالا درآورد. اگر این گونه نشود اشتباه شده است.

قدم بعدی روش تعیین معادله حرکت می‌باشد. (معادله حرکت معادله‌ای است برحسب تابع حرکت، که از حل مستقیم این تابع حرکت بدست می‌آید)

روش‌های تعیین معادله حرکت:

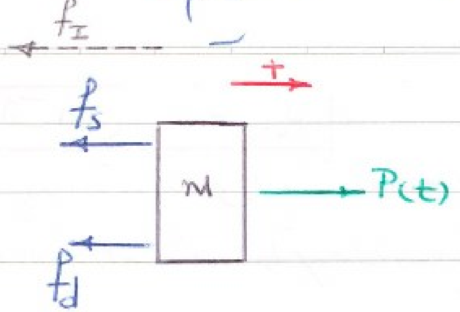
روش مستقیم:

این روش از کاربرد اعمال قانون دوم نیوتن بدست می‌آید.

قانون دوم نیوتن: کلیه نیروهای اعمالی بر جرم برابر است با جرم جسم ضربدر شتاب در جهت برآیند نیروها.

وقتی $x(t)$ در جهتی مثبت است $\dot{x}(t)$ و $\ddot{x}(t)$ هم در همان جهت مثبت است.

* اینرسی را همیشه نیروی در خلاف جهت حرکت در نظر می گیریم *



جرم را در جهت $x(t)$ حرکت می دهیم. با این کار نیروهای داخلی و جهتشان مشخص می گردد.

اعمال قانون دوم نیوتن :

$$\sum F_x = m a_x = f_I \quad (1)$$

$$-f_d - f_s + P(t) = f_I \quad (2)$$

$$f_I + f_d + f_s = P(t) \quad (3)$$

f_I : نیروی اینرسی

معادله تعادل دینامیکی ←

این معادله، معادله حرکت است.

$$f_s = k\,x_{(t)} \quad (4)$$

$$f_d = c\,\dot{x}_{(t)} \quad (7)$$

$$f_I = m\,\ddot{x}_{(t)} \quad (5)$$

اگر کمک فنر ماشین را با سرعت بیشتری فرو دهیم عکس العمل بیشتری داریم

پس $f_d \propto \dot{x}_{(t)}$ (6)

c ← ضریب استهلاک

با جایگذاری روابط 4، 5، 7 در رابطه 3 خواهیم داشت :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (8)$$

این معادله، معادله ی حرکت است. از نظر ریاضی هم معادله ی دیفرانسیل درجه دوم خطی است. علت خطی بودن آن است که پارامترهای سمت چپ معادله ثابت هستند.

فرضاً اگر k تابعی از سرعت بود معادله غیرخطی می شد.

حل معادله حرکت :

$$\boxed{\text{۱) حالت اول} \quad P_{(t)}=0}$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \qquad (9)$$

این حالت، حالتی است که به سیستم تغییر مکان اولیه اعمال کنیم. این ارتعاش ارتعاشی است که در اثر حذف نیرو ایجاد می‌شود. در این صورت ارتعاش آزاد داریم.

به این دستگاه، دستگاه یک درجه آزادی با ارتعاش آزاد می‌گویند.

$$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0 \qquad (10)$$

تعریف‌های زیر را داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{k}{m}=\omega_n^2 \quad (11) \quad \omega_n = \text{فرکانس طبیعی} \\ \dfrac{c}{m}=2\xi\omega_n \quad (12) \quad \xi = \text{نسبت استهلاک بحرانی} \end{cases}$$

پس از جایگزین کردن روابط 11 و 12 در رابطه 10 خواهیم داشت:

$$\ddot{x}+2\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=0 \qquad (13)$$

این معادله، معادله حرکت ارتعاش آزاد سیستم یک درجه آزادی است.

حل:

$$x_{(t)}=Xe^{\lambda t} \qquad (14)$$

فرض می‌کنیم $x_{(t)}$ جواب معادله باشد (X عدد ثابت است)

$$\dot{x}_{(t)}=X\lambda e^{\lambda t} \qquad \ddot{x}_{(t)}=X\lambda^2e^{\lambda t}$$

$$\rightarrow Xe^{\lambda t}(\lambda^2+2\xi\omega_n\lambda+\omega_n^2)=0$$

اگر $Xe^{\lambda t}=0$ باشد یعنی حرکتی نداریم. پس داخل پرانتز باید صفر باشد.

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \qquad (15)$$

$$\rightarrow \lambda_1 , \lambda_2 = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \qquad (16)$$

$$\rightarrow x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \qquad (17)$$

شرایط مرزی مربوط به مکان است. اما چون اینجا با زمان سروکار داریم با شرایط اولیه مواجه هستیم.

$$\begin{cases} x(t=0) = X_0 & \text{تغییر مکان اولیه} \\ \dot{x}(t=0) = \dot{X}_0 & \text{سرعت اولیه} \end{cases} \qquad (18)$$

اگر تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه صفر باشد حرکت اولیه نداریم. در غیر اینصورت حرکت اولیه را داریم.

۱) حالت اول (ارتعاش آزاد بدون استهلاک (هارمونیک ساده)):

با فرض اینکه استهلاک قابل صرفنظر کردن باشد: $c = \xi = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_n$$

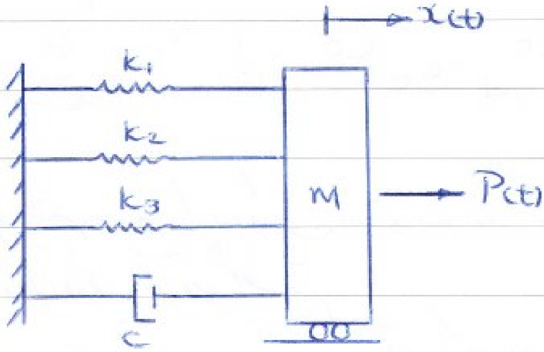
$$\begin{cases} x(t) = Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t} \\ x(t) = C\cos\omega_n t + D\sin\omega_n t \end{cases}$$

: حرکت نوسانی هارمونیک ساده

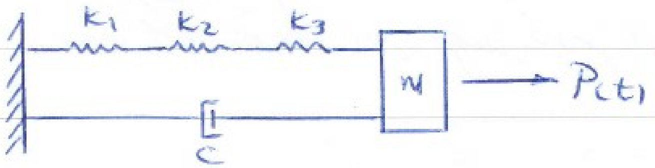
ω_n فرکانس طبیعی سیستم است. یعنی همواره اگر نیرویی به سازه اعمال نشود و حرکت داشته باشیم این فرکانس همیشه وجود دارد.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

مسئله اول : در صورتی که مدل یک درجه آزادی سیستم سازه‌ای به صورت زیر باشد، مطلوبست تعیین معادله حرکت و هم چنین تابع تغییر مکان اگر $P(t)=0$ و $k_1=k_2=k_3=k$ و $c=0$ باشد.

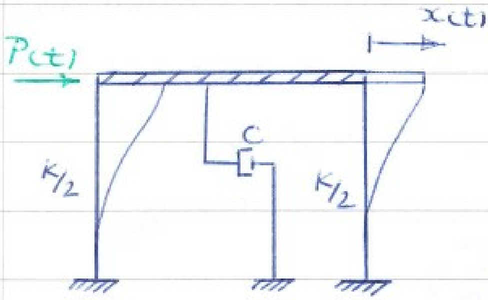


مسئله دوم : مدل دینامیکی سیستم یک درجه آزادی به صورت شکل مقابل می‌باشد مطلوبست تعیین معادله حرکت و هم چنین تابع تغییر مکان در صورتیکه $P(t)=0$ و $k_1=k_2=k_3=k$ و $c=0$ باشد.



یادآوری : $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$ $\quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a} \quad (b'=b/2) \end{cases}$$



$$x(t) = C\cos\omega_n t + D\sin\omega_n t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

اعمال شرایط اولیه:

$$\begin{cases} x(0) = X_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{X}_0 \end{cases}$$

$$x(0) = X_0 = C \Rightarrow C = X_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{X}_0 = D\omega_n \Rightarrow D = \frac{\dot{X}_0}{\omega_n}$$

$$\Rightarrow x(t) = X_0\cos\omega_n t + \frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$$

زمانی که هم سرعت اولیه و هم تغییر مکان اولیه صفر باشد حرکت نداریم.

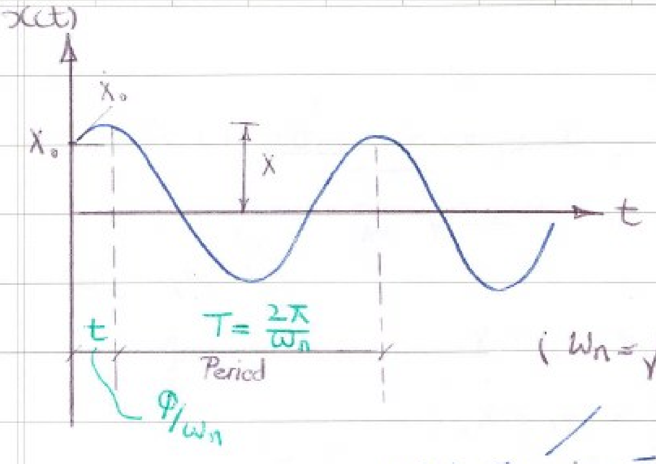
فرض:

$$x(t) = X\cos(\omega_n t - \varphi)$$

اگر رابطه بالا را بسط دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2} & \text{دامنه نوسان} \\ \varphi = tg^{-1}\left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n X_0}\right) & \text{زاویه فاز} \end{cases}$$

تمرین: مطلوبست تأیید روابط فوق.



$$x(t) = X\cos(\omega_n t - \varphi)$$

$$X = X\cos(\omega_n t - \varphi)$$

$$\omega_n t - \varphi = 0$$

$$\Rightarrow t = \varphi/\omega_n$$

$$\left(\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

اگر مقدار $c=0$ باشد تا بی نهایت این حرکت را داریم.

فرکانس طبیعی به سختی و جرم بستگی دارد.

ساختمان های بلند سختی کمتری دارند پس فرکانس آن ها کم و پریودشان بالاست.

نواحی اطراف کانون، نوسان های ایجاد شده دارای فرکانس زیادی است

پس Period شان کم است و این امکان پدیده تشدید را ایجاد می کند.

(وقتی فرکانس زلزله با فرکانس سازه برابر باشد تشدید رخ می دهد)

فرکانس $\uparrow \Rightarrow$ Period $\downarrow$

۲) حالت دوم (ارتعاش آزاد با استهلاک): $c \neq 0$, $\xi < 1$

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

فرکانس استهلاکی $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$\Longrightarrow \lambda_1 , \lambda_2 = -\xi\omega_n \pm i\omega_d$$

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^{-\xi\omega_n t + i\omega_d t} + Be^{-\xi\omega_n t - i\omega_d t}$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}(C\cos\omega_d t + D\sin\omega_d t)$$

برای این حرکت، حرکت نوسانی میرا گویند. با گذشت زمان حرکت، دامنه حرکت نوسانی کاهش می یابد.

اعمال شرایط اولیه:

$$x(0) = X_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{X}_0$$

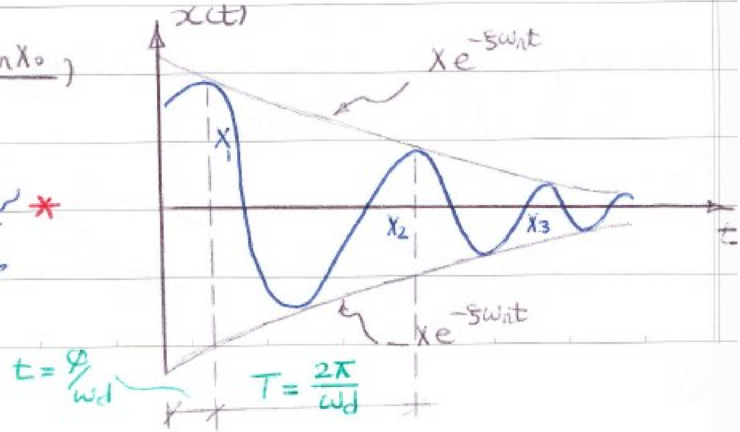
پس از جایگزین کردن شرایط اولیه در رابطه اصلی خواهیم داشت:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(X_0\cos\omega_d t + \frac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)$$

$$x(t) = \underbrace{Xe^{-\xi\omega_n t}}_{\text{دامنه}}\cos(\omega_d t - \varphi)$$

$\Longrightarrow \omega_d \simeq \omega_n$ در بازه‌ی $0/2 < \xi < 0/7$ تغییر دارد.

$$\begin{cases} X = \left[\left(\dfrac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d}\right)^2 + X_0^2\right]^{1/2} \\ \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{\dot{X}_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d X_0}\right) \end{cases}$$



* پریود ثابت است فقط دامنه کاهش می یابد.

ضریب کاهش لگاریتمی :

$$\frac{X_k}{X_{k+1}} = \frac{X e^{-\xi\omega_n(kT)}}{X e^{-\xi\omega_n(k+1)T}} = \frac{1}{e^{-\xi\omega_n T}}$$

$$\Rightarrow \frac{X_k}{X_{k+1}} = e^{\xi\omega_n\left(\frac{2\pi}{\omega_d}\right)}$$

ضریب کاهش $\delta = \ln \frac{X_k}{X_{k+1}} = 2\pi\xi \frac{\omega_n}{\omega_d}$

$$\omega_d = \sqrt{1-\xi^2}\cdot\omega_n \Rightarrow \delta = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

برای ξ های کوچک :

$$\delta \simeq 2\pi\xi$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{X_k}{X_{k+1}}\right)$$

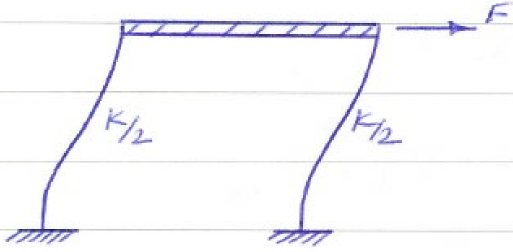
اگر بخواهیم رابطه فوق را برای حالتی عمومی تر یعنی برای حالتی که n سیکل کامل بعد از دامنه X_k مورد نظر باشد بخواهیم داشت :

$$\xi = \frac{1}{2\pi n} \ln \frac{X_k}{X_{k+1}}$$

تمرین ۳: قاب یک طبقه شکل زیر مفروض است. درصورتیکه وزن قاب $W=200kips$ $(1kips=1000lb)$ و پریود سازه $T=0.2s$ باشد مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان در حالتیکه تغییر مکان اولیه $x_0=2in$، سرعت اولیه بصورت $\dot{x}_0 = 1.5\ in/sec$ باشد. مقدار حداکثر برش پایه را حساب کنید. حداکثر شتاب سقف را بدست آورید.

تمرین ۴: در صورتیکه در تمرین شماره ۱ مقدار نسبت استهلاک بحرانی ۲٪ و تغییر مکان اولیه 5 inch و سرعت اولیه صفر باشد مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان و رسم تابع در دامنه تغییر مکان بعد از ۶ سیکل کامل

مثال: قاب شکل زیر مفروض است. در صورتیکه نیروی F مطابق شکل به آن اعمال گردد و پس از آن نیرو حذف شود دامنه حرکت پس از یک رفت و برگشت 0.16 in باشد، مطلوبست تعیین:



۱) W وزن موثر
۲) فرکانس استهلاکی ω_d
۳) C و ξ
۴) دامنه پس از ۶ سیکل کامل.

$T = 1.4\ sec$ $\quad F = 20,000\ lb$ $\quad X_0 = 0.20\ in$

۱) فرض $\omega_n \simeq \omega_d$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{kg}{mg}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{gk}{W}}}$$

$$\Rightarrow W = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 k.g$$

$$F = kX_0 \rightarrow k = \frac{F}{X_0} = \frac{20,000}{0.2} = 100,000\ lb/in$$

$$W = \left(\frac{1.4}{2\pi}\right)^2 (10000)(380) = 1.92 \times 10^6\ lb$$

۲) $$\omega_d = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.4} \rightarrow \omega_d = 4.48\ rad/s$$

۳) $$\xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{X_k}{X_{k+1}} \rightarrow \xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{X_0}{X_1} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{0.2}{0.16}$$

$$= 0.0355 \rightarrow \xi = 3.55\%$$

$$X_n = X_0 \left(\frac{X_1}{X_0} \right)^n$$ ؛ دانستن n از شکل

$$c = 2 \xi m \omega_n = 2(0.0355)\left(\frac{1.92 \times 10^6}{386}\right)(4.48)$$
$$= 1.58 \times 10^3 \ lb/in/s$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-(0.0355)^2} = \omega_n (0.999)^{1/2} \simeq \omega_n$$

فرض ما صحیح است.

۴)

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{X_k}{X_{k+1}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{X_0}{X_1}$$

$$\xi = \frac{1}{2\pi n} \ln \frac{X_k}{X_{k+n}} = \frac{1}{2\pi(6)} \ln \frac{X_0}{X_6}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{X_0}{X_1} = \frac{1}{2\pi(6)} \ln \frac{X_0}{X_6} \Rightarrow \left(\frac{X_0}{X_1}\right)^6 = \frac{X_0}{X_6}$$

$$\Rightarrow X_6 = X_0 \left(\frac{X_1}{X_0}\right)^6 \Rightarrow X_6 = 0.2\left(\frac{0.16}{0.2}\right)^6 = 0.054 \ in$$

۳) حالت سوم $\xi \geq 1$ (ارتعاش آزاد با استهلاک بحرانی و فوق بحرانی)

الف) $\xi = 1$ ؛

$$\lambda_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$\xi = 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\xi \omega_n$ ریشه مضاعف

$$\Rightarrow x(t) = A e^{-\xi \omega_n t} + B t e^{-\xi \omega_n t}$$

این تابع، تابعی نمایی است. در این حالت جزء داریم دیگر نوسان نداریم بنابراین دلیل به این حالت ارتعاش آزاد با استهلاک بحرانی می‌گویند

$\xi = 1 \longrightarrow$ ثابت استهلاک بحرانی

(Critical Damped)

ب) $\xi > 1$:

$\lambda_{1,2} =$ ریشه‌های حقیقی

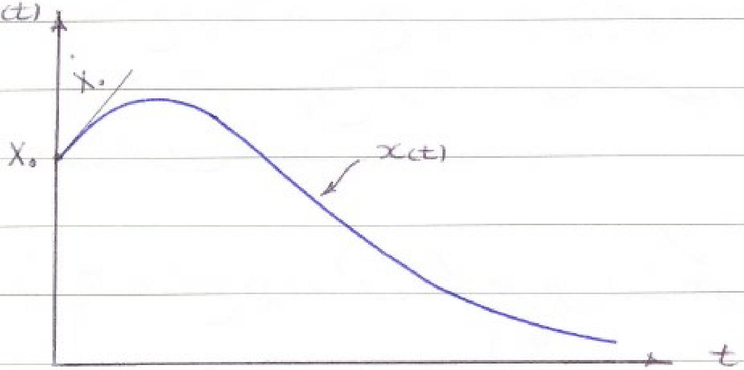
$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

در این حالت حرکت نوسانی نداریم (Over Damped)

علت نوسانی نبودن به صورت [illegible] دارای c بزرگ بود.

به این حالت ارتعاش آزاد با استهلاک فوق بحرانی گویند.

تعیین ضرایب A, B :



$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \qquad \xi = 1 = \xi_c \implies c_c$$

$$\implies 1 = \frac{c_c}{2m\omega_n} \implies C_c = 2m\omega_n$$

برحسب تعریف که ξ نسبت استهلاک بحرانی است پس داریم :

$$\xi = \frac{c}{c_c}$$

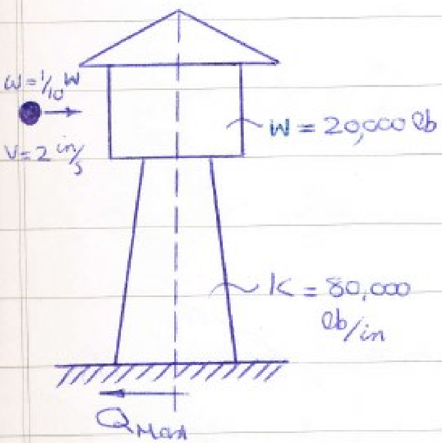
$$\rightarrow \xi = \frac{c}{2m\omega_n}$$

ξ ضریب استهلاک موجود به ضریب استهلاک بحرانی است.

اگر ضریب استهلاک c بزرگتر از ضریب استهلاک بحرانی (C_c) باشد سیستم را فوق بحرانی (Over Damped) می نامیم و اگر کوچکتر از C_c باشد سیستم را نوسانی (Under Damped) می گویند و حرکت سیستم نوسانی خواهد بود

در حالتیکه $C_c < c$ باشد حرکت سیستم دیگر حرکتی ارتعاشی یا نوسانی نخواهد بود زیرا تابع حرکت یک تابع نمائی بوده و دامنه نوسان او به صفر میل می‌رود و در نهایت بدون هیچ حرکت نوسانی به صفر می‌رسد. این حالت را حالت فوق بحرانی می‌نامند.

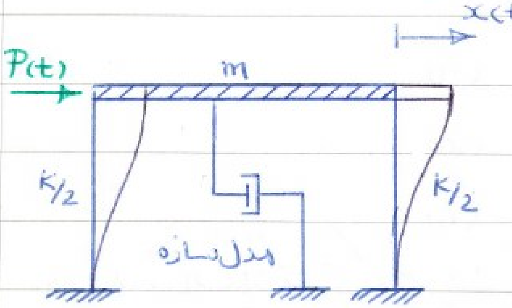
تمرین ۱ (5): منبع آبی مطابق شکل مفروض است اگر وزن این منبع 20,000 lb و سختی پایه‌های منبع 80,000 (lb/in) فرض شود و این منبع تحت اثر نیروی قرار گیرد که مقدار آن F=16,000 lb باشد، مطلوبست تعیین دامنه حرکت پس از 3، 5، 10 سیکل. نسبت استهلاک بحرانی منبع، ضریب استهلاک، فرکانس طبیعی و فرکانس استهلاکی درصورتیکه دامنه نوسان پس از یک رفت و برگشت به 2/3 حالت اولیه کاهش یابد.

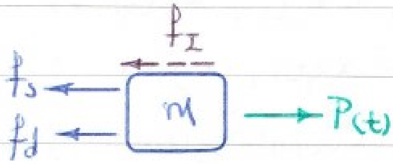


تمرین ۲ (6): درصورتیکه در تمرین 1 گلوله‌ای به وزن $\omega = 0.1W$ که با سرعت $V = 2\, in/s$ به منبع اصابت کند و نوع تصادم الاستیک فرض شود مطلوبست تعیین تابع تغییر مکان، مقدار Max برش پایه و رسم منحنی درصورتیکه $\xi = 5\%$

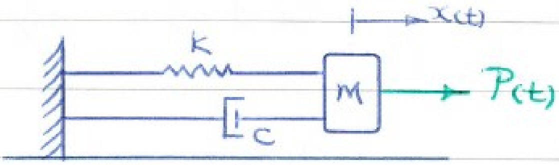
در نظر گرفته شود.

معادله حرکت قاب یک طبقه تحت اثر حرکت زمین ،



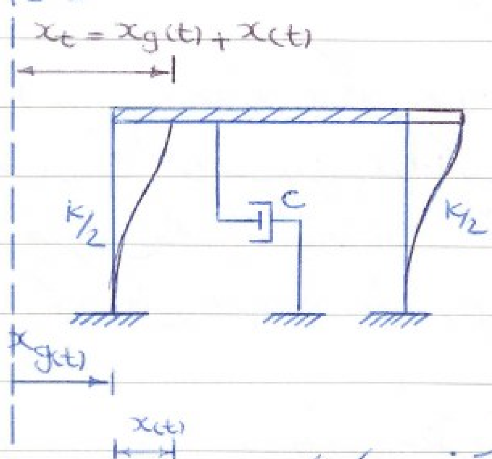


$$\sum F(x) = 0 \quad (1) \quad \Longrightarrow \quad -f_I - f_d - f_s + P(t) = 0 \quad (2)$$



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (3)$$

مدل دینامیکی سیستم یک درجه آزادی



$$P(t) = 0 \quad (4)$$

$$f_I + f_d + f_s = 0 \quad (5)$$

$$f_s = kx(t) \quad (6)$$

$$f_d = c\dot{x}(t) \quad (7)$$

f_s و f_d ربطی با حرکت کل ندارند.

زمانی نیرو در فنر یا مستهلک کننده ذخیره می شود که یک انتها نسبت به انتهای دیگر حرکت

داشته باشد.

$$f_I = m\ddot{x}_t \qquad (8)$$ نیروی اینرسی

شتابی که توسط زمین وارد می شود + شتاب ناشی از حرکت نسبی سقف به پایه = شتاب مطلق جرم

$$m\ddot{x}_t + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \qquad (9)$$

$$x_t = x(t) + x_g(t) \qquad (10)$$

$$\ddot{x}_t = \ddot{x}(t) + \ddot{x}_g(t) \qquad (11)$$

$\ddot{x}_g(t)$ شتاب پایه است که در هر لحظه تغییر می کند.

از جایگذاری رابطه 11 در 9 داریم: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g(t)$ (12)

(x همان $x(t)$ است)

اگر رابطه 12 را با 3 مقایسه کنیم این طور تلقی می شود که $m\ddot{x}_g(t)$ یک نیروی خارجی است.

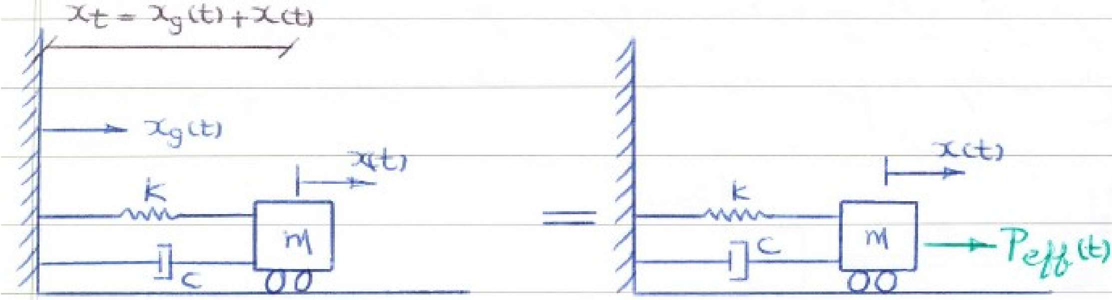
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_{eff}(t) \qquad (13)$$

$$P_{eff}(t) = -m\ddot{x}_g(t) \qquad (14)$$ نیروی موثر

نیروی زلزله به جرم سازه بستگی دارد. هر چه جرم سازه بیشتر باشد نیروی وارد به سازه بیشتر خواهد بود. لذا سبک سازی در بحث زلزله بسیار اهمیت دارد. Drift تغییر مکان نسبی طبقات است. اگر Drift یک طبقه نسبت به دیگری زیاد شد، آن طبقه اصطلاحاً طبقه نرم می گردد و احتمال تخریب زیادی می گردد.

سبک سازی سازه یک عیب البته دارد که سبکتر از آن سختی دچار انعطاف پذیری و تغییر شکل بالا می گردد.

ساختمان هایی که طبقه اول آن پیلوت دارد یعنی دیوارهای برشی و بادبندها
را برای افزایش فضای پارکینگ برمی دارند. طبقه نرم ایجاد شده ساختمان
در هنگام زلزله روی طبقه اول تخریب می گردد.



مدل یکطبقگی سیستم تحت اثر حرکت زمین

کافی است همان سیستم sdof را حفظ کنیم و فقط نیروی موثر زلزله را اضافه کنیم

$x(t)$ حرکت جرم است نسبت به پایه.

سقف نسبت به پایه می تواند حرکت کند. جرم در طبقات متمرکز است. نیروی بین طبقات توزیع می شود.

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m} P_{eff}(t) \qquad (15)$$

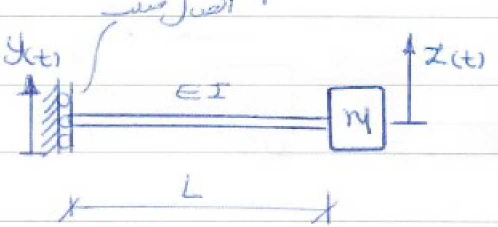
$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{1}{m} P_{eff}(t) \qquad (16)$$

(نیروی زلزله علاوه بر جرم به شتاب زمین هم بستگی دارد. این شتاب وابسته به لرزه خیزی منطقه است. باید سازه ها را نوعی مقاوم سازی کرد تا بتوانند در مقابل زلزله مقاومت کنند)

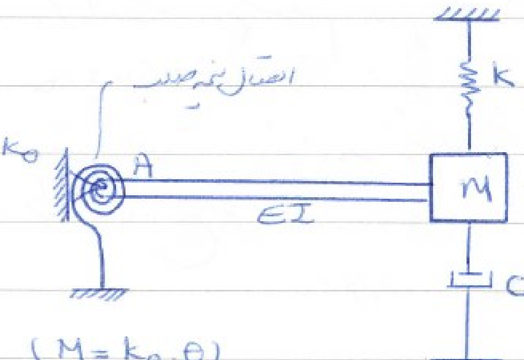
(زمان کل تحت زلزله شامل دو قسمت است. ۱) زمانی که امواج حرکت زمین را به سطح می رسانند. ۲) زمانی که اثر آن را به سازه منتقل می کنند)

سمت دوم معمولاً بیشتر از ۱۵ ثانیه است. این زمان (سمت دوم) مدت دوام زلزله است که هر چه بیشتر باشد قدرت تخریب هم بیشتر است.

۷ تمرین ۱: تیر یکسر گیردار شکل زیر مفروض است. درصورتیکه تکیه‌گاه این تیر تحت اثر حرکت $y(t)$ قرار گیرد، مطلوبست معادله حرکت جرم m برحسب تابع $z(t)$

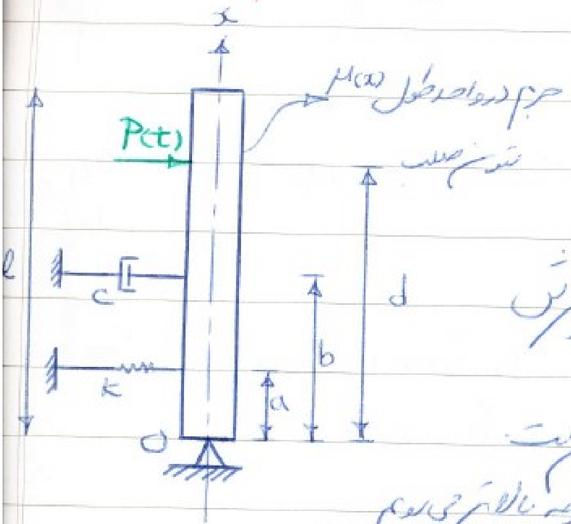


۸ تمرین ۲: سازه شکل مقابل مفروض است. درصورتیکه تیر AB بی‌وزن بوده و در تکیه‌گاه A علاوه بر مفصل توسط فنر پیچشی مقید شده باشد، معادله حرکت جرم m را برحسب $y(t)$ بدست آورید. (K_θ سختی فنر است)



$(M = k_\theta \cdot \theta)$

معادله حرکت در سیستم مختصات زمانی برای اجسام با جرم گسترده :

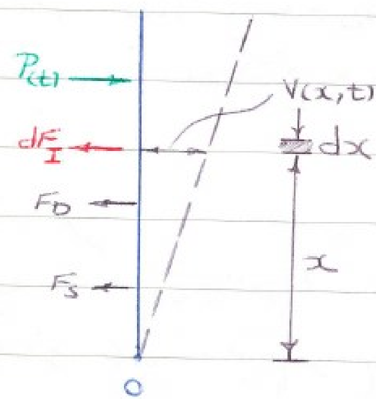


الف) جسم صلب :

اگر می‌خواهیم معادله حرکت جسم در حالت حرکت صلبی است.

در حالت کلی تابع تغییر مکان x و تغییرش t بود.

حال اولین قدم تعیین تابع تغییر مکان است در نقطه O، تغییر مکان صفر است هرچه بالاتر می‌رویم بیشتر می‌شود. پس تابع تغییر مکان وابسته به مکان و زمان است. این تابع تغییر مکان را با V نشان می‌دهند. تابع تغییر مکان ← $V(x,t)$



$$V(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t)$$

تابع شکلی یا مکانی = $\psi(x)$

$Y(t) =$ تابع زمانی

تابع مکانی را به صورتی می‌گیریم که مقدار حداکثر آن واحد باشد $\psi(L) = 1$

$$\Longrightarrow \psi(x) = x/L$$

آنچه لازم است به دست بیاید $Y(t)$ است

$$V(x,t) = x/L \cdot Y(t)$$

تعیین معادله حرکت : (روش المان)

$$F_I + F_D + F_S = P(t)$$

در حالت جرم متمرکز داشتیم :

برای جرم گسترده داریم:

$$M_I + M_D + M_S = M_{P(t)} \qquad (6)$$

حول O ممان می‌گیریم:

$$M_{P(t)} = P_{(t)}\cdot d \qquad M_D = F_D\cdot b \qquad -M_S = F_S\cdot a$$

M_I از جنس اینرسی است. چون جرم گسترده است پس باید یک dx، dm بگیریم.

$$\text{جرم: } dm = \mu(x)\cdot dx \qquad (10)$$

$$dF_I = dm\cdot \ddot{v}(x,t) \overset{(11)}{=} \mu(x)\,dx\,\ddot{v}(x,t) \qquad (12)$$

$$\Rightarrow dM_I = dF_I\cdot x = \mu(x)\cdot x\,\ddot{v}(x,t)\,dx \qquad (13)$$

$$\Rightarrow M_I = \int_0^L \mu(x)\cdot x\cdot \ddot{v}(x,t)\,dx \qquad (14)$$

$$M_{P(t)} = P_{(t)}\cdot d \qquad (7)$$

$$M_D = F_D\cdot b = c\,\dot{v}(b,t)\cdot b \rightarrow M_D = c\frac{b^2}{L}\dot{Y}(t) \qquad (8)$$

$$M_S = F_S\cdot a = k\,v(a,t)\cdot a \rightarrow M_S = k\frac{a^2}{L}Y(t) \qquad (9)$$

$$M_I = \ddot{Y}(t)\int \mu(x)\frac{x^2}{L}\,dx \qquad (15)$$

پس از جایگزینی روابط 7، 8، 9، 15 در رابطه 6 خواهیم داشت:
(دو طرف را بر L تقسیم کرده‌ایم)

$$\ddot{Y}\underbrace{\int_0^L \mu(x)\left(\frac{x}{L}\right)^2 dx}_{M^*\ (\text{جرم})} + \underbrace{c\left(\frac{b}{L}\right)^2}_{c^*}\dot{Y}(t) + \underbrace{k\left(\frac{a}{L}\right)^2}_{k^*}Y(t) = P(t)\cdot \frac{d}{L}$$

$$M^*\ddot{Y}(t) + C^*\dot{Y}(t) + K^*Y(t) = P^*(t)$$

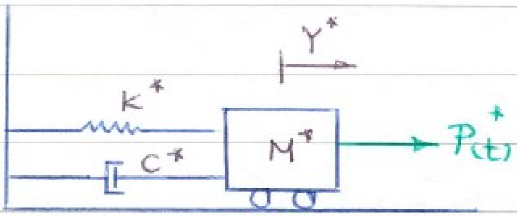
$$M^* = \int_0^L \mu(x) \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx$$ جرم معادل

$$C^* = c\,(b/L)^2$$ ضریب استهلاک معادل

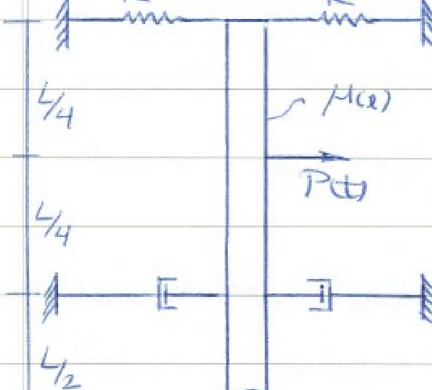
$$k^* = k\,(a/L)^2$$ ضریب سختی معادل

$$P^*_{(t)} = P_{(t)}\, d/L$$ نیروی معادل

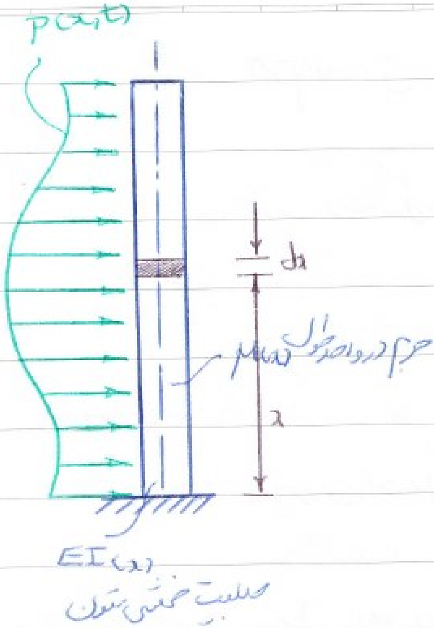
بر اساس این سیستم با معادل شکل حالت زیر است :

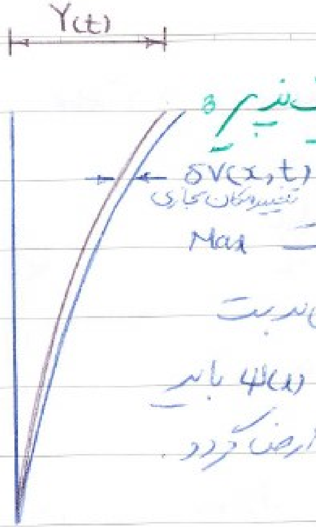


باز با این که سیستم دو بعدی است ولی یک درجه آزادی داریم.



*تمرین ۹: ستون صلبی دارای تکیه گاه نیمه صلب می باشد که توسط فنرهایی در دو انتهای آن (آزاد آن) قرار دارند مهار شده است. مطلوبست نوشتن معادله حرکت این سیستم درصورتیکه $\mu(x)$ جرم در واحد طول این ستون صلب باشد. در حالتی که $\mu(x)=\mu$ باشد نیز معادله حرکت را بدست آورید و سیستم معادل یک درجه آزادی آن را نشان دهید.





ب) جسم انعطاف پذیر:

مقدار $\psi(x)$ در حالت Max واحد است. برای بدست آوردن معادله $\psi(x)$ باید شرایط مرزی ارضا گردد.

در نقطه $x=0$ تابع و مشتق اش صفر است و در $x=L$ تابع برابر یک است.

پس حدس مان بصورت مقابل می‌گردد:

$$\psi(x)=\frac{x^2}{L^2}$$

پس بدست آوردن $\psi(x)$ ساده است. مهم $Y(t)$ است.

تعیین معادله حرکت: (روش کار مجازی)

بی نهایت جرم

بی نهایت تغییر مکان

} ← بی نهایت درجه آزادی

ما می خواهیم سیستم را بصورت یک سیستم معادل یک درجه آزادی حل کنیم.

روش ساده تری علاوه بر روش المان وجود دارد.

روش تغییر مکان مجازی (کار مجازی):

اصل کار مجازی برابر است که اگر سیستمی دارای تعادل استاتیکی باشد برای تغییر مکان مجازی کل کار انجام شده برابر صفر است.

ویژگی تغییر مکان مجازی بصورت زیر است.

۱) با قیود سازه هم‌ساز باشد (جابجایی در صفحات صفر باشد و جابجایی Max، Min باشد)
۲) تغییر مکان کوچک باشد تا سیستم در حال تعادل بماند.

(Internal) (External)

کار مجازی نیروهای داخلی δW_E $=$ کار مجازی نیروهای خارجی δW_I

براساس اصل کار مجازی، کار مجازی انجام شده توسط نیروهای داخلی را می‌توان برابر کار مجازی انجام شده توسط نیروهای خارجی دانست.

$p(x,t)$ نیرو در واحد طول است. شدت نیرو است.
تنش دو نوع است ← تنش فشاری (فشار)، تنش کششی.

$$\delta W_E = \int_0^L \overbrace{p(x,t)\,dx}^{\text{نیرو}}\ \overbrace{\delta v(x,t)}^{\text{تغییر مکان}} \quad (3)$$
کار مجازی نیروی خارجی

کار ناشی از برش در مقابل خمش در تیرهای طویل بسیار کم است. بنابراین قابل اغماض است.

(4) به علت خمش ← $\delta W_{I_1} = \int m(x)\ \delta d\theta$ کار مجازی نیروهای داخلی
چون حالت مجازی $d\theta$ را بحث می‌کنیم پس $\delta d\theta$ داریم. (کار مجازی به علت $\delta v(x,t)$ بوده است)

(5) به علت نیروی اینرسی ← $\delta W_{I_2} = \int f_I(x,t)\,dx\ \ \delta v(x,t)$ کار مجازی نیروهای داخلی
$f_I(x,t) =$ شدت نیروی اینرسی (در نقطه x و لحظه t)

$$\theta = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \rightarrow d\theta = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,dx \quad (6)$$

$$\delta d\theta = \frac{\partial^2 \delta v(x,t)}{\partial x^2} dx \qquad (7)$$

$$\frac{m(x)}{EI(x)} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \Rightarrow m(x) = EI(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \qquad (8)$$

$$1) \begin{cases} \delta v(x,t) = \psi(x) . \delta Y(t) & (1) \\ v(x,t) = \psi(x) . Y(t) & (2) \end{cases}$$

$$\delta W_{I_1} = \int EI(x) \frac{d^2\psi}{dx^2} Y(t) \left[\frac{d^2\psi}{dx^2} \delta Y(t)\right] dx$$

$$\Rightarrow \delta W_{I_1} = Y(t) . \delta Y(t) \int_0^L EI(x) \left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx \qquad (9)$$

2) $f_I(x,t) =$ شدت نیروی اینرسی $f_I(x,t).dx$ ← نیروی اینرسی

$$f_I(x,t) = \mu(x) \ddot{v}(x,t) = \mu(x) \psi(x) \ddot{Y}(t) \qquad (12)$$

$$\delta W_{I_2} = \ddot{Y}(t) \int \mu(x) . \psi(x) \left[\psi(x) . \delta Y(t)\right] dx$$

$$\delta W_{I_1} = \ddot{Y}(t) \, \delta Y(t) \int_0^L \mu(x) \left[\psi(x)\right]^2 dx \qquad (10)$$

3) $$\delta W_E = \delta Y(t) \int_0^L p(x,t) \, \psi(x) \, dx \qquad (11)$$

با استفاده از اصل کار مجازی خواهیم داشت:

$$\delta W_{I_1} + \delta W_{I_2} = \delta W_E \qquad (13)$$

$$\ddot{Y}(t).\delta Y(t)\int_0^l \mu(x)\,(\psi(x))^2 dx + Y(t).\delta Y(t)\int_0^l EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx = \delta Y(t)\int_0^l p(x,t)\,\psi(x)\,dx \qquad (14)$$

از آنجا که $\delta v(x,t)$ مقداری اختیاری و غیر صفر می‌باشد بنابراین می‌توان در رابطه 14 $\delta Y(t)$ را از دو طرف معادله حذف کرد. در نتیجه خواهیم داشت:

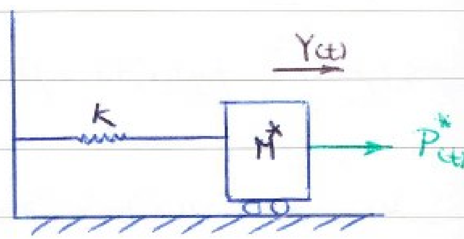
$$\ddot{Y}\int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2 dx + Y\int_0^l EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx = \int_0^l p(x,t)\,\psi(x)\,dx$$

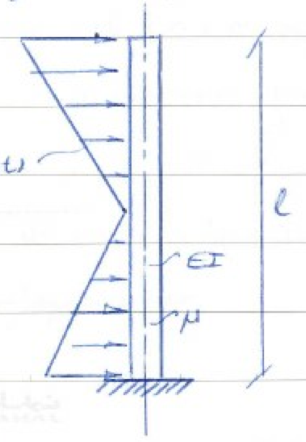
$$M^*\ddot{Y} + K^*Y = P^*_{(t)} \qquad (15)$$

جرم معادل $M^* = \int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2 dx$

سختی معادل $K^* = \int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx$

نیروی معادل $P^*_{(t)} = \int_0^L p(x,t)\,\psi(x)\,dx$

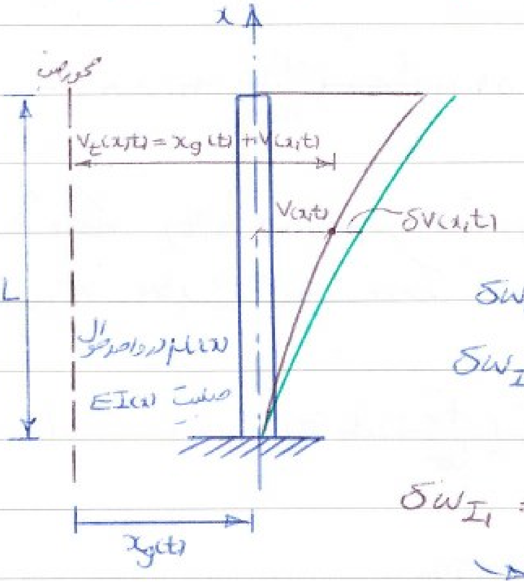




تمرین ۱: ستون طره‌ای زیر دارای شکل مقابل مفروض است. در صورتیکه EI و μ در طول ستون ثابت فرض شود، مطلوبست تعیین معادله حرکت، جرم و سختی و نیروی معادل. تابع شکلی $\psi(x)$ را بصورت $1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$

معادله حرکت اجسام الاستیک با جرم گسترده تحت اثر حرکت زمین ؛

(با استفاده از روش کار مجازی)



$$\begin{cases} V(x,t) = \psi(x) . Y(t) & (16) \\ \delta V(x,t) = \psi(x) . \delta Y(t) & (17) \end{cases}$$

$$\delta W_E = \delta W_I \quad (18)$$

چون نیروی خارجی نداریم ؛ $\delta W_E = 0$ (19)

کار مجازی نیروهای داخلی $\delta W_I = \delta W_{I_1} + \delta W_{I_2}$ (20)

$$\delta W_{I_1} = Y . \delta Y \int_0^L EI(x) \left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx \quad (21)$$

کار مجازی نیروهای داخلی (خمشی) $\leftarrow$

$$\delta W_{I_2} = \int_0^L f_I(x,t)\, \delta V(x,t)\, dx \quad (22)$$

کار مجازی نیروهای اینرسی ؛

شدت نیروی اینرسی $f_I(x,t) = \mu(x) . \ddot{V}_t(x,t)$ (23)

شتاب مطلق نقطه $\leftarrow$

$$V_t(x,t) = V(x,t) + x_g(t) \quad (24)$$

$$\delta W_{I_2} = \int_0^L \mu(x) \left[\ddot{V}(x,t) + \ddot{x}_g(t)\right] \psi(x)\, \delta Y . dx \quad (25)$$

$$= \int_0^L \mu(x)\, \ddot{Y}(t) [\psi(x)]^2 \delta Y . dx + \int_0^L \mu(x)\, \ddot{x}_g(t)\, \psi(x)\, \delta Y . dx \quad (26)$$

$$= \ddot{Y}(t) . \delta Y \int_0^L \mu(x) [\psi(x)]^2 dx + \ddot{x}_g\, \delta Y(t) \int_0^L \mu(x)\, \psi(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \delta W_{I_2} = \ddot{Y}(t) . \delta Y \int_0^L \mu(x) [\psi(x)]^2 dx + \ddot{x}_g\, \delta Y(t) \int_0^L \mu(x)\, \psi(x)\, dx$$

(27)

$$\delta W_{I_1} + \delta W_{I_2} = \delta W_E \qquad (28)$$

$$\ddot{Y}.\delta Y \int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx + Y.\delta Y \int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx = -\delta Y.\ddot{x}_g \int_0^L \mu(x)\,\psi\,dx \qquad (29)$$

در رابطه 29 چون مقدار تابع $\delta Y(t)$ اختیاری و مخالف صفر می‌باشد بنابراین خواهیم داشت.

سختی

$$\underbrace{\ddot{Y}\int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx}_{M^*} + \underbrace{Y\int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx}_{K^*} = -\ddot{x}_g(t)\underbrace{\int_0^L \mu(x)\,\psi(x)\,dx}_{\bar{K}} \qquad (30)$$

$$M^*\ddot{Y}(t) + K^*Y(t) = P^*_{eff}(t) \qquad (31)$$

$M^* = \int_0^L \mu(x)\,[\psi(x)]^2\,dx$ جرم معادل (32)

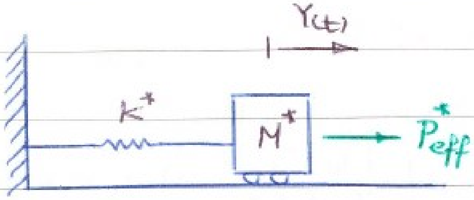
$K^* = \int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx$ سختی معادل (33)

$\bar{K} = \int_0^L \mu(x).\psi(x).\,dx$ ضریب تحریک زلزله (34)

$P^*_{eff} = -\bar{K}\,\ddot{x}_g(t)$ (35)

هرچه $\bar{K}$ بیشتر باشد نیروی وارده بیشتر است.

اگر خاک نرم و شل داشته باشیم اثرش بیشتر از خاک سفت است. (اثر زلزله)



اثر استهلاک در معادله حرکت :

اگر در سیستم استهلاک موجود باشد رابطه معادله حرکت (31) در حالت کلی بصورت رابطه زیر در خواهد آمد.

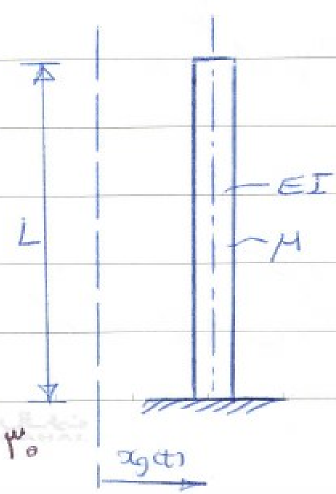
$$M^{*}\ddot{Y}(t) + C^{*}\dot{Y}(t) + K^{*}Y(t) = P^{*}_{eff}(t) \qquad (36)$$

که ξ نسبت استهلاک بحرانی از رابطه زیر بدست خواهد آمد.

$$\xi = \frac{C^{*}}{2M^{*}\omega} \qquad (37)$$

فرکانس طبیعی $\omega = \sqrt{\frac{K^{*}}{M^{*}}} \qquad (38)$

$$\Longrightarrow \ddot{Y}(t) + 2\xi\omega\dot{Y}(t) + \omega^{2}Y(t) = \frac{1}{M^{*}}P^{*}_{eff}(t) \qquad (39)$$



مثال : برجی به شکل مقابل مفروض است. در صورتیکه μ جرم در واحد طول و هم چنین EI صلبیت خمشی در طول آن ثابت و یکنواخت باشد و تابع شکلی بصورت زیر باشد $\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$ مطلوبست معادله حرکت سیستم نشان داده شده در اثر حرکت زمین.

حال پس تعیین جرم معادل، سختی معادل و نیروی معادل.

$$V(x,t) = \psi(x)\, Y(t) \qquad \psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$$

$$M^* \ddot{Y}(t) + k^* Y(t) = P^*_{eff}(t)$$

$$M^* = \int_0^L \mu(x) [\psi(x)]^2 dx = \mu \int_0^L \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.228\, \mu L$$

$$k^* = \int_0^L EI(x) \left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx = EI \int_0^L \left[\frac{\pi^2}{4L^2} \cos\frac{\pi x}{2L}\right]^2 dx$$

$$= \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3}$$

$$\bar{L} = \int_0^L \mu(x)\, \psi(x)\, dx$$ ضریب تحریک زلزله

$$\bar{L} = \mu \int_0^L \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) dx = 0.364\, \mu L$$

$$P^*_{eff} = -\bar{L}\, \ddot{x}_g = -0.364\, \mu L\, \ddot{x}_g(t)$$

پس از جایگزین کردن مقادیر جرم معادل، سختی معادل و نیروی موثر معادل در رابطه ۶ اصلی خواهیم داشت:

$$0.228\, \mu L\, \ddot{Y}(t) + \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3} Y(t) = -0.364\, \mu L\, \ddot{x}_g(t)$$

تابع شکلی دیگر

$$\psi(x) = \frac{x^2}{L^2}$$

$$k^* = EI \int_0^L \left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{4EI}{L^3}$$

$$M^* = \mu \int_0^L \frac{x^4}{L^4} dx = \frac{\mu L}{5} = 0.2\, \mu L$$

$$\bar{L} = \mu \int_0^L \frac{x^2}{L^2} dx = \frac{\mu L}{3}$$

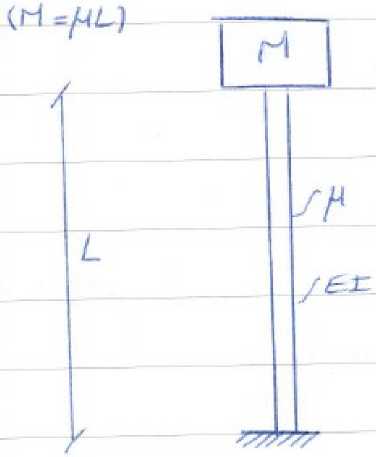
$$0.2\, \mu L\, \ddot{Y}(t) + \frac{4EI}{L^3} Y = -\frac{\mu L}{3} \ddot{x}_g(t)$$

اگر ما توابع شکلی مختلف داشته باشیم چه معیاری برای انتخاب بهترین $\psi(x)$ وجود دارد؟

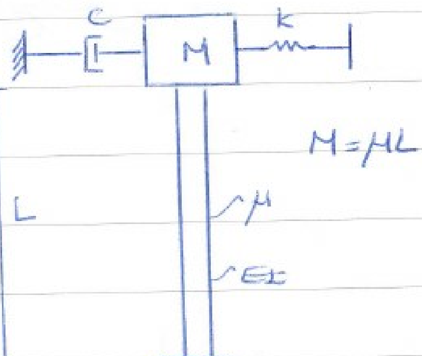
$$\omega_1^2 = \frac{K_1^*}{M_1^*} = \frac{3.044}{0.228}\frac{EI}{\mu L^4} = 13.35\frac{EI}{\mu L^4} \rightarrow \omega_1 = 3.65\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{K_2^*}{M_2^*} = \frac{4EI}{0.2\mu L^4} = 20\frac{EI}{\mu L^4} \rightarrow \omega_2 = 4.47\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$$

* اگر تابع، تابعی دقیق نباشد فرکانس بیشتر می‌گردد. پس اگر تابع دقیق داشته باشیم کمترین فرکانس را با توجه به تابع خواهیم داشت.

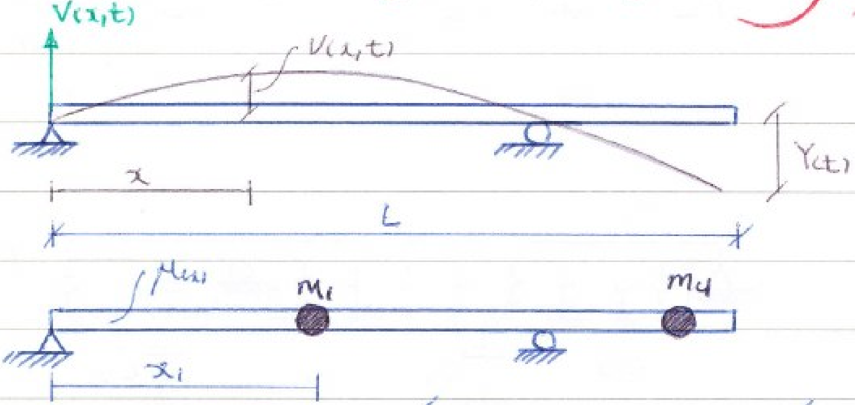


تمرین ۱۱: سازه برجی به صورت شکل مقابل مدل شده است. درصورتیکه EI و μ در طول برج ثابت در نظر گرفته شود، مطلوبست تعیین معادله حرکت، جرم معادل و سختی معادل و همچنین ضریب تحریک بار و نیروی مؤثر معادل. اگر این برج تحت اثر حرکت زمین ناشی از $\ddot{x}_g(t)$ قرار گرفته باشد.



تمرین ۱۲: سازه برجی به شکل مقابل مدل شده است. مطلوبست تعیین معادله حرکت، سختی، جرم و نیروی مؤثر معادل و ضریب استهلاک معادل درصورتیکه سازه تحت اثر حرکت زمین قرار گرفته باشد.

تعمیم پارامترهای معادله حرکت در حالت کلی



(الف)

(ب)

معادله حرکت هر سیستم یک درجه آزادی را هر اندازه که تعمیم یافته و پیچیده باشد همواره می توان به شکل زیر نوشت

$$M^* \ddot{Y}(t) + C^* \dot{Y}(t) + k^* Y(t) = P^*_{(t)}$$

که در این رابطه $Y(t)$ مختصات تعمیم یافته منحصری است که حرکت سیستم را تبیین می کند.

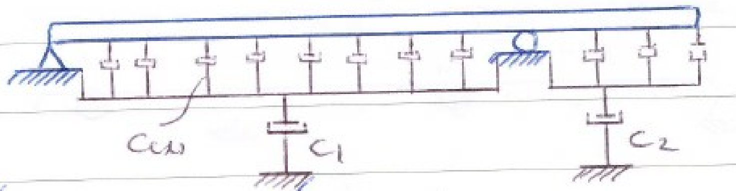
یک سیستم یک درجه آزادی را در نظر بگیرید که دارای یک شکل تغییر مکان فرضی باشد. تغییر مکان ها را در هر لحظه برحسب مختصات تعمیم یافته $Y(t)$ می توان از رابطه $V(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t)$ محاسبه کرد.

اثر ممان اینرسی جرمی حاصل از چرخش جرم را هم باید همراه با اثر بارهای متمرکز در M^* لحاظ کرد.

$$M^* = \int_0^L \mu(x) [\psi(x)]^2 dx + \sum_i m_i \psi_i^2 + \sum I_{0i} (\psi'_i)^2$$

همان اینرسی را وقتی استفاده می‌کنیم که سازه نشکن و بسیار بلند باشد (مثل برج میلاد)

(ج)

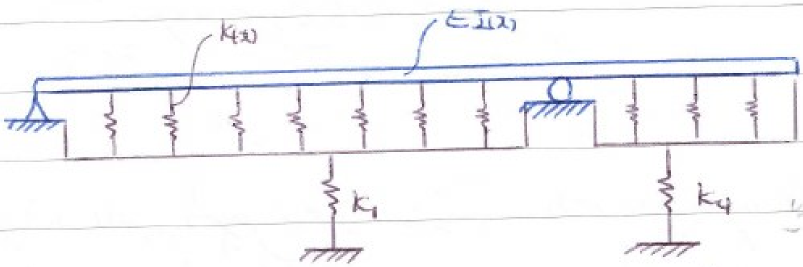


سازه (ج) تیری را نشان می‌دهد که تیر دارای استهلاک گسترده و موضعی است

استهلاک تعمیم یافته که ناشی از استهلاک های گسترده و مستهلک کننده های موضعی c_i در شکل (ج) می‌باشند

$$C^* = \int_0^L c(x)\,[\psi(x)]^2\,dx + \sum_i c_i\,\psi_i^2$$

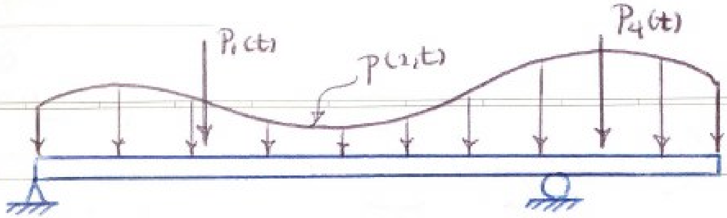
(د)



بپرس که این فنرها سری هستند یا موازی؟

به این تیر، تیر الاستیک گویند. سختی تعمیم یافته از تیر الاستیک ناشی از خمش و فنرهای موضعی برابر است با:

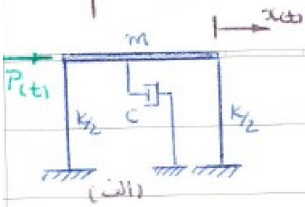
$$K^* = \int_0^L EI(x)\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx + \int_0^L k(x)\,[\psi(x)]^2\,dx + \sum k_i\,\psi_i^2 + \sum k_\theta\,(\psi_i')^2$$



$$P^* = \int_0^L P(x,t)\, \psi(x)\, dx + \sum_i P_i \psi_i$$

$$\bar{K} = \int_0^L \mu(x) \cdot \psi(x)\, dx + \sum m_i \psi_i$$

حمید کاظم

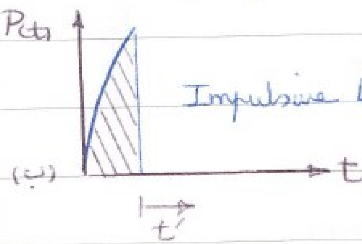


«فصل دوم»

۱) پاسخ سیستم تک‌درجه آزادی تحت اثر نیروهای دینامیکی:

الف) پاسخ سیستم تک‌درجه آزادی تحت اثر بارگذاری ضربه‌ای:

مشخصه بارگذاری ضربه‌ای آن است که در زمان کوتاهی نیروی زیادی به سازه اعمال گردد. (کمتر از ۵/۱ پریود سازه)



مقدار ضربه = مساحت زیر منحنی بارگذاری ضربه‌ای.

$$\text{مقدار ضربه} = \int p_{(t)}\, dt$$

(ایمپالس ضربه ← نیرو × زمان)

در این حالت به سیستم سرعت اولیه‌ای وارد می‌کنیم.

$$P_{(t)} = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow P_{(t)}\, dt = m\,dv \rightarrow \int P_{(t)}\, dt = \int m\,dv$$

$$\rightarrow \int P_{(t)}\, dt = mv = m\dot{X}_0 \Rightarrow \dot{X}_0 = \frac{1}{m}\int P_{(t)}\, dt$$

** در اثر ضربه سرعت به سیستم القا می‌گردد. سپس سیستم به سیستم با ارتعاش آزاد تبدیل می‌گردد.

فرض ← $\xi = 0$ (بدون استهلاک)

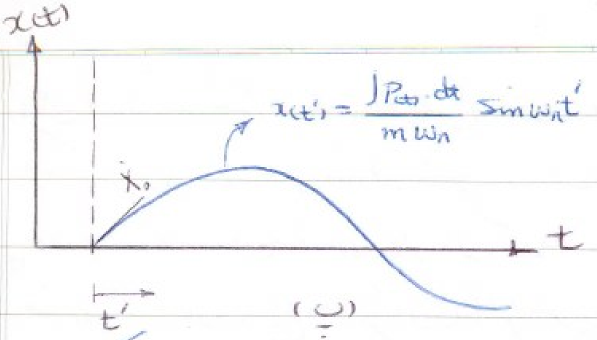
$X_0 = 0$ است.

$$x_{(t)} = X_0 \cos\omega_n t + \frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t \quad \text{(حرکت نوسانی با ارتعاش آزاد)}$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = \frac{\int P_{(t)}\, dt}{m\omega_n}\sin\omega_n t'$$

* t' در معادله $x_{(t)}$ از زمانی است که اثر ضربه تمام شده است.

* اگر زمان اعمال نیرو در حد $t_d < \frac{1}{5}T$ باشد اثر نیرو را ضربه‌ای در نظر می‌گیریم.



و الش توزیع بار با فاصله زمانی خیلی کم از طریق روش ارتعاش آزاد بدست می آید. در صورتیکه نیروی $P(t)$ در فاصله زمانی بسیار کم یعنی $(t_1 \ll T)$ که T پریود سازه است به سیستم اعمال گردد، می توان فرض کرد که هیچگونه تغییر اساسی در تغییرات سازه در فاصله زمانی کم بوجود نمی آید $(X_0=0)$ ولی در عوض تغییری در سرعت سیستم بوجود می آید که با استفاده از رابطه اندازه حرکت می توان آن را بدست آورد.

در صورتیکه در این حالت استهلاک موجود باشد پاسخ سازه در اثر شرایط اولیه $X_0=0$ و $\dot{X}_0 = \frac{1}{m}\int P\,dt$ بصورت زیر در خواهد آمد.

$$x(t) = \frac{\int P(t)\,dt}{m\,\omega_d}\, e^{-\xi \omega_n t'} \cdot \sin \omega_d t' \qquad \text{(ارتعاش آزاد با استهلاک)}$$

تمرین ۱۳: برج میراتی شکل بصورت سازه مقابل مدل شده است. در صورتیکه:

$W = Mg = 100\ \text{kips}, \quad L = 100\ \text{ft}$

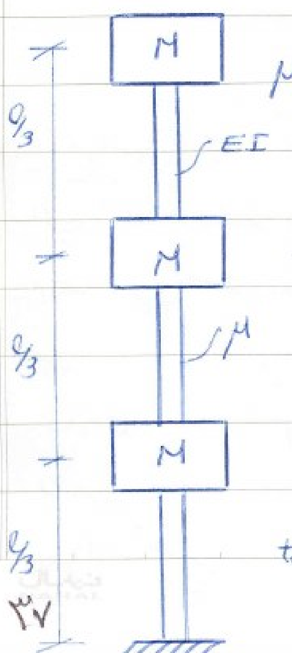
$EI = 3\times10^{8}\ \text{lb.in}^2$

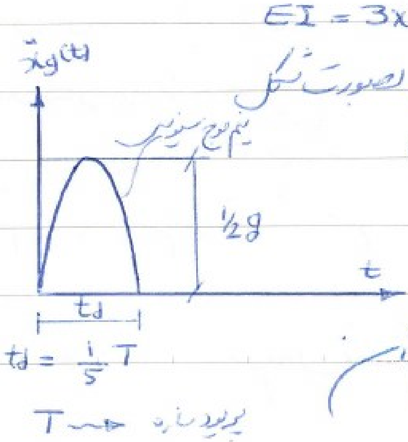
اگر سازه تحت اثر حرکت زمین بصورت شکل زیر قرار گیرد، مطلوبست تعیین:

۱) Max تغییر مکان

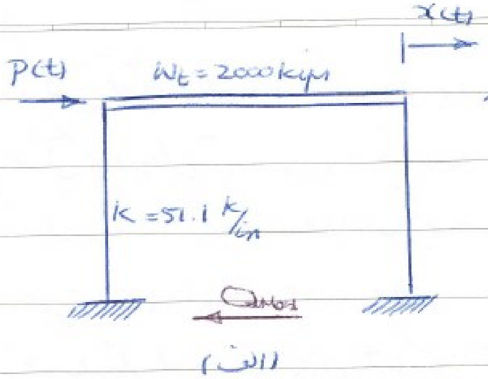
۲) Max برش پایه

۳) معادله تابع تغییر مکان و رسم آن





مثال: قاب یک طبقه شکل زیر مفروض است. در صورتیکه نیروی $p(t)$ مطابق منحنی نشان داده شده در شکل بر قاب اعمال گردد مطلوبست تعیین تابع تغییرمکان جرم حین تعیین Max نیروی برش پایه.

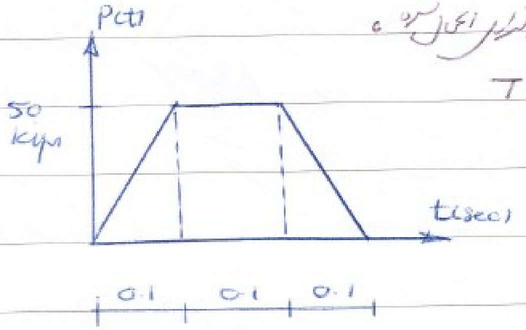


حل: تعیین زمان تناوب به منظور تعیین نوع بارگذاری اعمال شده.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{2000}{51.1 \times 386}} = 2.\ \text{sec}$$

$$2.0\ \text{sec} \gg t_d = 0.3$$

بارگذاری را می‌توان ضربه‌ای در نظر گرفت.



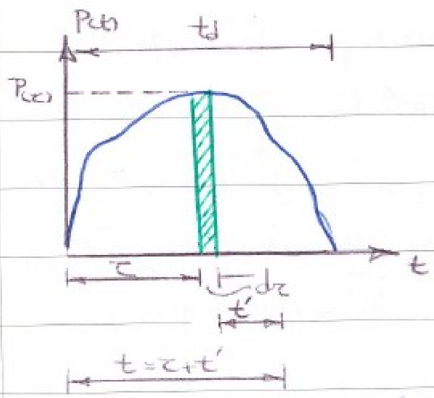
$$\int p\,dt = \int_0^{t_1} p\,dt = \frac{0.3+0.1}{2} \times 50 = 10\ k.\text{sec}$$

$$x_{(t)} = \frac{\int p\,dt}{m\omega_n} \sin\omega_n t = \frac{10(386)(2)}{2000 \times 2\pi} \sin\omega_n t = 0.614 \sin\omega_n t$$

$$X_{max} = 0.614\ in$$

$$Q_{max} = K X_{max} = 51.1(0.614) = 31.4\ kips$$

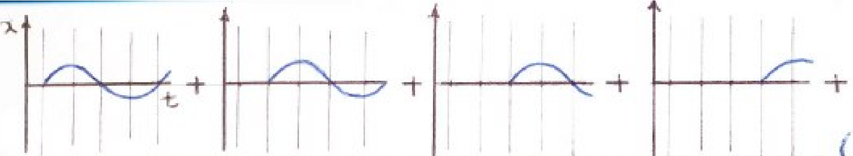
ب) پاسخ سازه تحت اثر بارگذاری اختیاری:



این بارگذاری ضربه‌ای نمی‌باشد اما آن را می‌توان به قسمت‌های ضربه‌ای زیادی تقسیم نمود.

می‌خواهیم ببینیم سهم تغییرمکان از ضربه نشان داده شده چه می‌باشد.

$dx_{(t)}$: تغییرمکان حاصل از ضربه (سهم المان از تغییرمکان کلی)



انتگرال دوهامل

(با فرض $\xi = 0$)

سهم تغییر مکان کلی سازه به علت ضربه $(P(\tau)d\tau)$ آن را

$$dx_{(t)} = \frac{P(\tau)\,d\tau}{m\omega_n}\sin\omega_n t' \quad (1)$$

چون از لحظه τ به بعد ضربه اتفاق می‌افتد پس $\sin\omega_n t'$ داریم

$$t = \tau + t' \;(2) \Longrightarrow t' = t - \tau \quad (3)$$

$$\Longrightarrow dx(t) = \frac{P(\tau)\,d\tau}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau) \quad (4)$$

$$\Longrightarrow x_{(t)} = \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau \quad (5)$$ انتگرال دوهامل

(Duhamel Integral)

t در اینجا مقداری ثابت است. می‌توان برحسب t هم بدست آورد.

* این انتگرال از $0 \le t \le t_d$ برقرار است. از $t = t_d$ به بعد یک حرکت با ارتعاش آزاد داریم که

$\longrightarrow X_0 = X(t_d)$, $\dot{X}_0 = \dot{X}(t_d)$

با توجه به شکل بار ضربه‌ای و واکنش سیستم در مقابل آن، این امکان بوجود می‌آید که با استفاده از این شکل بتوان در مورد واکنش سازه در مقابل بارهای اختیاری بحث کرد. اگر فرض شود که بارگذاری اختیاری به زمان‌های کوچکی تقسیم گردد، هر یک از این تقسیمات را می‌توان به عنوان یک ضربه در نظر گرفت. اگر به یکی از این تقسیمات که در شکل نشان داده شده است توجه گردد، می‌توان دریافت که در زمان τ پس از شروع بارگذاری ذیل شکل با فاصله زمانی dτ مقدار ضربه برابر با $P(\tau)d\tau$ می‌شود. که واکنش سازه در مقابل این ضربه قابل محاسبه می‌باشد.

واکنش سازه به علت بارگذاری کامل با استفاده از اصل جمع آثار برابر است با

واکنش مجموعه ضربه‌های دیفرانسیل دریافت شده از تعریف انتگرال تغییر مکان سازه در لحظه t از رابطه 5 قابل محاسبه می‌باشد.

* این انتگرال به نام دوهامل معروف است و واکنش هر سازه الاستیک را تحت هر بارگذاری اختیاری نشان می‌دهد.

* چون که در بدست آوردن این انتگرال با استفاده از اصل انطباق صورت گرفته بنابراین کاربرد این انتگرال برای سیستم‌های خطی صدق است.

کاربرد انتگرال دوهامل برای سیستم یک درجه آزادی (با استهلاک):

پاسخ سازه به علت بارگذاری ضربه‌ای

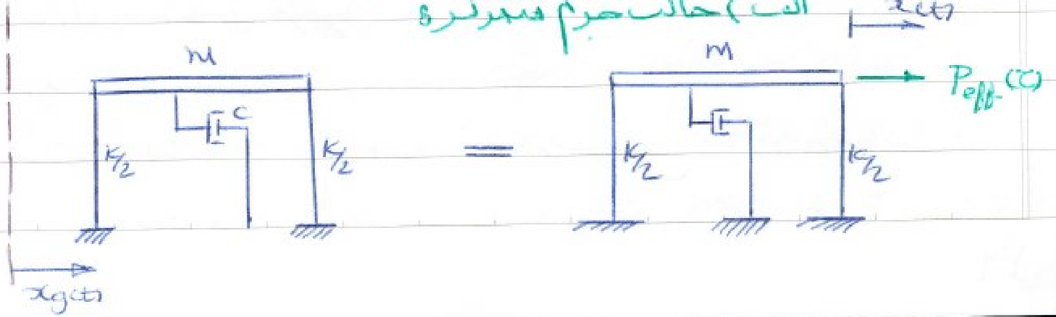
$$x(t) = \frac{\int P(t)\,dt}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_n t} \sin\omega_D t \quad (6)$$

واکنش سیستم یک درجه آزادی شامل استهلاک کننده را می‌توان به طور مستقیم مطابق آنچه قبلاً توضیح داده شد از روابط قبل با همین روش بدست آورد. در این صورت انتگرال دوهامل در حالت کلی برابر است با:

$$x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_n (t-\tau)} \sin\omega_D (t-\tau)\, d\tau \quad (7)$$

۲) پاسخ سازه یک درجه آزادی تحت اثر حرکت زمین:

الف) حالت جرم متمرکز



به این علت که زمان اثر نیروی زلزله بر سازه زیاد است آن را بصورت بارگذاری اختیاری در نظر می گیریم .

$$x(t) = \int_0^t \frac{P_{eff}(\tau)}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\, d\tau \qquad (8)$$

$$P_{eff}(t) = m\ddot{x}_g(\tau) \qquad (9)$$

پس از جایگزینی رابطه (۹) در (۸) خواهیم داشت

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\omega_D}\displaystyle\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\, d\tau & (10) \\ V(t) = \displaystyle\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\, d\tau & (11) \end{cases}$$

$V(t)$ تابع شبه سرعت است .

$$x(t) = \frac{1}{\omega} V(t)$$

شتاب زلزله، میرایی سیستم و فرکانس سازه ۳ عامل مهم در شبه سرعت است .

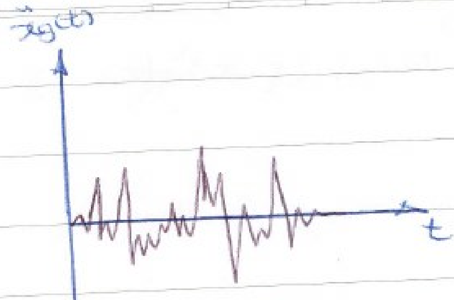
۱) شتاب زلزله : اثر شتاب زمین که رکورد مشخص و معلوم باشد .
۲) میرایی : میرایی را هم ۵٪ فرض می گیریم
۳) فرکانس : به سختی و جرم بستگی دارد .

در این حالت برای هر فرکانس سازه یک $V(t)$ خاص داریم . پس مثلاً برای زلزله تم تمام فرکانس ها را بررسی می کنیم .

ب) حالت جرم گسترده

$$V(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t)$$

$$M^* \ddot{Y}(t) + C^* \dot{Y}(t) + K^* Y(t) = P^*_{eff}(t)$$



از مزایای اصلی روش دوهامل بوجود آمدن انتگرال بوده است که توانستند این را اعمال کنند.

$$\ddot{Y}(t) = \int_0^t \frac{P^*_{eff}(\tau)}{M^* \omega} \cdot e^{-\xi \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_D (t-\tau)\, d\tau$$

(در حالت جرم الاستیک با جرم گسترده تحت اثر حرکت زمین)

$$P^*_{eff} = \bar{K}\, \ddot{x}_g(t)$$

$$Y(t) = \frac{\bar{K}}{M^* \omega} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi \omega (t-\tau)} \sin \omega (t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow Y(t) = \frac{\bar{K}}{M^* \omega} V(t)$$

$$V(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t) \Rightarrow V(x,t) = \psi(x) \cdot \frac{\bar{K}}{M^* \omega} V(t)$$

$$\bar{K} = \int_0^L \psi(x)\, \mu(x)\, dx \qquad M^* = \int_0^L \mu(x) [\psi(x)]^2\, dx$$

نیروی وارده بر سازه در زمان حرکت زمین:

الف) جرم متمرکز

این خواسته یکی از سؤالات اصلی طراحان می باشد. این نیرو را می توان در حالت کاملاً قابل اطمینان از محاسبه شتاب موثر بدست آورد

$$m \ddot{x}_t + c\dot{x} + kx = 0 \rightarrow \ddot{x}_t + 2\xi \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

در حالت تغییر مکان Max (سرعت صفر) و یا حالتی که مقدار نسبت استهلاک بحرانی کم باشد جمله دوم را می توان صرفنظر نمود. ($x_t = x_g(t) + x$)

فرضیات: ۱) تغییر شکل مکانیزم (سرعت صفر)، یا ۲) c بسیار کم

$$\Rightarrow \ddot{x}_t + \omega_n^2 x \simeq 0$$

$$\ddot{x}_t = \ddot{x}_e \rightarrow$$ شتاب موثر سازه

$$\Rightarrow \ddot{x}_e + \omega_n^2 x(t) = 0 \Rightarrow \ddot{x}_e = -\omega_n^2 x(t)$$

بنابراین نیروی موثر وارد بر سازه برابر است با:

$$Q(t) = m\ddot{x}_e = m\omega^2 x(t)$$

علامت منفی را از این علت می‌توان حذف کرد که در مطلق Max نیروی زلزله مورد نظر می‌باشد.

$$x(t) = \frac{1}{\omega} V(t)$$

با استفاده از رابطه $V(t)$ داریم:

$$\boxed{Q(t) = m\omega V(t)} \rightarrow$$ نیروی برش پایه

این نیرو را در کلیه زمانی به ما می‌دهد.

ب) جرم گسترده:

مطابق حالت قبل در این حالت شتاب موثر بصورت زیر است.

$$m^* \ddot{Y}(t) + C^* \dot{Y}(t) + k^* Y(t) = P^*_{eff}(t)$$

$$\ddot{Y}_t + \omega_n^2 Y \simeq 0$$

$$\ddot{Y}_t = \ddot{Y}_e$$

$$\ddot{Y}_e(t) = \omega_n^2 Y(t)$$ شتاب موثر

نیروی موثر اینرسی در واحد طول $q(x,t)$ بصورت زیر است:

$$q(x,t) = \mu(x) \cdot \psi(x) \cdot \ddot{Y}_e(t)$$

$$(\ddot{v}(x,t) = \psi(x) \times \ddot{Y}_e(t))$$

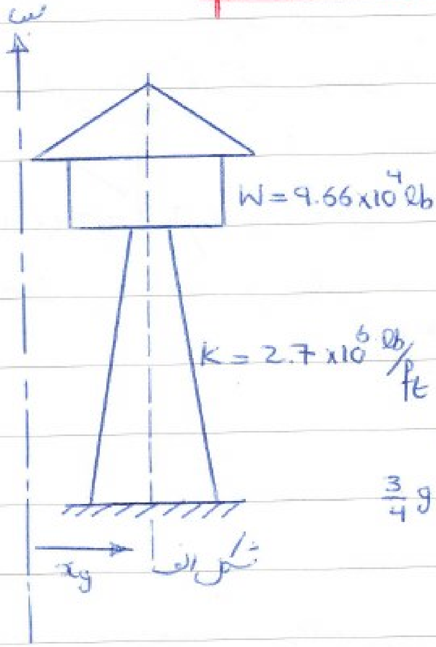
$$q(x,t) = \psi(x) \cdot \mu(x) \cdot (\omega^2 Y(t)) \quad , \quad Y(t) = \frac{\bar{k}}{M^* \omega} V(t)$$

$$q(x,t) = \mu(x)\cdot\psi(x)\cdot\frac{\bar{K}}{M^*}\,\omega V(t)$$

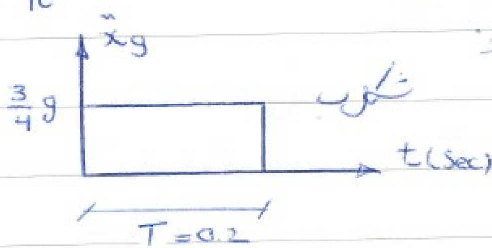
برای است با استفاده از این رابطه می توان هر نیروی داخلی و تنش مربوطه را بدست آورد. یکی از نیروهای مهم در زمان زلزله نیروی برش در پایه‌های باشد که در حقیقت کل نیروی وارده از سوی زلزله به سازه می باشد. در این حالت نیروی برش پایه برابر است با:

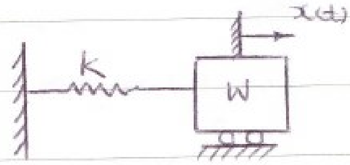
$$Q(t) = \int_0^L q(x,t)\,dx = \frac{\bar{K}}{M^*}\,\omega V(t)\int_0^L \mu(x)\cdot\psi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{Q(t) = \frac{\bar{K}^2}{M^*}\,\omega V(t)}$$



مثال: منبع آبی مطابق شکل مفروض است. در صورتیکه این منبع تحت اثر زلزله‌ای با دیاگرام شتاب شکل ب قرار گیرد، مطلوبست تعیین Max تغییرمکان و هم چنین حداکثر برش پایه. استهلاک را صرفنظر کنید.





$$m\ddot{x} + kx = P_{eff}(t) = -m\ddot{x}_g(t)$$

حالت اول: $0 < t < T = 0.2$

برنولیست
جمع

تعیین تابع تغییر مکان با استفاده از انتگرال دوهامل : $0 \leq t \leq T$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t P_{eff}(\tau)\,\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$P_{eff}(t) = -m\ddot{x}_g = -m(\tfrac{3}{4}g) = -\tfrac{3}{4}W = P_0$$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}P_0\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau = \frac{P_0}{m\omega_n^2}\cos(t-\tau)\Big]_0^t$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{P_0}{m\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t) \qquad 0 \leq t \leq T$$

بعد از این تازه شروع به نوسان آزاد می کند.

حالت دوم : $t > T = 0.2$

در این حالت $P_{eff} = 0$ بوده. لکن به علت سرعت و تغییر مکان اولیه سیستم به سیستم ارتعاش آزاد با شرایط اولیه ذیل تبدیل می شود.

$$X_0 = x(T) \qquad \dot{X}_0 = \dot{x}(T)$$

$$x(t) = x(T)\cos\omega_n(t-T) + \frac{\dot{x}(T)}{\omega_n}\sin\omega_n(t-T) \qquad t > T$$

لازم

* تعیین ماکزیمم تغییر مکان :

باید ببینیم آیا تغییر مکان Max بین صفر تا 0.2 است یا بعد از 0.2 است.

حالت اول :

$$x(t) = \frac{P_0}{m\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{P_0}{m\omega_n^2}\left(1-\left(1-2\sin^2\frac{\omega_n t}{2}\right)\right) = \frac{2P_0}{m\omega_n^2}\sin^2\frac{\omega_n t}{2}$$

$$= \frac{2P_0}{k}\sin^2\frac{\omega_n t}{2}$$

P_0/k یعنی تغییر مکان استاتیکی

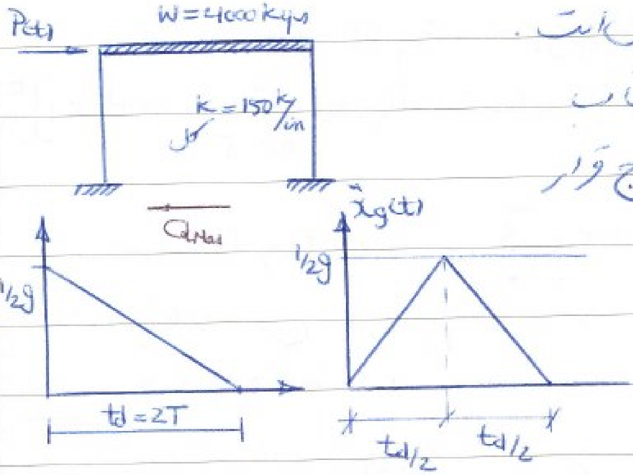
$$X_{Max} = \frac{2P_0}{k} \quad \text{با شرط} \rightarrow \sin^2\frac{\omega_n t}{2} = 1 \rightarrow \frac{\omega_n t}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{\omega_n}$$

درصورتیکه زمان دوام زیاد یعنی $T > \frac{\pi}{\omega_n}$ باشد مقدار ماکزیمم تغییرمکان برابر است با

$$X_{Max} = \frac{2P_0}{K}$$

تمرین ۱۴: قاب شکل مقابل مفروض است. درصورتیکه این قاب تحت اثر شتاب زمین بصورت دیاگرام های ب و ج قرار گیرد، مطلوبست تعیین تغییرمکان و برش پایه Max.

td دوبرابر پریود سازه می باشد



ادامه حل:

تعیین ماکزیمم تغییرمکان:

الف)

$$x(t) = \frac{P_0}{m\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t) \qquad (0 \leq t \leq T)$$

$$x(t) = 2\frac{P_0}{K}\sin^2\frac{\omega_n t}{2}$$

$$X_{Max} = \frac{2P_0}{K} \xrightarrow{\prime\prime} \sin^2\frac{\omega_n t}{2} = 1 \rightarrow \frac{\omega_n t}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{\omega_n}$$

ب) $(t > T)$

ارتعاش آزاد

$$P_0 = -\frac{3}{4}W$$

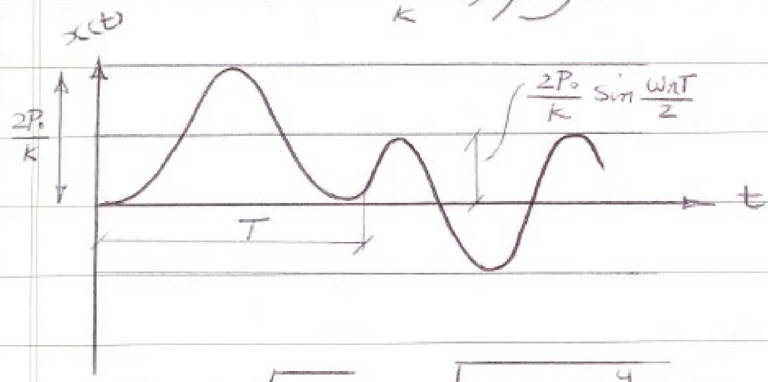
$$\text{شرایط اولیه}\begin{cases} x(T) = X_0 \\ \dot{x}(T) = \dot{X}_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = X_{Max}\cos(\omega_n(t-T))$$

$$X_{Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$X_{Max} = \frac{P_0}{K}\left[(1-(\cos\omega_n T)\times 2 + \cos^2\omega_n T) + \sin^2\omega_n T\right]^{1/2}$$

$$X_{Max} = \frac{P_0}{K}\left[2(1-\cos\omega_n T)\right]^{1/2} \Rightarrow X_{Max} = \frac{2P_0}{K}\sin\frac{\omega_n T}{2}$$

مقدار مطلق Max اگر $t > T$ شد مقداری کمتر از $\frac{2P_0}{k}$ است.



$$\frac{\pi}{\omega_n} = \pi\sqrt{\frac{W}{kg}} = \pi\sqrt{\frac{9.66\times10^4}{2.7\times10^6\times32.2}} = 0.104 < T = 0.2\ sec$$

$$\Rightarrow X_{Max} = \frac{2P_0}{k} = \frac{3}{2}\,\frac{W}{k} = \frac{3}{2}\,\frac{9.66\times10^4}{2.7\times10^6} = 0.054\ ft = 0.64\ in$$

$$Q_{Max} = kX_{Max} = 2.7\times10^6\times\frac{3\times9.66\times10^4}{2\times2.7\times10^6} = 145,800\ lb$$

* آیا Max تغییر مکان همیشه در هنگام بارگذاری است؟ در زمان زلزله چه اتفاقی می افتد؟
در حالت ضربه همیشه Max بعد از بارگذاری است. معمولاً وقتی زلزله اتفاق می افتد
چون زمان وقوع زلزله زیاد است بنابراین Max تغییر مکان در هنگام بارگذاری صورت
می گیرد (در حین وقوع زلزله)
پس Max تغییر مکان به نوع بارگذاری و زمان بارگذاری بستگی دارد.

این کنترل هایی که کردیم تحلیل تاریخچه زمانی بود که اطلاعاتش برای مهندس طراح
آنقدر سودمند نیست. پس احتیاج به تحلیل دیگری داریم که تحلیل طیفی (دینامیکی
طیفی) گویند.

حمید کاظم

«فصل سوم»

تحلیل طیفی سازه‌ها در مقابل حرکت زمین :

(Earthquake Response Spectra)

با توجه به انتگرال دوهامل واکنش در هر زمان t در سیستم یک درجه آزادی تحت اثر حرکت زمین به دست می‌آید. ولی بدست آوردن تاریخچه نیرو و تغییر مکان در هر زمان کار مشکلی خواهد بود.

در بسیاری از مسائل عملی بدست آوردن مقدار Max نیرو و تغییر مکان با اهمیت تلقی می‌شود. با استفاده از روابط قبل واضح است که زمانی نیرو و تغییر مکان Max می‌باشد که تابع V(t) (شبه سرعت) مقدار Max خود را دارا باشد.

$$V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau \qquad (1)$$

سرعت طیفی $$S_V = V_{Max} = \left[\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau\right]_{Max} \qquad (2)$$

$$(S_V = V_{Max}) \qquad (3)$$

نکته مهم ⇐ این مقدار Max بنام سرعت طیفی یا شبه سرعت طیفی معروف است و با S_V نشان داده می‌شود.

(Spectral Velocity)

همانطور که در روابط قبل مشخص گردید در سیستم‌های جرم متمرکز، تغییر مکان سازه برابر است با تابع شبه سرعت تقسیم بر فرکانس سازه. $x(t) = \frac{V(t)}{\omega}$ (4)

با استفاده از این تعریف تغییر مکان طیفی (S_d) عبارتست از:

تغییر مکان طیفی $$S_d = \frac{S_V}{\omega} \qquad (5)$$

بنابراین تغییر مکان طیفی برابر است با حاصل تقسیم سرعت طیفی بر فرکانس طبیعی سازه.

به همین ترتیب نیروی Max با استفاده از روابط پیشین بستگی به جرم و همچنین فرکانس طبیعی سیستم و سرعت طیفی دارد.

کمیت حاصلضرب فرکانس طبیعی در سرعت طیفی را شتاب طیفی می نامند و با S_a نشان می دهند.

$$Q(t) = m\omega V(t) \quad (6)$$

$$Q_{Max} = m\omega S_v \quad (7)$$

شتاب طیفی $S_a = \omega S_v \quad (8)$

$$Q_{Max} = m S_a$$

تعیین مقادیر پاسخ های طیفی:

الف) سیستم های با جرم متمرکز:

$x_{Max} = S_d$ تغییر مکان طیفی

برش پایه در زمان های مختلف $Q(t) = m\omega V(t)$

$$Q_{Max} = m\omega S_v \Rightarrow Q_{Max} = m S_a$$

ب) سیستم های با جرم گسترده:

$$V(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t) = \psi(x) \cdot \frac{\bar{K}}{M^*\omega} V(t)$$

$$V_{Max}(x,t) = \psi(x)\, Y_{Max}(t)$$

$\rightarrow V_{Max}(x,t) = \psi(x) \frac{\bar{K}}{M^*\omega} S_v = \psi(x) \frac{\bar{K}}{M^*} S_d$ تغییر مکان ماکزیمم

$$q(x,t) = \mu(x)\, \psi(x) \frac{\bar{K}}{M^*} \omega V(t)$$

$q_{Max} = \mu(x) \cdot \psi(x) \frac{\bar{K}}{M^*} S_a$ شدت نیروی اینرسی ماکزیمم

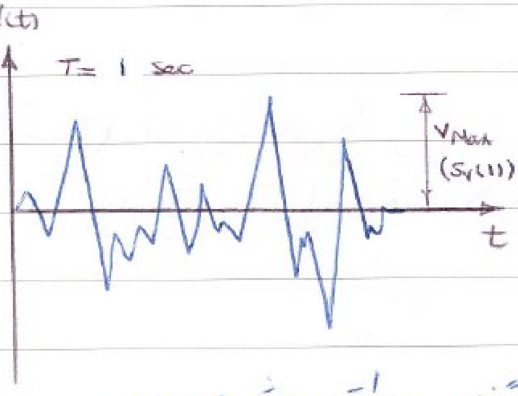
$Q(t) = \frac{\bar{K}^2}{M^*} \omega V(t)$ برش پایه در زمان های مختلف

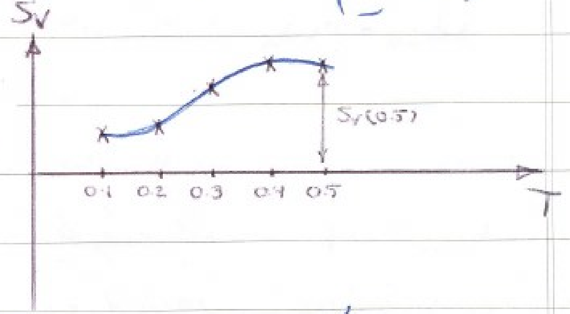
$$Q_{Max} = \frac{\bar{K}^2}{M^*} S_a$$

$$V(t)=\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau \qquad (a)$$

زلزله ورودی ← شتاب‌نگاشت زلزله

میرایی سیستم $\xi=2\%$





* 0.1 را در n ضرب کنیم و مساوی پریود سازه بگذاریم. n طبقه می‌باشد (حدودی)

($T=2s \rightarrow 0.1n=2 \rightarrow n=20$ طبقه)

با میراکننده نیرو و شتاب را کنترل می‌کنند و سرعت سازه را بصورت حرارتی تلف کنند تا اثرات شدید موضعی ایجاد شده را کم کنند و آن را برای تمام سازه‌ها قابل استفاده کنند.

طیف‌های زلزله بصورت زیر هستند.

۱) طیف تغییر مکان (S_d) ۲) طیف سرعت (S_v) ۳) طیف شتاب (S_a)

از رابطه (a) می‌توان دریافت که طیف سرعت بستگی به سه پارامتر دارد:

۱) طبیعت شتاب زمین $(\ddot{x}_g(t))$

۲) نسبت استهلاک بحرانی (ξ) — طیف سرعت به چه پارامترهایی بستگی دارد؟

۳) فرکانس طبیعی سازه

بنابراین برای هر شتاب زلزله ورودی و برای هر نسبت استهلاک بحرانی مشخص

می توان طیف سرعت را به صورت تابعی از پریود ($T = \frac{2\pi}{\omega_n}$) بدست آورد و برای نسبت ضریب استهلاک بحرانی یک سری از منحنی ها قابل رسم می باشند. به عبارتی، برای ترکیب یک پریود و نسبت استهلاک بحرانی مشخص برای شتاب ورودی خاص یک نقطه از منحنی بدست می آید که با هم پیوستن این نقاط توسط خطوط مستقیم منحنی های مورد نظر ایجاد می گردد. این منحنی ها را در این شکل مخصوص طیف های سرعت می نامند.

(نقاط Max و Min در طیف سرعت به علت تشدیدهای محلی حرکت زمین بوجود آمده است. این نوع ناهمواری ها اولاً باید توسط شتابنگاشت های ایستگاه های مختلف هموار شده و ثانیاً میانگین آن ها بدست آید و سپس به عنوان طیف زلزله مورد محاسبه در طراحی قرار گیرد.)

* برای بدست آوردن طیف شتاب زلزله کافیست به صورت ضرب این طیف را در فرکانس طبیعی متناسب کرده و شکل را رسم نماییم. و برای بدست آوردن طیف تغییر مکان حاصل تقسیم طیف سرعت را بر فرکانس طبیعی متناسب می نماییم.

$S_a = \omega S_v$ $\qquad$ $S_d = \frac{S_v}{\omega}$

طیف های پاسخ، طیف های پیوسته هستند چون طیف های زلزله ای بوده هستند. ما نیاز به طیف های طراحی برای طراحی سازه ها داریم.

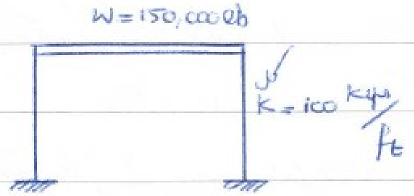
ایران به دو ایالت تقسیم می شود:

۱) مرکزی شرقی ← زاگرس

۲) شمالی ← البرز (دوره بازگشت بالا و شدت زیاد)

نوع زلزله به وضعیت تکتونیکی زمین شناسی منطقه بستگی دارد. عامل بعدی

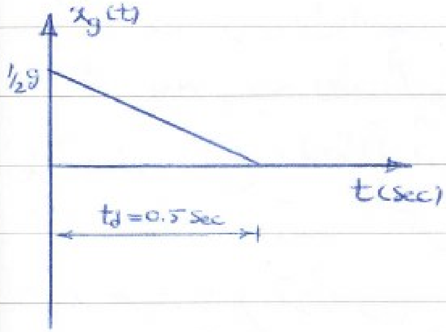
عامل زلزله تحمیلی (خاک) است.



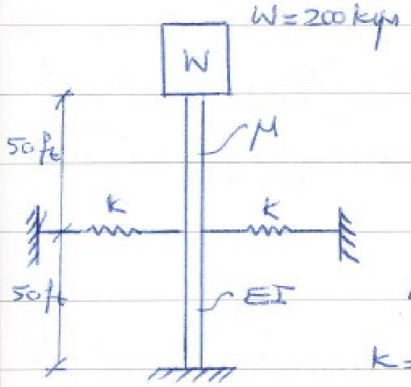
تمرین ۱۵ (8): قاب یک طبقه شکل مفروض است. در صورتیکه این قاب تحت اثر زلزله‌ای با مشخصات مقابل قرار گیرد، مطلوبست تعیین

۱) تابع تغییر مکان ۲) رسم آن

۳) تعیین مقدار Max تغییر مکان و Max برش پایه.



تمرین ۱۶: برج مخابرات شهر بصورت شکل مقابل مدل شده است. در صورتیکه این سازه تحت اثر شتاب ثابت بصورت زیر قرار گیرد مطلوبست تعیین



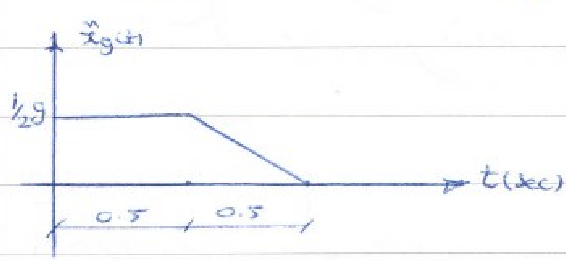
۱) تابع تغییر مکان $\bar{M}Lg = 2W$

۲) مقدار Max تغییر مکان $EI = 2.1\times10^{8}\ lb.in^{2}$

۳) شدت نیروی برشی $k = 50\ kip/ft$

۴) Max برش پایه.

اتصالات را در نظر بگیرید.



طیف‌های طرح (Design Spectra) :

منحنی‌های ثبت شده شتاب زمین در هنگام وقوع زلزله‌های مختلف و طیف‌هایی که از آن‌ها بدست می‌آید اساس یک روش منطقی را برای طرح لرزه‌ای سازه‌ها فراهم می‌کند. با وجود اینکه طیف‌های مختلف با یکدیگر اختلاف دارند ولی در هر منطقه می‌توان بعضی خصوصیات مشترک را در آن‌ها یافت.

با استفاده از خصوصیات مشترک و هموار کردن منحنی‌ها می‌توان برای هر منطقه‌ای طیف‌های طرح را بدست آورد. که با کاربرد آن می‌توان سازه‌های مقاوم در مقابل زلزله را طراحی کرد.

این منحنی‌ها اساس تحلیل لرزه‌ای سازه‌ها به روش طیفی را تشکیل می‌دهند. هاوزنر بر اساس منحنی‌های شتاب ثبت شده در چهار زلزله بزرگ در امریکا (ال سنترو 1940، تفت 1953، المپیا 1949، واشنگتن 1965) منحنی‌های ایده‌آل و هموار شده‌ای را برای طیف‌های تغییر مکان، سرعت و شتاب رسم نموده است. شکل منحنی‌های مذکور با حرکات زمین در محل‌ها و مناطق دیگر جهان ممکن است سازگاری نداشته باشد به همین جهت برای هر منطقه باید طیف طرح آن را بدست آورد.

این منحنی‌ها برای مقدار معینی از شتاب Max زمین (شتاب در $T=0$) ضرب و مقیاس می‌شوند.

(فرض کنید منطقه زلزله‌خیز ایران دارای شتاب Max زمین $0.35g$ است) در $T=0$ یعنی خود زمین.

بجای رسم ۳ طیف متفاوت با استفاده از روابط ارائه شده نموداری به نام طیف لگاریتمی سه‌جانبه بدست می‌آید.

به علت اینکه رابطه خاصی بین S_d، S_v و S_a وجود دارد، منحنی‌های مربوطه را

می‌توان برای یک نمودار لگاریتمی سه مقیاسه رسم نمود. از روابط قبل داریم.

$$\begin{cases} S_v = \omega S_d = S_d \dfrac{2\pi}{T} & \operatorname{Log} S_v = \operatorname{Log} S_d + \operatorname{Log} 2\pi - \log T \\ & \Longrightarrow \\ S_v = \dfrac{S_a}{\omega} = S_a \dfrac{T}{2\pi} & \operatorname{Log} S_v = \operatorname{Log} S_a + \operatorname{Log} T - \log 2\pi \end{cases}$$

رابطه (I) نشان می‌دهد که ازای یک مقدار ثابت S_d، تغییرات لگاریتم S_v برحسب لگاریتم T برحسب $y=-x+C_1$ می‌باشد.
رابطه (II) نشان می‌دهد ازای مقدار ثابت S_a، تغییرات $\log S_v$ برحسب $\log T$ به صورت $y=x+C_2$ می‌باشد.

شکل (A) منحنی‌های ترکیب شده طیف طرح به صورت تابعی از پریود و میرایی نشان می‌دهد.
این منحنی‌ها همان‌طور که دیده می‌شود برای Max شتاب زمین $PGA=0.2g$ (شتاب در $T=0$) میزان شده است. (Pick Ground Acceleration)

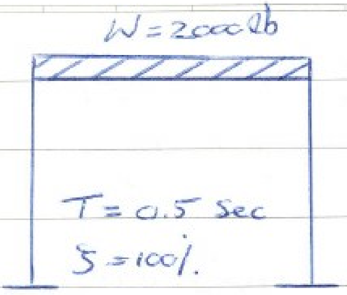
$$\operatorname{Log} S_v = \operatorname{Log} S_d + \operatorname{Log} 2\pi - \operatorname{Log} T \Longrightarrow y=-x+C_1$$
$$\operatorname{Log} S_v = \operatorname{Log} S_d - \operatorname{Log} 2\pi + \operatorname{Log} T \Longrightarrow y=x+C_2$$

Damping در نمودار به صورت درصد است.

برای شتاب $0.35g$ باید مقادیر S_v و S_d را در $\frac{0.35}{0.2}$ ضرب کنیم.

(حالت جرم متمرکز)

مثال: قاب تک دهانه مفروض است. درصورتیکه زمان تناوب قاب 0.5 sec ثانیه است و استهلاک بحرانی 10% در نظر گرفته شده باشد و این قاب در منطقه ای باشد که بتوان برای مقادیر آن از شکل (A) استفاده کرد، مطلوبست تعیین Max تغییر مکان و هم چنین Max برش پایه.



$S_v = 6 \ in/sec \qquad S_a = 0.2g \qquad S_d = 0.48 \ in$

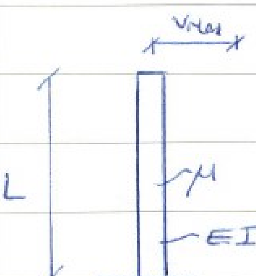
این مقادیر با استفاده از نمودار شکل A بدست آمد.

$x_{Max} = S_d = 0.48 \ in$

$Q_{Max} = m \cdot S_a = \frac{2000}{g} \times 0.2g = 400 \ lb$

(حالت جرم گسترده)

مثال: ستون طره ای در شکل زیر مفروض است. درصورتیکه جرم در واحد طول μ به صورت یکنواخت و ثابت فرض شود و هم چنین صلبیت خمشی EI ثابت باشد و از تابع شکلی $\varphi_{(x)} = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$ بتوان استفاده کرد، مطلوبست تعیین Max تغییر مکان، Max نیروی برشی ستون و هم چنین Max برش پایه در حالتیکه بتوان از شکل A برای تعیین مقادیر طیفی استفاده کرد. (ضمناً فرض کنید T=0.5s و $\xi = 10\%$ است)



$T = 0.5s, \ \xi = 10\% \longrightarrow S_v = 6 \ in/sec \qquad S_a = 0.2g \qquad S_d = 0.48 \ in$

$V_{Max(x)} = \frac{\bar{K}}{\bar{M}^*} S_d \, \varphi_{(x)}$

$$m^* = \int_0^L \mu(x)\,(\psi(x))^2\,dx = \mu \int_0^L \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.228\,\mu L$$

$$\overline{\quad} = \int_0^L \mu(x)\,.\,\psi(x)\,dx = \int_0^L \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right) dx\,.\,\mu = 0.364\,\mu L$$

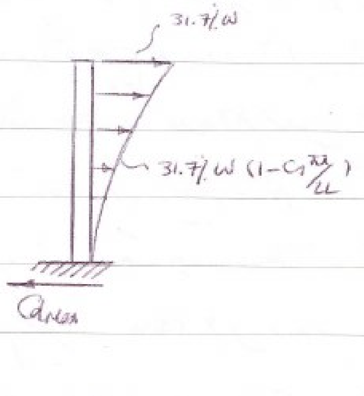
$$V_{Max}^{(x)} = \frac{0.364\,\mu L}{0.228\,\mu L}\,(0.48)\,\psi(x) \rightarrow V_{Max}^{(x)} = 0.77\,\psi(x) = 0.77\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$$\Rightarrow V_{Max} = 0.77\ in$$

$$q_{Max}(x) = \frac{\bar{k}}{m^*}\,S_a\,\mu(x)\,\psi(x) = \frac{0.364\,\mu L}{0.228\,\mu L}\,(0.2g)\,\mu\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$\mu = \dfrac{w}{g}$ $\quad w$ وزن در واحد طول $\qquad W = wL$ کل وزن سازه

$$\Rightarrow q_{Max} = \frac{0.364}{0.228}\,0.2g \times \frac{w}{g}\,\psi(x) = 31.7\%\,w\,\psi(x)$$



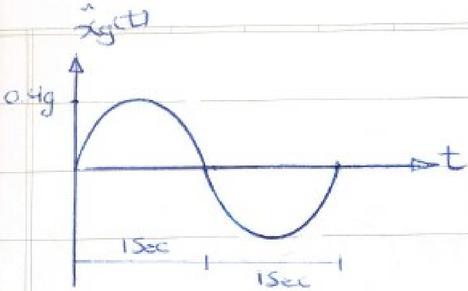
$$Q_{Max} = \frac{\bar{k}^2}{m^*}\,S_a$$

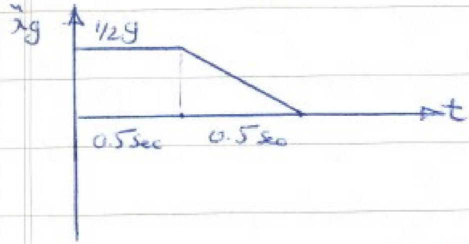
$$\Rightarrow Q_{Max} = \frac{0.364^2\,\mu L}{0.228}\,(0.2g)$$

$$Q_{Max} = \frac{0.364^2}{0.228}\,\frac{W}{g} \times 0.2g$$

$$= 11.5\%\,W$$

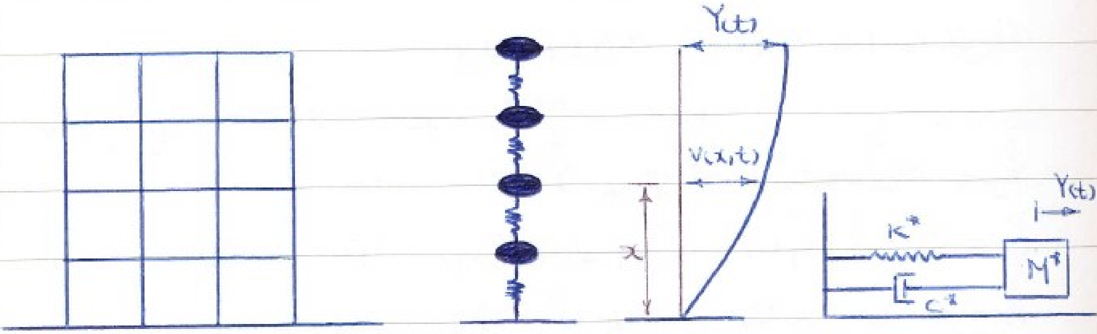
تمرین ۱۷ : در صورتیکه شتاب ثبت شده زمین در دو زلزله مختلف مطابق اشکال الف و ب باشد، مطلوبست تعیین طیف پاسخ این دو زلزله برای تغییرمکان، سرعت و شتاب





طیف های مزبور را برای ۳ سیستم میرایی $\xi_1 = 0$ ، $\xi_2 = 5\%$ و $\xi_3 = 10\%$ بدست آورید
(از رسم تا ۴s بررسی)

پاسخ سازه های چند طبقه تحت اثر حرکت زمین:



قاب واقعی

مدل جرم متمرکز

سختی جرم متمرکز اول همان سختی طبقه اول است.

$$V(x,t) = Y(t)\cdot\psi(x) \qquad (1)$$

$$\dot{V}(x,t) = \psi(x)\cdot\dot{Y}(t) \qquad (2)$$

$$\Delta V(x,t) = \Delta\psi(x)\cdot Y(t) \qquad (3)$$ ← تغییر مکان نسبی در طبقه

$$\Rightarrow \Delta V(x,t) = \Delta\psi(x_i)\,Y(t) - \Delta\psi(x_j)\,Y(t) \qquad (4)$$

$$\delta V(x,t) = \psi(x)\,\delta Y(t) \qquad (6)$$ تغییر مکان مجازی

برای بدست آوردن معادلات حرکت کافیست معادله حرکت سیستم تک درجه آزادی را

بصورت زیر نوشت.

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \qquad (5)$$

برای حالت کلی در سیستم چند طبقه این معادلات را می توان با استفاده از روش کار مجازی حل نمود. در این حالت تغییر مکان مجازی باید هم سازگار با شرایط مرزی سیستم باشد. با به کار بردن تغییر مکان مجازی، معادله (5) به معادله زیر تبدیل می شود.

$$\delta W = f_I\, \delta v(x,t) + f_D \cdot \delta \Delta v + f_S \cdot \delta \Delta v - p(t)\, \delta v(x,t) = 0 \qquad (7)$$

تغییر مکان نسبی مجازی طبقه $\delta \Delta v(x,t)$

$$\delta \Delta v(x,t) = \Delta \psi(x) \cdot \delta Y(t) \qquad (8)$$

نیروهای اینرسی، استهلاک و فنر برابر خواهند بود با:

$$f_I = m\ddot{v}(x,t) = m\, \psi(x) \cdot \ddot{Y}(t) \qquad (9)$$

$$f_d = c \cdot \Delta \dot{v}(x,t) = c \cdot \Delta \psi(x) \cdot \dot{Y}(t) \qquad (10)$$

$$f_s = k \cdot \Delta v(x,t) = k \Delta \psi(x) \cdot Y(t) \qquad (11)$$

پس از جایگذاری کردن روابط (3)، (6)، (8)، (9)، (10)، (11) در رابطه (7) و نتیجه را بصورت معادله حرکت تعمیم یافته نوشت داریم:

$$M^* \ddot{Y} + C^* \dot{Y} + K Y = P^*_{(t)}$$

در این روابط مقادیر M^*، C^*، K^* و P^* به عنوان پارامترهای تعمیم یافته می باشند که بصورت زیر تعریف می شوند.

$$M^* = \sum m_i \psi_i^2$$ جرم معادل

$$C^* = \sum c_i \Delta \psi_i^2$$ ضریب استهلاک معادل

$$K^* = \sum k_i \Delta \psi_i^2$$ سختی معادل

$\Sigma p^* = \Sigma p_i \psi_i$ نیروی معادل

این در حالت اعمال p_i بود. در حالتی که سیستم تحت اثر حرکت زمین قرار گیرد
نیروی معادل موثر p^*_{eff} به صورت زیر است

$$P_{eff} = \bar{K}\,\ddot{x}_g(t) \qquad (17)$$

$$\bar{K} = \Sigma m_i \psi_i \qquad (18)$$ ضریب تحریک

معمولاً ضریب استهلاک معادل برحسب نسبت استهلاک بحرانی بیان می گردد که
در این حالت:

$$C^* = \Sigma c_i \Delta\psi_i^2 = 2\xi m^* \omega$$

که در این رابطه ω بسامد یا فرکانس زاویه ای سیستم تعمیم یافته می باشد که مقدار
آن برابر است با:

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \qquad (20)$$

همانطور که مشاهده می شود، این فرکانس به مقادیر سختی معادل و جرم معادل
بستگی دارد که هر کدام از این ها بستگی به تابع شکل تعیین شده (ψ) خواهند داشت
بنابراین هر چه تابع شکلی به تابع واقعی نزدیک تر باشد، فرکانس بدست آمده دقیق تر خواهد
بود. به عبارت دیگر در حالتی این وضعیت بوجود خواهد آمد که مقدار فرکانس کوچکتر
شود. چرا فرکانس واقعی سازه، فرکانس کوچکتر است؟

(فرکانس کوچکتر به علت آنست که سیستم می خواهد حداقل انرژی را مصرف کند. پس
سراغ قیدهای اضافی نمی رود. مثلاً با زدن قیدهای اضافی ایجاد می کنند.)

توابع شکلی پیشنهادی برای ساختمان ها با طبقات مختلف: