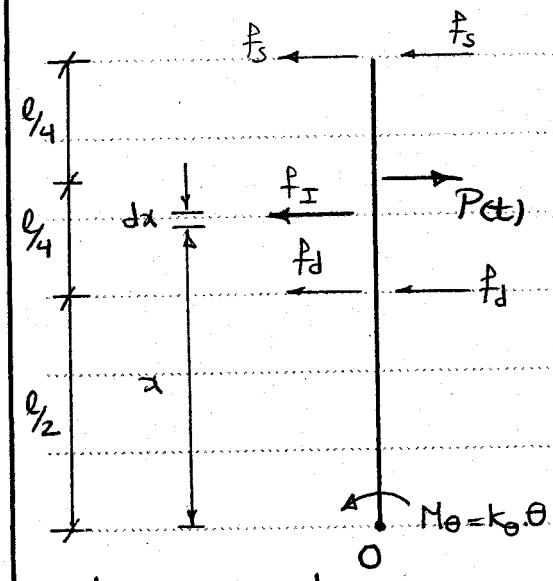


$$V(x,t) = \psi(x).Y(t)$$

$$\Rightarrow V(x,t) = x/L . Y(t)$$

رابطه زیر برقرار است.

$$\Sigma M_O = 0$$

$$M_I + M_D + M_S + M_\theta = M_{P(t)} \quad (1)$$

$$dM_I = df_I . x$$

$$df_I = dM . \ddot{V}(x,t)$$

$$dM = \mu(x)\, dx \Rightarrow df_I = \mu(x) . \ddot{V}(x,t)\, dx$$

$$\Rightarrow dM_I = \mu(x) . \ddot{V}(x,t) . x . dx$$

$$\Rightarrow M_I = \ddot{Y}(t) \int_0^L \mu(x) . \frac{x^2}{L} . dx = \ddot{Y}(t) . \mu \int_0^L \frac{x^2}{L} . dx$$

$$\Rightarrow M_I = \frac{1}{3} L^2 \mu . \ddot{Y}(t) \quad (2)$$

$$M_D = 2 f_d . L/2 = 2 C \dot{V}(L/2, t) . L/2 = C (\frac{L/2}{L}) \dot{Y}(t) . L = \frac{1}{2} LC . \dot{Y}(t) \quad (3)$$

$$M_S = 2 f_S . L = 2 k V(L,t) . L = 2LK\, Y(t) \quad (4)$$

$$M_{P(t)} = \frac{3}{4} L P(t) \quad (5)$$

$$M_\theta = k_\theta . \theta \qquad \theta = \frac{V(L,t)}{L} = \frac{L/L . Y(t)}{L} = \frac{1}{L} . Y(t)$$

$$\Rightarrow M_\theta = \frac{k_\theta}{L} . Y(t) \quad (6)$$

با جاگذاری روابط 2، 3، 4، 5، 6 در رابطه (1) خواهیم داشت.

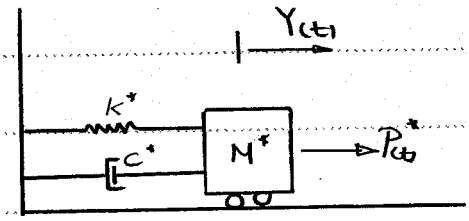
$$\frac{1}{3} L^2 \mu . \ddot{Y}(t) + \frac{1}{2} LC . \dot{Y}(t) + 2LK\, Y(t) + \frac{k_\theta}{L} . Y(t) = \frac{3}{4} L P(t)$$

طرفین را بر L تقسیم می‌کنیم.

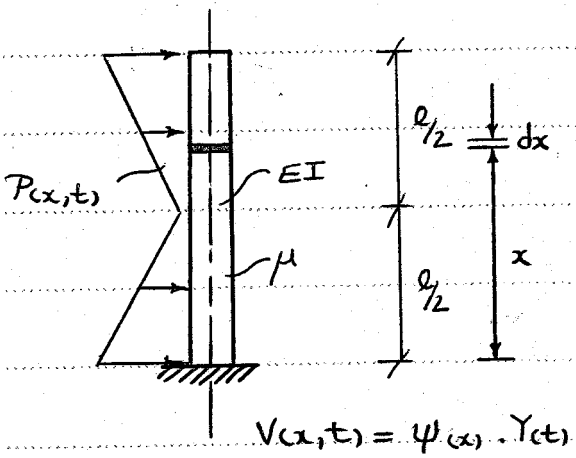
$$(\frac{1}{3} L\mu) \ddot{Y}(t) + (\frac{1}{2} C) \dot{Y}(t) + (2K + \frac{k_\theta}{L^2}) Y(t) = \frac{3}{4} P(t)$$

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

$$\begin{cases} M^* = \frac{1}{3} L\mu & \text{جرم معادل} \\ c^* = \frac{1}{2} c & \text{ضریب استهلاک معادل} \\ k^* = 2k + \frac{k_\theta}{L^2} & \text{ضریب سختی معادل} \\ p^* = \frac{3}{4} P(t) & \text{نیروی معادل} \end{cases}$$



۱۰) ستون کنسول‌دار شکل مقابل مفروض است. در صورتیکه EI و μ طول ستون ثابت فرض شوند، مطلوبست تعیین معادله حرکت، جرم، سختی و نیروی معادل. (تابع شکلی را بصورت $\psi(x) = 1 - C_1 \frac{\pi x}{2L}$ در نظر بگیرید).



$$V(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t) \qquad \delta V(x,t) = \psi(x) \cdot \delta Y(t)$$

$$\begin{cases} \delta W_E = \int_0^L p(x,t)\, dx\, \delta v(x,t) \\ \delta W_{I_1} = \int_0^L m(x)\, \delta d\theta & \text{حاصل از مان} \\ \delta W_{I_2} = \int_0^L f_I(x,t)\, dx\, \delta v(x,t) & \text{حاصل از اینرسی} \end{cases}$$

کار مجازی نیروی داخلی حاصل از خمش:

$$\theta = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \rightarrow d\theta = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} dx \rightarrow \delta d\theta = \frac{\partial^2 \delta v(x,t)}{\partial x^2} dx$$

$$\frac{M(x)}{EI} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \rightarrow M(x) = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \cdot EI$$

$$\rightarrow \delta W_{I_1} = \int_0^L M(x) \cdot \delta d\theta = \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right) \cdot EI \cdot \frac{\partial^2 \delta v(x,t)}{\partial x^2} dx$$

$$= \int_0^L Y(t) \left(\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\right) EI \cdot \delta Y(t) \left(\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\right) \cdot dx$$

سوال ۱۰ (روش دوم ← راه حل سوم)

$$M^* = \int_0^L \mu(x)\,(\psi(x))^2\,dx = \mu\int_0^L (1-C_1\tfrac{\pi x}{2L})^2\,dx = \mu\left(\tfrac{3}{2}-\tfrac{4}{\pi}\right)L = 0.2268\,\mu L$$

$$k^* = \int_0^L EI\,(\psi''(x))^2\,dx = \int_0^L EI\left((\tfrac{\pi}{2L})^2 C_1 \tfrac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4}{16L^4} EI \int_0^L (C_1\tfrac{\pi x}{2L})^2\,dx$$

$$= \frac{\pi^4 EI}{16L^4}\left(\frac{L}{2}\right) = 3.044\ \frac{EI}{L^3}$$

$$p^* = \int_0^L p(x,t)\,\psi(x)\,dx \qquad p(x,t) = \begin{cases} \frac{2P}{L}(L/2 - x) & 0 \le x \le \ell/2 \\ \frac{2P}{L}(x - L/2) & \ell/2 \le x \le \ell \end{cases}$$

$$\Rightarrow p^* = 2\int_0^{L/2} \frac{2}{\ell} P(L/2 - x)(1 - C_1 \pi x/2L)\,dx = \frac{4P}{\ell}\left(\frac{L^2}{8} - \frac{4L^2}{\pi^2} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}L^2\right)$$
$$= 0.101\,pL$$

$$\Rightarrow 0.2268\,\mu L\,\ddot{Y}(t) + 3.044\,\frac{EI}{L^3}\,Y(t) = 0.101\,pL$$

$= Y(t).\delta Y(t).EI\int_0^{\ell}\left(\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\right)^2 dx$

$\psi(x) = 1 - C_1\frac{\pi}{2L}x \rightarrow \frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi}{2L}x \rightarrow \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 C_1\frac{\pi}{2L}x$

$\Rightarrow \delta\omega_{I_1} = Y(t).\delta Y(t).EI\int_0^{\ell}\left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 C_1^2\left(\frac{\pi}{2L}x\right)dx$

$\int_0^{\ell} C_1^2\left(\frac{\pi}{2L}x\right)dx = \int_0^{\ell}\left(\frac{1+C_1\frac{\pi}{\ell}x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left(1+C_1\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)\right)dx$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\ell}{\pi}\sin\frac{\pi}{\ell}x\right)_0^{\ell} = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{\ell}{\pi}\sin(\pi-0)\right) = \ell/2$

$\Rightarrow \delta\omega_{I_1} = \ell/2 . Y(t).\delta Y(t).EI$

کار مجازی نیروی داخلی حاصل از نیروی اینرسی:

$f_I(x,t) = \mu.\ddot{V}(x,t) = \mu.\psi(x).\ddot{Y}(t)$

$\delta\omega_{I_2} = \int_0^{L} f_I(x,t)\,dx\,\delta V(x,t) = \int_0^{L}\mu.\psi(x).\ddot{Y}(t)\,dx\,.\,\psi(x).\delta Y(t)$

$= \mu.\ddot{Y}(t).\delta Y(t)\int_0^{L}\left(1-C_1\frac{\pi}{2L}x\right)^2 dx$

$\int_0^{L}\left(1-C_1\frac{\pi}{2L}x\right)^2 dx = \int_0^{L}\left(1-2C_1\frac{\pi}{2L}x + C_1^2\frac{\pi}{2L}x\right)dx$

$= \int_0^{L}\left(1-2C_1\frac{\pi}{2L}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_1\frac{\pi}{L}x\right)dx$

$= \left[\frac{3}{2}x - 2\frac{2L}{\pi}\sin\frac{\pi}{2L}x + \frac{L}{2\pi}\sin\frac{\pi}{L}x\right]_0^{L} = \frac{3}{2}L - \frac{4L}{\pi}\sin(\pi/2-0) + \frac{L}{2\pi}\sin(\pi-0)$

$= \frac{3}{2}L - \frac{4}{\pi}L = L\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right)$

$\Rightarrow \delta\omega_{I_2} = \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right)L.\mu.\ddot{Y}(t).\delta Y(t)$

کار مجازی نیروی خارجی:

$$p(x,t) = \begin{cases} P(t)\left(\frac{\ell}{2} - x\right) & 0 \le x \le \frac{\ell}{2} \\ P(t).\left(x - \frac{\ell}{2}\right) & \frac{\ell}{2} \le x \le \ell \end{cases}$$

$\delta\omega_E = \int_0^{L} p(x,t)\,dx\,\delta V(x,t) = 2\int_0^{\ell/2} P(t)\left(\frac{\ell}{2}-x\right).\delta Y(t)\,\psi(x).dx$

$= 2P(t).\delta Y(t).\int_0^{\ell/2}\left(\frac{\ell}{2}-x\right)\left(1-C_1\frac{\pi}{2L}x\right)$

$\int_0^{\ell/2}\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}C_1\frac{\pi}{2L}x - x + xC_1\left(\frac{\pi}{2L}x\right)\right)dx =$

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

$$\int_0^{\ell/2}\left(\ell/2-\ell/2\,C_1\tfrac{\pi}{2\ell}x-x\right)dx+\int_0^{\ell/2}\left(x.C_1\tfrac{2\pi}{\ell}x\right)dx$$

1) $$\int_0^{\ell/2}\left(\ell/2-\ell/2\,C_1\tfrac{\pi}{2\ell}x-x\right)dx=\ell/2\,x-\ell/2\,x\tfrac{2\ell}{\pi}\sin\tfrac{\pi}{2\ell}x-\tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^{\ell/2}$$

$$=\frac{\ell^2}{4}-\frac{\ell^2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-0\right)-\frac{\ell^2}{8}=\frac{\ell^2}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\ell^2}{\pi}=\ell^2\left(\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\right)$$

2) $$\int_0^{\ell/2}x.C_1\tfrac{2\pi}{\ell}x.dx$$

$\int udv=uv-\int vdu$ ← روش جزء به جزء

$dv=C_1\frac{2\pi}{\ell}x.dx\rightarrow v=\frac{\ell}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{\ell}x \qquad u=x\rightarrow du=dx$

$$\Rightarrow\int_0^{\ell/2}x\,C_1\tfrac{2\pi}{\ell}x.dx=\frac{\ell}{2\pi}.x\sin\tfrac{2\pi}{\ell}x-\int\frac{\ell}{2\pi}\sin\tfrac{2\pi}{\ell}x.dx$$

$$=\frac{\ell}{2\pi}x\sin\tfrac{2\pi}{\ell}x-\frac{\ell}{2\pi}.\frac{\ell}{2\pi}\left(-C_1\tfrac{2\pi}{\ell}x\right)\Big]_0^{\ell/2}$$

$$=\frac{\ell^2}{4\pi}\sin(\pi-0)+\frac{\ell^2}{4\pi^2}C_1(\pi-0)=-\frac{\ell^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow\int_0^{\ell/2}(\ell/2-x)(1-C_1\tfrac{\pi}{2\ell}x)=\ell^2\left(\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}-\frac{1}{4\pi^2}\right)$$

$$\Rightarrow\delta W_E=2\ell^2\left(\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}-\frac{1}{4\pi^2}\right)P(t).\delta Y(t)$$

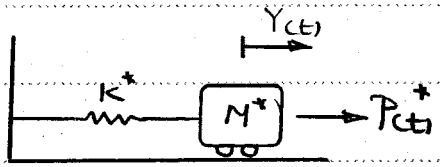
با استفاده از اصل کار مجازی داریم:

$\delta W_{I_1}+\delta W_{I_2}=\delta W_E$

$$(3/2-4/\pi)L.\mu.\ddot{Y}(t).\delta Y(t)+\ell/2.EI.Y(t).\delta Y(t)=\ell^2\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}-\frac{1}{2\pi^2}\right)P(t).\delta Y(t)$$

دو طرف را بر $\delta Y(t)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\underbrace{\left((3/2-4/\pi)L.\mu\right)}_{M^*}\ddot{Y}(t)+\underbrace{\left(\ell/2.EI\right)}_{k^*}Y(t)=\underbrace{\left(\ell^2\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}-\frac{1}{2\pi^2}\right)P(t)\right)}_{P(t)^*}$$



تمرین ۱۱ (ادامه حل):

فرض $\psi(x) = 1 - C_1 \frac{\pi x}{2L}$

$$M^* = \int_0^L \mu\left(1 - C_1 \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + M\left(1 - C_1 \frac{\pi L}{2L}\right)^2 = 0.2268\mu L + M$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 C_1 \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 3.044 \frac{EI}{L^3}$$

$$\bar{k} = \int_0^L \mu\left(1 - C_1 \frac{\pi x}{2L}\right) dx + M\left(1 - C_1 \frac{\pi L}{2L}\right) = 0.3634\mu L + M$$

$$\Rightarrow (0.2268\mu L + M)\ddot{Y}(t) + 3.044 \frac{EI}{L^3} Y(t) = -(0.3634\mu L + M)\ddot{x}_g(t)$$

تمرین ۱۱.۸ سازه برجی بصورت شکل مقابل مدل شده است. در صورتیکه EI و M در طول برج ثابت در نظر گرفته شود، مطلوبست تعیین:

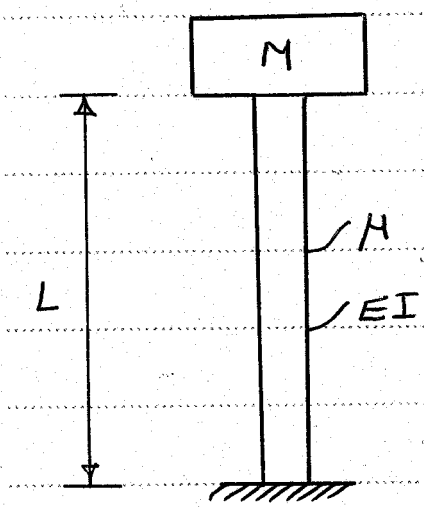
الف) معادله حرکت ب) جرم معادل

ج) سختی معادل د) نیروی نوسر معادل

هـ) ضریب تحریک زلزله

اگر این برج تحت اثر حرکت زمین با شتاب $\ddot{x}_g(t)$ قرار گرفته باشد.

$M=\mu L$



$$V(x,t) = \psi(x).Y(t) \rightarrow \delta V(x,t) = \psi(x).\delta Y(t)$$

$$\delta W_{\in} = \delta W_I \rightarrow 0 = \delta W_{I_1} + \delta W_{I_2} \quad (1)$$

۱) کارمجازی نیروهای داخلی:

$$\delta W_{I_1} = \int M(x)\,\delta d\theta = \int EI\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 \delta v(x,t)}{\partial x^2}\,dx = Y(t).\delta Y(t).EI\int_0^L \left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx \quad (2)$$

۲) کارمجازی نیروهای اینرسی:

$$\delta W_{I_2} = \int f_I(x,t).\delta v(x,t).dx + M.\ddot{v}_t(L,t).\delta v(L,t)$$

$$f_I(x,t) = \mu(x).\ddot{v}_t(x,t)$$

$$v_t(x,t) = v(x,t) + x_g(t) \rightarrow \begin{cases} \ddot{v}_t(x,t) = \ddot{v}(x,t) + \ddot{x}_g(t) \\ \ddot{v}_t(L,t) = \ddot{v}(L,t) + \ddot{x}_g(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \delta W_{I_2} = \int \mu(x).\ddot{v}_t(x,t).\delta v(x,t)\,dx + M.\ddot{v}_t(L,t).\delta v(L,t)$$

$$= \mu\int (\ddot{v}(x,t)+\ddot{x}_g(t)).\psi(x).\delta Y(t)\,dx + M(\ddot{v}(L,t)+\ddot{x}_g(t)).\psi(L).\delta Y(t)$$

$$= \mu.\ddot{Y}(t).\delta Y(t).\int_0^L \psi^2(x).dx + \mu.\delta Y(t).\ddot{x}_g(t)\int_0^L \psi(x).dx + M.\ddot{Y}(t).\delta Y(t).\psi^2(L) + M.\delta Y(t).\ddot{x}_g(t).\psi(L)$$

$$= \ddot{Y}(t).\delta Y(t)\left[\mu\int_0^L \psi^2(x).dx + M\psi^2(L)\right] + \ddot{x}_g(t).\delta Y(t)\left[\mu.\int_0^L \psi(x).dx + M.\psi(L)\right] \quad (3)$$

از قرار دادن روابط (2) و (3) در رابطه (1) حاصل واضح است.

$$\ddot{Y}(t).\delta Y(t)\left[\mu\int_0^L \psi(x)^2.dx + M\psi(L)^2\right] + Y(t).\delta Y(t).EI\int_0^L\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2.dx$$
$$= -\ddot{x}_g(t).\delta Y(t)\left[\mu\int_0^L \psi(x).dx + M\psi(L)\right]$$

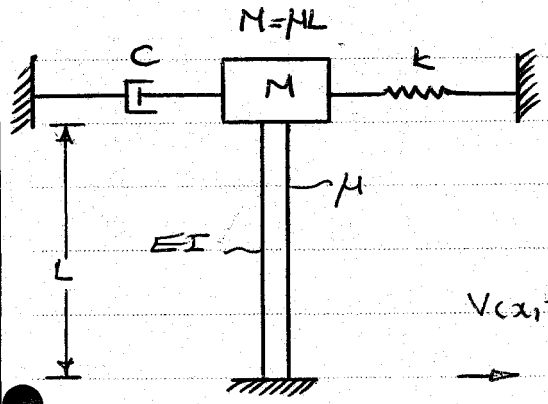
$$\Rightarrow \ddot{Y}(t)\left[\mu\int_0^L \psi(x)^2.dx + M\psi(L)^2\right] + Y(t).EI\int_0^L\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2.dx = -\ddot{x}_g(t)\left[\mu\int_0^L \psi(x).dx + M\psi(L)\right]$$

جرم معادل $M^* = \mu\int_0^L \psi(x)^2.dx + M\psi(L)^2$ سختی معادل $k^* = EI\int_0^L\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2$

ضریب تحریک $\bar{k} = \mu\int_0^L \psi(x).dx + M\psi(L)$ نیروی معادل $P_{eff}^* = -\bar{k}.\ddot{x}_g(t)$

معادله حرکت $M^*\ddot{Y}(t) + k^*Y(t) = P_{eff}^*(t)$

مسئله ۱۲ سازه برجی به شکل مقابل مدل شده است. مطلوبست تعیین معادله حرکت، سختی معادل، جرم معادل، نیروی موثر معادل و ضریب استهلاک معادل در صورتیکه سازه تحت اثر حرکت زمین قرار گرفته باشد.



$$V(x,t) = \psi(x).Y(t)$$
$$\rightarrow \delta V(x,t) = \psi(x).\delta Y(t)$$

روش کار: نیروی مجازی

$$\delta W_E = \delta W_I \rightsquigarrow 0 = \delta W_{I_1} + \delta W_{I_2} \quad (1)$$

۱) کار نیروی داخلی:

$$\delta W_{I_1} = \int m(x).\delta d\theta + C\dot{V}(L,t).\delta V(L,t) + kV(L,t).\delta V(L,t)$$
$$= \int EI\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}.\frac{\partial^2\delta V(x,t)}{\partial x^2}.dx + \psi(L)^2.\delta Y(t)\left(C.\dot{Y}(t) + k.Y(t)\right)$$
$$= Y(t).\delta Y(t).EI\int_0^L\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx + \psi(L)^2.\delta Y(t)\left(C.\dot{Y}(t) + k.Y(t)\right)$$
$$= Y(t).\delta Y(t)\left[EI\int_0^L\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx + k.\psi(L)^2\right] + \dot{Y}(t).\delta Y(t).C.\psi(L)^2 \quad (2)$$

۲) کار نیروی اینرسی:

$$\delta W_{I_2} = \int f_I(x,t).\delta V(x,t).dx + M\ddot{V}(x,t)\,\delta V(x,t)$$

این رابطه در مثال قبل ساده شده است. از نوشتن مراحل آن خودداری می‌کنیم. جواب، خواهد بود:

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

$$X_{Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2 \right]^{1/2} = 13.29$$

$\Rightarrow$ Max تغییرمکان $= 33.94$ in

Max برش پایه $Q_{Max} = k X_{Max} = 150 \times 33.94 = 5091$ kips

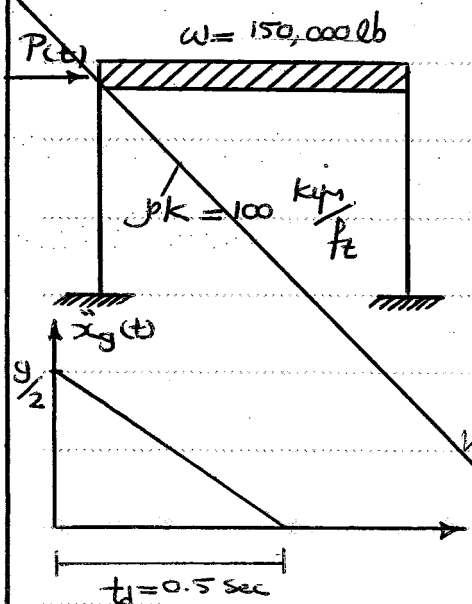
غلط دارد

تمرین ۱۵) قاب یک طبقه شکل مقابل مفروض است.

درصورتیکه این قاب تحت اثر نیروی زلزله‌ای با مختصات شتاب زیر قرار گیرد، مطلوبست تعیین:

۱) تابع تغییرمکان ۲) رسم تابع تغییرمکان

۳) تعیین مقدار Max تغییرمکان و Max برش پایه.



$W = 150{,}000$ lb $= 150$ kips

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = P_{eff}(t) = -m\ddot{x}_g(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{kg}{Mg}} = \sqrt{\frac{kg}{W}} = \sqrt{\frac{100 \times 32.17}{150}} = 4.631 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.357 \text{ s}$$

چون $t_d > \frac{T}{5}$ پس بارگذاری انجام شده بارگذاری اختیاری می‌باشد.

جهت اول ($0 < t \leq 0.5$) تعیین تابع تغییرمکان به کمک انتگرال دوهامل

$$x_1(t) = \frac{1}{\omega} V(t) \qquad V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau$$

$$\ddot{x}_g(\tau) = -g\tau + \frac{1}{2}g$$

$$\Rightarrow V(t) = \int_0^t (-32.17\tau + 16.085) \sin(4.631(t-\tau))\, d\tau$$

$$\Rightarrow V(t) = 6.947t - 3.473 C_1(4.631t) + 1.5 \sin(4.631t) + 3.473$$

$$\Rightarrow x_1(t) = 1.5t - 0.75 C_1(4.631t) + 0.324 \sin(4.631t) + 0.75$$

$$t = 0.5 \rightarrow x_{1Max}(0.5) = 2.247$$

مسئله دوم ($t > 0.5$) حالت ارتعاش آزاد

$$x_2(t) = X_{Max}\, C_1(\omega_n t - \phi)$$

$$X_0 = x(0.5) = 2.247$$

$$\dot{X}_0 = \dot{x}(0.5) \rightarrow \dot{x}(t) = 1.5 + 3.473 \sin(4.631t) + 1.5 C_1(4.631t)$$

$$\rightarrow \dot{X}_0 = 3.037$$

$$\rightarrow \begin{cases} X_{Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega}\right)^2 \right]^{1/2} = \left[2.247^2 + \left(\frac{3.037}{4.631}\right)^2 \right]^{1/2} = 2.341 \\ \phi = tg^{-1}\left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n X_0}\right) = tg^{-1}\left(\frac{3.037}{4.631 \times 2.247}\right) = 0.284 \text{ rad} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2(t) = 2.341\, C_1(4.631t - 0.284)$$

نتیجه:

Max تغییر مکان $= 2.341$ ft

Max برش پایه $= 100 \left(\frac{kip}{ft}\right) \times 2.341 \text{ (ft)} = 234.1$ kips

ادامه تمرین ۱۲)

تابع فرض $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$

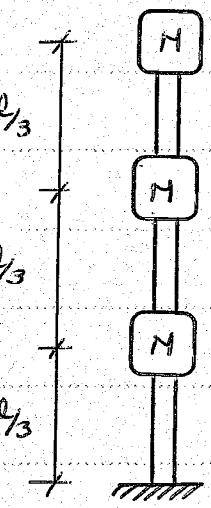
$$M^* = \int_0^L \mu \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2 dx + M\left(\sin\frac{\pi L}{2L}\right)^2 = \frac{L}{2}\mu + ML = 1.5ML$$

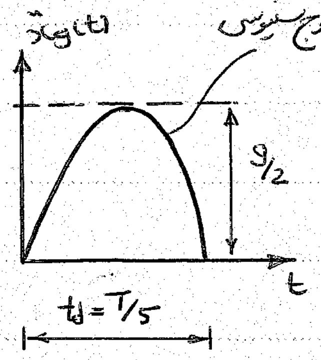
$$k^* = \int_0^L EI\left(-\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + k = \frac{\pi^4}{16L^4} \times \frac{L}{2} EI = 3.044\frac{EI}{L^3} + k$$

$$\bar{k} = \int_0^L \mu\left(\sin\frac{\pi x}{2L}\right) dx + M\left(\sin\frac{\pi L}{2L}\right)^2 = \frac{2}{\pi} L\mu + ML = 1.637L\mu$$

$$C^* = C\left(\sin\frac{\pi L}{2L}\right) = C$$

$$\Rightarrow 1.5ML\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + \left(3.044\frac{EI}{L^3} + k\right) Y(t) = -1.637ML\ddot{x}_g(t)$$





آیدیل سازه

حل مجدد و صحیح تمرین ۱۴)

برج مخابراتی شهری بصورت سازه مقابل مدل شده است. در صورتیکه:

$W = Mg = 100\ kips \quad L = 100\ ft$

$EI = 3\times10^{8}\ lb.in^{2} \qquad \mu L = 3M$

و این سازه تحت اثر حرکت زمین بصورت شکل قرار گیرد، مطلوبست تعیین:

۱) Max تغییر مکان ۲) Max برش پایه

۳) محاسبه تابع تغییر مکان و رسم آن.

$L = 1200\ in \qquad Mg = 100\ kips \Rightarrow W = Mg = 10^{5}\ lb$ وزنی

$\Rightarrow M = \frac{10^{5}}{386.06} = 259.03\ lb$ جرمی

$\mu L = 3M \Rightarrow \mu = \frac{3M}{L} = \frac{3\times259.03}{1200} = 0.648\ lb/in$ جرمی

$\ddot{x}_g(t) = \frac{g}{2}\sin(\frac{5\pi}{T})t = 193.03\sin(\frac{5\pi}{T})t$

$\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$

می‌توان از دو رابطه زیر که کاملاً یکی هستند تابع تغییرمکان را بدست آورد.

1) $x(t) = \frac{\int P^{*}_{eff}(t)\,dt}{\omega m^{*}}\sin\omega(t) \qquad P^{*}_{eff}(t) = -\bar{k}\,\ddot{x}_g(t)$ بارگذاری ضربه‌ای

2) $Y(t) = \frac{\bar{k}}{\omega m^{*}}V(t) \qquad V(t) = \int_0^{t}\ddot{x}_g(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$ بارگذاری اختیاری

حال چون $t_d = T/5$ می‌باشد و بارگذاری ضربه‌ای است پس از همین رابطه ۱ استفاده می‌کنیم

$M^{*} = \int_0^{L}\mu(x)[\psi(x)]^{2}dx + \sum m_i\psi_i^{2}$

$= \int_0^{1200} 0.648(1-\cos\frac{\pi x}{2400})^{2}dx + 259.03[(1-\cos\frac{\pi}{6})^{2} + (1-\cos\frac{\pi}{3})^{2} +$

$(1-\cos\frac{\pi}{2})^{2}] = 504.77\ lb$ جرمی

$k^{*} = \int_0^{L} EI[\frac{d^{2}\psi}{dx^{2}}]^{2}dx = \int_0^{1200} 3\times10^{8}\times(\frac{\pi}{2400})^{4}(\cos(\frac{\pi x}{2400}))^{2}dx = \sout{5.35\times10^{-2}}\ 0.528\ lb/in$ وزنی

$$\bar{K} = \int_0^L \mu_{s1}\, \psi_{s1}\, dx + \sum m_i \psi_i = \int_0^{1200} 0.648 \left(1 - C_1 \frac{\pi x}{1200 \to 2400}\right) dx + 259.03 \left[\left(1 - C_1 \frac{\pi}{6}\right) + \left(1 - C_1 \frac{\pi}{3}\right) + \left(1 - C_1 \frac{\pi}{2}\right) \right] = 1200.85 \text{ lb} \quad \text{یا} \quad 682.21$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{5.35 \times 10^{-2}}{504.77}} = 1.03 \times 10^{-2} \text{ rad/s} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 610.3 \text{ s}$$

$$\int_0^{t_d} P_{eff}(t)\, dt = \int_0^{T/5} -k \ddot{x}_g(t) = \int_0^{T/5} -k \left(193.03 \sin\left(\frac{5\pi}{T} t\right)\right) dt$$

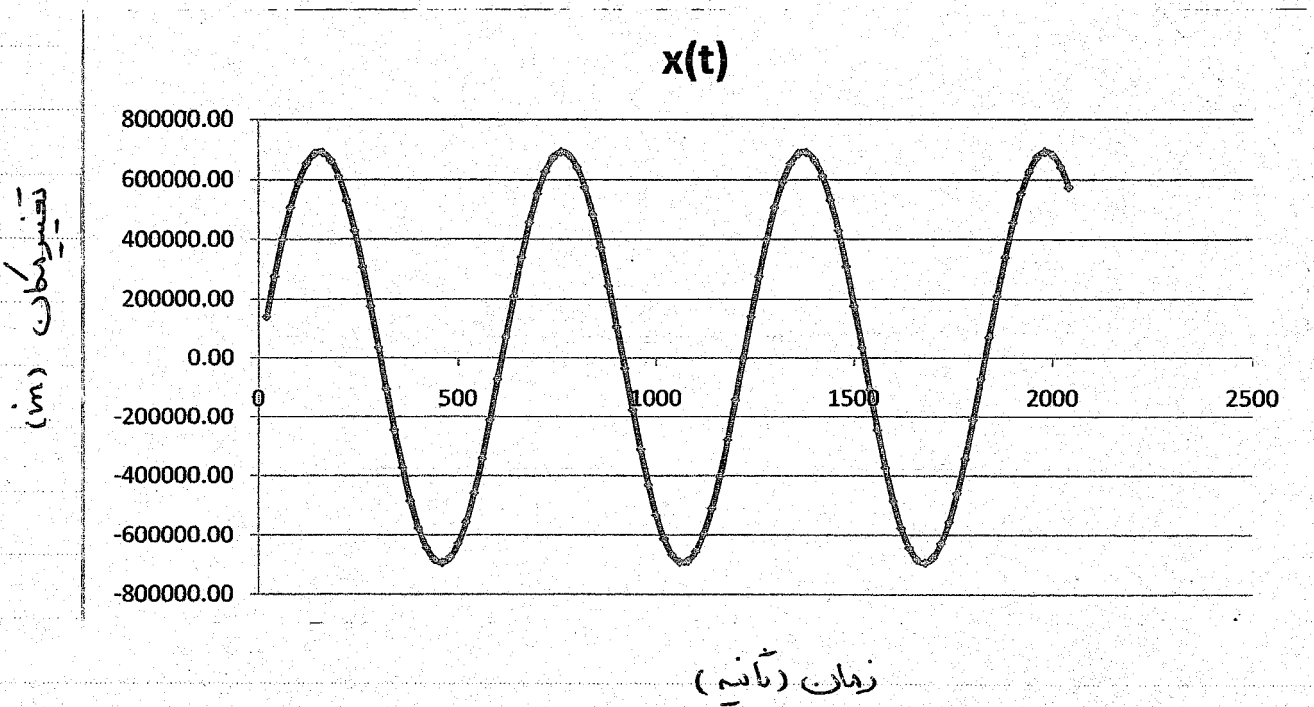
$$= \int_0^{122.06} -1200.85 \times 193.03 \sin\left(\left(\frac{5\pi}{122.06}\right) t\right) dt = 3{,}602{,}442.5$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{3{,}602{,}442.5}{1.03 \times 10^{-2} \times 504.77} \sin\left(1.03 \times 10^{-2} (t - t_d)\right) = 692{,}893.2 \sin(0.0103t)$$

$$\rightarrow x_{Max} = 692893.2 \text{ in}$$

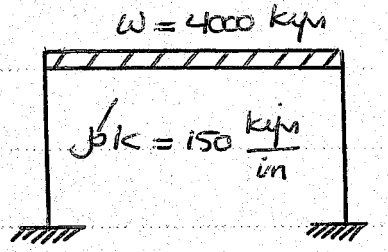
$$Q(t) = \frac{\bar{k}^2}{m^* \omega} V(t) = \frac{\bar{k}}{m^* \omega} V(t) \times \bar{k} \omega^2 = x(t) \cdot \bar{k} \omega^2 \rightsquigarrow \text{بیشترین}$$

$$\rightarrow Q_{Max} = 692893.2 \times 1200.85 \times (1.03 \times 10^{-2})^2 = 88273.3 \text{ lb}$$



حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

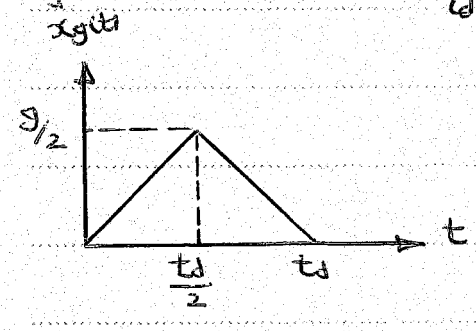
حل مجدد و صحیح (تمرین ۱۴)



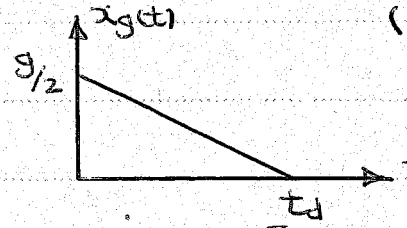
قاب شکل مقابل مفروض است. درصورتیکه این قاب تحت اثر شتاب زمین بصورت دیاگرام پله ای الف و ب قرار گیرد، مطلوبست تعیین:

۱) تغییرمکان Max ۲) برش پایه Max

$t_d = 2T$ (دوبرابر پریود سازه است)



ب)



الف)

بارگذاری اضافه ای می باشد.

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = P_{eff} = -m\ddot{x}_g(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{mg}} = \sqrt{\frac{150 \times 386.06}{4000}} = 3.805 \ rad/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3.805} = 0.526\pi = 1.651 \ rad$$

حالت الف)

فاز اول ($0 < t \leq 2T$) و تعیین تابع تغییرمکان سازه انتگرال دوهامل.

$$x_1(t) = \frac{1}{\omega} V_1(t) \qquad V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau$$

$$\ddot{x}_g(\tau) = \frac{-g}{4T}\tau + \frac{g}{2}$$

$$\Rightarrow V_1(t) = \int_0^t \left(\frac{-g}{4T}\tau + \frac{1}{2}g\right) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau$$

$$V_1(t) = \int_0^t (-58.46\tau + 193.03) \sin(3.805(t-\tau))\, d\tau$$

$$V_1(t) = -15.36t - 50.73\cos(3.805t) + 4.04\sin(3.805t) + 50.7$$

$$\Rightarrow x_1(t) = -4.04t - 13.32\cos(3.805t) + 1.062\sin(3.805t) + 13.32$$

$$\Rightarrow t = 0.764 < 2T = 3.303 \rightarrow x_{1\,Max} = 23.47$$

فازدوم ($t > 2T$) و حالت ارتعاش آزاد

$x_2(t) = X_{2Max}\, C_1(\omega_n(t-2T) - \phi)$ $\qquad 2T = 3.303\ s$

$X_0 = x_1(3.303) = -13.36\ in$

$\dot{X}_0 = \dot{x}_1(3.303) \rightarrow \dot{x}(t) = -4.04 + 50.6\sin(3.805t) + 4.03\,C_1(3.805t)$

$\Rightarrow \dot{X}_0 = \dot{x}(3.303) = 0.068\ in/s$

$\Rightarrow X_{2Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} = 13.36\ in$

$\Rightarrow$ تغییرمکان ماکزیمم $x_{Max} = x_1(t = 0.764) = 23.47$

برش ماکزیمم را برای مقایسه از دو رابطه زیر بدست می‌آوریم.

1) $Q_{Max} = k\,x_{Max} = 150 \times 23.47 = 3520.5\ kips$

2) $Q_{Max} = m\omega V_{Max} = m\omega(x_{Max}.\omega) = \frac{4000}{386.06} \times 3.805^2 \times 23.47 = 3520.7\ kips$

حالت ب)

$x(t) = \frac{1}{\omega} V(t) \qquad V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$

$$\ddot{x}_g(\tau) = \begin{cases} \frac{g}{2T}\tau & 0 \le t \le T \\ \frac{-g}{2T}\tau + g & T < t \le 2T \\ 0 & t > 2T \end{cases}$$

فازاول ($0 < t \le T$)

$V_1(t) = \int_0^t \frac{g}{2T}\tau \sin\omega(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t 116.92\,\tau \sin(3.805(t-\tau))\,d\tau$

$= 30.73t - 8.076\sin(3.805t)$

$x_1(t) = 8.076t - 2.122\sin(3.805t)$

$\rightarrow \quad t = T \Rightarrow x_{1\,Max} = 13.34\ in$

فازدوم ($T < t \le 2T$)

$V_2(t) = \int_0^T \frac{g}{2T}\tau \sin\omega(t-\tau)\,d\tau + \int_T^t \left(\frac{-g}{2T}\tau + g\right)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$

$= \int_0^{1.651} 116.92\,\tau \sin(3.805(t-\tau))\,d\tau + \int_{1.651}^t (-116.92\tau + 386.06)\sin(3.805(t-\tau))\,d\tau$

$= -30.73t + 101.46\,C_1(3.805t - 6.28) + 16.15\sin(3.805t - 6.28)$

$- 101.46\,C_1(3.805(t-1.651)) - 8.08\sin(3.805t) + 101.46$

$$\Rightarrow x_2(t) = -8.08t + 26.66\,C_1(3.805t - 6.28) + 4.24\sin(3.805t - 6.28) - 26.66\,C_1(3.805(t-1.651)) - 2.12\sin(3.805t) + 26.66$$

$$t = T \rightarrow x_{2\,Max} = 13.34\ in$$

فازسوم ($t > 2T$) حالت ارتعاش آزاد

$$x_3(t) = X_{Max}\,C_1(\omega_n(t-2T) + \phi)$$

$$X_0 = x_2(3.303) = -0.011$$

$$\dot{X}_0 = \dot{x}_2(3.303)$$

$$\dot{x}_2(t) = -8.08 - 101.44\sin(3.805t - 6.28) + 16.13\,C_1(3.805t - 6.28) + 101.44\sin(3.805(t-1.651)) - 8.07\,C_1(3.805t)$$

$$\dot{X}_0 = \dot{x}_2(3.303) = 0.157$$

$$\Rightarrow x_{3\,Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} = 0.043$$

$$\Rightarrow \text{Max تغییرمکان} = 13.34\ in$$

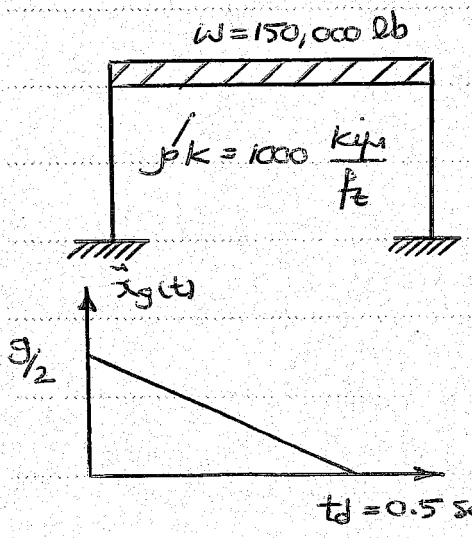
$$Q_{Max} = k\,x_{Max} = 150 \times 13.34 = 2001\ kips$$

حل مجدد و صحیح (تمرین ۱۵)

قاب یک طبقه شکل مقابل مفروض است. در صورتیکه این قاب تحت اثر نیروی زلزله ای با طیفی زیر قرار گیرد، مطلوبست تعیین:

۱) تاریخچه تغییرمکان ۲) رسم تاریخچه تغییرمکان

۳) تعیین مقدار Max تغییرمکان و Max برش پایه.



$W = 150{,}000\ lb = 150\ kips$

$m\ddot{x}(t) + Kx(t) = P_{eff}(t) = -m\ddot{x}_g(t)$

$\omega = \left(\frac{K}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{kg}{mg}\right)^{1/2} = \left(\frac{100 \times 32.17}{150}\right)^{1/2} = 4.631\ rad/s$

$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.357$

چون $t_d > \frac{T}{4}$ $(0.5 > 0.34)$ پس بارگذاری ایجاد شده ضربه‌ای است.

فاز اول ($0 < t \leq 0.5$):

$x_1(t) = \frac{1}{\omega} V_1(t)$

$\ddot{x}_g(t) = -g\tau + \frac{1}{2}g$

$V_1(t) = \int_0^t (-32.17\tau + 16.085)\sin(4.631(t-\tau))\,d\tau$

$= 6.947t - 3.473\cos(4.631t) + 1.5\sin(4.631t) + 3.473$

$\Rightarrow x_1(t) = 1.5t - 0.75\cos(4.631t) + 0.324\sin(4.631t) + 0.75$

$t = 0.5 \rightarrow x_{1\,Max}(0.5) = 2.247\ ft$

فاز دوم ($t > 0.5$):

$x_2(t) = X_{Max}\cos(\omega_n(t-0.5) - \varphi)$

$X_0 = x_1(0.5) = 2.247$

$\dot{X}_0 = \dot{x}_1(0.5) \rightarrow \dot{x}(t) = 1.5 + 3.473\sin(4.631t) + 1.5\cos(4.631t)$

$\rightarrow \dot{X}_0 = 3.037$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{2Max} = \left[X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} = \left[2.247^2 + \left(\frac{3.037}{4.631}\right)^2\right]^{1/2} = 2.341\ ft \\ \varphi = tg^{-1}\left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n X_0}\right) = tg^{-1}\left(\frac{3.037}{4.631 \times 2.247}\right) = 0.284\ rad \end{cases}$$

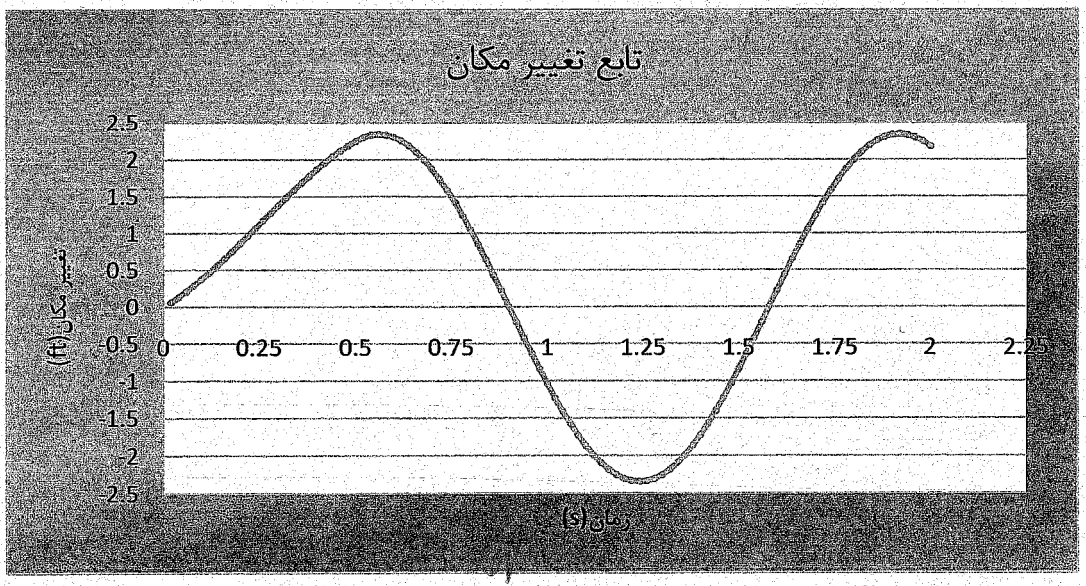
$\rightarrow x_2(t) = 2.341\cos(4.631t - 0.284)$

در نتیجه:

تغییر مکان Max $= 2.341\ ft$

برش پایه Max $= 2.341 \times 100 = 234.1\ kips$

t(s)	x(t)	t(s)	x(t)	t(s)	x(t)	t(s)	x(t)
0.02	0.06318	0.52	2.29826	1.02	-1.23024	1.52	-0.63066
0.04	0.13251	0.54	2.329593	1.04	-1.40917	1.54	-0.41945
0.06	0.20764	0.56	2.340956	1.06	-1.57602	1.56	-0.20464
0.08	0.28819	0.58	2.332252	1.08	-1.72937	1.58	0.011918
0.1	0.37373	0.6	2.303554	1.1	-1.86788	1.6	0.228378
0.12	0.46379	0.62	2.25511	1.12	-1.99039	1.62	0.44288
0.14	0.55784	0.64	2.187335	1.14	-2.09583	1.64	0.653585
0.16	0.65533	0.66	2.100809	1.16	-2.18331	1.66	0.858688
0.18	0.75570	0.68	1.996274	1.18	-2.25207	1.68	1.056429
0.2	0.85833	0.7	1.874626	1.2	-2.30153	1.7	1.245115
0.22	0.96260	0.72	1.736908	1.22	-2.33126	1.72	1.423127
0.24	1.06789	0.74	1.584301	1.24	-2.341	1.74	1.58894
0.26	1.17353	0.76	1.418113	1.26	-2.33067	1.76	1.74113
0.28	1.27888	0.78	1.239769	1.28	-2.30037	1.78	1.878398
0.3	1.38330	0.8	1.050796	1.3	-2.25034	1.8	1.999561
0.32	1.48615	0.82	0.852816	1.32	-2.18103	1.82	2.103584
0.34	1.58681	0.84	0.647525	1.34	-2.09302	1.84	2.189575
0.36	1.68466	0.86	0.436684	1.36	-1.98706	1.86	2.256795
0.38	1.77913	0.88	0.222099	1.38	-1.86408	1.88	2.30467
0.4	1.86966	0.9	0.00561	1.4	-1.72511	1.9	2.332788
0.42	1.95574	0.92	-0.21093	1.42	-1.57135	1.92	2.340909
0.44	2.03688	0.94	-0.42566	1.44	-1.40413	1.94	2.328962
0.46	2.11265	0.96	-0.63674	1.46	-1.22487	1.96	2.297051
0.48	2.18265	0.98	-0.84236	1.48	-1.0351	1.98	2.245449
0.5	2.24655	1	-1.04076	1.5	-0.83647	2	2.174598



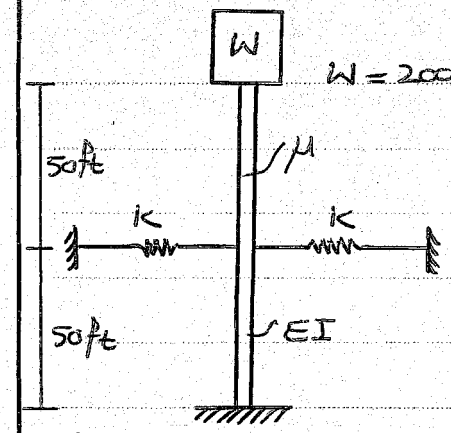
حل مجدد و صحیح (تمرین ۱۶)

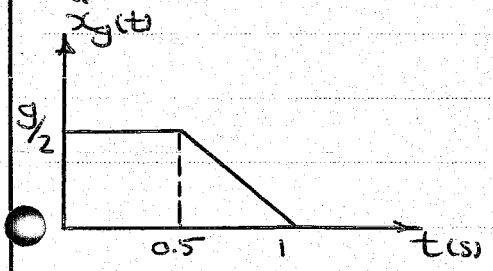
برج مخابرات شهری بصورت شکل مقابل مدل شده است. در صورتیکه این سازه تحت اثر شتاب نگاشت زیر قرار گیرد، مطلوبست تعیین:

۱) تاریخچه تغییر مکان ۲) مقدار Max تغییر مکان

۳) شدت نیروی برش پایه ۴) Max برش پایه

(استهلاک را صفر در نظر بگیرید)





$EI = 2.1 \times 10^8$ وزنی $lb.in^2$

$\mu Lg = 2W$

$K = 50\ kip/ft = \frac{50,000}{12} = 4166.7$ وزنی $\frac{lb}{in}$

$L = 1200$ inch $\qquad W = 200,000$ وزنی lb

$\Rightarrow M = \frac{200,000}{386.06} = 518.1$ جرمی lb

$\mu Lg = 2W \Rightarrow \mu L = 2\frac{W}{g} \Rightarrow \mu L = 2M \Rightarrow \mu = \frac{2 \times 518.1}{1200} = 0.863$ جرمی lb/in

$v(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t) \qquad \psi(x) = 1 - C_1 \frac{\pi x}{2L}$

$$M^* = \int_0^L \mu \psi(x) [\psi(x)]^2 dx + \sum m_i \psi_i^2$$

$$= \int_0^{1200} 0.863 \times \left(1 - C_1 \frac{\pi x}{2400}\right)^2 dx + 518.1 \left(1 - C_1 \frac{\pi}{2}\right)^2 = 752.9 \text{ جرمی } lb$$

$$K^* = \int_0^L EI_{(x)} \left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]^2 dx + \sum k_i \psi_i^2$$

$$= \int_0^{1200} 2.1 \times 10^8 \left(\frac{\pi}{2400}\right)^4 \left(C_1 \left(\frac{\pi x}{2400}\right)\right)^2 dx + 2 \times 4166.7 \left(1 - C_1 \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$= 715.26 \text{ وزنی } lb/in$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{715.26}{752.9}} = 0.975 \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 6.45$$

$$\bar{K} = \int_0^L \mu \psi(x) \cdot \psi(x) \cdot dx + \sum m_i \psi_i = \int_0^{1200} 0.863 \left(1 - C_1 \frac{\pi x}{2400}\right) dx + 518.1 \left(1 - C_1 \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 894.42 \text{ جرمی } lb$$

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

$$\ddot{x}_g(\tau) = \begin{cases} g/2 & 0 < t \leq 0.5 \\ -g(t-1) & 0.5 < t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

فازاول ($0 < t \leq 0.5$):

$$Y(t) = \frac{\bar{k}}{N^* \omega} V(t) \rightarrow V_1(1,t) = \psi(1) \cdot \frac{\bar{k}}{N^* \omega} V_1(t)$$

$$V_1(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t 193.03 \sin(0.975(t-\tau))\, d\tau$$

$$= -197.98\, C_1(0.975t) + 197.98$$

$$Y_1(t) = \frac{894.42}{752.9 \times 0.975} (-197.98\, C_1(0.975t) + 197.98)$$

$$= -241.22\, C_1(0.975t) + 241.22$$

$t = 0.5$ $\qquad Y_{1\,Max} = 28.1$ in

فازدوم ($0.5 < t \leq 1$):

$$V_2(t) = \int_0^{0.5} \frac{g}{2} \sin\omega(t-\tau)\, d\tau + \int_{0.5}^t -g(\tau - 1) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^{0.5} 193.03 \sin 0.975(t-\tau)\, d\tau + \int_{0.5}^t -386.06(\tau - 1) \sin 0.975(t-\tau)\, d\tau$$

$$= -395.96t + 395.96t\, C_1(0.975(t-0.5)) - 197.98\, C_1(0.975(t-0.5))$$

$$-197.98\, C_1(0.975t) + 395.96 \leftarrow (\text{غلط})$$

$$Y_2(t) = -482.45t + 482.45t\, C_1(0.975(t-0.5)) - 241.22\, C_1(0.975(t-0.5))$$

$$-241.22\, C_1(0.975t) + 482.45$$

$t = 1 \rightarrow Y_{2\,Max} = 77.76 \rightarrow 96.38$ in

فازسوم ($t \geq 1$):

$$Y_3(t) = Y_{Max}(C_1(t-1) - \phi)$$

$$Y_0 = Y_2(1) = 77.76 \text{ in}$$

$$\dot{Y}_0 = \dot{Y}_2(1) \rightarrow \dot{Y}_2(t) = -482.45 + 482.45\, C_1(0.975(t-0.5))$$

$$-482.45t \sin(0.975(t-0.5)) + 241.22 \sin(0.975(t-0.5)) + 241.22 \sin(0.975t)$$

$$\rightarrow \dot{Y}_0 = \dot{Y}_{2(1)} = 30.46 \ \frac{in}{s}$$

$$\rightarrow Y_{3Max} = \left[Y_0^2 + \left(\frac{\dot{Y}_0}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[77.76^2 + \left(\frac{30.46}{0.975} \right)^2 \right]^{1/2} = 83.8 \ in \quad (171.59)$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{30.46}{0.975 \times 77.76} \right) = 0.38$$

- تابع تغییر مکان:

$$V(x,t) = \left(1 - C_1 \frac{\pi x}{2400}\right) \times \begin{cases} -241.22\, C_1(0.975t) + 241.22 & 0 < t \leq 0.5 \\ -482.45t + 482.45t\, C_1(0.975(t-0.5)) - 241.22\, C_1(0.975 \times (t-0.5)) - 241.22\, C_1(0.975t) + 482.45 & 0.5 < t \leq 1 \\ 83.8\, C_1(0.975(t-1) + 0.38) & t > 1 \end{cases}$$

- مقدار Max تغییر مکان:

$$Y_{Max} = 83.8 \ in \quad (171.59)$$

- شدت نیروی برشی:

$$Q = \frac{\bar{K}^2}{M^* \omega} V(t) = \left(\frac{\bar{K}}{M^* \omega} \right) \bar{K} \cdot \omega^2 V(t)$$

$$\rightarrow Q = \bar{K} \cdot \omega^2 \cdot Y(t) = 850.26\, Y(t)$$

$$Q(t) = 850.26 \times \begin{cases} -241.22\, C_1(0.975t) + 241.22 & 0 < t \leq 0.5 \\ -482.45t + 482.48t\, C_1(0.975(t-0.5)) - 241.22\, C_1(0.975 \times (t-0.5)) - 241.22\, C_1(0.975t) + 482.45 & 0.5 < t \leq 1 \\ 83.8\, C_1(0.975(t-1) + 0.38) & t > 1 \end{cases}$$

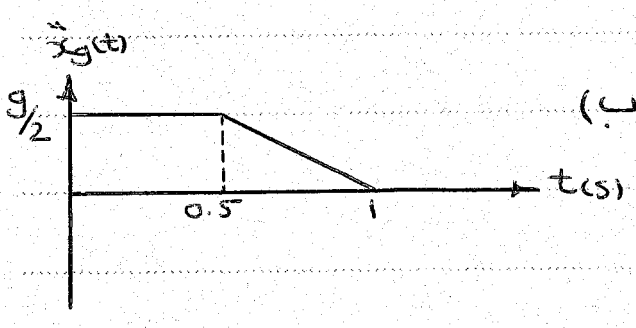
- برش پایه Max:

$$Q_{Max} = 850.26 \times 83.8 = 71251.79 \ lb$$

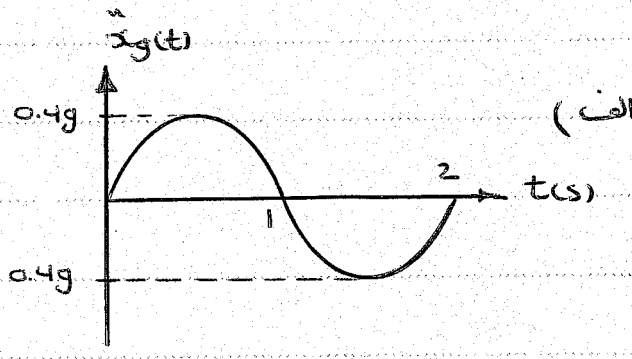
حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

تمرین ۱۷) در صورتیکه شتاب ثبت شده زمین در دو زلزله مختلف مطابق اشکال الف و ب باشد، مطلوبست تعیین طیف پاسخ این دو زلزله برای تغییرات میرائی بر حسب درصد شتاب. طیف های مزبور را برای سه میرائی زیر بدست آورید. (برای رسم تا 45 ثانیه پیش بروید)

$\xi_1 = 0\%$ $\xi_2 = 5\%$ $\xi_3 = 10\%$



(ب)



(الف)

قسمت الف)

$$\ddot{x}_g(\tau) = \begin{cases} 0.4g \sin \pi\tau & 0 < \tau \leq 2 \\ 0 & \tau > 2 \end{cases}$$

$$0 < t \leq 2 \rightarrow V(t) = \int_0^t 0.4g \sin \pi t \cdot e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau)\, d\tau$$

با فرض $(T \leq 4)$ همواره $t_d > T/4$ می‌باشد پس پاسخ سازه اجباری است و چون $t_d > T/2$ می‌باشد صددرصد پاسخ سازه در اثر نیرو اجباری است.

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = \frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\xi^2} \qquad g = 32.17\ ft/s^2$$

$$V(t) = \int_0^t 12.868 \sin \pi\tau \cdot e^{-\xi\left(\frac{2\pi}{T}\right)(t-\tau)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\xi^2}(t-\tau)\right) d\tau$$

برای $\xi = 0$ داریم:

$$V(t) = \int_0^t 12.868 \sin \pi\tau \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t-\tau)\right) d\tau$$

$$= 12.868 \left(\frac{\sin(\pi t) + \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{2\left(\frac{2\pi}{T} + \pi\right)} + \frac{\sin(\pi t) - \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{2\left(\frac{2\pi}{T} - \pi\right)} \right)$$

برای $\xi = 5\%$ داریم:

$$A = \frac{9.873}{100T^2} + \left(\frac{6.274}{T} + \pi\right)^2 \qquad B = \frac{9.873}{100T^2} + \left(\frac{6.274}{T} - \pi\right)^2$$

$$V(t) = \left[\frac{1}{A}\left[\frac{0.1571\,C_1(\pi t)}{T} + \frac{1}{2}\left(\frac{6.274}{T} + \pi\right)\sin(\pi t) - \frac{0.1571}{T}e^{-\frac{0.3142t}{T}}C_1\left(\frac{6.274}{T}t\right)\right.\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}e^{-\frac{0.3142t}{T}}\left(\frac{6.274}{T} + \pi\right)\sin\left(\frac{6.274t}{T}\right)\right] + \frac{1}{B}\left[-\frac{0.1571\,C_1(\pi t)}{T}\right.$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{6.274}{T} - \pi\right)\sin(\pi t) + \frac{0.1571}{T}e^{-\frac{0.3142t}{T}}C_1\left(\frac{6.274t}{T}\right)$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2}e^{-\frac{0.3142t}{T}}\left(\frac{6.274}{T} - \pi\right)\sin\left(\frac{6.274t}{T}\right)\right]\right] \times 12.868$$

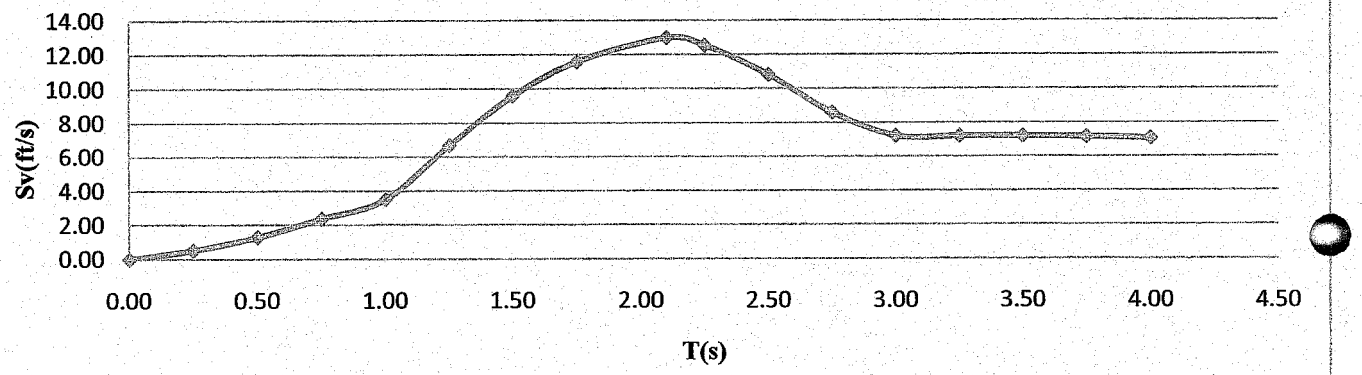
برای $\xi = 10\%$ داریم:

$$C = \frac{0.394}{100T^2} + \left(\frac{6.283}{T} + \pi\right)^2 \qquad D = \frac{0.394}{100T^2} + \left(\frac{6.283}{T} - \pi\right)^2$$

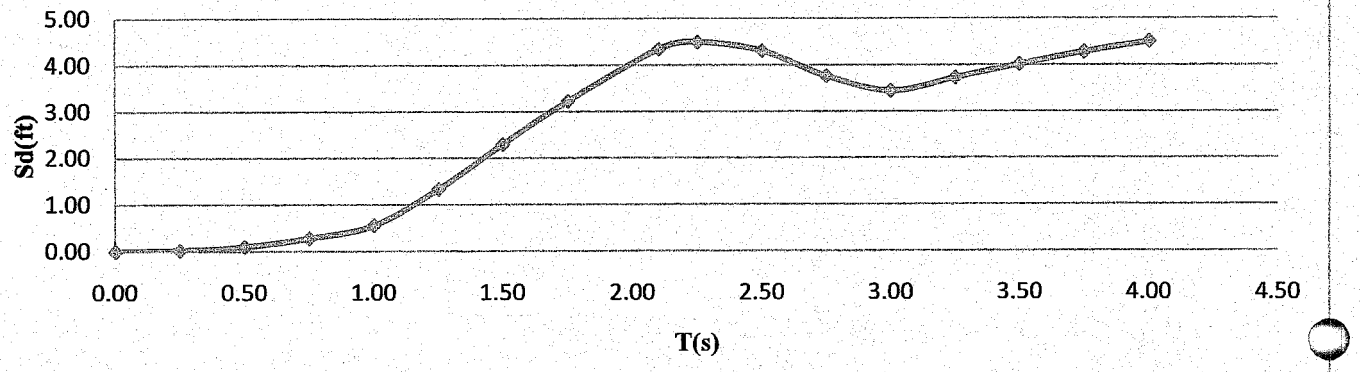
$$V(t) = \left[\frac{1}{C}\left[\frac{+0.314\,C_1(\pi t)}{10T} + \frac{1}{2}\left(\frac{6.283}{T} + \pi\right)\sin(\pi t) - \frac{0.314}{10T}e^{-0.628\frac{t}{10T}}C_1\left(\frac{6.283t}{T}\right)\right.\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}e^{-0.628\frac{t}{10T}}\left(\frac{6.283}{T} + \pi\right)\sin\left(\frac{6.283t}{T}\right)\right] + \frac{1}{D}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{6.283}{T} - \pi\right)\sin(\pi t)\right.$$
$$+ \frac{0.314}{10T}e^{-0.628\frac{t}{10T}}C_1\left(\frac{6.283t}{T}\right) - \frac{1}{2}e^{-0.628\frac{t}{10T}}\left(\frac{6.283}{T} - \pi\right)\sin\left(\frac{6.283t}{T}\right)$$
$$\left.\left. - \frac{0.314\,C_1(\pi t)}{10T}\right]\right] 12.868$$

ζ=0																	
T	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.10	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
S_v	0.00	0.53	1.30	2.37	3.51	6.70	9.59	11.59	12.99	12.54	10.82	8.61	7.22	7.21	7.21	7.17	7.08
S_d	0.00	0.02	0.10	0.28	0.56	1.33	2.29	3.23	4.34	4.49	4.31	3.77	3.45	3.73	4.01	4.28	4.50
S_a	12.87	13.39	16.32	19.84	22.04	33.67	40.19	41.61	38.85	35.03	27.20	19.66	15.13	13.94	12.94	12.01	11.11

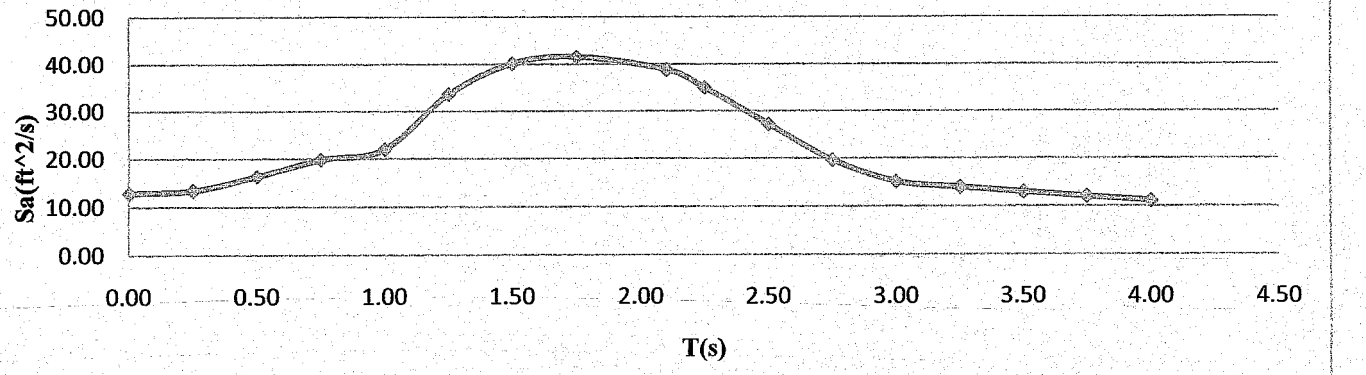
طیف سرعت (ζ=0)



طیف تغییر مکان (ζ=0)

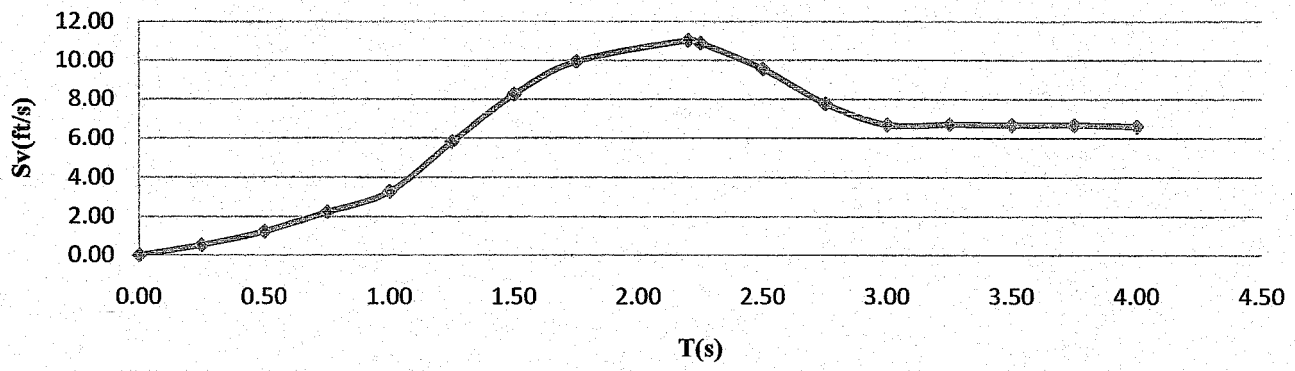


طیف شتاب (ζ=0)

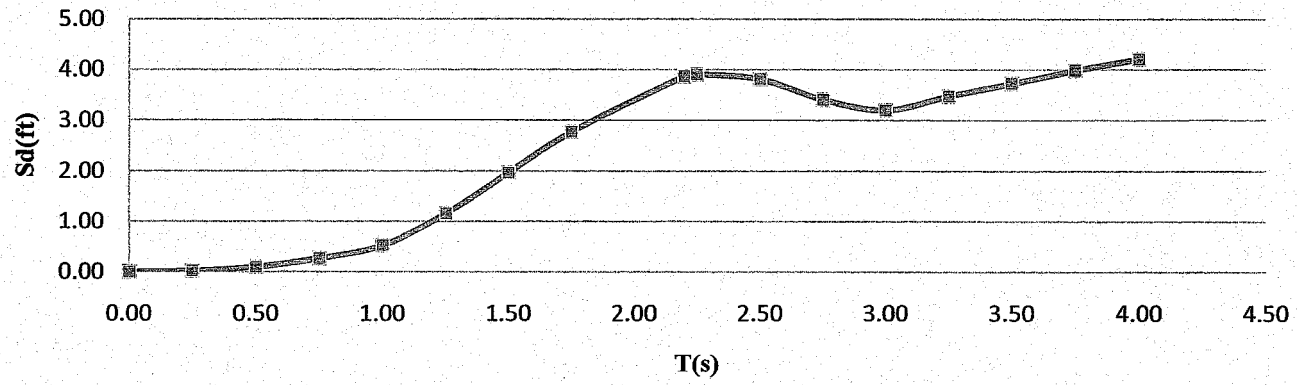


ζ=0.05																	
T	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.20	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
S_v	0.00	0.52	1.24	2.23	3.29	5.83	8.26	9.96	11.05	10.90	9.58	7.78	6.70	6.72	6.68	6.68	6.62
S_d	0.00	0.02	0.10	0.27	0.52	1.16	1.97	2.78	3.87	3.90	3.81	3.41	3.20	3.48	3.72	3.99	4.21
S_a	12.85	13.16	15.53	18.69	20.65	29.31	34.59	35.78	31.57	30.44	24.07	17.78	14.03	12.99	12.00	11.19	10.39

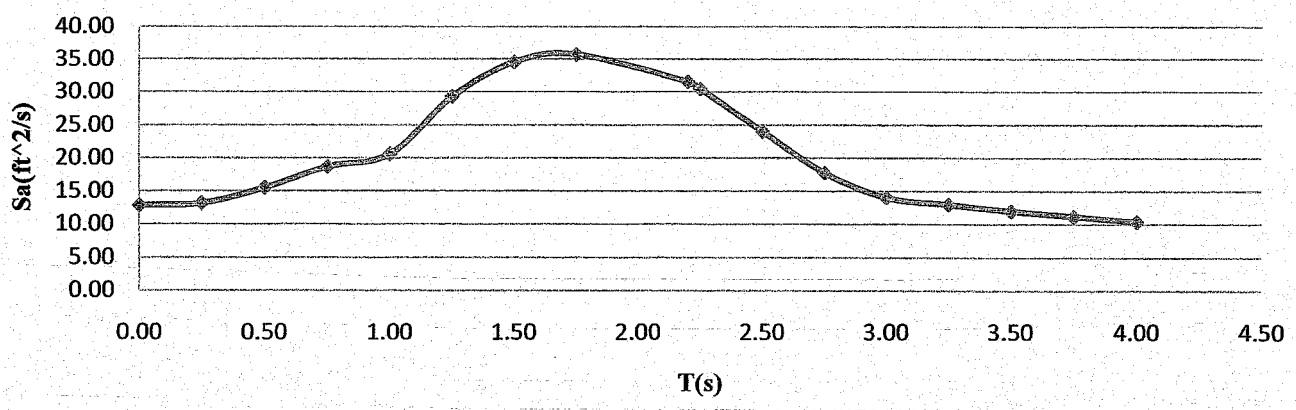
طیف سرعت (ζ=0.05)



طیف تغییر مکان(ζ=0.05)

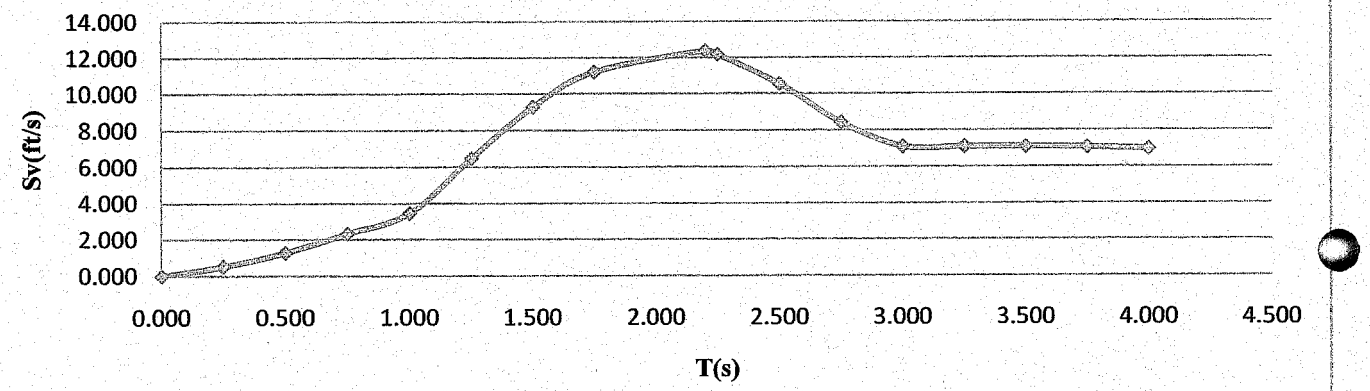


طیف شتاب (ζ=0.05)

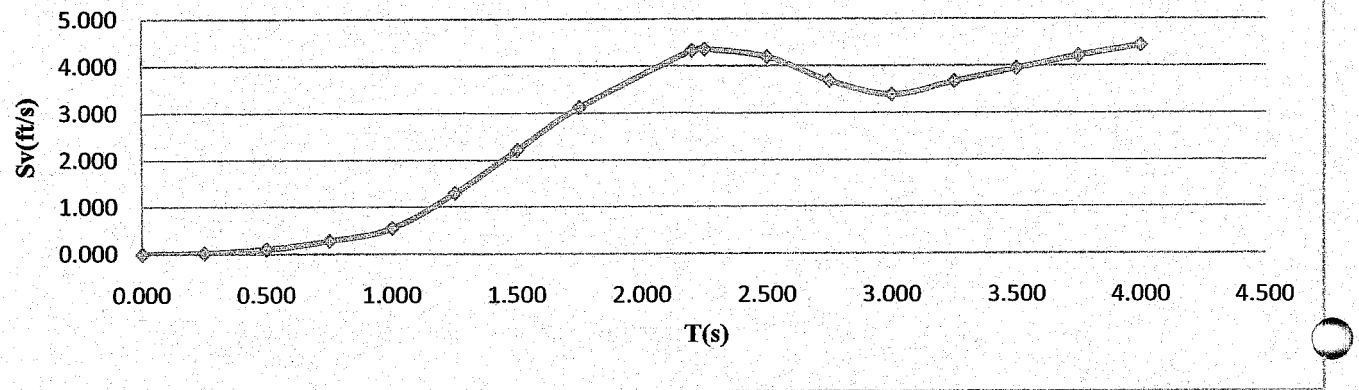


ζ=0.10																	
T	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.20	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
S_v	0.00	0.53	1.29	2.34	3.46	6.49	9.30	11.23	12.39	12.19	10.56	8.44	7.11	7.11	7.10	7.07	6.98
S_d	0.00	0.02	0.10	0.28	0.55	1.29	2.22	3.13	4.34	4.37	4.20	3.69	3.40	3.68	3.95	4.22	4.44
S_a	12.87	13.27	16.15	19.57	21.75	32.61	38.97	40.33	35.40	34.05	26.54	19.28	14.90	13.75	12.75	11.85	10.97

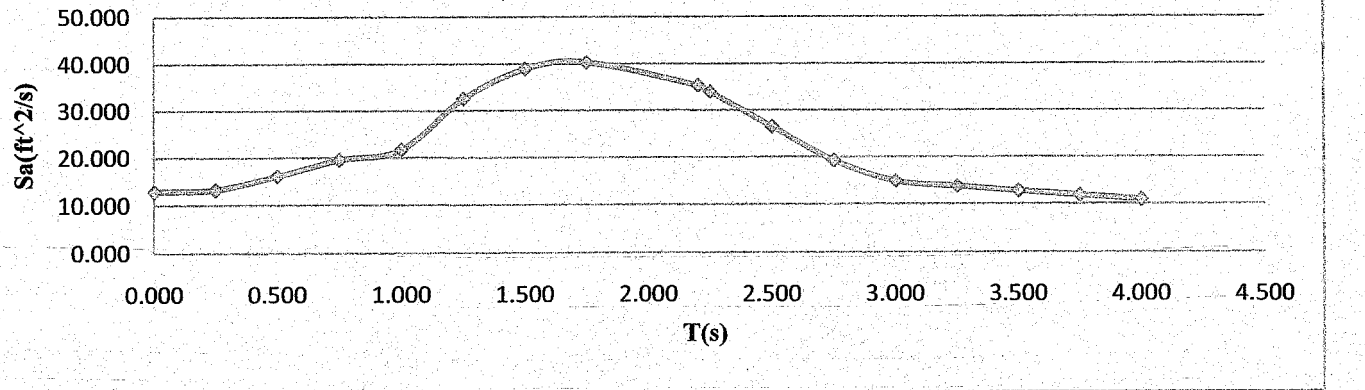
طیف سرعت (ζ=0.10)



طیف تغییر مکان (ζ=0.10)



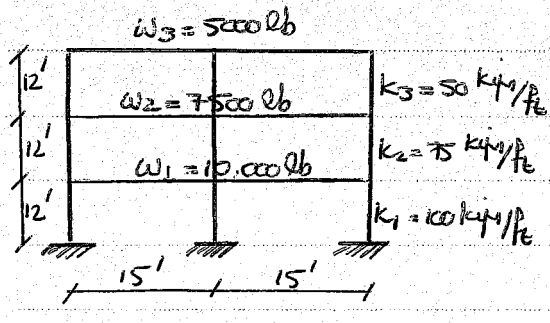
طیف شتاب (ζ=0.10)



تمرین ۱۸) قاب ۳ طبقه شکل مفروض است. مطلوبت تعیین:

۱) جرم مدل ۲) سختی مدل ۳) فرکانس پایه قاب

در صورتیکه قاب دارای نسبت استهلاک بحرانی $\xi = 2\%$ باشد و در منطقه تهران که شتاب Max زمین $0.35g$ می‌باشد قرار داشته باشد و برای طراحی آن از مقادیر زلزله توان از نمودارهای شکل "A" استفاده کرد. هم چنین مطلوبت تعیین: ۴) تغییر مکان Max ۵) برش پایه Max



$$M_1 = \frac{10000}{386.06} = 25.9\ lb\cdot s^2/in$$

$$M_2 = \frac{7500}{386.06} = 19.43\ lb\cdot s^2/in$$

$$M_3 = \frac{5000}{386.06} = 12.95\ lb\cdot s^2/in$$

$$k_1 = 100\ \frac{kip}{ft} \times \frac{10^3\ lb}{kip} \times \frac{1\ ft}{12\ in} = 8333.3\ \frac{lb}{in}$$

$$K_2 = 75 \times \frac{10^3}{12} = 6250\ lb/in$$

$$k_3 = 50 \times \frac{10^3}{12} = 4166.7\ lb/in$$

$12\ ft = 144\ in$ $\qquad$ $15\ ft = 180\ in$

$$\frac{H}{D} = \frac{3\times144}{2\times180} = 1.2 < 1.5 \Rightarrow \psi_{(x)} = \sin\frac{\pi x}{2H} = \sin\frac{\pi x}{864}$$

تراز	$k\ (\frac{lb}{in})$	جرم $M\ (lb\cdot s^2/in)$	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$k\Delta\psi_i^2$
3		12.56	1		12.56	
2	4166.7	19.43	0.866	0.134	14.57	74.817
1	6250	25.9	0.5	0.366	6.475	837.225
0	8333.3			0.5		2083.333
Σ					$M^* = 33.605$	$k^* = 2995.375$

$$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{2995.375}{33.605}} = 9.44 \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.666\ s$$

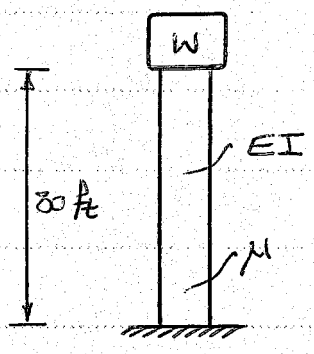
$$S_d = \frac{0.35}{0.2} \times 1.4 = 2.45\ in \qquad Q_{Max} = \frac{\bar{K}^2}{M^*} S_a$$

$$\bar{K} = \Sigma m_i \psi_i = 42.73\ lb/in \qquad S_a = 0.3 \times \frac{0.35}{0.2} g = 0.525g$$

$$Q_{Max} = \frac{42.73^2}{33.605} \times 0.525g = 11012.2\ lb$$ برش

حمید کاظم ۸۴۲۴۰۴۱

تمرین ۱۹) برج مخابرات شهری بصورت شکل مقابل مدل شده است. درصورتیکه $W = 100\ kips$ وزن پایه برابر $150kips$ و صلبیت خمشی $EI = 9.1\times10^8\ lb.in^2$ باشد، مطلوبست تعیین جرم معادل، سختی معادل و فرکانس پایه برج.



هم چنین تعیین کنید مقدار Max تغییرمکان، شدت نیروی برشی و برش پایه Max درصورتیکه این برج در منطقه ای قرار داشته که شتاب Max آن $0.35g$ باشد و نوع خاک $S = 1$ و $MLG = 150kips$ از نمودارهای شکل A برای خواص آن استفاده کرد.

$$M = \frac{100\times10^3}{32.17} = 3108.5\ lb\ جرم \qquad \mu = \frac{150\times10^3}{80\times32.17} = 58.28\ \frac{lb\ جرم}{ft}$$

$$\phi_{(x)} = 1 - C_1\frac{\pi x}{160}$$

$$M^* = \int_0^{80} 58.28\left(1 - C_1\frac{\pi x}{160}\right)^2 + 3108.5 = 4165.7\ lb\ جرم$$

$$K^* = \int_0^{80} 9.1\times10^8\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\left(\frac{\pi}{160}\right)^2 C_1\frac{\pi x}{160}\right)^2 dx = 37.57\ \frac{lb\ نیرو}{ft}$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{37.57}{4165.7}} = 0.095 \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 66$$

تمرین ۱۷ :
قسمت ب)

$$\ddot{x}_g(\tau) = \begin{cases} g/2 & 0 < \tau \leq 0.5 \\ -g\tau + g & 0.5 < \tau \leq 1 \\ 0 & \tau > 1 \end{cases}$$

: $0 < t \leq 0.5$

$$V(t) = \int_0^t 16.085\, e^{-\xi(\frac{2\pi}{T})(t-\tau)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\xi^2}(t-\tau)\right) d\tau$$

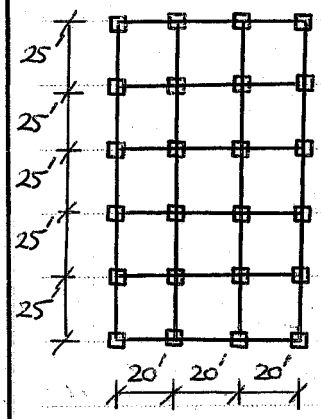
: $0.5 < t \leq 1$

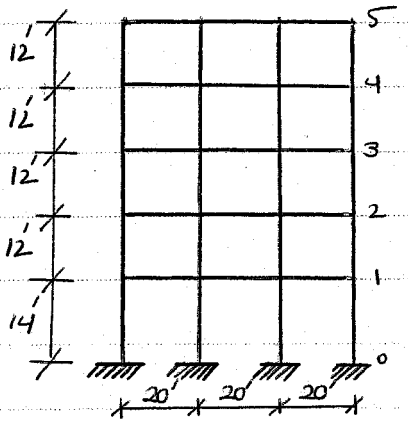
$$V(t) = \int_0^{0.5} 16.085\, e^{-\xi(\frac{2\pi}{T})(t-\tau)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\xi^2}(t-\tau)\right) d\tau + \int_{0.5}^t (-32.17\tau + 32.17) \times$$

$$e^{-\xi(\frac{2\pi}{T})(t-\tau)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\xi^2}(t-\tau)\right) d\tau$$

تمرین ۲۰) ساختمان ۵ طبقه شکل زیر مفروض است. در صورتیکه ابعاد مقاطع کلیه ستون ها یکسان و برابر $16\times16\ in^2$ باشد، مدول الاستیسیته بتن به صورت $E=3.6\times10^6\ psi$، شدت بار مرده در طبقات $90\ lb/ft^2$ و در بام $60\ lb/ft^2$ و هم چنین شدت بار زنده در طبقات $70\ lb/ft^2$ و در بام $30\ lb/ft^2$ در نظر گرفته شود، مطلوبست تعیین جرم معادل، سختی معادل برای سه حالت.

الف) $\psi_a(x)=\sin\frac{\pi x}{2L}$ ب) $\psi_b(x)=\frac{x}{L}$ ج) $\psi_c(x)=1-C_1\frac{\pi x}{2L}$





* مشارکت بار زنده در طبقات 35٪ و در بام 65٪ می باشد.

وزنی $E=3.6\times10^6\ \frac{lb}{in^2}$

$I=\frac{16^4}{12}=5461.33\ in^4$ هر ستون $k_a=\frac{12EI}{L^3}$

طبقه $k_{story}=\sum_1^4 k_i=4k_a$

$k_{1-2}=k_{2-3}=k_{3-4}=k_{4-5}=4\times\frac{12\times3.6\times10^6\times5461.33}{(12\times12)^3}=316049.2\ \frac{lb}{in}$ وزنی

$k_{0-1}=4\times\frac{12\times3.6\times10^6\times5461.33}{(14\times12)^3}=199028.1\ lb/in$

جرم $M=\frac{A}{g}(DL+0.35LL)=\frac{25\times60}{386.06}(90+0.35(70))=444.88\ lb$ طبقه ۱ صربی

جرم $M=\frac{A}{g}(DL+0.65LL)=\frac{25\times60}{386.06}(60+0.65(30))=308.89\ lb$ عقب در بام صربی

$A\rightarrow$ سطح بارگیر قاب میانی

الف) $\psi_a(x)=\sin\frac{\pi x}{2L}$

$\Rightarrow \psi_a(x)=\sin\frac{\pi}{2\times62}x=\sin\frac{\pi}{124}x$

تراز	$k\left(\frac{lb}{in}\right)$	$M(lb)$	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$k\Delta\psi_i^2$
5		308.89	1		308.89	
4	316049.2	444.88	0.954	0.046	404.89	668.76
3	316049.2	444.88	0.821	0.133	299.88	5590.59
2	316049.2	444.88	0.612	0.209	166.63	13805.35
1	316049.2	444.88	0.347	0.265	53.57	22194.56
0	199028.1		0	0.347		23964.77
Σ					$M^* = 1233.86$	$K^* = 66224.03$

$$\Rightarrow \omega_a = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{66224.03}{1233.86}} = 7.326 \frac{rad}{s} \rightarrow T_a = 0.858\ s$$

ب) $\psi_b(x) = \frac{x}{L}$

تراز	$k\left(\frac{lb}{in}\right)$	$M(lb)$	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$k\Delta\psi_i^2$
5		308.89	1		308.89	
4	316049.2	444.88	0.806	0.194	289.01	11894.83
3	316049.2	444.88	0.613	0.193	167.17	11772.52
2	316049.2	444.88	0.419	0.194	78.1	11894.83
1	316049.2	444.88	0.226	0.193	22.72	11772.52
0	199028.1		0	0.226		10165.56
Σ					$M^* = 865.89$	$K^* = 57500.26$

$$\Rightarrow \omega_b = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{57500.26}{865.89}} = 8.149 \frac{rad}{s} \rightarrow T_b = 0.771\ s$$

ج) $\psi_c(x) = 1 - C_1 \frac{\pi x}{2L}$

$$\Rightarrow \psi_c(x) = 1 - C_1 \frac{\pi}{2\times 62} x = 1 - C_1 \frac{\pi}{124} x$$

تراز	$K(\frac{lb}{in})$	$M(lb)$	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$K\Delta\psi_i^2$
5		308.89	1		308.89	
4	316049.2	444.88	0.701	0.299	218.61	28255.11
3	316049.2	444.88	0.429	0.272	81.88	23382.58
2	316049.2	444.88	0.209	0.22	19.43	15296.78
1	316049.2	444.88	0.062	0.147	1.71	6829.51
0	199028.1		0	0.062		765.06
Σ					$M^* = 630.52$	$K^* = 74529.04$

$$\rightarrow W_c = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{74529.04}{630.52}} = 10.87 \rightarrow T = 0.578$$

بنابراین تابع شکل $\sin\frac{\pi x}{2L}$ به این علت در فرکانس طبیعی کمتری دخیل نیست است.

تمرین ۲۱) درصورتیکه در تمرین 20 توان فرض نمود که برای طراحی سازه می توان از دیاگرام طیفی شکل A با شتاب Max $0.35g$ استفاده کرد، مطلوبست تعیین Max تغییرمکان، Max برش پایه، Max نیروی جانبی هر تراز طبقات از سوی نیروی زلزله.

(فرض $\xi = 10\%$)

الف) $\psi_a(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$

$M^* = 1233.86\ lb$

$\bar{K} = \sum M_i\psi_i = 308.89 + 444.88(0.954 + 0.821 + 0.612 + 0.347) = 1525.2\ lb$

$T = 0.858$, $\xi = 10\% \rightarrow S_d = 1.7\ in$ $\quad S_v = 7.6\ \frac{in}{Sec}$ $\quad S_a = 0.14g\ \frac{in}{Sec^2}$

۱) تغییرمکان Max

$$V(x,t) = \psi_{(x)}\ \frac{\bar{K}}{M^*}\ S_d = \frac{1525.2}{1233.86} \times 1.7\ \psi_i = 2.1\psi_i$$

$$V_{Max}(x,t) = 2.1\ in$$

۲) برش پایه Max

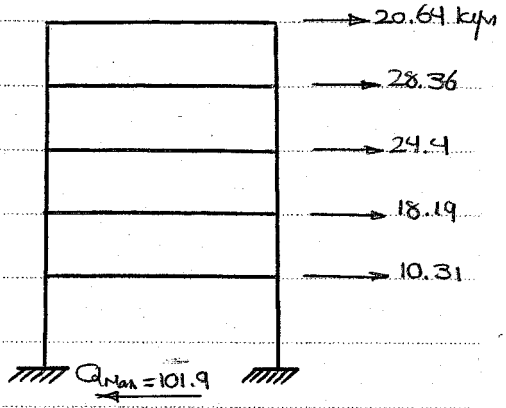
$$Q_{Max} = \frac{\bar{K}^2}{M^*} S_a = \frac{1525.2^2}{1233.86}(0.14g) = 263.95g = 101900.54\ \frac{lb.in}{Sec^2}$$

$$= 101900.54\ lb_{وزن} = 101.9\ kip$$

۳) نیروهای جانبی Max در تراز طبقات :

$$q_{i\,Max} = \frac{\bar{k}}{M^*} S_a \cdot \mu(1) \cdot \psi(1) \longrightarrow q_{i(1)} = \frac{\bar{k}}{M^*} S_a M_i \psi_{(1)} = \frac{Q_{Max}}{\bar{k}} M_i \psi_i$$

$$\longrightarrow q_{i\,Max} = \frac{101900.54}{1525.2} M_i \psi_i = 66.81 M_i \psi_i$$



ب) $\psi_b(1) = \frac{x}{L}$

$M^* = 865.89$ lb

$\bar{k} = \sum M_i \psi_i = 308.89 + 444.88(0.806 + 0.613 + 0.419 + 0.226) = 1227.12$ lb

$T = 0.771$ s , $\xi = 10\%$ $\longrightarrow$ $S_d = 0.9$ in $\quad S_v = 7.3$ in/sec $\quad S_a = 0.15g$ in/sec^2

۱) تغییرمکان Max :

$$V(1,t) = \psi_{(1)} \frac{\bar{k}}{M^*} S_d = \frac{1227.12}{865.89} \times 0.9 \times \psi_i = 1.275 \psi_i$$

$V_{Max}(1,t) = 1.275$ in

۲) برش پایه Max :

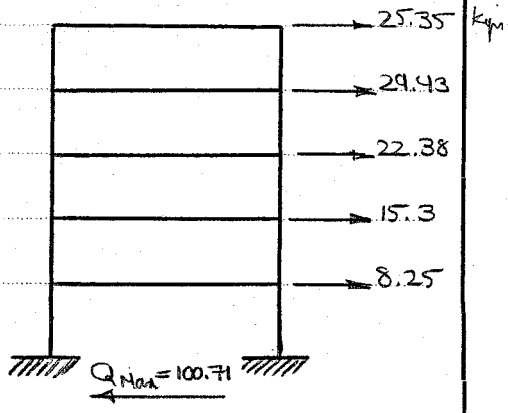
$$Q_{Max} = \frac{\bar{k}^2}{M^*} S_a = \frac{1227.12^2}{865.89} (0.15g) = 260.86 g = 100706.5 \frac{\text{lb in}}{\text{sec}^2}$$

$= 100706.5$ lb برش $= 100.71$ kip

۳) نیروهای جانبی Max در تراز طبقات :

$$q_{i\,Max} = \frac{Q_{Max}}{\bar{k}} M_i \psi_i = \frac{100706.5}{1227.12} M_i \psi_i$$

$= 82.07 M_i \cdot \psi_i$



ج) $\psi_c(x) = 1 - C_1 \frac{\pi x}{2L}$

$M^* = 630.52\ lb$

$\bar{k} = \sum M_i \psi_i = 308.89 + 444.88(0.701 + 0.429 + 0.209 + 0.062) = 932.17\ lb$

$T = 0.578 \quad \xi = 10\% \rightarrow S_J = 0.62\ in \qquad S_V = 6.7\ \frac{in}{sec} \qquad S_a = 0.185g\ \frac{in}{sec^2}$

۱) تغییرمکان Max :

$$V(x,t) = \psi(x) \cdot \frac{\bar{k}}{M^*} S_J = \frac{932.17}{630.52} \cdot 0.62\ \psi_i = 0.917\ \psi_i$$

$V_{Max}(x,t) = 0.917\ in$

۲) برش پایه Max :

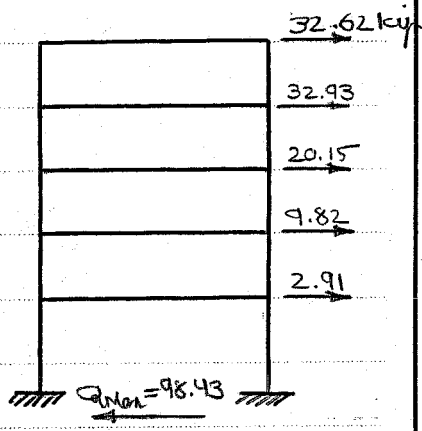
$$Q_{Max} = \frac{\bar{k}^2}{M^*} S_a = \frac{932.17^2}{630.52} (0.185g) = 254.95g = 98427.8\ \frac{lb.in}{sec^2}$$

$= 98427.8\ lb = 98.43\ kips$

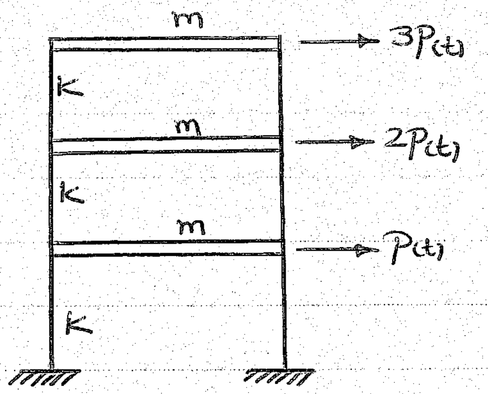
۳) نیروهای جانبی Max در تراز طبقات :

$$f_{i\,Max} = \frac{Q_{Max}}{\bar{k}} M_i \psi_i = \frac{98427.8}{932.17} M_i \psi_i$$

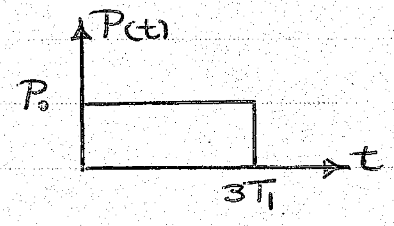
$= 105.59\ M_i \psi_i$



* در روابط ضریب $\frac{0.35}{0.2}$ فراموش شده است. تمام نیروی تغییرمکان باید در این ضریب ضرب گردند.

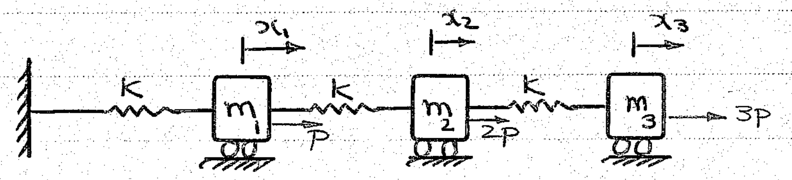


تمرین ۲۲ : ساختمان سه طبقه شکل تحت اثر نیروهای نشان داده شده در شکل قرار گرفته است. اولاً سیستم معادلات حرکت را بدست آورید، ثانیاً فرکانس ها و مودهای مدی متعلق به آن ها را محاسبه کنید.
توابع تغییر مکان را در هر یک از طبقات بدست آورید.
(T_1 پریود مد اول ساختمان می باشد).

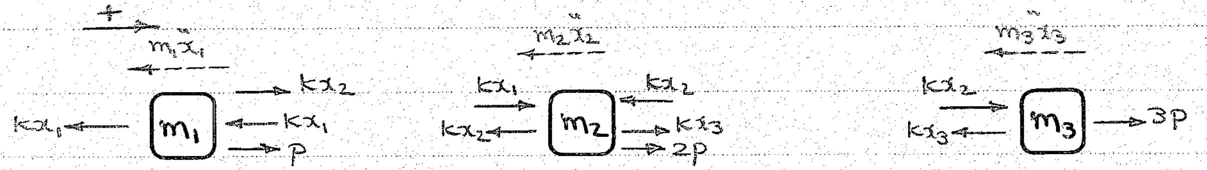


$f(\tau) = P_{(t)}$

تعیین مدل دینامیکی :



$m_1 = m_2 = m_3 = m$



$m_1 : \sum F_x = 0 \Rightarrow -m\ddot{x}_1 - 2kx_1 + kx_2 + P = 0$

$m_2 : \sum F_x = 0 \Rightarrow -m\ddot{x}_2 + kx_1 - 2kx_2 + kx_3 + 2P = 0$

$m_3 : \sum F_x = 0 \Rightarrow -m\ddot{x}_3 + kx_2 - kx_3 + 3P = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = P \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 = 2P \\ m\ddot{x}_3 - kx_2 + kx_3 = 3P \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 2P \\ 3P \end{bmatrix}$$

$$[M][\ddot{x}] + [k][x] = [F]$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 = 0 \\ m\ddot{x}_3 - kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{فرض کنید } \{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \sin\omega t$$

$$\begin{cases} (-m\omega^2 X_1 + 2kX_1 - kX_2)\sin\omega t = 0 \\ (-m\omega^2 X_2 - kX_1 + 2kX_2 - kX_3)\sin\omega t = 0 \\ (-m\omega^2 X_3 - kX_2 + kX_3)\sin\omega t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2+2k & -k & 0 \\ -k & -m\omega^2+2k & -k \\ 0 & -k & -m\omega^2+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} -m\omega^2+2k & -k & 0 \\ -k & -m\omega^2+2k & -k \\ 0 & -k & -m\omega^2+k \end{vmatrix} = 0$$

$$(-m\omega^2+2k)\left((-m\omega^2+2k)(-m\omega^2+k) - k^2\right) + (-1)(-k)\left(-k(-m\omega^2+k)\right) = 0$$

$$\Rightarrow (-m\omega^2+2k)^2(-m\omega^2+k) - k^2(-m\omega^2+2k) - k^2(-m\omega^2+k) = 0$$

$$\Rightarrow m^3\omega^6 - 5km^2\omega^4 + 6k^2m\omega^2 - k^3 = 0$$

$$\begin{cases} m\omega_1^2 = 3.25k \\ m\omega_2^2 = 1.55k \\ m\omega_3^2 = 0.198k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 1.8\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = 1.24\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_3 = 0.445\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

$$\omega = \omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -1.25 & -1 & 0 \\ -1 & -1.25 & -1 \\ 0 & -1 & -2.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \overset{(1)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.25 \\ 0.56 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0.45 & -1 & 0 \\ -1 & 0.45 & -1 \\ 0 & -1 & -0.55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \overset{(2)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.45 \\ -0.82 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1.802 & -1 & 0 \\ -1 & 1.802 & -1 \\ 0 & -1 & 0.802 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \overset{(3)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.802 \\ 2.247 \end{bmatrix}$$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \rightarrow [A]^T[M][A]\{\ddot{Y}(t)\} + [A]^T[K][A]\{Y(t)\} = [A]^T\{F(t)\}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1.25 & 0.45 & 1.802 \\ 0.56 & -0.82 & 2.247 \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = m[I]_{3\times 3}$$

$$[K] = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [F(t)] = P\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[A]^T[M][A] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \qquad [A]^T[K][A] = \begin{bmatrix} 3.25k & 0 & 0 \\ 0 & 1.55k & 0 \\ 0 & 0 & 0.198k \end{bmatrix}$$

$$[A]^T\{F(t)\} = \begin{bmatrix} 0.058P \\ -0.277P \\ 1.219P \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_2 \\ \ddot{Y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.25k & 0 & 0 \\ 0 & 1.55k & 0 \\ 0 & 0 & 0.198k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.058P \\ -0.277P \\ 1.219P \end{bmatrix}$$

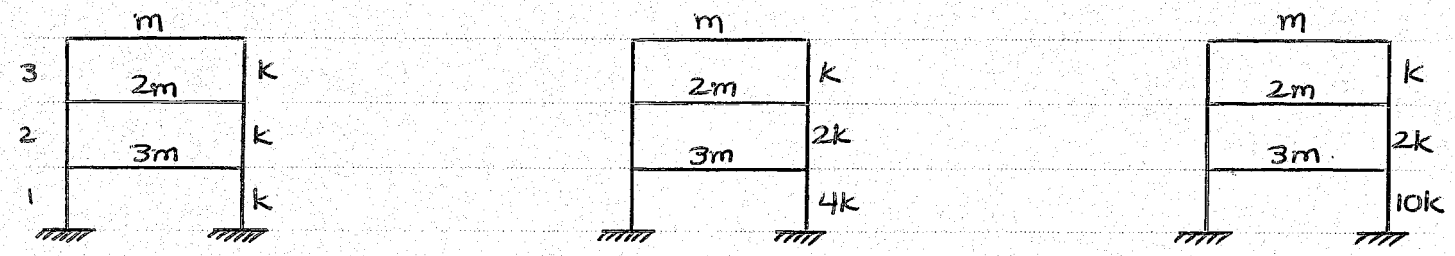
توابع تغییرمکان هرطبقه:

$$Y_1(t) = \frac{1}{1.8\sqrt{km}} \int_0^t P_0 \sin\left(1.8\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)\right) d\tau$$

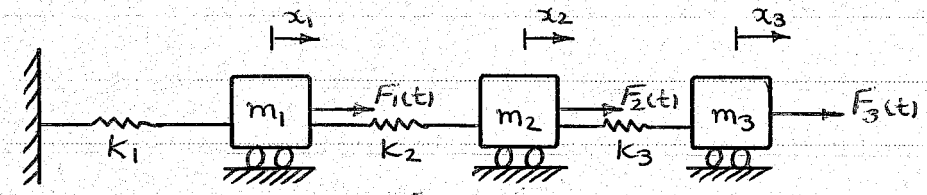
$$Y_2(t) = \frac{1}{1.24\sqrt{km}} \int_0^t 2P_0 \sin\left(1.24\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)\right) d\tau$$

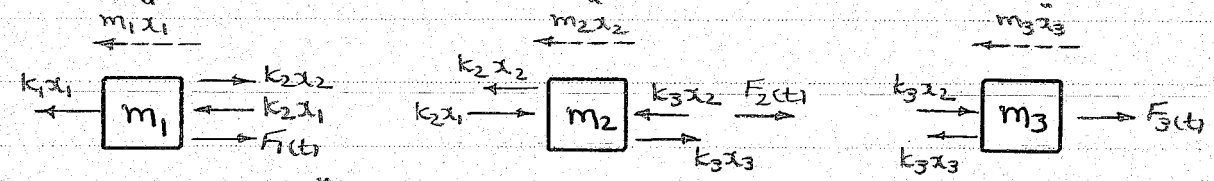
$$Y_3(t) = \frac{1}{0.445\sqrt{km}} \int_0^t 3P_0 \sin\left(0.445\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)\right) d\tau$$

تمرین ۲۳ ۸ در هریک از قاب های سه طبقه سیستم معادلات حرکت را نوشته و فرکانس های طبیعی و بردارهای مودی را بدست آورده با هم مقایسه کنید.



تعیین مدل دینامیکی (حالت کلی) ۸





m_1 ۸ $\Sigma F_x = 0 \rightarrow +m_1\ddot{x}_1 + x_1(k_1+k_2) - x_2(k_2) - F_1(t) = 0$

m_2 ۸ $\Sigma F_x = 0 \rightarrow +m_2\ddot{x}_2 + x_1(-k_2) + x_2(k_2+k_3) + x_3(-k_3) - F_2(t) = 0$

m_3 ۸ $\Sigma F_x = 0 \rightarrow +m_3\ddot{x}_3 + x_2(-k_3) + x_3(k_3) - F_3(t) = 0$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix}$$

فرض ۸ $\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \sin \omega t$

$$\begin{cases} 3m\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ 2m\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2+k_3)x_2 - k_3 x_3 = 0 \\ m\ddot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-3m\omega^2 X_1 + (k_1+k_2)X_1 - k_2 X_2)\sin\omega t = 0 \\ (-2m\omega^2 X_2 - k_2 X_1 + (k_2+k_3)X_2 - k_3 X_3)\sin\omega t = 0 \\ (-m\omega^2 X_3 - k_3 X_2 + k_3 X_3)\sin\omega t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -3m\omega^2+k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & -2m\omega^2+k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & -m\omega^2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0$$

دترمینان ماتریس ضرایب باید صفر باشد.

$$(-3m\omega^2+k_1+k_2)\left[(-2m\omega^2+k_2+k_3)(-m\omega^2+k_3)-k_3^2\right] + k_2\left(k_2(m\omega^2-k_3)\right) = 0$$

الف)

$$k_1 = k_2 = k_3 = k$$

$$\rightarrow (-3m\omega^2+2k)\left[(-2m\omega^2+2k)(-m\omega^2+k)-k^2\right] + k^2(m\omega^2-k) = 0$$

$$+6m^3\omega^6 - 16km^2\omega^4 + 10k^2m\omega^2 - k^3 = 0$$

$$\begin{cases} m\omega_1^2 = 0.123k & \omega_1 = 0.351\sqrt{\frac{k}{m}} \\ m\omega_2^2 = 0.758k & \omega_2 = 0.871\sqrt{\frac{k}{m}} \\ m\omega_3^2 = 1.786k & \omega_3 = 1.336\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

$$\omega = \omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1.631 & -1 & 0 \\ -1 & 1.754 & -1 \\ 0 & -1 & 0.877 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(1)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.631 \\ 1.86 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} -0.274 & -1 & 0 \\ -1 & 0.484 & -1 \\ 0 & -1 & 0.242 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(2)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.274 \\ -1.132 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 \rightarrow \begin{bmatrix} -3.358 & -1 & 0 \\ -1 & -1.572 & -1 \\ 0 & -1 & -0.786 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(3)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3.358 \\ 4.272 \end{bmatrix}$$

(ب

$k_1 = 4k \qquad k_2 = 2k \qquad k_3 = k$

$$(-3m\omega^2 + 6k)\left[(-2m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k) - k^2\right] + 4k^2(m\omega^2 - k) = 0$$

$$6m^3\omega^6 - 27km^2\omega^4 + 32k^2m\omega^2 - 8k^3 = 0$$

$$\begin{cases} m\omega_1^2 = 0.34k \\ m\omega_2^2 = 1.441k \\ m\omega_3^2 = 2.719k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0.583\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = 1.2\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_3 = 1.649\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

$$\omega = \omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 4.98 & -2 & 0 \\ -2 & 2.32 & -1 \\ 0 & -1 & 0.66 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \overset{(1)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.49 \\ 3.773 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1.697 & -2 & 0 \\ -2 & 0.118 & -1 \\ 0 & -1 & -0.441 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \overset{(2)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.839 \\ -1.901 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 \rightarrow \begin{bmatrix} -2.157 & -2 & 0 \\ -2 & -2.438 & -1 \\ 0 & -1 & -1.719 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \overset{(3)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.079 \\ 0.627 \end{bmatrix}$$

(ج

$k_1 = 10k \qquad k_2 = 2k \qquad k_3 = k$

$$(-3m\omega^2 + 12k)\left[(-2m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k) - k^2\right] + 4k^2(m\omega^2 - k) = 0$$

$$6m^3\omega^6 - 39km^2\omega^4 + 62k^2m\omega^2 - 20k^3 = 0$$

$$\begin{cases} m\omega_1^2 = 0.432k \\ m\omega_2^2 = 1.812k \\ m\omega_3^2 = 4.256k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0.657\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = 1.346\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_3 = 2.063\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

$$\omega = \omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 10.704 & -2 & 0 \\ -2 & 2.136 & -1 \\ 0 & -1 & 0.568 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(1)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5.352 \\ 9.422 \end{bmatrix}$$

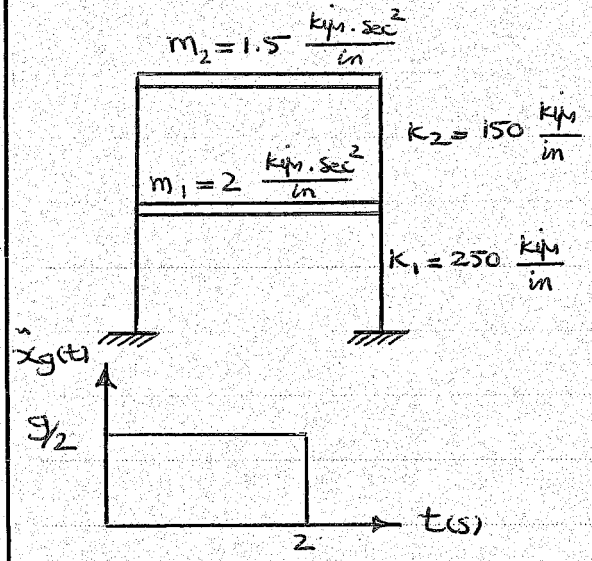
$$w = w_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 6.564 & -2 & 0 \\ -2 & -0.624 & -1 \\ 0 & -1 & -0.812 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(2)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3.282 \\ -4.042 \end{bmatrix}$$

$$w = w_3 \longrightarrow \begin{bmatrix} -0.765 & -2 & 0 \\ -2 & -5.512 & -1 \\ 0 & -1 & -3.256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \overset{(3)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.38 \\ 0.117 \end{bmatrix}$$

تمرین ۲۴: قاب دوطبقه شکل تحت اثر شتاب زمین بصورت دیاگرام ذوزنقه‌ای داده شده می‌باشد.

مطلوبست تعیین:

۱) فرکانس‌ها
۲) مودها
۳) جابجایی نسبی
۴) بردار تغییر مکان درجه دوم
۵) بردار تغییر مکان کل
۶) بردار نیروی الاستیک درجه دوم
۷) بردار نیروی الاستیک کل
۸) برش پایه
۹) ممان واژگونی
۱۰) رسم تغییر مکان طبقات



حل:

۱) فرکانس‌ها:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

فرض: $\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin \omega t$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2)(-\omega^2 m_2 + k_2) - k_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow (-2\omega^2 + 400)(-1.5\omega^2 + 150) - 150^2 = 0 \rightarrow 3(\omega^2)^2 - 900\omega^2 + 37500 = 0$$

$$\begin{cases} \omega_1^2 = 50 \rightarrow \omega_1 = 7.071 \ rad/s \rightarrow T_1 = 0.89\,s \\ \omega_2^2 = 250 \rightarrow \omega_2 = 15.811 \ rad/s \rightarrow T_2 = 0.4\,s \end{cases}$$

۲) مودها:

$$\omega = \omega_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 300 & -150 \\ -150 & 75 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0 \rightarrow \overset{(1)}{X} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -100 & -150 \\ -150 & -225 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0 \rightarrow \overset{(2)}{X} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{Bmatrix}$$

۳) جرم های مودی:

$$M_k = \bar{X}_k^T [m] \bar{X}_k$$

$$M_1 = \bar{X}_1^T [m] \bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 8 \ \frac{kip.sec^2}{in}$$

$$M_2 = \bar{X}_2^T [m] \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2.67 \ \frac{kip.sec^2}{in}$$

۴) بردار تغییر مکان هر مود:

$$\{x_k(t)\} = \bar{X}_k \cdot \frac{\bar{k}_k}{M_k \omega_k} V_k(t)$$

الف) بردار تغییر مکان مود اول: $(k=1)$

$$V_1(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin \omega_1 (t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{g}{2} \sin(7.071(t-\tau)) d\tau$$

$$= -27.3 \cos(7.071t) + 27.3$$

$$\bar{k}_1 = \bar{X}_1^T [m][I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 5$$

$$\{x_1(t)\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} 5 \times \frac{1}{8 \times 7.071} (-27.3 \cos(7.071t) + 27.3)$$

$$\{x_1(t)\} = \begin{bmatrix} -2.41 \cos(7.071t) + 2.41 \\ -4.825 \cos(7.071t) + 4.825 \end{bmatrix}$$

ب) بردار تغییر مکان مود دوم: $(k=2)$

$$V_2(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin \omega_2 (t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{g}{2} \sin(15.811(t-\tau)) d\tau$$

$$= -12.21 \cos(15.811t) + 12.21$$

$$\bar{k}_2 = \bar{X}_2^T [m][I] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 1$$

$$\{x_2(t)\} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} 1 \times \frac{1}{2.66 \times 15.811} (-12.21 \cos(15.811t) + 12.21)$$

$$\{x_2(t)\} = \begin{bmatrix} -0.29 \cos(15.811t) + 0.29 \\ +0.194 \cos(15.811t) - 0.194 \end{bmatrix}$$

۵) بردار تغییر مکان کل :

$$\{x(t)\} = X_1 Y_1(t) + X_2 Y_2(t) = \{x_1(t)\} + \{x_2(t)\}$$

$$\Rightarrow \{x(t)\} = \begin{bmatrix} -2.41\, C_1(7.071t) - 0.29\, C_1(15.811t) + 2.7 \\ -4.825\, C_1(7.071t) + 0.194\, C_1(15.811t) + 4.631 \end{bmatrix}$$

تغییر مکان طبقه اول ←

تغییر مکان طبقه دوم ←

۶) بردار نیروهای الاستیک در هر مود :

$$\{f_{Sk}^p\} = [m]\, X_k \cdot \frac{\bar{K}_k}{M_k}\, \omega_k \cdot V_k(t)$$

الف) بردار نیروی الاستیک مود اول :

$$\{f_{S_1}^p\} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{5}{8}\, 7.071\, (-27.3\, C_1(7.071t) + 27.3)$$

$$= \begin{bmatrix} -241.3\, C_1(7.071t) + 241.3 \\ -361.95\, C_1(7.071t) + 361.95 \end{bmatrix}$$

ب) بردار نیروی الاستیک مود دوم :

$$\{f_{S_2}^p\} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} \frac{1}{2.67}\, 15.811\, (-12.21\, C_1(15.811t) + 12.21)$$

$$= \begin{bmatrix} -144.61\, C_1(15.811t) + 144.61 \\ 72.304\, C_1(15.811t) - 72.304 \end{bmatrix}$$

۷) بردار نیروی الاستیک کل :

$$\{f_S\} = \{f_{S_1}^p\} + \{f_{S_2}^p\} = \begin{bmatrix} -241.3\, C_1(7.071t) - 144.61\, C_1(15.811t) + 385.91 \\ -361.95\, C_1(7.071t) + 72.3\, C_1(15.811t) + 289.65 \end{bmatrix}$$

۸) برش پایه :

$$Q(t) = \sum \frac{\bar{K}_k^2}{M_k}\, \omega_k\, V_k(t)$$

$$Q(t) = \frac{5^2}{8} \times 7.071\, (-27.3\, C_1(7.071t) + 27.3) + \frac{1^2}{2.67} \times 15.811\, (-12.21\, C_1(15.811) + 12.21) = -603.24\, C_1(7.071t) - 72.39\, C_1(15.811) + 675.55$$

۹) ممان واژگونی :

با فرض ارتفاع هر طبقه 3m نتیجه 118.11 in

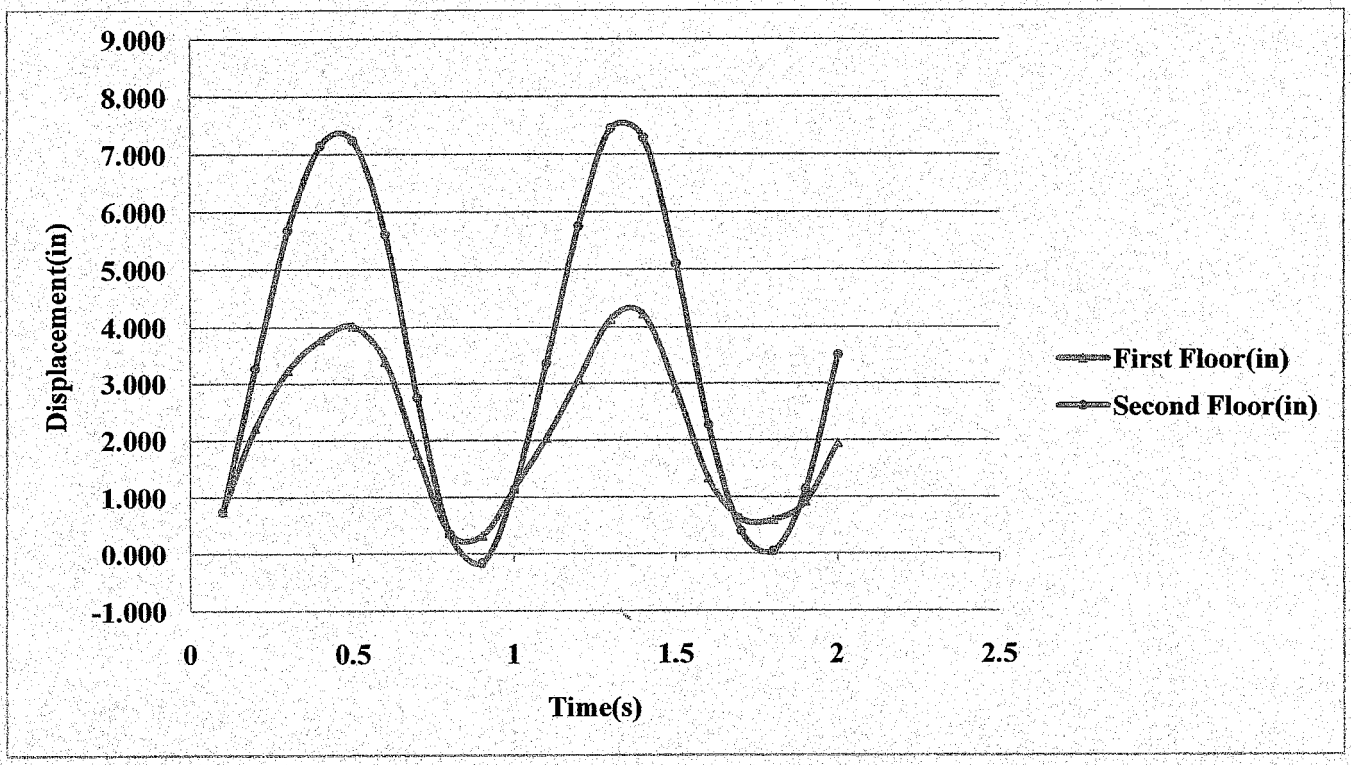
$$M(t) = \sum h_k \cdot f_{sk}(t) = [h]\{f_s(t)\}$$

$$= \begin{bmatrix} 118.11 & 236.22 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -241.3\,C_1(7.071t) - 144.61\,C_1(15.811t) + 385.91 \\ -361.95\,C_1(7.071t) + 72.3\,C_1(15.811t) + 289.65 \end{bmatrix}$$

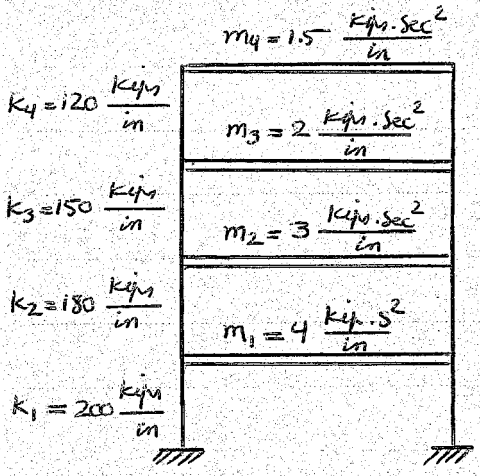
$$= -113999.77\,C_1(7.071t) - 1.18\,C_1(15.811t) + 114000.95 \ \text{kip.in}$$

۱۰) رسم تغییرمکان طبقات:

t(s)	First Floor(in)	Second Floor(in)
0.1	0.756	0.737
0.2	2.209	3.262
0.3	3.221	5.683
0.4	3.766	7.148
0.5	4.017	7.244
0.6	3.383	5.611
0.7	1.745	2.749
0.8	0.367	0.349
0.9	0.323	-0.159
1	1.147	1.140
1.1	2.041	3.355
1.2	3.071	5.755
1.3	4.137	7.452
1.4	4.224	7.295
1.5	2.907	5.104
1.6	1.330	2.272
1.7	0.621	0.404
1.8	0.600	0.051
1.9	0.917	1.139
2	1.945	3.499



تمرین ۸.۲۵ ساختمان چهار طبقه شکل مقابل مفروض است. اولاً فرکانس ها و شکل مودهای متناظر با آن را محاسبه کنید. ثانیاً جرم لهای مودی و ضرایب تحریک زلزله را بدست آورید. ثالثاً در صورتیکه این ساختمان تحت اثر زلزله ای قرار گیرد که طیف شتاب آن بصورت زیر باشد مطلوبست تعیین:



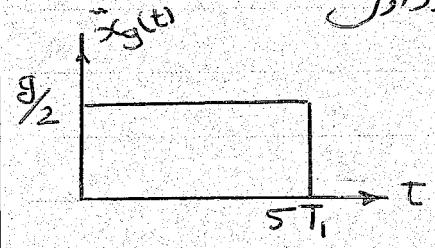
($\xi = 0$)

الف) تاریخ تغییر مکان در هریک از طبقات

ب) مقدار Max تغییر مکان در مود اول

ج) بردارهای حداکثر برای هریک از مودها و برای ترکیب آنها (برای هر ترکیب مودی)

د) تاریخ برش پایه برای هریک از مودها و مقدار Max برش پایه در مود اول



فرکانس ها:

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & -m_3\omega^2 + k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & -m_4\omega^2 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4\omega^2 + 380 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & -3\omega^2 + 330 & -150 & 0 \\ 0 & -150 & -2\omega^2 + 270 & -120 \\ 0 & 0 & -120 & -1.5\omega^2 + 120 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 36(\omega^2)^4 - 15120(\omega^2)^3 + 1946700(\omega^2)^2 - 80640000\omega^2 + 648 \times 10^6 = 0$$

$\omega_1^2 = 10.47 \rightarrow \omega_1 = 3.236 \ rad/s \rightarrow T_1 = 1.94\ s$

$\omega_2^2 = 59.12 \rightarrow \omega_2 = 7.689 \ rad/s \rightarrow T_2 = 0.82\ s$

$\omega_3^2 = 134.88 \rightarrow \omega_3 = 11.614 \ rad/s \rightarrow T_3 = 0.54\ s$

$\omega_4^2 = 215.53 \rightarrow \omega_4 = 14.681 \ rad/s \rightarrow T_4 = 0.43\ s$

مودها:

$$\omega = \omega_1 = 3.236 \rightarrow \begin{bmatrix} 338.11 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & 298.58 & -150 & 0 \\ 0 & -150 & 249.06 & -120 \\ 0 & 0 & -120 & 104.29 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = 0 \qquad X_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.878 \\ 2.538 \\ 2.92 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 = 7.689 \rightarrow \begin{bmatrix} +143.52 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & 152.64 & -150 & 0 \\ 0 & -150 & 151.76 & -120 \\ 0 & 0 & -120 & 31.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = 0 \qquad X_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ +0.797 \\ -0.389 \\ -1.49 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 = 11.614 \rightarrow \begin{bmatrix} -159.54 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & -74.65 & -150 & 0 \\ 0 & -150 & 0.23 & -120 \\ 0 & 0 & -120 & -82.33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = 0 \qquad X_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.886 \\ -0.759 \\ 1.106 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_4 = 14.681 \rightarrow \begin{bmatrix} -482.13 & -180 & 0 & 0 \\ -180 & -316.6 & -150 & 0 \\ 0 & -150 & -161.06 & -120 \\ 0 & 0 & -120 & -203.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = 0 \qquad X_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.679 \\ 4.454 \\ -2.629 \end{Bmatrix}$$

$$M_k = X_k^T [m] X_k$$

جرم‌های مودی:

$M_1 = 40.253$ $M_2 = 9.538$ $M_3 = 9.342$ $M_4 = 75.575$

ضرایب تحریک زلزله:

$$\bar{k}_k = \bar{X}_k^T [m] [I]$$

$k_1 = 19.09$ $k_2 = 3.378$ $k_3 = 1.483$ $k_4 = 0.928$

الف) تابع تغییرمکان در حرضبقه:

$$\{x_k(t)\} = \bar{X}_k \cdot \frac{\bar{k}_k}{M_k \omega_k} V_k(t)$$

الف-۱) بردار تغییرمکان مود اول:

$$V_1(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin \omega_1 (t-\tau) d\tau = \int_0^t g/2 \sin(3.236(t-\tau)) d\tau$$

$$= 59.65 (-C_1(3.236t) + 1)$$

$$\Rightarrow \{x_1(t)\} = \begin{bmatrix} 8.742 \\ 16.417 \\ 22.187 \\ 25.527 \end{bmatrix} (-C_1(3.236t)+1)$$

الف-۲) بردار تغییرمکان مود دوم:

$$V_2(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin \omega_2 (t-\tau) d\tau = \int_0^t g/2 \sin(7.689(t-\tau)) d\tau$$

$$= 25.1 (-C_1(7.689t)+1)$$

$$\Rightarrow \{x_2(t)\} = \begin{bmatrix} 1.156 \\ 0.921 \\ -0.45 \\ -1.723 \end{bmatrix} (-C_1(7.689t)+1)$$

الف-۳) بردار تغییرمکان مود سوم:

$$V_3(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin \omega_3 (t-\tau) d\tau = \int_0^t g/2 \sin(11.614(t-\tau)) d\tau$$

$$= +16.62 (-C_1(11.614t)+1)$$

$$\Rightarrow \{x_3(t)\} = \begin{bmatrix} 0.227 \\ -0.201 \\ -0.172 \\ 0.251 \end{bmatrix} (-C_1(11.614t)+1)$$

الف ـ ٤) بردار تغییرمکان مود چهارم.

$$V_4(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, \sin \omega_4 (t-\tau)\, d\tau = \int_0^t g/2 \sin(14.681(t-\tau))\, d\tau$$

$$= 13.15\,(-C_1(14.681t)+1)$$

$$\{x_4(t)\} = \begin{bmatrix} 0.011 \\ -0.029 \\ 0.049 \\ -0.029 \end{bmatrix} (-C_1(14.681t)+1)$$

ب) Max تغییرمکان در مود اول.

$$\{x_1(t)\} = \begin{bmatrix} 8.742 \\ 16.417 \\ 22.187 \\ 25.527 \end{bmatrix} (-C_1(3.236t)+1) \qquad 0 < t < 5 \times 1.94$$

$$t = 0.971 \rightarrow -C_1(3.236 \times 0.971)+1 = 2 \Rightarrow \{x_{1,Max}\} = \begin{bmatrix} 17.484 \\ 32.834 \\ 44.374 \\ 51.054 \end{bmatrix} in$$

ج) بردار نیروهای الاستیک برای هر مود و برای ترکیب آن ها.

$$\{f_{sk}\} = [m]\, X_k\, \frac{K_k}{M_k} \cdot \omega_k \cdot V_k(t)$$

ج ـ ۱) مود اول.

$$\{f_{s_1}\} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5.634 \\ 5.076 \\ 4.38 \end{bmatrix} \times \frac{19.09}{40.253} \times 3.236 \times 59.65\,(-C_1(3.236t)+1)$$

$$\Rightarrow \{f_{s_1}\} = \begin{bmatrix} 366.17 \\ 515.76 \\ 464.67 \\ 400.96 \end{bmatrix} (-C_1(3.236t)+1) \quad (kip)$$

ج-۲) مود دوم :

$$\{f_{S_2}\} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2.391 \\ -0.778 \\ -2.235 \end{bmatrix} \frac{3.378}{9.538} \times 7.689 \times 25.1 \left(-C_1(7.689t)+1\right)$$

$$\Longrightarrow \{f_{S_2}\} = \begin{bmatrix} 273.4 \\ 163.43 \\ -53.18 \\ -152.76 \end{bmatrix} \left(-C_1(7.689t)+1\right)$$

ج-۳) مود سوم :

$$\{f_{S_3}\} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2.658 \\ -1.518 \\ 1.659 \end{bmatrix} \frac{1.483}{9.342} \times 11.614 \times 16.62 \left(-C_1(11.614t)+1\right)$$

$$\Longrightarrow \{f_{S_3}\} = \begin{bmatrix} 122.57 \\ -81.45 \\ -46.51 \\ 50.83 \end{bmatrix} \left(-C_1(11.614t)+1\right)$$

ج-٤) مود چهارم :

$$\{f_{S_4}\} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8.037 \\ 8.908 \\ -3.944 \end{bmatrix} \frac{0.928}{75.575} \times 14.681 \times 13.15 \left(-C_1(14.681t)+1\right)$$

$$\Longrightarrow \{f_{S_4}\} = \begin{bmatrix} 9.48 \\ -19.05 \\ 21.12 \\ -9.35 \end{bmatrix} \left(-C_1(14.681t)+1\right)$$

ج-٥) ترکیب مودها :

$$\{f_S\} = \{f_{S_1}\} + \{f_{S_2}\} + \{f_{S_3}\} + \{f_{S_4}\}$$

$$\{f_S\} = \begin{bmatrix} -366.17C_1(3.236t) - 273.4C_1(7.689t) - 122.57C_1(11.614t) - 9.48C_1(14.681t) + 771.62 \\ -515.76C_1(3.236t) - 163.43C_1(7.689t) + 81.45C_1(11.614t) + 19.05C_1(14.681t) + 578.69 \\ 464.67C_1(3.236t) + 53.18C_1(7.689t) + 46.51C_1(11.614t) - 21.12C_1(14.681t) + 386.1 \\ -400.96C_1(3.236t) + 152.76C_1(7.689t) - 50.83C_1(11.614t) + 9.35C_1(14.681t) + 289.68 \end{bmatrix}$$

د) تابع برش پایه هر مود ـ Max برش پایه مود اول.

$$Q_{(t)} = \sum \frac{\bar{k}_k^2}{M_k} w_k V_{k(t)}$$

د-۱) مود اول:

$$Q_{1(t)} = \frac{19.09^2}{40.253} \times 3.236 \times 59.65 \left(-C_1(3.236t)+1\right)$$
$$= 1747.56 \left(-C_1(3.236)+1\right) \text{ (kips)}$$

د-۲) مود دوم:

$$Q_{2(t)} = \frac{3.378^2}{9.538} \times 7.689 \times 25.1 \left(-C_1(7.689t)+1\right)$$
$$= 230.89 \left(-C_1(7.689t)+1\right) \text{ (kips)}$$

د-۳) مود سوم:

$$Q_{3(t)} = \frac{1.488^2}{9.342} \times 11.614 \times 16.62 \left(-C_1(11.614t)+1\right)$$
$$= 45.44 \left(-C_1(11.614t)+1\right) \text{ (kips)}$$

د-۴) مود چهارم:

$$Q_{4(t)} = \frac{0.928^2}{75.575} \times 14.681 \times 13.15 \left(-C_1(14.681t)+1\right)$$
$$= 2.2 \left(-C_1(14.681t)+1\right) \text{ (kips)}$$

د-۵) Max برش پایه مود اول:

$$Q_{1,Max} = 1747.56 \times 2 = 3495.12 \text{ (kips)}$$

تمرین ۲۶ : از برای طراحی سختی بهترین 25 توان از نمودار شکل A استفاده کرد ،
لیست بحران را برای کلیه مودها با 5 درنظر گرفت ، مطلوبست تغییر θ
الف) بردار تغییر مکان Max برای حرکت از مودها و بردار تغییر مکان کل .
ب) نیروهای الاستیک در هر از طبقات و مقدار کل نیروی الاستیک
ج) برش پایه در هر مود و مقدار کل آن .

$$\omega_1 = 3.236 \ rad/s \rightarrow T_1 = 1.94\ s$$
$$\omega_2 = 7.689 \ rad/s \rightarrow T_2 = 0.82\ s$$
$$\omega_3 = 11.614 \ rad/s \rightarrow T_3 = 0.54\ s$$
$$\omega_4 = 14.681 \ rad/s \rightarrow T_4 = 0.43\ s$$

$$\Rightarrow \{S_V\} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 8.7 \\ 7.6 \end{bmatrix} \ in/s$$

الف)

$$\{x_{k,Max}\} = \overline{X}_k \frac{\overline{k}_k}{M_k \omega_k} S_{V_k}$$

$$\{x_{1,Max}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.878 \\ 2.538 \\ 2.92 \end{bmatrix} \frac{19.09}{40.253 \times 3.236} \times 12 = \begin{bmatrix} 1.759 \\ 3.303 \\ 4.463 \\ 5.135 \end{bmatrix} in$$

$$\{x_{2,Max}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.797 \\ -0.389 \\ -1.49 \end{bmatrix} \frac{3.378}{9.538 \times 7.689} \times 10 = \begin{bmatrix} 0.461 \\ 0.367 \\ -0.179 \\ -0.686 \end{bmatrix} in$$

$$\{x_{3,Max}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.866 \\ -0.759 \\ 1.106 \end{bmatrix} \frac{1.483}{9.342 \times 11.614} \times 8.7 = \begin{bmatrix} 0.119 \\ -0.103 \\ -0.09 \\ 0.132 \end{bmatrix} in$$

$$\{x_{4,Max}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.679 \\ 4.454 \\ -2.629 \end{Bmatrix} \frac{0.928}{75.575 \times 14.681} \times 7.6 = \begin{Bmatrix} 0.006 \\ -0.017 \\ 0.028 \\ -0.017 \end{Bmatrix}$$

$$\{x_{Max}\} = \begin{Bmatrix} (1.759^2 + 0.461^2 + 0.119^2 + 0.006^2)^{1/2} \\ (3.303^2 + 0.367^2 + 0.103^2 + 0.017^2)^{1/2} \\ (4.463^2 + 0.179^2 + 0.09^2 + 0.028^2)^{1/2} \\ (5.135^2 + 0.686^2 + 0.132^2 + 0.017^2)^{1/2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.822 \\ 3.325 \\ 4.466 \\ 5.182 \end{Bmatrix} (in)$$

$$\{f_{Sk}\} = [m]\, I_k \frac{\bar{k}_k}{M_k} \omega_k \cdot S_v \qquad (ب$$

$$\{f_{S_1,Max}\} = \begin{Bmatrix} 73.66 \\ 103.76 \\ 93.48 \\ 80.66 \end{Bmatrix} \qquad \{f_{S_2,Max}\} = \begin{Bmatrix} 108.96 \\ 65.13 \\ -21.19 \\ -60.88 \end{Bmatrix}$$

$$\{f_{S_3,Max}\} = \begin{Bmatrix} 64.16 \\ -42.63 \\ -24.35 \\ 26.61 \end{Bmatrix} \qquad \{f_{S_4,Max}\} = \begin{Bmatrix} 5.48 \\ -11.01 \\ 12.2 \\ -5.4 \end{Bmatrix}$$

$$\{f_{S\,Max}\} = \begin{Bmatrix} (73.66^2 + 108.96^2 + 64.16^2 + 5.48^2)^{1/2} \\ (103.76^2 + 65.13^2 + 42.63^2 + 11.01^2)^{1/2} \\ (93.48^2 + 21.19^2 + 24.35^2 + 12.2^2)^{1/2} \\ (80.66^2 + 60.88^2 + 26.61^2 + 5.4^2)^{1/2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 146.44 \\ 130.18 \\ 99.65 \\ 104.64 \end{Bmatrix} kips$$

(3)

$$Q(t) = \sum \frac{\bar{K}_k^2}{M_k} w_k V_k(t)$$

$$Q_{1\,Max}(t) = \frac{19.09^2}{40.253} \times 3.236 \times 12 = 351.56 \text{ kips}$$

$$Q_{2\,Max}(t) = \frac{3.378^2}{9.538} \times 7.689 \times 10 = 91.99 \text{ kips}$$

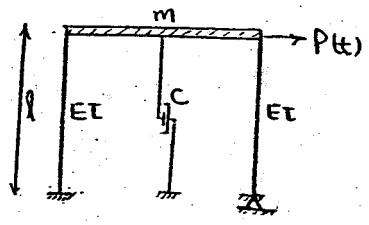
$$Q_{3\,Max}(t) = \frac{1.483^2}{9.342} \times 11.614 \times 8.7 = 23.79 \text{ kips}$$

$$Q_{4\,Max}(t) = \frac{0.928^2}{75.575} \times 14.681 \times 7.6 = 1.27 \text{ kips}$$

$$Q_{Max}(t) = (351.56^2 + 91.99^2 + 23.79^2 + 1.27^2)^{1/2} = 364.18 \text{ kips}$$

نام و نام خانوادگی ... شماره دانشجویی ۸۱۲۴۰۲۰ سری ①

- معادله حرکت تابع شکل زیر را بدست آورید. در صورتیکه نیروی $P(t)$ و نیز استهلاک مساوی صفر باشد. مطلوبست تعیین تابع تغییرمکان و اگر در لحظه صفر $x = X_0$ ، $\dot{X}_0 = 0$ باشد تابع تغییرمکان را رسم نمائید.



$$k_1 = \frac{3EI}{L^3} \qquad k_2 = \frac{12EI}{L^3}$$

$$\Rightarrow k = \frac{16EI}{L} = k_1 + k_2$$

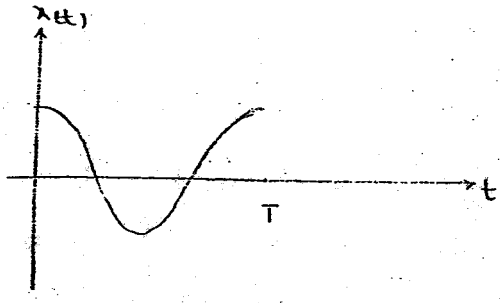
$\xi = 0$ $\quad P(t) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x(t) = X\cos(\omega_n t - \phi) \\ X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n}\right)^2} \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_n X_0}\right) \end{cases}$$

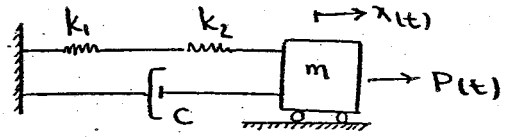
$\dot{X}_0 = 0 \quad \phi = 0$

$X_0 = x \quad X = x \Rightarrow x(t) = x\cos\omega_n t$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{16EI}{mL^3}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

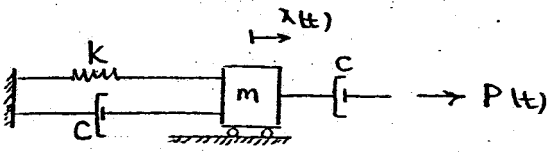


- معادله حرکت سیستم‌های زیر را بدست آورید.



$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2} \Rightarrow k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2} \quad , x=x_1+x_2$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=p(t) \Rightarrow m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)+c(\dot{x}_1+\dot{x}_2)+\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(x_1+x_2)=p(t)$$

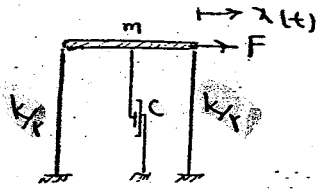


در هامحوازی $C=C_1+C_2=2C$

$$\Rightarrow m\ddot{x}+2c\dot{x}+kx=p(t)$$

مریم سلیما ۸۱۲۴۰۳۰ سری ②

- قاب نشان داده شده در شکل تحت تاثیر نیروی افقی ۱۰۰۰ kgf تغییر مکان استاتیکی ۱٫۳ cm را می‌دهد اگر نیرو یکباره برداشته شود قاب با پریود ۰٫۸ s ارتعاش کرده و بعد از ۵ سیکل کامل تغییر مکان به ۱ mm می‌رسد جرم این آزمایش مطلوبست تعیین وزن موتر فرکانس اشتقاقی، نسبت استهلاک بحرانی و ضریب استهلاک هم چنین دامنه پس از ۱۰ سیکل کامل.



$$k = \frac{F}{x_0} = \frac{1000}{1.3} = 777.27 \ \frac{kgf}{cm} \times 10^2 \ \frac{kgf}{m}$$

فرض $\omega_D \sim \omega_n$ $\quad T = \frac{2\pi}{\omega_D} \simeq \frac{2\pi}{\omega_n} \Rightarrow 0.8 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{777.27 \times 10^2 \times 10}{W}}}$

$$\Rightarrow W = 1080.79 \ kgf$$

$$\Rightarrow \omega_D = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.8} = 7.85 \ rad/s$$

$$\frac{x_k}{x_{k+5}} = \frac{x e^{-\xi \omega_n k (\frac{2\pi}{\omega_D})}}{x e^{-\xi \omega_n (k+5)(\frac{2\pi}{\omega_D})}} = e^{5\xi \omega_n \frac{2\pi}{\omega_D}} = e^{10\pi\xi \frac{\omega_n}{\omega_D}}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x_k}{x_{k+5}}\right) = 10\pi\xi \frac{\omega_n}{\omega_D} = 10\pi\xi \frac{\omega_n}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \simeq 10\pi\xi$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{1}{10\pi} \ln\left(\frac{x_k}{x_{k+5}}\right) = \frac{1}{10\pi} \ln\left(\frac{1.5}{1}\right) = 0.129 = 12.9\%$$

$$C = 2\xi m \omega_n = 2 \times 0.129 \times \frac{1080.79}{10} \times 7.85 = 218.19 \ kg.s/m$$

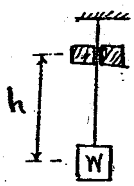
$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = \omega_n \times \sqrt{1 - 0.129^2} = 0.99992 \, \omega_n \simeq \omega_n$$

$$\frac{1}{5 \times 2\pi} \ln\left(\frac{x_0}{x_5}\right) = \frac{1}{2\pi \times 10} \ln\left(\frac{x_0}{x_{10}}\right) \Rightarrow 2 \ln\left(\frac{x_0}{x_5}\right) = \ln\left(\frac{x_0}{x_{10}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_0}{x_5}\right)^2 = \left(\frac{x_0}{x_{10}}\right) \Rightarrow \left(\frac{1.5}{1}\right)^2 = \frac{4.5}{x_{10}} \Rightarrow x_{10} = \frac{1}{1.5} = 0.667 \ cm$$

$1\ CPM = 0.033\pi\ \frac{rad}{s}$

- وزنه W به کابلی متصل است فرکانس طبیعی سیستم در این حالت ۹۴ CPM اندازه گیری شده است هرگاه وزنه $W' = 1\ lb$ به W افزوده شود فرکانس سیستم به ۷۶٫۷۵ CPM تقلیل می یابد ۱) مقدار W و k را تعیین نمائید ۲) هرگاه وزنه W' از ارتفاع $h = 6\ in$ رها گردیده و به وزنه W متصل باشد مقدار max و min نیروی کابل را محاسبه نمائید در این حالت $\xi = 10\%$ فرض گردد توجه شود کابل تنها نیروی کششی را تحمل می کند.



$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\begin{cases} 94\ CPM = 3.133\pi\ rad/s \\ 76.75\ CPM = 2.558\pi\ rad/s \end{cases}$$

حالت اول $\Rightarrow \omega_n = 3.133\pi = \sqrt{\frac{k \times g}{W}} \Rightarrow \frac{k}{W} = 3.028$

حالت دوم $\Rightarrow \omega_n = 2.558\pi = \sqrt{\frac{k \times g}{W + W'}} \Rightarrow \frac{k}{W+1} = 2.0187$

$$\Rightarrow \frac{3.028W}{W+1} = 2.0187 \Rightarrow W = 2\ lb \ ,\ k = 6.056\ lb/ft$$

$$m'gh = \frac{1}{2}(m+m')v^2 \Rightarrow \frac{1}{32} \times 32 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2+1}{32}\right)v^2$$

$$\Rightarrow v_0 = 3.266\ ft/s \qquad \dot{x}_0 = 3.266\ ft/s \qquad \xi = 10\%$$

کابل تنها نیروی کششی تحمل می کند ← min نیروی کابل = ۰

$$X = \left[\left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_D}\right)^2 + x_0^2\right]^{1/2}$$

سیستم دارای استهلاک $\xi < 1$

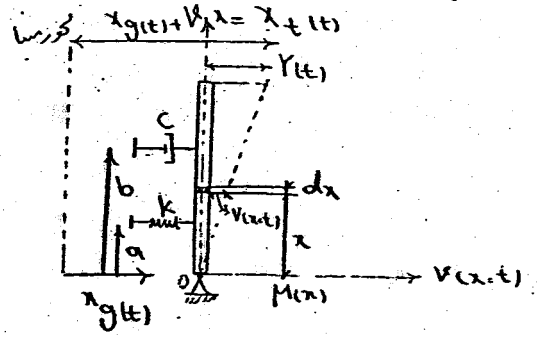
$$\Rightarrow X = \left[\left(\frac{3.266 + 0.1 \times 8.036 \times 0}{7.996}\right)^2 + 0\right]^{1/2} = 0.408\ ft$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2.558\pi \Rightarrow \omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 7.996$$

$$\Rightarrow F_{max} = kX = 6.056 \times 0.408 = 2.47\ lb$$

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری ③

- در صورتیکه مثال فوق تحت اثر حرکت زمین $x_g(t)$ قرار گیرد مطلوبست تعیین معادله حرکت الف) بدون در نظر گرفتن $P(t)$ ب) با در نظر گرفتن $P(t)$.



الف)

$$\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow M_I + M_D + M_S = M_{P(t)}$$

$$v(x,t) = \psi(x)\cdot Y(t) \qquad \psi(L)=1 \Rightarrow \psi(x)=\frac{x}{L}$$

$$\Rightarrow v(x,t) = \frac{x}{L}\cdot Y(t)$$

$$M_S = f_S \cdot a \;,\; f_S = k\cdot\frac{a}{L}Y(t) \qquad M_D = f_D\cdot b \;,\; f_D = c\cdot\frac{b}{L}\dot{Y}(t)$$

$$M_I = \int_0^L m(x)\,x\,\ddot{x}_t(t)\,dx \qquad x_t(t) = x_g(t) + v(x,t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_t(t) = \ddot{x}_g(t) + \ddot{v}(x,t) = \ddot{x}_g(t) + \frac{x}{L}\ddot{Y}(t)$$

$$\Rightarrow M_I = \int_0^L m(x)\,x\left(\ddot{x}_g(t) + \frac{x}{L}\ddot{Y}(t)\right)dx = \ddot{x}_g(t)\int_0^L m(x)\,x\,dx + \ddot{Y}\int_0^L m(x)\frac{x^2}{L}dx$$

$$M_I = \ddot{x}_g(t)\int_0^L m\,x\,dx + \ddot{Y}\int_0^L m(x)\frac{x^2}{L}dx$$

$$\ddot{x}_g(t)\int_0^L m x\,dx + \ddot{Y}\int_0^L m(x)\frac{x}{L}dx + c\cdot\frac{b^2}{L}\dot{Y} + k\frac{a^2}{L}Y = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{Y}\int_0^L m(x)\left(\frac{x}{L}\right)^2 dx + \dot{Y}c\left(\frac{b}{L}\right)^2 + Y\cdot k\left(\frac{a}{L}\right)^2 = -\ddot{x}_g(t)\int_0^L m(x)\frac{x}{L}dx$$

$$\Rightarrow M^*\ddot{Y} + C^*\dot{Y} + k^*Y = -M^*\ddot{x}_g(t)$$

ب)

$$v(x,t) = \frac{x}{L}Y(t) \qquad \Sigma M_0 = 0 \Rightarrow M_I + M_D + M_S = M_{P(t)}$$

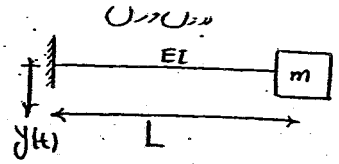
$$M_I = \ddot{x}_g(t)\int_0^L m(x)\,x\,dx + \ddot{Y}\int_0^L m(x)\frac{x}{L}dx \qquad M_D = c\frac{b^2}{L}\dot{Y}(t) \qquad M_S = k\frac{a^2}{L}Y(t)$$

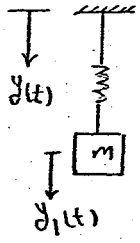
$$, M_{P(t)} = P(t)\cdot d$$

$$\Rightarrow M^*\ddot{x}_g(t) + \ddot{Y}\int_0^L m(x)\frac{x}{L}dx + Yc\frac{b^2}{L} + Yk\frac{a^2}{L} = P(t)\cdot d$$

$$\Rightarrow \ddot{Y}\int_0^L m(x)\left(\frac{x}{L}\right)^2 dx + \dot{Y}c\left(\frac{b}{L}\right)^2 + Yk\left(\frac{a}{L}\right)^2 = P(t)\cdot\frac{d}{L} - M^*\ddot{x}_g(t)$$

- تیر یک سرگیردار بدون وزن که انتهای آن جرم m متصل است دارای تکیه گاهی است که مطابق شکل می تواند حرکت کند مطلوبست تعیین معادله حرکت سیستم.





$$y_t(t) = y_1(t) + y(t)$$

$$f_I + f_D + f_S = 0$$

$$f_S = k y_1(t) \qquad f_D = c \dot{y}_1(t) \qquad , f_I = m \ddot{y}_t(t)$$

$$\ddot{y}_t(t) = \ddot{y}_1(t) + \ddot{y}(t) \Rightarrow f_I = m\ddot{y}_1(t) + m\ddot{y}(t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{y}_1(t) + m\ddot{y}(t) + c\dot{y}_1(t) + k y_1(t) = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{y}_1 + c\dot{y}_1 + k y_1 = -m\ddot{y}(t)$$

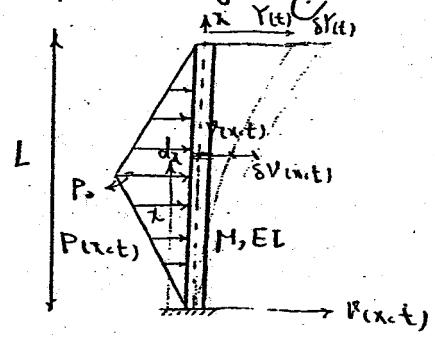
$$n_{(y)} = k.\Delta \qquad \Delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\Rightarrow k = \frac{n_{(y)}}{\Delta} = \frac{3n_{(y)}.EI}{PL^3} = \frac{3EI}{L^3}$$

$$c = 0 \rightarrow \quad m\ddot{y}_1 + \frac{3EI}{L^3} y_1 = -m\ddot{y}(t)$$

حل تمرین ۳۰ ۸۱۲۴۰ سری ④

- سازه شکل زیر مفروض است مطلوبست تعیین معادله حرکت برای سه حالت ارتعاش عرضی.



حل عرضی $v(x,t) = \psi(x) \cdot Y(t)$

اصل تغییر مکان مجازی $\delta W_t = 0 \Rightarrow \delta W_E = \delta W_I$

$\delta v(x,t) = \psi(x) \cdot \delta Y(t)$

کار مجازی نیروهای خارجی $\delta W_E = \int_0^L p(x,t) \cdot \delta v(x,t) \cdot dx$

$\delta W_I = \int m(x)\, \delta d\theta + \int_0^L f_I(x)\, \delta v(x,t)\, dx$

$f_I(x) = m(x)\, \ddot{v}(x,t)$ ، $\theta = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ ، $d\theta = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} dx$ ، $m(x) = EI \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow \delta W_I = \int_0^L EI \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \cdot \delta \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} dx + \int_0^L m(x)\, \ddot{v}(x,t) \cdot \delta v(x,t)\, dx$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2 \psi}{dx^2} \cdot Y(t) \qquad \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2 \psi}{dx^2} \cdot \delta Y(t)$$

$$\Rightarrow \delta W_I = \int_0^L EI \left(\frac{d^2 \psi}{dx^2}\right)^2 \cdot Y(t) \cdot \delta Y(t) \cdot dx + \int_0^L m(x)\, \psi(x)^2 \frac{d^2 Y}{dt^2} \cdot \delta Y(t)\, dx$$

$$\delta W_I = \delta W_E \Rightarrow Y(t) \cdot \delta Y(t) \int_0^L EI \left(\frac{d^2 \psi}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{d^2 Y}{dt^2} \cdot \delta Y(t) \int_0^L m(x)\, \psi(x)^2 dx = \delta Y(t) \int_0^L p(x,t)\, \psi(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \ddot{Y} \int_0^L m(x)\, \psi(x)^2 dx + Y \int_0^L EI \left(\frac{d^2 \psi}{dx^2}\right)^2 dx = \int_0^L p(x,t)\, \psi(x)\, dx$$

$$\Rightarrow M^* \ddot{Y} + k^* Y = P^*(t)$$

$$p(x,t) = \begin{cases} \frac{2P_0}{L} x & 0 \le x < \frac{L}{2} \\ -\frac{2P_0}{L} x + 2P_0 & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

الف) $\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$ $\qquad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{\pi^2}{4L^2} \cos\frac{\pi x}{2L}$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L m \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = m_0 \left(-\frac{4L}{\pi} \sin\frac{\pi x}{2L} + \frac{L}{2\pi} \sin\frac{\pi x}{L} + \frac{2\pi x L}{2\pi L} \Big]_0^L \right) = 0.227\, mL$$

$$k^* = \int_0^L EI \left(\frac{\pi^2}{4L^2} \cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = EI \cdot \frac{\pi^4}{16L^4} \cdot \left(\frac{L}{2\pi} \sin\frac{\pi x}{L} + \frac{x}{2} \Big]_0^L \right) = EI \cdot \frac{\pi^4}{32L^3}$$

$$P^*(t) = \int_0^{L/2} \frac{2P_0}{L} x \cdot (1 - \cos\frac{\pi x}{2L})\,dx + \int_{L/2}^{L} (-\frac{2P_0}{L}x + 2P_0)(1-\cos\frac{\pi x}{2L})\,dx$$

$$\Rightarrow P^*(t) = \frac{2P_0}{L}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2Lx}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2L} - \frac{4L^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right]_0^{L/2}) + 2P_0\left(x - \frac{x^2}{2L} + \frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2L} - \frac{2L}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2L} + \frac{4L}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right]_{L/2}^{L}) = 2P_0L\left(\frac{1}{4} - \frac{4+2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\right) = 0{,}11\,4\,P_0L$$

$$\Rightarrow 0{,}233\,ML\ddot{Y} + 20{,}4\frac{EI}{L^2}Y = 0{,}11\,4\,P_0L$$

ب) $\psi(x) = \frac{x^2}{L^2} \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2}{L^2}$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L M\left(\frac{x^2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{M}{L^4}\cdot\frac{L^5}{5} = \frac{1}{5}ML$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{4EI}{L^3}$$

$$P^*(t) = \int_0^{L/2} \frac{2P_0}{L} x \cdot \frac{x^2}{L^2}\,dx + \int_{L/2}^{L} (-\frac{2P_0}{L}x + 2P_0)\cdot\frac{x^2}{L^2}\,dx = 0{,}1\,4\,7\,P_0L$$

$$\Rightarrow 0{,}2\,ML\ddot{Y} + \frac{4EI}{L^3}Y = 0{,}1\,4\,7\,P_0L$$

ج) $\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{4L^2}\sin\frac{\pi x}{2L}$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L M\left(\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = M\times\left(\frac{-L}{2\pi}\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{x}{2}\right]_0^L) = 0{,}5\,ML$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(-\frac{\pi^2}{4L^2}\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{16L^4}\left(-\frac{L}{2\pi}\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{x}{2}\right]_0^L) = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}$$

$$P^*(t) = \int_0^{L/2} \frac{2P_0}{L} x\cdot\sin\frac{\pi x}{2L}\,dx + \int_{L/2}^{L}(-\frac{2P_0}{L}x + 2P_0)\cdot\sin\frac{\pi x}{2L}\,dx =$$

$$\Rightarrow P^*(t) = \frac{2P_0}{L}\left(\frac{-2Lx}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2L} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2L}\right]_0^{L/2}) + 2P_0\left(\frac{2x}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2L} - \frac{2L}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2L} - \frac{4L}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2L}\right]_{L/2}^{L}$$

$$\Rightarrow P^*(t) = -0{,}11\,8\,P_0L$$

$$\Rightarrow 0{,}5\,ML\ddot{Y} + \frac{\pi^4 EI}{32L^3}Y = -0{,}11\,8\,P_0L$$

نام و نام خانوادگی ۸۱۲۴۰۳۰

- روابط سیستم دارای استهلاک ζ را بنویسید.

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(C\cos\omega_D t + D\sin\omega_D t) \qquad x(0) = X_0 \;,\; \dot{x}(0) = \dot{X}_0$$

$$\Rightarrow x(0) = e^{0} \times (C \times \cos 0 + D\sin 0) = 1 \times C = X_0 \Rightarrow C = X_0$$

$$\dot{x}(t) = -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}(C\cos\omega_D t + D\sin\omega_D t) + e^{-\zeta\omega_n t}(X_0 \cdot \omega_D \sin\omega_D t - D\omega_D\cos\omega_D t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(0) = -\zeta\omega_n \times 1 \times (X_0 + 0) + 1 \times (-X_0 \cdot \omega_D \times 0 + D \cdot \omega_D \times 1)$$

$$\Rightarrow -\zeta X_0\omega_n + D\omega_D = \dot{X}_0 \Rightarrow D\omega_D = +\zeta X_0\omega_n + \dot{X}_0$$

$$\Rightarrow D = +\frac{\zeta\omega_n X_0 + \dot{X}_0}{\omega_D}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(X_0\cos\omega_D t + \frac{\zeta\omega_n X_0 + \dot{X}_0}{\omega_D}\sin\omega_D t\right)$$

۴/ $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{۲L}$

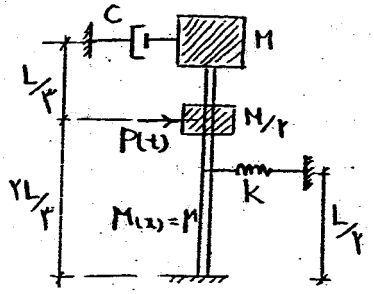
$\Rightarrow M^* = ۰/۵ML \qquad k^* = \frac{۳^۴EI}{۲^۴L^۳}$

$P = -۰/۱۱۶P.L \quad , \quad \int_۰^L M_x \sin\frac{\pi x}{۲L}dx = \frac{۲L}{\pi}M$

$\Rightarrow ۰/۵ML\ddot{Y} + \frac{۳^۴EI}{۲^۴L^۳}Y = -۰/۱۱۴P.L - \frac{۲}{\pi}ML\ddot{x}_g(t)$

مریم سلیما ۸۱۲۴۰۳۰ سری ②

- سازه مربوط به برج مخابراتی شهری را به صورت شکل ۱ مدل کرده از معادله حرکت



$$M^*\ddot{Y} + C^*\dot{Y} + k^*Y = P^*(t)$$

$$v(x,t) = \psi(x)\cdot Y(t) \qquad \psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$$

$$M^* = \int_0^L m(\psi(x))^2 dx + \sum_i m_i \psi_i^2 + \sum I_{0i}(\psi_i')^2$$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L M\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + \frac{M}{2}\times\left(1-\cos\frac{\pi x\, 2L/3}{2L}\right)^2 + M\times\left(1-\cos\frac{\pi L}{2L}\right)^2 + \frac{ML^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{M}{2}\frac{L^2}{4}$$

$$\Rightarrow M^* = 0.228ML + \frac{M}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + M = 0.228ML + 1.009M + \frac{ML^2}{2}\left(\frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi x\, 2L}{2L}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{2}\times\frac{4L^2}{9}$$

$$\times\left(\frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi x\, 2L}{3L}\right)^2 = 0.228ML + 1.009M + \frac{\pi^2 M}{8} + \frac{1}{8}\times\frac{M}{4}\times\frac{4L^2}{9}\times\frac{\pi^2}{4}\times\frac{2}{3} = \frac{\pi^2 M}{24}$$

$$C^* = \int_0^L C(x)[\psi(x)]^2 dx + \sum_i C_i\psi_i^2 = C\left(1-\cos\frac{\pi L}{2L}\right)^2 = C$$

$$k^* = \int_0^L EI(\psi''(x))^2 dx + \int_0^L k(x)(\psi(x))^2 dx + \sum k_i\psi_i^2 =$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + \int_0^L k(x)(\psi(x))^2 dx + \sum k_i\psi_i^2$$

$$k^* = \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3} + k\left(1-\cos\frac{\pi x\, L}{2\, 2L}\right)^2 = \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3} + 0.178k$$

$$P^*(t) = P(t)\left[1-\cos\frac{\pi}{2}\right] = 0.3P(t)$$

$\int y\,dA$ $\int y^2\,dA$

$\int x\,dA$

$I_0 = \frac{1}{12}ml^2$ (m)

$I_0 = \frac{1}{6}ml^2$

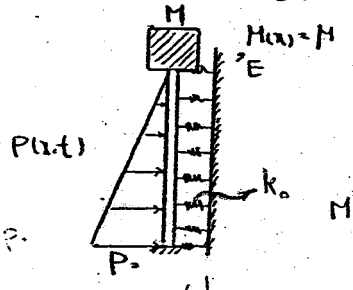
$\frac{\pi}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l}$ (1)

$(\frac{\pi}{2l})^2$

$\frac{\pi}{2l}$

- درصورتیکه ستون نشان داده شده در شکل دارای صلبیت خمشی EI و جرم در واحد طول M تحت اثر بارگذاری

ذیل مطابق شکل قرار گرفته و بعد روی تکیه گاه الاستیک قرار داشته باشد مطلوبست تعیین معادله حرکت.



$$M^* \ddot{Y} + C^* \dot{Y} + K^* Y = P^*(t) \qquad \psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$$

$$M^* = \int_0^L M(\psi(x))^2 dx + \sum_i m_i \psi_i^2 + \sum I_{0_i} (\psi_i')^2$$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L M\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + M\left(1-\cos\frac{\pi L}{2L}\right)^2 = 0.228\,ML + M + \frac{1}{2}ML^2\left(+\frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2$$

$$C^* = \int_0^L C(x)(\psi(x))^2 dx + \sum_i C_i \psi_i^2 = 0$$

$$K^* = \int_0^L EI(\psi''(x))^2 dx + \int_0^L k(x)(\psi(x))^2 dx + \sum K_i \psi_i^2$$

$$\Rightarrow K^* = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + \int_0^L k_0\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3} + 0.228\,kL$$

$$P^*(t) = \int_0^L P(x,t)\psi(x)\,dx + \sum P_i \psi_i$$

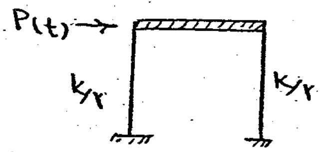
$$\Rightarrow P^*(t) = \int_0^L \left(P_0 - \dot{P}_0\frac{x}{L}\right)\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx = P_0\int_0^L \left(1-\frac{x}{L}\right)\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx$$

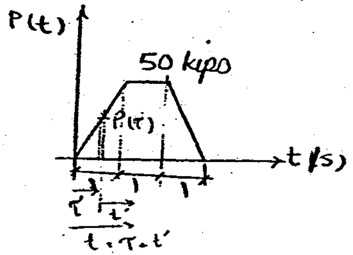
$$\Rightarrow P^*(t) = \frac{LP_0}{2} - \frac{4LP_0}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow P^*(t) = 0.095\,P_0 L$$

ـ در مثال حل شده اگر زمان اعمال نیرو به صورت شکل مقابل تغییر یافته باشد مطلوبست تعیین تاریخچه $x(t)$ و مقادیر آن در لحظات $t = 1s, 2s, 3s$

$W_t = 2000$ kips , $k = 51.1\ k/in$





$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2000}{386\times 51.1}} = 2s < 3s = t_d$$

← اثر نیرو به صورت ضربه بوده و قاب تحت یک بارگذاری اختیاری قرار دارد.

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{51.1\times 386}{2000}} = 3.14\ rad/s \qquad m = \frac{W}{386} = \frac{2000}{386} = 5.18$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{\underset{16.27}{5.18\times 3.14}}\sin\pi(t-\tau)\,d\tau$$

$$\rightarrow x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{16.27}\sin\pi(t-\tau)\,d\tau$$

$t = 1s \rightarrow x(1) = \int_0^1 \frac{50\tau}{16.27}\sin\pi(1-\tau)\,d\tau = \frac{50}{16.27}\times 0.318 = 0.977$

$t = 2s \rightarrow x(2) = \int_0^1 \frac{50\tau}{16.27}\sin\pi(1-\tau)\,d\tau + \int_1^2 \frac{50}{16.27}\sin\pi(2-\tau)\,d\tau = 2.93\ in$

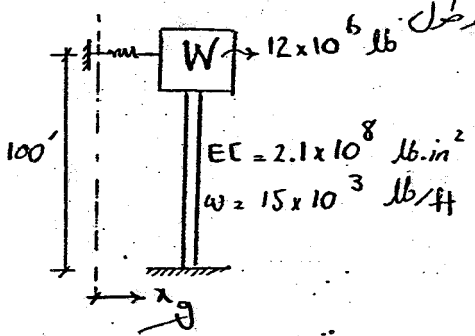
$t = 3s \rightarrow x(3) = \int_0^1 \frac{50\tau}{16.27}\sin\pi(1-\tau)\,d\tau + \int_1^2 \frac{50}{16.27}\sin\pi(2-\tau)\,d\tau + \int_2^3 \frac{(-50\tau+50)}{16.27}\sin\pi(3-\tau)\,d\tau$

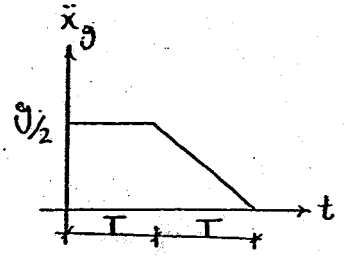
$\Rightarrow x(3) = 2.91\ in$

$$\frac{50}{2.72}\int_0^{0.5} \sin 2\pi\tau \ \sin(2.27 - 0.32\tau)$$

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری ⑦

- سازه شکل زیر فرض است در صورتیکه این سازه تحت اثر حرکت زمین قرار بگیرد دیاگرام شتاب زمین به صورت شکل دوم باشد مطلوبست تعیین: معادله حرکت، تاج تغییر مکان، مقدار تغییر مکان در لحظه $t=0.2s$ و نیروی وارده در همین لحظه، ماکزیمم تغییر مکان و برش پایه و برش در واحد طول





$V_{(x,t)} = \psi_{(x)} \cdot Y_{(t)}$

$\psi_{(x)} = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$

$\ddot{x}_{g(t)} = -2.5gt + g$

معادله حرکت $M^*\ddot{Y} + C^*\dot{Y} + k^*Y = P^*_{(t)}$

$$M^* = \int_0^L m(x)[\psi(x)]^2 dx + \sum_i m_i \psi_i^2 + \sum I_{o_i}\cdot\psi_i'^2 = \int_0^L \mu\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + \frac{W}{g}\times 1 + 0$$

$$\rightarrow M^* = 0.2267\mu L + \frac{W}{g} = 0.2267\times\frac{15\times10^3\times100}{32.2} + \frac{12\times10^6}{32.2} = 712720.81 \text{ lb/ft/s}^2$$

$$k^* = \int_0^L EI(\psi''(x))^2 dx + \int_0^L k(x)(\psi(x))^2 dx + \sum k_i\psi_i^2 = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 + k\times1^2$$

$$\rightarrow k^* = EI\times\frac{\pi^4}{16L^4}\times\frac{L}{2} + k = \frac{2.1\times10^8}{12^2}\times\frac{\pi^4}{32\times L^3} + 9\times10^4 = 40009.439$$

$$\bar{k} = \int_0^L m(x)\psi_{(x)}dx + m = \int_0^L \mu\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx + \frac{W}{g} = 0.363\mu L + \frac{W}{g} = 91741.15$$

($\frac{\omega}{g}$)

$$\rightarrow P^*_{(t)} = -\bar{k}\ddot{x}_{g(t)}$$

تعیین تاج تغییر مکان:

$$V_{(t)} = \int_0^t \ddot{x}_{g(\tau)}\frac{1}{\omega_D}e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

$$V_{(x,t)} = \frac{\psi_{(x)}\cdot\bar{k}}{M^*\cdot\omega_D}\cdot V_{(t)} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{40009.439}{712720.81}} = 0.237s \rightarrow T = 26.52s$$

$$V_{(t)_1} = \int_0^t \frac{g}{2}\times\sin\omega(t-\tau)\,d\tau = \frac{g}{2}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\cos\omega t}{\omega}\right) \qquad 0 \le t \le 0.2s$$

$$V_{(t=0.2)} = \frac{32.2}{2}\left(\frac{1}{0.237} - \frac{\cos(0.237\times0.2)}{0.237}\right) = 0.0763$$

$$\dot{V}_{(t)} = \frac{g}{2}\times\sin\omega t \rightarrow \dot{V}_{(t=0.2)} = 0.763$$

$$V_{(t)_2} = V_{(t=0.2)} \cos\omega(t-0.2) + \frac{\dot{V}_{(t=0.2)}}{\omega} \sin\omega(t-0.2) + \int_{0.2}^{t} (-2.5g\tau + g) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow V_{(t)_2} = 0.0763\cos\omega(t-0.2) + 3.22\sin\omega(t-0.2) + g\left(-2.5\frac{t}{\omega} - \frac{\cos\omega(t-0.2)}{2\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{5\sin\omega(t-0.2)}{2\omega^2}\right)$$

$0.2 \leq t \leq 0.4s$

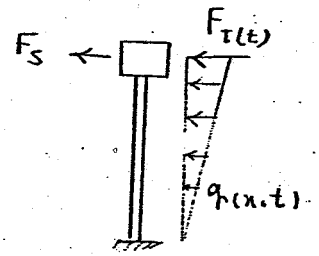
$$V_{(t=0.4)_2} = .0763\cos(0.237\times0.2) + 3.22\sin(0.237\times0.2) + 32.2\left(-2.5\times\frac{0.4}{0.237} - \frac{\cos(0.237\times0.2)}{2\times0.237} + \frac{1}{0.237} + \frac{5\sin(0.237\times0.2)}{2\times0.237^2}\right) = 0.28$$

$$\dot{V}_{(t)_2} = -0.0763\omega\sin\omega(t-0.2) + 3.22\omega\cos\omega(t-0.2) + g\left(\frac{-2.5}{\omega} + \frac{\sin\omega(t-0.2)}{2} + \frac{5\cos\omega(t-0.2)}{2\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{V}_{(t=0.4)_2} = 1.193$$

$$\Rightarrow V_{(t)_3} = V_{(t=0.4)}\cos\omega(t-0.4) + \frac{\dot{V}_{(t=0.4)}}{\omega}\sin\omega(t-0.4) \quad t \geq 0.4s$$

$$\Rightarrow V_{(t)_3} = 0.28\cos\omega(t-0.4) + 9.823\sin\omega(t-0.4)$$



$$q_{(x,t)} = M\omega^2\varphi_{(x)}\cdot Y_{(t)} \qquad \ddot{Y}_{(t)} = \omega^2 Y_{(t)}$$

$$F_{I(H,t)} = M\omega^2\psi_{(L)}\, Y_{(t)}$$

$$F_{S(H,t)} = k_S \times \psi_{(L)} Y_{(t)}$$

$$Q_{B(x=0,t)} = \int_0^L q_{(x,t)}\, dx + F_{I(L,t)} + F_{S(L,t)}$$

$$\Rightarrow Q_{B(x=0,t)} = \int_0^L M\cdot\psi_{(x)}\cdot\ddot{Y}_{(t)} + M\psi'_{(L)}\cdot\ddot{Y}_{(t)} + k_S\times\psi'_{(L)}\cdot Y_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q = \int_0^L M_x\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)\ddot{Y}_{(t)}\, dx + M\ddot{Y}_{(t)} + k_S Y_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q_{B(x=0,t)} = M\ddot{Y}_{(t)}\int_{0.363L}^{L}\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx + M\ddot{Y}_{(t)} + k_S Y_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q_{B(x=0,t)} = 0.363ML\,\ddot{Y}_{(t)} + M\ddot{Y}_{(t)} + k_S Y_{(t)} \qquad Y_{(t)} = \frac{\bar{F}}{M^*\omega_D}\cdot V_{(t)}$$

$$\Rightarrow Q_{B(x=0,t=0.2s)} = 0.363\times15\times10^3\times100\times\frac{32.2}{2} + 12\times10^6\times\frac{32.2}{2} + 9\times10^9\times\frac{917741.15\times0.76}{712720.81\times0.237}$$

$$\Rightarrow Q_{B(0,0.2s)} = 2.0198\times10^8$$

$$\begin{cases} V(t) = \frac{g}{2}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\cos\omega t}{\omega}\right) & 0 \le t \le 0.2\,s \\ V(t) = .0763\cos\omega(t-0.2) + 3.22\sin\omega(t-0.2) + g\left(\frac{-2.5t}{\omega} - \frac{\cos\omega(t-0.2)}{2\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{5\sin\omega(t-0.2)}{2\omega^2}\right) & 0.2 \le t \le 0.9 \\ V(t) = 0.28\cos\omega(t-0.9) + 4.823\sin\omega(t-0.9) & t \ge 0.9\,s \end{cases}$$

$$\dot{V}(t)_1 = \frac{g}{2}\sin\omega t = 0 \quad \omega t = k\pi \Rightarrow t = \frac{k\pi}{\omega} \xrightarrow{k=1} 13.26\,s \rightarrow V(t) = \frac{g}{2}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\cos\pi}{\omega}\right) = \frac{g}{\omega} = 135.86'$$

$$\dot{V}(t)_2 = -.0763\omega\sin\omega(t-0.2) + 3.22\omega\cos\omega(t-0.2) + g\left(-\frac{2.5}{\omega} + \frac{\sin\omega(t-0.2)}{2} + \frac{5\cos\omega(t-0.2)}{2\omega}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{V}(t)_2 = -.0181\sin\omega(t-0.2) + 0.763\cos\omega(t-0.2) + g\left(-10.55 + \frac{\sin\omega(t-0.2)}{2} + \frac{5\cos\omega(t-0.2)}{2\omega}\right) = 0$$

$$\rightarrow \dot{V}(t)_2 = 16.0819\sin\omega(t-0.2) + 390.426\cos\omega(t-0.2) - 339.662 = 0$$

$$\Rightarrow t = 0.72\,s \quad > 0.9\,s$$

$$\dot{V}(t)_3 = -0.28\omega\sin\omega(t-0.9) + 4.823\omega\cos\omega(t-0.9) = 0$$

$$\rightarrow \dot{V}(t)_3 = -0.06636\sin\omega(t-0.9) + 1.743\cos\omega(t-0.9) = 0$$

$$\rightarrow t = 6.58\,s \rightsquigarrow V_{max_3} = 4.83'$$

$$V(t)_2 = -67.856\cos\omega(t-0.2) + 1436.394\sin\omega(t-0.2) + 135.86 - 339.865t$$

$$Q(x,t) = \int_0^L q(x,t)\,dx + F_I(L,t) + F_S(L,t)$$

$$q(x,t) = M(x)\varphi(x)\cdot\frac{\bar{k}\omega}{m^*}V(t) = M(x)\cdot\varphi(x)\cdot\frac{\int_0^L M(x)\varphi(x)\,dx\cdot\omega}{m^*}V(t)$$

$$F_I(L,t) = M\cdot\omega^2\cdot\phi(H)\cdot Y(t) = M\omega^2\cdot\phi(L)\cdot\frac{\bar{k}}{m^*\omega^2}V(t) = M\omega\cdot\phi(L)\cdot\frac{M}{m^*}V(t)$$

$$F_S(L,t) = k_S\cdot\phi(L)\cdot Y(t) = k_S\cdot\phi(L)\cdot\frac{\bar{k}}{m^*\omega}V(t)$$

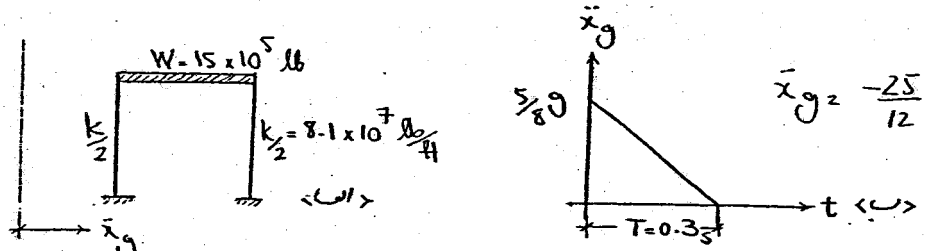
$$\Rightarrow Q_B(x=0,t) = \left[\int_0^L M(x)\varphi(x)\,dx + M\right]\ddot{Y}(t) + k_S\phi(L)\cdot Y(t)$$

$$\Rightarrow Q_B(0,t) = \left[\left(\int_0^L M(x)\varphi(x)\,dx + M\right)\omega^2 + k_S\right]Y(t)$$

$$\Rightarrow Q_B(0,t) = \left[(0.363)1L + \frac{W}{g}\right)\omega^2 + k_S\right]\times\frac{\bar{k}}{M^*\omega_0}\cdot V(t)$$

$$\Rightarrow Q_B(0<6.58) = \left[917791.15\times0.237^2 + 9\times10^4\right]\times\frac{917791.15}{712720.81\times0.237}\times4.83' = 2.9\times10^6\,lb$$

۶۰- تاب یک طبقه شکل زیر تحت اثر زلزله‌ای با دیاگرام شتاب شکل ب قرار گرفته است مطلوبست تعیین معادله حرکت، تاج تغییر مکان، تاج برش پایه و هم چنین مقادیر ماکزیمم هریک از آنها.



$\ddot{x}_g = \frac{-25}{12} g t + \frac{5}{8} g$

$$x(t) = \int_0^t \frac{P_{eff}(\tau)}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\, d\tau \qquad \zeta = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t P_{eff}(\tau) \sin\omega_n(t-\tau)\, d\tau$$

$$P_{eff}(\tau) = -m\ddot{x}_g = -mg\left(\frac{-25}{12}t + \frac{5}{8}\right) \qquad 0 \le t \le 0.3\,s$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^{0.3} -mg\left(\frac{-25}{12}\tau + \frac{5}{8}\right) \sin\omega_n(0.3-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{-g}{\omega_n} \int_0^t \left(\frac{-25}{12}\tau + \frac{5}{8}\right) \sin\omega_n(t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{-g}{\omega_n^2}\left(\frac{-25}{12}\tau\cos\omega(t-\tau) + \frac{5}{8}\cos\omega(t-\tau) - \frac{25}{12\omega}\sin\omega(t-\tau)\right]_0^t$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{-g}{\omega_n^2}\left(\frac{5}{8}(1-\cos\omega t) - \frac{25}{12}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)\right) \qquad 0 \le t \le 0.3\,s$$

$x_0 = x(T)$ ، $\dot{x}_0 = \dot{x}(T)$ بعد از ضربه شدن شتاب ارتعاش آزاد خواهیم داشت.

$$x(t) = x(T)\cos\omega_n(t-T) + \frac{\dot{x}(T)}{\omega_n}\sin\omega_n(t-T) \qquad t \ge 0.3\,s$$

معادله حرکت

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_n^2 x = -m\ddot{x}_g(t) & 0 \le t \le 0.3\,s \\ \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 & 0.3 \le t \end{cases}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 8.1 \times 10^7 \times 32.2}{15 \times 10^5}} = 58.97 \ rad/s$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{-g}{\omega^2}\left(\frac{5}{8}(1-\cos\omega t) - \frac{25}{12}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)\right)$$ از حالت اول تعیین تغییرمکان max

$$\rightarrow \dot{x}(t) = \frac{-g}{\omega^2}\left(-\frac{25}{12} + \frac{5}{8}\omega\sin\omega t + \frac{25}{12}\cos\omega t\right) = 0 \quad \rightsquigarrow t = 0,\ 0.6s > 0.3$$

$\rightsquigarrow$

$$x(t) = X(T)\cos\omega_n(t-T) + \frac{\dot{X}(T)}{\omega_n}\sin\omega_n(t-T)$$

$$X(0.3) = \frac{-g}{\omega^2}\left(\frac{5}{8}(1-\cos 0.3\times 58.97) - \frac{25}{12}\left(0.3 - \frac{\sin(0.3\times 58.97)}{58.97}\right)\right) = 2.618\times10^{-3}$$

$$\dot{X}(T=0.3) = \frac{-g}{\omega^2}\left(-\frac{25}{12} + \frac{5}{8}\times 58.97\times\sin(0.3\times 58.97) + \frac{25}{12}\times\cos(0.3\times 58.97)\right) = 0.324$$

$$\Rightarrow x(t) = 2.618\times10^{-3}\cos\omega(t-\overset{0.3}{T}) + \frac{0.324}{58.97}\sin\omega(t-\overset{0.3}{T}) \qquad t \geq 0.3s$$

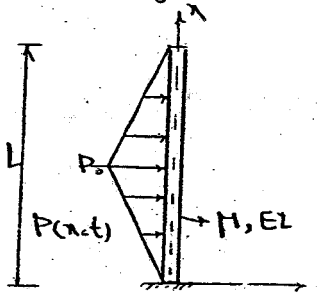
$$\rightarrow \dot{x}(t) = -2.618\times10^{-3}\omega\sin\omega(t-0.3) + \frac{0.324\omega}{58.97}\cos\omega(t-0.3) = 0 \rightarrow t = 0.319s$$

$$\rightarrow x(0.319) = 6.0861\times10^{-3}\ ft$$

$$Q_{max} = k\cdot x_{max} = 2\times8.1\times10^7 \times 6.0861\times10^{-3} = 1111{,}482\ lb = 1.11\times10^6\ lb$$

- درصورتیکه سازه‌ترین ۱ تحت اثر حرکت زمین قرار گیرد مطلوبست تعیین معادله حرکت برای دو حالت

الف) موجود نبودن بارگذاری جانبی ب) با اضافه بارگذاری جانبی برای سه تاج مدرسی شکل.



ب) $M^*\ddot{Y} + k^*Y = P^*_{eff}(t)$ $\quad M^* = \int_0^L m(x)\psi^2(x)\,dx$

$k^* = \int_0^L EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx$ $\quad P^*_{eff} = -\ddot{x}_g(t)\,\bar{k}$

$\bar{k} = \int_0^L m(x)\psi(x)\,dx$

۱ $\psi(x) = 1-\cos\frac{\pi x}{2L}$

$\Rightarrow M^* = \int_0^L m\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.227\,ML$

$k^* = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = EI\times\frac{\pi^4}{32L^4}$

$\bar{k} = \int_0^L m\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx = m\left(-\frac{2L}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2L}+x\right)\Big]_0^L = 0.234\,ML$

$\Rightarrow 0.227\,ML\ddot{Y} + \frac{\pi^4 EI}{32L^4}Y = -0.234\,ML\ddot{x}_g(t)$

۲ $\psi(x) = \frac{x^2}{L^2}$

$M^* = \int_0^L m\left(\frac{x^2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{1}{5}ML$

$k^* = \int_0^L EI\left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{4EI}{L^3}$

$\bar{k} = \int_0^L m\frac{x^2}{L^2}dx = \frac{m}{L^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big]_0^L = \frac{1}{3}ML$

$\Rightarrow 0.2\,ML\ddot{Y} + \frac{4EI}{L^3}Y = -\frac{1}{3}ML\ddot{x}_g(t)$

۳ $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$

$M^* = \int_0^L m\left(\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.5\,ML$

$k^* = \int_0^L EI\left(-\frac{\pi^2}{4L^2}\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}$

$\bar{k} = \int_0^L m\sin\frac{\pi x}{2L}dx = m\times\frac{-2L}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2L}\Big]_0^L = m\times\frac{2L}{\pi}$

$\Rightarrow 0.5\,ML\ddot{Y} + \frac{\pi^4 EI}{32L^3}Y = -\frac{2}{\pi}ML\ddot{x}_g(t)$

الف) کار مجازی نیروهای خارجی

$$\delta W_E = \int_0^L p(x,t).\delta v(x,t)\,dx$$

$$\delta W_E = \int_0^L EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 Y(t).\delta Y(t)\,dx + \ddot{Y}.\delta Y\int_0^L M(x)\psi_{(x)}^2\,dx + \delta Y \ddot{x}_{g(t)}\int_0^L M(x)\psi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \delta W_E = \int_0^L p(x,t).\psi_{(x)}\,\delta Y(t)\,dx$$

$$\delta W_E = \delta W_I$$

$$\Rightarrow \ddot{Y}\int_0^L M(x)\psi_{(x)}^2\,dx + Y\int_0^L EI\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2 dx = \int_0^L p(x,t)\,\psi(x)\,dx - \ddot{x}_{g(t)}\int_0^L M(x)\psi_{(x)}\,dx$$

۱) $\psi(x) = 1-\cos\frac{\pi x}{2L}$

$$\Rightarrow M^* = \int_0^L M\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.2274\,ML$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}$$

$$\int_0^{L/2}\frac{2p_0}{L}x\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx + \int_{L/2}^L\left(-\frac{2p_0}{L}x+2p_0\right)\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx = 0.1642\,p_0L$$

$$\int_0^L Mx\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx = 0.1432\,ML$$

$$\Rightarrow 0.2274\,ML\ddot{Y} + \frac{\pi^4 EI}{32L^3}Y = 0.1642\,p_0L - 0.1432\,ML\ddot{x}_{g(t)}$$

۲) $\psi(x) = \frac{x^2}{L^2}$

$$M^* = \int_0^L Mx\left(\frac{x^2}{L^2}\right)^2 dx = 0.2ML$$

$$k^* = \int_0^L EI.\left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx = \frac{4EI}{L^3}$$

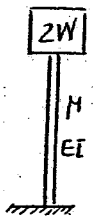
$$\int_0^{L/2}\frac{2p_0}{L}x\left(\frac{x^2}{L^2}\right)dx + \int_{L/2}^L\left(-\frac{2p_0}{L}x+2p_0\right)\left(\frac{x^2}{L^2}\right)dx = 0.1641\,p_0L$$

$$\int_0^L M\left(\frac{x^2}{L^2}\right)dx = \frac{1}{3}ML$$

$$\Rightarrow 0.2ML\ddot{Y} + \frac{4EI}{L^3}Y = 0.1641\,p_0L - \frac{1}{3}ML\ddot{x}_{g(t)}$$

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۴۰ سری ⑦

- سازه شکل زیر فرض است در صورتیکه بتوان برای طراحی این سازه در مقابل زلزله از شکل A استفاده کرد برای سازه 5٪ دیرپودان را در نظر گرفته شود مطلوبست تعیین ماکزیمم تغییر مکان در راس در واحد طول برای حالتی که ماکزیمم شتاب زمین 0.35g در نظر گرفته شود.



$ML = \frac{W}{g}$

$\xi = 5\%$

$T = 1s$ $\rightarrow S_a = 0.17g$, $S_d = 1.7\,in$, $S_v = 105\,in/s$ $a = 0.2g$

شتاب $0.35g \Rightarrow \times \frac{0.35}{0.2} \Rightarrow S_a = 0.2975g$, $S_d = 2.975\,in$, $S_v = 183.75\,in/s$

$$V(x,t) = \frac{\psi(x)\bar{k}}{m^* \omega_D} V(t) \rightarrow V_{max}(x) = \psi(x) \cdot \frac{\bar{k}}{m^* \omega_D} \cdot S_v = \psi(x) \cdot \frac{\bar{k}}{m^*} S_d$$

$$\bar{k} = \int_0^L M(x)\psi(x)\,dx + m = \int_0^L M\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx + \frac{2W}{g} = 0.363ML + \frac{2W}{g}$$

$$M^* = \int_0^L M(x)\left(\psi(x)\right)^2 dx + \sum m_i \psi_i^2 = \int_0^L M\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx + \frac{2W}{g} \times 1 = 0.2267ML + \frac{2W}{g}$$

$$k^* = \int_0^L EI\left(\psi''(x)\right)^2 dx = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}$$

$$\Rightarrow V_{max}(x) = \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^{x=L} \times \frac{0.363ML + \frac{2W}{g}}{0.2267ML + \frac{2W}{g}} \times 2.975 = \frac{0.363 \times \frac{W}{g} + \frac{2W}{g}}{0.2267\frac{W}{g} + \frac{2W}{g}} \times 2.975$$

$$\Rightarrow V_{max} = 3.157''$$

$$q_{max}(x) = M(x)\psi(x)\frac{\bar{k}}{m^*} \cdot S_a = M\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right) \times \frac{\bar{k}}{M^*} \cdot 0.2975g$$

$$q_{max}(x) = M\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^{x=L} \cdot \frac{0.363ML + \frac{2W}{g}}{0.2267ML + \frac{2W}{g}} \cdot 0.2975g = 0.316\,Mg$$

$$Q_{max} = \frac{\bar{k}^2}{m^*} S_a = \frac{\left(2.363\,W/g\right)^2}{2.2267\frac{W}{g}} \times 0.2975g = 0.746W$$

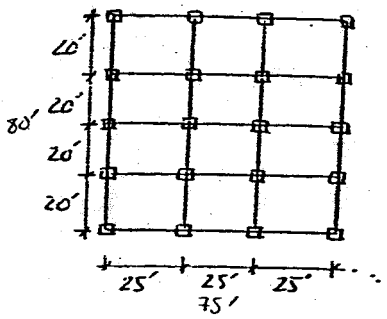
$$Q_B(x,t) = \int_0^L q(x,t)\,dx + F_I(L,t) = \frac{\bar{k}^2}{m^*} \cdot \omega V(t) + M \cdot \frac{\bar{k}}{m^*} \omega V(t) \quad \checkmark$$

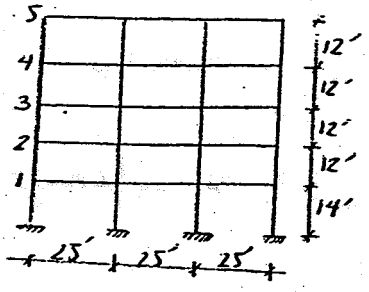
مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری ۸

- ساختمان هفت طبقه بتنی شکل زیر فرض است در صورتیکه بار مرده در بام 150psf و در طبقات دیگر 250psf و بار زنده در بام 30psf و در طبقات دیگر 80psf در نظر گرفته شود و ابعاد ستون ها $16'' \times 16''$ و $E_c = 3.6 \times 10^6$ psi $= 3.6 \times 10^6$ lb/in² باشد

فرض شود مطلوبست تعیین فرم مایل، سختی معادل، پریود اصلی سازه و معادله حرکت آن در مقابل زلزله

برای سه حالت تابع شکلی (a) $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$ ، (b) $\psi(x) = \frac{x}{L}$ ، (c) $\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$





$k_i = \frac{12EI}{L^3}$

$k_{story} = \sum k_i = 20K_i$

$I = \frac{16^4}{12} = 5461.33\ in^4$

$k_{2.3.4.5} = 20 \times \frac{12 \times (3.6 \times 10^3) \times 5461.33}{(12 \times 12)^3} = 1580.25\ kips/in$

$k_1 = 20 \times \frac{12 \times 3.6 \times 10^3 \times 5461.33}{(12 \times 14)^3} = 995.14\ kips/in$

$\sum M = 150 \times 3 \times 25 \times 4 \times 20 + 0.2 \times 30 \times 3 \times 25 \times 4 \times 20 = 936000\ lb = 936\ kips$

$\sum M$ برای طبقات $= 250 \times 75 \times 20 + 0.2 \times 80 \times 75 \times 80 = 1596000\ lb = 1596\ kips$

$L = 62'$ $\quad \psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$ (a)

تراز	k	M	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$k\Delta\psi_i^2$
5		936	1		936	
	1580.25			.046		3.399
4		1596	0.954		1452.55	
	1580.25			0.133		27.953
3		1596	0.821		1075.77	
	1580.25			0.209		69.03
2		1596	0.612		597.77	
	1580.25			0.265		110.97
1		1596	0.397		192.17	
	995.14			0.397		119.824
0			0			
					4254.26	$k^* = 331.121$

$m^* = \frac{4254.26}{12 \times 32.2} = 11.01$

$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{331.121}{11.01}} = 5.48\ rad/s \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.146\ s$

معادله حرکت $\quad 11.01\ddot{Y} + 331.121Y = 0$

$\psi_{(x)} = \frac{x}{L}$ (b

j/i	k	M	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$k\Delta\psi_i^2$
5		936	1		936	
	1580.25			0.194		59.47
4		1596	0.806		-1036.82	
	1580.25			0.193		58.86
3		1596	0.613		559.73	
	1580.25			0.194		59.47
2		1596	0.419		-280.2	
	1580.25			0.193		58.86
1		1596	0.226		81.52	
	995.14			0.226		50.83
0					2894.27	$k^* = 287.49$

$\Rightarrow m^* = \frac{2894.27}{12 \times 32.2} = 7.49$

$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{287.49}{7.49}} = 6.195 \text{ rad/s} \Rightarrow T = 2\pi/\omega = 1.014\text{s}$

$\Rightarrow \quad 7.49\ddot{Y} + 287.49 Y = 0$

$\psi_{(x)} = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$ (c

j/i	k	M	ψ_i	$\Delta\psi_i$	$M\psi_i^2$	$k\Delta\psi_i^2$
5		936	1		936	
	1580.25			0.299		141.276
4		1596	0.701		784.276	
	1580.25			0.272		116.913
3		1596	0.429		293.729	
	1580.25			0.22		76.489
2		1596	0.209		69.715	
	1580.25			0.147		34.148
1		1596	0.062		6.135	
	995.14			0.062	+ 3.826	
0					2089.86	$k^* = 372.696$

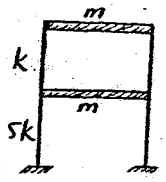
$\Rightarrow m^* = \frac{2089.86}{12 \times 32.2} = 5.409$

$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{372.696}{5.409}} = 8.3 \text{ rad/s} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.757\text{s}$

$\Rightarrow \quad 5.409\ddot{Y} + 372.696 Y = 0$

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری ⑨

- سازه های دو طبقه شکل زیر مفروض است مطلوبست تعیین فرکانس ها و مدل های سقق و آنها و مقایسه فرکانس ها و مدها با مربوطه با حالت مثال حل شده در کلاس.



$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\} \quad (I)$$

$$\{x(t)\}=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}\sin\omega t \Rightarrow \begin{bmatrix}-m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \quad (II)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}-m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2\end{vmatrix}=(-m_1\omega^2+k_1+k_2)(-m_2\omega^2+k_2)-k_2^2=0$$

$$m_1=m_2=m \qquad k_1=3k \qquad k_2=k$$

$$\Rightarrow (-m\omega^2+4k)(-m\omega^2+k)-k^2=0 \Rightarrow m^2\omega^4-5mk\omega^2+4k^2-k^2=0$$

$$\Rightarrow m^2\omega^4-5km\omega^2+3k^2=0 \rightarrow \omega^2=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{k}{m} \Rightarrow \begin{cases}\omega_2=\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\\ \omega_1=\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\end{cases}$$

با قرار دادن $\omega=\omega_2$ در رابطه (II) خواهیم داشت

$$\begin{cases}(-m\times\frac{5+\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{k}{m}+4k)X_1-kX_2=0\\ -kX_1+(-m\times\frac{5+\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{k}{m}+k)X_2=0\end{cases}$$

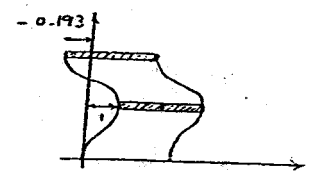
$$\Rightarrow \begin{cases}(-\frac{5+\sqrt{13}}{2}+4)kX_1-kX_2=0\\ -kX_1+(-\frac{5+\sqrt{13}}{2}+1)kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=-0.193 \quad < -0.62$$

با قرار دادن $\omega=\omega_1$ در رابطه II خواهیم داشت:

$$\begin{cases}(-m\times\frac{5-\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{k}{m}+4k)X_1-kX_2=0\\ -kX_1+(-m\times\frac{5-\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{k}{m}+k)X_2=0\end{cases}$$

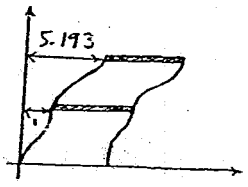
$$\rightarrow \begin{cases}(4-\frac{5-\sqrt{13}}{2})kX_1-kX_2=0\\ -kX_1+(1-\frac{5-\sqrt{13}}{2})kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=5.193 \quad > 1.62$$

$$\omega_2=2.488\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \overline{X}_2=\begin{Bmatrix}1\\-0.193\end{Bmatrix}$$



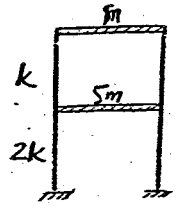
شکل مود دوم ارتعاش

$$\omega_1=0.9\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \overline{X}_1=\begin{Bmatrix}1\\5.193\end{Bmatrix}$$



شکل مود اول ارتعاش

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (I)$$



$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin\omega t \rightarrow \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (II)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{matrix} m_1 = 2m & k_1 = 2k \\ m_2 = m & k_2 = k \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2) - k_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow (-2m\omega^2 + 2k)(-m\omega^2 + k) - k^2 = 0 \rightarrow 2m^2\omega^4 - 2mk\omega^2 - 2mk\omega^2 + 2k^2 - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2\omega^4 - 4mk\omega^2 + 2k^2 = 0 \rightarrow \omega^2 = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} \cdot \frac{k}{m} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{4-\sqrt{8}}{2} \cdot \frac{k}{m}\right)^{1/2} \\ \omega_2 = \left(\frac{4+\sqrt{8}}{2} \cdot \frac{k}{m}\right)^{1/2} \end{cases}$$

با قرار دادن ω_1 در رابطه II مقادیر داریم:

$$\rightarrow \begin{cases} (-2m \times \frac{4-\sqrt{8}}{2} \cdot \frac{k}{m} + 2k)X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + (-m \times \frac{4-\sqrt{8}}{2} \cdot \frac{k}{m} + k)X_2 = 0 \end{cases}$$

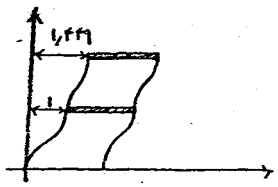
$$\rightarrow \begin{cases} (\sqrt{8} - 4 + 2)kX_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + (1 - \frac{4-\sqrt{8}}{2})kX_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = 1.449 \quad < 1.72$$

با قرار دادن ω_2 در رابطه II مقادیر داریم:

$$\begin{cases} (-2m \times \frac{4+\sqrt{8}}{2} \cdot \frac{k}{m} + 2k)X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + (-m \times \frac{4+\sqrt{8}}{2} \cdot \frac{k}{m} + k)X_2 = 0 \end{cases}$$

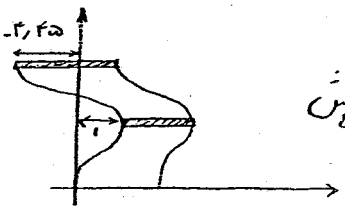
$$\Rightarrow \begin{cases} (-4 - \sqrt{8} + 2)kX_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + (1 - \frac{4+\sqrt{8}}{2})kX_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = -2.449$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 0.707\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad X^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.449 \end{Bmatrix}$$

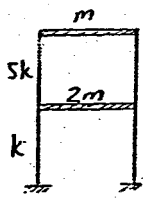


شکل اول مدار تاس

$$\omega_2 = 1.414\omega\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad X^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.449 \end{Bmatrix}$$



شکل دوم مدار تاس



$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$$

$$x(t)=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}\sin\omega t \Rightarrow \begin{bmatrix}-m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \quad (I)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}-m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2\end{vmatrix}=(-m_1\omega^2+k_1+k_2)(-m_2\omega^2+k_2)-k_2^2=0$$

$m_1=2m$, $k_1=k$

$m_2=m$, $k_2=3k$ $\Rightarrow (-2m\omega^2+4k)(-m\omega^2+3k)-(3k)^2=0$

$\Rightarrow 2m^2\omega^4-10mk\omega^2-6mk\omega^2+12k^2-9k^2=0$

$\Rightarrow 2m^2\omega^4-16mk\omega^2+3k^2=0 \rightarrow \omega^2=\frac{8\pm\sqrt{52}}{2}\cdot\frac{k}{m} \rightarrow \begin{cases}\omega_1=\left(\frac{8-\sqrt{52}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\\ \omega_2=\left(\frac{8+\sqrt{52}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\end{cases}$

با قرار دادن $\omega=\omega_1$ در رابطه (I) خواهیم داشت:

$$\begin{cases}(-2m\times\frac{8-\sqrt{52}}{2}\cdot\frac{k}{m}+4k)X_1-3kX_2=0\\ -3kX_1+(-m\times\frac{8-\sqrt{52}}{2}\cdot\frac{k}{m}+3k)X_2=0\end{cases}$$

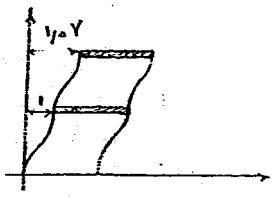
$$\rightarrow \begin{cases}(4-8+\sqrt{52})kX_1-3kX_2=0\\ -3kX_1+(3-\frac{8-\sqrt{52}}{2})kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=1.07 < 1.72$$

با قرار دادن $\omega=\omega_2$ در رابطه (I) خواهیم داشت:

$$\begin{cases}(-2m\times\frac{8+\sqrt{52}}{2}\cdot\frac{k}{m}+4k)X_1-3kX_2=0\\ -3kX_1+(-m\times\frac{8+\sqrt{52}}{2}\cdot\frac{k}{m}+3k)X_2=0\end{cases}$$

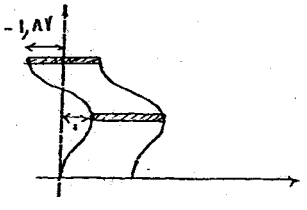
$$\rightarrow \begin{cases}(4-8-\sqrt{52})kX_1-3kX_2=0\\ -3kX_1+(3-\frac{8+\sqrt{52}}{2})kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=-1.87 > -0.72$$

$\omega_1=0.371\sqrt{\frac{k}{m}}$, $X^1=\begin{Bmatrix}1\\1.07\end{Bmatrix}$

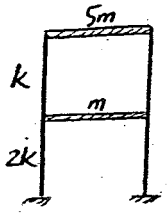


شکل مد اول ارتعاش

$\omega_2=2.77\sqrt{\frac{k}{m}}$, $X^2=\begin{Bmatrix}1\\-1.87\end{Bmatrix}$



شکل مد دوم ارتعاش



$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$$

$$\{x(t)\}=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}\sin\omega t \Rightarrow \begin{bmatrix}-m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$m_1=m,\ m_2=5m \qquad k_1=2k,\ k_2=k$$

$$\Rightarrow (-m\omega^2+2k)(-5m\omega^2+k)-k^2=0 \rightarrow 5m^2\omega^4-mk\omega^2-10mk\omega^2+2k^2-k^2=0$$

$$\Rightarrow 5m^2\omega^4-11mk\omega^2+k^2=0 \Rightarrow \omega^2=\frac{11\pm\sqrt{101}}{10}\cdot\frac{k}{m} \rightarrow \begin{cases}\omega_1=\left(\frac{11-\sqrt{101}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\\ \omega_2=\left(\frac{11+\sqrt{101}}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2}\end{cases}$$

$$\rightarrow \omega=\omega_1$$

$$\begin{cases}\left(-m\times\frac{11-\sqrt{101}}{2}\cdot\frac{k}{m}+2k\right)X_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(-5m\times\frac{11-\sqrt{101}}{2}\cdot\frac{k}{m}+k\right)X_2=0\end{cases}$$

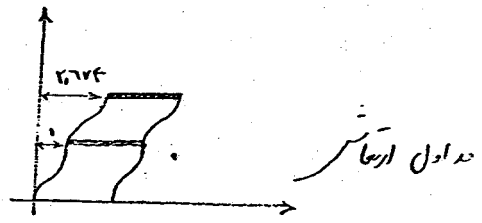
$$\rightarrow \begin{cases}\left(2-\frac{11-\sqrt{101}}{2}\right)kX_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(1-\frac{5}{2}(11-\sqrt{101})\right)kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=2.764>1$$

$$\omega=\omega_2$$

$$\begin{cases}\left(-m\times\frac{11+\sqrt{101}}{2}\cdot\frac{k}{5m}+2k\right)X_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(-5m\times\frac{11+\sqrt{101}}{2}\cdot\frac{k}{m}+k\right)X_2=0\end{cases}$$

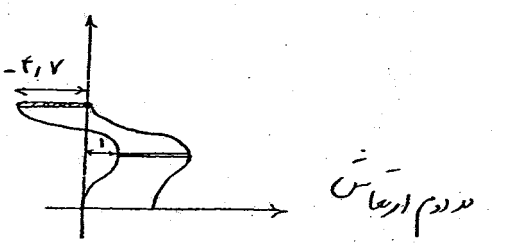
$$\Rightarrow \begin{cases}\left(2-\frac{11+\sqrt{101}}{2}\right)kX_1-kX_2=0\\ -kX_1+\left(1-\frac{5}{2}(11+\sqrt{101})\right)kX_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1}=-4.764<-0.1$$

$$\Rightarrow \omega_1=0.521\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \overline{X}^1=\begin{Bmatrix}1\\2.764\end{Bmatrix}$$



مد اول ارتعاش

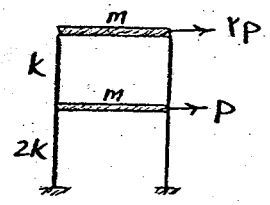
$$\omega_2=2.77\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \overline{X}^1=\begin{Bmatrix}1\\-4.764\end{Bmatrix}$$

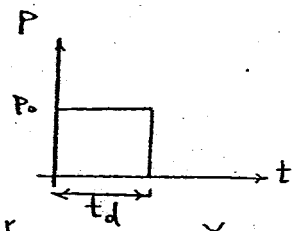


مد دوم ارتعاش

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری (۱۰)

ترین ساختمان دوطبقه شکل زیر فرض است اگر این ساختمان تحت تاثیر نیروهای وارده قرار گیرد مطلوب است تعیین: تغیرمکان طبقات در هریک از مدها و هم چنین تغیرمکان هر طبقات در صورتیکه t_d برابر با پریود مود اول ارتعاش باشد.





$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{Y}_{1(t)} \\ \ddot{Y}_{2(t)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 M_1 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 M_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_{1(t)} \\ Y_{2(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 2P \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \underline{X}_1^T m \underline{X}_1$$
$$M_2 = \underline{X}_2^T m \underline{X}_2$$

تعیین فرکانس های سیستم:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega_2^2 + k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + k \end{vmatrix} = (-m\omega^2 + 2k)(-m\omega^2 + k) - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 2k^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = (2 \pm \sqrt{2})\frac{k}{m} \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{k}{m}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \omega = \omega_1 \Rightarrow \begin{cases} [-m(2-\sqrt{2})\frac{k}{m} + 2k]X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_2 + [-m(2-\sqrt{2})\frac{k}{m} + k]X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = 2.4$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 0.776\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \underline{X}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.4 \end{Bmatrix} \quad , \quad T_1 = 8.2\sqrt{\frac{m}{k}} = t_d$$

$$, \quad \omega_2 = 1.848\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \underline{X}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.4 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{Y}_{k(t)} + \omega_k^2 Y_k = \frac{1}{M_k} f_{k(t)} \quad , \quad Y_{k(t)} = \frac{1}{M_k\omega_k}\int_0^t f_{k(\tau)} \sin\omega_k(t-\tau)d\tau$$

$$\{x_{(t)}\} = \sum_{k=1}^{N} \underline{X}_k Y_{k(t)} \overset{N=2}{=} [\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_2]\begin{Bmatrix} Y_{1(t)} \\ Y_{2(t)} \end{Bmatrix} = \underline{X}_1 Y_{1(t)} + \underline{X}_2 Y_{2(t)}$$

$$f_{k(t)} = \underline{X}_k^T F_{(t)} \qquad F_{(t)} = \begin{Bmatrix} P \\ 2P \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow f_{1(t)} = \{1 \quad 2.4\}\begin{Bmatrix} P \\ 2P \end{Bmatrix} = P + 4.8P = 5.8P$$

$$f_{2(t)} = \{1 \quad -0.4\}\begin{Bmatrix} P \\ 2P \end{Bmatrix} = P - 0.8P = 0.2P$$

جرم مدی مساوی $M_1 = \underline{X}_1^T m \underline{X}_1 = \{1 \quad 1.4\} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.4 \end{Bmatrix} = 3.12m$

جرم مدی مساوی دوم $M_2 = \underline{X}_2^T m \underline{X}_2 = \{1 \quad -0.4\} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.4 \end{Bmatrix} = 1.12m$

$$\Rightarrow Y_1(t) = \frac{1}{M_1 \omega_1} \int_0^{t_d} f_1(\tau) \sin \omega_1 (t-\tau) d\tau = \frac{1}{3.12m \times 0.277 \sqrt{\frac{k}{m}}} \int_0^{t_d} 0.8P \sin \omega_1 (t-\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow Y_1(t) = \frac{0.8P}{0.12\sqrt{km}} \int_0^{t_d} \sin \omega (t-\tau) d\tau = \frac{0.8P}{0.12\sqrt{km}} \times \frac{1}{\omega_1} (1 - \cos \omega_1 t_d) \quad 0 \le t \le t_d$$

$$\Rightarrow Y_1(t) = \frac{0.8P}{0.12\sqrt{km} \times 0.277 \sqrt{\frac{k}{m}}} (1 - \cos \omega_1 t_d) = 1.47 \frac{P}{k} (1 - \cos 2\pi) = 1.47 P/k \times 0$$

$$\Rightarrow Y_1(t) = 0 \qquad 0 \le t \le t_d$$

$$Y_2(t) = \frac{1}{M_2 \omega_2} \int_0^{t_d} f_2(\tau) \sin \omega_2 (t-\tau) d\tau = \frac{1}{1.12m \times 1.484 \sqrt{\frac{k}{m}}} \int_0^{t_d} 0.2P \times \sin \omega_2 (t-\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow Y_2(t) = \frac{0.2P}{1.12m \times \omega_2} \int_0^{t_d} \sin \omega_2 (t-\tau) = \frac{0.2P}{1.12m \omega_2} \times \frac{1}{\omega_2} (1 - \cos \omega_2 t_d) \quad 0 \le t \le t_d$$

$$\Rightarrow Y_2(t) = \frac{0.2P}{1.12m \times 2.2 \times \frac{k}{m}} \left(1 - \cos\left(1.484 \sqrt{\frac{k}{m}} \times 1.2 \sqrt{\frac{m}{k}}\right)\right) =$$

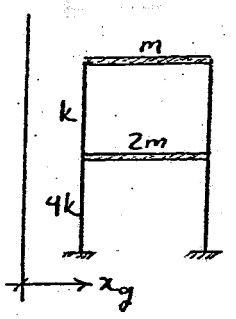
$$\rightarrow Y_2(t) = 0.0807 \frac{P}{k} (1.18) = 0.0948 \frac{P}{k} \qquad 0 \le t \le t_d$$

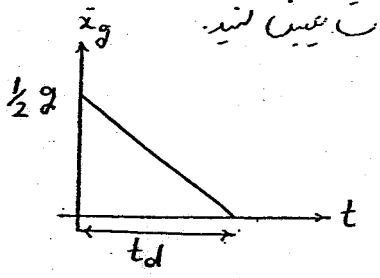
$$\{x(t)\} = [\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_2] \begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.4 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0948 \frac{P}{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0948 P/k \\ -0.0325 \frac{P}{k} \end{Bmatrix}$$ سایر

$$\{x(t)\} = [\underline{X}_1] \{Y_1(t)\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.4 \end{bmatrix} \{0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری ۱۰

- ساختمان دوطبقه شکل زیر تحت اثر شتاب زمین مطابق با نگاشتار نشان داده شده می باشد در صورتیکه t_d مساوی با دو برابر پریود مد اول سازه باشد مطلوبست تعیین تغییر مکان ها در هریک از مدها و تغییر مکان- مکس، نیروهای اینرسی در هریک از مدها، نیروی اینرسی مکس و مقدار برش پایه در هریک از مدها و برش پایه مکس. ضمناً درصد مشارکت مدال را در هریک از محاسبات تعیین کنید.





$$\ddot{x}_g(t) = -\frac{g}{2t_d}t + \frac{g}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{-1}{t_d}\cdot t + 1\right)$$

تعیین فرکانس های سازه:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = 0 \quad , \quad \{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2m\omega^2 + 3k & -k \\ -k & -m\omega^2 + k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow (-2m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k) - k^2 = 0 \Rightarrow 2m^2\omega^4 - 2mk\omega^2 - 3mk\omega^2 + 3k^2 - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2\omega^4 - 5mk\omega^2 + 2k^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}\frac{k}{m} \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2} \\ \omega_2 = \left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m}\right)^{1/2} \end{cases}$$

$$\omega = \omega_1 \Rightarrow \begin{cases} \left(-2m \times \frac{5-\sqrt{17}}{2\cdot 4}\cdot\frac{k}{m} + 3k\right)X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + \left(-m \times \frac{5-\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m} + k\right)X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = \frac{3+\sqrt{17}}{2} = 3.781$$

$$\omega = \omega_2 \Rightarrow \begin{cases} \left(-2m_1 \frac{5+\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m} + 3k\right)X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + \left(-m \times \frac{5+\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{k}{m} + k\right)X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = \frac{2-\sqrt{17}}{2} = -0.781$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 0.484\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \overline{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.781 \end{Bmatrix} \quad , \quad T_1 = 2.09\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{t_d}{2}$$

$$\omega_2 = 1.17\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \overline{X}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.781 \end{Bmatrix}$$

$$[M]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=-[M][\tau]\ddot{x}_g$$

$$\Rightarrow \ddot{Y}_k+\omega_k^2 Y_k=\frac{1}{M_k}t_k(t) \qquad M_k=X_k^T m X_k$$

$$, t_k(t)=\bar{k}_k\ddot{x}_g(t) \qquad \bar{k}_k=-X_k^T[m][\tau] \quad \text{ضریب مشارکت زلزله}$$

$$Y_k(t)=\frac{\bar{k}_k}{M_k\omega_k}\cdot V_k(t) \qquad V_k(t)=\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow V_1(t)=\int_0^{t_d}\left(\frac{-g}{2t_d}\tau+\frac{g}{2}\right)\times\sin\omega_1(t_d-\tau)d\tau=\frac{g}{2}\int_0^{t_d}\left(-\frac{1}{t_d}\tau+1\right)\sin\omega_1(t_d-\tau)d\tau$$

$$\rightarrow V_1(t)=\frac{g}{2}\left(\frac{\sin(t_d\cdot\omega_1)}{t_d\cdot\omega_1^2}-\frac{\cos(t_d\cdot\omega_1)}{\omega_1}\right)=-\frac{g}{2\omega_1}=-0.09g\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad 0\le t\le t_d$$

$$\rightarrow V_2(t)=\int_0^{t_d}\left(\frac{-g}{2t_d}\tau+\frac{g}{2}\right)\sin\omega_2(t_d-\tau)d\tau=\frac{g}{2}\int_0^{t_d}\left(-\frac{1}{t_d}\tau+1\right)\sin\omega_2(t_d-\tau)d\tau$$

$$\rightarrow V_2(t)=\frac{g}{2}\left(\frac{\sin(t_d\cdot\omega_2)}{t_d\cdot\omega_2^2}-\frac{\cos(t_d\cdot\omega_1)}{\omega_2}\right)=-0.128g\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad 0\le t\le t_d$$

$$\bar{k}_1=-X_1^T[m][\tau]=-\begin{bmatrix}1 & 1.62\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}2m & 1.62m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_1=-3.62m$$

$$\bar{k}_2=-X_2^T[m][\tau]=-\begin{bmatrix}1 & -0.62\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}2m & -0.62m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_2=-1.38m$$

$$M_1=\begin{bmatrix}1 & 1.62\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1.62\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}2m & 1.62m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1.62\end{Bmatrix}=16.19m$$

$$M_2=\begin{bmatrix}1 & -0.62\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-0.62\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}2m & -0.62m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-0.62\end{Bmatrix}=2.61m$$

$$\Rightarrow Y_1(t)=\frac{\bar{k}_1}{M_1\omega_1}V_1(t)=\frac{-3.62m}{16.19m\times 0.147\sqrt{\frac{m}{k}}}\times -0.09g\sqrt{\frac{m}{k}}=0.124g\frac{m}{k}$$

$$Y_2(t)=\frac{\bar{k}_2}{M_2\omega_2}V_2(t)=\frac{-1.38m}{2.61m\times 1.18\sqrt{\frac{k}{m}}}\times -0.128g\sqrt{\frac{m}{k}}=0.10g\cdot\frac{m}{k}$$

$$\{x(t)\}_k = \Phi_k \cdot Y_{k(t)}$$

$$\Rightarrow \{x(t)\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3{,}562 \end{Bmatrix} \times \left(0{,}263\, g\frac{m}{k}\right) = \begin{Bmatrix} 0{,}263\, g\frac{m}{k} \\ 0{,}937\, g\frac{m}{k} \end{Bmatrix}$$

$$\{x(t)\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}562 \end{Bmatrix} \times \left(0{,}105\, g\frac{m}{k}\right) = \begin{Bmatrix} 0{,}105\, g\frac{m}{k} \\ -0{,}059\, g\frac{m}{k} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{x(t)\}_{\text{کل}} = \Phi_1 Y_{1(t)} + \Phi_2 Y_{2(t)} = \begin{Bmatrix} 0{,}263\, g\frac{m}{k} \\ 0{,}937\, g\frac{m}{k} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0{,}105\, g\frac{m}{k} \\ -0{,}059\, g\frac{m}{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}368\, g\frac{m}{k} \\ 0{,}878\, g\frac{m}{k} \end{Bmatrix}$$

$$\{f_{s(t)}\}_k = [M]\{\Phi_k\} \cdot \frac{\bar{L}_k}{M_k} \cdot \omega_k \cdot V_{k(t)}$$

$$\Rightarrow \{f_{s(t)}\}_1 = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3{,}562 \end{Bmatrix} \cdot \frac{-5{,}562m}{14{,}69m} \cdot 0{,}848 \times \sqrt{\frac{k}{m}} \times -0{,}559g \times \sqrt{\frac{m}{k}} =$$

$$\Rightarrow \{f_{s(t)}\}_1 = \begin{Bmatrix} 2m \\ 3{,}562m \end{Bmatrix} \cdot \frac{2{,}784g}{14{,}69} = \begin{Bmatrix} 2m \\ 3{,}562m \end{Bmatrix} \times 0{,}189g = \begin{Bmatrix} 0{,}379\, mg \\ 0{,}673\, mg \end{Bmatrix}$$

$$, \{f_{s(t)}\}_2 = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}562 \end{Bmatrix} \cdot \frac{-1{,}438m}{2{,}316m} \cdot 1{,}67\sqrt{\frac{k}{m}} \times -0{,}282g \times \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\Rightarrow \{f_{s(t)}\}_2 = \begin{bmatrix} 2m \\ -0{,}562m \end{bmatrix} \times 0{,}292g = \begin{Bmatrix} 0{,}585\, mg \\ -0{,}164\, mg \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_{s(t)}\}_{\text{کل}} = \begin{Bmatrix} 0{,}379\, mg \\ 0{,}673\, mg \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0{,}585\, mg \\ -0{,}164\, mg \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}964\, mg \\ 0{,}509\, mg \end{Bmatrix}$$

$Q_{1(t)} = 0{,}379\, mg + 0{,}673\, mg = 1{,}052\, mg$ برش پایه در مد اول

$Q_{2(t)} = 0{,}585\, mg - 0{,}164\, mg = 0{,}421\, mg$ برش پایه در مد دوم

$\Rightarrow$ کل $Q_{(t)} = 1{,}052\, mg + 0{,}421\, mg = 1{,}473\, mg$ → درصد مشارکت مدال: ۷۱,۴۲٪

$$M^* = \frac{\bar{L}_k^2}{M_k} = \begin{Bmatrix} \dfrac{(-5{,}562m)^2}{14{,}69m} \\[2ex] \dfrac{(-1{,}438m)^2}{2{,}316} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2{,}106m \\ 0{,}894m \end{Bmatrix}$$

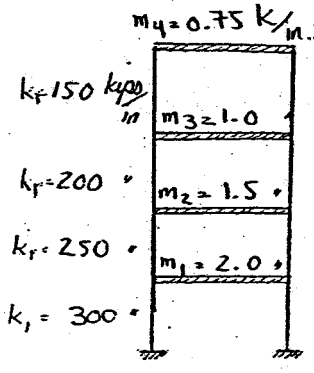
→ درصد مشارکت: ۷۰٪

۳۰٪

$\Sigma M = 2{,}999$

مریم سلیمی ۸۱۲۴۰۳۰ سری (۱۱-۱)

- ساختمان ۴ طبقه شکل زیر فرض است در صورتیکه بردار تغییرمکان اصلی در لحظه $t_1 = ?s$ مقدار ماکزیمم خود را داشته باشد برای مدل دانی مقدار برای سایر مدها بصورت بردار نشان داده شده در زیر باشد مطلوب است تعیین تغییرمکان طبقات دهم چنین بردار نرمدی الاستیک و فرکانس پایه.



$$S_d = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{Bmatrix} \quad \{x_k\}_{max} = \bar{X}_k \cdot \frac{\bar{k}_k}{M_k} \cdot S_{dk}$$

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & -m_3\omega^2 + k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & -m_4\omega^2 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2\omega^2 + 500 & -250 & 0 & 0 \\ -250 & -1.5\omega^2 + 450 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & -\omega^2 + 250 & -150 \\ 0 & 0 & -150 & -0.75\omega^2 + 150 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 0.4 \qquad \omega_2 = 12.7 \qquad \omega_3 = 19.14 \qquad \omega_4 = 23.82 \ rad/s$$

$$\omega = \omega_1 \Rightarrow \begin{cases} (-2\omega_1^2 + k_1 + k_2)X_1 - k_2 X_2 = 0 \\ -k_2 X_1 + (-1.5\omega_1^2 + k_2 + k_3)X_2 - k_3 X_3 = 0 \\ -k_3 X_2 + (-\omega_1^2 + k_3 + k_4)X_3 - k_4 X_4 = 0 \\ -k_4 X_3 + (-0.75\omega_1^2 + k_4)X_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-2 \times 0.4^2 + 500)X_1 - 250 X_2 = 0 \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = 1.977 \\ -250 X_1 + (-1.5 \times 0.4^2 + 450)X_2 - 200 X_3 = 0 \Rightarrow \frac{X_3}{X_1} = 2.746 \\ -200 X_2 + (-0.4^2 + 250)X_3 - 150 X_4 = 0 \Rightarrow \frac{X_4}{X_1} = 3.251 \end{cases}$$

$$\omega_1 = 0.4 \ rad/s \qquad \bar{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.977 \\ 2.746 \\ 3.251 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 = 12.7 \Rightarrow \begin{cases} (-2\times 12.7^2 + 500)X_1 - 250X_2 = 0 \\ -250X_1 + (-1.5\times 12.7^2 + 450)X_2 - 200X_3 = 0 \\ -200X_2 + (-1\times 12.7^2 + 350)X_3 - 150X_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = 0.91$$

$$\Rightarrow \frac{X_3}{X_1} = -0.4$$

$$\Rightarrow \frac{X_4}{X_1} = -1.59$$

$$\Rightarrow \omega_3 = 12.7 \ rad/s \qquad \Rightarrow \underline{X}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.91 \\ -0.4 \\ -1.59 \end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 = 19.14 \ rad/s \Rightarrow \begin{cases} (-2\times 19.14^2 + 500)X_1 - 250X_2 = 0 \\ -250X_1 + (-1.5\times 19.14^2 + 450)X_2 - 200X_3 = 0 \\ -200X_2 + (-19.14^2 + 250)X_3 - 150X_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = -0.241$$

$$\Rightarrow \frac{X_3}{X_1} = -0.117$$

$$\Rightarrow \frac{X_4}{X_1} = 1.07$$

$$\omega = \omega_4 = 23.12 \ rad/s \Rightarrow \begin{cases} (-2\times 23.12^2 + 500)X_1 - 250X_2 = 0 \\ -250X_1 + (-1.5\times 23.12^2 + 450)X_2 - 200X_3 = 0 \\ -200X_2 + (-23.12^2 + 250)X_3 - 150X_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = -1.24$$

$$\Rightarrow \frac{X_3}{X_1} = 2.441$$

$$\Rightarrow \frac{X_4}{X_1} = -1.174$$

$$\Rightarrow \omega_4 = 19.14 \ rad/s \qquad \underline{X}_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.241 \\ -0.117 \\ 1.07 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_4 = 23.12 \ rad/s \qquad \underline{X}_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.24 \\ 2.441 \\ -1.174 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{k}_k = -\underline{X}_k^T [m][I] \qquad [m] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_1 = -\begin{Bmatrix} 1 & 1.97 & 2.24 & 2.241 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_1 = -\begin{Bmatrix} 2 & 2.951 & 2.24 & 2.244 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = -10.135$$

$$\bar{k}_{f=} = \langle 1 \quad 0.91 \quad -0.4 \quad -1.59 \rangle \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = -1.8728$$

$$\bar{k}_{f=} = \langle 1 \quad -0.2721 \quad -0.887 \quad 1.07 \rangle \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = -0.849$$

$$\bar{k}_{f=} = \langle 1 \quad -2.44 \quad 3.441 \quad -1.878 \rangle \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = -0.54$$

$$M_k = \underline{X}^T_k \, m \, \underline{X}_k$$

$$\Rightarrow M_1 = \langle 1 \quad 1.937 \quad 2.746 \quad -3.251 \rangle \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.937 \\ 2.746 \\ 3.251 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_1 = \begin{Bmatrix} 2 & 2.951 & 2.746 & 2.438 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.937 \\ 2.746 \\ 3.251 \end{Bmatrix} = 23.27$$

$$\Rightarrow M_2 = \langle 1 \quad 0.91 \quad -0.4 \quad -1.59 \rangle \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.91 \\ -0.4 \\ -1.59 \end{Bmatrix} =$$

$$\Rightarrow M_2 = \langle 2 \quad 1.475 \quad -0.4 \quad -1.1925 \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.91 \\ -0.4 \\ -1.59 \end{Bmatrix} = 5.23$$

$$\Rightarrow M_3 = \langle 1 \quad -0.2721 \quad -0.887 \quad 1.07 \rangle \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.2721 \\ -0.887 \\ 1.07 \end{Bmatrix} =$$

$$\Rightarrow M_3 = \langle 2 \quad -1.0975 \quad -0.887 \quad 0.8025 \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.2721 \\ -0.887 \\ 1.07 \end{Bmatrix} = 4.43$$

$$M_{f_2} = \langle 1 \quad -2{,}44 \quad 3{,}441 \quad -1{,}878 \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2{,}44 \\ 3{,}441 \\ -1{,}878 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{f_2} = \langle 2 \quad -3{,}01 \quad 3{,}441 \quad -1{,}401 \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ -2{,}44 \\ 3{,}441 \\ -1{,}878 \end{Bmatrix} = 24{,}78$$

$$\{\lambda_k\}_{max} = \overline{X}_k \cdot \frac{\overline{k}_k}{M_k} \cdot S_{dk}$$

$$\Rightarrow \{x_1\}_{max} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}977 \\ 2{,}747 \\ 3{,}251 \end{Bmatrix} \cdot \frac{-10{,}125}{24{,}27} \times 0{,}8 = \begin{Bmatrix} -0{,}448 \\ -0{,}785 \\ -0{,}957 \\ -1{,}131 \end{Bmatrix} \times 12$$

$$\Rightarrow \{x_2\}_{max} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}91 \\ -0{,}3 \\ -1{,}59 \end{Bmatrix} \times \frac{-1{,}875}{3{,}23} \times 0{,}7 = \begin{Bmatrix} -0{,}215 \\ -0{,}197 \\ 0{,}076 \\ 0{,}244 \end{Bmatrix} \times 12$$

$$\Rightarrow \{x_3\}_{max} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}741 \\ -0{,}877 \\ 1{,}07 \end{Bmatrix} \times \frac{-0{,}829}{5{,}44} \times 0{,}4 = \begin{Bmatrix} -0{,}0749 \\ 0{,}0347 \\ 0{,}077 \\ -0{,}108 \end{Bmatrix} \times 12$$

$$\Rightarrow \{x_4\}_{max} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2{,}44 \\ 3{,}441 \\ -1{,}878 \end{Bmatrix} \times \frac{-0{,}05}{24{,}78} \times 0{,}4 = \begin{Bmatrix} -7{,}44 \times 10^{-4} \\ 0{,}0151 \\ -0{,}0222 \\ 0{,}012 \end{Bmatrix} \times 12$$

نیروی اینرسی:

$$\{f_{sk}\}_{max} = [m][\overline{X}_k] \frac{\overline{k}_k}{M_k} \cdot S_{ak}$$

$$\Rightarrow \{f_{s_1}\}_{max} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}977 \\ 2{,}747 \\ 3{,}251 \end{Bmatrix} \cdot \frac{-10{,}125}{24{,}27} \times 0{,}8 \times 12 = \begin{Bmatrix} -8{,}37 \\ -12{,}34 \\ -11{,}48 \\ -10{,}19 \end{Bmatrix}$$

$$\{f_{s_2}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix}1\\ 0.91\\ -0.2\\ -1.59\end{Bmatrix} \times \frac{-2.578}{3.244} \times 0.7 \times 12 = \begin{Bmatrix}-3.157\\ -3.52\\ 0.77\\ 3.074\end{Bmatrix}$$

$$\{f_{s_3}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix}1\\ -0.721\\ -0.887\\ 1.07\end{Bmatrix} \times \frac{-0.879}{4.44} \times 0.4 \times 12 = \begin{Bmatrix}-1.797\\ 0.918\\ 0.797\\ -0.721\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_{s_4}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix}1\\ -2.44\\ 2.441\\ -1.178\end{Bmatrix} \times \frac{-0.057}{24.74} \times 0.3 \times 12 = \begin{Bmatrix}-0.154\\ 0.27\\ -0.276\\ 0.108\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_s\}_{max} = \begin{Bmatrix}(f_{s_{1m}}^2 + f_{s_{2m}}^2 + f_{s_{3m}}^2 + f_{s_{4m}}^2)^{1/2}\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}9.917\\ 12.87\\ 11.54\\ 10.67\end{Bmatrix}$$

نیروی برش پایه:

$$Q_{k\,max} = \frac{\bar{k}_k^2}{M_k}\omega_k S_{vk} = \frac{\bar{k}_k^2}{M_k}\omega_k^2 S_{dk}$$

$$\Rightarrow Q_{1max} = \frac{(-10.135)^2}{22.27} \times 3.4^2 \times 0.8 = 102.97 \times 12$$

$$Q_{2max} = \frac{(-1.8725)^2}{3.244} \times 12.7^2 \times 0.7 = 64.89 \times 12$$

$$Q_{3max} = \frac{(-0.879)^2}{4.44} \times 19.14^2 \times 0.4 = 22.74 \times 12$$

$$Q_{4max} = \frac{(-0.257)^2}{24.78} \times 24.82^2 \times 0.4 = 1.94 \times 12$$

$$\Rightarrow Q_{max} = \sqrt{102.97^2 + 64.89^2 + 22.74^2 + 1.94^2} = 122.84 \times 12$$

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری (۲ _ ۱۱)

- اگر سازه تمرین ۱ تحت اثر شتاب زمین لرزه قرار گیرد که در لحظه $t=2s$ بردار تنه سرعت آن برای کلیه مودها به صورت زیر باشد مطلوبست تعیین تغییر مکان طبقات در این لحظه. نیروی الاستیک در این لحظه، و هم چنین برش پایه در لحظه یاد شده.

$$V(t_2)=\begin{Bmatrix}2\\1.7\\1.5\\1.2\end{Bmatrix}\ ft/s \qquad \omega_n=\begin{Bmatrix}5.4\\12.7\\19.14\\23.82\end{Bmatrix}\ rad/s$$

$$\bar{K}_n=\begin{Bmatrix}-10.135\\-1.8725\\-0.829\\-0.534\end{Bmatrix} \qquad M_n=\begin{Bmatrix}23.27\\5.23\\4.43\\24.68\end{Bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1.967&0.91&-0.731&-2.34\\2.746&-0.3&-0.887&3.441\\3.251&-1.59&1.07&-1.868\end{bmatrix}$$

$$\{x_k\}_{max}=\Phi_k\,\frac{\bar{K}_k}{M_k}\,S_{dk}=\Phi_k\cdot\frac{\bar{K}_k}{M_k}\cdot\frac{V(t)}{\omega_k}$$

$$\Rightarrow \{x_1\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\1.967\\2.746\\3.251\end{Bmatrix}\times\frac{-10.135}{23.27}\times\frac{2}{5.4}=\begin{Bmatrix}-0.161\\-0.317\\-0.442\\-0.524\end{Bmatrix}\times 12$$

(-0.161)

$$\Rightarrow \{x_2\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\0.91\\-0.3\\-1.59\end{Bmatrix}\times\frac{-1.8725}{5.23}\times\frac{1.7}{12.7}=\begin{Bmatrix}-0.0479\\-0.0436\\0.0144\\0.0762\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_3\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\-0.731\\-0.887\\1.07\end{Bmatrix}\times\frac{-0.829}{4.43}\times\frac{1.5}{19.14}=\begin{Bmatrix}-0.0147\\0.0107\\0.013\\-0.0157\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_4\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\-2.34\\3.441\\-1.868\end{Bmatrix}\times\frac{-0.534}{24.68}\times\frac{1.2}{23.82}=\begin{Bmatrix}-1.082\times10^{-3}\\2.534\times10^{-3}\\-3.722\times10^{-3}\\2.021\times10^{-3}\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow x_{max}=\begin{Bmatrix}0.169\\0.32\\0.442\\0.529\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\{f_{s_k}\}_{max} = [M][X_k]\,\frac{\bar{k}_k}{M_k}\cdot S_{a_k} = [M][X_k]\cdot\frac{\bar{k}_k}{M_k}\cdot \omega\cdot V_{(t)}$$

$$\Rightarrow \{f_{s_1}\}_{max} = [M][X_k]\times\frac{-10.135}{24.17}\ [-4.704]\times 5.4\times 2 = \begin{Bmatrix}-9.408\\-13.88\\-14.917\\-11.469\end{Bmatrix}\times 12$$

$$,\ \{f_{s_2}\}_{max} = [M][X_2]\times\frac{-1.8725}{5.32}\ [-7.72]\times 14.7\times 1.7 = \begin{Bmatrix}-15.46\\-10.55\\2.419\\9.22\end{Bmatrix}\times 12$$

$$,\ \{f_{s_3}\}_{max} = [M][X_3]\times\frac{-0.829}{4.44}\ [-5.37]\times 19.14\times 1.5 = \begin{Bmatrix}-10.75\\5.89\\4.76\\-4.31\end{Bmatrix}\times 12$$

$$,\ \{f_{s_4}\}_{max} = [M][X_4]\times\frac{-0.532}{44.68}\ [-0.714]\times 23.82\times 1.2 = \begin{Bmatrix}-1.24\\2.16\\-2.11\\0.86\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{f_s\}_{max} = \begin{Bmatrix}21.085\\18.52\\14.11\\15.36\end{Bmatrix}\times 12$$

$$Q_{k\,max} = \frac{\bar{k}_k^{2}}{M_k}\cdot\omega_k\cdot V_{(t)}$$

برش پایه:

$$\rightarrow Q_{1\,max} = \frac{(-10.135)^2}{23.27}\times 5.4\times 2 = 47.67\times 12$$

$$Q_{2\,max} = \frac{(-1.8725)^2}{5.32}\times 14.7\times 1.7 = 14.47\times 12$$

$$Q_{3\,max} = \frac{(-0.829)^2}{4.44}\times 19.14\times 1.5 = 4.45\times 12$$

$$Q_{4\,max} = \frac{(-0.532)^2}{44.68}\times 23.82\times 1.2 = 0.34\times 12$$

$$\Rightarrow Q_{max} = 50.02\times 12$$

○ ماکزیمم برش پایه :

$$\left\{ Q_{k,max} \right\} = \frac{\bar{k}_k^{\,۲}}{m_k} \cdot S_{ak}$$ برش پایه ماکزیمم در مد k ام

$$Q_{1,max} = \frac{۱۱,۲۹۲^{۲}}{۲۴,۵۸۵} \times ۱۲۱,۰۱ = ۶۲۷,۶۱۴$$

$$Q_{۲,max} = \frac{۲^{۲}}{۶} \times ۲۴۹,۱۱ = ۱۶۶,۰۷۳$$

$$Q_{۳,max} = \frac{۰,۷۰۸^{۲}}{۳,۴۱۷} \times ۲۸۹,۹۶ = ۴۲,۵۳۶$$

$$Q_{max} = \left(۶۲۷,۶۱۴^{۲} + ۱۶۶,۰۷۳^{۲} + ۴۲,۵۳۶^{۲} \right)^{۱/۲} = ۶۵۰,۶۰۷ \ \text{kips}$$

○ جرم موثر :

$$m_k^{*} = \frac{\bar{k}_k^{\,۲}}{m_k}$$

$$m_1^{*} = \frac{۱۱,۲۹۲^{۲}}{۲۴,۵۸۵} = ۵,۱۸۶$$

$$m_۲^{*} = \frac{۲^{۲}}{۶} = ۰,۶۶۷$$

$$m_۳^{*} = \frac{۰,۷۰۸^{۲}}{۳,۴۱۷} = ۰,۱۴۷$$

$$m_1^{*} + m_۲^{*} + m_۳^{*} = ۶ = m_1 + m_۲ + m_۳ \longrightarrow \text{ok}$$

نمونه سؤال امتحان اصول مهندسی زلزله / جناب آقای دکتر تهرانی زاده

تهیه و تنظیم: A. Dayani

A. Dayani

* یک تیر طره با شرایط مربوطه مطابق شکل مفروض است.

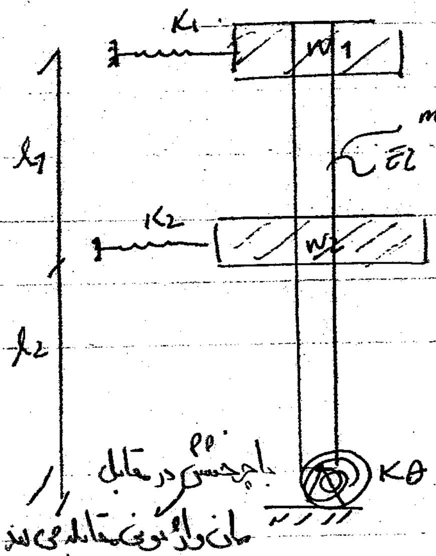
چنانچه این تیر در انتها دارای یک فنر پیچشی با سختی K_θ باشد و تحت بارگذاری زلزله با نمودار شتاب نگاشت زیر قرار گیرد مطلوبست تعیین:

1. K^* ، M^* و $\bar{K}$ دینامیکی — جرم در واحد طول: ۱٫۳

2. معادله حرکت، ماکزیمم تغییرمکان و لحظه مربوط به آن

3. معادله برش پایه در واحد طول و ماکزیمم آن

4. ماکزیمم برش پایه و همان لنگر پایه (یا همان واژگونی)



$l_1 = 40'$ (ft) $= ۴۸۰$ in

$l_2 = 60'$ (ft) $= ۷۲۰$ in

$K_1 = 200$ Kips/in

$K_2 = 400$ Kips/in

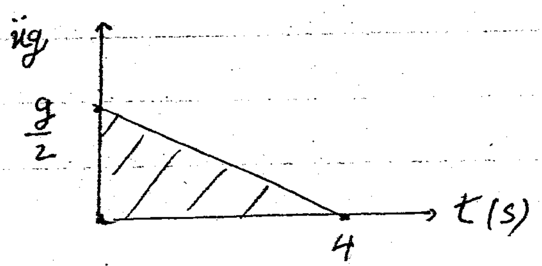
$w_1 = 50$ Kips $\Rightarrow m = ۰٫۱۳$ lb

$w_2 = 100$ Kips $\Rightarrow m = ۰٫۲۶$ lb

$m = 500$ lb/in (وزن فرض می کنیم)

$EI = 2\times10^5$ lb.in^2 $= ۲\times۱۰^۲$ kips.in^2

$K_\theta = 1000$ Kips.in/Rad



نمودار شتاب نگاشت زلزله g

$g = ۳۸۶ \; in/s^2 = ۳۲,۲ \; ft/s^2$

$1 ft = ۱۲ in$

تبدیل می‌کنیم به: k سختی $= \frac{kips}{ft}$

حل) برای حل ابتدا می‌بایستی تابع شکل مناسب را تعیین کرد. تعیین این تابع مستلزم یک راه حل طولانی است اما

با توجه به ارتفاع سازه بین توابع زیر، ما $\psi_1(x)$ را انتخاب می‌کنیم چرا که مقدار $\psi_1'(0) = 0$ اثر فنر پیچشی را که ابهام دارد را از بین می‌برد. چون سازه بلند است $\psi = \frac{x}{L}$ جواب می‌دهد

$\psi_1(x) = 1 - \cos \pi x/2l$ ✓

$\psi_2(x) = \sin \pi x/2l$

تابع شکلی مناسب تر است که ترم k_θ حذف شود یعنی مشتق آن در $x=0$ برابر صفر باشد $k^* = \ldots + k_\theta \psi'^2$

در مرحله بعد جدول تشکیل داده و مقادیر ψ و ψ' را برای اجرام فنر ها مشخص می‌کنیم. توجه شود که اول (W_1 و W_2) جرم‌ها می‌بایستی به جرم تبدیل شود و واحد فنر ها زمین ابتدا خطی شوند، این موضوع فوق العاده حیاتی است!

Item	x (ft)	ψ	ψ'
W_1	100	1	$(200/\pi)^{-1} (63.7)^{-1}$
W_2	60	0.4	$(250/\pi)^{-1} (50.9)$
K_1	100	1	$200/\pi$
K_2	60	0.4	$(250/\pi)^{-1}$

خطی واحد $\rightarrow K_1 = 200 \times 12 = 2400 \; kips/ft$

$K_2 = 400 \times 12 = 480 \; kips/ft$

جرم در واحد طول $m = \frac{0.500}{~~9.81~~ \; ۳۲,۲} \times 12 = 0.63 \; \frac{kips \cdot s^2}{(m) \cdot ft} \approx 0.21 \; kips \cdot \frac{s^2}{ft^2}$ (3 ft)

$m_1 = \frac{50}{~~9.81~~ \; ۳۲} = 5.2$

$m_2 = \frac{100}{~~9.81~~ \; ۳۲} = 9.2$

$(EI = 2 \times 10^6 \times 10^{-3}) \times \frac{1}{12}^2 = ۲۸ \; (kips \cdot ft)$

$\bar{K}$ ، M^* ، K^* تعیین

$$M^* = \int_0^L \mu(x)[\psi(x)]^2 + \sum m_i \psi_i^2$$

$$M^* = \int_0^L 0.21\left[1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right]^2 dx + m_1\psi_1^2 + m_2\psi_2^2$$

$$M^* \text{ از ضمیمه} = 0.21 \times 0.228 (100)^2 + 5.2\times 1^2 + 9.2\times 0.4^2 = 11.2 \ \frac{Kips.s^2}{ft^2}$$

$$K^* = \int_0^L EI \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\,dx + \sum K_i \psi_i^2 + K_\theta \cdot \theta^2$$

$$K^* = \frac{\pi^4}{32} \times 14/100^3 + 2400 \times \frac{1}{63.7}^2 + 4800 \times \frac{1}{80}^2 \simeq 1.34$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{1.34}{11.2}} = 0.35 \ \text{rad/s} \rightarrow T \simeq 12\ S$$

$$\bar{K} = \int_0^L \mu(x)\psi(x) + \sum m_i \psi_i$$

$$\bar{K} = 0.21 \times 0.364 \times 100 + 5.1\times 1 + 9.2\times 0.4 \simeq 8$$

$$\frac{\bar{K}}{M^*} = \frac{8}{11.2} \simeq 0.73$$ ضریب زیر

متحت اول حل شد!

اگر $t_d \leq \frac{T}{5}$ → بارضربه‌ای → ساده است → احتمالاً نمی‌دهد
داشتن انتگرال دوهامل نمی‌خواهد

2. معادله حرکت

$T \simeq 12^s$, $\tau = 4^s$, $\tau > T/10$ → No Impulse Loading

. آری بار ضربه‌ای چندان مطرح نیست .

$V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin \omega_d (t-\tau)\, d\tau$, $\xi \simeq 0$ فرض
$\omega_d = \omega_n = \omega^* = 0.35$

$\ddot{x}_g(t) = -g/8\, t + g/2 = g/2(-t/4+1)$

$V(t) = g/2 \int_0^t (-t/4+1) \sin 0.35(t-\tau)\, d\tau$

$V(t) = g/2 \times \frac{1}{0.35} \cos(t-\tau)\, d\tau \Big]_0^t - g/8 \int_0^t t \sin 0.35 (t-\tau) d\tau$

انتگرال‌گیری با ماشین حساب → $V(t) = g(1 - \cos t + 2\sin t)$

* دقت برای انتگرال‌گیری مدر نمی‌دهید، فرض کنید رطوبت رو بدید !

$V'(t) = 0$ → $t = 2.4s$ → $V_{max}(2.4) \simeq 2$

$x(t) = \psi(x) \frac{K}{m\,\tau\omega} V(t)$ → $x(t) = 2(1 - \cos \pi x/2L) g(1 - \cos t + 2\sin t)$
↳ معادله تغییر مکان

$x_{max}(t) = 2 \times 1 \times 2 \simeq 4$ inch → ماکزیمم تغییر مکان

* زمان تغییر مکان : 2.4^s *

نمونه سوالات امتحان اصول مهندسی زلزله / جناب آقای دکتر تهرانی زاده

تهیه و تنظیم: A. Dayani

A. Dayani

* یک تیر طره‌ای صلب با شرایط مربوطه مطابق شکل مفروض است.

چنانچه این تیر در انتها دارای یک فنر پیچشی با سختی K_θ باشد و تحت بارگذاری زلزله با نمودار شتاب نگاشت زیر قرار گیرد مطلوبست تعیین:

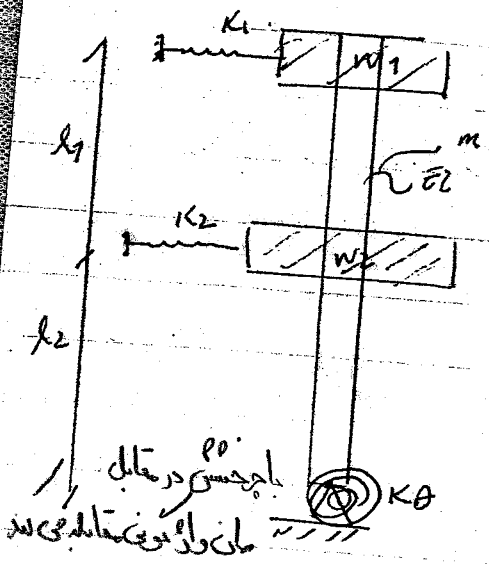
جرم در واحد طول: ۱٫۳

1. K^* ، M^* و $\bar{K}$ و فرکانس

2. معادله حرکت، ماکزیمم تغییر مکان نقطه مربوطه آن

3. معادله برش پایه در واحد طول و ماکزیمم آن

4. ماکزیمم برش پایه و ممان مقاوم پایه (یا ممان واژگونی)



$l_1 = 40' \,(ft) = 480\ in$

$l_2 = 60' \,(ft) = 720\ in$

$K_1 = 200\ Kips/in$

$K_2 = 400\ Kips/in$

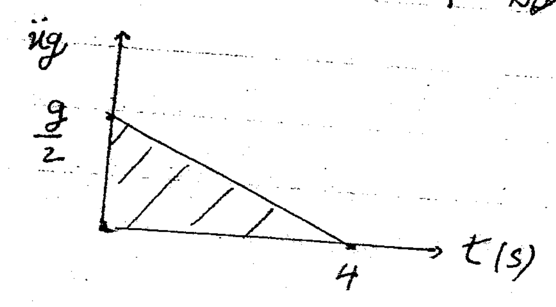
$W_1 = 50\ Kips \Rightarrow m = 0.13\ lb$

$W_2 = 100\ Kips \Rightarrow m = 0.26\ lb$

$m = 500\ lb/in$ (وزن فرض می‌کنیم)

$EI = 2\times10^5\ lb.in^2 = 2\times10^2\ kips.in^2$

$K_\theta = 1000\ Kips.in/Rad$



نمودار شتاب نگاشت زلزله

$M = K\theta$

$Q_m = Q_{m1} + Q_{m2}$

$Q_m = \frac{\bar{K}}{M^*} \omega^2 S_d \sum m_i \phi_i$

$Q_m = 0.73 \times 0.35^2 \times 0.04 \left[5.2 \times 1 + 9.2 \times 0.4\right] = 0.03$ ③

$Q_{Total} = Q_B + Q_S + Q_m$

$Q_T = ① + ② + ③ = 0.02 + 173 + 0.03 = 173.05 \text{ Kips}$

* تعیین ممان واژگونی

دو راه حل وجود دارد ① روش مستقیم (عاقلانه‌ترین روش دارای ابهام و نقص و ...)

روش ما ... است

② روش ممان مقاوم یعنی استفاده از ممان قابل تحمل در سطح سختی $K\theta$

روش مستقیم به دلیل طولانی‌تر است.
روش دوم برگزیده می‌شود

②

واژگونی — مقاوم — فنر

$M_{OT} = M_R = M_s = K\theta \quad , \quad \theta = v(x,t)'$

$v(x,t) = \psi(x)\, v(t)$, $v(t)$: قبلاً تعریف شده است

$M_{R\,max} = ? \rightarrow \theta' = 0 \rightarrow v''(x,t) = 0 \rightarrow v''(t) = 0$

کافی است از معادله مشتق دوم $v''(t) = 0$ ، t را حساب می‌کنیم ← θ متناظر را به دست آورده و جایگذاری می‌کنیم.

والسلام

A. Dayani

A. Dayani

(6)

$$\{f_{s_1}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix}1\\ ۰/۹۱\\ -۰/۳\\ -۱/۵۹\end{Bmatrix} \times \frac{-۲/۵۷۸}{۵/۲۲} \times ۰/۶ \times ۱۲ = \begin{Bmatrix}-۵/۱۵۶\\ -۴/۵۲\\ ۰/۷۷\\ ۳/۰۲۴\end{Bmatrix}$$

$$\{f_{s_2}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix}1\\ -۰/۲۲۱\\ -۰/۸۸۷\\ ۱/۰۷\end{Bmatrix} \times \frac{-۰/۱۹۹}{۴/۴۴} \times ۰/۴ \times ۱۲ = \begin{Bmatrix}-۱/۷۹۶\\ ۰/۹۱۵\\ ۰/۲۹۷\\ -۰/۲۲۱\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_{s_4}\}_{max} = [M]\begin{Bmatrix}1\\ -۲/۲۴\\ ۲/۴۴۱\\ -۱/۱۷۸\end{Bmatrix} \times \frac{-۰/۰۷۷}{۲۴/۶۷} \times ۰/۳ \times ۱۲ = \begin{Bmatrix}-۰/۱۵۴\\ ۰/۲۷\\ -۰/۲۶۵\\ ۰/۱۰۸\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{f_s\}_{max} = \begin{Bmatrix}(f_{s_{1m}}^2 + f_{s_{2m}}^2 + f_{s_{3m}}^2 + f_{s_{4m}}^2)^{1/2}\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}۹/۹۱۶\\ ۱۲/۸۶\\ ۱۱/۵۴\\ ۱۰/۶۷\end{Bmatrix}$$

نیروی برش پایه:

$$Q_{k_{max}} = \frac{\bar{k}_k^2}{M_k}\omega_k S_{vk} = \frac{\bar{k}_k^2}{M_k}\omega_k^2 S_{dk}$$

$$\Rightarrow Q_{1max} = \frac{(-۱۰/۱۳۵)^2}{۲۲/۲۷} \times ۵/۴^2 \times ۰/۸ = ۱۰۲/۹۷ \times ۱۲$$

$$Q_{2max} = \frac{(-۱/۸۷۲۵)^2}{۵/۲۲} \times ۱۲/۷^2 \times ۰/۶ = ۶۴/۸۹ \times ۱۲$$

$$Q_{3max} = \frac{(-۰/۸۲۹)^2}{۴/۴۴} \times ۱۹/۱۴^2 \times ۰/۴ = ۲۲/۷۴ \times ۱۲$$

$$Q_{4max} = \frac{۰(-۰/۰۵۲)^2}{۲۴/۶۷} \times ۲۴/۸۲^2 \times ۰/۳ = ۱/۹۴ \times ۱۲$$

$$\Rightarrow Q_{max} = \sqrt{۱۰۲/۹۷^2 + ۶۴/۸۹^2 + ۲۲/۷۴^2 + ۱/۹۴^2} = ۱۲۴/۸۲ \times ۱۲$$

مریم شکیبا ۸۱۲۴۰۳۰ سری (۲_۱۱)

- اگر سازه تمرین ۱ تحت اثر شتاب زمین لرزه قرار گیرد و در لحظه $t=2s$ بردار شبه سرعت آن برای کلیه مودها به صورت زیر باشد مطلوبست تعیین تغییر مکان طبقات در این لحظه، نیروی الاستیک در این لحظه، و هم چنین برش پایه در لحظه یاد شده.

$$V(t_2)=\begin{Bmatrix}2\\1.7\\1.5\\1.2\end{Bmatrix} ft/s \qquad \omega_n=\begin{Bmatrix}5.4\\12.7\\19.14\\23.82\end{Bmatrix} rad/s$$

$$\bar{L}_n=\begin{Bmatrix}-10.135\\-1.8725\\-0.829\\-0.53\end{Bmatrix} \qquad M_n=\begin{Bmatrix}23.27\\5.24\\4.43\\24.68\end{Bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1.967&0.91&-0.731&-2.44\\2.746&-0.3&-0.887&3.441\\3.251&-1.59&1.07&-1.868\end{bmatrix}$$

$$\{x_k\}_{max}=\Phi_k\frac{\bar{L}_k}{M_k}\cdot S_{dk}=\Phi_k\cdot\frac{\bar{L}_k}{M_k}\cdot\frac{V(t)}{\omega_k}$$

$$\Rightarrow \{x_1\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\1.967\\2.746\\3.251\end{Bmatrix}\times\underbrace{\frac{-10.135}{23.27}}_{-0.161}\times\frac{2}{5.4}=\begin{Bmatrix}-0.161\\-0.317\\-0.442\\-0.524\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_2\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\0.91\\-0.3\\-1.59\end{Bmatrix}\times\frac{-1.8725}{5.24}\times\frac{1.7}{12.7}=\begin{Bmatrix}-0.0479\\-0.0436\\0.0144\\0.0762\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_3\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\-0.731\\-0.887\\1.07\end{Bmatrix}\times\frac{-0.829}{4.43}\times\frac{1.5}{19.14}=\begin{Bmatrix}-0.0147\\0.0107\\0.013\\-0.0157\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow \{x_4\}_{max}=\begin{Bmatrix}1\\-2.44\\3.441\\-1.868\end{Bmatrix}\times\frac{-0.53}{24.68}\times\frac{1.2}{23.82}=\begin{Bmatrix}-1.082\times10^{-3}\\2.53\times10^{-3}\\-3.722\times10^{-3}\\2.021\times10^{-3}\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\Rightarrow x_{max}=\begin{Bmatrix}0.169\\0.32\\0.442\\0.529\end{Bmatrix}\times 12$$

$$\{f_{s_k}\}_{max} = [M][\Phi_k]\frac{\bar{L}_k}{M_k}\cdot S_{a_k} = [M][\Phi_k]\cdot\frac{\bar{L}_k}{M_k}\cdot \omega \cdot V_{(t)}$$

$$\Rightarrow \{f_{s_1}\}_{max} = [M][\Phi_k]\times \overset{-۴/۷۰۴}{\frac{-۱۰/۱۳۵}{۲۳/۲۷}}\times ۵/۴\times ۲ = \begin{Bmatrix}-۹/۴۰۸\\-۱۳/۸۸\\-۱۲/۹۱۷\\-۱۱/۴۶۹\end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$,\ \{f_{s_2}\}_{max} = [M][\Phi_2]\times \overset{-۲/۷۲}{\frac{-۱/۸۷۲۵}{۵/۲۴}}\times ۱۲/۷\times ۱/۷ = \begin{Bmatrix}-۱۵/۴۶\\-۱۰/۵۵\\۲/۴۱۹\\۹/۲۲\end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$,\ \{f_{s_3}\}_{max} = [M][\Phi_3]\times \overset{-۵/۳۷}{\frac{-۰/۸۲۹}{۴/۴۴}}\times ۱۹/۱۴\times ۱/۵ = \begin{Bmatrix}-۱۰/۷۵\\۵/۸۹\\۴/۷۶\\-۴/۳۱\end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$,\ \{f_{s_4}\}_{max} = [M][\Phi_4]\times \overset{-۰/۶۱۴}{\frac{-۰/۵۳}{۲۴/۶۸}}\times ۲۳/۸۲\times ۱/۲ = \begin{Bmatrix}-۱/۲۳\\۲/۱۶\\-۲/۱۱\\۰/۸۶\end{Bmatrix}\times ۱۲$$

$$\Rightarrow \{f_s\}_{max} = \begin{Bmatrix}۲۱/۰۸۵\\۱۸/۵۴\\۱۴/۱۲\\۱۵/۳۶\end{Bmatrix}\times ۱۲$$

برش پایه:

$$Q_{k\,max} = \frac{\bar{L}_k^{\,۲}}{M_k}\cdot\omega_k\cdot V_{(t)}$$

$$\rightarrow Q_{1\,max} = \frac{(-۱۰/۱۳۵)^۲}{۲۳/۲۷}\times ۵/۴\times ۲ = ۴۷/۶۷\times ۱۲$$

$$Q_{2\,max} = \frac{(-۱/۸۷۲۵)^۲}{۵/۲۴}\times ۱۲/۷\times ۱/۷ = ۱۴/۴۷\times ۱۲$$

$$Q_{3\,max} = \frac{(-۰/۸۲۹)^۲}{۴/۴۴}\times ۱۹/۱۴\times ۱/۵ = ۴/۴۵\times ۱۲$$

$$Q_{4\,max} = \frac{(-۰/۵۳)^۲}{۲۴/۶۸}\times ۲۳/۸۲\times ۱/۲ = ۰/۳۳\times ۱۲$$

$$\Rightarrow Q_{max} = ۵۰/۰۲\times ۱۲$$

○ ماکزیمم برش پایه :

$$\left\{ Q_{k,max} \right\} = \frac{\bar{k}_k^2}{m_k} \cdot S_{ak}$$ برش پایه ماکزیمم در مد k ام

$$\begin{cases} Q_{1,max} = \dfrac{11,292^2}{34,585} \times 121,01 = 637,614 \\ Q_{2,max} = \dfrac{2^2}{6} \times 249,11 = 166,073 \\ Q_{3,max} = \dfrac{0,708^2}{3,417} \times 289,96 = 42,536 \end{cases}$$

$$Q_{max} = \left(637,614^2 + 166,073^2 + 42,536^2 \right)^{1/2} = 650,607 \quad kips$$

○ جرم موثر :

$$m_k^* = \frac{\bar{k}_k^2}{m_k}$$

$$\begin{cases} m_1^* = \dfrac{11,292^2}{34,585} = 5,186 \\ m_2^* = \dfrac{2^2}{6} = 0,667 \\ m_3^* = \dfrac{0,708^2}{3,417} = 0,147 \end{cases}$$

$$m_1^* + m_2^* + m_3^* = 6 = m_1 + m_2 + m_3 \longrightarrow ok$$