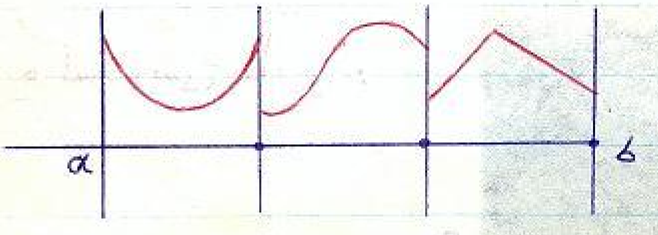
«ریاضیات مهندسی» «دکتر بهمرد»

تابع $f(x)$ کراندار را در $[a, b]$ تکه‌ای پیوسته گوییم در صورتی که در تعداد متناهی نقاط منفصل بوده و در نقاط انفصال حد چپ و راست موجود باشد.



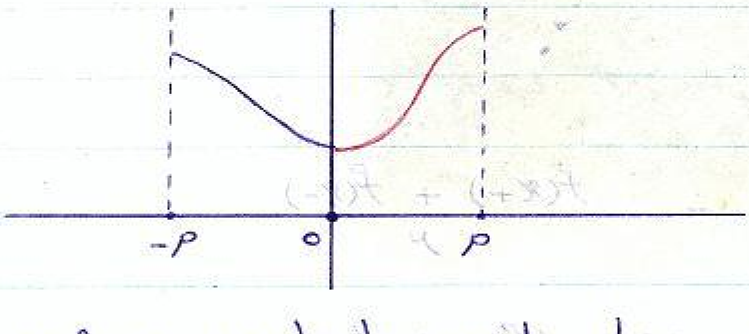
سری فوریه برای توابع تکه‌ای پیوسته :

$$* \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \sin\frac{n\pi}{p}x \right) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

$$f(x-) = f(x+) = f(x) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x)$$

سری فوریه سینوسی یا کسینوسی (بسط نیم دامنهٔ سینوسی یا کسینوسی)



$f(x) \qquad 0 < x < p$

* خودمان دامنه را تا $-p$ بسط دادیم تا تابع زوج شده و تمام $b_n \sin\frac{n\pi}{p}x$ صفر شود.

$$b_n = \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)_{\text{زوج}} \underbrace{\sin\frac{n\pi}{P}x}_{\text{فرد}}\, dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)_{\text{زوج}} \underbrace{\cos\frac{n\pi}{P}x}_{\text{زوج}}\, dx = \frac{2}{P}\int_{0}^{P} f(x)\cos\frac{n\pi}{P}x\, dx$$

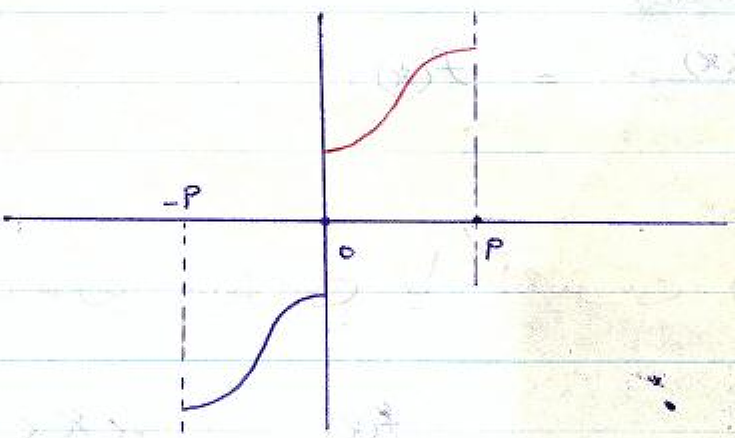
سری فوریه کسینوسی تابع :

$0 < x < P \qquad f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{P}x = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{P}\int_{0}^{P} f(x)\cos\frac{n\pi}{P}x\, dx$$

سری فوریه سینوسی تابع :



* بسط به تابع فرد می دهیم
تا a_n صفر شود ،
لذا :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{P}x = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{P}\int_{0}^{P} f(x)\sin\frac{n\pi}{P}x\, dx$$

$f(x) = x + \sin x \qquad -\pi < x < \pi$ صفحه ۵۰ - ٤ -

* سری فوریه $g(x) = x$: باید بدست آوریم *

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \sin \frac{n\pi}{p} x$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x & \cos nx \\ 1 \xrightarrow{\oplus} & +\frac{1}{n} \sin nx \\ 0 \xrightarrow{\ominus} & -\frac{1}{n^2} \cos nx \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \left(\frac{1}{n} x \cancel{\sin nx} + \frac{1}{n^2} \cos nx \right)_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$$

$$= \left(-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \cancel{\sin nx} \right)_0^{\pi} \frac{2}{\pi} = \frac{\pi}{n} (-1)^{n+1} \times \frac{2}{\pi}$$

$$= \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx = g(x)$ سری فوریه تابع x

$$\Rightarrow \quad * \; f(x) = g(x) + \sin x \; *$$

$$\Rightarrow \quad * \; f(x) = 3 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{2}{4} \sin 4x \ldots$$

$$= \frac{1}{L}\left[-\frac{1}{M}\cos ML - \frac{1}{N}\cos NL - \frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right]$$

$$= \frac{1}{L}\left[\frac{-1}{\frac{\pi}{L}(1+n)}\cos \frac{\pi}{\cancel{L}}(1+n)\cancel{L} - \frac{1}{\frac{\pi}{L}(n+1)}\cos \frac{\pi}{\cancel{L}}(1-n)\cancel{L}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\frac{\pi}{l}(1+n)} - \frac{1}{\frac{\pi}{l}(1-n)}\right] \Rightarrow$$

$$* \; a_n = \frac{-1}{\pi(1+n)}(-1)^{n+1} - \frac{1}{\pi(1-n)}\underbrace{(-1)^{1-n}}_{(-1)^{n-1}} - \frac{1}{\pi(1+n)} - \frac{1}{\pi(1-n)}$$

$$* \; a_n = (-1)^n\left[\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\right] - \frac{1}{\pi(1+n)} - \frac{1}{\pi(1-n)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(-1)^n + 1\right]\left[\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\right] \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[(-1)^n + 1\right]\left[\frac{1-n+1+n}{1-n^2}\right] \Rightarrow$$

$$* \; a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n + 1}{1-n^2}\right]$$

* این رابطه در $n=1$ صادق نیست پس a_1 را باید جداگانه محاسبه کنیم.

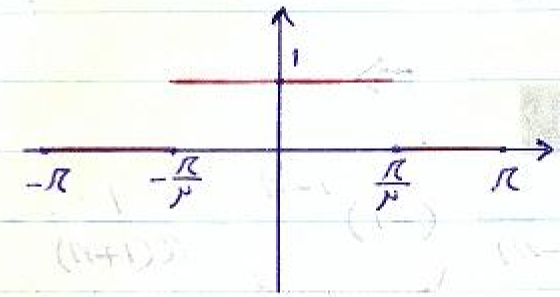
$$a_1 = \frac{2}{l}\int_0^L \sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi x}{L}\,dx$$

$$a_1 = \frac{1}{l}\int_0^l \sin\frac{2\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\left[\frac{-L}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{L}\right]_0^L$$

$$a_1 = \frac{1}{l}\left[-\frac{L}{2\pi}\sin\frac{2\pi l}{l}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{۲}{\pi} + \frac{۲}{\pi}\sum_{n=۲}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n+1}{1-n^۲}\right]\cos\frac{n\pi}{L}x$$

مسئله E –



(زوج)

$b_n = ۰$

$$* \quad f(x) = \begin{cases} ۱ & -\frac{\pi}{۲} < x < \pi \\ ۰ & -\pi < x < -\frac{\pi}{۲} \ , \quad \frac{\pi}{۲} < x < \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{۲} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi}{P}x\right]$$

(یا)

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{۲} = \frac{a_0}{۲} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi}{P}x\right]$$

$$a_n = \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\cos\frac{n\pi}{P}x\,dx = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos nx\,dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\underset{۰}{\cancel{\cos nx}}\,dx = \frac{۲}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۲}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{۲}\right]$$

$$n \neq ۰ \quad \Rightarrow \quad * \ a_0 = \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} dx = \frac{۲}{\pi}\left(\frac{\pi}{۲}\right) = \frac{1}{۲}\times ۲ = 1$$

$$*\ f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{2} \cos\frac{n\pi x}{\cancel{\pi}} \Rightarrow$$

$$*\ f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos x + \frac{1}{\pi}(0)\cancel{\cos 2x} + \frac{2}{3\pi}\cos 3x + \cdots$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{3\pi}\cos 3x + \frac{2}{5\pi}\cos 5x - \cdots$$

سری فوریهٔ دوگانه : فرض می کنیم $f(x,y)$ یک تابع متناوب باشد که دوره تناوب آن نسبت به x ، $2p$ و نسبت به y ، $2p'$ باشد. برای یک لحظه y را ثابت فرض می کنیم :

$$W = f(x,y) \qquad f(x+2p, y) = f(x,y)$$
$$f(x, y+2p') = f(x,y)$$

$$f(x,y) = \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y)\cos\frac{n\pi x}{p} + b_n(y)\sin\frac{n\pi}{p}x \qquad (\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{aligned} a_n(y) &= \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x,y)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx \\ b_n(y) &= \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x,y)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx \end{aligned}\right\} \text{الف}$$

a_n و b_n توابعی از y هستند و لذا دوره تناوب آنها $2p'$ است و می‌توان مانند یک تابع متناوب برای آن سری فوریه نوشت :

$$(\mathrm{II})\ a_n(y) = \frac{a_{n0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\cos\frac{m\pi}{p'}y + b_{nm}\sin\frac{m\pi}{p'}y$$

$$(\mathrm{III})\ b_n(y) = \frac{c_{n0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}\cos\frac{m\pi}{p'}y + d_{nm}\sin\frac{m\pi}{p'}y$$

$$\left.\begin{aligned}
a_{nm} &= \frac{1}{p'}\int_{-p'}^{p'} a_n(y)\cos\frac{m\pi}{p'}y\,dy\\
b_{nm} &= \frac{1}{p'}\int_{-p'}^{p'} a_n(y)\sin\frac{m\pi}{p'}y\,dy\\
c_{nm} &= \frac{1}{p'}\int_{-p'}^{p'} b_n(y)\cos\frac{m\pi}{p'}y\,dy\\
d_{nm} &= \frac{1}{p'}\int_{-p'}^{p'} b_n(y)\sin\frac{m\pi}{p}y\,dy
\end{aligned}\right\}\ \text{(ب)}$$

روابط II و III را در رابطه I جایگذاری می کنیم :

$$f(x,y) = \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{0m}\cos\frac{m\pi}{p'}y + b_{0m}\sin\frac{m\pi}{p'}y\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n0}\cos\frac{n\pi}{p}x + c_{n0}\sin\frac{n\pi}{p}x\right) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{nm}\cos\frac{m\pi}{p'}y + b_{nm}\sin\frac{m\pi}{p'}y\right)\cos\frac{\pi n x}{p} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(c_{nm}\cos\frac{m\pi}{p'}y + d_{nm}\sin\frac{m\pi}{p'}y\right)\sin\frac{n\pi}{p}x\right]$$

$$f(x,y) = \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{0m}\cos\frac{m\pi}{p'}y + b_{0m}\sin\frac{m\pi}{p'}y\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n0}\cos\frac{n\pi}{p}x+c_{n0}\sin\frac{n\pi}{p}x\right)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{nm}\cos\frac{m\pi}{p'}y\cos\frac{n\pi}{p}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(b_{nm}\sin\frac{m\pi}{p'}y\cos\frac{n\pi}{p}x\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c_{nm}\cos\frac{m\pi}{p'}y\sin\frac{n\pi}{p}x+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(d_{nm}\sin\frac{m\pi}{p'}y\cos\frac{n\pi}{p}x\right)$$

* ضرایب این سری فوریه دوگانه از جایگذاری روابط (الف) در (ب) محاسبه می شوند :

۱) $a_{nm}=\dfrac{1}{pp'}\displaystyle\int_{-p'}^{p'}\int_{-p}^{p}f(x,y)\cos\frac{n\pi}{p}x\cos\frac{m\pi}{p'}y\,dx\,dy \leftarrow a_n(y)$

۲) $b_{nm}=\dfrac{1}{pp'}\displaystyle\int_{-p'}^{p'}\int_{-p}^{p}f(x,y)\cos\frac{n\pi}{p}x\sin\frac{m\pi}{p'}y\,dx\,dy \leftarrow a_n(y)$

۳) $c_{nm}=\dfrac{1}{pp'}\displaystyle\int_{-p'}^{p'}\int_{-p}^{p}f(x,y)\sin\frac{n\pi}{p}x\cos\frac{m\pi}{p'}y\,dx\,dy \leftarrow b_n(y)$

۴) $d_{nm}=\dfrac{1}{pp'}\displaystyle\int_{-p'}^{p'}\int_{-p}^{p}f(x,y)\sin\frac{n\pi}{p}x\sin\frac{m\pi}{p'}y\,dx\,dy \leftarrow b_n(y)$

* از این فرمول معمولاً بعنوان Refrence استفاده می شود و حفظ کردنی نمی باشد.

* اما فرمول مورد نیاز در امتحان بدین صورت است :

* $f(x,y) = f(-x,y)$ ‏ f نسبت به x زوج است

* در این صورت تمام جملاتی که $\sin nx$ دارند صفر می شوند.

$$\begin{cases} f(x,y) = f(x,-y) & \text{نسبت به } y \text{ زوج} \\ f(-x,y) = -f(x,y) & \text{〃 〃 } x \text{ فرد} \end{cases}$$

* در این صورت تمام جملاتی که شامل $\sin y$ و $\cos x$ هستند حذف می شوند.

مثال امتحانی: مطلوبست سری فوریه تابع دو متغیرهٔ متناوب زیر:

$$f(x,y) = x\cos xy \qquad -1<x<1, \quad -1<y<1$$

* نیازی به فرمول نیست چون خود $\cos xy$ تابع مثلثاتی است که دوره تناوب آن نسبت به y ‏ ۲ است.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \qquad b_n = 2\int_0^1 x \sin n\pi x \, dx$$

$\Leftarrow$ طرفین را در $\cos xy$ ضرب می کنیم:

$$x\cos xy = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \cdot \cos xy$$

سری فوریه مختلط : بیشتر برای ساختن مدار است :

* فرض می کنیم $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $2P$ باشد .

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, e^{i\frac{n\pi}{P}x} \\ C_n = \frac{1}{2P}\int_{-P}^{P} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{P}x}\, dx \end{cases}$$

* وقتی تابع $f(x)$ بصورت نمائی باشد همواره این توابع را به صورت سری فوریه مختلط در می آوریم ؛ اگر بخواهیم از سری فوریه مختلط سری فوریه مثلثاتی بدست آوریم :

$$e^{i\frac{n\pi}{P}x} = \cos\frac{n\pi}{P}x + i\sin\frac{n\pi}{P}x$$

$$a_n = C_n + C_{-n}$$
$$b_n = i\left[C_n - C_{-n}\right]$$

* اگر بخواهیم از سری فوریه مثلثاتی سری فوریه مختلط را بدست - آوریم :

$$C_n = \frac{a_n - i b_n}{2} \qquad C_0 = \frac{a_0}{2}$$
$$C_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2}$$

مثال - مطلوبست سری فوریه تابع ذیل :

$$f(x) = e^{x} \qquad -\pi < x < \pi$$

(یا) : سری فوریه مختلط $f(x) = e^{x} \quad -\pi < x < \pi$ را نوشته سپس به کمک آن سری فوریه مثلثاتی را بدست آورید.

$$* \; C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x} \cdot e^{-inx} \, dx \Rightarrow$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} \, dx = \left[\frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{1-in} e^{(1-in)x} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-in)} \left[e^{\pi - in\pi} - e^{-\pi + in\pi} \right]$$

$$* \; e^{-in\pi} = \cos n\pi - i \sin n\pi = (-1)^n \; * \Rightarrow$$

$$= \frac{(-1)^n}{(1-in)\pi} \left[\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} \right] \Rightarrow$$

$$C_n = \frac{(-1)^n}{(1-in)\pi} \sinh \pi \Rightarrow$$

$$* \; e^{x} \approx \sinh \pi \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-in)\pi} e^{inx}$$ سری فوریه مختلط

* علامت $(\approx)$ به خاطر وجود حدجپ وراست است.

$$a_n = C_n + C_{-n} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \left[\frac{(-1)^n}{1-in} + \frac{(-1)^{-n}}{1+in} \right]$$

$$(-1)^n = (-1)^{-n} \Rightarrow \quad = \frac{\sinh \pi}{\pi} (-1)^n \left[\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in} \right]$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{\sinh \pi}{\pi} (-1)^n \, \frac{1+in+(1-in)}{1+n^2}$$

$$* \quad a_n = \frac{2}{\pi} (\sinh \pi) \, \frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad *$$

$$b_n = i\,[c_n - c_{-n}] = i \, \frac{\sinh \pi}{\pi} \left[\frac{(-1)^n}{1-in} - \frac{(-1)^{-n}}{1+in} \right]$$

$$= i \, \frac{\sinh \pi}{\pi} (-1)^n \, \frac{1+in-(1-in)}{1+n^2} =$$

$$i \, \frac{\sinh \pi}{\pi} (-1)^n \, \frac{2in}{1+n^2} \qquad \begin{cases} i \times i = i^2 = -1 \\ (-1)^n(-1) = (-1)^{n+1} \end{cases}$$

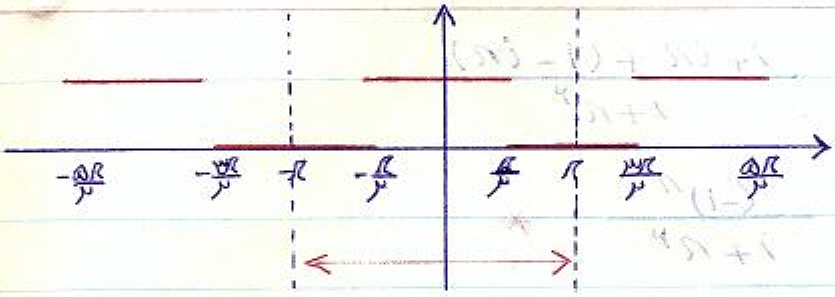
$$* \quad b_n = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} (-1)^{n+1} \, \frac{n}{1+n^2}$$

$$* \; e^x \approx \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1} n}{1+n^2} \sin nx$$

(مسائل ۱ تا ۱۳ و ۱۷ حل شود)

ت ۵ - ص ۵۱ -

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad T = 2\pi$$



* تابع زوج است.

$$\Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{(-1)^k \times 2}{(2k+1)\pi} & n = 2k+1 \end{cases}$$

* این فرمول تا جائی صادق است که $n \neq 0$ ، پس باید a_0 را حساب کنیم:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{\pi} \times \pi = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} \cos (2k+1) x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x + \cdots \right]$$

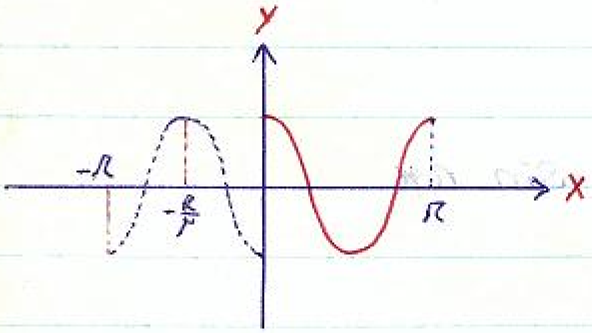
* در $x=0$:

$$= \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\cdots\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\cdots$$

$f(x) = \cos 2x \qquad 0 \leq x \leq \pi$ م ۷ - ص ۵۲ - قسمت C -



* بسط به تابع فرد می‌دهیم.

$$T = 2P = 2\pi \Longrightarrow P = \pi$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2x \sin nx \, dx \Longrightarrow$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin(2x+nx) - \sin(2x-nx)\right] dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\sin x(2+n) - \sin x(2-n)\right] dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{-1}{2+n} \cos x(2+n) + \frac{1}{2-n} \cos x(2-n)\right]\right\}_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{2-n} - \frac{(-1)^n}{2+n} - \frac{1}{2-n} + \frac{1}{2+n}\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n \times (+2n) - 2n}{4-n^2}\right]$$

$$b_n = \frac{2n}{\pi(4-n^2)}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\pi(4-n^2)}\left[(-1)^n - 1\right] \sin nx$$

* به ازای $n=2$ نمی توان محاسبه را از فرمول انجام داد پس باید b_2 را بیابیم :

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 4x \, dx = 0$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2 \times 4 \times (-2)}{-12\pi} \sin 4x + \frac{2 \times 6}{\text{«غ»}}}$$

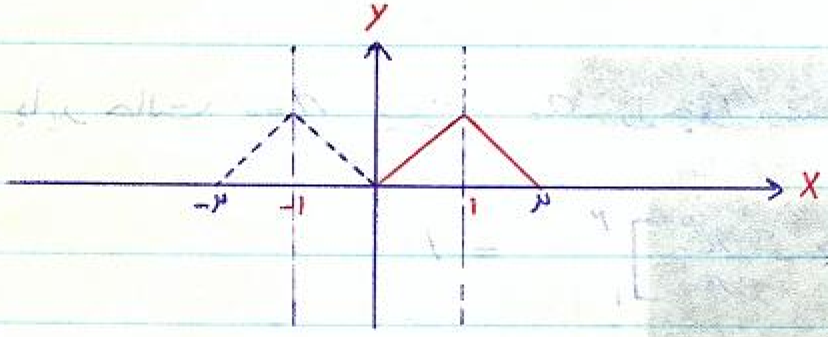
$$* \; f(x) = \sum_{K=1}^{\infty} \underbrace{\begin{cases} 0 & n = 2K \\ \dfrac{4(2K-1)}{\pi\left[(2K-1)^2 - 4\right]} & n = 2K+1 \end{cases}}_{b_n} \times \sin nx$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{(1^2-4)}\sin x + \frac{3}{(3^2-4)}\sin 3x + \frac{5}{(5^2-4)}\sin 5x + \dots\right]$$

تمرین ۶ ـ ص ۵۳ ـ d

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x < 2 \end{cases}$$

* به تابع زوج توسیع می دهیم.



$$T = 2P = 4 \Rightarrow P = 2$$

$$a_n = \frac{2}{2}\left\{ \int_0^1 x \cos\frac{n\pi}{2}x \, dx + \int_1^2 (2-x)\cos\frac{n\pi}{2}x \, dx \right\}$$

$$a_n = \left[\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x \right]_0^1$$

$$+ \left[\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x - \frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x \right]_1^2$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\cancel{\sin}\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n - \frac{4}{\cancel{n\pi}}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$+ \frac{2}{n\pi}\cancel{\sin}\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{8}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n + 1\right]$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{8}{4k^2\pi^2}\left[(-1)^k - 1\right] & n = 2k \\ 0 & n = 2k+1 \end{cases}$$

* باید حالت $n=0$ یعنی a_0 را جداگانه حساب کنیم :

$$a_0 = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos \frac{\cancel{2}k\pi}{\cancel{2}} x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\left[-2\cos \pi x - \frac{2}{3^2}\cos 3\pi x - \frac{2}{5^2}\cos 5\pi x - \dots\right]$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos (2k-1)\pi x$$

ت ۱۰ - ص ۵۲ : «فرمول پارسوال»

* در رشته های مهندسی معمولاً کاربردی ندارد.

$$* \int_{-l}^{l} [f(x)]^2 dx = l\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\right\}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$[f(x)]^2 = f(x)\frac{a_0}{2} + f(x)\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$\int_{-l}^{l} [f(x)]^2\,dx = \boxed{\int_{-l}^{l} f(x)\,\frac{a_0}{2}\,dx}\ \frac{a_0^2}{2}$$

$$+\int_{-l}^{l} f(x) \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\underbrace{a_n \int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx}_{l a_n}$$

$$+\underbrace{b_n \int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx}_{l b_n}\Bigg]$$

$\frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$ را $\frac{a_0^2}{2}$ نوشتیم چون $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = a_0$ است.

انتگرال فوریه - بطور کلی برای توابعی بکار می رود که متناوب نباشند وتوابعی انتگرال فوریه دارند که در شرط زیر صدق کنند:

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \quad (\text{یا}) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$$

بعلاوه تابع $f(x)$ تکه‌ای پیوسته در نظر گرفته می شود. لذا:

$$\begin{cases} f(x) = \int_{0}^{+\infty} [a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x]\, d\omega \\ a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x \, dx \\ b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x \, dx \end{cases}$$

* اگر $f(x)$ پیوسته نباشد علامت $(=)$ به $(\approx)$ تبدیل می شود و بجای $f(x)$ ، $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ نوشته می شود.

الف- اگر تابع زوج باشد یعنی $f(x) = f(-x)$:

$$f(x) = f(-x) \implies b(\omega) = 0$$

$$* \; f(x) = \int_{0}^{\infty} a(\omega) \cos \omega x \, d\omega \qquad * \; a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx$$

ب - اگر تابع فرد باشد:

$$f(x) = -f(-x) \quad \Rightarrow \quad a(\omega) = 0$$

$$* \; f(x) = \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega x \, d\omega \qquad * \; b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx$$

انتگرال فوریه مختلط:

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^{\infty} C(\omega) e^{i\omega x} d\omega \\ C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \end{cases}$$

مثال ۱- ص ۸۴، ۱۴-b- « حل شود »

نکته: $f(x) = \int_0^{\infty} C(\omega) (\cos \omega x + i \sin \omega x) \, d\omega$: (داریم)

$$f(x) = \int_0^{\infty} C(\omega) \cos \omega x \, d\omega + i \int_0^{\infty} C(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx \quad (1)$$

$$C(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx \quad ③$$

$$①+③ \longrightarrow \quad C(\omega) + C(-\omega) = a(\omega)$$

$$③-① \longrightarrow \quad C(-\omega) - C(\omega) = i\,b(\omega) \xrightarrow{\times i}$$

$$b(\omega) = i\left[C(\omega) - C(-\omega)\right]$$

$$a(\omega) = C(\omega) + C(-\omega)$$
$$b(\omega) = i\left[C(\omega) - C(-\omega)\right]$$

مثال - ص ۶۵ - ۶ - ۱۲ -

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}\cos\omega x\,d\omega = \underbrace{\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}}_{f(x)}$$

* اگر بتوانیم نشان دهیم که $\frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}$ ، $a(\omega)$ است مسئله حل است .

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx = \cancel{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cancel{\frac{\pi}{2}}\cos\omega x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos(\omega x + x) + \cos(\omega x - x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\omega+1}\sin(\omega+1)x + \frac{1}{\omega-1}\sin(\omega-1)x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\omega+1)\frac{\pi}{2}}{\omega+1} + \frac{\sin(\omega-1)\frac{\pi}{2}}{\omega-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos\omega\frac{\pi}{2}}{\omega+1} - \frac{\cos\omega\frac{\pi}{2}}{\omega-1}\right] = \frac{\cos\omega\frac{\pi}{2}}{2}\left[\frac{1}{\omega+1} - \frac{1}{\omega-1}\right]$$

$$= \frac{\cos\omega\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\frac{\omega-1-\omega-1}{\omega^2-1} = -\frac{\cos\omega\frac{\pi}{2}}{\omega^2-1} = \frac{\cos\omega\frac{\pi}{2}}{1-\omega^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\cos\omega\frac{\pi}{2}}{1-\omega^2}\cos\omega x\, d\omega = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \quad * \\ 0 & |x| = \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \quad * \end{cases}$$

تبدیل فوریه : « $\mathcal{F}[f(x)]$ »

$$\mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \tilde{\mathcal{F}}(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega = f(x)$$

** تبدیلات فوق را (جفت تبدیل فوریه) گویند.

الف - تبدیل فوریه کسینوسی تابع f :

«« اگر f زوج باشد »» (جفت تبدیل فوریه کسینوسی)

* $$\mathcal{F}_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos\omega x\, dx = \tilde{f}_c(\omega)$$

* $$\mathcal{F}_c^{-1}[\tilde{f}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \tilde{f}_c(\omega) \cos\omega x\, d\omega = f(x)$$

ب - تبدیل فوریه سینوسی تابع f :

* $$\mathcal{F}_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \sin\omega x\, dx = \tilde{f}_s(\omega)$$

* $$\mathcal{F}_s^{-1}[\tilde{f}(\omega)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \sin\omega x\, d\omega = f(x)$$

«« اگر f فرد باشد. »» (جفت تبدیل فوریه سینوسی)

خواص -

۱- $\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha\, \mathcal{F}[f] + \beta\, \mathcal{F}[g]$

۲- $\mathcal{F}[f'] = i\omega\, \mathcal{F}[f]$

۳- $\mathcal{F}[f''] = -\omega^2\, \mathcal{F}[f]$

۴- ** قضیه پیچش -

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

$$\mathcal{F}[f * g(x)] = \sqrt{2\pi}\, \underbrace{\mathcal{F}[f]}_{\tilde{f}(\omega)} \cdot \underbrace{\mathcal{F}(g)}_{\tilde{g}(\omega)}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}\tilde{g}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g$$

صفحه ت ۱۵ -

$f(x) = f(-x)$

$$f(bx) = \frac{1}{b}\int_0^\infty a\left(\frac{w}{b}\right) \cos wx\, dw$$

$$f(x) = \int_0^\infty a(\omega) \cos\omega x\, d\omega$$

$$f(bx) = \int_0^\infty a(\omega) \cos \omega b x \, d\omega \quad \Rightarrow$$

$$b\omega = W \qquad \omega = \frac{W}{b} \qquad d\omega = \frac{dW}{b}$$

$$f(bx) = \int_0^\infty a\left(\frac{W}{b}\right) \cos Wx \frac{dW}{b} = \frac{1}{b}\int_0^\infty a\left(\frac{W}{b}\right) \cos Wx \, dW$$

ب)

$$x^2 f(x) = \int_0^\infty \frac{-d^2 a(\omega)}{d\omega^2} \cos \omega x \, d\omega$$

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx$$

* از این عبارت نسبت به ω دو بار مشتق می گیریم :

$$\frac{d^2 a(\omega)}{d\omega^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)(-x^2) \cos \omega x \, dx$$

$$\frac{-d^2 a(\omega)}{d\omega^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty x^2 f(x) \cos \omega x \, dx$$

که این جفت فرمولی است که ما می خواهیم .

ت ۱۳ ـ ۶ ـ

$$f(x, y) = xy(a-x)(b-y)$$
$$0 < x \leq a$$
$$0 < y \leq b$$

تبدیل فوریه سینوسی ؟

$$d_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b xy(a-x)(b-y) \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y \, dy\, dx$$

* در انتگرال دوگانه اگر حدود ثابت باشند ، تبدیل به ضرب دو انتگرال می شود :

$$d_{nm} = \frac{4}{ab} \overbrace{\int_0^a \underbrace{x(a-x)}_{\text{«م»}} \sin\frac{n\pi}{a}x\,dx}^{I_1} \overbrace{\int_0^b y(b-y)\underbrace{\sin\frac{m\pi}{b}y}_{\text{«آ»}}\,dy}^{I_2}$$

$x(a-x)$	$\sin\frac{n\pi}{a}x$
$(a-x)-x$	$\frac{-a}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{a}x$
$-1-1=-2$	$\frac{-a^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{a}x$
0	$\frac{a^3}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi}{a}x$

$$I_1 = \left[-\frac{a}{n\pi}x(a-x)\cos\frac{n\pi}{a}x + \frac{a^2}{n^2\pi^2}(a-2x)\sin\frac{n\pi}{a}x - \frac{2a^3}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi}{a}x\right]_0^a \Rightarrow$$

$$I_1 = \frac{+2a^3}{n^3\pi^3}\left[(-1)^{n+1}+1\right]$$

« به طریق مشابه » : $I_2 = \frac{2b^3}{m^3\pi^3}\left[(-1)^{m+1}+1\right]$

$$d_{nm} = \frac{4}{ab}(I_1 \times I_2) = \frac{4}{ab}\,\frac{4a^3b^3}{n^3m^3\pi^6}\left[(-1)^{n+1}+1\right]\left[(-1)^{m+1}+1\right]$$

$$d_{nm} = \frac{16a^2b^2}{[mn\pi^2]^3} \times \begin{cases} 0 & n, m = 2K \\ 0 & n = 2K,\ m = 2K+1 \quad (\text{یا}) \quad m = 2K,\ n = 2K+1 \\ 4 & m = 2K+1,\ n = 2K+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{64a^2b^2}{\pi^6} \sum_{n=1,3,\dots} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{1}{n^3m^3} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y$$

ت ۱۷ ـ ٥ ـ « سری فوریه مختلط »

$f(x) = x \quad -\pi < x < \pi$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{\pi}x}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \Rightarrow$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{ixe^{-inx}}{n} + \frac{e^{-inx}}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$C_n = \frac{i(-1)^n}{n}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\frac{(-1)^n}{n} e^{inx} \quad \text{« شکل مختلط »}$$

$* \ a_n = C_n + C_{-n}$

$* \ b_n = i(C_n - C_{-n})$

$$a_n = \frac{i(-1)^n}{n} - \frac{i(-1)^{-n}}{n} = 0$$

$$b_n = i\left[\frac{i(-1)^n}{n} + \frac{i(-1)^{-n}}{n}\right] = \frac{-2(-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

ت ۱۸ - ۶ -

$$f(x) = \begin{cases} \sinh 2x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

* انتگرال فوریه مختلط و حقیقی تابع ?

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

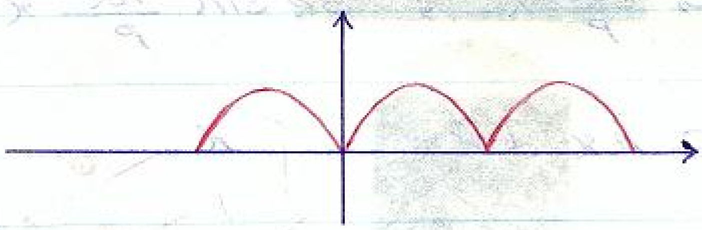
$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$C(\omega) = \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{2} \left(e^{(2-i\omega)x} - e^{-(2+i\omega)x}\right) dx$$

$$C(\omega) = \frac{1}{4\pi}\left\{\left[\frac{1}{2-i\omega}\, e^{(2-i\omega)x}\right] + \left[\frac{1}{2+i\omega}\, e^{-(2+i\omega)x}\right]\right\}_0^2$$

مسئله ۲ ـ

$$\begin{cases} f(x) = \sin \frac{\pi}{L} x & 0 < x < L \\ f(x) = f(-x) & -L < x < 0 \end{cases}$$



* چون گفته تابع را زوج بگیریم لذا دیگر تابع سینوس نیست.

$$* \; f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$* \; a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx =$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$\left(\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} \left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \right] \right)$$

$$= \frac{1}{L} \int_0^L \left[\sin \underbrace{\left(\frac{\pi}{L} + \frac{n\pi}{L} \right)}_{M} x + \sin \underbrace{\left(\frac{\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} \right)}_{N} x \right] dx$$

$$= \frac{1}{L} \left[\int_0^L \sin Mx \, dx + \int_0^L \sin Nx \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{L} \left[-\frac{1}{M} \cos Mx - \frac{1}{N} \cos Nx \right]_0^L$$

$$C(\omega) = \frac{1}{4\pi}\left\{\left[\frac{1}{2-i\omega}e^{2(2-i\omega)} + \frac{1}{2+i\omega}e^{-2(2+i\omega)}\right] - \frac{1}{2-i\omega} - \frac{1}{2+i\omega}\right\}$$

$$C(\omega) = \frac{1}{4\pi}\left[e^{-2i\omega}\underbrace{\left(\frac{e^{4}}{2-i\omega} + \frac{e^{-4}}{2+i\omega}\right)} - \frac{4}{4+\omega^2}\right]$$

$$** \quad \frac{2e^{4}+i\omega e^{4}+2e^{-4}-i\omega e^{-4}}{4+\omega^2} = \frac{4}{4+\omega^2}\operatorname{Ch}4 + \frac{2i\omega}{4+\omega^2}\sinh 4$$

$$C(\omega) = \frac{e^{-2i\omega}\operatorname{Ch}4 + \frac{i\omega}{2}e^{-2i\omega}\sinh 4 - 1}{\pi(4+\omega^2)}$$

$$* \quad a(\omega) = C(\omega) + C(-\omega)$$

$$* \quad b(\omega) = i\left[C(\omega) - C(-\omega)\right]$$

$$a(\omega) = \frac{\overbrace{(e^{-2i\omega}+e^{2i\omega})}^{2\cos 2\omega}\operatorname{Ch}4 + \frac{i\omega}{2}\overbrace{(e^{-2i\omega}-e^{2i\omega})}^{-2i\sin 2\omega}\sinh 4 - 2}{\pi(4+\omega^2)}$$

$$a(\omega) = \frac{2\cos 2\omega\operatorname{Ch}4 + \omega\sin 2\omega\sinh 4 - 2}{\pi(4+\omega^2)}$$

$$b(\omega) = \frac{i\left[\overbrace{(e^{-2i\omega}-e^{2i\omega})}^{-2i\sin 2\omega}\operatorname{Ch}4 + \frac{i\omega}{2}\overbrace{(e^{-2i\omega}+e^{2i\omega})}^{2\cos 2\omega}\sinh 4\right]}{\pi(4+\omega^2)}$$

$$b(\omega) = \frac{2\sin 2\omega \cosh 4 - \omega \cos 2\omega \sinh 4}{\pi(4+\omega^2)}$$

ت ۱۴ - ۵ -

$$f(x) = e^{-x} + e^{-2x} \qquad x > 0$$

$$f(-x) = f(x)$$

$$g(x) = e^{-\alpha x} \qquad x > 0$$

* خودمان این تابع را بطور کلی در نظر می گیریم.

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(x)\cos\omega x \, dx$$

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \underbrace{e^{-\alpha x}\cos\omega x \, dx}_{I}$$

$e^{-\alpha x}$	$\cos\omega x$
$-\alpha e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega x$
$\alpha^2 e^{-\alpha x}$	$\frac{-1}{\omega^2}\cos\omega x$

* اگر صرف نظر از ضریب (α^2 و $\frac{-1}{\omega^2}$) به عبارتهای اصلی برسیم کار را قطع می کنیم.

$$I = \left[\frac{e^{-\alpha x}}{\omega} \sin \omega x + \frac{\alpha}{\omega^2} e^{-\alpha x} \cos \omega x \right]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow \frac{-\alpha^2}{\omega^2} \underbrace{\int e^{-\alpha x} \cos \omega x}_{I} \Rightarrow$$

$$I = \frac{+\alpha}{\omega^2} \left[\frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}} \right] = \frac{+\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \omega x \, dx = \frac{+\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}$$

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (e^{-x} + e^{-2x}) \cos \omega x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\omega^2+1} + \frac{2}{\omega^2+4} \right]$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega x \, d\omega$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\omega^2+1} + \frac{1}{\omega^2+4} \right] \cos \omega x \, d\omega$$

بخش ۲ معادلات با مشتقات جزئی :

اگر u تابعی از حداقل دو متغیر باشد هر معادله‌ای شامل u و مشتقات آن باشد یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است.

بعنوان مثال $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ یا

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = x + y$$

مرتبهٔ یک معادله دیفرانسیل :

بالاترین مرتبهٔ مشتق موجود در یک معادله را مرتبهٔ آن معادله گوییم . * محور اصلی کار ما روی معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ (۲) و آن هم به صورت خطی است :

$$* \quad A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = g(x,y)$$

* اگر $g(x,y) = 0$ باشد آن را یک معادله دیفرانسیل مرتبهٔ (۲) همگن گوییم .

* بطور کلی در یک معادله خطی اگر جواب $u = 0$ در معادله صدق کند (یا $u = 0$ جواب معادله باشد) معادله را همگن گویند .

* معمولاً $u = u(x, y, z, t)$ در نظر ما مطرح است .

معادلهٔ سه بعدی لاپلاس :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

معادله دو بعدی لاپلاس :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

∇ : اپراتور (نابلا) یا (گرادیان) .

معادلهٔ موج -

$$C^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ «سه بعدی»

* $$C^2\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

* C : عدد (+) است و ضریب ارتجاعی جسم است و به جنس بستگی دارد و ثابت است .

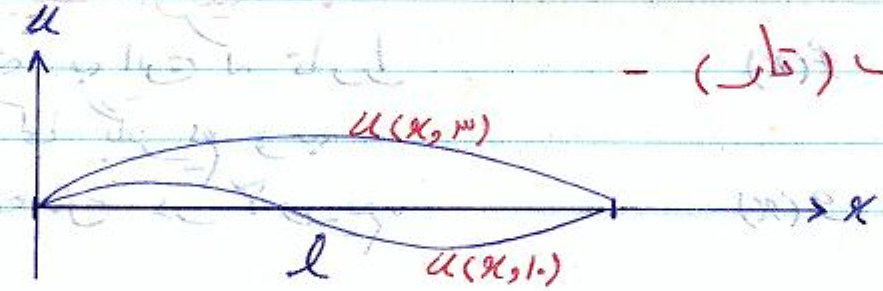
$$C^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ «دو بعدی»

$$C^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ «یک بعدی»

معادلهٔ گرما -

* $$C^2\nabla^2 u=\frac{\partial u}{\partial t}$$ «سه بعدی»

مسئلهٔ ارتعاش یک (تار) -



* شکل جسم مرتعش شده $u = u(x, t)$ در ثانیه t اُم است.

شرایط مرزی - شرایطی است که یک جسم مرتعش در تمام مدّت دارا می باشد.

$$\begin{cases} u(x_0, t) = ? \\ u(x_1, t) = ? \end{cases}$$ شرایط مرزی

شرایط اوّلیه - شرایطی هستند که در یک زمان مشخص مثلاً $t = t_0$ مسئله دارد.

* در معادله ارتعاش تار ثابت می شود که ارتعاشات از معادله موج پیروی می کنند:

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0 \end{cases}$$ شرایط مرزی

شرایط اولیه:

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ u'_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

* بسته به این که تار را از کجا بگیریم و به ارتعاش در آوریم.

* در لحظهٔ صفر سرعتی هم وجود دارد که باید جزء شرایط اولیه به حساب آید.

$$* \quad u_t = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = V(x,t)$$

* مجموعهٔ فوق را «مسئله ارتعاش یک تار با شکل اولیه $f(x)$ و سرعت اولیه $g(x)$» گویند. این ساده ترین نوع از حالتهای مختلف است.

شرایط مرزی همگن - شرایط مرزی را همگن گوییم که $u=0$ جواب آن باشد. همواره سعی می کنیم شرایط مرزی را همگن کنیم.

اصل «سوپر پوزیشن» : «Super position»

* اگر u_1 و u_2 و .... و u_n جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن باشد $u = \sum_{i=1}^{n} A_i u_i$ نیز جواب خواهد بود.

قضیه وجود و یکتائی -

* یک مسئله همگن با شرایط مرزی همگن یک و تنها یک جواب دارد.

روش ضرب یا جداسازی متغیرها یا روش فوریه :

* $u(x, t) = F(x)\, G(t)$

* فوریه این حدس را زد و در معادله قرار داد :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F'(x)\, G(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)\, G(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x)\, \dot{G}(t) \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)\, \ddot{G}(t)$$

$$c^2 F''(x)\, G(t) = F(x)\, \ddot{G}(t) \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{\ddot{G}(t)}{c^2 G(t)} = K$$

* اگر از طرفین نسبت به x یا t مشتق بگیریم یک طرف صفر می شود یعنی طرف دیگر عددی ثابت مثل K است .

* $F''(x) - K F(x) = 0$ معادله دیفرانسیل معمولی
* $\ddot{G}(t) - K c^2 G(t) = 0$ " " "

$u(0, t) = F(0)\, G(t) = 0$ اگر $G(t) = 0$ در نظر بگیریم یعنی $u(x,t) = 0$ که جواب بدیهی است پس : $F(0) = 0$

$$u(l, t) = F(l)\, G(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(l) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0) = 0 \\ \\ F(l) = 0 \end{array} \right. \quad \text{شرایط مرزی}$$

حالت اول $K = 0$:

* $F'' = 0 \Rightarrow F(x) = Ax + B$

$$\left. \begin{array}{l} F(0) = B = 0 \\ F(l) = Al = 0 \Rightarrow A = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) = 0 \Rightarrow u = 0$$

حالت دوم $0 < K = \mu^2$:

* $F'' - \mu^2 F = 0$

$F(x) = Ae + Be$

$F(x) = A' \cosh \mu x + B' \sinh \mu x$

$F(0) = A' = 0$

$F(l) = B' \sinh \mu l = 0 \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow F(x) = 0$

$\Rightarrow u = 0$ $\qquad$ $B' = 0 \Leftarrow (\sinh \mu l \neq 0 \Leftarrow \mu, l \neq 0)$

حالت سوم $K < 0$: $K = -\mu^2$

$$F'' + \mu^2 F = 0$$

$$F(x) = A\cos \mu x + B\sin \mu x$$ * چون ریشه های موهومی دارد.

$$F(0) = A = 0$$

$$F(l) = B\sin \mu l = 0 \xrightarrow[B \neq 0]{\text{ب فرض}} \mu l = n\pi$$

$$\left(\mu = \frac{n\pi}{l} \quad n \in \mathbb{N}\right) \Rightarrow$$

$$F(x) = \underset{\mathrm{I}}{B} \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$F_1(x) = \sin \frac{\pi}{l} x \quad , \quad F_2(x) = \sin \frac{2\pi}{l} x \quad , \quad \dots$$

$$\Rightarrow \qquad u_n(x,t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \, G_n(t)$$

« super position » $\Rightarrow$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \, G_n(t)$$

جواب حدسی برای معادلات غیر همگن

* این جواب برای این شرایط مرزی باید صفق شود.

* حال باید این جواب حدسی را در معادله قرار دهیم ، یا بجای K مقدار آن یعنی $K=-\mu^2$ یا $K=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ را در معادلهٔ : $\ddot{G}(t)-KC^2G(t)=0$ قرار دهیم :

$$\ddot{G}_n(t)+\frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}G_n(t)=0$$

** $\lambda_n=\frac{n\pi c}{l}$ به فرض ** $\Rightarrow$

$$\ddot{G}_n+\lambda_n^2G_n=0$$

ریشه های موهومی دارد $\Rightarrow$

** $G_n(t)=A_n\cos\lambda_n t+B_n\sin\lambda_n t$ $\Rightarrow$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\lambda_n t+B_n\sin\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

« حفظ شود »

---

* به کمک این شرایط اولیه ضرایب مجهول A_n و B_n را می یابیم.

۱) $u(x,0)=f(x)$

۲) $u_t(x,0)=g(x)$

$$u(x,0) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x = f(x)}_{\text{سری فوریه سینوسی}}$$

$$\Rightarrow \quad ** \; A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \; **$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\lambda_n \sin\lambda_n t + B_n\lambda_n \cos\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\lambda_n \sin\frac{n\pi}{l}x = g(x)$$

$$\Rightarrow \quad B_n\lambda_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$** \; B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \; **$$

صفحه ۱۲۷ - تمرین B -

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{معادله موج} \\ u(x,0) = 0 & \\ u_t(x,0) = 8\sin^2 x & \text{شرایط اولیه} \\ u(0,t) = 0 & \\ u(\pi,t) = 0 & \text{شرایط مرزی} \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t\right) \sin nx$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 0 \cdot x \sin nx \, dx = 0$$

$$B_n = \frac{16}{cn\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\sin^2 x \sin nx \, dx}_{I}$$

$$I = \int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) \sin nx \, dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left[\sin nx \, dx - \cos 2x \sin nx \, dx\right]$$

تبدیل به حاصل جمع

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{n} \cos nx\right)_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2+n} \cos(2+n)x - \frac{1}{2-n} \cos(2-n)x\right]_0^{\pi}$$

$$(n \neq 2)$$

$$I = \frac{-1}{2n}\left[(-1)^n - 1\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{2+n} + \frac{1}{2+n} - \frac{(-1)^{n+1}}{2-n} + \frac{1}{2-n}\right]$$

$$I = \frac{1}{2n}\left[1 + (-1)^{n+1}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{4}{4-n^2} + \frac{4}{4-n^2}(-1)^{n+1}\right]$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{4}{4-n^2}\right)\left[1+(-1)^{n+1}\right] \Longrightarrow$$

* $$B_n = \frac{8}{cn\pi}\left(\frac{1}{n} - \frac{4}{4-n^2}\right)\underbrace{\left[1+(-1)^{n+1}\right]}_{1-(-1)^n} \qquad n \neq 2$$

* حال $n=2$ را بررسی می کنیم :

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\sin 2x\, dx - \frac{1}{2}\sin 4x\, dx\right)$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right]_0^\pi = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (B_2 = 0)$$

* $$u(x,t) = \underbrace{\frac{-16}{3c\pi}\sin ct \sin x}_{n=1} + \sum_{n=3}^{\infty} B_n \sin cnt \sin nx$$

* ص ۱۳۷ ۱ـ A و C

* ص ۸۰ همه به جز ۵

تمرین - این مسئله را با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ u_x(0,t) = 0 \\ u_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

اولیه

مرزی

جواب -

$$* \; u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

روش « دالامبر » : « Dalembert »

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$$

برای راحتی

* اساس این روش بر تغییر متغیر استوار است :

$$u(x,t) = U(z,v) \qquad z = x - ct$$
$$v = x + ct$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$\Rightarrow \quad * \; u_x = u_z + u_v$

$u_{xx} = (u_z + u_v)_x = (u_{zz} + u_{vz}) \times 1 + (u_{zv} + u_{vv}) \times 1$

$\Rightarrow \quad * \; u_{xx} = u_{zz} + 2u_{zv} + u_{vv}$

$u_t = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \quad \Rightarrow$

$u_t = u_z(-c) + u_v c \quad \Rightarrow$

$* \; u_t = c\,[u_v - u_z]$

$u_{tt} = c\,[(u_{vz} - u_{zz})(-c) + (u_{vv} - u_{zv})(c)]$

$* \; u_{tt} = c^2[-2u_{zv} + u_{zz} + u_{vv}]$

* حال در معادله قرار می دهیم :

$c^2[-2u_{zv} + \cancel{u_{zz}} + \cancel{u_{vv}}] - c^2[\cancel{u_{zz}} + 2u_{zv} + \cancel{u_{vv}}] = 0$

$-4c^2 u_{zv} = 0 \quad \Rightarrow$

$U_{zv} = 0$

$$\Rightarrow \quad u_z = \int \frac{\partial (u_z)}{\partial v}\, dv = c(z)$$

$$\Rightarrow \quad \int u_z\, dz = \underbrace{\int c(z)\, dz}_{h(z)} + g(v)$$

$$\Rightarrow \quad u = h(x-ct) + g(x+ct)$$

** که در آن h و g توابع دلخواه هستند

مثال - $u(x,t) = (x-ct)^2 + \sin(x+ct)$

* از این مشتق می گیریم و می بینیم در معادله موج صدق می کند.

** حال می خواهیم که u در شرایط هم صدق کند:

$$u(x,0) = h(x) + g(x) = f(x)$$

$$u_t = -c\, h'(x-ct) + c\, g'(x+ct)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\begin{cases} ① \quad u(x,0) = h(x) + g(x) = f(x) \\ ② \quad u_t(x,0) = -h'(x) + g'(x) = 0 \end{cases}$$

$$\overset{②}{\Longrightarrow} \quad h'(x) = g'(x)$$

$$h(x) = g(x) + C$$

$$\overset{①}{\Longrightarrow} \quad g(x) + C + g(x) = f(x)$$

$$\Longrightarrow \quad 2g(x) = f(x) - C$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{C}{2} \\ h(x) &= \frac{1}{2} f(x) + \frac{C}{2} \end{aligned}}$$

$$\Longrightarrow \quad u(x,t) = \frac{1}{2} f(x-ct) + \frac{1}{2} f(x+ct)$$

* این جواب ۳ معادله اول است. حال باید شرایط مرزی را نیز دخالت دهیم:

$$\begin{cases} u(0,t) = \frac{1}{2} f(-ct) + \frac{1}{2} f(ct) = 0 \\ u(l,t) = \frac{1}{2} f(l-ct) + \frac{1}{2} f(l+ct) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(\overset{-y}{-ct}) = -f(\overset{y}{ct}) & \text{یعنی تابع } f \text{ توسیع فرد دارد.} \\ f(l-\underset{-y}{ct}) = -f(l+\underset{y}{ct}) & \text{یعنی تابع } f \text{ توسیع فرد و متناوب با دوره تناوب } 2l \text{ دارد.} \end{cases}$$

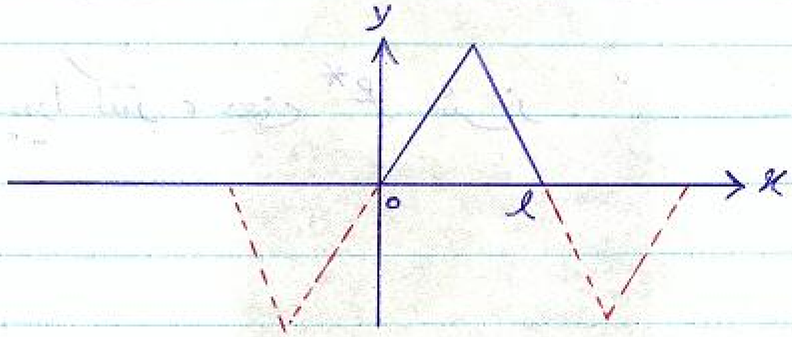
* $f(l-y) = -f(l+y)$ *

* زیرا :

$$f(2l+y) = f(l+\underbrace{l+y}) = -f[l-(l+y)] = -f(-y) = f(y) \Rightarrow$$ (دوره تناوب $2l$ است)

** $f^*(x)$: توسیع فرد و متناوب $f(x)$ با دوره تناوب ($2l$)

$$u(x,t) = \frac{1}{2} f^*(x-ct) + \frac{1}{2} f^*(x+ct)$$



* تحقیق قضیه «وجود و یکتائی جواب»

$$* \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{cn\pi}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \left[\sin\left(\frac{cn\pi}{l} t + \frac{n\pi}{l} x\right) - \sin\left(\frac{cn\pi}{l} t - \frac{n\pi}{l} x\right) \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \left[\sin \frac{n\pi}{l} (x+ct) + \sin \frac{n\pi}{l} (x-ct) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} (x+ct) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} (x-ct)$$

$$= \frac{1}{2} f^*(x+ct) + \frac{1}{2} f^*(x-ct)$$

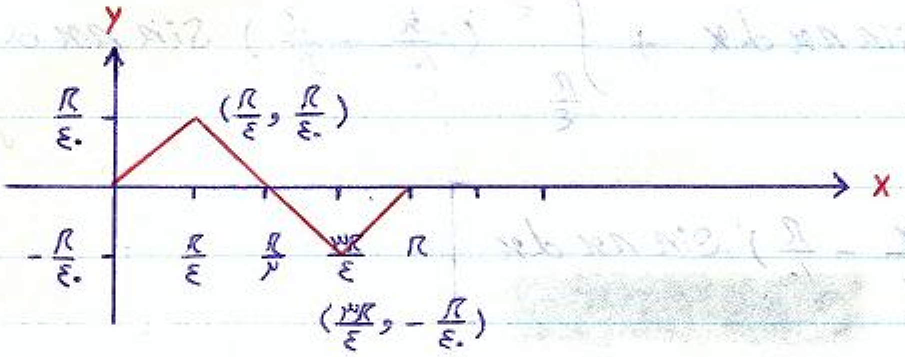
هر دو ، $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} (x-ct)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} (x+ct)$ **

بسط نیم دامنهٔ سینوسی هستند و برای این منظور توابع می‌بایست

توسیع فرد پیدا کنند ، یعنی f^* شوند .

حل مسائل -

تمرین ۲ - ص ۸۰ - ۶ -



$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(\pi, t) = 0 \\ u(x,0) = F(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

** باید معادلات خطوط را در فواصل بیابیم تا $F(x)$ حاصل شود.

$$\left(\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)$$

* $$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} \ (\text{معادله خط}) & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ -\frac{x}{10} + \frac{\pi}{20} & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \\ \frac{x}{10} - \frac{\pi}{10} & \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad \Rightarrow$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx \quad \Rightarrow$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{10}x \sin nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{-x}{10} + \frac{\pi}{20}\right) \sin nx \, dx + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \left(\frac{x}{10} - \frac{\pi}{10}\right) \sin nx \, dx\right]$$

$$A_n = \left(\frac{1}{40n}\right)\cos n\frac{\pi}{4} + \left(\frac{4}{10n^2\pi}\right)\sin n\frac{\pi}{4} - \left(\frac{3}{20n}\right)\cos\frac{3n\pi}{4} - \left(\frac{4}{10n^2\pi}\right)\sin\frac{3n\pi}{4}$$

$* \quad \cos\frac{3n\pi}{4} = \cos\left(n\pi - \frac{n\pi}{4}\right) = \cos n\pi \cos\frac{n\pi}{4} + 0 = (-1)^n \cos\frac{n\pi}{4}$

$* \quad \sin\frac{3n\pi}{4} = \sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{4}\right) = 0 - \cos n\pi \sin\frac{n\pi}{4} = (-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi}{4}$

$$\Rightarrow \quad A_n = \left[\frac{1}{40n} - \frac{3}{20n}(-1)^n\right]\cos n\frac{\pi}{4} + \left[\frac{4}{10n^2\pi} + \frac{4}{10n^2\pi}(-1)^{n+1}\right]\sin\frac{n\pi}{4}$$

$$* \quad A_n = \frac{1}{20n}\left[\frac{1}{2} - 3(-1)^n\right]\cos\frac{n\pi}{4} + \frac{4}{10n^2\pi}\left[1 + (-1)^{n+1}\right]\sin\frac{n\pi}{4}$$

$* \quad B_n = 0$

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{20} \times \frac{7}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{8}{10\pi} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos ct \ \sin x + 0 +$$

$$\left(\frac{1}{60} \times \frac{7}{2} \times \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{8}{90\pi} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos 3ct \ \sin 3x + \dots$$

صفحه ۸۱ _ ت ۳ _ d

* $u_{xy} = u$

$u(x,y) = F(x) \cdot G(y)$

$u_x = F'(x) \cdot G(y)$

$u_{xy} = F'(x) \ G'(y)$

$$F'G' = FG \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{G}{G'} = K \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F' - KF = 0 \\ G' - \frac{1}{K} G = 0 \qquad K \neq 0 \end{cases}$$

$K = 0 \Rightarrow \frac{F'}{F} = 0$ و $G = 0 \Rightarrow F' = 0$ و $G = 0 \Rightarrow u = 0$

(جواب بدیهی)

$\Rightarrow K \neq 0$

$$F' - KF = 0 \Rightarrow \frac{F'}{F} = K \Rightarrow \ln F = Kx + C$$

$$F = ce^{Kx}$$

$$G' - \frac{1}{k}G = 0 \Rightarrow \frac{G'}{G} = \frac{1}{k} \Rightarrow$$

$$\ln G = \frac{1}{k}y + C' \Rightarrow G = C'e^{\frac{1}{k}y}$$

$$**\ u = F \cdot G = CC'e^{kx + \frac{1}{k}y} = Ce^{kx + \frac{1}{k}y}$$

صفحه ۸۱ - ت ۳ - ۶ -

$$*\ u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \qquad *\ V = y \qquad *\ Z = x + y$$

$$u_x = u_V \cdot \cancel{V_x}^{0} + u_Z \cdot \cancel{Z_x}^{1} = u_Z$$

$$u_{xx} = (u_Z)_x = u_{ZZ} \cdot \cancel{Z_x}^{1} + u_{ZV} \cdot \cancel{V_x}^{0} = u_{ZZ}$$

$$u_{xy} = (u_Z)_y = u_{ZZ} \cdot Z_y + u_{ZV} \cdot V_y = u_{ZZ} + u_{ZV}$$

$$u_y = u_V \cdot V_y + u_Z \cdot Z_y = u_V + u_Z$$

$$u_{yy} = (u_V + u_Z)_y = (u_{VV} + u_{ZV})\cancel{V_y}^{1} + (u_{VZ} + u_{ZZ})\cancel{Z_y}^{1}$$

$$\Rightarrow u_{ZZ} - 2u_{ZZ} - 2u_{ZV} + u_{VV} + 2u_{ZV} + u_{ZZ} = 0$$

$u_{VV} = 0 \iff \Rightarrow \quad u_V = C(z) \Rightarrow$

$u = \int C(z)\, dV + C'(z)$

$u = V f(z) + g(z)$ (f و g توابع دلخواه هستند)

$* \; u(x, y) = y f(x+y) + g(x+y) \; *$

صفحه ۸۲ ـ درس ۶ ـ ۶ ـ

$* \; u_{tt} - 4 u_{xx} = x + t \qquad 0 < x < \pi$

$(V = x + 2t \qquad z = x - 2t)$

** در درس بدست آمده بود : $* \; -4c^2 u_{zV} = 0$

$* \; -4 \times 4\, u_{zV} = x + t$

(اما) $x = \frac{V+z}{2}$ و $t = \left(V - \frac{V+z}{2}\right)\frac{1}{2} \Rightarrow$

$u_{zV} = \frac{-1}{16} \times \frac{1}{4} (3V + z)$

$$u_z = \frac{-1}{64}\left(\frac{3}{2}V^2 + zV + f(z)\right) \Rightarrow$$

$$u = \frac{-1}{64}\left(\frac{3}{2}V^2 z + \frac{1}{2}z^2 \cdot V + \underbrace{g(z)}_{\int f(z)\,dz} + h(V)\right)$$

روش حل معادلات غیر همگن :

$$\mathrm{I}\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + H(x,t) \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = G(x) \end{cases}$$

* اگر فرض کنیم $H(x,t)=0$ همان جواب همگن بدست می‌آید یعنی: $\left(u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n \cos\lambda_n t + B_n \sin\lambda_n t)}_{G_n(t)} \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$ حال در این جواب طوری اختیار می کنیم که حداقل در شرایط مرزی صدق کند و آنگاه جواب حدسی را در معادله اول قرار داده و تابع مجهول $G_n(t)$ را می یابیم. حاصل این جایگذاری یک معادله دیفرانسیل درجه ۲ بر حسب $G_n(t)$ با طرف ثانی است که پس از حل آن دارای دو ضریب A_n و B_n می شود که بکمک شرایط اولیه A_n و B_n را پیدا می کنیم.

* $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$ «جواب حدسی»

نکته - جواب حدسی همواره طوری حدس زده می شود که در شرایط مرزی صدق کند. مثلاً اگر شرایط مرزی به صورت $u_x(0,t) = 0$ و $u_x(L,t) = 0$ باشد جواب حدسی:

$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x$ باید بکار رود.

حل درحالتی که شرایط مرزی ناهمگن باشند:

$$\mathrm{II} \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t) \\ u(0,t) = g_1(t) \\ u(L,t) = g_2(t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

* همواره شرایط مرزی غیرهمگن را به همگن تبدیل می کنیم. بدین صورت که جواب این مسئله را بصورت مجموع دو جواب یعنی: $u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$ و سپس $V(x,t)$ را طوری تبدیل می کنیم که $W(0,t) = 0$ و $W(L,t) = 0$ باشد. عموماً در مسائل $V(x,t)$ را با توجه به شرایط مرزی می توانیم بصورتهای زیر در نظر بگیریم:

۱) $V(x,t) = ax + b$
۲) $V(x,t) = ax^2 + bx$
۳) $V(x,t) = ax^2 + b$

* اوّلی : اگر شرایط از u باشد.
* دوّمی : " " " u_x " " .
* سومی : " " " u و u_x باشد.

* اگر یکی از شرایط مرزی (معمولاً دوّمی) صفر باشد $V(x,t)$ را عدد ثابت فرض می کنیم.

* در حالت خاص شرایط مرزی «اشترم - لیوویل» :

$$u(0,t) = g_1(t)$$
$$u_x(L,t) + h\,u_x(L,t) = g_2(t)$$

از فرم (اوّل) استفاده می کنیم.

*** حال که می خواهیم مسئله (II) به (I) بدل شود باید :

$$u(0,t) = V(0,t) + W(\cancel{0},t) = g_1(t) \Rightarrow V(0,t) = g_1(t)$$
$$u(l,t) = V(L,t) + W(\cancel{L},t) = g_2(t) \Rightarrow V(L,t) = g_2(t)$$

اکنون : ($V(x,t) = ax + b$) را انتخاب می کنیم :

$$\begin{cases} b = g_1(t) \\ aL + b = g_2(t) \end{cases}$$

* که a و b بدست می آید. اگر دستگاه بدست آمده نامعین بود شکل دیگری برای $V(x,t)$ درنظر می گیریم.

$$* \quad a = \frac{g_2(t) - g_1(t)}{L} \Rightarrow$$

$$* \quad b = g_1(t)$$

$$\boxed{V(x,t) = \frac{g_2 - g_1}{L} x + g_1} \Rightarrow$$

$$u_{tt} = V_{tt} + W_{tt}$$

$$u_{tt} = \frac{\ddot{g}_2 - \ddot{g}_1}{L} x + \ddot{g}_1 + W_{tt} \Rightarrow$$

$$u_{xx} = V_{xx} + W_{xx} = W_{xx}$$

$$\ddot{g}_1 + \frac{\ddot{g}_2 - \ddot{g}_1}{L} x + W_{tt} = c^2 W_{xx} + h(x,t) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + \underbrace{h(x,t) - \dfrac{\ddot{g}_2 - \ddot{g}_1}{L}x - \ddot{g}_1}_{H(x,t)} \\ W(0,t) = 0 \\ W(L,t) = 0 \\ W(x,0) = f(x) - \dfrac{g_2(0) - g_1(0)}{L}x - g_1(0) = F(x) \\ W_t(x,0) = g(x) - \dfrac{\dot{g}_2(0) - \dot{g}_1(0)}{L}x - \dot{g}_1(0) = G(x) \end{cases}$$

(زیرا)

$$u(x,0) = V(x,0) + W(x,0) = f(x)$$
$$W(x,0) = f(x) - V(x,0)$$
$$\Leftarrow W(x,0) = f(x) - \frac{g_2(0) - g_1(0)}{L}x - g_1(0)$$

صفحه ۱۳۹ - ۳ - d

$$\text{II} \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0<x<1 \quad t>0 \\ u(0,t) = t^2 & \\ u(1,t) = Gt & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = x & \\ u_t(x,0) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

برای همگن کردن شرایط مرزی :

$$u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$$

$$u(x,t) = \frac{g_2 - g_1}{L} x + g_1 + W(x,t)$$

$$u(x,t) = (\cos t - t^2) x + t^2 + W(x,t)$$

$$u_{tt} = (-\cos t - 2) x + 2 + W_{tt}(x,t)$$

$$u_{xx} = W_{xx}$$

$$* \quad u(x,0) = \cancel{x} + W(x,0) = \cancel{x} \quad \Rightarrow \quad W(x,0) = 0$$

$$u_t = (-\sin t - 2t) x + 2t + W_t(x,t)$$

$$* \quad u_t(x,0) = W_t(x,0) = 0$$

$$-(\cos t + 2) x + 2 + W_{tt} = W_{xx} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} W_{tt} = W_{xx} + \underbrace{(\cos t + 2) x - 2}_{H(x,t)} \\ W(0,t) = 0 \\ W(l,t) = 0 \\ W(x,0) = 0 \\ W_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

اگر جواب حدسی به ذهن ما نرسید معادله را با $H(x,t)=0$ و به کمک شرایط مرزی از روش ضریب حل کرده و جواب حدسی را می یابیم.

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin n\pi x$$ جواب حدسی

* $$W_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{G}_n \sin n\pi x$$

* $$W_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -\pi^2 n^2 G_n \sin n\pi x$$ $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\ddot{G}_n + \pi^2 n^2 G_n)}_{} \sin n\pi x = (\cos t + 2)x - 2$$

« ضریب سری فوریه سینوسی »

$$\ddot{G}_n + \pi^2 n^2 G_n = 2\int_0^1 [(\cos t + 2)x - 2] \sin n\pi x \, dx$$

$$\text{〃} \qquad = 2\left[\frac{(\cos t+2)x-2}{-n\pi} \cos n\pi x\right]_0^1$$

$(\cos t+2)x-2$	$\sin n\pi x$
$\cos t + 2$	$-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$
0	$-\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x$

$$\text{〃} \qquad = 2\left[\frac{\cos t}{-n\pi}(-1)^n - \frac{2}{n\pi}\right]$$

$$\ddot{G}_n + \pi^2 n^2 G_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\cos t - \frac{4}{n\pi}$$

$$G_n = A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t + G_p$$

$$G_p = \frac{1}{-1+n^2\pi^2} \times \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\cos t - \frac{4}{n\pi} \times \frac{1}{n^2\pi^2}$$

$$G_n = A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t + \frac{2(-1)^{n+1}}{(n^2\pi^2-1)\,n\pi}\cos t - \frac{4}{n^3\pi^3}$$

$$\Rightarrow \quad W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t + \frac{2(-1)^{n+1}}{(n^2\pi^2-1)\,n\pi}\cos t - \frac{4}{n^3\pi^3}\right)\sin n\pi x$$

$$W(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n + \frac{2(-1)^{n+1}}{(n^2\pi^2-1)\,n\pi} - \frac{4}{n^3\pi^3}\right)\sin n\pi x$$

$$= f(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$A_n = \frac{2(-1)^n}{(n^2\pi^2-1)\,n\pi} + \frac{4}{n^3\pi^3}$$

$$W_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \sin n\pi x = 0 \implies$$

$$B_n = 0$$

$$u(x,t)=(\cos t-2)x+t^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2(-1)^n}{(n^2\pi^2-1)n\pi}+\frac{4}{n^3\pi^3}\right)\cos n\pi t+\frac{2(-1)^{n+1}}{(n^2\pi^2-1)n\pi}\cos t-\frac{4}{n^3\pi^3}\right]\sin n\pi x$$

* مسائل - ص ۱۲۸ و ص ۱۳۹ و مسائل حل شده ص ۱۰۸ و ص ۱۰۹ *

صفحه ۸۸ - ت ۲ - ۶ : «انتشار گرما»

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 2x^2 t \\ u(x,0)=\cos\frac{3\pi}{2}x \quad , \quad 0\le x\le 1 \\ u(0,t)=1 \\ u_x(1,t)=\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$u = W + V$$
$$W(x,t) = ax + b$$
$$W(0,t) = b = 1$$
$$W_x(x,t) = a$$
$$W_x(1,t) = a = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$W(x,t) = \frac{3\pi}{2}x + 1$$

$$u_t = W_t + V_t \Rightarrow u_t = 0 + V_t$$

$$\Rightarrow \quad u_t = V_t \qquad\qquad u_{xx} = V_{xx}$$

$$\begin{cases} V_t - V_{xx} = 2x^2 t \\ V(0,t) = 0 \\ V_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

خودمان صفر می‌گیریم

" " "

$$u(x,0) = \frac{3\pi}{2}x + 1 + V(x,0) = \cos \frac{3\pi}{2}x$$

$$\begin{cases} V_t - V_{xx} = 2x^2 t \\ V(0,t) = 0 \\ V_x(1,t) = 0 \\ V(x,0) = \cos \frac{3\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}x - 1 \end{cases}$$

* اگر هر دو شرط مرزی V بود جواب حدسی را داشتیم اما چون یکی V_x است باید جواب حدسی را از روش ضربی بدست آوریم:

$$V(x,t) = F(x)\,G(t)$$
$$V_t = F(x)\,G'(t)$$
$$V_{xx} = F''(x)\,G(t)$$

$$F(x)\,G'(t) - F''(x)\,.\,G(t) = 0$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{G(t)} = K \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F''(x) - K\,F(x) = 0 \\ G'(t) - K\,G(t) = 0 \end{cases}$$

بحث علامت K:

* $\dfrac{G'(t)}{G(t)} = K \quad \Rightarrow \quad \ln G(t) = Kt + C$

$$G(t) = A e^{Kt}$$

* اگر $K>0$ باشد یعنی درجه حرارت افزایش می یابد درحالی که یک سر میله صفر درجه است و دما باید نهایتاً کاهش یابد. اگر $K=0$ باشد $G(t)$ عددی ثابت است و $V(x,t) = F(x)\,G(t)$ فقط تابع x و مستقل از زمان می شود و این غیر ممکن است پس $K<0$ است پس $G(t) = A e^{-\lambda^2 t}$

$$K = -\lambda^2$$

$$* \quad \frac{F''(x)}{F(x)} = K = -\lambda^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F''(x) + \lambda^2 F(x) = 0 \\ F(0) = 0 \\ F'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} m^2 + \lambda^2 &= 0 \\ m &= \pm i\lambda \end{aligned}$$

$$* \quad F(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x \quad *$$

$$F'(x) = -a\lambda\sin\lambda x + b\lambda\cos\lambda x$$

$$F(0) = a = 0$$

$F'(1) = b\lambda\cos\lambda = 0 \Rightarrow \cos\lambda = 0$ چون $b\lambda \neq 0$

$$\Rightarrow \cos\lambda = \cos(2n-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$\lambda_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$ مقادیر ویژه

نکته خارج مسئله - اگر $V_x(0,t) = 0$ ، $V(1,t) = 0$ باشد:

$* \quad F_n = b\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}x$ (مضارب فرد کسینوسی)

$*\quad F_n(x) = b \sin (2n-1)\frac{\pi}{2}$ (مضارب فرد سینوسی)

$*\quad V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{(2n-1)}(t)\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x$ (جواب حدسی)

$$V_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{G}_{(2n-1)}(t)\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x$$

$$V_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{(2n-1)}(t)\frac{\pi}{2}\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}x\cdot(2n-1)$$

$$V_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -G_{(2n-1)}(t)\frac{\pi^2}{4}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x\cdot(2n-1)^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\overbrace{\dot{G}_{(2n-1)}(t) + (2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}G_{(2n-1)}(t)}^{b_{(2n-1)}}\Big]\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x = 2x^2 t$$

«سری فوریه»

$$\dot{G}_{2n-1}(t) + (2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}G_{2n-1}(t) = 2\int_0^1 2x^2 t\sin(2x-1)\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x^2 & \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x \\ 2x & \frac{-2}{(2n-1)\pi}\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}x \\ 2 & \frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x \\ 0 & \frac{-8}{(2n-1)^3\pi^3}\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}x \end{array}\right.$$

$$\dot{G}_{2n-1}(t) + (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} G_{2n-1}(t) = \frac{32t\,(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2} - \frac{32t}{(2n-1)^3\pi^3}$$

$$* \quad \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{n+1}$$

** این معادله $y' + A(x)\,y = B(x)$ و جواب آن :

$$* \quad y = e^{-\int A(x)dx}\left[\int B(x)\, e^{\int A(x)dx} + C\right]$$

$$G_{2n-1} = e^{-(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}t}\left[\int\left[\frac{32t\,(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2} - \frac{32t}{(2n-1)^3\pi^3}\right] . e^{(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}t} . dt + C_{2n-1}\right]$$

توجه : $\int t e^t = (t-1)\,e^t$ (مستند)

$$G_{2n-1} = e^{-(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}t}\left[\frac{32(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2} - \frac{32}{(2n-1)^3\pi^3}\right] . \left[\frac{4(t-1)\,e^{(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}t}}{(2n-1)^2\pi^2} + C_{2n-1}\right]$$

$$G_{2n-1} = \left[\frac{32\,(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2} - \frac{23}{(2n-1)^3\pi^3} \right] \frac{4(t-1)}{(2n-1)^2\pi^2} + C e^{-(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}t}_{2n-1}$$

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{32(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2} - \frac{23}{(2n-1)^3\pi^3} \right) \cdot \frac{4(t-1)}{(2n-1)^2\pi^2} + C_{2n-1}\, e^{-(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}t} \right] \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x$$

* حال باید ضرایب C_{2n-1} را بیابیم :

$$V(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{32(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2} - \frac{23}{(2n-1)^3\pi^3} \right) \frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2} + C_{2n-1} \right]$$

$$\cdot \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x = \cos\frac{3\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}x - 1$$

«سری فوریه»

$$\left(\frac{32\,(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2} - \frac{23}{(2n-1)^3\pi^3} \right) \frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2} + C_{2n-1}$$

$$= 2\int_0^1 \left(\cos\frac{3\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}x - 1 \right) \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x \, dx$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{2} + (2n-1)\frac{\pi}{2}\right)x + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - (2n-1)\frac{\pi}{2}\right)x\right]dx$$

$$- 2 \times \frac{3\pi}{2}\left[\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}\right] + \frac{2\times 2}{\pi(2n-1)}\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}x\Bigg]_0^1$$

$$= \Bigg[2\times\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{3\pi + (2n-1)\pi}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + (2n-1)\frac{\pi}{2}\right)x$$

$$+ 2\left(\frac{-2}{3\pi - (2n-1)\frac{\pi}{2}}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - (2n-1)\frac{\pi}{2}\right)x\Bigg]_0^1$$

$$- \frac{12\pi}{(2n-1)^2\pi^2}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi(2n-1)}$$

$$= \frac{-2}{3\pi + (2n-1)\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + (2n-1)\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{3\pi - (2n-1)\frac{\pi}{2}}$$

$$\times \cos\left(\frac{3\pi}{2} - (2n-1)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3\pi + (2n-1)\pi}$$

$$+ \frac{4}{3\pi - (2n-1)\frac{\pi}{2}} - \frac{12\pi}{(2n-1)^2\pi^2}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}$$

$$+ \frac{4}{\pi(2n-1)}$$

معادلهٔ گرما در میله های نا متناهی :

میله (یا سیمی) بطول نا متناهی و عایق بندی شده در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

«مسئله انتقال گرما در یک میله نا متناهی »

$$u(x,t) = F(x)\,G(t)$$
$$u_t = F(x)\,\dot{G}(t) \quad \Rightarrow$$
$$u_{xx} = F''(x)\,G(t)$$

$$F(x)\,\dot{G}(t) = c^2 F''(x)\,G(t)$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = K \quad \Rightarrow$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = K \quad \text{و} \quad \frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = K$$

$$\frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = c^2 K \quad \Rightarrow \quad \ln G(t) = c^2 K t + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\left(G(t) = A e^{c^2 K t} \qquad A = e^{C_1} \right)$$

* وقتی $t \to \infty$ ، $G(t)$ و لذا $u(x,t)$ بزرگ می شود (در صورتی که $K > 0$ باشد) و این توجیه فیزیکی ندارد زیرا دمای میله نمی تواند خود بخود افزایش یابد لذا :

$$\left(\left(-\omega^2 = K \leqslant 0 \quad \text{و} \quad \omega \in [0, \infty) \right)\right)$$

* $G_\omega(t) = A_\omega e^{-c^2\omega^2 t}$

$$F''(x) = -\omega^2 F(x) \Rightarrow$$
$$F''(x) + \omega^2 F(x) = 0 \Rightarrow$$

* $F_\omega(x) = A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x$

* $u_\omega(x,t) = e^{-c^2\omega^2 t}\left(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right)$

* $A(\omega)$ را در $G_\omega(t)$ (یک) فرض کردیم چون باید در $A(\omega)$ و $B(\omega)$ $F_\omega(x)$ ضرب شود و لزومی ندارد که نام جدیدی برای این ضربها بگذاریم.

** $u(x,t) = \int_0^\infty e^{-c^2\omega^2 t}\left(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right) d\omega$

* این جواب در معادله اول صدق می کند و باید به کمک شرط اولیه $A(\omega)$ و $B(\omega)$ را بدست آوریم.

$$u(x,0) = \int_0^\infty \left(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right) d\omega = f(x)$$

« انتگرال فوریه تابع $f(x)$ »

$$** \quad A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x \, dx$$

$$** \quad B(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x \, dx$$

مسئله برای میله نیمه متناهی :

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & 0 < x < \infty \quad \text{و} \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

* یعنی سر میله در دمای صفر درجه قرار دارد و در میله مولد گرمائی نداریم .

$$* \quad u(x,t) = F(x)\,G(t)$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = K \quad \text{و} \quad \frac{G'(t)}{c^2 G(t)} = c^2 K$$

$$F(0) = 0$$

* $G(t) = Ae^{c^2 K t}$

$K>0$ – گرما خیلی بالا می رود و این غیر ممکن است .

$K=0$ – یعنی جسم بعد از مدت زمان طولانی به دمای ثابت غیر صفر می رسد که غیر ممکن است چون یک سر آن در دمای صفر درجه است . پس :

« $-\omega^2 = K < 0 \qquad \omega \in (0, \infty)$ »

* $G_\omega(t) = A e^{-c^2\omega^2 t}$

$$F''(x) + \omega^2 F(x) = 0 \qquad \Rightarrow$$
$$F(0) = 0$$

$$F_\omega(x) = A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x \qquad \Rightarrow$$
$$F(0) = A(\omega) = 0$$

* $F_\omega(x) = B(\omega)\sin\omega x$

* $u_\omega(x,t) = B(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t}\sin\omega x$

** $u(x,t) = \int_0^\infty B(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t}\sin\omega x\, d\omega$

* اگر تغییرات روی اعداد طبیعی باشد از (Σ) استفاده می‌کنیم اما در این مسائل که تغییرات روی اعداد حقیقی است از ($\int$) استفاده می‌کنیم.

توجه - اگر شرط مرزی $u_x(0, t) = 0$ باشد جواب بصورت $\cos \omega x \, d\omega$ است چون از $F(x)$ مشتق می‌گیریم و در نهایت به $F'(0) = 0$ می رسیم.

$$u(x, 0) = \int_0^\infty B(\omega) \sin \omega x \, d\omega = f(x)$$

$$** \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin \omega x \, dx$$

حالت (ب) - «عمومی»

$$* \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + h(x, t) & 0 < x < \infty \quad t > 0 \\ u(0, t) = g(t) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

* یعنی سر میله مرتباً گرم می شود و در میله مولدهای گرمائی هم وجود دارد.

* $u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$ *

$W(0,t) = 0$ اختیار می کنیم

$V(x,t) = b$
$V(x,t) = ax + b$
$V(x,t) = ax^2 + bx$
$V(x,t) = ax^2 + b$

« حالتهای پیشنهادی »

* با سعی و خطا ضرایب a و b را می یابیم و حتی الامکان باید درجه کمتر باشد.

$V(x,t) = b$

$u(0,t) = \underbrace{V(\cancel{0},t)}_{b} + \underbrace{W(\cancel{0},t)}_{0} = g(t) \Rightarrow$

$b = g(t) \Rightarrow V(x,t) = g(t) \Rightarrow$

* $u(x,t) = g(t) + W(x,t)$

نکته - اگر u_x داشته باشیم $V(x,t) = ax$ در نظر می گیریم.

$u_t(x,t) = g'(t) + W_t$

$u_{xx}(x,t) = W_{xx}$

$$g'(t) + W_t = c^2 W_{xx} + h(x,t)$$

$$W_t = c^2 W_{xx} + \underbrace{h(x,t) - g'(t)}_{H(x,t)}$$

$$W_t = c^2 W_{xx} + H(x,t)$$

$$W(0,t) = 0$$

$$W(x,0) = \underbrace{f(x) - g(0)}_{F(x)}$$

$$\begin{cases} W_t = c^2 W_{xx} + H(x,t) & 0 < x < \infty \quad t > 0 \\ W(0,t) = 0 & 0 \leq t \\ W(x,0) = F(x) & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

** یعنی خودمان را از مرحله ۳ به مرحله ۲ رساندیم.
حال یا جواب را حدس می زنیم یا $H(x,t) = 0$
می گیریم و از روش ضرب جواب حدسی را می یابیم.
(جواب حدسی باید حتماً در شرط مرزی صدق کند)

* $W(x,t) = \int_0^\infty G(t) \sin \omega x \, d\omega$ جواب حدسی

* اگر $W_x(0,t)$ را داشتیم $\int_0^\infty G(t) \cos \omega x \, d\omega$ می گرفتیم.

* جواب حدسی را در معادله قرار می دهیم :

$$W_t = \int_0^\infty \dot{G}(t) \sin \omega x \, d\omega$$

$$\Rightarrow$$

$$W_{xx} = \int_0^\infty -\omega^2 G(t) \sin \omega x \, d\omega$$

$$\int_0^\infty \dot{G}(t) \sin \omega x \, d\omega = -c^2 \int_0^\infty \omega^2 G(t) \sin \omega x \, d\omega + H(x,t)$$

$$\int_0^\infty \left(\dot{G}(t) + c^2 \omega^2 G(t) \right) \sin \omega x \, d\omega = H(x,t)$$

« انتگرال فوریه سینوسی »

$$\dot{G}(t) + c^2 \omega^2 G(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty H(x,t) \sin \omega x \, dx = K(t, \omega)$$

$$\dot{G}(t) + c^2 \omega^2 G(t) = K(t, \omega)$$

* حال این معادله دیفرانسیل را حل می کنیم :

$$G(t) = A(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t} + G_p$$

جواب عمومی بدون طرف ثانی

جواب خصوصی با طرف ثانی

$$** \quad W(x,t) = \int_0^\infty \left(A(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t} + G_p \right) \sin\omega x \, d\omega$$

* حال $A(\omega)$ را با توجه به شرط اولیه می یابیم :

$$W(x,0) = \int_0^\infty (A(\omega) + G_p) \sin\omega x \, d\omega = F(x)$$

« انتگرال فوریه سینوسی »

$$** \quad A(\omega) + G_p = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F(x) \sin\omega x \, dx$$

معادلات مرتبه (۱) و (۲) خیلی حتماً مطالعه و یادآوری شود.

$$** \quad u(x,t) = W(x,t) + g(t) \quad **$$

مسئله گرمائی میله بدون عایق :

$$** \quad u_t = c^2 u_{xx} - hu$$

* u بخاطر تبادل گرمائی ظاهر می شود. h عددی ثابت است که بستگی به جنس محیط اطراف دارد.

* در این مسائل تغییر متغیر ذیل را می دهیم که جمله hu حذف می شود :

$$** \quad u(x,t) = e^{-ht} W(x,t)$$

$$① \quad u_t = -he^{-ht} W(x,t) + e^{-ht} W_t(x,t)$$
$$② \quad u_{xx} = e^{-ht} W_{xx}(x,t) \Rightarrow$$

$$-he^{-ht}\cancel{W(x,t)} + \cancel{e^{-ht}} W_t = c^2 \cancel{e^{-ht}} W_{xx} - he^{-ht}\cancel{W(x,t)}$$

$$W_t = c^2 W_{xx}$$

* اگر شرط مرزی غیر همگن بود بازهم اول تغییر متغیر می دهیم و پس از بدست آوردن شرط مرزی ناهمگن برحسب تغییر متغیر جدید آنگاه شرط مرزی را همگن می کنیم.

صفحه ۹۱ - ت - 6 - 1 -

$$f(x) = \begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2-x & 1<x<2 \\ 0 & x>2 \end{cases} \qquad f(-x) = -f(x)$$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} (A_\omega \cos\omega x + B_\omega \sin\omega x)\, e^{-c^2\omega^2 t}$$

$$A_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\, dx \xrightarrow{\text{فرد است } f(x)} A_\omega = 0$$

$$B_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\, dx \Rightarrow$$

$$B_\omega = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^1 x\sin\omega x\, dx + \int_1^2 (2-x)\sin x\, dx + 0\right] =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{-x}{\omega}\cos\omega x + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega x\Big|_0^1 - \frac{2}{\omega}\cos\omega x + \frac{x}{\omega}\cos\omega x - \frac{1}{\omega^2}\sin\omega x\Big|_1^2\right]$$

$$B_\omega = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{\omega^2}\sin\omega - \frac{1}{\omega^2}\sin 2\omega\right]$$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty}\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\omega^2}\sin\omega - \frac{1}{\omega^2}\sin 2\omega\right)\right] e^{-c^2\omega^2 t}\sin\omega x\, dx$$

صفحه ۹۱ [ت ـ ۶ ـ ۲ ـ]

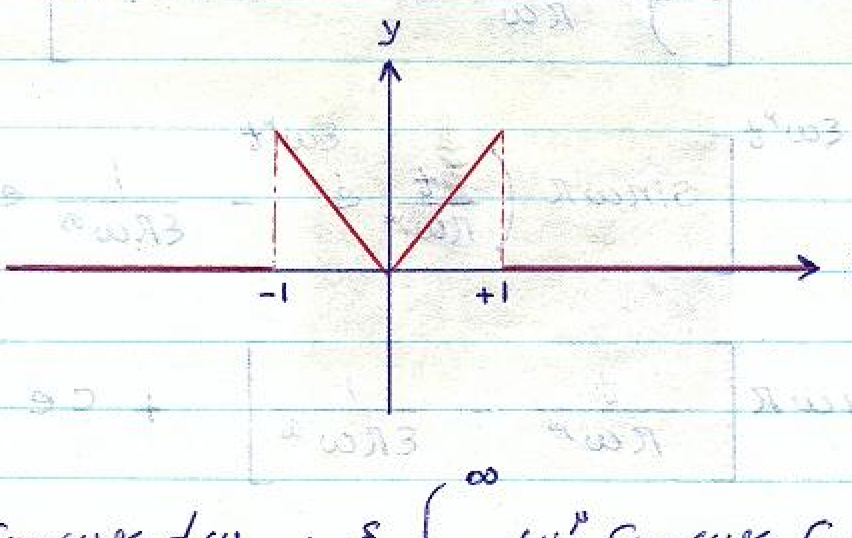
$$u_t - \varepsilon u_{xx} = \begin{cases} 2t & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} |x| & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

شرط اولیه یا گرمای اولیه.

* چون معادله ناهمگن است باید اوّل جواب حدسی را بیابیم. چون تابع زوج است از $\cos \omega x$ استفاده می‌کنیم یعنی ـ جواب حدسی به صورت ذیل است:

$$u(x,t) = \int_0^\infty G(t) \cos \omega x \, d\omega$$



$$\int_0^\infty G'(t) \cos \omega x \, d\omega + \varepsilon \int_0^\infty \omega^2 \cos \omega x \, G(t) \, d\omega = \begin{cases} 2t \\ 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \underbrace{\left[\dot{G}(t) + \varepsilon \omega^2 G(t) \right]}_{A_\omega} \cos \omega x \, dx = \begin{cases} 2t & |x| < R \\ 0 & |x| > R \end{cases} = f(x)$$

$$\dot{G}(t) + \varepsilon \omega^2 G(t) = \frac{2}{R} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx$$

$$\dot{G}(t) + \varepsilon \omega^2 G(t) = \frac{2}{R} \int_0^R 2t \cos \omega x \, dx \quad + 0$$

$$\dot{G}(t) + \underbrace{\varepsilon \omega^2}_{g} G(t) = \frac{4t}{\omega R} \sin \omega x \Big|_0^R = \underbrace{\frac{4t}{\omega R} \sin \omega R}_{q}$$

$$G(t) = e^{-\int g\,dt} \left[\int q\, e^{\int g\,dt} dt + c \right]$$

$$G(t) = e^{-\varepsilon \omega^2 t} \left[\sin\omega R \int \frac{4t}{R\omega} e^{\varepsilon \omega^2 t} dt + c \right]$$

$$G(t) = e^{-\varepsilon \omega^2 t} \left[\sin \omega R \left(\frac{t}{R\omega^3} e^{\varepsilon \omega^2 t} - \frac{1}{\varepsilon R \omega^5} e^{\varepsilon \omega^2 t} \right) + c \right]$$

$$G(t) = \sin \omega R \left[\frac{t}{R\omega^3} - \frac{1}{\varepsilon R \omega^5} \right] + c e^{-\varepsilon \omega^2 t}$$

$\Rightarrow$

$$u(x,t) = \int_0^\infty \left[\sin\omega\pi\left(\frac{t}{\pi\omega^3} - \frac{1}{4\pi\omega^5}\right) + Ce^{-4\omega^2 t}\right]\cos\omega x \, d\omega$$

$$u(x,0) = \int_0^\infty \left[\sin\omega\pi\left(-\frac{1}{4\pi\omega^5}\right) + C\right]\cos\omega x \, d\omega = \begin{cases} |x| & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

$$= h(x)$$

$$-\frac{\sin\omega\pi}{4\pi\omega^2} + C = \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos\omega x \, dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{\omega}\sin\omega x + \frac{1}{\omega^2}\cos\omega x\right]_0^1 =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega + \frac{1}{\omega^2}\cos\omega - \frac{1}{\omega^2}\right) \Rightarrow$$

$$C(\omega) = \frac{\sin\pi\omega}{4\pi\omega^5} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega + \frac{1}{\omega^2}\cos\omega - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

صفحه ۱۳۲ _ (۱۱_۵)

$$*\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x + t & 0 < x < \pi \quad t > 0 \\ u(x,0) = 2x - 1 & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ u_{tt}(x,0) = x + 1 & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ u(0,t) = t^2 & t \geqslant 0 \\ u(\pi,t) = t & t \geqslant 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$$

$$W(0,t) = 0 \qquad V(x,t) = ax + b$$

$$W(\pi,t) = 0 \qquad V(0,t) = b$$

$$V(\pi,t) = a\pi + b$$

$$u(0,t) = V(0,t) = t^2 = b$$

$$u(\pi,t) = V(\pi,t) = t = a\pi + b = a\pi + t^2$$

$$\Rightarrow \qquad b = t^2 \qquad \Rightarrow$$

$$a = \frac{t - t^2}{\pi}$$

$$V(x,t) = \frac{t - t^2}{\pi} x + t^2$$

$$u_{tt} = V_{tt} + W_{tt} \quad \Rightarrow \quad W_{tt} = u_{tt} - V_{tt}$$

$$W_{xx} = u_{xx}$$

$$V_t = \frac{1 - 2t}{\pi} x + 2t$$

$$V_{tt} = \frac{-2}{\pi} x + 2$$

$$u_{tt} = W_{tt} - \frac{\nu}{R}x + \nu$$

$$W_{tt} = \frac{\nu}{R}x + \nu - W_{xx} = x + t$$

$$W_{tt} - W_{xx} = x + t + \frac{\nu}{R}x - \nu$$

$$W(x,0) = u(x,0) - V(x,0)$$

$$V(x,0) = 0 \Rightarrow W(x,0) = u(x,0) = \nu x - 1$$

$$u_{tt}(x,0) = W_{tt}(x,0) - \frac{\nu}{R}x + \nu = x + 1$$

$$W_{tt}(x,0) = \frac{\nu}{R}x - \nu + x + 1 = \left(\frac{\nu}{R} + 1\right)x - 1$$

$$W(0,t) = 0$$

$$W(R,t) = 0$$

$$* \begin{cases} W_{tt} - W_{xx} = x + t + \frac{\nu}{R}x - \nu & 0 < x < R \quad t > 0 \\ W(x,0) = \nu x - 1 & 0 \leqslant x \leqslant R \\ W_{tt}(x,0) = \left(\frac{\nu}{R} + 1\right)x - 1 & 0 \leqslant x \leqslant R \\ W(0,t) = 0 & t \geqslant 0 \\ W(R,t) = 0 & t \geqslant 0 \end{cases}$$

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin nx$$

* این را در معادله اصلی قرار می دهیم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{G}_n(t) \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\, n^2 \sin nx = \left(\frac{2}{\pi}+1\right)x + t - 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\ddot{G}_n(t) + n^2 G_n(t)\right)}_{b_n} \sin nx = \left(\frac{2}{\pi}+1\right)x + t - 2$$

$$\ddot{G}_n(t) + n^2 G_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{2}{\pi}+1\right)x + t - 2\right] \sin nx \, dx$$

$$\ddot{G}_n(t) + n^2 G_n(t) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{2}{\pi}+1\right)\left(\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n}\right)_0^{\pi}\right] +$$

$$\left[\frac{-t \cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2 \cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}$$

$$\ddot{G}_n(t) + n^2 G_n(t) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{2}{\pi}+1\right)\left(\frac{\sin n\pi}{n^2} - \frac{\pi \cos n\pi}{n}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{t \cos n\pi}{n} + \frac{t}{n} + \frac{2 \cos n\pi}{n} - \frac{2}{n}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{2}{\pi}+1\right)\left(\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}\right) + \frac{t(-1)^{n+1}}{n} + \frac{t}{n} + \frac{2(-1)^n}{n} - \frac{2}{n}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\underbrace{t\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{n}\right]}_{\alpha} + \underbrace{\left(\frac{2}{\pi}+1\right)\left(\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}\right) + \frac{2(-1)^n}{n} - \frac{2}{n}}_{\beta}\right\}$$

$$\ddot{G}_n(t) + n^2 G_n(t) = \alpha t + \beta$$

$$G_n(t) = a_n \cos nt + B_n \sin nt + \underbrace{\frac{\alpha t + \beta}{n^2}}_{y_p}$$

$$* \quad y_p = \frac{qt+R}{p} \Leftarrow y'' + p y = qt + R \quad *$$

* اگر مسئله را حل کنیم نهایتاً داریم

$$* \quad y'' + n^2 y = 0$$
$$y(0) = 1$$
$$y''(\pi) = 2$$

$$y = A\cos nx + B\sin nx$$
$$y(0) = A = 1$$
$$y'' = -n^2 A\cos nx - n^2 B \sin nx$$

$$\boxed{y''(\pi) = -n^2 A \cos n\pi - n^2 B \underbrace{\cancel{\sin} n\pi}_{0} = 2}$$

$$\Rightarrow \qquad A = \frac{2}{-n^2 \cos n\pi}$$

* برای A دو مقدار بدست آمده و این غیر ممکن است.
لذا :

$$n^2 A (-1)^n = 2 \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{2(-1)^n}{n^2}$$

$$\frac{2(-1)^n}{n^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2(-1)^n = n^2 \qquad \Rightarrow$$

$$2 = n^2 \qquad \Rightarrow \qquad n = \sqrt{2}$$

$$u_t(x,t) = \frac{1-2t}{\pi}x + 2t + W_t(x,t)$$

$$u_t(x,0) = \frac{1}{\pi}x + W_t(x,0) = x+1$$

باید : « $W_t(x,0) = (1-\frac{1}{\pi})x + 1$ »

مسئله ارتعاش یک غشاء مستطیلی :

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$$