$$* \begin{cases} u(x,0,t) = 0 \\ u(x,b,t) = 0 \end{cases} \quad 0 \leqslant x \leqslant a$$

$$\begin{cases} u(0,y,t) = 0 \\ u(a,y,t) = 0 \end{cases} \quad 0 \leqslant y \leqslant b$$

شرایط مرزی

$$* \begin{cases} u(x,y,0) = f(x,y) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) \end{cases}$$

شرایط اوّلیه

$$u(x,y,t) = F(x)\,H(y)\,G(t)$$

$$u(x,0,t) = F(x)\,H(0)\,G(t) = 0 \Rightarrow H(0) = 0$$

$$u(x,b,t) = F(x)\,H(b)\,G(t) = 0 \Rightarrow H(b) = 0$$

$$u(0,y,t) = F(0)\,H(y)\,G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0$$

$$u(a,y,t) = F(a)\,H(y)\,G(t) = 0 \Rightarrow F(a) = 0$$

$$* \frac{\ddot{G}(t)}{C^2 G(t)} = K \qquad \begin{cases} F''(x) - M F(x) = 0 \\ F(0) = 0 \quad F(a) = 0 \end{cases}$$

مانند حالت یک بعدی وقتی جواب غیرصفر داریم که $M = -\lambda^2 < 0$ باشد که در این صورت با توجه به شرایط مرزی جواب بشکل ذیل خواهد بود :

$$\begin{cases} F_n = \sin \frac{n\pi}{a} x \\ \lambda = \frac{n\pi}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H''(y) - (K-M)\,H(y) = 0 \\ H(0) = 0 \\ H(b) = 0 \end{cases}$$

$< 0 \quad M - K = \mu^2 -$ است که در این صورت جواب H نیز بصورت ذیل خواهد بود :

$$H_m(y) = \cancel{B}\,1 \sin \frac{m\pi}{b} y$$
$$\mu = \frac{m\pi}{b}$$

$$K = M - \mu^2 = -(\lambda^2 + \mu^2) = -\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right)$$

* $G'' - c^2 K G = 0$

$$G'' + c^2\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) G = 0$$

** $\lambda_{nm} = c\pi\sqrt{\dfrac{n^2}{a^2} + \dfrac{m^2}{b^2}}$ **

* $G'' + \lambda^2_{nm} G = 0 \Rightarrow G(t) = A_{nm}\cos\lambda_{nm} t + B_{nm}\sin\lambda_{nm} t$

$$u_{nm}(x,y,t) = \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y\,(A_{nm}\cos\lambda_{nm}t + B_{nm}\sin\lambda_{nm}t)$$

« Super position » $\Rightarrow$

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A_{nm}\cos\lambda_{nm}t + B_{nm}\sin\lambda_{nm}t)\,.\,\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y$$

* این جواب در (۵) معادله اوّل صدق می کند . حال باید ضرایب A_{nm} و B_{nm} را محاسبه کنیم :

$$u(x,y,0) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y}_{\text{سری فوریه دوگانه}} = f(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y) \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y \, dy\, dx}$$

$$u_t(x,y,0) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}\lambda_{nm} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y = g(x,y)}_{\text{سری فوریه دوگانه}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B_{nm} = \frac{4}{ab\lambda_{nm}}\int_0^a\int_0^b g(x,y) \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y \, dy\, dx}$$

* چون حدود انتگرالها ثابت است لذا انتگرال های دوگانه به - صورت حاصلضرب دو انتگرال در می آیند .

* اگر شرایط مرزی $u_x(0,y,t)=0$ و $u_x(a,y,t)=0$ داشته باشد جواب حدسی به صورت ذیل است :

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm}\cos\lambda_{nm}t + B_{nm}\cos\lambda_{nm}t)\,.\cos\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y$$

---

* اگر شکل مرز دایره‌ای باشد از مختصات قطبی استفاده - می کنیم واگر شکل مرز کروی باشد از مختصات کروی - استفاده می کنیم واگر استوانه‌ای باشد از مختصات استوانه‌ای بهره می گیریم .

مرز دایره ای شکل :

$$u(x,y,t) = u(r,\theta,t)$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$u_{xx} + u_{yy} = \nabla^2 u(x,y) = \nabla^2 u(r,\theta)$$

$$= u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

$$u_{tt} = c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right)$$

مختصات استوانه‌ای :

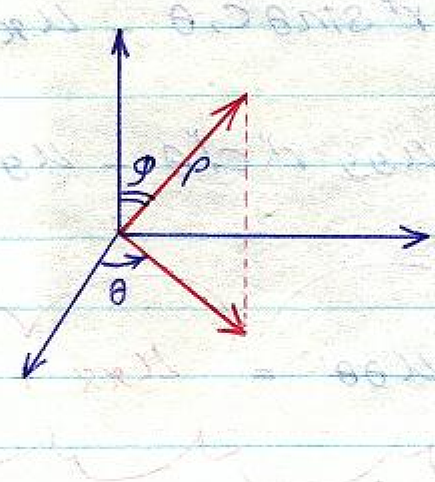
$$\nabla^2 u(r,\theta,z) = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz}$$

مختصات کروی :

$$u(x,y,z,t) = u(\rho,\varphi,\theta,t)$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \sin\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$



اثبات رابطه در مختصات قطبی :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

* $u_r = u_x \cdot x_r + u_y \cdot y_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta$

* $u_{rr} = (u_x \cos\theta + u_y \sin\theta)_r \Rightarrow$

$u_{rr} = (u_x)_r \cos\theta + (u_y)_r \sin\theta =$

$u_{xx}\cos^2\theta + u_{xy}\sin\theta\cos\theta + u_{yx}\cos\theta\sin\theta + u_{yy}\sin^2\theta$

* $u_\theta = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta$

* $u_{\theta\theta} = (-u_x)_\theta r\sin\theta - u_x r\cos\theta + (u_y)_\theta r\cos\theta$

$- u_y r\sin\theta =$

$u_{xx} r^2\sin^2\theta - u_{xy} r^2\sin\theta\cos\theta - u_x r\cos\theta -$

$u_{yx} r^2\sin\theta\cos\theta + u_{yy} r^2\cos^2\theta - u_y r\sin\theta$

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = u_{xx} + u_{yy}$$

صفحه ۱۳۰ - ۲ ت : (۶-۲)

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) = x + y + t \\ u(x,y,0) = 0 \\ u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0 & 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{cases}$$

* یک سطح مستطیلی است که یک مولد گرمائی به معادله $x + y + t$ دارد.

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}(t) \sin nx \sin my$$

$$u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{G}_{nm}(t) \sin nx \sin my$$

$$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}(t) (-n^2) \sin nx \sin my$$

$$u_{yy} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}(t) \sin nx (-m^2) \sin my$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\dot{G}_{nm}(t) + \varepsilon(n^2+m^2) G(t)) \sin nx \sin my =$$

$$x + y + t$$

$$\dot{G}_{nm} + \varepsilon(n^2+m^2)\, G_{nm}(t) = \frac{\varepsilon}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi (x+y+t)\sin nx \sin my \; dy\, dx$$

* چون در انتگرال دوگانه حالت جمع داریم و نه ضرب لزاماً نمی‌توان حاصل را به صورت ضرب دو انتگرال محاسبه کرد. باید تک تک نسبت به x و y حل کنیم.

$$= \frac{\varepsilon}{\pi^2}\iint (x+t)\sin nx \sin my \; dy\, dx \; +$$

$$\frac{\varepsilon}{\pi^2}\iint y \sin nx \sin my \; dy\, dx \quad \Longrightarrow$$

* حال می‌توان بصورت ضربی درآورد :

$$= \frac{\varepsilon}{\pi^2}\Bigg[\int_0^\pi x\sin nx\, dx \int_0^\pi \sin my\, dy + \int_0^\pi t \sin nx\, dx \,\cdot \int_0^\pi \sin my\, dy + \int_0^\pi \sin nx\, dx \int_0^\pi y \sin my\, dy\Bigg]$$

$$= \frac{\varepsilon}{\pi^2}\left[\frac{-x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^\pi \times \left[\frac{-1}{m}\cos my\right]_0^\pi +$$

$$\left[\frac{-t}{n}\cos nx\right]_0^\pi \times \left[\left(\frac{-1}{m}\right)\cos my\right]_0^\pi$$

$$-\left[\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} \times \left[\left(\frac{-y}{m}\cos my + \frac{1}{m^2}\sin my\right)\right]_0^{\pi} =$$

$$\frac{\varepsilon}{\pi^2}\Bigg[\frac{-\pi}{n}(-1)^n \times \left(\frac{-1}{m}(-1)^m + \frac{1}{m}\right) \cancel{-\frac{t}{n}(-1)^n \times \left(\frac{-1}{m}\right)(-1)^m}$$

$$+\left(\frac{-t}{n}(-1)^n + \frac{t}{n}\right)\left(\frac{-1}{m}(-1)^m + \frac{1}{m}\right) - \left(\frac{1}{n}(-1)^n - \frac{1}{n}\right)$$

$$\left(\frac{-\pi}{m}(-1)^m\right)\Bigg] =$$

$$\underbrace{\frac{-\varepsilon}{\pi nm}\left[(-1)^{n+1} + (-1)^{m+1} + 2(-1)^{n+m}\right]}_{\alpha_{nm}} + \underbrace{\frac{\varepsilon t}{\pi^2 nm}\left[(-1)^{n+m} + 1\right]}_{\beta_{nm}\ :\ \text{ضریب } t}$$

$$G'_{nm}(t) + \underbrace{\varepsilon(n^2+m^2)}_{\lambda^2_{nm}} G_{nm}(t) = \alpha_{nm} + t\beta_{nm}$$

$$G_{nm}(t) = e^{-\lambda^2_{nm} t}\left[\int (\alpha_{nm} + \beta_{nm} t)\, e^{\lambda^2_{nm} t}\, dt + C_{nm}\right]$$

$$= e^{-\lambda^2_{nm} t}\left[\frac{\alpha_{nm}}{\lambda^2_{nm}} e^{\lambda^2_{nm} t} + \underbrace{\beta_{nm}\left(\frac{t}{\lambda^2_{nm}} e^{\lambda^2_{nm} t} - \frac{1}{\lambda^4_{nm}} e^{\lambda^2_{nm} t}\right)}_{\text{از جزء به جزء محاسبه شده}} + C_{nm}\right]$$

$$= \frac{\alpha_{nm}}{\lambda^2_{nm}} + \beta_{nm} t / \lambda^2_{nm} - \beta_{nm} / \lambda^4_{nm} + C_{nm} e^{-\lambda^2_{nm} t} \Rightarrow$$

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{nm} + \beta_{nm} t}{\lambda^2_{nm}} - \frac{\beta_{nm}}{\lambda^4_{nm}} + C_{nm} e^{-\lambda^2_{nm} t} \right] \cdot \sin nx \sin my$$

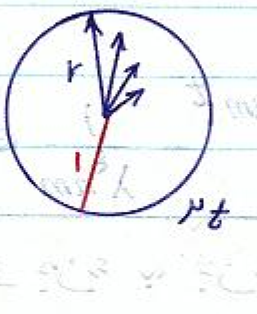
$$u(x, y, 0) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{\alpha_{nm} + \beta_{nm} t}{\lambda^2_{nm}} - \frac{\beta_{nm}}{\lambda^4_{nm}} + C_{nm} \right]}_{A_{nm}} \sin nx \sin my = 0$$

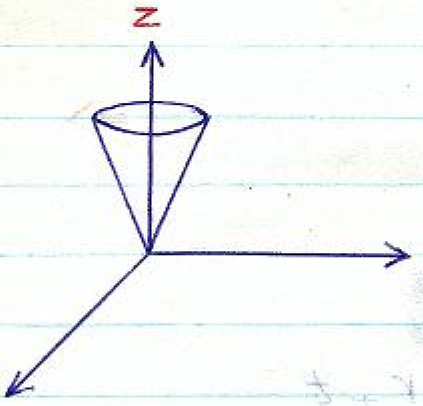
$$\Rightarrow A_{nm} = 0 \Rightarrow$$

$$* \; C_{nm} = \frac{\beta_{nm}}{\lambda^4_{nm}} - \frac{\alpha_{nm}}{\lambda^2_{nm}} \; *$$

صفحه ۱۳۰ - ت - (۶.۲) -



«امواج متحدالمرکز هستند»



$$\begin{cases} u(r,0) = r \\ u_t(r,0) = 2r+1 \\ u(1,t) = 2t \end{cases}$$

* یعنی دایرهٔ دهانه مخروط نیز خود با زمان طبق رابطه $2t$ نوسان می کند اما همواره به شکل دایره باقی می ماند .

* $u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r$

$$\left(\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right)$$

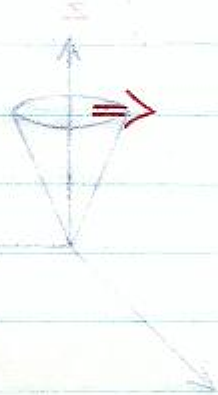
* باید شرط مرزی را همگن کنیم :

$$u(r,t) = V(r,t) + W(r,t)$$

* به فرض : $V(r,t) = a$
$W(r,t) = 0$

$$u(1,t) = V(1,t) + 0 = 2t$$
$$V(1,t) = 2t = a \Rightarrow$$
$$a = 2t$$

$$u(r,t) = 2t + W(r,t)$$
$$u_{tt} = W_{tt}$$
$$u_{rr} = W_{rr}$$
$$u_{r} = W_{r}$$



$$\begin{cases} W_{tt} = W_{rr} + \frac{1}{r} W_r + r + t \\ W(r,0) = r \\ W_t(r,0) = 2r - 1 \\ W(1,t) = 0 \end{cases}$$

* $(r+t)$ را صفر فرض کرده و مسئله را برای یافتن جواب - حدس حل می کنیم :

$$W_{tt} = W_{rr} + \frac{1}{r} W_r$$
$$W(r,t) = F(r)\, G(t)$$

$$\ddot{G} F = F'' G + \frac{1}{r} F' G$$

$$\frac{\ddot{G}}{G} = \frac{F''}{F} + \frac{F'}{rF} = K$$

$$\frac{\ddot{G}}{G} = K \quad \text{و} \quad \frac{F''}{F} + \frac{F'}{rF} = K$$

$$F'' + \frac{1}{r} F' - KF = 0 \quad \Rightarrow$$

$$r^2 F'' + r F' - r^2 K F = 0$$ معادلهٔ بسل مرتبهٔ صفرم

$$k = 1 \quad : \quad r^2 F'' + r F' + r^2 F = 0$$

$$J_0(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \, r^{2m}}{2^{2m} \, (m!) \, \gamma(m+1)} \qquad \gamma(m+1) = m!$$

$$u(r,t) = \sum_{m=0}^{\infty} G_m(t) \, \frac{(-1)^m \, r^{2m}}{2^{2m} \, (m!)^2}$$

* این را در معادله اصلی می بریم .

حل معادلات بکمک تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس :

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \, g(t) \, dt$$ (قضیه پیچش)

$$\mathcal{F}[f] = F(\omega)$$
$$\mathcal{F}[g] = G(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f * g] = F(\omega) \, . \, G(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega) \, . \, G(\omega)] = f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \, g(t) \, dt$$

$$\mathcal{F}[f''] = -\omega^2 \mathcal{F}[f]$$

$$\mathcal{F}[u_{xx}(x,t)] = -\omega^2 \mathcal{F}[u(x,t)] = -\omega^2 U(\omega,t)$$

$$\mathcal{F}[u_t(x,t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\, e^{-i\omega x}\, dx =$$

$$\frac{d\left[\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, dx}^{U(\omega,t)}\right]}{dt} = U_t(\omega,t)$$

$$\mathcal{F}[u_{tt}] = U_{tt}(\omega,t)$$

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & -\infty < x < +\infty \qquad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

(قرار داد : $\mathcal{F}(u(x,t)) = U(\omega,t)$)

$$\mathcal{F}(u_t) = c^2 \mathcal{F}(u_{xx})$$

$$U_t(\omega,t) = -c^2 \omega^2 U(\omega,t)$$

$$U_t + c^2\omega^2 U(\omega,t) = 0$$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$* \; U(\omega, t) = A(\omega)\, e^{-c^2 \omega^2 t}$

* حال برای یافتن ثابت از شرط اوّلیه بهره می‌گیریم :

$* \; \mathcal{F}(u(x,0)) = \mathcal{F}[f(x)]$

$$U(\omega, 0) = F(\omega) \Rightarrow$$

$$U(\omega, t) = F(\omega)\, e^{-c^2 \omega^2 t}$$

* حال باید تبدیل معکوس بگیریم :

$* \; u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[U(\omega,t)] = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t}]$

$$= f * g$$

$* \; F_s(f(x)) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx = \tilde{F}_s(n)$

$* \; F_c(f(x)) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx = \tilde{F}_c(n)$

$* \; \mathcal{F}^{-1}[F_s(n)] = \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n) \sin \frac{n\pi}{l} x$

$$F_s\left[f''(x)\right] = \frac{2}{l}\int_0^l f''(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{جزء به جزء}} = \frac{2}{l}\left[\sin\frac{n\pi}{l}x\, f'(x) - \frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\, f(x)\right]_0^L$$

$$-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\times\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{l}\left[\frac{n\pi(-1)^{n+1}}{l}f(L) + \frac{n\pi}{L}f(0)\right] - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\bar{F}_s(n)$$

$$= F_s\left[f''(x)\right] \quad **$$

S : سینوسی
C : کسینوسی

$$F_c\left[f''(x)\right] = \frac{2}{l}\left[f'(x)\cos\frac{n\pi}{L}x + \frac{n\pi}{L}\sin\frac{n\pi}{l}x\, f(x)\right]$$

$$-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\times\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2}{l}\left[(-1)^n f'(L) - f'(0)\right] - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\bar{F}_c(n) = F_c\left[f''(x)\right]$$

$$**$$

فرمول اصلی :

$$F_s\left[u_{xx}\right] = \frac{2}{l}\left[\frac{n\pi}{l}(-1)^{n+1}u(L,t) + \frac{n\pi}{L}u(0,t)\right] - \frac{n^2\pi^2}{L^2}U(n,t)$$

$$F_c\left[u_{xx}\right] = \frac{2}{l}\left[(-1)^n u_x(L,t) - u_x(0,t)\right] - \frac{n^2\pi^2}{L^2}U(n,t)$$

* در معادلات متناهی باتوجه به شرایط مرزی تبدیل فوریه سینوسی یا کسینوسی را انتخاب می کنیم، چون در اوّلی u و در دوّمی u_x داریم.

مثال -

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t) & 0<x<\pi \quad t\geqslant 0 \\ u(0,t) = g_1(t) & \\ u(\pi,t) = g_2(t) & 0\leqslant t \\ u(x,0) = 0 & \\ u_t(x,0) = 0 & 0\leqslant x\leqslant \pi \end{cases}$$

* چون شرایط مرزی بصورت u است از تبدیل فوریه-

سینوسی نسبت به x استفاده می کنیم :

$$\mathcal{F}_s[u_{tt}] = U_{tt}(n,t)$$

$$\mathcal{F}_s[u_{xx}] = \frac{2}{\pi}\left[n(-1)^{n+1} g_2(t) + n g_1(t)\right] - n^2 U(n,t)$$

$$\mathcal{F}_s(h(x,t)) = H(n,t)$$

$$\Rightarrow \quad U_{tt} + c^2 n^2 U = \frac{2c^2}{\pi}\left[n(-1)^{n+1} g_2(t) + n g_1(t)\right] + H(n,t) = F(n,t)$$

$$\Rightarrow \quad U(n,t) = A_n \cos cnt + B_n \sin cnt + \underbrace{U_p(n,t)}_{\text{جواب خصوصی با طرف ثانی}}$$

* حال با گرفتن $\mathcal{F}_s$ از شرایط اولیه A_n و B_n را می یابیم :

$$\begin{cases} U(n,0) = 0 \\ U_t(n,0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &* \; A_n = -U_p(n,0) \\ &* \; c n B_n = -\left(U_p(n,0)\right)_t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$U(n,t) = -U_p(n,0)\cos cnt - \frac{1}{cn}\left(U_p(n,0)\right)_t \sin cnt + U_p(n,t)$$

* حال از طرفین تبدیل معکوس می‌گیریم :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

توجه - تبدیل فوریه نسبت به x و تبدیل لاپلاس نسبت به t است.

حل معادلات با تبدیل لاپلاس :

* $L[f(x)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)$
* $L[f'(x)] = sF(s) - f(0)$
* $L[f''(x)] = s^2F(s) - s f(0) - f'(0)$

$$*\; L[u_{tt}] = s^2 U(x,s) - s\,u(x,0) - u_t(x,0)$$

$$*\; L[u_t] = s\,U(x,s) - u(x,0)$$

مثال-

$$*\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t) & 0<x<\pi \quad t\geqslant 0 \\ u(0,t) = g_1(t) \\ u_x(\pi,t) = g_2(t) \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

* باید $h(x,t)$ بر حسب t تبدیل لاپلاس داشته باشد یعنی :

$$\exists M : |h(x,t)| \leqslant M e^{-\alpha t}$$

$$s^2 U(x,s) - s\,\cancel{u(x,0)} - \cancel{u_t(x,0)} = c^2 U_{xx}(x,s) + H(x,s)$$

$$U_{xx} - \frac{s^2}{c^2} U(x,s) = \frac{-1}{c^2} H(x,s) \Rightarrow$$

$$U(x,s) = A(s)\, e^{-\frac{s}{c}x} + B(s)\, e^{+\frac{s}{c}x} + U_p(x,s)$$

جواب خصوصی با طرف ثانی

* از طرفین شرایط مرزی تبدیل لاپلاس می‌گیریم :

$$\begin{cases} U(0,S) = G_1(S) \\ U_x(R,S) = G_2(S) \end{cases}$$

* A_n و B_n را می‌یابیم و سپس $U(x,S)$ را می‌یابیم.
و سپس « در صورت وجود » تبدیل معکوس لاپلاس
می‌گیریم.

صفحه ۳۱ ـ ت ـ ۸.C ـ

$$\begin{cases} u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0 & 0<x<R \quad t>0 \\ u(x,0) = 0 \quad \text{و} \quad u_t(x,0) = 0 & 0<x\leqslant R \\ u(0,t) = u(R,t) = 0 \\ u_{xx}(0,t) = 0 \\ u_{xx}(R,t) = \sin t & t \geqslant 0 \end{cases}$$

* $u_{xx} = \vartheta$

$$F_s\{u_{xxxx}\} = \frac{2n}{R}\left[u_{xx}(0,t) - (-1)^n u_{xx}(R,t)\right] - n^2 F_s\{\underbrace{\vartheta}_{u_{xx}}\}$$

$$= \frac{2n}{\pi}\left[-(-1)^n \sin t\right] - n^2 \quad \Rightarrow$$

$$= \frac{2n}{\pi}\left[-(-1)^n \sin t\right] - n^2 \times \left\{ \frac{2n}{\pi}\left[u(\underset{0}{\cancel{0}},t) - (-1)^n u(\underset{0}{\cancel{\pi}},t)\right] - n^2 F_s\{u\} \right\}$$

عبارت داخل آکولاد $F(u_{xx})$ است.

$$= \frac{2n}{\pi}\left[(-1)^{n+1} \sin t\right] + \left[n^4 V(n,t)\right] \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 V(n,t)}{dt^2} + c^2 \frac{2n}{\pi}\left[(-1)^{n+1}\sin t\right] + \left[n^4 c^2 V(n,t)\right] = 0$$

$$* \quad \frac{d^2 V(n,t)}{dt^2} + \frac{n^4 c^2 \pi V(n,t)}{2} = \frac{2nc^2}{\pi}(-1)^n \sin t$$

$$* \quad V(n,t) = A_n \cos n^2 c\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, t + B_n \sin n^2 c \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, t + \frac{2n^2c^2(-1)^n}{(-1+n^4c^2)\pi}\sin t$$

$n^4c^2 \neq 1$

$n \neq \sqrt{\frac{1}{c}}$

$$* \quad F_s\{u(x,0)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(n,0) = 0$$

$$F_s\{u_t(x,0)\} = \frac{dV(n,0)}{dt} = 0$$

$$\boxed{A_n = 0}$$

$$B_n n^2 \cancel{c} + \frac{2\cancel{n}c^{\cancel{2}}(-1)^n}{\pi(n^4c^2-1)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad * \; B_n = -\frac{2c(-1)^n}{n\pi(n^4c^2-1)}$$

$$V(n,t) = -\frac{2c(-1)^n}{n\pi(n^4c^2-1)}\sin cn^2t + \frac{2nc^2(-1)^n}{\pi(n^4c^2-1)}\cdot \sin t \quad \Rightarrow$$

$$* \; u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[V(n,t)\right]\sin nx \; *$$

* حال به بررسی حالت $n \neq \sqrt{\frac{1}{c}}$ می پردازیم :

$$\frac{d^2V(n,t)}{dt^2} + c^2n^4\,V(n,t) = \frac{2nc^2}{\pi}(-1)^n\sin t$$

$\left(c = \frac{1}{n^2}\right)$ فقط در این صورت است که n عددی طبیعی می شود. $\Rightarrow$

$$\frac{d^2V(n,t)}{dt^2} + V(n,t) = \underbrace{\frac{2}{n^3\pi}(-1)^n}\sin t$$

$$V(n,t) = A_n\cos t + B_n\sin t + \left(-\frac{t}{n^3\pi}(-1)^n\cos t\right)$$

$$y_p = at\sin t + bt\cos t$$

$$y'_p = a\sin t + at\cos t + b\cos t - bt\sin t$$

$$y''_p = a\cos t + a\cos t - at\sin t - b\sin t - b\sin t - bt\cos t + y_p$$

$$-2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$
$$2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$V(n,0) = 0 \Rightarrow A_n = 0$$
$$V_t(n,0) = B_n = 0$$

$$V(n,t) = \frac{t}{n^3\pi}(-1)^{n+1}\cos t$$

$$* \; u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[V(n,t)\right]\sin nx \; *$$

« جواب در حالت خامی »

صفحه ۱۳۱ - ۸.۶ -

$$* \begin{cases} u_t = u_{xx} + x + \sin t \\ u(x,0) = 0 \qquad 0 < x < \pi \\ u(0,t) = 0 \quad , \quad u_x(\pi,t) + 2u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

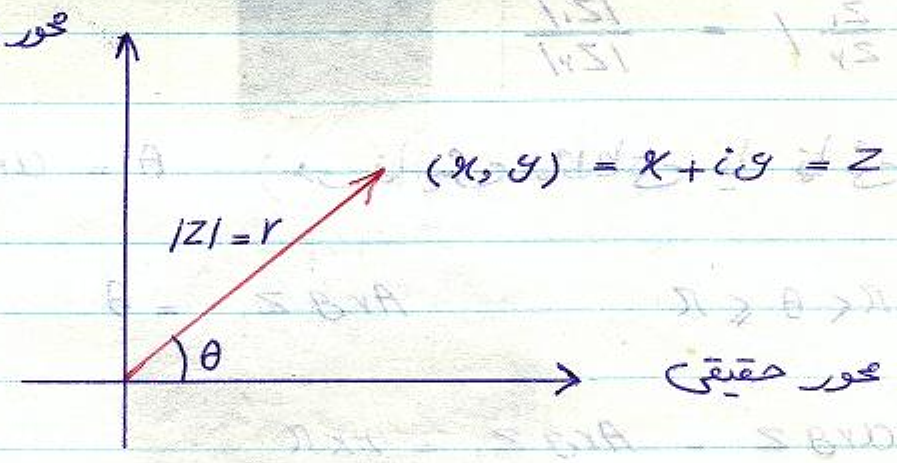
* این مسئله با تبدیل فوریه حل نمی‌شود چون در آن «x» وجود دارد و تابع x در ∞ به صفر میل نمی‌کند. لذا باید از تبدیل لاپلاس برای حل آن استفاده کرد.

«توابع مختلط»

* $C = \{x + iy\}$ $\quad x , y \in \mathbb{R}$ $\quad$ و $\quad i^2 = -1$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad$ (تابع مختلط)

* $Z = x + iy = |Z| (\cos\theta + i \sin\theta) = |Z| e^{i\theta}$



(اتحاد اولر) : $\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

* $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad$ (فاصله z تا مبداء)

* $|Z - Z_0|$ $\quad$ (فاصله Z تا Z_0)

* $\bar{Z} = x - iy$ (مزدوج Z)

$Z = x + iy$

* $x = \frac{Z + \bar{Z}}{2} = Re\ Z$

* $y = \frac{Z - \bar{Z}}{2i} = img\ Z$

* $|Z| = |\bar{Z}|$

* $|Z|^2 = Z\bar{Z}$

* $|Z_1 Z_2| = |Z_1||Z_2|$

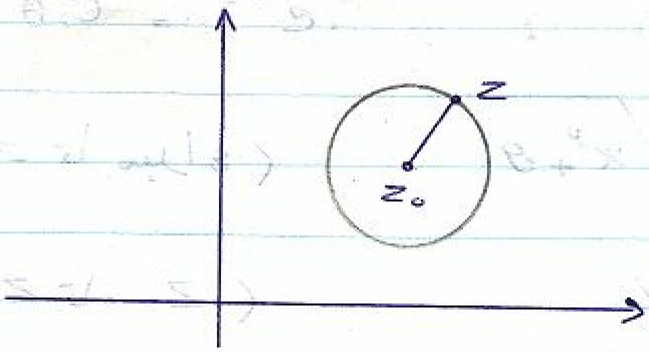
* $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

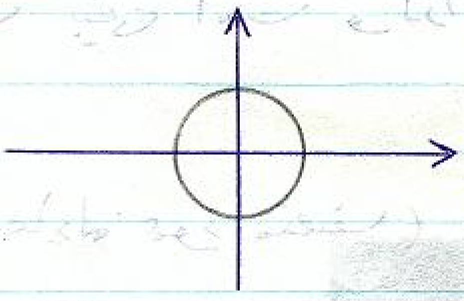
* $\theta = arg\ Z$ (در نمایش مثلثاتی یا نمائی)

* $-\pi < \theta \leqslant \pi \qquad Arg\ Z = \theta$ (آرگومان اصلی)

* $arg\ Z - Arg\ Z = 2k\pi$

* $|Z - Z_0| = a$



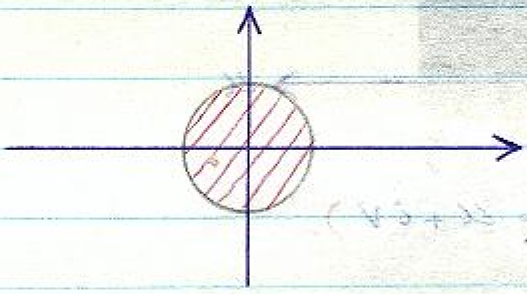


$|Z| = a$

$Z = ae^{i\theta}$ معادله دایره $\Longleftrightarrow$ $|Z| = a|e^{i\theta}| = a$

$Z = Z_0 + ae^{i\theta}$ معادله دایره به مرکز غیر مبداء

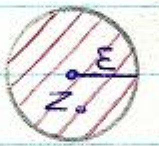
* (قرص واحد) * : $|Z| < 1$



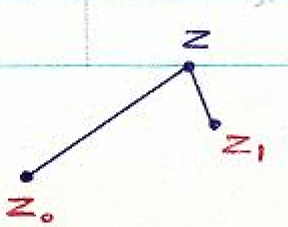
* مرز را شامل نمی‌شود.

* $|Z - Z_0| < \varepsilon$
$\varepsilon > 0$

(همسایگی نقطهٔ Z_0 به شعاع ε.)

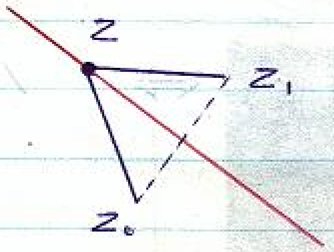


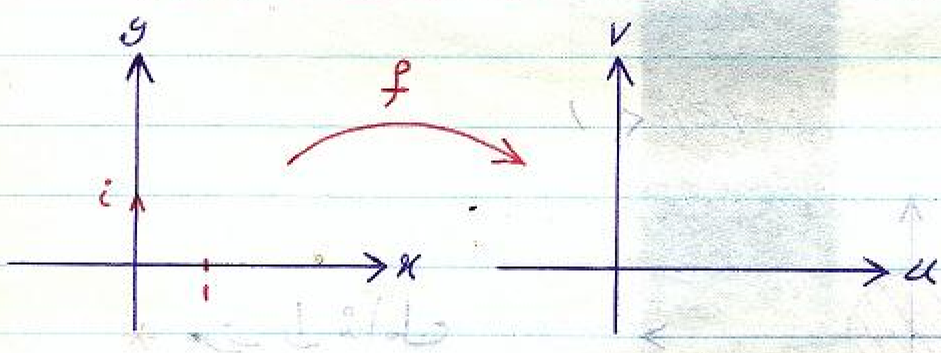
* $|Z - Z_0| + |Z - Z_1| = 2a$



* واین تعریف بیضی است و لذا معادله فوق معادله بیضی است.

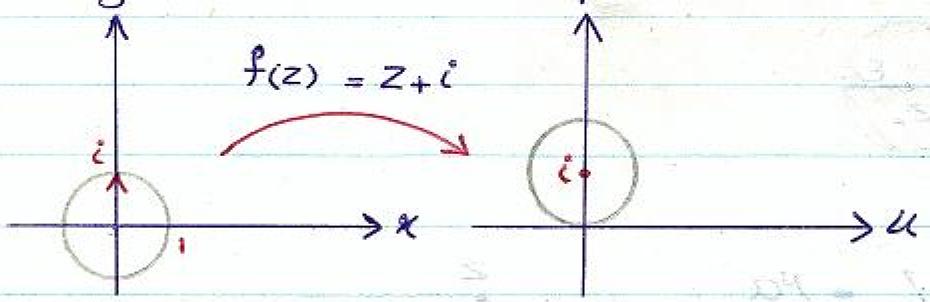
* $|z - z_0| = |z - z_1|$ * (معادله عمود منصف)





$(z = x + iy)$ $(W = u + iV)$

* ($f(z) = z - z_0$) یک تابع انتقال است که انتقالی به اندازه
بردار z_0 دارد.



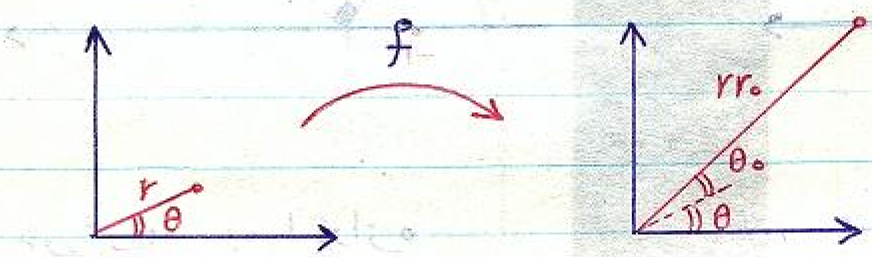
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ $\quad r = |z|$

$z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$

$W = z . z_0 = rr_0 e^{i(\theta + \theta_0)}$

$|W| = rr_0$

$\arg W = \theta + \theta_0$



* $f(z) = iz$

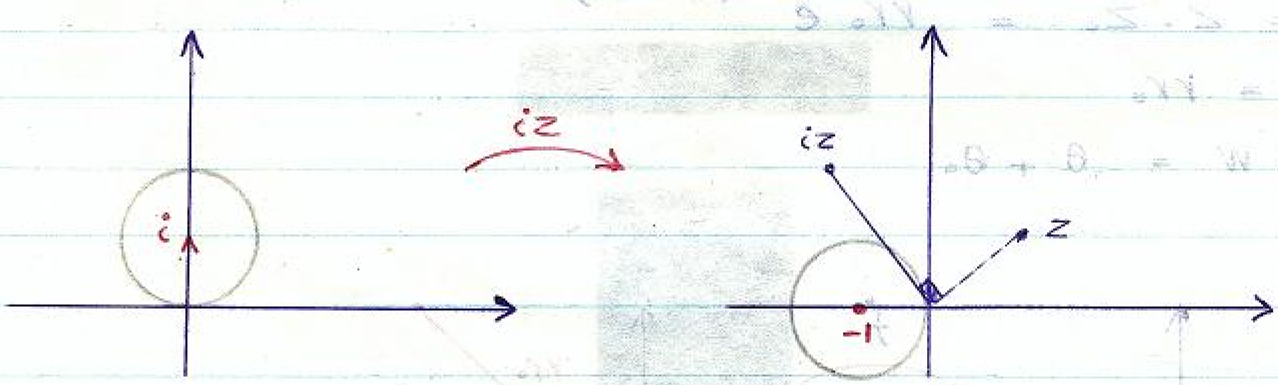
$\arg i \Leftarrow$ «دوران به اندازه»

$(\arg W = \frac{\pi}{2} + \arg z)$

مثال- تحت نگاشت iz دایره $(|z-i|<1)$ به کجا منتقل می‌شود؟

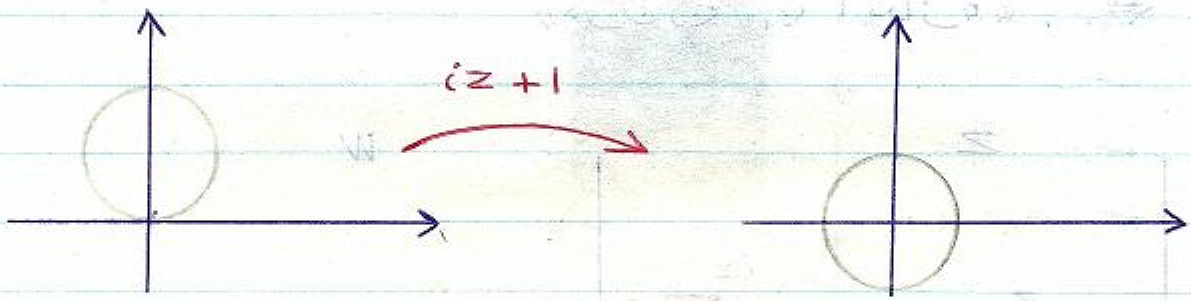
$|z-i|<1$

$\left|\frac{w}{i}-i\right|<1 \Rightarrow \left|\frac{w+1}{i}\right|<1$



* $w=f(z)=iz+1$

دوران به اندازه $\arg i$ و انتقال به اندازه (۱).



«همان مثال قبل»

* $w=f(z)=2z$ (تابع انبساط)

* $w=\underbrace{2i}_{z_0}z+i$

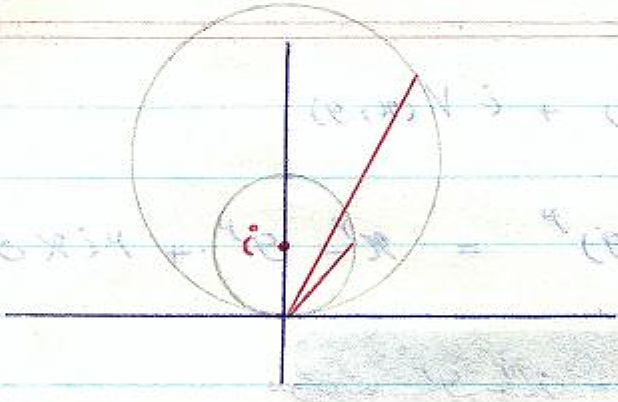
* تجانس $k=|z_0|$

* دوران $\arg z_0$

* انتقال i

انبساط $|z_0|>1$

انقباض $|z_0|<1$



$$W = f(z) = 2Z$$

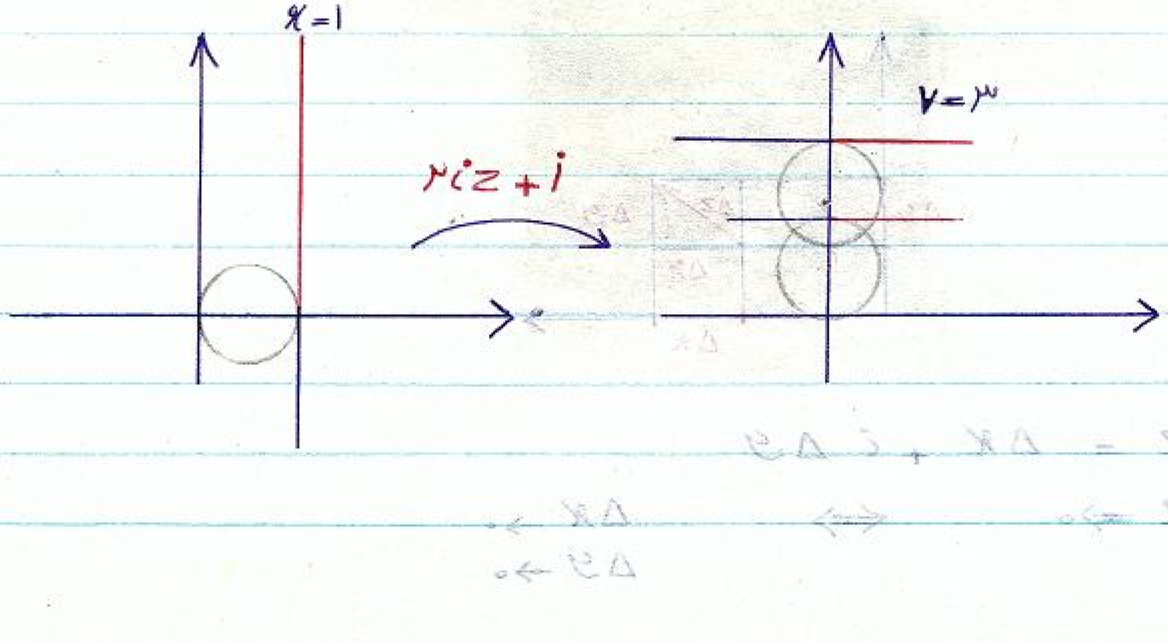
* $|Z - i| = 1$

$$\left|\frac{W}{۲} - i\right| = 1$$

$$\frac{|W - ۲i|}{۲} = 1 \quad \Rightarrow \quad |W - ۲i| = ۲$$

$$\begin{cases} Z = x + iy \\ W = u + iV \end{cases}$$

$$u + iV = ۲i(x + iy) + i$$
$$= -۲y + ۲ix + i$$
$$= -۲y + ۳i \quad \Rightarrow \quad u = -۲y, \quad V = ۳$$



$$* \; W = \underset{(x,y)}{f(z)} = u_{(x,y)} + i\, V_{(x,y)}$$

$$* \; f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iV$$

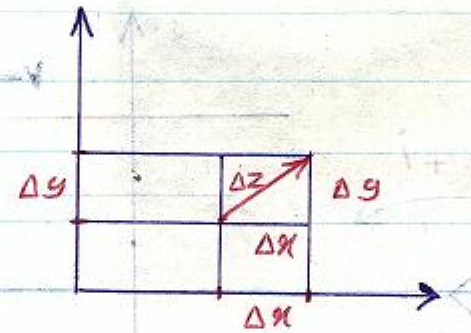
$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} u(x,y) = x^2 - y^2 & \text{پیوسته} \\ V(x,y) = 2xy & \text{پیوسته} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

* $(W = f(z) = z^2)$ پیوسته است

* $f(z)$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ مشتق‌پذیر است :

$$* \; \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

$$* \; \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$



$$* \; \Delta z = \Delta x + i\, \Delta y$$

$$\Delta z \Rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{array}$$

قضیه - اگر $f(z)$ در نقطه $z_0 = x_0 + i y_0$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه معادلات کوشی - ریمان در نقطه (x_0, y_0) برقرار - است:

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

مثال -

* $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = u(x, y) + v(x, y)$

$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$v(x, y) = 0$

$$\left(u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{و} \quad v_y = 0\right) \Rightarrow$$

$$(u_x \neq v_y)$$

* تابع رادیکالی در صفر مشتق پذیر نیست (چون مخرج - موهومی می شود). در نقاط غیر صفر هم معادلات کشی - ریمان برقرار نیست. پس تابع مشتق پذیر نیست.

مثال -

* $f(z) = \bar{z} = x - iy$ (تابع تقارن)

$u(x, y) = x$

$v(x, y) = -y \Rightarrow u_x = 1 \neq v_y = -1$

(مشتق پذیر نیست)

مثال - * $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ *

$$\begin{cases} u_x = 2x = v_y \\ u_y = -2y = -v_x \end{cases}$$

* معادلات کشی - ریمان برقرار است اما نمی توان استدلال کرد که $f(z)$ مشتق پذیر است چراکه برقراری این معادلات تنها شرط لازم است و نه کافی.

عکس قضیه -

فرض کنید تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ طوری تعریف شده است که $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در (x_0,y_0) پیوسته باشند و u_x و u_y و v_x و v_y هم در این نقطه پیوسته باشند و در معادلات کوشی ریمان هم صدق کنند.
در این صورت تابع $f(z)$ در z_0 مشتق پذیر است و $f'(z_0)$ برابر است با: $f'(z_0) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

مثال - $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

$u(x,y) = x^2 - y^2$ پیوسته

$v(x,y) = 2xy$ پیوسته

$u_x = 2x = v_y$ پیوسته

* $u_y = -2y = -v_x$ پیوسته

$$\Rightarrow \quad f'(z) = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$$

مثال - $f(z) = \bar{z}z = |z|^2 = x^2 + y^2$

$u(x,y) = x^2 + y^2$ پیوسته

$v(x,y) = 0$ پیوسته

$u_x = 2x \qquad v_x = 0$

$u_y = 2y \qquad v_y = 0$

$u_x = 2x \neq v_y$ به جز نقطه $x = 0$

$u_y = 2y \neq -v_x$ 〃 $y = 0$

* به غیر از $(0,0)$ تابع $f(z) = |z|^2$ در سایر نقاط مشتق‌پذیر نیست ، در مبداء در شرایط عکس قضیه کشی ریمان صدق می کند و مشتق‌پذیر است .

توابع تحلیلی -

تابع $W = f(z)$ را در z_0 تحلیلی گوییم در صورتی که در یک همسایگی نقطه z_0 مشتق‌پذیر باشد .

* مثال $f(z)=|z|^2$ در نقطه (۰) تحلیلی نیست چون فقط در صفر مشتق‌پذیر است.

* اگر تابعی در یک نقطه تحلیلی باشد مشتقات آن تا هر مرتبه‌ای در آن نقطه موجود است.

* اگر تابعی بر یک مجموعه (ناحیه) تحلیلی باشد (در تمام نقاط آن مجموعه مشتق‌پذیر باشد) می‌گوییم این تابع بر مجموعه (ناحیه) تحلیلی است.

* تحلیلی بودن تمام شرایط مشتق‌پذیری را دارد مثلاً حاصلضرب دو تابع تحلیلی یک تابع تحلیلی است.

* اگر تابعی بر تمام صفحه مختلط تحلیلی (مشتق‌پذیر) باشد به آن (تام) گوییم.

* تابع $u(x,y)$ را (همساز) گوییم اگر در معادله لاپلاس صدق کند:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

* اگر $f(z)$ تحلیلی باشد ($f(z) = u + iv$) در این صورت u و v توابعی همساز هستند.

* اگر $f(z)$ تحلیلی باشد v را مزدوج همساز u گویند و بالعکس یعنی اگر شق دوم باشد $f(z)$ تحلیلی است.

* $f(z) = u + iV$

$i f(z) = -V + iu \Rightarrow$ u مزدوج همساز $-V$ است.

* V مزدوج همساز u است اگر و تنها اگر :
u و V و u_x و u_y و V_x و V_y پیوسته بوده و در معادلات کشی - ریمان صدق کنند.

مثال - اگر : $u = \cos x \cosh y$
مطلوبست مزدوج همساز u را (یا : V را طوری بیابید که $u + iV$ تحلیلی باشد).

* اول چک می کنیم که آیا u همساز است یعنی در معادله - لاپلاس صدق می کند یا خیر ؟!!

* $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$

* $\begin{cases} V_y = -\sin x \cosh y \\ V_x = -\cos x \sinh y \end{cases}$
نسبت به y انتگرال می گیریم
" " x " "

* پس از انتگرال گیری جملات مشترک را یکبار می نویسیم و جملات غیر مشترک را حتماً می نویسیم.

* $\int V_y \, dy = -\sin x \sinh y$

* $\int V_x \, dx = -\sin x \sinh y$

$\Rightarrow$

$$\boxed{V(x,y) = -\sin x \sinh y}$$

* $f(z) = u + iV = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = \cos(x+iy) = \cos z$

* شبیه همان بسط :

$\cos(x+y)$ اما هرجا i داریم ch یا $\sinh$ بکار می بریم.

---

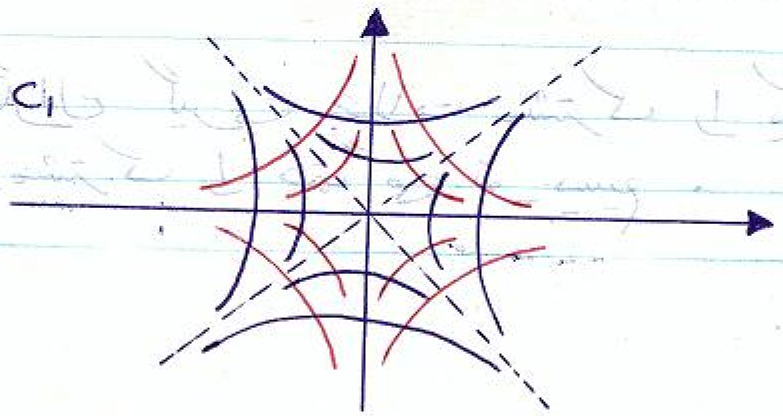
* اگر $f(z) = u + iV$ تحلیلی باشد منحنی‌های تراز u و V در هر نقطه بر هم عمود هستند. (یا به عبارتی اگر V مزدوج همساز u باشد)

$f(z) = u + iV$

$$\begin{cases} u(x,y) = c_1 \\ V(x,y) = c_2 \end{cases}$$ مسیرهای متعامد :

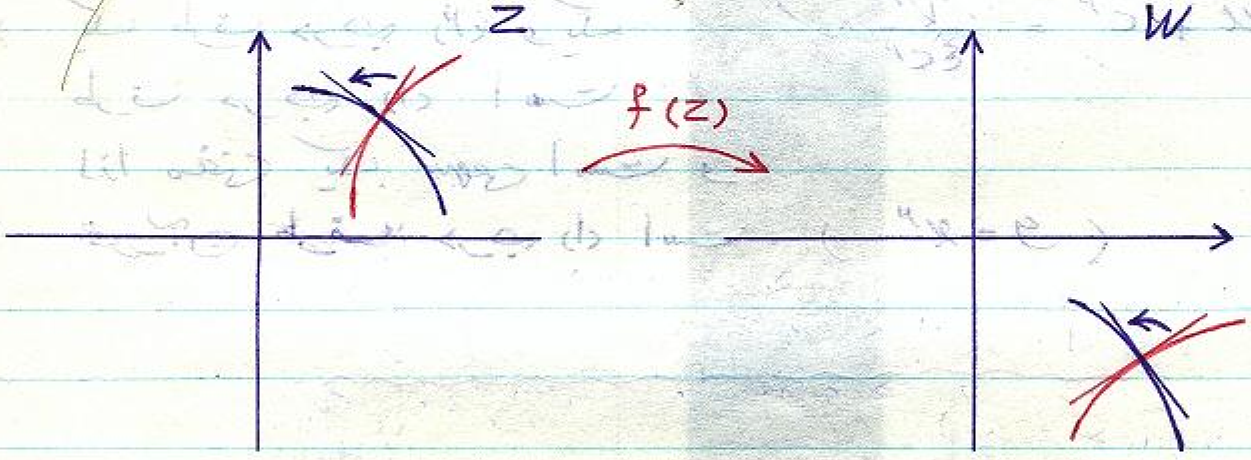
مثال -

$u = x^2 - y^2 = c_1$



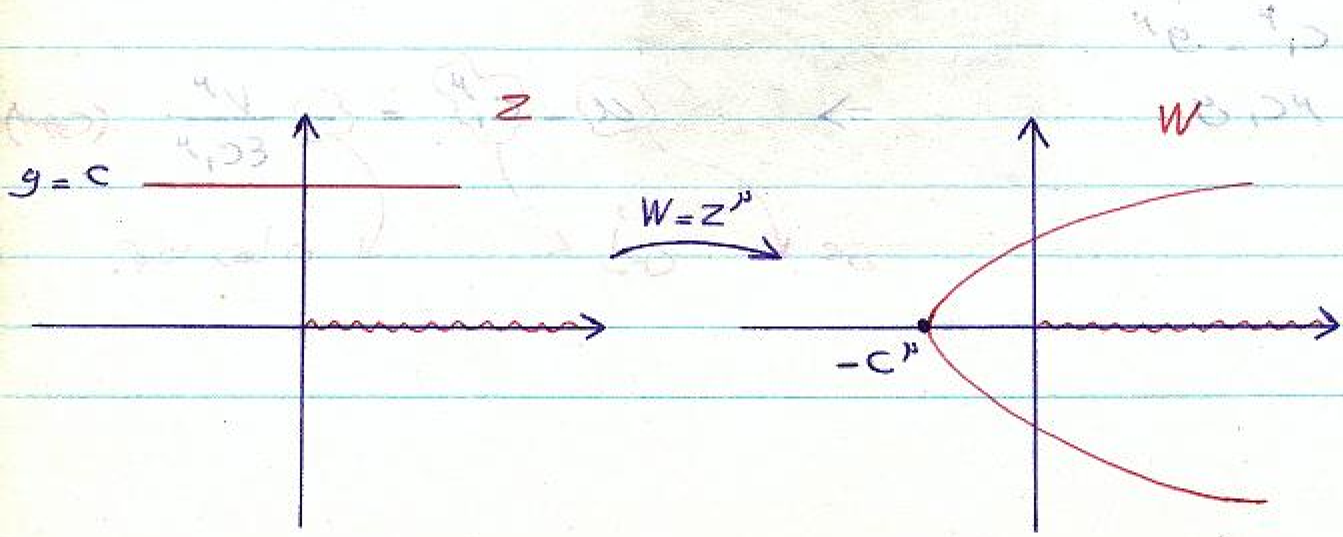
* مسیرهای متعامد در هر نقطه بر هم عمود هستند.

همدیس بودن: اگر یک نگاشتی حافظ زاویه و جهت آن باشد آن را یک نگاشت همدیس گویند.



قضیه - اگر تابع (نگاشت) f(z) تحلیلی باشد در نقاطی که مشتق آن صفر نباشد یک نگاشت همدیس است. (عکس قضیه همواره صادق نیست)

مثال -

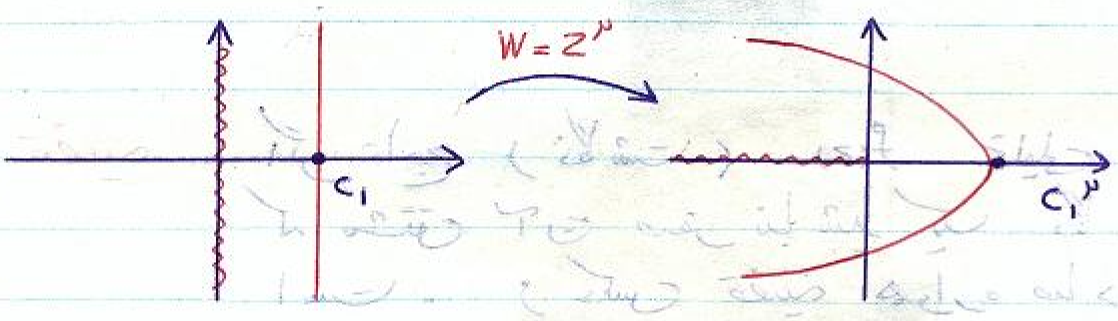


$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - c^2 \\ v = 2xc \end{cases}$$

* و این معادله پارامتری نقش منحنی است که با حذف پارامتر x از آن معادله دکارتی نقش بدست می آید.

* $u + c^2 = \dfrac{v^2}{4c^2}$

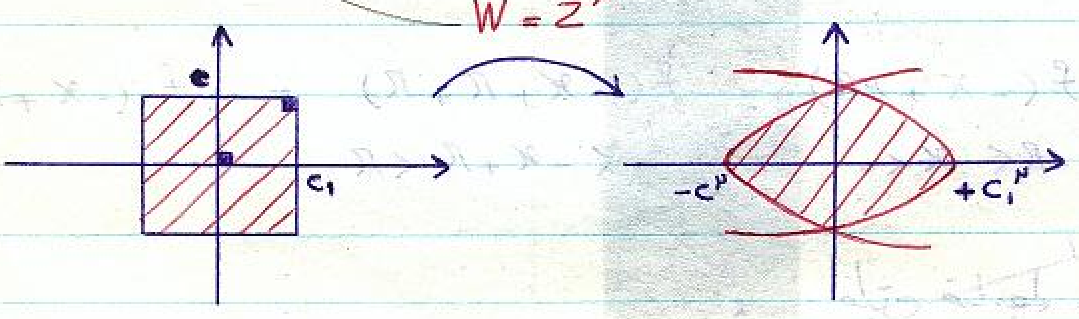
یک طرف درجه (۲) و یک طرف درجه (۱) است
لذا منحنی یک سهمی است و
محور آن طرف درجه (۱) است. ($y = x^2$)



$$\begin{cases} u = c_1^2 - y^2 \\ v = 2c_1 y \end{cases} \Rightarrow u - c_1^2 = - \frac{v^2}{4c_1^2} \quad \text{(سهمی)}$$

محور — رأس — جهت دهانه

* اگر خطوط $y=c$ و $x=c_1$ را که بر هم عمودند و نقشهای آنها را در یک دستگاه رسم کنیم مماسهای سهمی ها هم بر هم عمود هستند چون حافظ زاویه است. اما چون در $z=0$، $f'(0)=2z=0$ است حافظ زاویه نیست و نقش محورها با هم زاویه 90° نمی سازند.

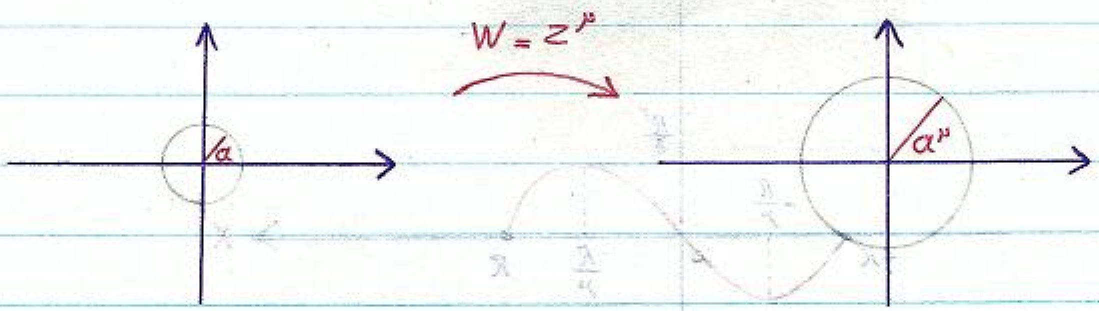


مثال- $W = r^2 e^{i2\theta} = \rho^2 e^{i\varphi}$

$\begin{cases} r = a \\ 0<\theta<\pi \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = a^2 \\ 0<\varphi = 2\theta < 2\pi \end{cases}$

* $|z| = a$

$|W^{\frac{1}{2}}| = a \Rightarrow |W| = a^2$



حل سؤالات امتحانی

۱- سری فوریه تابع

$$* \begin{cases} f(x) = x(\pi - x) \quad \leftarrow \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ f(x+\pi) = -f(x) \quad \leftarrow \quad P = 2\pi \end{cases}$$

را بدست آورید.

$$f(-x) = f(-x+2\pi) = f(-x+\pi+\pi) = -f(-x+\pi)$$

$$0<x<\pi \rightarrow -\pi<-x<0 \rightarrow 0<-x+\pi<\pi$$

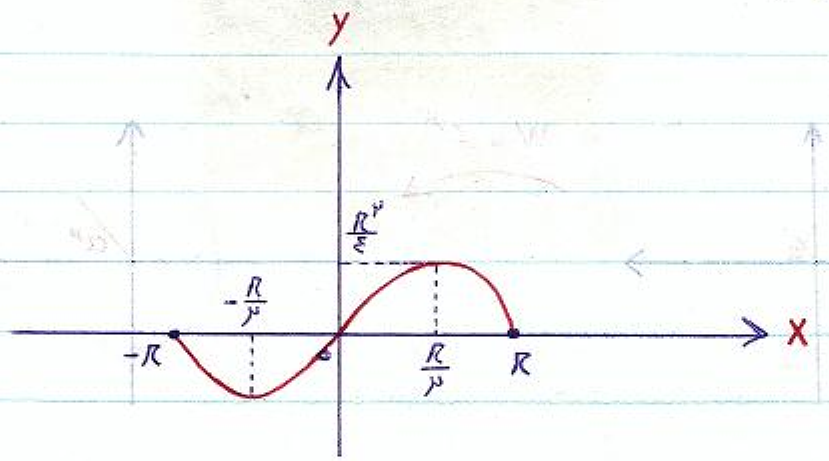
$\Rightarrow$ طبق ضابطه دوم :

$$-f(-x+\pi) = -\left[(-x+\pi)(\pi-(-x+\pi))\right] = (x-\pi)x$$

$$= -f(x) \qquad 0<x<\pi$$ (در این فاصله فرد)

اگر : $-\pi<x<0 \Rightarrow 0<-x<\pi$

$$f(-x) = (-x)(\pi-(-x)) = -x(x+\pi) = ?$$ (در این فاصله نه زوج و نه فرد)



(سرسرا)

* محاسبات نشان داد که تابع نه زوج و نه فرد است اما رسم نمودار - تابع را فرد نشان می دهد لذا احتمالاً اشتباهی صورت گرفته پس بهتر است از ابتدا سری فوریه را حساب کنیم و اگر $a_n = 0$ شد - یعنی تابع فرد است (هرچند از لحاظ زمانی راه حل بیشتر طول - می کشد).

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{f(x) \cos nx \, dx}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$t = x + \pi \Rightarrow$ (تغییر متغیر می دهیم تا فاصله از ۰ تا π شود)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t-\pi) \cos n(t-\pi) \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

* $-f(x) = f(x+\pi) = f(x+\pi-2\pi) = f(x-\pi)$

$$\Rightarrow \quad f(t-\pi) = -f(t)$$

* $\cos n(t-\pi) = \cos nt \cos n\pi + \cancel{\sin nt \sin n\pi}^{\,0} = (-1)^n \cos nt$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} -f(t) (-1)^n \cos nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}(-1)^{n+1}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$f(t) = f(x+\pi) = -f(x)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[(-1)^{n+1}+1\right]\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos nx \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[(-1)^{n+1}+1\right]\left[\frac{\pi-2\pi}{n^2}\cos n\pi - \frac{\pi}{n^2}\right] = \frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2}\times\left[(-1)^n+1\right]$$

$$a_n = -\frac{1-(-1)^n}{n^2}\times\left[1+(-1)^n\right] = \frac{1-1}{n^2} = 0$$

* پس تابع فرد است و اشتباه در محاسبات در آنجا بود
که ما $0<-x+\pi<\pi$ را در نظر گرفتیم در حالی که —
$\pi<-x+\pi<2\pi$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx\,dx$$

۲ـ

$$u_{tt} - u_{xx} = x + t \qquad 0<x<1$$

$$u(x,0) = 1 \qquad u_t(x,0) = -x$$

$$u(0,t) = \frac{t^3}{6} \qquad u(1,t) = \frac{(1+t)^3}{6}$$

(مسئله موج)

$$u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$$
$$V(x,t) = ax + b$$
$$V(0,t) = b = \frac{t^3}{6}$$
$$V(1,t) = a + b = \frac{(1+t)^3}{6} \Rightarrow a = \frac{(1+t)^3 - t^3}{6}$$

$$u(x,t) = \frac{(1+t)^3 - t^3}{6}x + \frac{t^3}{6} + W(x,t)$$

$$u_{xx} = W_{xx}$$
$$u_t = \frac{3(1+t)^2 - 3t^2}{6}x + \frac{t^2}{2} + W_t$$

$$u_{tt} = \left[(1+t) - t\right]x + t + W_{tt} = x + t + W_{tt}$$

$$\cancel{x+t} + W_{tt} - 4W_{xx} = \cancel{x+t}$$

$$\begin{cases} W_{tt} - 4W_{xx} = 0 \\ W(0,t) = 0 \quad W(1,t) = 0 \\ W(x,0) = 1 - \frac{1}{6}x \\ W_t(x,0) = -\frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \sin n\pi x$$

$\Rightarrow$ « $u(x,t)$ بدست می‌آید »

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{l} = 2n\pi$$

۳- روش دالامبر -

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x,0) = x + 2 \\ u_t(x,0) = \cos \pi x \\ u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

$$Z = x - t \qquad \Rightarrow \qquad u_{zv} = 0$$
$$V = x + t$$

$$\Rightarrow \qquad u_z = c(z) \qquad \Rightarrow$$

$$u = \int c(z)\, dz + G(V)$$

$$* \quad u = f(z) + g(V) \quad *$$

$$u(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$$
$$u(0,t) = f(-t) + g(t) = 0$$
$$u(\pi,t) = f(\pi - t) + g(\pi + t) = 0$$

$$f(x) + g(x) = x + 2$$
$$-f'(x-t) + g'(x+t)\Big|_{t=0} = \cos \pi x$$

$$\begin{cases} -f'(x) + g'(x) = \cos \pi x \\ f'(x) + g'(x) = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos \pi x)$$

$$* \; g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2\pi} \sin \pi x + C_1 \; *$$

$$f(x) = x + 2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2\pi} \sin \pi x - C_1$$

$$* \; f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2\pi} \sin \pi x - C_1 + 2 \; *$$

$$\left(f(-t) + g(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(-x) + g(x) = 0 \right)$$

$$\begin{cases} f(-x) = \dfrac{-x}{2} + \dfrac{1}{2\pi} \sin \pi x - C_1 + 2 \\ g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2\pi} \sin \pi x + C_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(-x) + g(x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x + 2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\sin \pi x = -2\pi)$$ (غیر ممکن است)

(به طریق مشابه) : $f(\pi - x) + g(\pi + x)$

(جواب نا ممکن می دهد)

* پس در حل مسئله ا شتباهی رخ داده .

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = x + 2 \\ -f'(x) + g'(x) = \cos \pi x \end{cases} \qquad \begin{cases} f(-t) + g(t) = 0 \\ f(\pi - t) + g(\pi + t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = x + 2 \\ -f(x) + g(x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x + C_1 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2\pi} \sin \pi x + 1 + C_1/2$$

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 - \frac{1}{2\pi} \sin \pi x - C_1/2$$

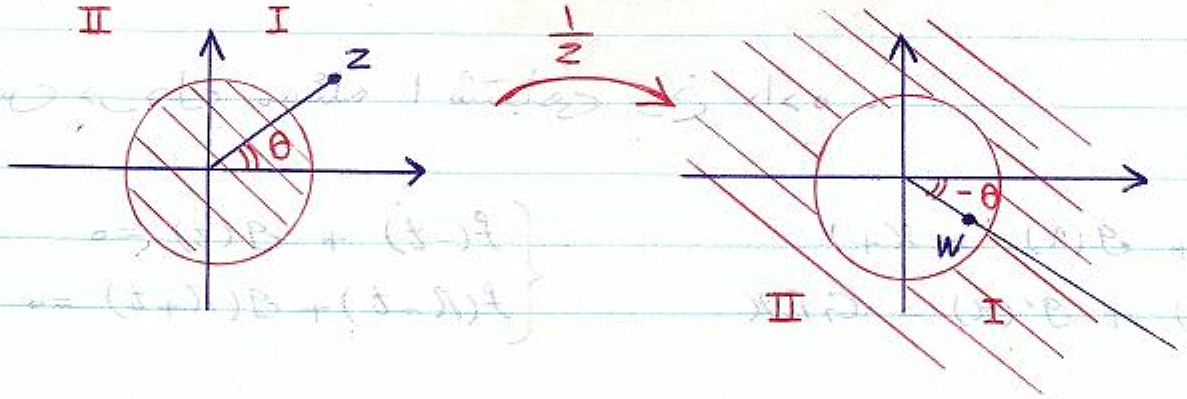
$$\Rightarrow \quad u(x,t) = g(x) + f(x)$$

$$u(x,t) = \frac{x-t}{2} - \frac{1}{2\pi} \sin(\pi(x-t)) + 1 - \cancel{\frac{C_1}{2}} + \frac{x+t}{2} + \frac{1}{2\pi} \sin(\pi(x+t)) + 1 + \cancel{\frac{C_1}{2}}$$

$f(z) = \frac{1}{z}$ نگاشت معکوس -

$z = re^{i\theta}$, $W = \rho e^{i\varphi}$

$W = \frac{1}{re^{i\theta}} = r^{-1} e^{-i\theta} \Rightarrow \left(\rho = \frac{1}{r} \ , \ \varphi = -\theta\right)$



* ربع I و II به ربع ۳ و ۴ می رود. نقاط داخل دایره به نقاط خارج دایره تبدیل می شوند و بر عکس.

(نقطه در بینهایت $\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} = \infty$ است)

* این نگاشت خط یا دایره را به خط یا دایره می برد.

* می خواهیم نقش $A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$ این دایره یا خط را تحت نگاشت $\frac{1}{z}$ بیابیم.

$$x^2+y^2 = z\bar{z}$$

$$Az\bar{z} + B\frac{z+\bar{z}}{2} + C\frac{z-\bar{z}}{2i} + D = 0$$

$$W = \frac{1}{z} \Rightarrow \quad z = \frac{1}{W} \quad , \quad \bar{z} = \frac{1}{\bar{W}}$$

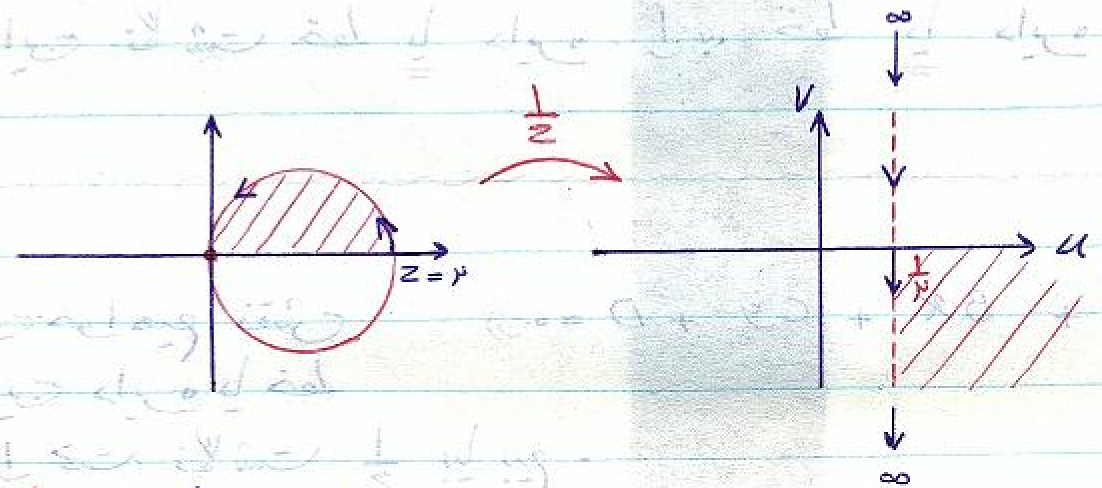
$$A\frac{1}{W\bar{W}} + B\frac{\frac{1}{W}+\frac{1}{\bar{W}}}{2} + C\frac{\frac{1}{W}-\frac{1}{\bar{W}}}{2i} + D = 0$$

$$A + B\frac{\bar{W}+W}{2} + C\frac{\bar{W}-W}{2i} + DW\bar{W} = 0$$

$$A + Bu - Cv + D(u^2+v^2) = 0$$ خط یا دایره

* اگر دایره از مبداء بگذرد $D=0$ است و لذا نقش آن یک خط است. اگر خطی از مبداء بگذرد $A=0$ و $D=0$ و لذا نقش آن خطی است که از مبداء می گذرد. نقش سایر خطوط تبدیل به دایره می شود.

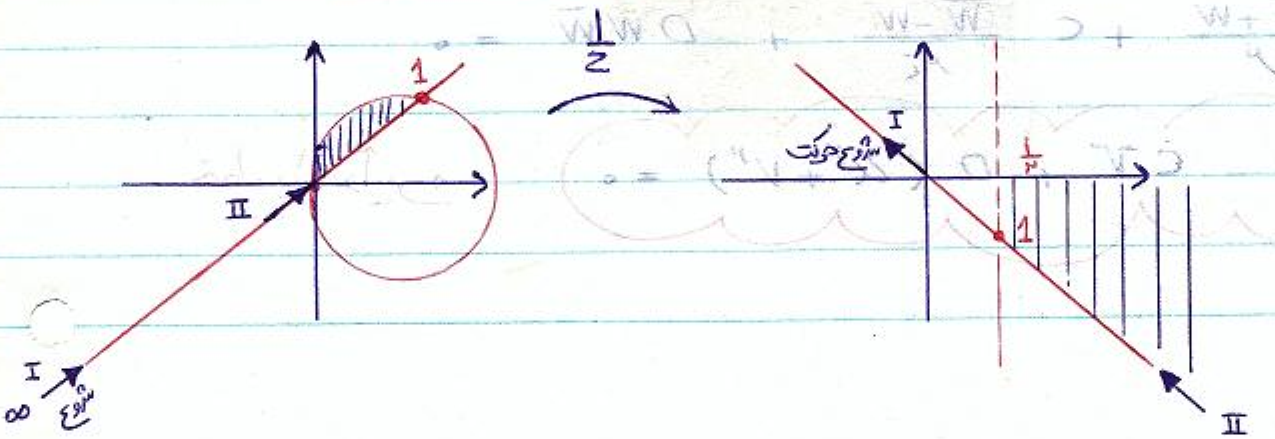
مثال-



$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ A=1 \quad , \quad B=-2 \quad , \quad C=0 \quad , \quad D=0 \\ 1-2u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2} \quad (\text{خط است}) \end{cases}$$

* در محور u و v نقطه در ∞ پایین و بالا یکی است *

مثال-



$* \; y = x$

$x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \;,\; B = 1 \;,\; C = -1 \;,\; D = 0$

$u + v = 0 \quad \Rightarrow \quad -u = v$

نگاشت خطی کسری -

$$W = \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad - bc \neq 0$$

* تحت این نگاشت همواره نقش خط یا دایره ~~دایره~~ خط یا دایره خواهد بود.

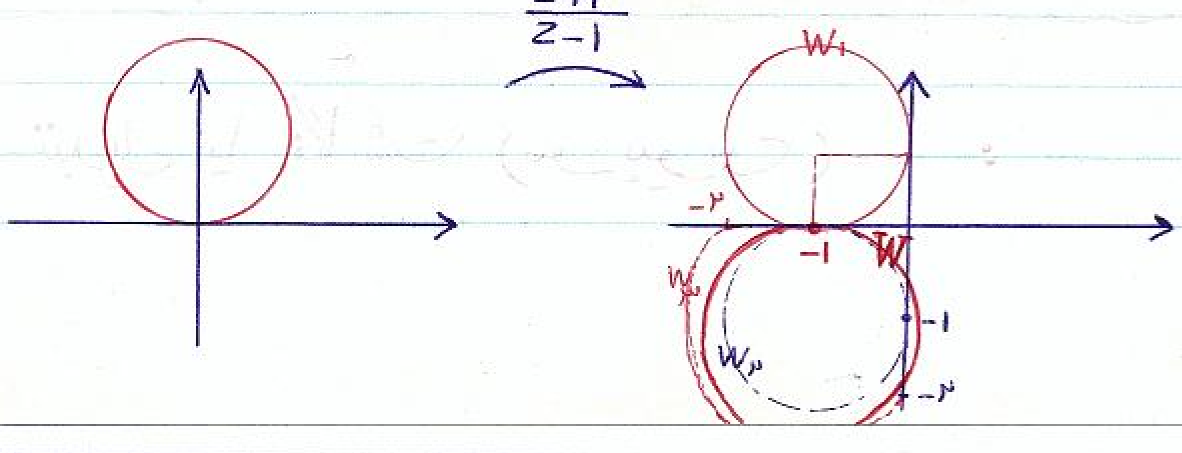
$$* \; W = \frac{\frac{a}{c}\left[cz+d-d\right] + b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) - \frac{ad}{c} + b}{cz+d}$$

$$W = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \times \frac{1}{cz+d}$$

(انتقال ، دوران ، تجانس ، معکوس)

مثال -

$$W = \frac{z+1}{z-1}$$



$(y-1)^2 + x^2 = 1$: (دایره)

* مقرون به صرفه نیست که x و y را به z بدل کنیم لذا از تکنیک فوق استفاده می کنیم :

* $W = \dfrac{z+1}{z-1} = \dfrac{z-1+2}{z-1} = 1 + \dfrac{2}{z-1} \Rightarrow$

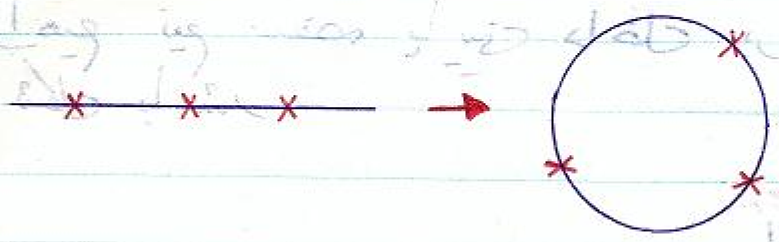
* $W_1 = z-1$ انتقال ۱ واحد در جهت (-)
* $W_2 = \dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{W_1}$ معکوس

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \\ A=1 , \quad B=2 \quad و \quad C=-2 \quad و \quad D=1 \\ \\ 1 + 2u + 2v + u^2 + v^2 = 0 \\ (u+1)^2 + (v+1)^2 = 1 \end{cases}$$

* $W_3 = 2W_2$ تجانسی که دو برابر می کند

* $W = 1 + W_3$ انتقالی به اندازه ۱ واحد در جهت (+)

تبدیل یا نگاشت (موبیوس) :



* این تبدیل می تواند یک ناحیه نامتناهی را بپیچاند و به یک ناحیه متناهی تبدیل کند و بر عکس.

$z_1 \longrightarrow w_1$

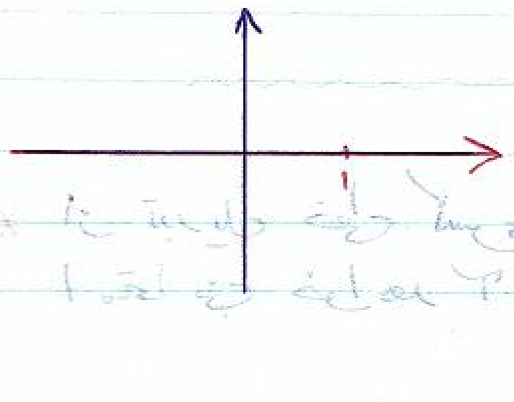
$z_2 \longrightarrow w_2$

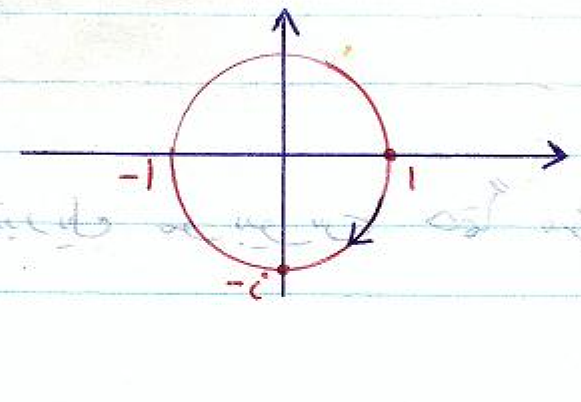
$z_3 \longrightarrow w_3$

$$\boxed{\frac{w-w_1}{w-w_3} \times \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \times \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}}$$

* حداکثر یکی از zها و یکی از wها می توانند نقطه در ∞ باشند. که در این صورت در نگاشت موبیوس جملاتی که شامل آن حرف هستند حذف می گردند.

مثال- می خواهیم نگاشتی بیابیم که محور x ها را به یک دایره واحد ببرد. (یا به عبارتی نیم صفحه پایینی یا بالائی را به داخل دایره ببرد).





* اگر بخواهیم نیم صفحه پایینی داخل برود جهت حرکت باید مانند شکل باشد.

z_1	z_2	z_3
∞	0	1
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	$-i$	-1
w_1	w_2	w_3

* از ∞ تا صفر را به ۱ تا $i-$ می برد.
* از ۰ تا ۱ را به $i-$ تا ۱- می برد.
* از ۱ تا ∞ را به ۱- تا ۱ می برد.

* $$\frac{w-1}{w+1} \times \frac{-i+1}{-i-1} = \frac{-1}{z-1}$$

$$\frac{w-1}{w+1} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{(1+i)^2}{2} \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{i}{z-1}$$

(صورت را در یک (-) ضرب کرده با مخرج جمع می کنیم.) $\Rightarrow$

$$\frac{w-1}{2} = \frac{i}{z-1-i} \Rightarrow w = 1 + \frac{2i}{z-1-i}$$

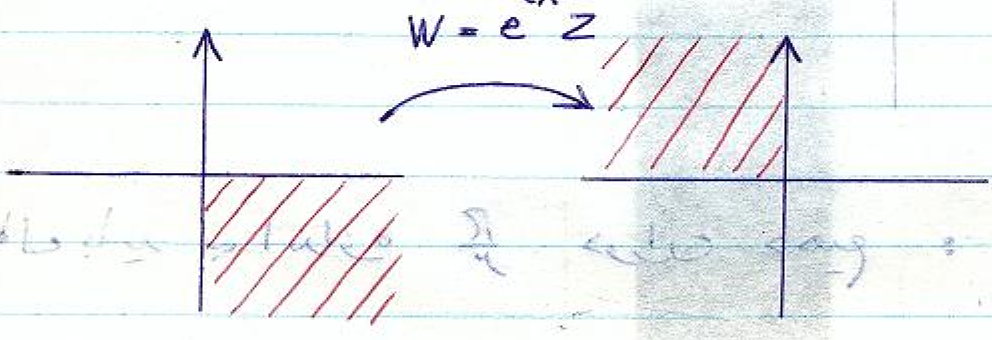
$$\Rightarrow \quad w = \frac{z-1+i}{z-1-i}$$

** از تبدیل خطی کسری یا تبدیل موبیوس حتماً سؤال امتحانی خواهد آمد.

نگاشت دوران و تجانس (دوران به اندازه θ_0 و تجانس به اندازهٔ r_0)

$$W = \underbrace{r_0 e^{i\theta_0}}_{z_0} Z$$

مثال -

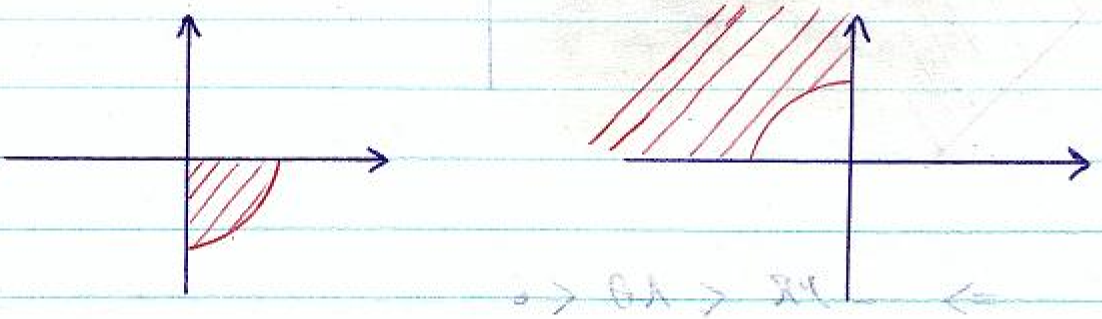


* r_0 را مساوی 1 گرفتیم چون نمی خواهیم وسیعتر یا کوچکتر کنیم.

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \Rightarrow$$

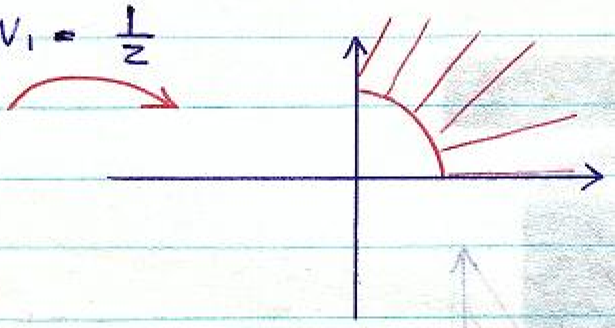
$$W = -Z$$

مثال -



* هر وقت می خواهیم از داخل به خارج برویم اول از نگاشت معکوس استفاده می کنیم:

$w_1 = \frac{1}{z}$

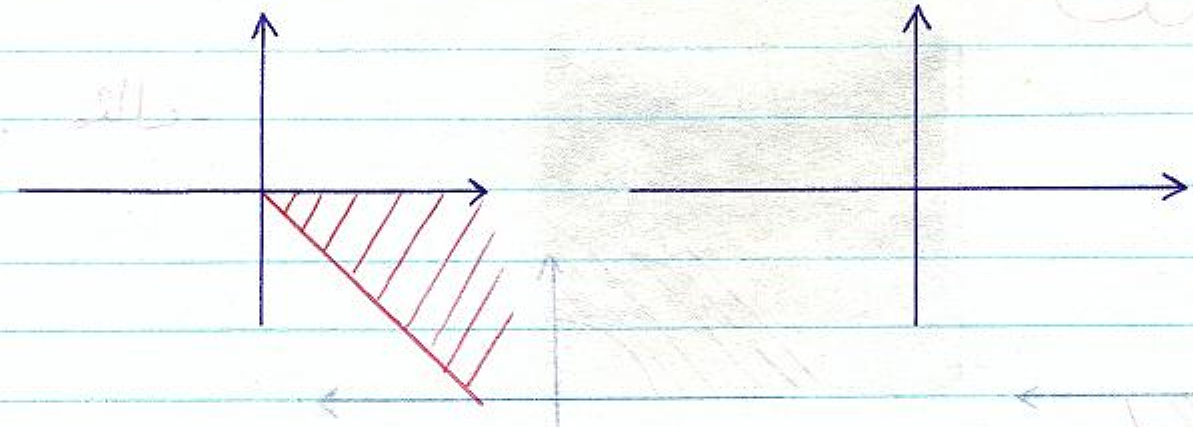


* حال باید به اندازه $\frac{\pi}{2}$ دوران دهیم:

* $w = e^{i\frac{\pi}{2}} w_1$

$$w = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{z} \Rightarrow w = \frac{i}{z}$$

مثال- ناحیه زیر را به کل صفحه ببرید.



$-\frac{\pi}{4} < \theta < 0 \Rightarrow -2\pi < 8\theta < 0$

* یعنی نگاشتی می خواهیم که زاویه را ۸ برابر کند؛ یعنی یک جوری 8θ ظاهر شود. $(re^{i\theta})$

«$z^8 = (re^{i\theta})^8 = r^8 e^{i8\theta}$»

نگاشت e^z : $f(z) = e^z$

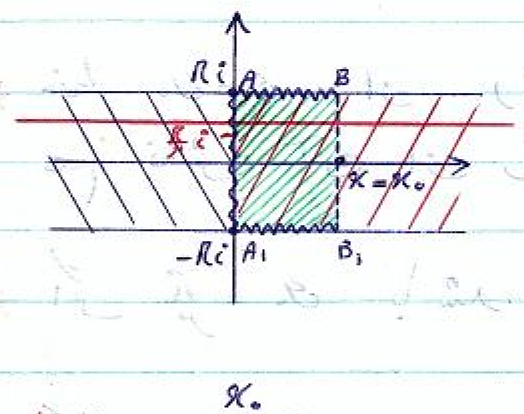
$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

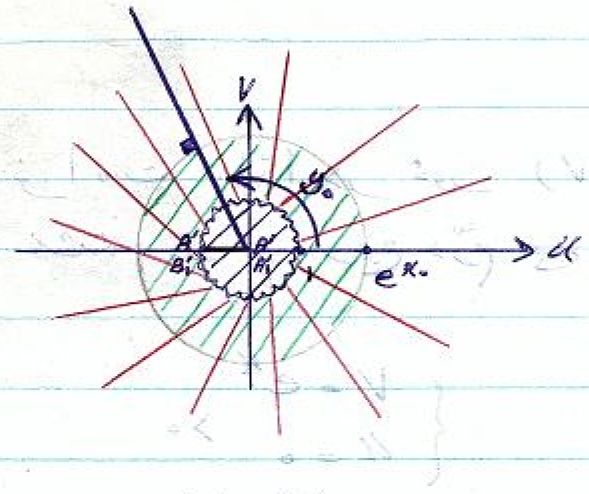
$$\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$$

* این تابع تناوبی متناوب است و $T = 2\pi i$:

$$f(z+2\pi i) = e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$$

$$= e^z = f(z)$$





$$\begin{cases} u = e^{x_0} \cos y \\ v = e^{x_0} \sin y \end{cases}$$

$(-\pi < y \leqslant \pi)$

* معادله پارامتری نقش خط $x = x_0$

* معادلهٔ دکارتی نقش «$(e^{x_0})^2 = u^2 + v^2$» <= خط $x = x_0$ که یک دایره است.

* نیم نوار دست راست همواره خارج دایره به شعاع (۱) و نیم نوار دست چپ همواره داخل دایره به شعاع (۱) است ولذا این نوار کل صفحهٔ مختلط «u و v» را شامل می‌شود. چون دوره تناوب $2\pi i$ است نیم نوارهای بالائی و پائینی همین وضع را پیدا می‌کنند یعنی نوارهای فوقانی و تحتانی هم کل صفحه را می پوشانند.

** حال می خواهیم نقش $y = y_0$ را بیابیم :

$$\begin{cases} u = e^{x} \cos y_0 \\ v = e^{x} \sin y_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{v}{u} = \tan y_0 \Rightarrow (v = \tan y_0 \, u)$$ خط راستی که از مبداء می گذرد.

* خط $y = y_0$ از $(i\frac{\pi}{2})$ بالاتر است لذا در محور (v, u) هم نقش آن از ربع اول گذشته و در ربع دوم می افتد.

* اگر $\frac{\pi}{2} = y_0$ باشد

$$\begin{cases} v = e^{x} > 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

* که نقش آن قسمت (+) محور v است. اگر $y_0 = -\frac{\pi}{2}$

باشد نقش آن قسمت پایین محور V ها خواهد بود.

* هر وقت تمام این اعمال را برعکس کنیم $\ln z$ می شود لیکن $\ln z$ تمام نوار دایره را به کل صفحه $x-iy$ نمی برد بلکه تنها نوار دایره‌ای را به داخل نوار بین πi و $-\pi i$ می برد.

* حال شرایط مشتق پذیری را بررسی می کنیم:

* u و V هر دو پیوسته هستند و:

$$\begin{cases} u_x = e^x \cos y = V_y \\ u_y = -e^x \sin y = -V_x \end{cases}$$

* پس e^z یک تابع تام است و در همه نقاط مشتق پذیر است.

* $f'(z) = u_x + iV_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$

نکته- اگر $f(z) = u(x,y) + iV(x,y)$ باشد ($z = x+iy$) معادلات کشی ریمان بصورت ذیل است:

$$\begin{cases} u_x = V_y \\ u_y = -V_x \end{cases}$$

« $f(z) = u(r,\theta) + iV(r,\theta)$ » ($z = re^{i\theta}$)

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_\theta \\ -\frac{1}{r} u_\theta = v_r \end{cases}$$

معادلات کشی - ریمان
قطبی

قضیه معکوس - اگر $u(r,\theta)$ و $v(r,\theta)$ و u_r و v_r و u_θ و v_θ پیوسته باشند و در معادلات کشی ریمان هم صدق کنند در این صورت تابع $f(z) = u + iv$ مشتق پذیر است و مشتق آن برابر است با :

$$« \quad f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + i v_r) \quad »$$

* $\ln z$: تابع نیست یعنی تمام صفحه را به نوار نمی‌آورد.

* $\operatorname{Ln} z$: تابع است.

نگاشت $\operatorname{Ln} z$: (تعریف $\ln z$) :

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} r + i\theta \qquad (-\pi < \theta \leqslant \pi)$$

تا حتماً داخل نوار قرار گیرد.

« Arg - آرگومان اصلی »

$$\begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta \end{cases}$$

مثال - $\ln i = \ln |i| + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$

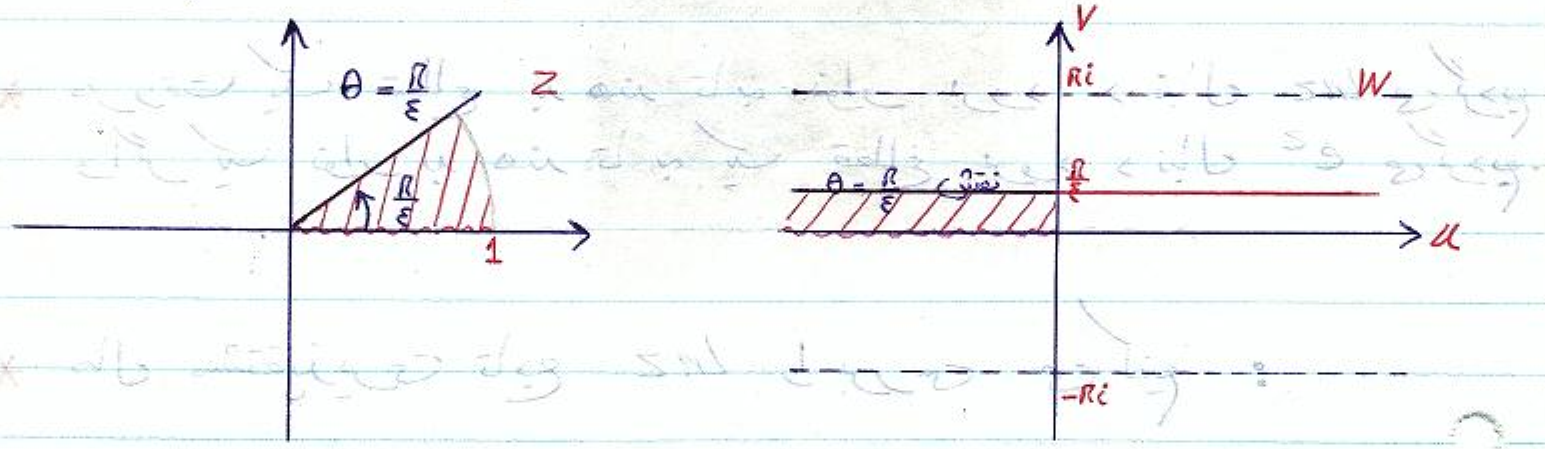
مثال - مقدار $(i)^i$ مطلوبست :

$$\left(\left(a^x = e^{x \ln a} \right)\right) \Rightarrow$$

$$(i)^i = e^{i \ln i} = e^{i\left[i\frac{\pi}{2}\right]} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

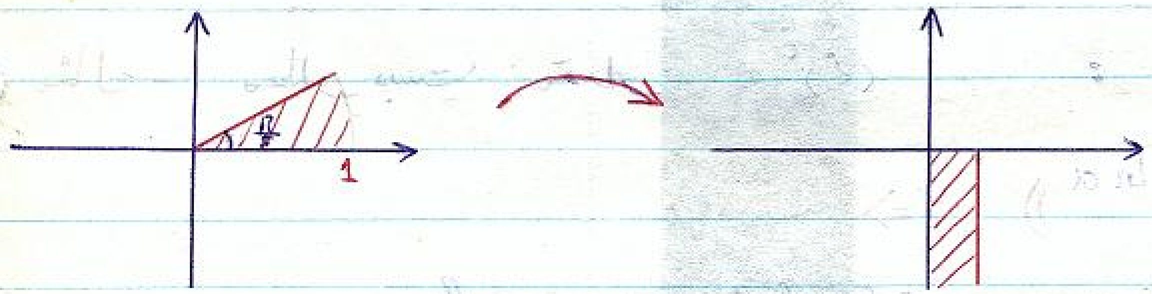
$$\boxed{z^c = e^{c \ln z}} \qquad \boxed{a^x = e^{x \ln a}}$$

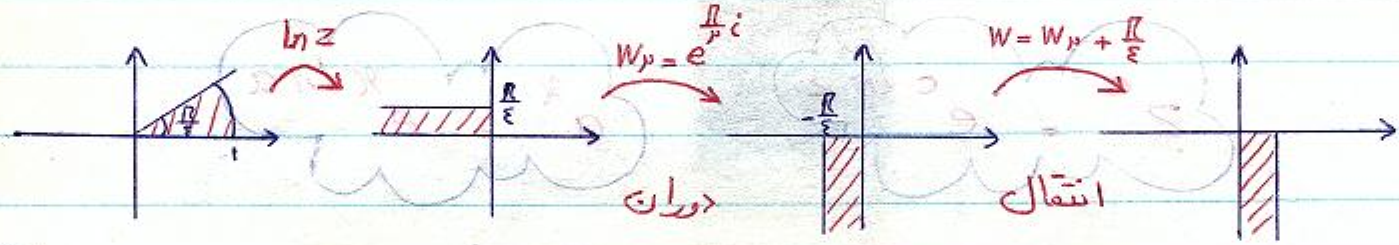
* حال نگاشت $f(z) = \ln z$ را بررسی می کنیم :



* معادله پارامتری $\begin{cases} u = \ln r \\ v = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ نقش $\theta = \frac{\pi}{4}$ که خطی راست است.

مثال- نگاشتی برای شکل زیر بیابید.

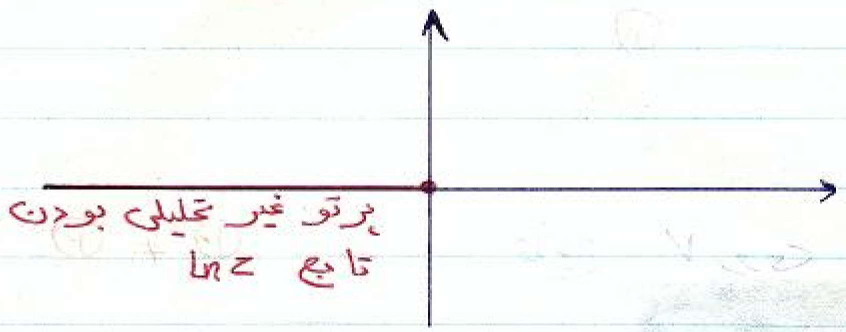




$$W = e^{\frac{\pi}{2}i} \ln z + \frac{\pi}{4} = i \ln z + \frac{\pi}{4}$$

* هر وقت یک قطاع بدهند تا به نوار برود دنبال $\ln z$ می‌گردیم و اگر یک نوار بدهند تا به یک قطاع برود دنبال e^z می‌گردیم.

* حال مشتق‌پذیری تابع $\ln z$ را بررسی می‌کنیم:



* می خواهیم ثابت کنیم $\ln z$ در همه نقاط به غیر از پرتو غیر تحلیلی بودن $\ln z$ مشتق‌پذیر است.

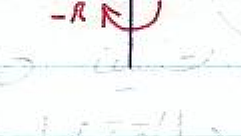
$$\left(\ln z = \ln r + i\theta \qquad -\pi < \theta \leqslant \pi\right)$$

** عکس قضیه -

$$\left\{\begin{array}{l} \underbrace{u, v}_{\text{پیوسته}} \qquad \underbrace{u_r, u_\theta, v_r, v_\theta}_{\text{پیوسته}} \\ u_r = \frac{1}{r} v_\theta \\ -\frac{1}{r} u_\theta = v_r \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + i v_r)$$

$(-\pi < \theta \leqslant \pi)$ یعنی تابع v_θ از یک سو به π و از یک سو به $-\pi$ میل می کند لذا پیوسته نیست.



$$\lim_{\theta \to \pi^+} v = \lim_{\theta \to \pi^+} \theta = \lim_{\theta \to -\pi^+} \theta = -\pi \qquad (1)$$

$$\lim_{\theta \to \pi^-} V = \lim_{\theta \to \pi^-} \theta = \pi \quad ②$$

تابع V روی خط حقیقی منفی پیوسته نیست $\Leftarrow$ ① $\neq$ ②

* تابع $u = \ln r$ هم در مبداء پیوسته نیست چون $\ln r$ به ازای صفر تعریف نشده.

$$\begin{pmatrix} u_r = \frac{1}{r} & u_\theta = 0 \\ V_r = 0 & V_\theta = 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \times 1 = \frac{1}{r} V_\theta \\ -\frac{1}{r} u_\theta = -\frac{1}{r} \times 0 = 0 = V_r \end{cases}$$

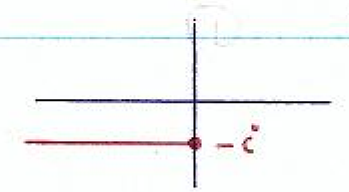
«کشی ریمان»

$\Leftarrow$ «تابع $\ln z$ به جز روی خط منفی حقیقی و مبداء در بقیه نقاط مشتق‌پذیر است - یعنی تحلیلی است.»

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}$$

مثال- نقاط غیر تحلیلی $\ln(z+i)$ چیست؟

این تابع جائی تحلیلی نیست که $z+i$ روی خط حقیقی منفی قرار گیرد و این یک انتقال به اندازه i دارد لذا:



$$* \{ z \mid z = x + i \,,\ x \leq 0 \} *$$

* $$x+i = x+iy+i = x+i(y+1) \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x\leqslant 0 \end{cases}$$

نگاشت $(W = \sin Z)$:

$$\begin{cases} W = \sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \\ W = \cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \end{cases}$$

* $\sin z$ و $\cos z$ توابع تام هستند.

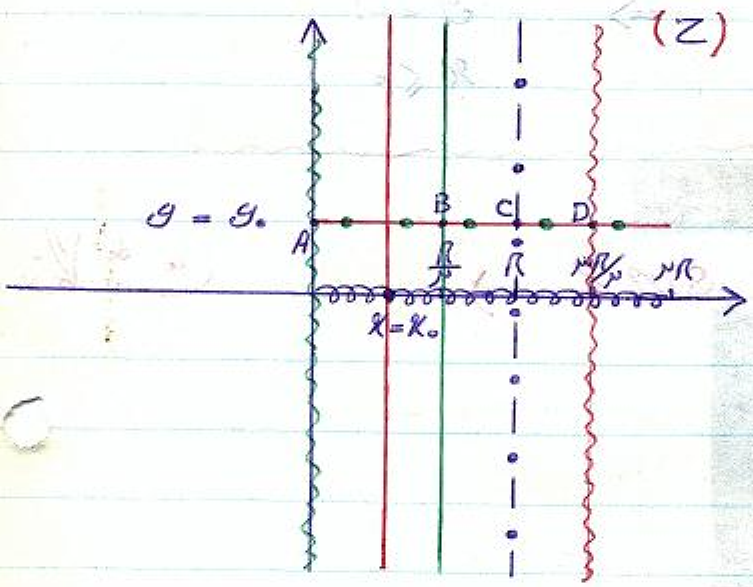
$$\sin iy = \frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = i\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$$

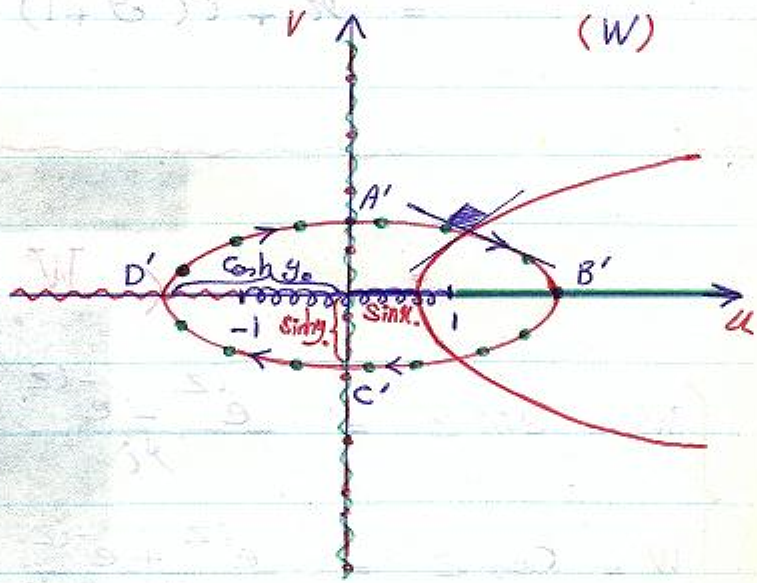
$$= i\sinh y \Rightarrow \begin{cases} \sin iy = i\sinh y \\ \cos iy = \cosh y \end{cases}$$

$$W = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cos iy + \cos x\sin iy$$
$$= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$$

$$\begin{cases} u = \sin x\cosh y \\ v = \cos x\sinh y \end{cases}$$

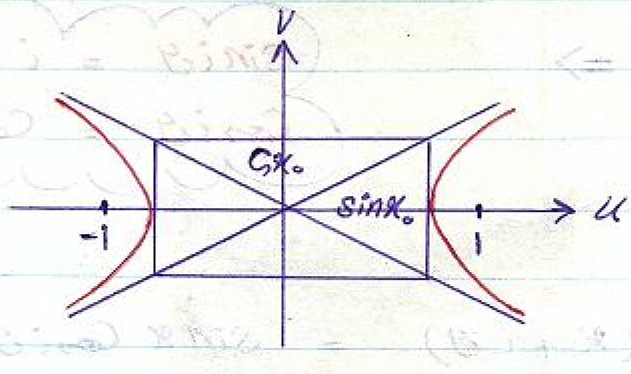
این توابع متناوب هستند و $(T = 2\pi)$ است.





$$x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} u = \sin x_0 \cosh y \\ v = \cos x_0 \sinh y \end{cases}$$

$$\Rightarrow * \quad \frac{u^2}{\sin^2 x_0} - \frac{v^2}{\cos^2 x_0} = \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$$ هذلولی



* در فاصله ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ همواره $u > 0$ است $(u = \sin x_0 \cosh y)$ لذا باید تنها شاخهٔ سمت راست را در نظر بگیریم. و اگر $\pi < x_0 < 2\pi$ باشد شاخه سمت چپ را در نظر می‌گیریم.

* اگر $x_0 = \frac{\pi}{2}$ باشد $u = \cosh y \geq 1$ و $v = 0$.

* اگر $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ باشد $u = -\cosh y \leq -1$ و $v = 0$.

اگر $x_0 = 0$ باشد $u = 0$ و $v = \sinh y$.

* اگر $x_0 = \pi$ باشد $u = 0$ و $v = -\sinh y$.
فرق آن با $x_0 = 0$ این است که جهت حرکت به علت منفی عوض می شود یعنی اگر روی y از پایین به بالا برویم روی محور v بر عکس باید حرکت کنیم.

$y = y_0$

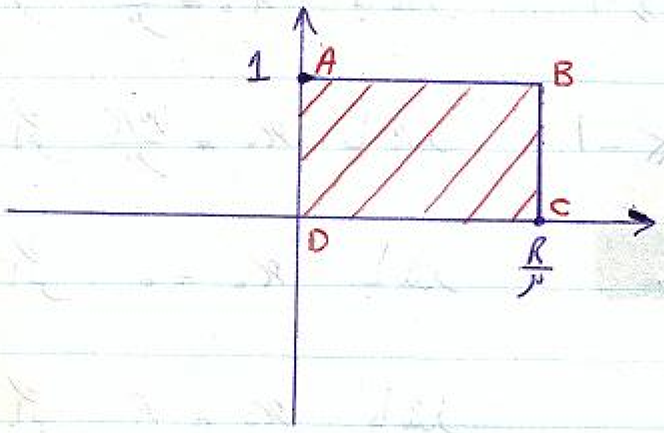
$$u = \sin x \cosh y_0 \qquad 0 < x < 2\pi$$
$$v = \cos x \sinh y_0$$

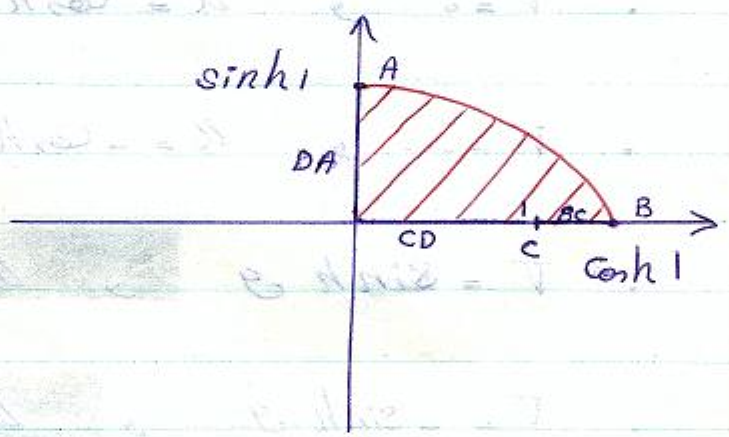
$$\frac{u^2}{\cosh^2 y_0} + \frac{v^2}{\sinh^2 y_0} = 1 \qquad (\text{بیضی})$$

* همواره $\cosh y_0 > \sinh y_0$ است و $\cosh y_0$ از یک کمتر نمی شود.

---

* نقش ناحیه $ABCD$ تحت نگاشت $w = \sin z$ چیست؟





$$\begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \cosh 1 \sin x \\ v = \sinh 1 \cos x \end{cases} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

(بیضی)

$$\begin{cases} u = \cosh y \\ v = 0 \end{cases} \Leftarrow \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$\begin{cases} u = \sin x \\ v = 0 \end{cases} \Leftarrow \quad y = 0$$

* اگر تحت نگاشت $\cos z$ بخواهند می توان گفت $\cos z = \sin(z + \frac{\pi}{2})$ و یا خود $\cos z$ را اعمال کنیم.

انتگرالهای مختلط

* به طور کلی روی منحنی است .

$$\int_c \underbrace{f(z)}_{u+iv} \underbrace{dz}_{dx+idy} = \int_c u\,dx - v\,dy + i\,(u\,dy + v\,dx)$$

$$\boxed{\int_c f(z)\,dz = \int_c u\,dx - v\,dy + i\int_c u\,dy + v\,dx}$$

مثال- مطلوبست $\int_c \bar{z}\,dz$ که در آن c نقاط واقع بر خط $y = x$ است از مبداء تا $(1,1)$.

* $\begin{cases} u = x \\ v = -y \end{cases}$ $\quad \int_c \bar{z}\,dz = \int_c x\,dx + y\,dy + i\int x\,dy - y\,dx$

$$= \int_0^1 2x\,dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$$

باید معادله c را پارامتری کنیم و حدود را بیابیم .

(مبحث انتگرالهای منحنی الخط از ریاضی عمومی ۲)

* اگر بتوان c را بصورت z بیان کرد دیگر نیازی نیست که از راه پارامتری کردن معادله برویم :

$$\begin{cases} z = x + ix & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \bar{z} = x - ix \end{cases} \Rightarrow \int_c \bar{z}\, dz = \int (x - ix)(dx + i\,dx)$$

$dz = dx + i\,dx$

$$= \int_0^1 x(1-i)(1+i)\, dx = (1-i)(1+i)\int_0^1 x\, dx$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = 1$$

* چون تغییرات روی dx آمد حدود از ۰ تا 1 است .

$$\oint_c M dx + N dy = \iint_R (N_x - M_y)\, dx\, dy$$

** c منحنی بسته با جهت (+) است .

(قضیه گرین)

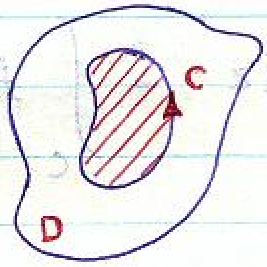
اگر : اگر c منحنی بسته با جهت (+) باشد و $f(z)$ تحلیلی در داخل منحنی c و روی آن باشد :

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

$$= \iint_R (-V_x - U_y)\,dx\,dy + i \iint_R (U_x - V_y)\,dx\,dy = 0$$

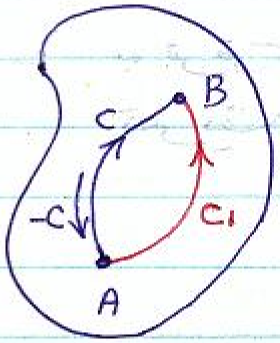
قضیه (کوشی - گورسا) - اگر $f(z)$ بر ناحیه D تحلیلی باشد و C یک منحنی بسته با جهت $(+)$ در درون ناحیه باشد :

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$



* تابع $f(z)$ باید حتماً و حتماً روی مرزهم تحلیلی باشد.

نتیجه (۱) - $f(z)$ بر ناحیه D تحلیلی است و A و B دو نقطه از ناحیه D هستند و C یک منحنی دلخواه در ناحیه D است که A را به B می پیوندد.



** منحنی C_1 را خود به دلخواه رسم می کنیم.

(قضیه کوشی-گورسا) $\Rightarrow \int_{C_1 - C} f(z)\, dz = 0$

$$\int_{C_1} f(z)\, dz - \int_{+C} f(z)\, dz = 0$$

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C} f(z)\, dz$$

یعنی؛ انتگرال مستقل از مسیر است یا به عبارتی سیستم ما - Conservative است.

به عبارتی؛ اگر $f(z)$ تحلیلی باشد می توان انتگرال روی یک منحنی پیچیده را به انتگرال روی خط AB تبدیل می کنیم و در $z = x + iy$ در همه جا بجای y، $ax + b$ قرار می دهیم.

نتیجه (۲) - به فرض $f(z)$ تحلیلی باشد و $F(z)$ بصورت زیر تعریف شود:

$$F(z) = \int_{A}^{z} f(t)\, dt$$

در این صورت $F(z)$ تابعی تحلیلی است و $(F'(z) = f(z))$
یعنی $F(z)$ تابع اوّلیهٔ $f(z)$ است :

$$\left\langle\!\left\langle \int_A^B f(z)\,dz = F(z)\Big|_A^B = F(B) - F(A) \right\rangle\!\right\rangle$$

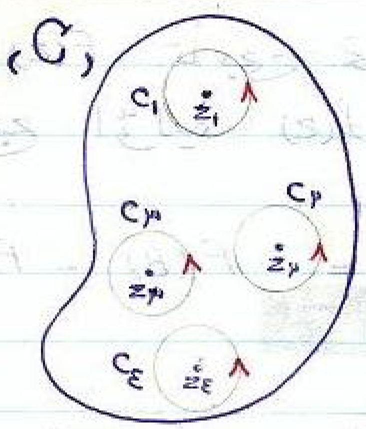
* باید $f(z)$ حتماً تحلیلی باشد مثلاً تابع $\bar{z}$ را نمی توان به این شکل درآورد.

مثال - مطلوبست محاسبه $\int_C z^2\,dz$ که در آن C یک دایره است که نقطهٔ $(1,1)$ را به $(2,3)$ وصل می کند.

* تابع z^2 تام است و در همه نقاط تحلیلی است :

$$\int_C z^2\,dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_{(1,1) = 1+i}^{(2,3) = 2+3i} = \frac{1}{3}\left[(2+3i)^3 - (1+i)^3\right]$$

نتیجهٔ ۳ - مطلوبست محاسبهٔ : $\int_C f(z)\,dz$



$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_4} f(z)\,dz$$

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \qquad C - C_1 - C_2 - C_3 - C_4 = 0$$

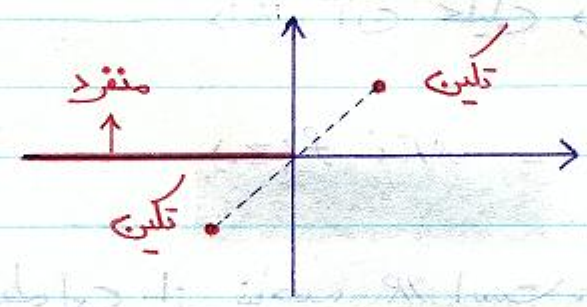
$$\int_C f(z)\,dz - \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz - \int_{C_3} f(z)\,dz - \int_{C_4} f(z)\,dz = 0$$

* نقاطی که تابع $f(z)$ در آن نقاط تحلیلی نیست را نقاط (منفرد) یا غیر تحلیلی تابع گویند.

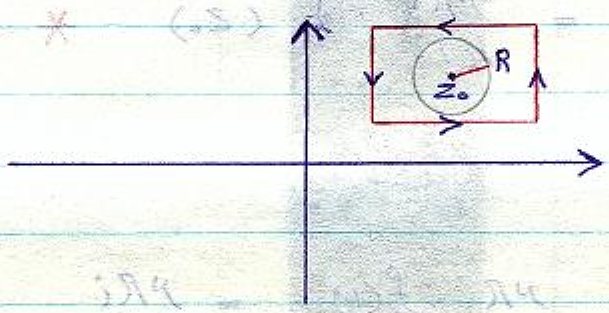
* یک نقطه منفرد را (تکین) یا (منفرد تنها) گوییم، درصورتیکه تابع $f(z)$ در این نقطه تحلیلی نباشد ولی در یک همسایگی از این نقطه به جز مرکز تحلیلی باشد.

مثال - نقاط غیر تحلیلی تابع $\frac{\ln z}{z^2 - i}$ چیست؟

$z^{2} = i \Rightarrow z = i^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\pi}{4}i}$ و $e^{\frac{5\pi}{4}i}$



مثال- $\int \frac{1}{z-z_0}\,dz$ را محاسبه کنید. (z_0 مرکز مستطیل)



$$\int_{C_1}\frac{1}{z-z_0}\,dz = \int_{C_1}\frac{(1)\, i r e^{i\theta}}{r e^{i\theta}}\,d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

$(z-z_0 = re^{i\theta} \qquad dz = ire^{i\theta}\,d\theta \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$

* بنابراین: $\int \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 2\pi i & n = 1 \end{cases}$

* c منحنی دلخواه بسته‌ای است که z_0 در داخل آن قرار دارد.

قضیه انتگرال کوشی - فرض کنید $f(z)$ بر منحنی C و R ناحیه داخل آن تحلیلی باشد . در این صورت :

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

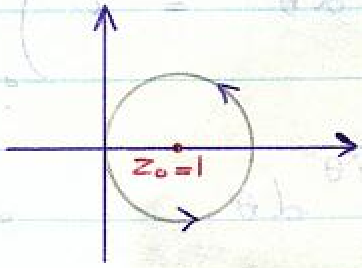
«که در آن z_0 نقطه‌ای از ناحیه R است.»

تعمیم فرمول انتگرال کوشی -

$$* \quad \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!}\, f^{(n)}(z_0) \quad *$$

مثال -

$$\int_{|z-1|=1} \frac{1}{z-1}\,dz = 2\pi i\, \overset{1}{\cancel{f(1)}} = 2\pi i$$



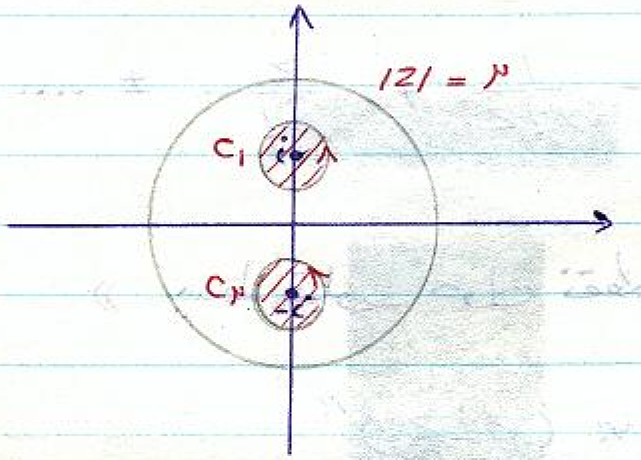
مثال - $(n\neq 1)$

$$\int_{|z-z_0|=2} \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\, \overset{0}{\cancel{f^{(n-1)}(z_0)}} = 0$$

$*$ $f(z) = 1$ و $f'(z) = 0$ و ....

مثال -

$$* \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz$$



$$= \int_{C_1} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz + \int_{C_2} \frac{\sin z}{z^2+1}\, dz =$$

$$\int_{C_1} \frac{\frac{\sin z}{z+i}}{z-i}\, dz + \int_{C_2} \frac{\frac{\sin z}{z-i}}{z+i}\, dz$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\sin i}{i+i} + \frac{\sin(-i)}{-i-i} \right) = 4\pi \sin i =$$

$$4\pi \sinh 1$$

بسط تیلور -

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \pm \dots$$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \pm \dots$$

بسط لوران - همان بسط تیلور است امّا توانهای منفی - دارد .

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} \pm \ldots$$

فرمول کلی - « بسط تیلور حول نقطهٔ z_0 »

$$\begin{cases} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\ a_n = \dfrac{f^{n}(z_0)}{n!} \end{cases}$$

فرمول کلی - « بسط لوران »

$$\begin{cases} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\ a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|z-z_0|=r} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \end{cases}$$

در $\frac{\sin z}{z^4}$ ، $z=0$ نقطهٔ منفردی است که در بسط - لوران آن توان منفی حداکثر ۳ را دارد که به آن قطب مرتبه ۳ گویند.

در ، $\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \ldots$

$z=0$ نقطه منفرد یا ذاتاً منفرد است چون توانهای منفی z تا ∞ ادامه دارد.

نکته - $z=z_0$ را قطب مرتبه n گوییم در صورتیکه در بسط لوران آن تابع حداکثر توان منفی n باشد. اگر $n=1$ باشد یعنی قطب مرتبه ۱، که آنرا قطب ساده گویند.

مثلاً - $\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} z^2 + \dots$

($z=0$ قطب ساده)

در بسط لوران ضریبی که توانش ۱- باشد یعنی a_{-1} را مانده تابع $f(z)$ در نقطه $z=z_0$ گویند. یعنی در انتگرال همیشه این مقدار برای انتگرالگیری باقی می ماند.

$$(z-z_0)^{-1} = a_{-1} = \underset{z=z_0}{Res}\, f(z)$$

مثال -

$$\int_{|z|=1} \sin z\, dz = \int_c z\, dz - \int_c \frac{z^3}{3!}\, dz + \int_c \frac{z^5}{5!}\, dz \pm \dots$$

$$= 0 \Rightarrow \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} = \int_c 1\, dz - \int_c \frac{z^2}{3!}\, dz$$

$$+\int \frac{z^4}{5!} \pm \cdots = 0$$

$$\int \frac{\sin z}{z^4}\,dz = \int \frac{1}{z^3}\,dz - \int \frac{1}{3!\,z}\,dz + \int \frac{z}{5!} \pm \cdots$$

$$= 2\pi i \underbrace{\left(-\frac{1}{3!}\right)}_{a_{-1}} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$$

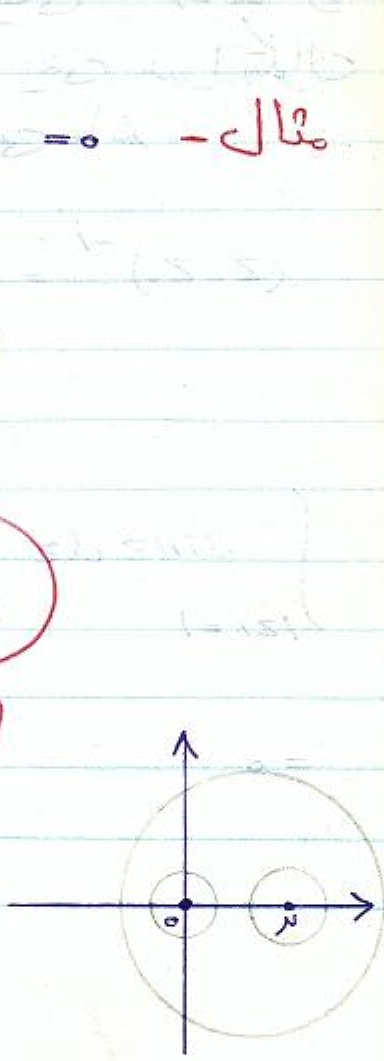
مثال-
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i\, \overset{1}{\cancel{a_{-1}}} = 2\pi i$$

مثال-
$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z(z-1)} = \int_{C_1} \frac{dz}{z(z-1)} + \int_{C_2} \frac{dz}{z(z-1)} = 0$$

$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z(z-1)} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1} f(z)$$

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_i} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)$$

نقاط تکین تابع $f(z)$
در داخل C



روش محاسبهٔ : $\left(a_{-1} = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) \right)$

a_{-1} ضریب $(z-z_0)^{-1}$ در بسط لوران $f(z)$ حول نقطهٔ $z=z_0$ است.

حالت اول - $z=z_0$ قطب ساده باشد :

$$f(z) = a_{-1}\frac{1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

$$(z-z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \cdots$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

حالت خاص - $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ و $z=z_0$ قطب ساده است

$$a_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)P(z)}{Q(z)} \xrightarrow{\text{هوپیتال}}$$

$$= \lim_{z\to z_0}\frac{P(z)+(z-z_0)P'(z)}{Q'(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

* خلاصهٔ کار -

z_0 قطب ساده $f(z)$ باشد : $a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$

$f(z) = \frac{P(z)}{q(z)}$ حالت خاص : $a_{-1} = \frac{P(z_0)}{q'(z_0)}$

حالت دوم - $z = z_0$ قطب مرتبه m ، $f(z)$ باشد .

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1}$$

$$+ a_0 (z-z_0)^m + \dots \Rightarrow$$

$$\boxed{a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]}{dz^{m-1}}}$$

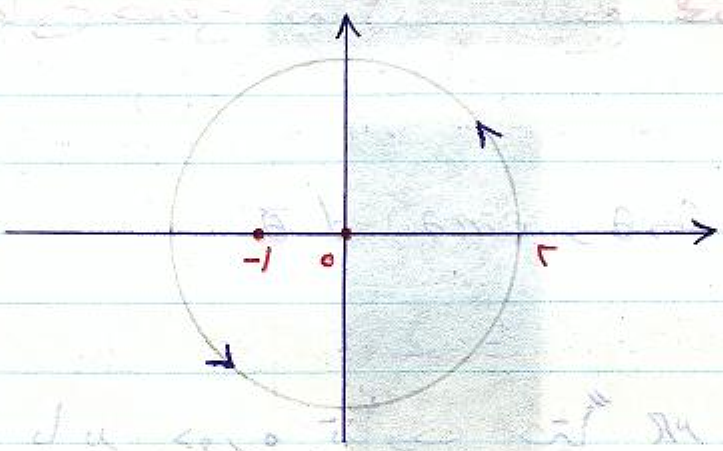
* این فرمول کلی است چون اگر $m = 1$ باشد شامل - حالت قبل هم می شود .

$$\int_{|z|=2} \frac{\cosh z}{z(z^2+1)^3} \, dz$$ صفحه ۲۳۱ - ۲ - K -

* $z=0$ قطب مرتبه‌ی 1

* $z+1=0 \Leftarrow z=-1$ قطب مرتبه‌ی 2

* $\cosh z$ در همه نقاط تابع تام است.



$$\oint_{|z|=2} \frac{\cosh z}{z(z+1)^2}\,dz = 2\pi i \Big[\underbrace{\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)}_{\text{قطب ساده}} + \underbrace{\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)}_{\text{قطب مرتبه دوم}} \Big]$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \left.\frac{\cosh z}{(z+1)^2 + 2z(z+1)}\right|_{z=0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z\to -1} \frac{d\left[(z+1)^2 \cdot \frac{\cosh z}{z(z+1)^2}\right]}{dz}$$

$$= \lim_{z\to -1} \frac{z\sinh z - \cosh z}{z^2} = \frac{-\sinh(-1) - \cosh(-1)}{1}$$

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z(z+1)^2} = 2\pi i\,(1 + \sinh 1 - \operatorname{ch} 1)$$

محاسبه انتگرالهای حقیقی به کمک توابع مختلط :

* $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\cos\theta \,,\, \sin\theta)\, d\theta$

* در این موارد باید دوره تناوب حتماً 2π باشد و اگر نبود خودمان آن را 2π می کنیم.

* $z = e^{i\theta} \qquad 0 < \theta < 2\pi$

$$\cos\alpha\theta = \frac{e^{i\alpha\theta} + e^{-i\alpha\theta}}{2} = \frac{z^{\alpha} + \frac{1}{z^{\alpha}}}{2}$$

$$\sin\alpha\theta = \frac{z^{\alpha} - \frac{1}{z^{\alpha}}}{2i}$$

* $dz = i e^{i\theta}\, d\theta \Rightarrow \quad d\theta = \dfrac{dz}{iz}$

حدود انتگرال باید حتماً 2π باشد.

تمرین ۴۲ (ی) - ص ۱۳۳ - ط -

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\frac{1}{3}\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\frac{1}{3}\cos\theta} \qquad \begin{cases} d\theta = \dfrac{dz}{iz} \\ \cos\theta = \dfrac{z+\frac{1}{z}}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{1+\frac{1}{3}\,\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \qquad z = e^{i\theta} \Rightarrow |z|=1$$

$$= \frac{6}{2}\int_{|z|=1} \frac{dz}{6iz + iz^2 + i} = \frac{3}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+6z+1}$$

* صورت تابع ۱ است و همواره تمام است پس قطبها ریشه‌های مخرج هستند و آن قطبهایی را در نظر می‌گیریم که داخل دایره واحد باشند.

$$z^2+6z+1=0 \Rightarrow z = -3 \pm \sqrt{8}$$

منفی قابل قبول نیست چون خارج دایره واحد است.

$$= 2\pi i \times \frac{3}{i} \underbrace{\operatorname{Res}_{z=-3+\sqrt{8}} f(z)}_{\text{قطب ساده}} = \frac{6\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\underset{z=-3+\sqrt{8}}{\mathrm{Res}}\; f(z) = \left.\frac{1}{2z-6}\right|_{-3+\sqrt{8}}$$

زیرا - جواب هرگز i نباید داشته باشد

دسته دوم -

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx$$

یا بطور کلی :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\alpha x}\,dx} = a + ib$$

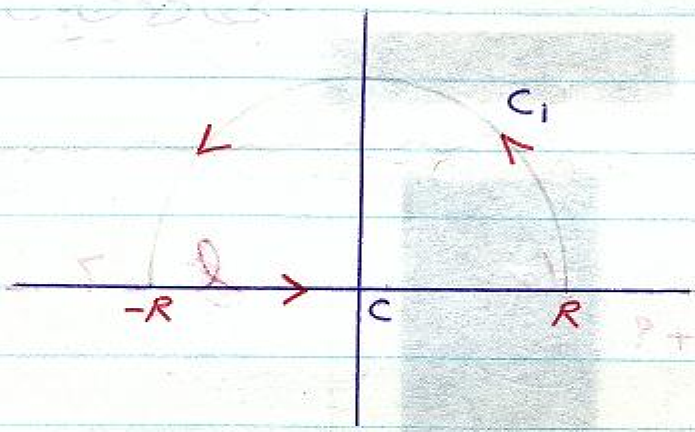
$$\begin{cases} a = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x \\ b = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x \end{cases}$$

جواب می‌تواند i داشته باشد.

* اگر درجهٔ مخرج $f(x)$ حداقل دو درجه بیشتر از درجه صورت آن باشد این انتگرالها را حل می‌کنیم که همواره برابر است با :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\alpha x}\,dx = 2\pi i \sum_{z_i} \underset{z=z_i}{\mathrm{Res}}\, f(z)\,e^{i\alpha z}}$$

* در $\sum_{z_i}$ ، z_i قطبهای تابع $f(z)\,e^{i\alpha z}$ واقع در نیم صفحه بالائی است .



$$\int_{C_1+C} f(z)\,e^{i\alpha z}\,dz = \int_{C_1} f(z)\,e^{i\alpha z}\,dz + \int_{C} f(z)\,e^{i\alpha z}\,dz$$

$$C_1 : \quad z = Re^{i\theta} \qquad 0 < \theta < \pi$$

$$C : \quad z = x \qquad -R \leqslant x \leqslant R$$

$$= \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})\,e^{i\alpha Re^{i\theta}}\,iRe^{i\theta}\,d\theta + \int_{-R}^{R} f(x)\,e^{i\alpha x}\,dx$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1+C} f(z)\,e^{i\alpha z}\,dz = \lim_{R\to\infty}\left[\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})\,e^{i\alpha Re^{i\theta}}\cdot iRe^{i\theta}\,d\theta + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\alpha x}\,dx\right]$$

* اگر مخرج f دو درجه از صورت آن بیشتر باشد :

* و انتگرال اوّلی صفر می شود و از بین می رود. * $f(x) = \dfrac{R}{R^2+1}$ *

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{4x^4+13x^2+9}\,dx$$ صفحه ۲۲۲ - ۷ - l

* حدود حتماً باید $-\infty$ تا ∞ باشد . چون تابع زوج است :

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{4x^4+13x^2+9}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{4x^4+13x^2+9}\,dx$$

$$= 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_i} \frac{e^{2iz}}{4z^4+13z^2+9}$$

* z_i قطبهای تابع $f(z)e^{2iz}$ واقع در نیم صفحه بالائی است.

e^{2iz} تام است

* $4z^4+13z^2+9=0 \Rightarrow \begin{cases} z=\pm i \\ z=\pm \frac{3}{2} i \end{cases}$

$$= \pi i \left[\underset{z=i}{\operatorname{Res}} f(z) + \underset{z=\frac{3}{2}i}{\operatorname{Res}} f(z) \right]$$

(قطب ساده) (قطب ساده)

$$* \underset{z=i}{\operatorname{Res}} f(z) = \left.\frac{e^{2iz}}{8z^3+26z}\right|_{z=i} = \frac{e^{-2}}{-8i+26i}$$

$$* \underset{z=\frac{3}{2}i}{\operatorname{Res}} f(z) = \frac{e^{-3}}{-27i+39i} \Rightarrow$$

$$= \pi i \left[\frac{e^{-2}}{18i} + \frac{e^{-3}}{12i} \right] = \pi \left[\frac{e^{-2}}{18} + \frac{e^{-3}}{12} \right] + 0i$$

$$\Rightarrow * \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{4x^4+13x^2+9}\,dx = \pi\left(\frac{e^{-2}}{18} - \frac{e^{-3}}{12}\right) \\[2ex] \displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{4x^4+13x^2+9}\,dx = 0 \end{cases}$$