دانشگاه صنعتی شریف

قطب علمی تبدیل انرژی
گروه تبدیل انرژی
دانشکدهٔ مهندسی مکانیک

قطب علمی تبدیل انرژی

مقدمه‌ای بر انتقال حرارت

سیامک کاظم‌زاده‌حنانی
مهدی کارزار جدی

عنوان: مقدمه‌ای بر انتقال حرارت
عنوان انگلیسی: An Introduction to Heat Transfer
نویسنده: سیامک کاظم‌زاده حنانی و مهدی کارزارجدی

عنوان

پیشگفتار

جزوه حاضر خلاصه‌ای از مباحث درس انتقال حرارت ۱ می‌باشد که توسط اینجانب تدریس و به کمک همکار پژوهشی آقای مهندس کارزارجدی در دانشگاه صنعتی شریف تدوین شده است. دانشجویان عزیز می‌توانند از مطالب این جزوه به منظور آشنایی سریعتر با مطالب درس و یا اجتناب از جزوه نویسی در کلاس استفاده نمایند. در این جزوه ممکن است اشتباهات تایپی یا مفهومی وجود داشته باشد که با کمک دانشجویانم و یا سایر خوانندگان گرامی تصحیح خواهد شد.

لازم است در اینجا از زحمات آقای بهرنگ اسدی و سرکار خانم پریسا حکیم جوادی که در جمع‌آوری جزوه حاضر مرا یاری کردند تشکر نمایم.
تایپ این جزوه توسط سرکار خانم فرشته پورشریفی انجام شده که از ایشان نیز سپاسگزاری می‌گردد.

سیامک کاظم‌زاده حنانی   مهدی کارزارجدی
تهران- تابستان ۱۳۸۴

فصل اول: مقدمه

انواع مکانیزمهای انتقال حرارت Modes or Methods of Heat Transfer

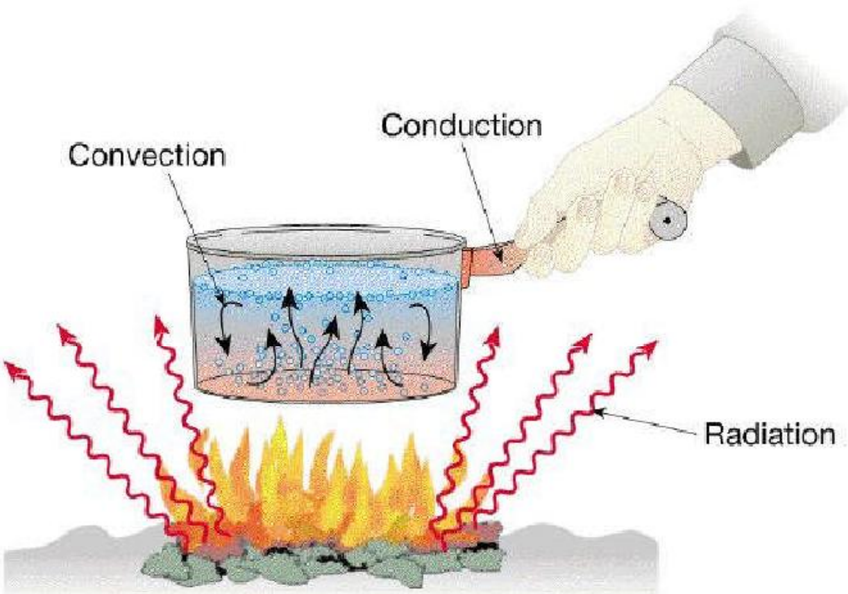
از نظر فیزیک کلاسیک انتقال حرارت توسط سه مکانیزم یا روش: ۱-هدایتی ۲-جابجایی (همرفت) ۳-تابشی انجام می‌شود (شکل ۱ را ببینید).

در شکل ۲ آنالوژی انتقال حرارت با انتقال آب از محل چاه به محل آتش‌سوزی به نمایش گذاشته شده‌است. همانگونه که مشاهده می گردد افراد برای انتقال آب از سه روش مختلف بهره گرفته‌اند:

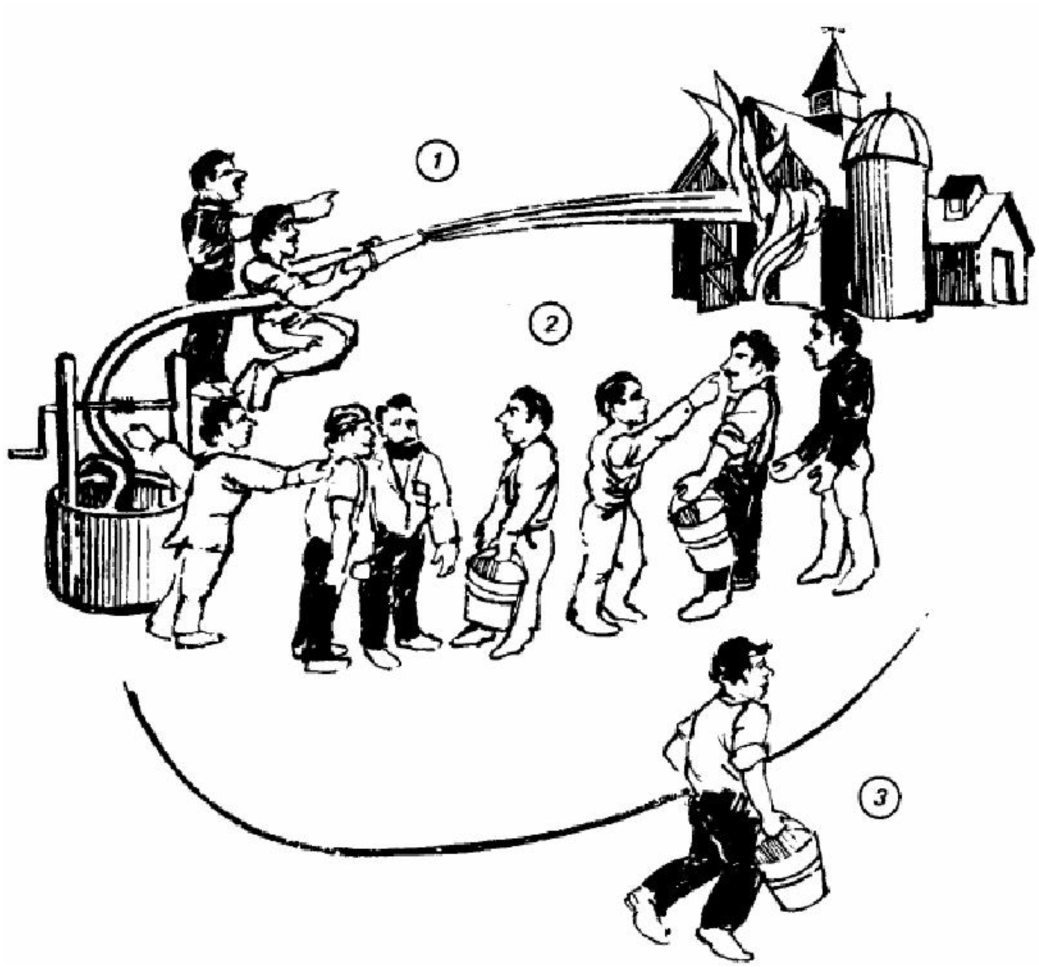
در حالت اول (که با شماره ۱) مشخص شده‌است آب بدون هیچ گونه وابستگی به محیط از منبع به محل مورد نظر منتقل می‌شود. این روش مشابه انتقال حرارت تشعشعی می‌باشد.

در حالت دوم (شماره ۲) دسته افراد با کمک هم آب را از طریق محیط از منبع به محل آتش‌سوزی منتقل می‌کنند. این روش مشابه انتقال حرارت هدایتی می‌باشد.

در حالت سوم (شماره ۳) دونده آب را از منبع به محل آتش‌سوزی منتقل می‌نماید. این روش همانند انتقال حرارت جابجایی می‌باشد.



شکل۱. روش‌های مختلف انتقال حرارت



شکل۲. شبیه سازی انتقال حرارت با انتقال آب [۱۰]

- **هدایت (Conduction)**

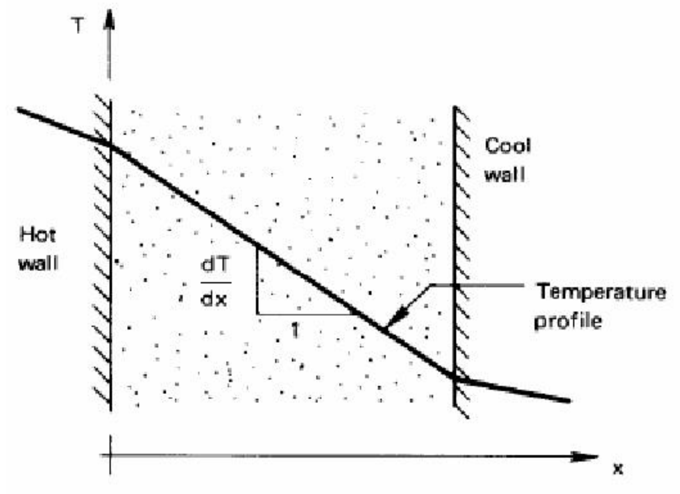
هدایت به انتقال گرما در جامدات و یا محیط‌های سیال ساکن در اثر اختلاف دما در این محیط‌ها انجام می‌گیرد. بطور کلی فرض بر این است که در اثر جابجایی ماکروسکوپیک محیط، گرما از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر منتقل نمی‌شود بلکه انتقال گرما توسط عواملی مانند حرکت تصادفی مولکول‌های گازی و یا ارتعاش شبکه کریستالی جامد انجام شود. در کتب کلاسیک انتقال حرارت مبحث انتقال حرارت به حالتهای یک بعدی، دو بعدی، چند بعدی و دائمی و غیر دائمی تقسیم بندی شده‌است که در بخش‌های آتی بیشتر در این مورد بحث خواهیم کرد.

معادله حاکم بر انتقال حرارت هدایتی در حالت یک بعدی بصورت زیر نوشته می‌شود (قانون فوریه):

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \tag{1}$$

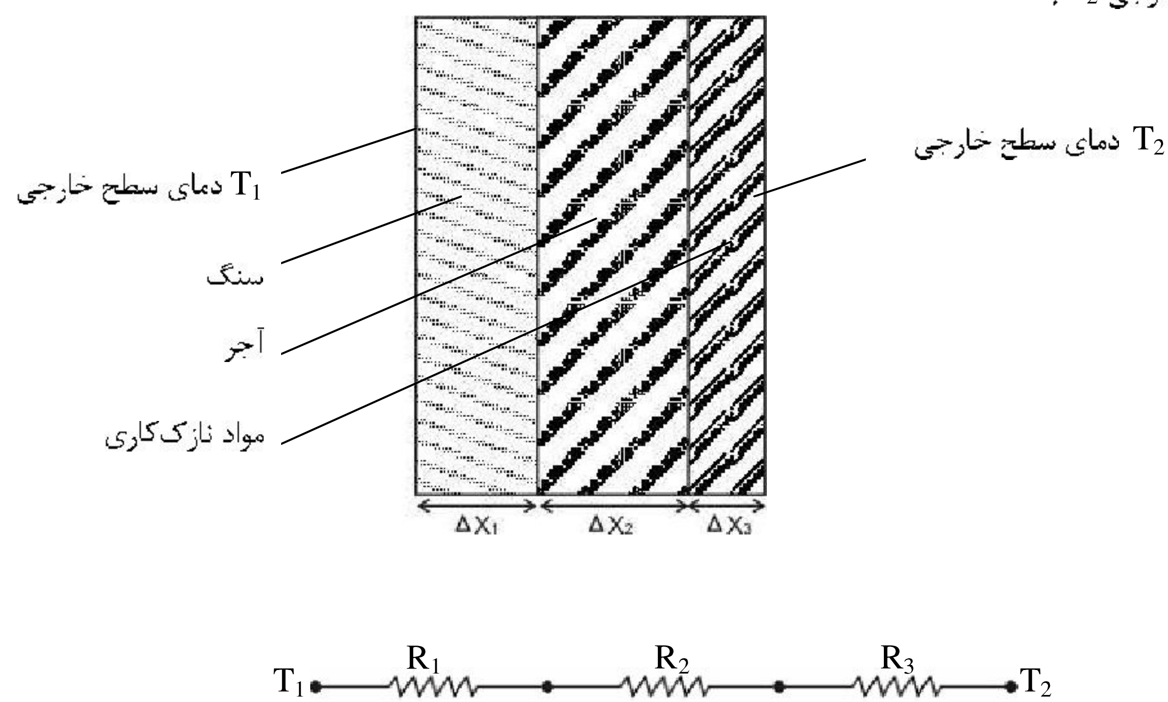
در رابطه فوق، q شار حرارتی $[W/m^2]$، T در جه حرارت [K]، $\frac{\partial T}{\partial x}$ گرادیان دما [K/m] و k ضریب انتقال حرارت هدایتی [W/mK] می‌باشد. مقدار k بستگی به محیطی دارد که در آن انتقال حرارت هدایتی انجام می‌گیرد، در محیط های فلزی مقدار k بزرگتر از محیط‌های غیر فلزی

می‌باشد. که بافرضیهٔ انتقال حرارت توسط الکترون‌های آزاد سازگار است. همچنین گازها مانند هوا دارای ضریب هدایت پایین‌تری نسبت به جامدات می‌باشند. علامت منفی در رابطه (۱) بدین معنی است که در جهت افزایش مختصات x مقدار دما کاهش می‌یابد، به عبارت دیگر گرادیان دما $\frac{\partial T}{\partial x}$ کوچکتر از صفر است ولی q مثبت محاسبه می‌گردد.



شکل ۵. انتقال حرارت از دیواره

انتقال حرارت در دیوارهای خارجی ساختمان‌ها از جمله مثال‌های معمول و کلاسیک در کاربرد هدایت می‌باشد. مثلا فرض کنید در شرایط دائمی دمای جدار خارجی دیوار T_1 و دمای جدارهٔ خارجی T_2 باشد.



شکل۶. انتقال حرارت از دیواره چند لایه

قانون فوریه را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow q = \frac{\Delta T}{R_t} \qquad (۲)$$

ملاحظه می‌شود که می‌توان جریان انتقال حرارت فوق را با جریان الکتریسیته شبیه‌سازی نمود به این ترتیب که q با مقدارجریان الکتریسیته، $\frac{\Delta x}{k}$ با مقاومت الکتریکی و ΔT را با اختلاف پتانسیل الکتریکی شبیه سازی نمود. به این ترتیب یک مدار سری مطابق شکل می‌توان تشکیل داد، برای مدار تشکیل شده خواهیم داشت:

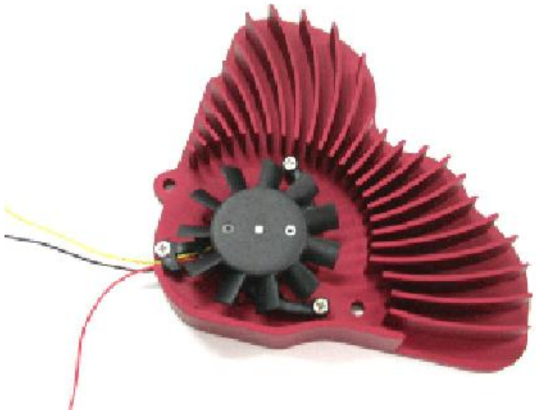
$$q = \frac{\Delta T}{\sum R} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\Delta x_1}{k_1 A} + \frac{\Delta x_2}{k_2 A} + \frac{\Delta x_3}{k_3 A}} \qquad (۳)$$

در رابطهٔ فوق، A سطح تبادل حرارت و عمود بر جهت انتقال حرارت می‌باشد.

- **همرفت (Convection)**

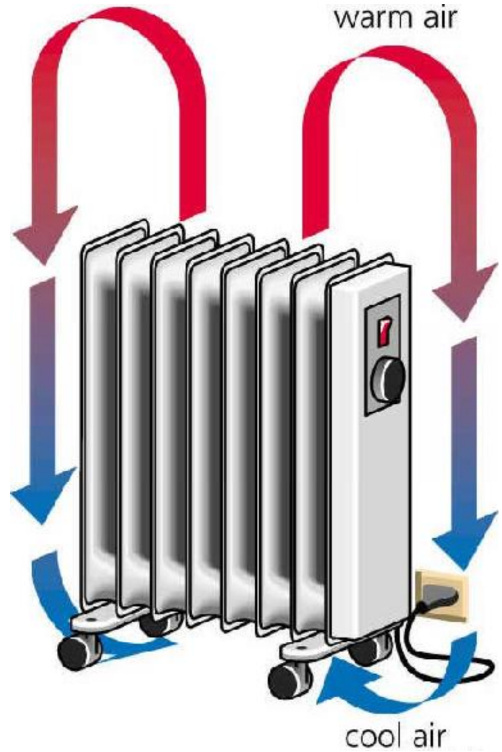
جابجایی یا همرفت زمانی وجود دارد که سیال (گاز یا مایع) در جوار یک سطح جامد حرکت نماید و بین سیال و جدار جامد اختلاف دما وجود داشته‌باشد. انتقال حرارت جابجایی خود بر دو نوع اصلی اجباری و آزاد تقسیم می‌شود.

جابجایی اجباری (Forced Convection): هنگامی که جسم در مقابل جریان هوا (با دمای بیشتر یا کمتر از خود جسم) قرار می‌گیرد. در اثر جریان هوا و اختلاف دمای بین سیال و جسم، انتقال حرارت بین جسم و سیال صورت می‌گیرد. به این نوع انتقال حرارت، انتقال حرارت جابجایی اجباری گفته‌می‌شود. در شکل ۳ نمونه‌ای از انتقال حرارت اجباری نشان داده‌شده است که پره‌های هیت‌سینک Heat Sink یک وسیلهٔ الکترونیکی در اثر جریان هوای ایجاد شده توسط فن (پنکه) پره‌های در معرض جریان هوا خنک‌کاری می‌شوند.



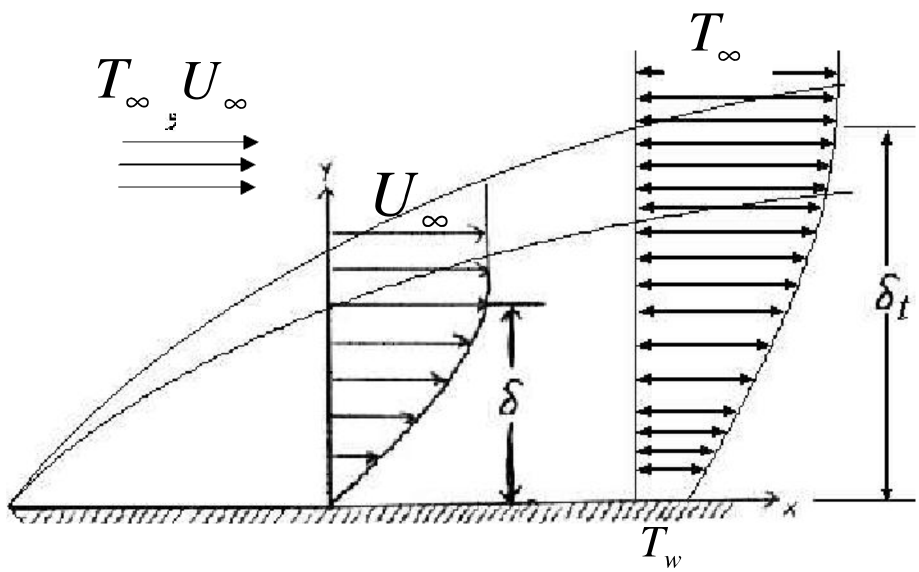
شکل ۳. خنک کردن لوازم الکترونیکی با استفاده از فن (مثالی از جابجایی اجباری)

جابجایی آزاد یا طبیعی (Natural or Free Convection): هنگامی که سیال اطراف جسم در اثر اختلاف دمای خود با سیال محیط اطراف شناور شده (در اجسام سرد به پایین و در اجسام گرم به سمت بالا) می‌رود انتقال حرارت همرفت ازاد یا طبیعی صورت می گیرد. در شکل ۴ نمونه‌ای ازانتقال حرارت طبیعی نشان داده شده‌است که گرمایش هوای منزل با استفاده از بخاری برقی را نشان می‌دهد.



شکل۴. گرمایش هوا بوسیله نوعی بخاری برقی (مثالی از جابجایی آزاد)

به عنوان مثالی از مسائل کلاسیک جابجایی می‌توان به انتقال جابجایی از روی دیواره تخت در برابر جریان یکنواخت هوا اشاره کرد



شکل۷. انتقال حرارت جابجایی

* شروع کننده انتقال حرارت دراین روش، هدایت یا Conduction است، زیرا سیال لزج چسبیده به دیواره ساکن فرض می‌شود و انتقال حرارت از جداره جامد در سیال ساکن خیلی نزدیک به دیواره بصورت هدایت منتقل می‌شود.

بنابراین برای لایهٔ ساکن نزدیک به دیواره می‌توان نوشت:

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} \qquad (۴)$$

k: ضریب هدایت حرارتی سیال

در انتقال حرارت جابجایی قانون سرمایش نیوتن بصورت رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$q = hA(T_{wall} - T_\infty) \qquad (۵)$$

$$q = hA(T_w - T_\infty)$$

A: سطح تبادل حرارت $[m^2]$

h: ضریب انتقال حرارت جابجایی $[W/m^2K]$

پیدا کردن h (ضریب انتقال حرارت جابجایی) مشکل است و یکی از اهداف اصلی مبحث انتقال حرارت جابجایی بدست آوردن این ضریب می‌باشد. بررسی فیزیکی پدیدهٔ انتقال حرارت جابجایی به کمک فرضیهٔ لایهٔ مرزی انجام می‌گیرد که در فصل پنجم با آن آشنا خواهید شد.

- تابش (Radiation)

همهٔ اجسام با استفاده از امواج الکترومغناطیسی در دمای بیشتر از صفر کلوین از خود انرژی ساطع می‌کنند. به این نوع انتقال انرژی انتقال حرارت تابش جابجایی گفته می‌شود. اهمیت انتقال حرارت تابشی به دمای سطح جسم و نوع سطح جسم بستگی دارد. دراین جزوه مقدمه ای برتابش ارائه شده است. برای دو جسم سیاه که فقط باهم تبادل حرارتی دارند می‌توان نوشت:

$$q_{rad} = \sigma A(T_1^4 - T_2^4) = h_r A(\underbrace{T_1 - T_2}) \qquad (۶)$$

رابطهٔ فوق، قانون استفان – بولتزمن نام دارد در این رابطه σ ثابت استفان بولتزمن می‌باشد و مقدار آن برابر $5.6677\times10^{-8} W/m^2K^4$ می‌باشد، h_r برای شبیه کردن محاسبات بافرمول‌های انتقال حرارت جابجائی و هدایت تعریف می شود تا محاسبات از نظر ریاضی خطی باشد. در فصل تابش جسم سیاه و روابط مورد نیاز برای محاسبه انتقال حرارت اجسام غیر سیاه در حالت کلی ارائه شده‌است.

فصل دوم: انتقال حرارت هدایتی

Conduction Heat Transfer

هدف اصلی فصل حاضر آشنا کردن دانشجویان با روش‌های بدست آوردن معادلات حاکم بر انتقال حرارت و حل این معادلات در شرایط بسیار ساده یک بعدی می‌باشد.
معادلات حاکم بر انتقال حرارت از طریق هدایت در مختصات کارتزین بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱)$$

معادله (۱) در حالت خطی حل تحلیلی دارد (با استفاده از روش جداسازی متغیرها) که در فصل سوم مورد بحث قرار خواهد گرفت. لبته برای حل این معادلات روشهای تحلیلی دیگری نیز موجود می‌باشد که در دوره‌های تحصیلات تکمیلی مورد بحث قرار می‌گیرند از جمله این روش‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

دو هامل	Duhamel
- تابع گرین	Green’s Function
- تبدیل لاپلاس	Laplace Transform
- تبدیل انتگرال	Integral Transform

در مختصات قطبی معادله (۱) به شکل زیر نوشته می‌شود:

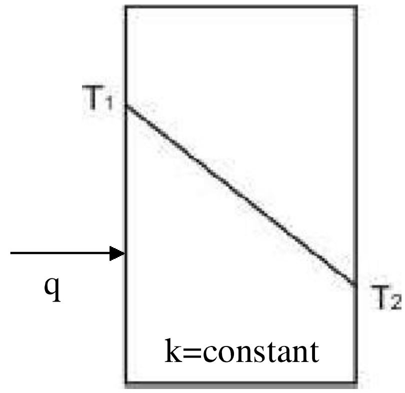
$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\dot{q}/k=\frac{\rho c}{k}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۲)$$

قانون فوریه Fourier’s Law

مطابق این قانون شار حرارتی هدایت در یک محیط تناسب مستقیم با گرادیان دما و سطح تبادل حرارتی (گرادیان دما در دو سوی سطح تبادل حرارت $\frac{\partial T}{\partial x}$) دارد:

$$q \alpha \frac{\Delta T}{\Delta x} A$$

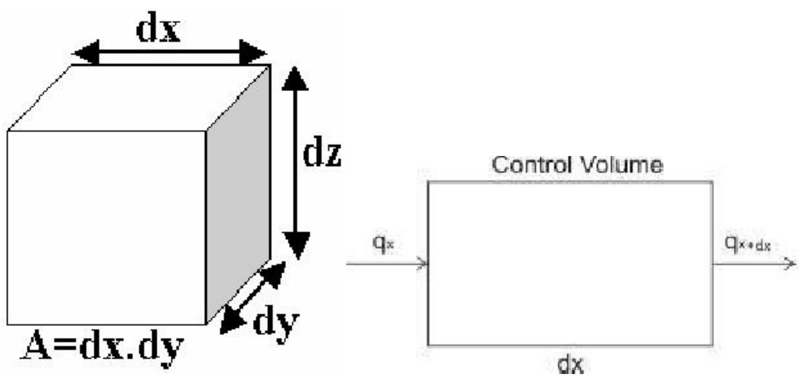
$$\rightarrow q = kA\frac{\partial T}{\partial x} \qquad k\left[\frac{W}{mK}\right] \qquad (۳)$$



شکل۱. انتقال حرارت در یک محیط یک بعدی با ضریب انتقال حرارت ثابت

با استفاده از اصل موازنه انرژی معادله (۱) را در حالت‌های ساده بدست می‌آوریم.

- **معادله دیفرانسیل هدایت دائمی یک بعدی**



$$q_x = q_{x+dx} \Rightarrow q_x = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx \qquad (۴)$$

با فرض ثابت بودن سطح مقطع A=dx.dy

$$(۳) \text{ و } (۴) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(-kA\frac{\partial T}{\partial x}) = 0 \Rightarrow k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad (۵)$$

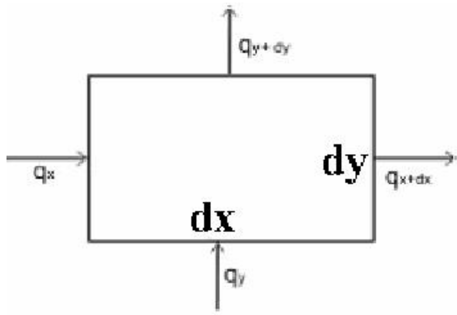
با فرض ثابت بودن k با انتگرالگیری از رابطهٔ (۵):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = C_1 \qquad (۶)$$

$$T = C_1 x + C_2 \qquad (۷)$$

ملاحظه می‌شود که اگر ضریب هدایت حرارتی ثابت باشد توزیع دمای یک بعدی در جسم خطی خواهد بود.

- **معادله دیفرانسیل هدایت دو بعدی دائمی**



$$q_x + q_y = q_{x+dx} + q_{y+dy}$$

$$q_x + q_y = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} q_y = 0 \qquad (۸)$$

با استفاده از (۲):

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} A_x, \;\; q_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y} \qquad (۹)$$

خواهیم داشت:

$$A_x = dy \times 1 \;\; , dx \times 1 = A_y \qquad (۱۰)$$

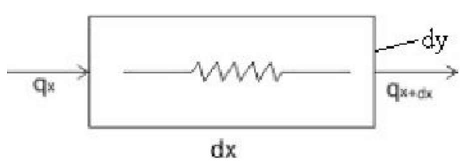
با جانشین کردن (۳)، (۸) و (۱۰) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x}(-k \frac{\partial T}{\partial x}) dxdy + \frac{\partial}{\partial y}(-k \frac{\partial T}{\partial y}) dydx = 0 \qquad (۱۱)$$

با فرض ثابت بودن ضریب هدایت حرارتی:

$$\rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (۱۲)$$

– معادله دیفرانسیل هدایت یک بعدی با چشمه حرارتی



$$q_x + (\dot{q}'')dxdy \times 1 = q_{x+dx}$$

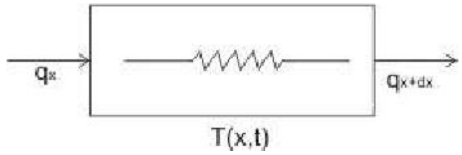
$$q_x + \dot{q}'' dxdy = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \qquad (۱۳)$$

$$\dot{q}'' dxdy = \frac{\partial}{\partial x}(-k \frac{\partial T}{\partial x}) dxdy$$

با فرض ثابت بودن ضریب انتقال حرارت هدایت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q}''\!/_{k} = 0 \qquad (۱۴)$$

- **معادله دیفرانسیل هدایت یک بعدی با چشمهٔ حرارتی و تابعی از زمان**



$$q_x + \dot{q}dxdy = q_x + \rho c dxdy \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{و} \qquad \rho dxdy(1) = \text{حجم المان} \qquad (۱۵)$$

$$q_x + \dot{q}dxdy = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial_x} dx + \rho c dxdy \ \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱۶)$$

$$\dot{q}dxdy = \frac{\partial}{\partial x}(-k\frac{\partial T}{\partial x})dydx + \rho c dxdy \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱۷)$$

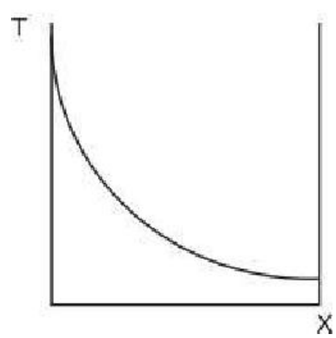
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q}/k = \frac{\rho c}{k}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱۸)$$

ρ جرم مخصوص و C گرمای ویژه جسم است.

با تعریف $\frac{k}{\rho c} = \alpha$ ضریب پخش حرارتی Thermal Diffusion می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q}/k = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱۹)$$

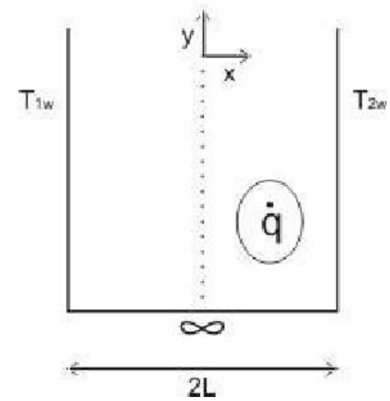
مثال – معلوم کنید دیوار زیر در حال گرم شدن است یا سرد شدن:



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} > o$$

پس در حال گرم شدن است.

* توزیع دما را در دیواره نشان داده شده در شکل زیر را بیابید



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dot{q}/k=0 \rightarrow Steady\ State\ \frac{\partial T}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{-\dot{q}}{k} \quad و \quad k \neq k(x)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{-\dot{q}x}{k}+C_1 \qquad (*)$$

$$T=\frac{-\dot{q}}{2k}x^2+C_1x+C_2$$

$$تقارن \quad از \quad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \rightarrow C_1=0$$

$$x=-L \rightarrow T=T_w \rightarrow T_w=\frac{-\dot{q}}{2k}L^2+C_2 \rightarrow C_2=T_w+\frac{\dot{q}}{2k}L^2$$

$$\rightarrow T=\frac{-\dot{q}}{2k}x^2+x^2+\frac{qL^2}{2k}+T_w$$

$$\Rightarrow T=\frac{-\dot{q}}{2k}\left[x^2-L^2\right]+T_w$$

- می خواهیم انتقال حرارت از این دیواره ها را بیابیم:

۱. بدون محاسبه و از روش استدلالی می توان گفت چون شرایط پایا است کل حرارت تولید شده باید بطور کامل خارج شود بنابراین:

$$\dot{Q}_{out}=\underset{\text{گرما در واحد حجم}}{\dot{q}}\times\underbrace{2L\times W\times 1}_{\text{حجم}}$$

۲. ز راه معادله (*) به ازای واحد پهنا می‌توان نوشت:

برای لبهٔ راست $$\frac{-\dot{q}}{k}(+L)=\frac{\partial T}{\partial x}$$

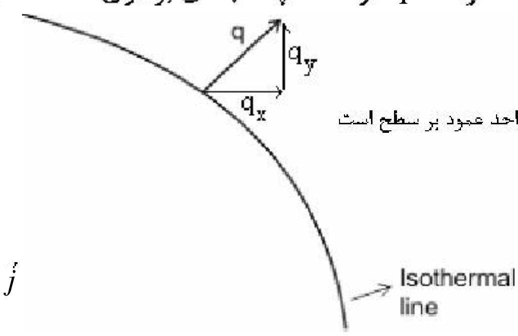
برای لبهٔ چپ $$\frac{-\dot{q}}{k}(-L)=\frac{\dot{q}}{k}L=\frac{\partial T}{\partial x}$$

از لبه سمت چپ $$q=-k\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=-L}=R\left[{-\dot{q}}\big/{k}\,(L)\right]=\dot{f}T(L)$$

از لبهٔ راست $$q=-R\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=L}=-h\left[\frac{-\dot{q}}{R}L\right]=+\dot{q}L$$

$$Q_{oot}=q_{\text{راست}}+q_{\text{چپ}}=+2\dot{q}L$$

*توجه شود که q درحالت چند بعدی برداری است که به صورت زیر تعریف می شود.

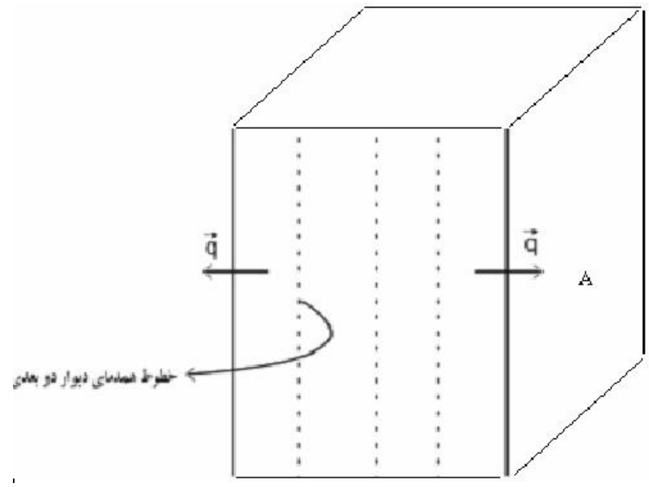


n بردار واحد عمود بر سطح است

$$\vec{q}=-k\vec{\nabla}T=-k\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i}-k\frac{\partial T}{\partial y}\vec{j}$$

$$\vec{q}=-k\frac{\partial T}{\partial n}$$

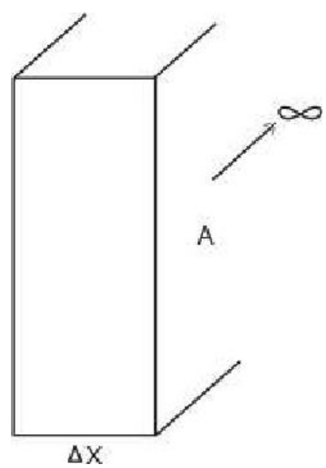
خطوط همدما برای دیوار دوبعدی در هدایت یک بعدی:



شکل خطوط همدما بر روی دیواره تخت (خطوط موازی لبه‌ها خطوط همدما می‌باشند)

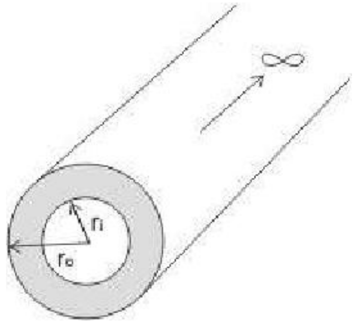
درواقع دما را می توان به پتانسیل تشبیه کرد و خطوط پتانسیل همـان خطـوط هـم دمـا دراینجـا می‌باشند و خطوط شار حرارتی برخطوط همدما **عمود هستند**.

هدایت یک بعدی یعنی هدایت یا گرادیان یا تغییر دما منحصراً دریکی از جهـات مختـصات وجـود داشته باشد.



$$\frac{\partial T}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial T}{\partial z}=0 \qquad \frac{\partial T}{\partial x}\neq 0 \qquad (۲۱)$$

لوله ای به طول نامحدود:

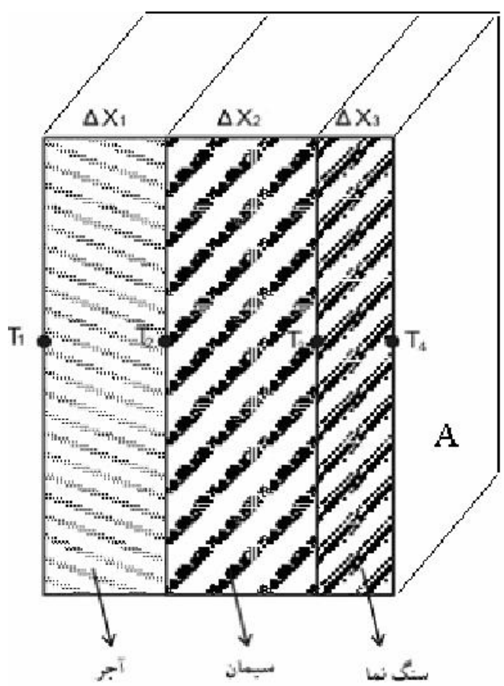


$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=0 \quad \frac{\partial T}{\partial z}=0$$
$$\frac{\partial T}{\partial r}\neq 0 \quad q\neq f(\theta) \qquad (۲۲)$$

خطوط همدما دایره ای هم مرکز لوله هستند.

- دیوارهای چند لایه یا کامپوزیت Composite Walls

در عمل دیواره های موجود معمولا از چند لایهٔ با جنس‌های مختلف تشکیل شده‌اند(شکل را ببینید). در این بخش به محاسبات مربوط به انتقال حرارت از این دیواره‌ها می‌پردازیم.



شکل انتقال حرارت از دیواره چند لایه

$$q=kA\frac{T_1-T_2}{\Delta x_1} \qquad (۲۳)$$

$$\left.\begin{array}{l} q = kA\dfrac{T_2 - T_3}{\Delta x_2} \\ q = k \quad A\dfrac{T_3 - T_4}{5x_3} \end{array}\right\} T_i - T_{i+1} = \frac{q_i \Delta x_1}{k_i A} \qquad (۲۴)$$

در شرایط دائمی و Steady $\Leftarrow q = q_1 = q_2 = q_3$

$$\Rightarrow q = \frac{T_1 - T_4}{\dfrac{\Delta x_1}{k_1 A} + \dfrac{\Delta x_2}{k_2 A} + \dfrac{\Delta x_3}{k_3 A}} \qquad (۲۵)$$

- **انتقال حرارت شعاعی از لوله‌ها**

لوله‌ای به طول l و شعاع داخلی و خارجی r_i, r_o درنظر بگیرید با نوشتن قانون فوریه معادلات انتقال حرارت در مختصات استوانه ی خواهیم داشت:

$$q = -kA\frac{\partial T}{\partial r} \qquad (۲۶)$$

$$q = -k2\pi rl\frac{\partial T}{\partial r} \Rightarrow -dT = \frac{q}{2\pi lk}\frac{dr}{r} \qquad (۲۷)$$

$$T_i - T_o = {}^{q}\!/_{2\pi lk} \ln\frac{r_o}{r_i}$$

$$\Rightarrow q = \frac{T_i - T_o}{\left(\ln\dfrac{r_o}{r_i}\right)\Big/2\pi lk} \qquad (۲۸)$$

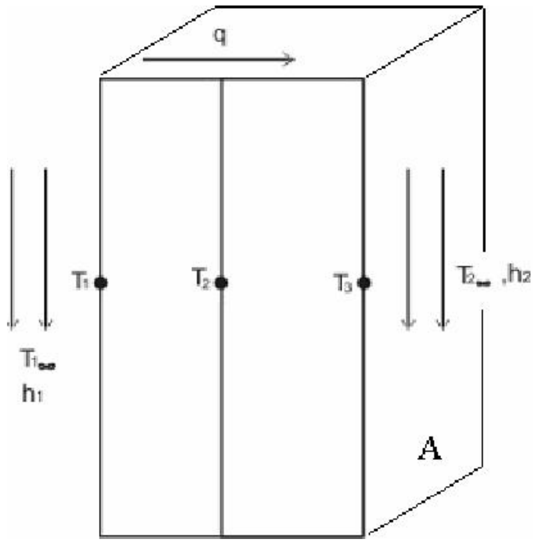
$$q = \frac{\Delta T}{R} \qquad (۲۹)$$

$$R = \frac{1n\dfrac{r_o}{r_i}}{2\pi lk} \qquad (۳۰)$$

به همین ترتیب می‌توان برای لوله‌های کامپوزیتی نوشت:

$$q = \frac{\Delta T}{\dfrac{\ln {}^{r_2}\!/_{r_1}}{2\pi lk_1} + \dfrac{\ln {}^{r_3}\!/_{r_2}}{2\pi lk_2} + \ldots} \qquad (۳۱)$$

- ضریب انتقال حرارت عمومی **Overall Heat Transfer Coefficient**



شکل انتقال حرارت از یک دیواره تحت

در شرایط انتقال حرارت دائمی:

$$\begin{cases} q_1 = h_1 A(T_{1\infty} - T_1) \\ q_2 = k_1 A \dfrac{(T_1 - T_2)}{\Delta x_1} \\ q_3 = k_2 A \dfrac{(T_2 - T_3)}{\Delta x_3} \\ q_4 = h_2 A(T_3 - T_{2\infty}) \end{cases} \qquad (۳۲)$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 \qquad (۳۳)$$

از (۳۲) و (۳۳) نتیجه می‌شود که:

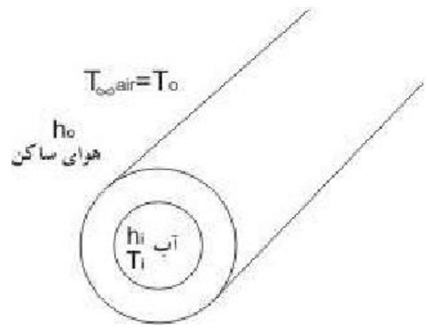
$$q = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\dfrac{\Delta x_1}{k_1 A} + \dfrac{\Delta x_2}{k_2 A} + \dfrac{1}{h_1 A} + \dfrac{1}{h_2 A}} \qquad (۳۴)$$

$$q = UA\Delta t \Rightarrow U = \frac{1}{\dfrac{1}{h_1} + \dfrac{\Delta x_1}{k_1} + \dfrac{\Delta x_2}{k_2} + \dfrac{1}{h_2}} \quad \left[\frac{W}{m^{2\,o}k}\right] \qquad (۳۵)$$

در عبارت فوق U ضریب انتقال حرارت عمومی می‌باشد.

- **ضریب انتقال حرارت عمومی برای سیستم شعاعی**

در این بخش به محاسبهٔ ضریب انتقال حرارت کلی برای مقاطع دایروی می‌پردازیم. لوله‌ای که در داخل آن سیال جریان دارد و محیط بیرون آن نیز توسط سیال دیگری احاطه شده در نظر می‌گیریم.



شکل انتقال حرارت یک لوله استوانه‌ای

h_o ضریب انتقال حرارت هوای ساکن محیط اطراف استوانه و h_i ضریب انتقال حرارت جابجایی سیال درون لوله می‌باشد.

$$q=\frac{T_i-T_o}{\dfrac{1}{h_iA_i}+\dfrac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi lk}+\dfrac{1}{h_oA_o}} \tag{۳۶}$$

$$A_i=2\pi lr_1$$
$$A_o=2\pi lr_2$$

با تعریف

$$q=U_oA_o\Delta T \tag{۳۷}$$

ضریب انتقال حرارت عمومی برحسب سطح خارجی به صورت زیر نوشته‌می‌شود:

$$U_o=\frac{1}{\dfrac{A_o}{h_iA_i}+\dfrac{A_o\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi lk}+\dfrac{1}{h_o}} \tag{۳۸}$$

با تعریف

$$q=U_iA_i\Delta T \tag{۳۹}$$

ضریب انتقال حرارت عمومی سطح داخلی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$U_i=\frac{1}{h_i+\dfrac{A_i\ln{r_2}/{r_1}}{2\pi lk}+\dfrac{A_i}{h_oA_o}} \tag{۴۰}$$

سئوال آیا در جدار تماس دو لایه **با** فرض شرایط ایده‌آل گرادیان دما ثابت است؟

$$q_1=-k_1A\frac{\partial T}{\partial x}$$
$$q_2=-k_2A\frac{\partial T}{\partial x} \tag{۴۱}$$
$$\begin{matrix} q_1=q_2 \\ k_1\neq k_2 \end{matrix} \rightarrow \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1\neq\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2 (**)$$

*توجه شود که پیوستگی در نقطه های تماس وجود دارد ولی مشتق پذیری وجود ندارد به دلیل رابطه (**) که در بالا آمده است.

- ضخامت بحرانی عایق Critical Thickness of Insulation

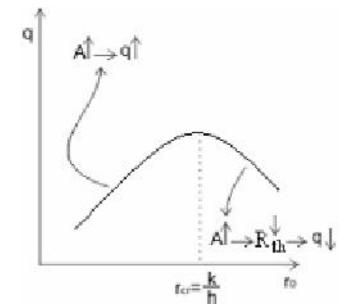
دمای جداره داخلی T_i و این لوله در معرض محیط با دمای T_∞ و ضریب انتقال حرارت جابجائی آن h می باشد. از مقاومت حرارتی جدار لولهٔ فلزی در مقابل ضخامت عایق (r_o-r_i) صرف نظر می کنیم.

$$q=\frac{T_i-T_\infty}{\frac{\ln\frac{r_o}{r_i}}{2\pi lk}+\frac{1}{h(2\pi r_o)l}} \qquad (۴۲)$$

$$\frac{dq}{dr_2}=\frac{(T_i-T_\infty)\left(\frac{1}{r_o k}-\frac{1}{hr_o^2}\right)}{(\text{مخرج})^2} \qquad (۴۳)$$

$$\Rightarrow r_8=\frac{k}{h} \qquad \frac{\partial^2 q}{\partial r_o^{\,2}}<0 \Rightarrow$$ بنابراین نقطهٔ مشتق صفر معرف انتقال حرارت ماکزیمم است (۴۴)

$$A\uparrow\Rightarrow q\uparrow \qquad (۴۵)$$



شکل انتقال حرارت بر حسب شعاع بحرانی

- انتقال حرارت در استوانه توپر با چشمه حرارتی داخلی

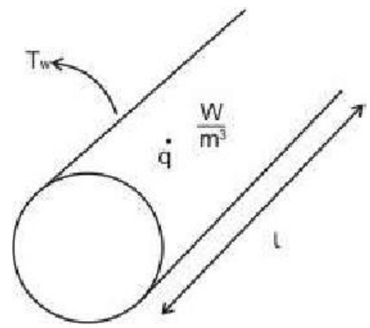
مطابق شکل یک استوانه توپر با چشمه حرارتی داخلی $\dot{q}$ در نظر بگیرید

$$T=T(r) \qquad (۴۶)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\dot{q}/k=0 \qquad (۴۷)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=-\dot{q}/k\Rightarrow r\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{-qr^2}{2k}+C_1 \qquad (۴۸)$$

$$\Rightarrow T=\frac{-\dot{q}r^2}{4k}+C_1\ln r+C_2 \qquad (۴۹)$$



شکل استوانه توپر با چشمه حرارتی داخلی

$$\begin{cases} T(r=R)=T_w \\ \dfrac{dT}{dr}\Big|_{r=0}=0 \end{cases} \rightarrow T-T_w=\frac{\dot{q}}{4k}\left(R^2-r^2\right) \tag{۵۰}$$

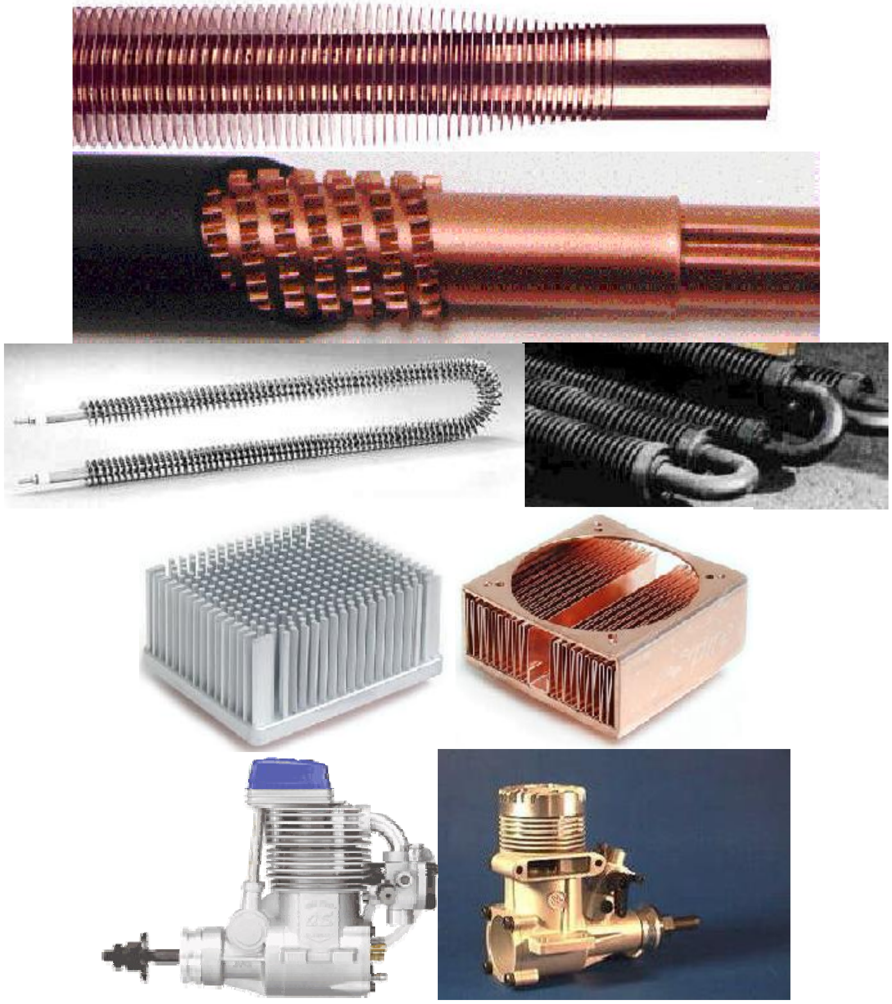
سئوال: آیا h و k قابل محاسبه اند؟

k: جزء خواص ماده می باشد و با روش های آزمایشگاهی محدود می توان آن را بدست آورد. **البته** k با دما تغییر می کند و لازم است که جداول خواص برحسب دما را داشته باشیم. همچنین k در اجسام جامد تابعی از مکان و شبکه کریستالی نیز می باشد.

h: بستگی به رژیم جریان، هندسه جریان، جنس سیال دارد و همچنین تشابه بین الگوی ضریب اصطکاک و ضریب انتقال حرارت جابجائی وجود دارد.

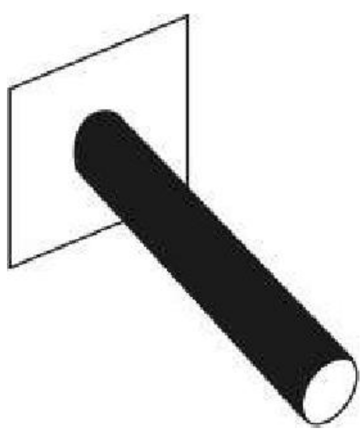
انتقال حرارت در سطوح گسترش یافته Extended Surfaces

منظور از سطوح گسترش یافته بررسی انتقال حرارت از پره‌ها Fin می باشد. پره‌ها برای افزایش انتقال حرارت از یک سطح، در صنایع مختلف از جمله در مبدل‌های حرارتی در خنک‌کاری لوازم الکترونیکی و بسیاری کاربردهای دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند. در شکل تعدادی از کاربردهای پره‌ها در صنایع مختلف نشان داده‌شده‌است. در این بخش با استفاده از ساده‌سازی‌های خاصی به بررسی انتقال حرارت از این پره‌ها نشان داده‌شده‌است.



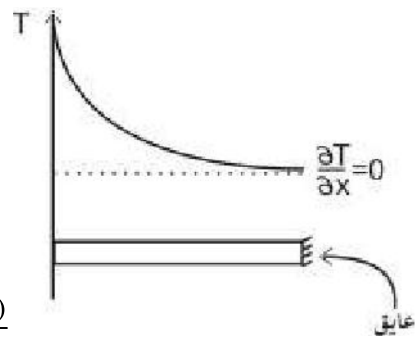
شکل کاربردهای متنوع پره‌ها

پره با طول بی نهایت با دمای ریشهٔ $T_\circ$ که در دمای محیط T_∞ قرار دارد و با در نظر گرفتن $\theta = T_\circ - T_\infty$ و $\theta_\circ = T_\circ - T_\infty$



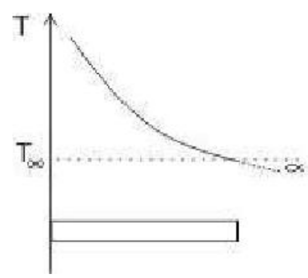
$$\theta = \theta_o e^{-mx}$$

پره انتها عایق:



$$\theta = \theta_o \frac{Coshm(l-x)}{Coshml}$$

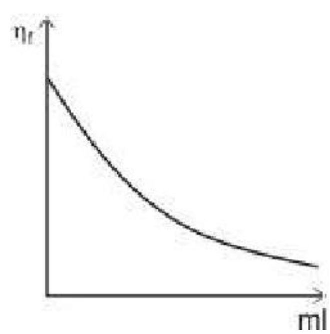
پره با طول معین:



(۵۱) راندمان پره: در حالت کلی $\eta_f = \dfrac{q \text{ واقعی با پره}}{q \text{ وقتی همه پره در دمای ریشه باشد}}$

(۵۲) $$\eta_f = \frac{\sqrt{hpkA}\theta_o tgh\, ml}{ph\theta_o l} = \frac{tghml}{ml}$$

در رابطهٔ فوق h ضریب انتقال حرارت جابجایی، k ضریب هدایت حرارتی پره، A سطح مقطع پره و p پیرامون مقطع پره می‌باشد.



(۵۳) کارائی پره: $\varepsilon_f = \dfrac{\sqrt{hpkA}\theta_o}{hA\theta_o} = \sqrt{\dfrac{pk}{hA}}$ برای پره با طول بی نهایت

پره زمانی کارائی مناسب داردکه ضریب هدایت حرارتی بالا و آن را در معرض محیط با h کم قرار دهیم. اکنون به تفسیر فیزیکی رابطهٔ (۵۴) می‌پردازیم.

$$\text{درحالت بدون پره} = q = hA\theta_o = \frac{\theta_o}{\left.\frac{1}{hA}\right\} \Rightarrow R_1} \qquad (۵۴)$$

- مقاومت در حالت بدون پره $\frac{1}{hA}$ است.

$$q = \sqrt{hpkA}\,\theta_o = \frac{\theta_o}{\left.\frac{1}{\sqrt{hpkA}}\right\} R_2} \qquad (۵۵)$$

مقاومت در حالت با پره R_2 است.

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{hA}{\sqrt{hpkA}} : \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{pk}{hA}}$$
$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \varepsilon_f \ \text{کارائی پره} \qquad (۵۶)$$

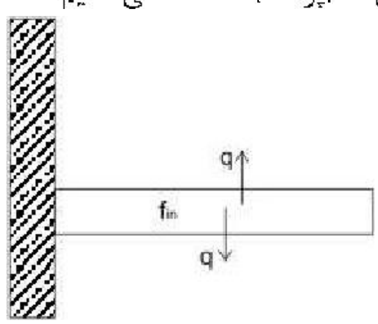
در واقع می‌توان گفت که کارائی پره عبارتست از مقاومت حرارتی بدون پره به مقاومت حرارتی با پرهٔ حرارتی می‌باشد.

قانون سرمایش نیوتن را یکباردیگر یادآوری می‌کنیم:

$$q = hA(T - T_\infty) \qquad (۵۷)$$

برای زیاد کردن انتقال حرارت باید h یا A را تغییر دهیم.

برای تغییر و یا گسترش A از فین ها (پره ها) استفاده می کنیم.



درحالت ایده آل برای پرهٔ استوانه‌ای با انتهای عایق خواهیم داشت:

$$q = h \underset{\substack{\downarrow \\ \pi dl}}{A} (T - T_\infty) \qquad (۵۸)$$

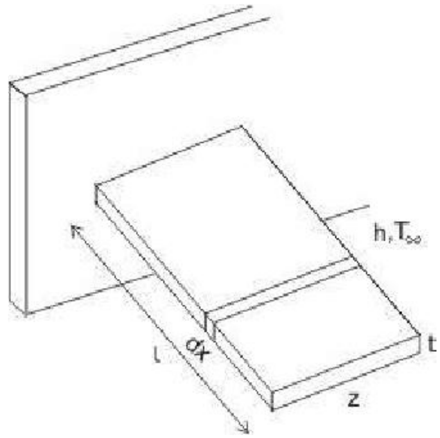
سطح جانبی

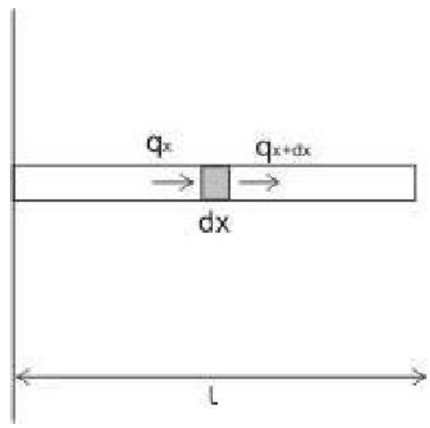
دمای ریشه

در فرمول فوق d قطر و l طول پره می‌باشد.

توجه:

فین را طرف سیال با h کمتر تعبیه می کنند چرا؟





روابط ریاضی برای پره های با مقطع یکنواخت

فرضیات:

گرادیان دما فقط در جهت x داریم (ضخامت t نازک است)

- h ثابت و یکنواخت است.

موازنهٔ انرژی

$$q_x = q_{x+dx} + q_{conv}$$

$$-kzt\frac{\partial T}{\partial x} = -kzt(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2}dx) + h(2zdx + 2tdx)(T - T_\infty)$$

$$-kA\frac{\partial T}{\partial x} = -kA\frac{\partial T}{\partial x} - kA\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx + hpdx(T - T_\infty)$$

$$kA\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - hp(T - T_\infty) = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{hp}{KA}(T - T_\infty)$$

$$m = \sqrt{\frac{hp}{KA}}(\frac{1}{m})^{\text{واحد}}$$

$$T - T_\infty = \theta \qquad \left.\right\} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - m^2\theta = 0$$

شرایط مرزی اول:

$$x = 0$$

$$T = T_o \Rightarrow \theta = T_o - T_\infty = \theta_o$$

شرایط مرزی دوم:

الف) پره طول بلند باشد.

$$\begin{cases} x \to \infty \\ T = T_\infty \to \theta = 0 \end{cases}$$

$$\theta/\theta_o = e^{-mx}$$ جوب

$$q = \sqrt{hpkA}\,\theta_o$$

ب) پره انتها عایق:

$$\begin{cases} x = l \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \to \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\theta}{\theta_o} = \frac{\cosh m(l - x)}{\cosh ml}$$

$$q = \sqrt{hpkA}\,\theta_o tgh(ml)$$

ج) پره با طول معین:

$$x = L$$

$$-kA\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x-L} = hA(T_{(L)} - T_\infty)$$

$$\to k\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=L} = -h\theta\Big|_{x=L}$$

پره با مقاطع متغیر:

از تعریف راندمان پره به ترتیب زیر استفاده می کنیم.

برای انتها عایق $\eta_f = \dfrac{tgh(ml)}{mL}$

$$mL = \sqrt{\frac{hp}{kA}}L = \sqrt{\frac{h(2z+2t)}{kzt}}L$$

$$z >> t \text{ و } mL = \sqrt{\frac{2hz}{ktz}}L = \sqrt{\frac{2h}{kt}}L = \sqrt{\frac{2h}{ktL}}L^{\frac{3}{2}}$$

$$A_p = Lt \rightarrow profile\ \ Area$$

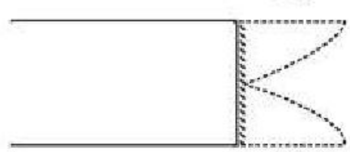
$$\eta_f = \frac{tgh\left[\sqrt{\frac{2h}{kAp}}L^{\frac{3}{2}}\right]}{\sqrt{\frac{2h}{kAp}}L^{\frac{3}{2}}}$$

برای شرایطی که $\left(\dfrac{ht}{2k}\right)^{\frac{1}{2}} << \dfrac{1}{2}$ باشد، آنگاه می توان برای محاسبه راندمان فین هائی که انتها عایق نیستند در رابطه فوق به طول فین به اندازهٔ $\dfrac{t}{2}$ اضافه کرد و طول تصحیح شده نامید.

طول تصحیح شده از رابطه

$$L_C = L + \frac{t}{2}$$

محاسبه می‌گردد، خطای چنین تقریبی حدود 5% است.



بنابراین راندمان برای فین های مستطیلی که در انتها نیز تبادل حرارت دارند بطور تقریبی بصورت زیر بیان می شود.

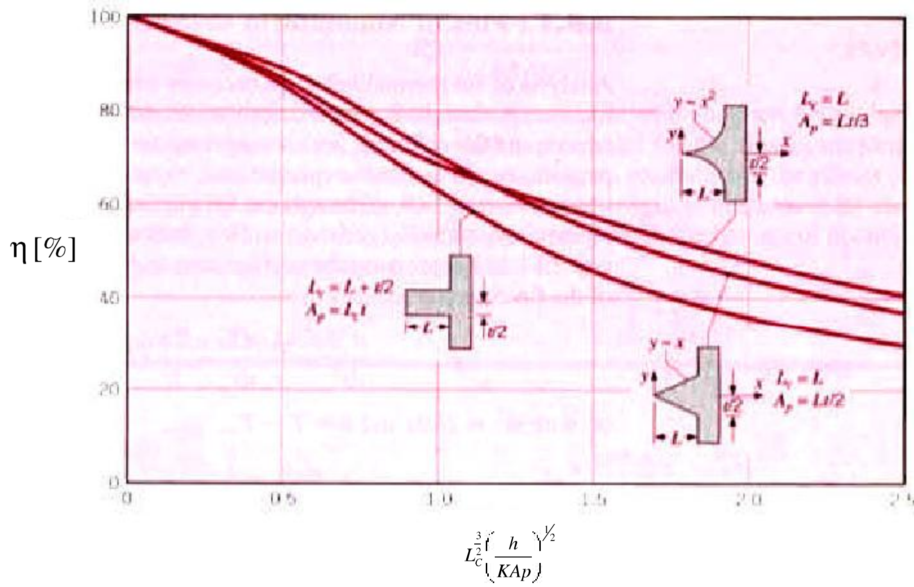
بطور کلی:

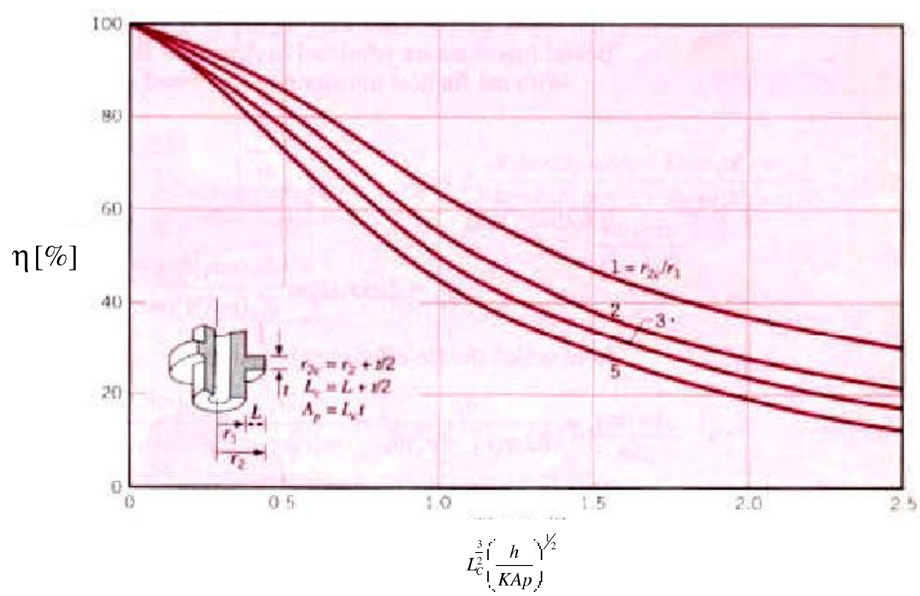
$$\eta_f = \frac{tgh\sqrt{\frac{2h}{kAp}}\left(L+\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{2h}{kAp}}\left(L+\frac{t}{2}\right)}$$

$$A_p = \left(L + t/2\right)t = L_c t$$

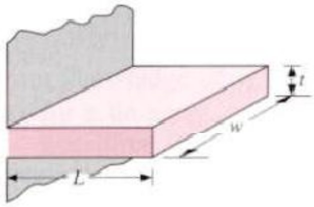
در شکل راندمان دوفین با مقاطع پروفیل مثلثی و مستطیلی نشان داده شده است. مورد فین مثلثی توسط حل معادله دیفرانسیل هدایت و سپس با استفاده از تعریف بازده فین بدست آمده است.

توجه کنید چون سطح تبادل حرارت در انتهای فین مثلثی صفر است بنابراین این این فینها عملاً انتها عایق هستند.

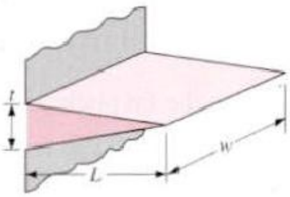




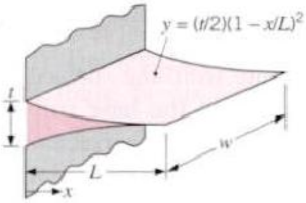
شکل نمودار بازدهی پره‌های محیطی لوله‌ها [۹]



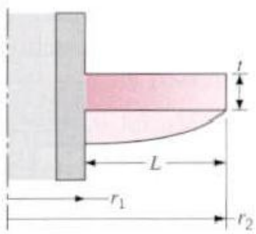
$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$



$$\eta_f = \frac{1}{mL}\frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$

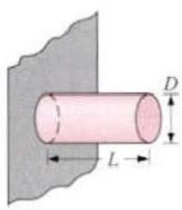


$$\eta_f = \frac{2}{[4(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1}$$

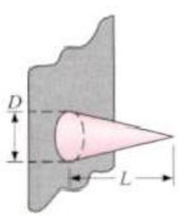


$$\eta_f = C_2 \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1)K_1(mr_{2c})}{I_0(mr_1)K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1)I_1(mr_{2c})}$$

$$C_2 = \frac{(2r_1/m)}{(r_{2c}^2 - r_1^2)}$$



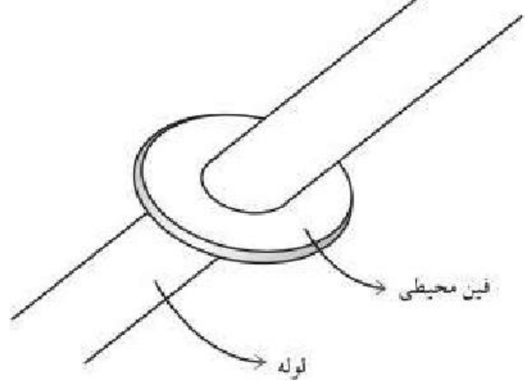
$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$



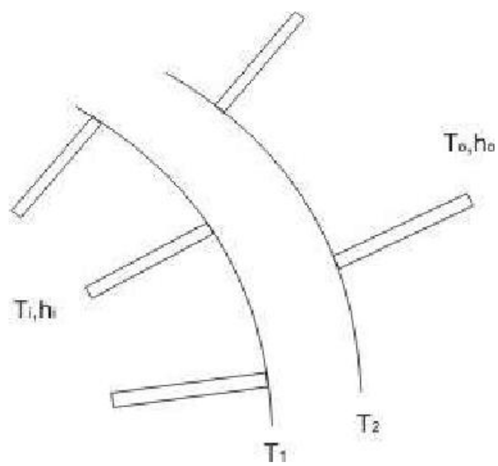
$$\eta_f = \frac{2}{mL}\frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)}$$

شکل راندمان پره‌ها با اشکال مختلف [۹]

درشکل راندمان فین های محیطی نیز برحسب پارامتر $L_C^{\frac{3}{2}}\left(\frac{h}{KAp}\right)^{\frac{1}{2}}$ رسم شده است.



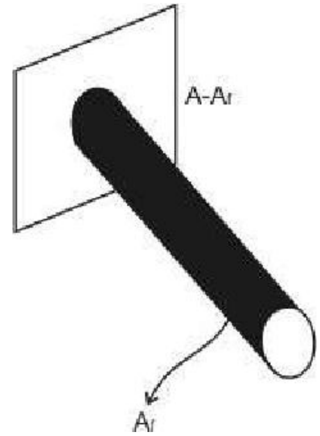
- تعیین ضریب انتقال حرارت عمومی برای سطوح پره دار



$$Q = UA(T_i - T_o)$$

ابتدا بازده کل سطح پره دار را تعریف می کنیم:

$$\eta_t = \frac{\text{حرارت واقعي از سطح پره و سطح بي پره}}{\text{حرارتي كه از سطح پره و از سطح بدون پره در دماي ريشه منتقل ميشود}}$$



$$\eta_t = \frac{(A - A_f)h\Delta T + \eta_f A_f h\Delta T}{Ah\Delta T}$$

$$\eta_t = 1 - \frac{Af}{A}(1 - \eta_f)$$

$$Q_1 = \eta_{ti} h_i A_i (T_i - T_1) = \frac{T_i - T_1}{\frac{1}{\eta_{ti} h_i A_i}}$$

$$Q_2 = \frac{T_1 - T_2}{\text{هدایت}}$$

$$Q_3 = \frac{T_2 - T}{\frac{1}{h_o A_o \eta_{to}}}$$

در حالت دائم:

$$Q = \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{\eta_{ti} h_i A_i} + R + \frac{1}{\eta_{to} A_o h_o}}$$

پس

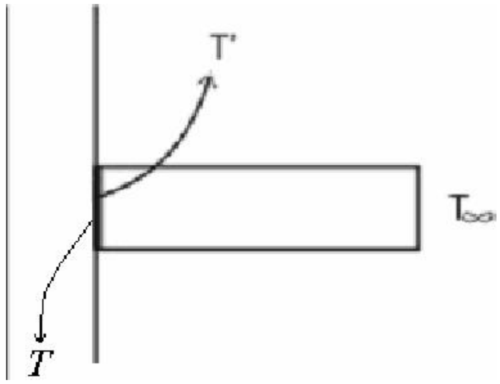
$$UA = \frac{1}{\frac{1}{\eta_{ti} h_i A_i} + R + \frac{1}{\eta_{to}}}$$

$$Q = U_i A_i \Delta T = UA\Delta T$$

$$\Rightarrow U_i = \frac{UA}{A_i}$$

$$\Rightarrow U_i = \frac{1}{\frac{1}{\eta_{ti} A_i} + R + \frac{A_i}{\eta_{to} A_o h_o}}$$

- **تعیین بازده کلی سطح با درنظر گرفتن مقاومت تماس**



$$\eta_t = \frac{(A-A_f)h\Delta T + \eta_f A_f h \Delta T'}{Ah\Delta T}$$

$$(T'-T_\infty)A_f h \eta_f = \frac{T-T'}{R_c / A_c}$$

در رابطهٔ فوق R_c مقاومت تماس و A_c سطح ریشه یا سطح مقطع پره می‌باشد.

$$\frac{T-T_\infty}{\frac{1}{A_f h\eta_f}+\frac{R_c}{A_c}} = \frac{T'-T_\infty}{\frac{1}{A_f h \eta_f}}$$

$$T'-T_\infty = \frac{(T-T_\infty)\frac{1}{A_f h\eta_f}}{\frac{1}{A_f h\eta_f}+\frac{Rc}{Ac}}$$

$$\eta_t = \frac{(A-A_f)h\Delta T + \frac{\eta_f A_f h \Delta T \frac{1}{A_f h \eta_f}}{\frac{1}{A_f h\eta_f}+\frac{R_c}{A_c}}}{h\,A\,\Delta T}$$

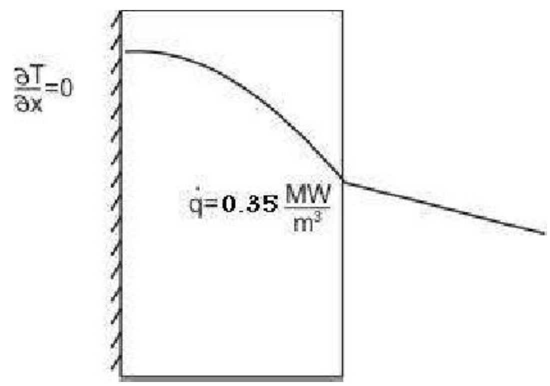
$$\eta_t = \frac{Ah\Delta T - A_f h \Delta T + \Delta T\left(\frac{1}{\frac{1}{A_f\eta_f h}+\frac{R_c}{A_c}}\right)}{hA\Delta T}$$

$$\eta_t = 1-\frac{Af}{A}\left[1-\frac{\eta_f}{1+\eta_f\frac{R_c hAf}{A_c}}\right] = 1-\frac{A_f}{A}\left[1-\frac{\eta_f}{\underbrace{1+\eta_f hA_f\frac{R_c}{A_c}}_{C_1}}\right]$$

$$\Rightarrow \eta_t = 1-\frac{A_f}{A}\left[1-\frac{\eta_f}{C_1}\right]$$

مسائل

۱.یک طرف دیواری به ضخامت 7.5cm عایق است و از طرف دیگر تحت تاثیر یک محیط به دمای 93^0C و ضریب انتقال حرارت جابجائی $570\dfrac{w}{m^{2o}C}$ است هرگاه در داخل دیوار تولید حرارت به میزان $0.35\dfrac{Mw}{m^3}$ داشته باشیم مطلوبست دمای حداکثر دیوار k=21.



$$T_\infty = 93^o C$$

$$h = 570\frac{W}{m^{2\,o}C}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dot{q}/k = 0$$

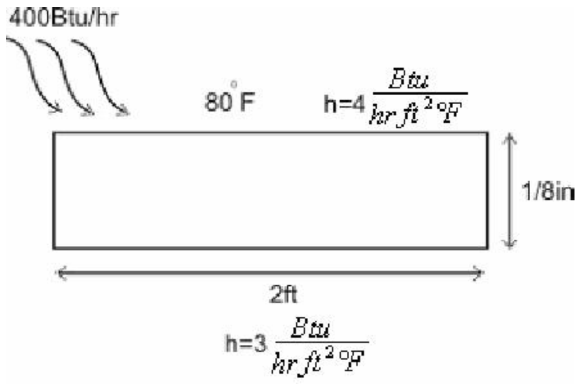
شرایط مرزی

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ -K\dfrac{\partial T_A}{\partial x}\Big|_{x=7.5cm} = hA(T - T_\infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = -\dot{q}/2k\, x^2 + C_1 x + C_2$$

اعمال شرایط مرزی $\Rightarrow T = \dfrac{-\dot{q}}{2k}x^2 + 186^o C \Rightarrow T_o = 186^o C$

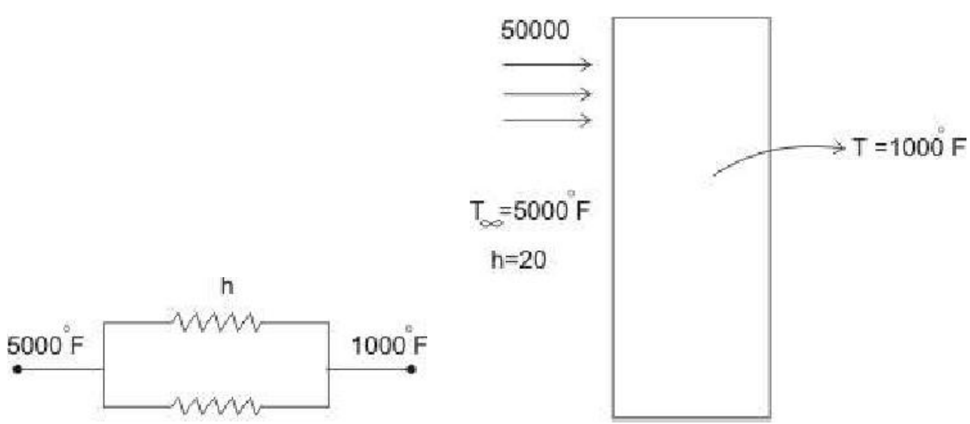
۲.یک صفحه مسی با ضخامت $1/8''$ و طول 2ft و عرضی1ft در معرض هوای 80^oF قراردارد. اگر کل انرژی تابشی خورشید که به صفحه برخورد می کند $400\dfrac{Btu}{hr}$ باشد و ضریب انتقال حرارت جابجائی از بالا و پائین به ترتیب 3,4 $\dfrac{Btu}{hr\ ft^2\ {}^\circ F}$ باشد، مطلوبست دمای تعادل صفحه.



خواسته: دمای تعادل صفحه

$$q_{rad} + q_1 + q_2 = 0$$
$$\rightarrow \dot{q}_{rad} = h_1 A(T-80) + h_2 A(T-80)$$
$$400 = 4(2\times1)\times(T-80) + 3(2\times1)(T-80)$$
$$\rightarrow T_\infty = 108.5$$

۳.جدار داخلی اتاق احتراق یک موتور $50000\frac{Btu}{hr\ ft^2}$ انرژی تابشی از گازها در دمای $5000^{o}F$ دریافت می کند و ضریب انتقال حرارت جابجائی این گاز و دیوار $20\ \frac{Btu}{hr\ ft^2\ °F}$ می باشد. اگر دمای دیوار داخلی $1000^{o}F$ باشد مطلوبست مقاومت معادل این فرایند انتقال حرارت.



$$\overbrace{50000A}^{q_{rad}}+hA(5000-1000)=q$$
$$50000=h_r(5000-1000)$$
$$(h_rA+h_cA)(5000-1000)=q$$
$$\Rightarrow R=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}=\frac{\frac{1}{h_rh_c}}{\frac{1}{h_r}+\frac{1}{h_c}}=\frac{1}{h_r+h_c}$$
$$Q=\underline{(h_c+h_r)}(5000-1000)$$

به معنای موازی بودن است

۴.دو صفحه بزرگ فولادی در دمای $200^{o}F$ و $160^{o}F$ از یکدیگر بوسیلهٔ میله ای فولادی به قطر $1''$ و طول $1\ ft$ جدا شده اند. میله به هر دو صفحه جوش شده است فضای بین صفحات توسط عایق پرشده است. فضای بین صفحات توسط عایق پرشده است عایق سطح جانبی میله را نیز پوشانده است به علت اختلاف ولتاژ بین دو صفحه، جریان الکتریکی در میله ایجاد شده و جریان الکتریکی $40\frac{Btu}{hr}$ حرارت تلف می کند. دمای حداکثر میله و همچنین شار حرارتی در دو انتهای میله را محاسبه کنید.

۵.جهت تعیین هدایت حرارتی یک میلهٔ بلند به قطر $1''$ نیمی از آنرا در داخل کوره ای و نیمهٔ دیگر را در معرض هوای $80^{o}F$ قرار می دهند. پس از ایجاد شرایط دائمی در دو نقطه به فاصلهٔ $3''$ دما به ترتیب $258^{o}F$ و $196^{o}F$ می شود. اگر ضریب انتقال حرارت جابجائی $4\,{Btu}/{hft^{2o}F}$ باشد، مطلوبست محاسبه ضریب هدایت حرارتی میله پره با طول خیلی بد.

۶.دو انتهای یک میله مسی U شکل به قطر $1''$ به دیوار قائمی متصل است. دمای دیوار $200^{o}F$ بوده و طول گسترده میلهٔ U شکل $2ft$ است. دمای هوای محیط $100^{o}F$ است اگر ضریب انتقال حرارت جابجائی $6\frac{Btu}{hrft^{2o}F}$ باشد مطلوبست تعیین دمای نقطه میانی(وسط) میله و انتقال حرارت ازاین میله.

۷.یک صفحه به سطح به ضخامت L دو محیط در دمای T_o,T_i را از هم جدا می کند. ضریب انتقال حرارت در جابجائی برای این دو محیط h_o,h_i می باشد. فرض کنید T_i بزرگتر از T_o باشد. می خواهیم این صفحه با محیطی که در دمای T_i است حرارتی مبادله نکند. بدین منظور بطریق الکتریکی $\dot{q}$ انرژی بطور یکنواخت در صفحه تولید می کنیم مطلوبست $\dot{q}$.

۸.در لحظه ای از زمان توزیع دما در جسمی به صورت تابع زیر می باشد:

$$T(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - xy + 2yz$$

اگرخواص حرارتی جسم ثابت فرض شود و چشمه حرارتی نیز وجود نداشته باشد تعیین کنید در کدام نواحی دما بازمان تغییر حواهد کرد.

فصل سوم: انتقال حرارت دوبعدی

2-D Conduction Heat Transfer

این فصل به بررسی روش‌های موجود برای حل مسائل انتقال حرارت دو بعدی اختصاص یافته‌است. برای این منظور ابتدا روش جداسازی متغیرها (از روش‌های تحلیلی متداول) ارائه شده‌است پس از آن به روش‌های عددی موجود برای حل مسائل انتقال حرارت هدایتی پرداخته‌شده‌است. لازم به یادآوری است که روش‌های ارائه شده در این مبحث تنها مقدمه‌ای بر روشهای عددی و تحلیلی می‌باشند و این مباحث به تفضیل در دوره‌های تحصیلات تکمیلی گرایش تبدیل انرژی ارائه می‌شوند.

الف- روش‌های تحلیلی (روش جداسازی متغیرها)

همچنانکه که پیشتر نیز اشاره شد در این مبحث از میان روش‌های تحلیلی مختلف برای حل معادلات انتقال حرارت هدایتی تنها به ذکر روش جداسازی متغیرها اکتفا خواهیم نمود.

معادلهٔ پاره‌ای مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$a_1(x)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+a_2(x)\frac{\partial T}{\partial x}+a_3(x)T+b_1(y)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+b_2(y)\frac{\partial T}{\partial y}+b_3(y)T=0 \qquad (۱)$$

اگر a, b ها تابع T باشند آنگاه معادلهٔ غیر خطی بوده و با روش جداسازی متغیرها قابل حل نیست.

فرض کنید بتوان جواب معادله فوق را بصورت زیر نوشت:

$$T(x,y)=X(x)Y(y) \qquad (۲)$$

با جایگذاری جواب فوق در معادله داده شده خواهیم داشت:

$$\left[a_1(x)\frac{d^2X}{dx^2}+a_2(x)\frac{dX}{dx}+a_3(x)X\right]\frac{1}{X}+\left[b_1(y)\frac{d^2Y}{dy^2}+b_2(y)\frac{dY}{dy}+b_3(y)Y\right]\frac{1}{Y}=\pm\lambda^2 \qquad (۳)$$

$$a_1(x)\frac{d^2X}{dx^2}+a_2(x)\frac{dX}{dx}+\left[a_3(x)\pm\lambda^2\right]X=0 \qquad (۴)$$

$$b_1(y)\frac{d^2Y}{dy^2}+b_2(y)\frac{dY}{dy}+\left[b_3(y)\mp\lambda^2\right]Y=0 \qquad (۵)$$

هنگامی می‌توان از روش جداسازی متغیرها برای حل تحلیلی مسائل انتقال حرارت دوبعدی استفاده نمود که شرایط زیر برقرار باشند:

۱- یکی از جهات مسئله را بتوان بوسیلهٔ یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن جدا کرد.

۲- جهت دیگر مسئله را بتوان توسط یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن با یک شرط مرزی همگن و یک شرط مرزی غیرهمگن نمایش داد.

توجه: علامت λ^2 طوری باید انتخاب شود تا معادلهٔ دیفرانسیل مرزی (Boundary-Value) جهت همگن منجر به معادلهٔ مقدار مشخصه (Characteristic Value) گردد.

یادآوری۱: یک مسئله مقدار مرزی زمانی مقدار مشخصه است که جواب‌های آن پریودیک باشند. دامنه نوسان‌ها می‌توانند ثابت یا متغییر باشند.

یادآوری۲: یک مسئله مقدار مشخصه جواب‌های غیر بدیهی فقط برای مقادیر مشخصی از یکی از پارامترهای λ بنام Eigen Value دارد.

مسئله مقدار مشخصه (Characteristic Value) زیر شامل یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم همگن را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2u}{dx^2}+f_1(x)\frac{du}{dx}+\left[f_2(x)+\lambda^2 f_3(x)\right]u=0 \qquad (۶)$$

معادله فوق معادله Sturm-Liouville نام دارد. همچنین فرض کنید شرایط مرزی این مسئله همگن باشد. معادله (۶) با استفاده از فاکتور $e^{\int f_1 dx}=p(x)$ بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+\left[q(x)+\lambda^2 w(x)\right]u=0 \qquad (۷)$$

بطوریکه

$$\begin{aligned} q(x)&=f_2 p \\ w(x)&=f_3 p \end{aligned} \qquad (۸)$$

فرض کنید λ_n و λ_m دو مقدار مشخصه مختلف مسئله فوق باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که توابع مشخصه (Characteristic function) φ_n و φ_m مربوط به λ_n و λ_m متعامد هستند و شرایط تعامد را پیدا نماییم.

چون داریم

$$\begin{aligned} u&=\varphi_m(x) \\ u&=\varphi_n(x) \end{aligned} \text{ و} \qquad (۹)$$

که جواب‌های غیر بدیهی معادله (۷) هستند بنابراین می‌نویسیم:

ضرب در φ_n $\qquad \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_m}{dx}\right]+\left[q(x)+\lambda_m{}^2 w\right]\varphi_m=0$

ضرب در $-\varphi_m$ $\qquad \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n}{dx}\right]+\left[q(x)+\lambda_n{}^2 w\right]\varphi_n=0$

با جمع دو عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\varphi_n\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_m}{dx}\right]-\varphi_m\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n}{dx}\right]+\left[\lambda_n^2\lambda_m{}^2\right]\varphi_m\varphi_n w=0 \qquad (۱۰)$$

یا:

$$\left[\lambda_n^2-\lambda_m{}^2\right]\int_a^b\varphi_m\varphi_n w\,dx=\int_a^b\left\{\varphi_n\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_m}{dx}\right]-\varphi_m\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n}{dx}\right]\right\} \qquad (۱۱)$$

با انتگرالگیری جزء به جزء:

$$\left[\lambda_n^2-\lambda_m{}^2\right]\int_a^b \varphi_m\varphi_n w\,dx=\left\{\varphi_n\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_m}{dx}\right]-\varphi_m\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n}{dx}\right]\right\}_a^b \qquad (۱۲)$$

لذا توابع φ_n و φ_m متعامد هستند هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$u(a)=u(b)=0 \qquad (۱۳)$$

یا

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=a}=0,\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=b}=0, \qquad (۱۴)$$

یا

$$\left[\frac{du}{dx}+B\,u\right]_{x=a}=0,\ \left[\frac{du}{dx}+B\,u\right]_{x=b}=0 \qquad (۱۵)$$

اثبات رابطهٔ (۱۵) بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}\varphi_n\varphi_m'-\varphi_m\varphi_n'&=\varphi_n\varphi_m'-\varphi_m\varphi_n'\pm B\,\varphi_m\varphi_n'\\&=\varphi_n\left(\varphi_m'+B\varphi_m\right)-\varphi_m\left(\varphi_n'+B\varphi_n\right)\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

توجه شود که اگر داشته‌باشیم $\varphi(x)=0$ در x=a یا x=b در اینصورت سمت راست معادله (۱۲) حذف می‌شود و نیازی به شرایط مرزی جهت تحقق شرط تعامد نخواهد بود.

توجه: اگر p(a)=p(b) و u(a)=u(b) و $u'(a)=u'(b)$ آنگاه شرط تعامد ارضا می‌شود. به این حالت شرط مرزی پریودیک می‌گویند.

بسط توابع بر حسب سری توابع متعامد

فرض کنید $\varphi_n(x)$ مجموعه‌ای از توابع متعامد نسبت به تابع وزنی w(x) در فاصله (a,b) باشد. آنگاه می‌توان نوشت:

$$f(x)=b_0\varphi_0(x)+b_1\varphi_1(x)+b_2\varphi_2(x)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\varphi_n(x) \qquad (۱۷)$$

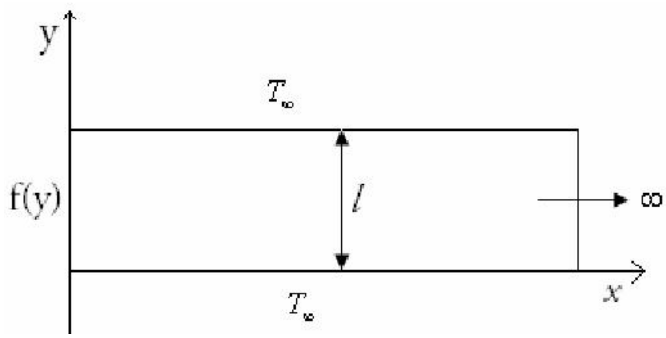
برای محاسبه b_m طرفین رابطه فوق را در $w(x)\varphi_m(x)$ ضرب و در فاصله a تا b انتگرال می‌گیریم:

$$\int_a^b w(x)f(x)\varphi_m(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\int_a^b w(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx \qquad (۱۸)$$

یا:

$$b_n=\frac{\int_a^b w(x)f(x)\varphi_m(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\varphi_n^2(x)\,dx} \qquad (۱۹)$$

مثال: یک پره دوبعدی با طول بی‌نهایت به ضخامت l در نظر بگیرید. دمای پایهٔ پره f(y) می‌باشد و دمای محیط T_∞ است و ضریب انتقال حرارت بسیار بزرگ می‌باشد. دمای حالت پایای پره را بیابید.



معادله حاکم همگن است ولی شرایط مرزی همگن نیستند

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \qquad (۲۰)$$

$$\begin{aligned} &T(0,y)=f(y)\\ &T(\infty,y)=T_\infty\\ &T(x,0)=T_\infty\\ &T(x,l)=T_\infty \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

فرض کنید $\theta=T-T_\infty$ باشد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\nabla^2\theta=0\\ &\theta(0,y)=f(y)-T_\infty\\ &\theta(\infty,y)=0\\ &\theta(x,0)=0\\ &\theta(x,l)=0 \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

اکنون جهت y همگن می‌باشد.

$$\theta=XY\rightarrow\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dx^2}=\pm\lambda^2 \qquad (۲۳)$$

علامت λ^2 باید طوری انتخاب گردد که جهت همگن y به مقدار مشخصه مسئله برسد. انتخاب $\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dx^2}-\lambda^2Y=0$ به توابع هیپربولیک که متعامد نیستند منجر حواهد شد.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dx^2}+\lambda^2Y=0,\ X(x)Y(0)=\theta(x,0)=0\\ &Y(0)=0\\ &X(x)Y(l)=\theta(x,l)=0\\ &Y(l)=0\\ &X(\infty)=0 \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

$$Y=A\cos\lambda y+B\sin\lambda y \qquad (۲۴)$$

$$Y(0)=0\rightarrow A=0 \qquad (۲۵)$$

$$Y(l)=0\Rightarrow B\sin\lambda y=0\Rightarrow\overset{B\neq 0}{\lambda=\frac{m\pi}{l}},m=1,2,... \qquad (۲۶)$$

$$Y = B\sin\frac{m\pi}{l}y \qquad (۲۷)$$

$$X = Ce^{-\lambda x} + De^{\lambda x} \qquad (۲۸)$$

$$X(\infty) = 0 \Rightarrow D = 0 \qquad (۲۹)$$

$$X = Ce^{-\lambda x} \qquad (۳۰)$$

$$\theta = BCe^{-\lambda x}\sin\lambda y \qquad (۳۱)$$

$$\theta = A_n e^{-\lambda_n x}\sin\lambda_n y = A_n e^{-\frac{n\pi}{l}x}\sin\frac{n\pi}{l}y \qquad (۳۲)$$

حال با استفاده از اصل برهم‌نهی خواهیم داشت:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{l}x}\sin\frac{n\pi}{l}y$$

$$\theta(0, y) = f(y) \qquad (۳۳)$$

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}y$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(y)\sin\frac{n\pi}{l}y\,dy,\; A_n = \frac{\int_0^l f(y)\sin\frac{n\pi}{l}y\,dy}{\int_0^l \sin^2\frac{n\pi}{l}y\,dy} \qquad (۳۴)$$

$$\theta = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l f(y)\sin\frac{n\pi\eta}{l}d\eta\right]e^{-\frac{n\pi x}{l}}\sin\frac{n\pi y}{l} \qquad (۳۵)$$

حال اگر $\theta(0, y) = f(y) = \theta_0\ (const.value)$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \theta_0\sin\frac{m\pi}{l}y\,dy = -\frac{2}{l}\frac{l}{m\pi}\theta_0\cos\frac{m\pi}{l}y\Big|_0^l = -\frac{2}{m\pi}(\cos m\pi - 1) \qquad (۳۶)$$

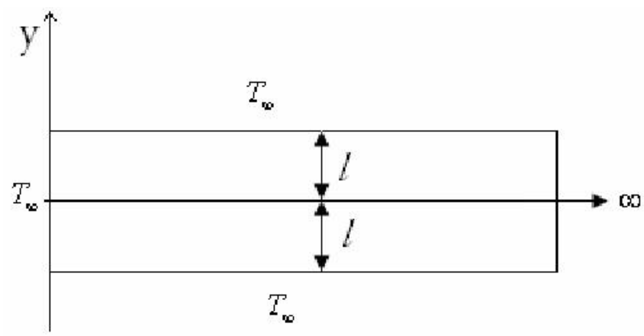
$$n = 2k \Rightarrow A_n = 0$$
$$n = 2k+1 \Rightarrow \cos n\pi = \cos(2k+1)\pi = -1 \quad \forall k = 0,1,2,... \qquad (۳۷)$$

$$A_n = \frac{4}{(2k+1)\pi}\theta_0 \qquad (۳۸)$$

$$\theta(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4\theta_0}{(2k+1)\pi}e^{-(2k+1)\frac{\pi x}{l}}\sin\frac{(2k+1)\pi y}{l} \qquad (۳۹)$$

$$T(x, y) = \theta(x, y) + T_0 \qquad (۴۰)$$

مثال: مسئله مثال قبلی با شرایط مرزی نشان داده‌شده در شکل، با استفاده از شرط تقارن حل نمایید.



$$A_n = \frac{\int_0^l \theta_0 \cos\frac{(2n+1)\pi}{2l} y\, dy}{\int_0^l \cos^2\frac{(2n+1)\pi}{2l} y\, dy} \qquad (۴۱)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \quad \text{یادآوری} \qquad (۴۲)$$

$$\int_0^l \cos^2\frac{(2n+1)\pi}{2l} y\, dy = \frac{1}{2}\int_0^l \left[1+\cos^2\frac{(2n+1)\pi y}{l}\right] dy$$
$$= \frac{1}{2}\left[y+\sin\frac{(2n+1)\pi y}{l}\right]_0^l = \frac{l}{2} \qquad (۴۳)$$

$$\int_0^l \theta_0 \cos\frac{(2n+1)\pi}{2l} y\, dy = \frac{2\theta_0 l}{\pi(2n+1)}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{2l}\Bigg|_0^l$$
$$= \frac{2\theta_0 l}{\pi(2n+1)}\left[\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l} - 0\right] = \frac{2\theta_0 l}{\pi(2n+1)}(-1)^n \qquad (۴۴)$$

$$A_n = \frac{4\theta_0}{\pi(2n+1)}(-1)^n \qquad (۴۵)$$

$$\theta(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\theta_0}{\pi(2n+1)}(-1)^n e^{-\frac{(2n+1)\pi x}{2l}}\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2l} \qquad (۴۶)$$

ب- روش‌های عددی

۱) اختلاف محدودFinite Difference: روش کلاسیک و ساده از نظر برنامه نویسی و در تخمین خطای محاسبات است ولی برای حل مسائل در هندسه های پیچیده محدودیت دارد.

۲) حجم محدود Finite Volume

الف) سازمان یافته Structured

ب) بی‌سازمان Unstructured

۳) اجزاء محدود Finite Element

۴) اجزاء مرزی Boundary Elements

مزایا: یک بعد از مسئله کم میشود.

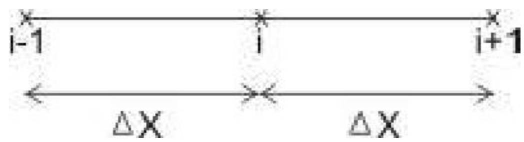
معایب: قابلیت تعمیم به مسائل غیرخطی را درحالت عمومی ندارد.

۵) روش های بدون شبکه Mesh-less Methods به تازگی ارائه شده است تلاش این روش ها اجتناب از تولید شبکه (نقاط) به منظور صرفه جوئی در زمان حل می باشد. البته هنوز مسائل ناشناخته (از نظر دقت و حجم محاسبات) بسیار دارد.

روش اختلاف محدود Finite Difference

معادله حاکم بر انتقال گرما در حالت دائمی بدون چشمهٔ حرارتی در دو بعد به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \tag{۴۷}$$



شکل یک شبکه یکنواخت اختلاف محدود

حال با استفاده از بسط سری تیلور معادله مشتقات مرتبه دوم فوق را بسط می‌دهیم، ابتدا در جهت x داریم:

$$T_{i+1}=T_i+\Delta x\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_i+\frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\ldots$$

$$T_{i-1}=T_i-\Delta x\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_i+\frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ldots$$

$$T_{i+1}-T_{i-1}=2T_i+(\Delta x)^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+(\Delta x)^4\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\times\frac{2}{41}+\ldots \tag{۴۸}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\Delta x^2}\left(T_{i+1}-2T_i+T_{i-1}\right)-\frac{2\Delta x^2}{41}\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{T_{i+1}-2T_i+T_{i-1}}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2)+\ldots$$

$$order 2$$

با صرف نظر کردن از سایر پارامترهای (از مرتبه دوم به بعد) خواهیم داشت:

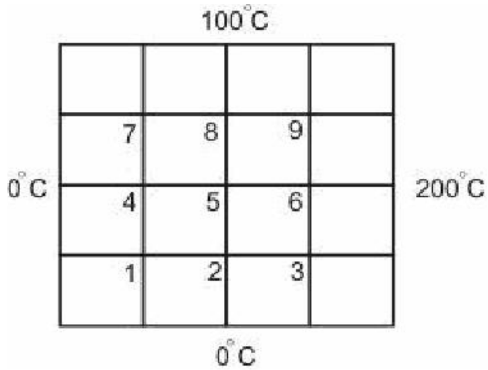
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\cong\frac{T_{i+1}-2T_i+T_{i-1}}{\Delta x^2} \tag{۴۹}$$

به همین ترتیب در جهت y داریم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\cong\frac{T_{j+1}-2T_j+T_{j-1}}{\Delta y^2} \tag{۵۰}$$

* اختلاف مرکزی با سه نقطه مشتق مرتبه دوم را با دقت $(\Delta x)^2$تقریب می زند.

- مثال دمای نقاط شماره گذاری می شود و برای هرگره معادلات بالا نوشته می شود.



برای گره شماره ۱ می‌توان نوشت:

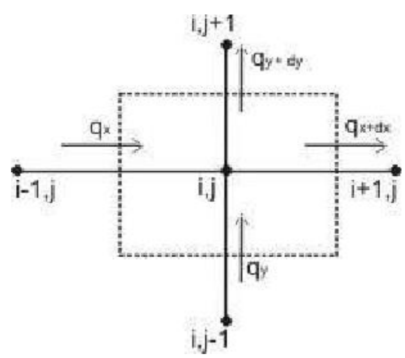
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \qquad (۵۱)$$

$$\frac{T_2-2T_1+0}{(\frac{1}{4})^2}+\frac{T_4-2T_1+0}{(\frac{1}{4})^2}=0 \qquad (۵۲)$$

$$T_2+T_4-4T_1=0 \quad (1) \qquad (۵۳)$$

به همین ترتیب ۸ معادله دیگر نیز به دست می آوریم و ۹ معادله و ۹ نقطه و به همین ترتیب معادلهٔ جبری دمای تمام نقاط بدست می آید و با حل این معادلات جبری دمای تمامی نقاط مسئله بدست خواهدامد.

روش موازنه انرژی: (حالت خاص از روش حجم محدود)

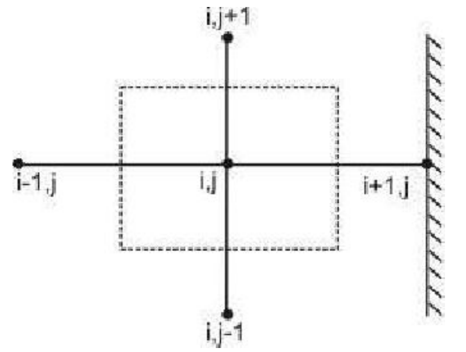


$$q_{dx}=k\frac{T_{i,j}-T_{i,j+1}}{\Delta y}\times\Delta x\times 1 \qquad (۵۴)$$

$$*\rightharpoonup T_{i-1,j}+Tj+T_{i,j-1}+T_{i,j+1}-4T_{i,j}=0$$

بافرض k ثابت و $\Delta x=\Delta y$

مثال: اگر عایق داشته باشیم:

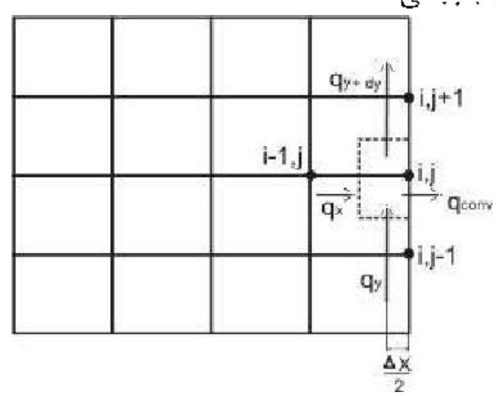


$$q_{x+dx} = 0$$

$$q_x + q_y = q_{x+dx} + q_{y+dy} \qquad (۵۵)$$

$$\Rightarrow T_{i-1,j} + T_{i,j} + T_{i,j+1} - 3T = 0$$

در مرز محدود به سیال در جابجائی:



$$q_x + q_y = q_{y+dy} + q_{conv} \qquad (۵۶)$$

$$\frac{k(T_{i-1,j} - T_{i,j})}{\Delta x}\Delta y + \frac{k(T_{i,j} - T_{i+1,j})}{\Delta y}\frac{\Delta x}{2} = h(T_{i,j} - T_{\infty}) + k\frac{(T_{i,j} - T_{i,j+1})}{\Delta y}\frac{\Delta x}{2} \qquad (۵۷)$$

به طور کلی برای معادلات گره ها می توان یک دستگاه معادله ماتریسی به صورت زیر نوشت:

KT=F

برای حل معادله بالا روش های گوناگونی می باشد:

- روش‌های مستقیم *Direct Methods*: مانند روش *Gauss Elimination*
- روش‌های تکراری *Iterative Methods*: که به عنوان مثال می‌توان روش *Gauss-Seidel* و روش *Jacobi* را نام برد.

مسائل

۱.دمای داخلی و خارجی شیشه پنجره ای به ترتیب $15^{o}C$ و $5^{o}C$ می‌باشد. اگر ضخامت شیشه 5mm و ابعاد آن 1×3 متر باشد مطلوبست اتلاف حرارت از شیشه ضریب هدایت حرارتی شیشه $1.4\, W/m^2K$ است.

۲.هوا در دمای $300^{o}C$ از روی صفحه ای به ابعاد 0.5×0.25 متر جریان دارد اگر ضریب انتقال حرارت جابجائی $250\, W/m^2K$ باشد مطلوبست انتقال حرارت از یکطرف این صفحه دمای صفحه $400^{o}C$ است.

۳.صفحه ای فلزی از یکطرف کاملاً عایق شده است در حالیکه طرف دیگر آن انرژی تشعشعی به شدت $800\, W/m^2$ دریافت می کند. اگر دمای محیط $20^{o}C$ و ضریب انتقال حرارت جابجائی بین صفحه و محیط $12\, W/m^2K$ باشد مطلوبست افت دمای صفحه فلزی.

۴.توزیع دما در دیواری یک بعدی با هدایت حرارتی $50\, W/mK$ و ضخامت 50mm به صورت $T = a + bx^2$ می باشد که a=200^{o}C و $b = -2000\, {}^{c}c/m^2$ و x برحسب m است. مطلوب است تعیین نرخ تولید حرارت در این دیوار و شار حرارتی در دو وجه آن. توزیع دما در شرایط دائمی و مستقل از زمان می باشد.

۵.مطلوبست محاسبه اتلاف حرارت به ازاء واحد سطح از دیوار کوره ای که جدار آن از فولاد به ضخامت 0.5cm و $k = 40\, W/mk$ بوده و جدار خارجی آن آجری به ضخامت $10\, cm$ و $k = 2.5\, W/mk$ می باشد. دمای جدار داخلی 900K و دمای جدار خارجی 460K فرض شود. دمای فصل مشترک فولاد و آجر را نیز محاسبه کنید.

۶.در طراحی مبدل حرارتی یک هواپیما دمای ماکزیمم دمای دیواره نباید از800K تجاوز کند. برای شرایطی که در شکل نشان داده شده است مطلوبست محاسبه مقاومت ماکزیمم مجاز دیوار.

$$T_g = 1300K$$
$$T_c = 300K$$
$$h_g = 200\, W/m^2K$$
$$h_c = 400\, W/m^2K$$

hg= ضریب انتقال حرارت جابجائی گازهای داغ است.

۷. یک لوله از جنس فولاد زنگ با ضریب هدایت حرارتی $19 W/m^{o}c$ به قطر داخلی 2cm و قطر خارجی4cm بوسیلهٔ 3cm لایه عایق آزبست پوشانیده شده است. اگر دمای جدار داخلی 600 oC و دمای جدار خارجی عایق 100 oC باشد مطلوبست انتقال حرارت به ازاء واحد طول لوله.

$$k = 0.2 W/mk \text{ آزبست}$$

۸. دیواری آجری به ضخامت 0.1m و ضریب هدایت حرارتی $0.7 W/mK$ از یکطرف درمعرض باد سرد به دمای 270K و ضریب انتقال حرارت جابجائی $40 W/m^2K$ و از طرف دیگر در معرض هوای سالن به دمای330K و ضریب انتقال حرارت جابجائی $10 W/m^2K$ قرار دارد. مطلوبست اتلاف حرارت از این دیوار به ازاء واحد سطح.

۹. جدار داخلی لولهٔ نازکی به شعاع داخلی r_λ° در دمای Ti قراردارد. اگر این لوله در معرض محیطی به دمای T_∞ و ضریب جابجائی h_∞ قرار داشته باشد مطلوبست تعیین ضخامت عایق بهینه برای این لوله از مقاومت حرارتی لوله صرفنظر کنید و فقط عایق را در نظر بگیرید. نتیجه فوق را برای لوله ای مسی به قطر 10mm و ضخامت عایق0,2,5,10,40mm امتحان کنید. ضریب جابجائی $5 W/m^2K$ و هدایت حرارتی عایق $0.055 W/m^2K$ فرض شود.

۱۰. در استوانه ای توپر (Solid) به شعاع r_i چشمه حرارتی یکنواختی به شدت $\dot{q}$ تولید می شود. اگر این استوانه در معرض محیطی به دمای T_∞ و ضریب جابجائی h_c قرار گرفته باشد ثابت کنید:

$$\frac{T(r)-T_\infty}{T_\infty} = \frac{\dot{q}r_i}{4h_cT_\infty}\left\{2+\frac{h_cr_i}{k}\left[1-\left(\frac{r}{r_i}\right)^2\right]\right\}$$

۱۱. جریان الکتریکی به شدت 700A در کابلی فولادی به قطر 5mm و مقاومت $6\times10^{-4} - K/W$ جریان دارد. این کابل در معرض هوای30^oC و ضریب جابجائی $25 W/m^2K$ قرار دارد. دمای سطح این کابل را محاسبه کنید. از مقاومت حرارتی فولاد صرفنظر کنید.

۱۲. دمای جدار داخلی لوله ای که در آن بخار جریان دارد 300^oC است. قطر داخلی این لوله $5cm$ و ضخامت آن $5.5mm$ است. این لوله توسط دو لایه عایق پوشانده شده است. ضخامت لایه اول $9cm$ و هدایت حرارتی آن $50\,W/m^2K$ و ضخامت لایه دوم $4cm$ و هدایت حرارتی آن $0.35\,W/m^2K$ می باشد. دمای سطح خارجی لوله عایق 30^oC است. اتلاف حرارت به ازاء واحد طول این لوله را محاسبه کنید. هدایت حرارتی لوله $47\,W/m^2K$ فرض شود. هرگاه این لوله در اتاقی در مجاورت هوای 20^oC قرار گرفته باشد، مطلوبست ضریب جابجائی انتقال حرارت بین لوله و هوای اتاق.

۱۳. استوانه ای از جنس فولاد ضدزنگ $(k = 13\,Btu/hft^oF)$ بطول $1'$ و قطر $4''$ جهت انجام عملیات حرارتی از کوره ای به طول 20 ft عبور می دهند. دمای نهائی آن هنگام خروج از کوره 1500^oF است. اگر دمای گازهای داخل کوره 2300^oF و ضریب انتقال حرارت جابجائی $18\,Btu/hrft^{2o}F$ باشد مطلوبست سرعت عبور استوانه از داخل کوره $(\alpha = 0.27\,ft^2/h)$

۱۴. آجری از جنس نسوز $(\alpha = 0.02\,ft^2/hr, h = 0.65)$ در دمای اولیه یکنواخت 100^oF را در معرض گازهای داغ 1200^oF قرار می دهند. ضریب جابجائی $4\,BTu/hrft^{2o}F$ بوده و برای کلیهٔ سطوح آجر یکسان است. مطلوبست دمای مرکز آجر پس از گذشت 20 hr در حالتهای (a) دیوار بی نهایت به ضخامت 2 ft (b) ستون بسیار بلند به سطح مقطع $2'\times2'$ (C) مکعب به ابعاد $2\times2\times2$ که یک وجه آن روی سطح عایقی قرار گرفته است.

۱۵. استوانه ای به قطر $5''$ از جنس آزبست $\rho = 36\frac{1bm}{ft^3}, C_p = 0.25\frac{BTu}{lbm^oF}, h = 0.125\,BTu/hrft^oF$ در دمای اولیه یکنواخت 100^oF را در محیطی به دمای 1200^oF با ضریب جابجائی $4\,BTu/hft^oF$ قرار می دهند. زمان لازم برای آنکه دمای مرکز استوانه به 500^oF برسد را در حالتهای زیر محاسبه

کنید. (a) استوانه خیلی بلند (b) استوانه به ارتفاع ۲ فوت که روی سطحی عایق ایستاده است.

۱۶. یک اتوی خانگی به وزن 3lb و از جنس آلومینیوم بوسیلهٔ المانهای الکتریکی به قدرت 50W گرم می شود. اگر سطح خارجی اتو $0.5ft^2$ دمای هوای محیط 70^oF و ضریب جابجائی $2.0 \, {BTu}/{hft^{2o}F}$ باشد مطلوبست زمان لازم برای آنکه دمای اتو به 220^oF برسد دمای اولیه اتو دمای محیط است.

فصل چهارم: انتــقال حرارت هدایــت–ناپایدار و گــذرا

Unsteady Conduction Heat Transfer

دربسیاری از کاربردهای مهندسی با مسائل انتقال حرارت هدایت ناپایدار و گذرا مواجه می‌شویم. به عنوان مثال انتقال حرارت از دیوارهٔ سیلندر موتورهای احتراق داخلی ازجمله مسائلی است که در آن دمای جداره بازمان تغییر می کند. البته به دلیل تغییرات پریودیک شرایط داخلی سیلندر(دمای هوا یا گاز) شاید بتوان تغییرات دما جدارهٔ داخلی را به صورت تابع معینی از زمان یا با تقریب بیشتر بـه صورت پریودیک فرض کرد. برعکس تغییرات دمای مجموعه سیلندر از زمان روشن شـدن موتورتـا لحظه رسیدن به شرایط دائمی تابع بسیار پیچیده ای از زمان می باشد و پیش بینی دمای جداره و سپس تعیین دمای آب خنک کن یا روغن جهت طراحی سیستم خنک کاری و روغنکاری اهمیـت ویژه ای دارد. مثالهای دیگری می توان برای انتقال حرارت ناپایدار در زندگی روزمره پیدا کرد. مثلاً سرد شدن ناگهانی هوا و تغییرات دمای سطوح زمین با زمان از آن جمله مـی باشـد. همچنـین در مراحل ساخت قطعات از طریق ریخته گری کلیهٔ مراحل سرد شدن و انجمادمذاب در قالب ماسه از جمله مسائل انتقال حرارت ناپایدار یا گذرا می باشد. در متن حاضر منظور از ناپایدار (Unsteady) یعنی دما همواره با زمان متغیر است در حالیکه واژه گذرا(Transient) برای حالتی بکـار مـی رود که دمای جسم پس از گذشت زمان معینی به شرایط دائمی و مستقل از زمان برسد. بـدیهی اسـت که بین دو حالت فوق می توان در حالت ایده آل شرایط پریودیک را نیز مدلسازی کرد.

معادلات حاکم انتقال حرارت هدایت ناپایدار یا گذرا در مختصات متعامـد دکـارتی، اسـتوانه ای یـا کروی و به شرط خطی بودن معادلات دارای حل های تحلیلی می باشد و روشـهای مختلفـی بـرای حل آن پیشنهاد شده است. کتابهـای Ozicik، Myers و یـا Carslaw and Jager حـاوی راه حل های متنوعی برای هندسه های مختلف و شرایط مرزی مختلف می باشد و می توان به صـورت Hand Book توسط دانشجویان کارشناسی بکار رود. درمقاطع تحصیلات تکمیلی کتابهای فوق به صورت کتاب درسی به دانشجویان پیشنهاد می شود تا دانش و تکنیک های ریاضی آنان را تقویـت کند.

معادلات حاکم در هندسه های پیچیده و شرایطی که ضریب انتقال حرارت هدایت، چشمه حرارتـی و سایر خواص فیزیکی به صورت غیرخطی هستند امروزه به کمک روش های عـددی کلاسـیک بـه آسانی حل می شود و بسیاری از نرم افزارهای تجاری مانند ANSYS، NISA و Fluent قابلیت حل این معادلات را دارند.

دراین فصل دانشجویان با روشهای تقریبی ولی بسیار کاربردی حل مـسائل ناپایـدار و همچنـین بـا روشهای حل تحلیلی و نتایج آن آشنا می شوند. ضمناً در انتهای فصل روش عددی اختلاف محدود مورد بحث قرار گرفته و دانشجویان با این روش حل نیز آشنا خواهندشد.

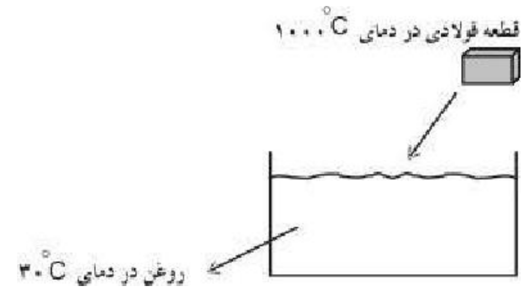
معادلات حاکـــم

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\dot{q}'''/k=1/\alpha\,\frac{\partial T}{\partial \tau} \quad \text{در مختصات کارتزین} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+1/r\,\frac{\partial T}{\partial r}+\dot{q}'''/k=1/\alpha\,\frac{\partial T}{\partial \tau} \quad \text{در مختصات استوانه ای} \qquad (2)$$

$$\alpha=\frac{k}{\rho c}\,Diffusivity\left[\frac{m^2}{s}\right] \qquad (3)$$

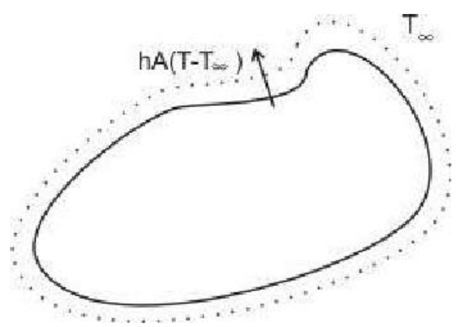
درمعادلات فوق $\dot{q}'''$ چشمهٔ حرارتی، τ زمان، k ضریب انتقال حرارت هدایت و αضریب پخش می باشد.



مثالی برای هدف فیزیکی:

هدف: تعیین مدت زمان سردشدن و نحوهٔ تغییرات دمای قطعه با زمان.

۱. روش ظرفیت انباشته یا ظرفیت فشرده Lumped Capacity System



جسم ناگهان در محیطی به دمای T_∞ قرار می گیرد

جرم مخصوص ρ

گرمای ویژه C

حجم V

سطح جانبی A

دمای اولیه T_o

در سیستم انباشتهٔ فرض می‌شود توزیع دما در جسم یکنواخت و تنها تابعی از زمان باشد. از نظر فیزیکی یعنی مقاومت هدایتی در داخل جسم درمقایسه با مقاومت جابجائی از سیال محیط کمتر باشد. این فرض وقتی مجاز است که شرایط زیر برقرار باشد:

$$\frac{h}{k}(\overbrace{V}^{\text{حجم قطعه}}/\underbrace{A}_{\text{سطح جانبی}}) < 0.1 \qquad (۴)$$

مقدار $\frac{hx}{k}$ به عنوان عدد بی‌بعد بیو (Biot) شناخته می‌شود (x طول مشخصه است) و با علامت Bi نشان داده‌می‌شود به این ترتیب شرط فوق بصورت زیر بیان می‌گردد:

$$Bi = \frac{hx}{k} < 0.1 \qquad (۵)$$

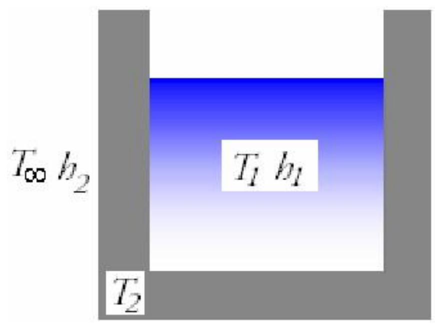
از موازنهٔ انرژی: تغییرات انرژی داخلی- حرارت جابجا شده به محیط

$$\left. hA(T - T_\infty) = -\rho cV \frac{\partial T}{\partial \tau} \right\} \Rightarrow \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} = e^{-(hA/\rho cV)\tau} \qquad (۶)$$

$$\text{شرط اولیه} \begin{cases} \tau = 0 \\ T = T_o \end{cases} \qquad (۷)$$

سیستم انباشتهٔ چندگانه

فرض کنید در داخل ظرف فلزی مایعی قرار دارد، ظرف و مایع درون آن هر دو در دمایی یکسان (متفاوت با دمای محیط اطراف) قرار دارند. حال کل سیستم گفته شده در دمای محیط قرار داده‌می‌شود و دمای سیستم شروع به تعادل با دمای محیط می‌نماید. هدف یافتن دمای ظرف و محتویات آن به عنوان تابعی از زمان است.



معادلات حاکم بصورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} h_1 A_1 (T_1 - T_2) = -\rho_1 C_1 V_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial t} \\ h_1 A_1 (T_2 - T_1) + h_2 A_2 (T_2 - T_\infty) = -\rho_2 C_2 V_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial t} \end{cases} \qquad (۸)$$

با شرایط اولیهٔ:

$$\begin{cases} T_1 = T_2 = T_0 \\ \dfrac{\partial T_1}{\partial t} = 0 \end{cases} \qquad (۹)$$

با نوشتن معادلات به صورت اپراتوری معادلات حاکم به شکل زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{h_1 A_1}{\rho_1 C_1 V_1}+D\right)T_1-\dfrac{h_1 A_1}{\rho_1 C_1 V_1}T_2=0 \\ -\dfrac{h_1 A_1}{\rho_2 C_2 V_2}T_2-\left(\dfrac{h_1 A_1}{\rho_2 C_2 V_2}+\dfrac{h_2 A_2}{\rho_2 C_2 V_2}+D\right)T_2=0 \end{cases} \tag{۱۰}$$

با در نظر گرفتن پارامترهای زیر:

$$K_1=\frac{h_1 A_1}{\rho_1 C_1 V_1}$$
$$K_2=\frac{h_1 A_1}{\rho_2 C_2 V_2} \tag{۱۱}$$
$$K_3=\frac{h_2 A_2}{\rho_2 C_2 V_2}$$

معادلات به فرم زیر ساده‌تر می‌شوند:

$$\begin{cases} (K_1+D)T_1-K_1 T_2=0 \\ -K_2 T_2-(K_2+K_3+D)T_2=0 \end{cases} \tag{۱۲}$$

با حل دستگاه معادلات فوق دمای ظرف و محتویات آن به صورت تابعی از زمان بدست می‌آیند:

$$T_1=T_\infty+Me^{m_1 t}+Ne^{m_2 t} \tag{۱۳}$$

$$T_2=T_1+\frac{T_\infty+Me^{m_1 t}+Ne^{m_2 t}}{K_1} \tag{۱۴}$$

در روابط فوق ثوابت به صورت زیر تعریف شده‌اند:

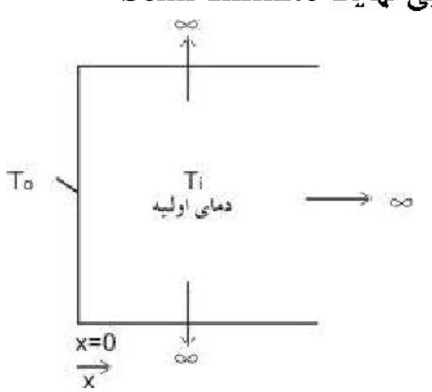
$$m_1=\frac{-(K_1+K_2+K_3)+\sqrt{(K_1+K_2+K_3)^2-4K_1K_3}}{2} \tag{۱۵}$$

$$m_1=\frac{-(K_1+K_2+K_3)-\sqrt{(K_1+K_2+K_3)^2-4K_1K_3}}{2} \tag{۱۶}$$

$$M=\frac{T_0-T_\infty}{m_1-m_2}m_2 \tag{۱۷}$$

$$N=\frac{T_0-T_\infty}{m_1-m_2}m_1 \tag{۱۸}$$

۲. هدایت گذرا درجسم نیمه بی نهایت Semi-Infinite



الف) ناگهان در لحظه $\tau = 0$ دمای سطح به T_o می رسد.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial_{z^2}} + q'''/k = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \qquad (۱۹)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \quad , \quad T(x \text{ و } \tau) = ?\ \text{هدف}$$

$$T(o \text{ و } \tau) = T_o \qquad \tau > 0 \qquad \text{شرط مرزی} \qquad (۲۰)$$

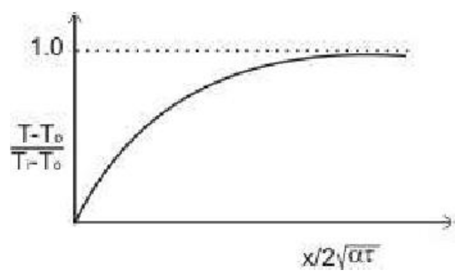
$$T(x \text{ و } o) = T_i \qquad \text{شرط اولیه}$$

به کمک تبدیل لاپلاس

$$\frac{T(x \text{ و } \tau) - T_o}{T_i - T_o} = erf\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} \qquad (۲۱)$$

$$Q = -kA\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=o} = \frac{kA(T_o - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha\tau}}$$

ب) شار حرارتی ثابت: سطح در لحظه $\tau = o$ تحت شار حرارتی ثابتی قرار می گیرد.



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$\begin{cases} T(x \text{ و } o) = T_i \\ -k\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=o} = q_o \end{cases} \qquad \tau > o$$

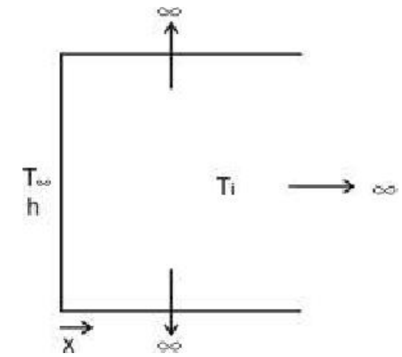
جواب تحلیلی:

$$T - T_i = \frac{2Q_o\sqrt{\alpha\,\tau/\pi}}{kA}\exp(-x^2/4\alpha\tau)$$

$$-\frac{Q_O x}{kA}(1 - erf\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}})$$

$$T - T_i = \frac{2q_o}{k}\sqrt{\alpha\tau/\pi}\,\exp(-x^2/4\alpha\tau) - \frac{q_o x}{k}(1 - erf\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}})$$

ت) جسم نیمه بی نهایت ناگهان در محیطی به دمای T_∞ قرارمی گیرد.



شرط اولیه

$$T(x \text{ و } o) = T_i$$

شرط مرزی:

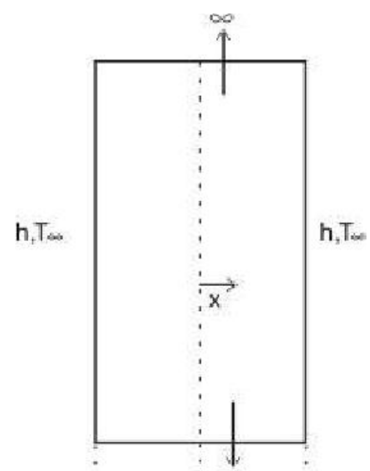
$$hA(T_\infty - T)\big|_{x=o} = -kA\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=o} \quad \tau > o$$

جواب تحلیلی:

$$\frac{T-T_i}{T_\infty - T_i} = 1 - erf\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} - \left[\exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha\tau}{k^2}\right)\right] \times \left[1 - erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} + \frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k}\right)\right]$$

۳. هدایت گذرای یک بعدی در اجسامی مانند صفحه، استوانه و کره که در معرض جابجائی قرار دارند

(a) صفحهٔ بی نهایت



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \text{(a)}$$

$$T(x \text{ و } o) = T_i \quad \tau = o$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=o} = o \qquad \tau > o$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=L} = -\frac{h}{k}(T - T_\infty)\Big|_{x=L} \quad \tau > o$$

حل معادلهٔ (a) به کمک روش Separation of Variables امکان پذیر است. برای حل به کتاب Myers مراجعه کنید.

جواب:

$$T(x \text{ و } \tau) - T_\infty = 2\frac{hL}{k}(T_i - T_\infty)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sin\lambda_n L Cos\lambda_n x}{\lambda_n L(\frac{hL}{k} + \sin^2\lambda_n L)}e^{-(\lambda_n L)^2\frac{\alpha\tau}{L^2}} \qquad \text{(b)}$$

که λ_n از رابطهٔ زیر محاسبه می شود.

عددبیو $\frac{hL}{k} = Biot$ و $\left.\lambda_n L\tan\lambda_n L = \frac{hL}{k}\right\}$

از نظر فیزیکی دو عامل در انتقال حرارت تاثیر دارد. اولی نسبت مقاومت هدایت به مقاومت جابجائی است که با عدد Bi زیر نشان می دهند.

$$Bi = hL/k \qquad (۲۲)$$

دومی میزان نفوذ موج دما در جسم است که با عدد فوریه نشان می دهند.

$$Fo = \alpha\tau/L^2 \qquad (۲۳)$$

$\alpha = \frac{k}{\rho c}$ هر چه α بزرگتر باشد یعنی k بزرگتر است و یا میزان نفوذ دراثر هدایت حرارت بیشتر است. Heisler رابطهٔ (b) را به صورت منحنی هائی رسم کرده است. دراین منحنی ها تانیر اعداد بی بعد B_i و Fo به وضوح دیده می شود. دراین منحنی ها داریم:

$$\theta = T(x \text{ و } \tau) - T_\infty$$

$$\theta_i = T_i - T_\infty \qquad T_i\text{–دمای اولیه} \qquad (۲۴)$$

$$\theta_o = T_o - T_\infty \qquad T_o\text{–دمای مرکز}$$

از منحنی (ت-۱) می توان دمای مرکز صفحه را در زمانهای مختلف و برای شرایط مختلف محاسبه کرد.

اگر دما در نقاط دیگری لازم باشد می توان از منحنی (ت ۲) نسبت $\frac{\theta}{\theta_o}$ را بدست آورد آنگاه به کمک رابطهٔ:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = (\frac{\theta_o}{\theta_i})(\frac{\theta}{\theta_o})$$

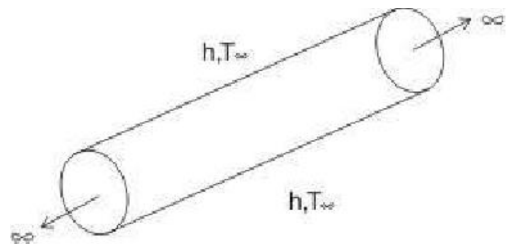
منحنی (ت-۱) منحنی (ت-۲)

دمای θ را محاسبه کنید.

{برای محاسبه حرارت منتقل شده در هر لحظه می توان از منحنی (ت ۳) استفاده کرد}.

$$\begin{cases} Q = \tau \text{ حرارت تلف شده تا لحظه} \\ Q_0 = \rho C V (T_i - T_\infty) \end{cases}$$

(b) استوانه بی نهایت



$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$\left. \begin{aligned} Bi &= \frac{hr_o}{k} \\ Fo &= \alpha\tau / r_o^2 \end{aligned} \right\}$$

$$T(r \text{ و } o) = T_i$$

$$T(0 \text{ و } \tau) = \quad \text{معین}$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=r_o} = h\left[T(r_o \text{ و } \tau) - T_\infty\right]$$

(c) کره

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial r}$$

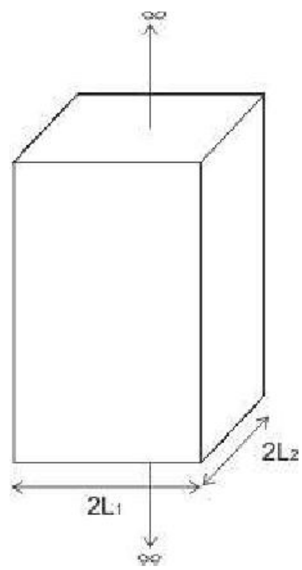
$$T(o \text{ و } \tau) = Finite, T(r \text{ و } o) = T_i, -h\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=ro} = h\left[T(r_o,\tau) - T_\infty\right]$$

$$\left. \begin{aligned} Bi &= \frac{hr_o}{k} \\ F_o &= \alpha\tau / r_o^z \end{aligned} \right\}$$

هنگام استفاده از منحنی‌های Heisler باید توجه شود که این منحنی‌ها برای عدد فوریه بیشتر از ۰/۲ صادق است. در فوریه کمتر از ۰/۲ برای آنکه سری های فوریه همگرا شوند لازم است که جملات بیشتری ازSummation محاسبه شوند که این عمل در منحنی های Heisler انجام نشده است.

(۴) هدایت گذرا در اجسام چند بعدی

(a) میله ای به طول بی نهایت



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \qquad (۲۵)$$

فرض

$$T=T_1(x,\tau)\times T_2(y,\tau) \qquad (۲۶)$$

با جانشین کردن (۲۶) در(۲۵) نتیجه می شود.

$$\frac{1}{T_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \tau}-\alpha\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}\right)=-\left(\frac{\partial T_2}{\partial \tau}-\alpha\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}\right)\frac{1}{T_2} \qquad (۲۷)$$

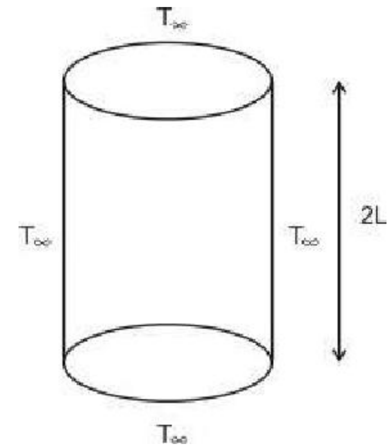
درنتیجه منجر به حل دو مسئله هدایت در صفحات بی نهایت به ضخامت $2L_1$ و $2L_2$ می شود این دو حالت توسط منحنی های Heisler قابل حل هستند لذا می توان نوشت:

$$\frac{T-T_\infty}{T_{\wedge}-T_{\wedge}^{o}}=\left(\frac{T-T_\infty}{T_1-T_\infty}\right)_{2L_1}\times\left(\frac{T-T_\infty}{T_{\wedge}^{o}-T_\infty}\right)_{2L_2} \qquad (۲۸)$$

(b) مکعب به ابعاد $2L_1\times 2L_2\times 2L_3$

$$\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}=\left(\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right)_{2L_1}\times\left(\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}\right)_{2L_2}\times\left(\frac{T-T_\infty}{T_{\lambda}-T_\infty}\right)_{2L_3} \qquad (۲۹)$$

(c) استوانه به طول محدود و معین

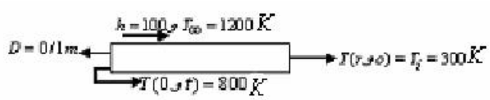


$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$T=T_1(r\ \text{و}\ \tau)\times T_2(z\ \text{و}\ \tau)$$ (۳۰)

$$\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}=\left(\frac{T-T_\infty}{T_\lambda-T_\infty}\right)_{cyl}\times\left(\frac{T-T_\infty}{T_1-T_\infty}\right)_{\text{صفحه}\ 2L}$$

مثال: محورهای فولادی به قطر 0.11 متر در کوره ای گاز سوز بادمای1200K و ضریب جابجائی $100\frac{W}{m^2K}$ قرارداده می شود. اگر دمای اولیه محور 300K باشد چه مدت طول می کشد تا دمای مرکز آن به 800K برسد؟



طبق جدول ضمیمه کتاب:

$$\rho=7832\ \text{و}\ k=51.2$$

$$C=541,\alpha=1.21\times10^{-5}$$

$$Bi=\frac{hr_o/2}{k}=\frac{100\times0/05}{51/2}=\%488$$

⇐ پس می توان از روش انباشته استفاده کرد.

$$\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}=e^{-\frac{hA}{\rho vc}t}=e^{-\frac{4h}{\rho cD}t}$$

$$\ln\left(\frac{800-1200}{300-1300}\right)=-0.811=-\frac{4\times100}{7832\times541\times0.1}t$$

$$\Rightarrow t=860(s)=14:20$$ دقیقه

مثال: میله ای بلند به قطر 40mm از یاقوت کبود ساخته شده(یاقوت کبود همان Al_2O_3 دمای اولیه آن 800K و ناگهان با سیالی با دمای $300K$ و $h=1600\frac{W}{m^2K}$ خنک می شود پس از ۳۵ ثانیه عایقی به دور میله پیچیده می شود. دمای میله پس از زمانی طولانی به چه مقدار می رسد؟

(جدول خواص در انتهای کتاب)

$\alpha = 5.259\times10^{-5}$ و $k = 22.3$ و $c = 1068$ و $\rho = 3970$

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{hr_{to}}{2k} = \frac{1600\times\frac{o/2}{2}}{22/3} = \underbrace{0.72 > 0.1}$$

حرارت تلف شده (از رابطهٔ انرژی)

حرارت تلف شده تازمان ۳۵

$$-Q = \rho cv(\overline{T}(\infty) - T_\infty) - Q_o$$

$$Q_o = \rho cv(T_i - T_\infty) \text{ و}$$

$$\overline{T}(\infty) = T_\infty + (T_i - T_\infty)(1 - Q/Q_o)$$

از نمودار (ت-۶) داریم:

$$Bi = \frac{hr_o}{k} = \frac{1600\times0.02}{22.3} = 1.43$$

$$Bi^2F_o = Bi^2\left(\frac{\alpha t}{r_o^{\ 2}}\right) = 0.95$$

$$Q/Q_o \cong 0.56 \Rightarrow \overline{T} = 300 + (800-300)(1-0.56) = 561K$$

توجه:

$\overline{T}(\alpha)$ دمای میانگین سطح و هسته استوانه در زمان $t = 35_s$ است.

حل عددی معادله انتقال حرارت ناپایدار

حالت یک بعدی

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$
$$T(t=0) = T_i$$
$$T(x=0) = T_1 \qquad (۳۱)$$
$$T(x=1) = T_2$$

روش صریح یا Explicit

$$\frac{1}{\alpha}\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$
$$T_i^{n+1} = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left(T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n\right) + T_i^n \qquad (۳۲)$$

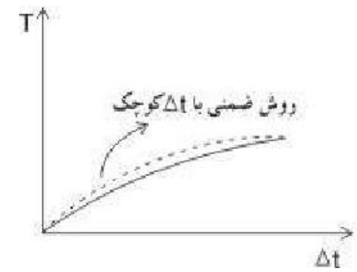
روش ضمنی یا Implicit

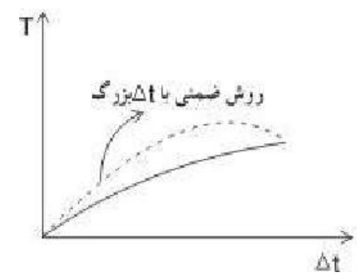
$$\frac{1}{\alpha}\frac{T_i^{n-1} - T_i^n}{\Delta x^2} = \frac{\left(T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}\right)}{\Delta x^2} \qquad (۳۳)$$

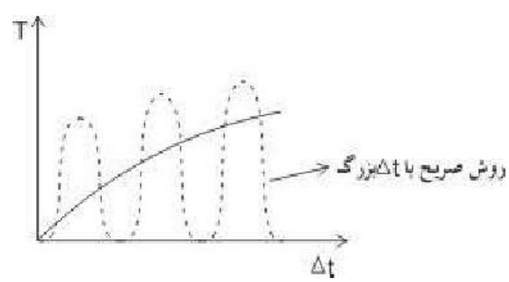
روش ضمنی منجر می شود به دستگاه معادلات ماتریسی که دماها به طور همزمان بدست می آیند و نه نسبت به هم در هر قدم. خطای برش هر دو روش از مرتبه اول زمان و دوم مکان است.

* روش ضمنی پایدار است یعنی اگر خطا وارد محاسبات شود این خطا میرا می شود ولی روش صریح ناپایدار است و اگر خطا وارد شود ممکن است رشد کند. برای پایداری روش صریح باید داشته باشیم:

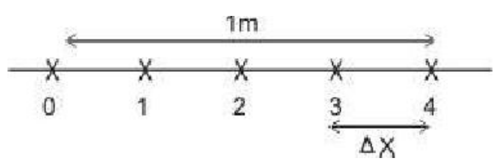
$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2} \qquad (۳۴)$$







مثال:



روش صریح