$$T_i = 0$$
$$T(x=0) = 20$$
$$T(x=1) = 100$$
$$\frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(T_o^n - 2T_1^n + T_2^n\right)$$
$$n = 0 \Rightarrow \frac{T_1^1 - T_i}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(20 - 2xo + o) \Rightarrow T_1^1 \tag{۳۵}$$
$$\frac{T_2^1 - T_2^o}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_3^o - 2T_2^o + T_i^o)$$
$$\frac{T_2^1 - 0}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(0 - 2yo + 0) \rightarrow T_2^1$$

وقتی که دمای هر ۴ نقطه را بدست آوریم شروع به پیدا کردن ترم دوم یا زمان n+1 می کنیم.

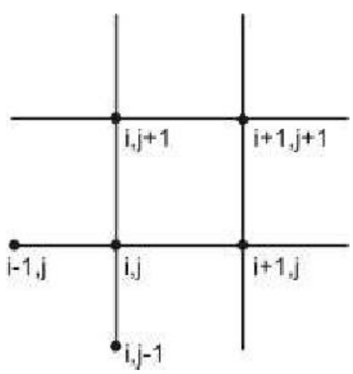
روش ضمنی

$$\frac{T_1^1 - T_1^o}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_o^1 - 2T_1^1 + T_2^1)$$
$$\frac{T_2^1 - T_2^0}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_1^1 - 2T_2^1 + T_3^1) \tag{۳۶}$$
$$\frac{T_3^1 - T_3^0}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_2^1 - 2T_3^1 + T_4^1)$$

با انتخاب Δt و 5x متناسب جواب را از دستگاه معادلات ماتریس بدست می آوریم.

حل عددی معادله انتقال حرارت ناپایدار در دو بعد

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{۳۷}$$

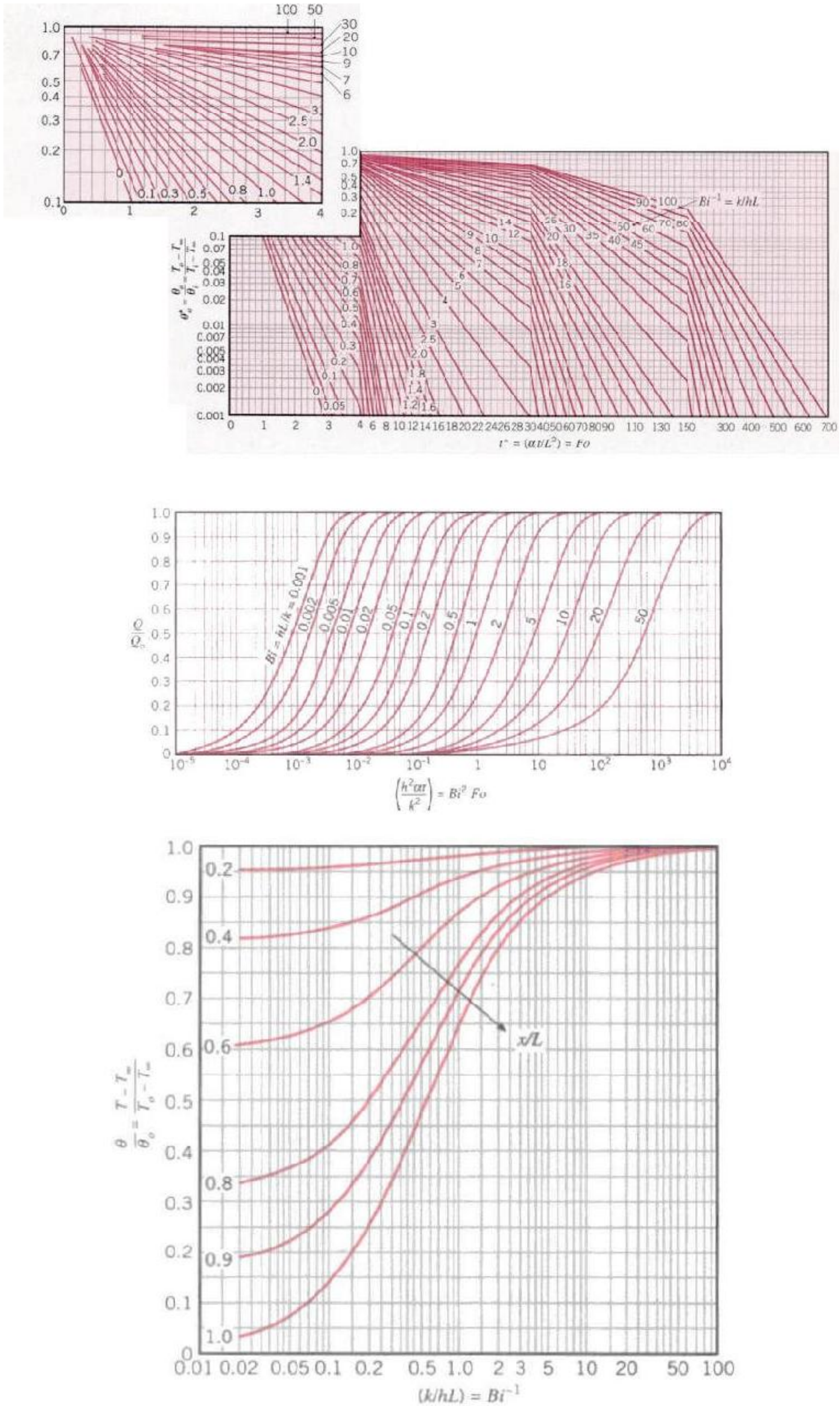


روش صریح:

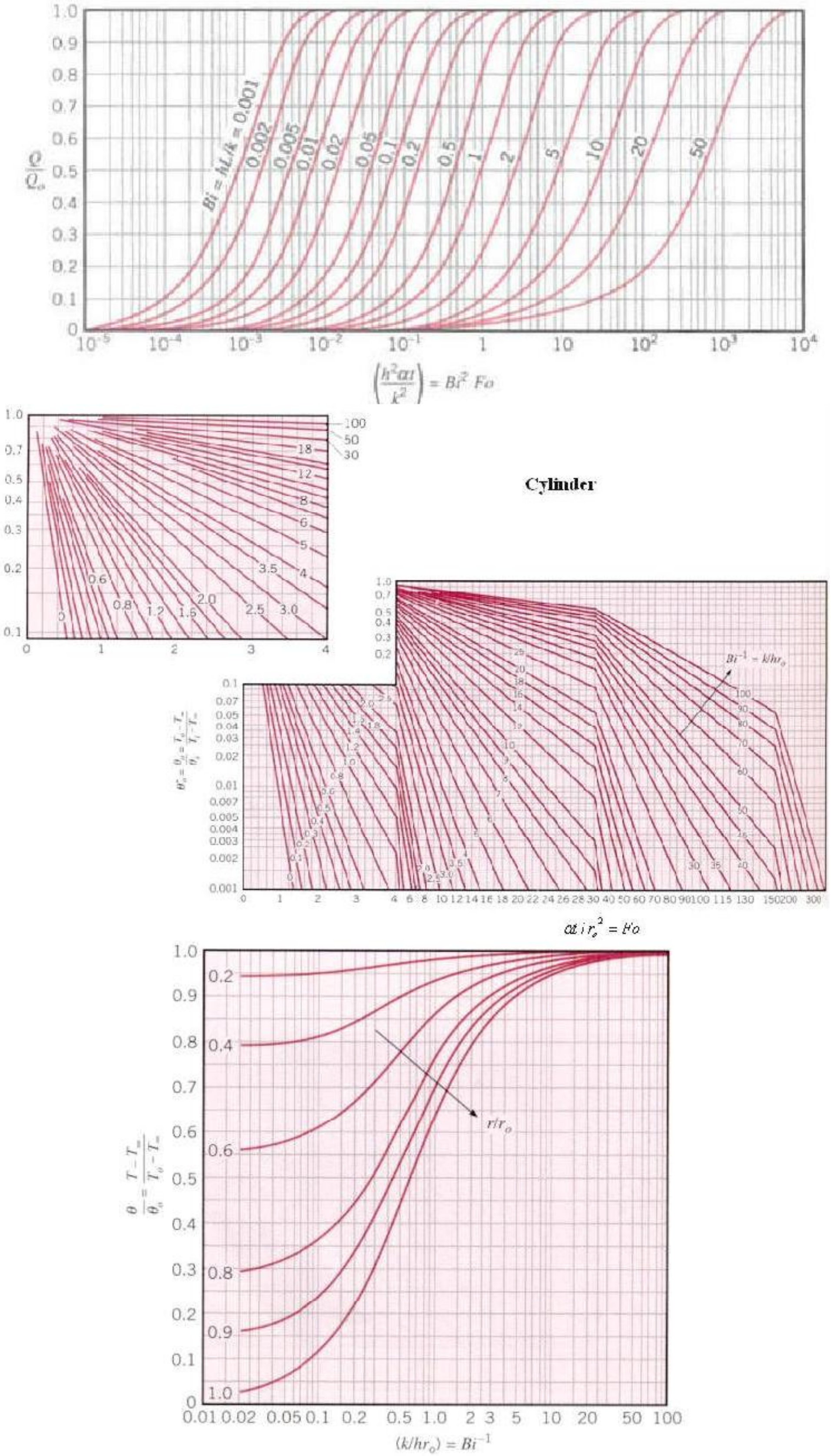
$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n)\frac{\alpha}{\Delta y^2}(T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n) \tag{۳۸}$$

$$\Delta y = \Delta x \text{ و } \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{4} \text{ شرط پایداری} \tag{۳۹}$$

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(T_{i-1,j}^{n+1} - 4T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1} + T_{i+1,j+1}^{n+1}\right) \qquad (۴۰)$$



شکل منحنی‌های هایسلر برای دیوار تخت با ضخامت 2L [۹]



شکل منحنی‌های هایسلر استوانه بی نهایت با شعاع r_0 [۹]

فصل پنجم: انتــقال حرارت جابجــائی (جریان خارجی)

Convection Heat Transfer (External Flow)

رابطه اصلی کاربردی انتقال حرارت از طریق جابجائی بصورت زیر است:

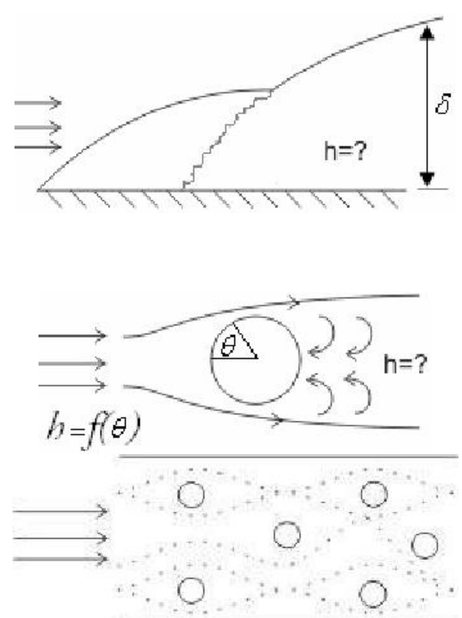
سطوح تبادل حرارت

$$q = hA(T - T_{\infty})$$

ضریب انتقال حرارت جابجائی   دمای سیال به اندازهٔ کافی دور از جداره جسم

این رابطه به قانون **سرمایش نیوتن** نیز معروف است.

در این فصل تمام سعی و تلاش ما پیدا کردن تابع h می باشد.



شکل لایهٔ مرزی هیدرودینامیکی در اطراف یک سطح تخت، در اطراف استوانه و مجموعهٔ لوله‌ها

ضریب نرخ انتقال حرارت جابجایی (h) تابع پیچیده‌ای از محل قرارگیری لوله‌ها، قطر آن‌ها و اعداد بی‌بعد مانند Re و Pr می‌باشد. این مطلب در طول درس بیشتر مورد بحث قرار خواهد گرفت.

- مقایسه با مکانیک جامدات:

به طور کلی در الاستسیته داریم:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} + f_i = 0 \\ \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + f_x = 0 \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + f_y = 0 \end{cases} \qquad (۱)$$

بطوریکه

$$\sigma_{xx,x} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \tag{۲}$$

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$به ترتیب تنش های نرمال در جهت xوy و تنش برشـی هـستند. f_i نیـروی حجمـی مانند جرم است.

درمعادلات فوق برای اکثرحالات کلاسیک Closed Form Solution داریم و معادلات از طریـق روشهای دقیق قابل حل اند.

معادلات حاکم در سیالات غیر قابل تراکم دو بعدی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{۳}$$

ρ جرم مخصوص v,u مولفه های سرعت افقی و قائم، p فشار، μ وسکوزیته دینامیک هستند. این معادلات در حالت کلی جواب بسته ندارند که علت اصلی مشکل حل این معادلات چـه بـه صـورت تحلیلی و چه به صورت روشهای عددی (کامپیوتری) وجود ترمهای غیرخطی یـا بـه عبـارت دیگـر جملات جابجائی است. در حالتهائی که سرعت سیال خیلی ناچیز باشد (جریان سیال بسیارلزج) می توان از جملات جابجائی در مقابل جملات فشار و پخش(Diffusion) صرفنظر کرد. آنگاه معادلات راحت تر حل می شوند و می توان جواب های بسته نیـز بـرای آن پیـدا کـرد. بـدین منظـور طـی صدسال اخیر تلاش قابل توجهی جهت حل این معادلات صرف شده است همچنین بعلت نبود حل تحلیلی جامع، بسیاری از نتایج کاربردی بـه کمـک روش هـای تجربـی بدسـت آمـده و در اختیـار مهندسان قرار گرفته است.

معادله دیفرانسیل انتقال حرارت جابجائی بصورت زیر نوشته می شود.

$$\rho C_p(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}) = k(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \tag{۴}$$

همانطور که ملاحظه می شود برای حل معادله فوق لازم است ابتدا معادلات نـاویر اسـتوکس حـل شوند و میدان سرعت (u,υ) تعیین گردند دراین شرایط هنوز غیر خطی بودن معادلات و ناپایداری جملات جابجائی مشکل زا هستند و جواب های تحلیلی محدود و برعکس جواب های عددی نسبتا نامحدود ولی تقریبی خواهند بود. دراین حالت هنوز اسـتفاده از روش هـای تجربـی جهـت تعیـین ضرایب انتقال حرارت و ضرایب اصطکاک بطور معمول بکـار مـی رود و سـاخت انـواع دسـتگاههای انـدازه گیـری مانـند(Laser Doppler Velocimetry (LDV) یـا (PIV) Particle Image Velocimetry) درک عمیق تر و دقیق تری از پدیده های انتقال حرارت و انتقال ممنتوم بخصوص در جریان های آشفته فراهم ساخته است. به نظر می رسد در آینده نزدیک با تلاش های محققین درحل تحلیلی، عددی و

بکار گیری روش های تجربی بیشتری از پدیده های انتقال درتوربوماشین ها و سایر دستگاههای حرارتی - برودتی فراهم می یابد.

روش های تحلیلی

تحلیل ابعادی معادلات لایهٔ مرزی

The Laminar Boundary Layer Equations Using Scaling Principle

جریان سیال تراکم ناپذیر از روی یک صفحهٔ تخت به طول L را در نظر بگیرید. حال معادلهٔ لایهٔ مرزی را با استفاده از تحلیل ابعادی مورد مطالعه قرار می‌دهیم و تغییرات سرعت از u=0 تا $u=U_\infty$ و تغییرات دما را از $T=T_o$ تا $T=T_\infty$ در نظر می‌گیریم. در فاصلهٔ x از لبهٔ حمله ضخامت لایهٔ مرزی δ است (δ *ضخامت لایهٔ مرزی* به عنوان اندازه‌ای است که در آن سرعت از صفر تا U_∞ تغییر می‌کند). در ناحیه به اندازهٔ کافی دور از صفحه سرعت U_∞، دما T_∞، سرعت در جهت y صفر و فشار P_∞ است. در نتیجه در ناحیهٔ نزدیک به لایهٔ مرزی (در ناحیه‌ای با ارتفاع δ از صفحه و طول L) ابعاد (Scale) زیر برای تغییرات x,y در نظر گرفته می‌شود:

$$x \sim L,\ y \sim \delta,\ u \sim U_\infty, \qquad (۵)$$

به دانشجویان توصیه می‌شود قبل از مطالعهٔ این بخش مباحث مربوط به مکانیک سیالات ۱ و ۲ مرور نمایند.

فرض می‌کنیم که مولفه‌های سرعت با U و گرادیان‌های سرعت با U/L متناسب باشند. هرگاه از تغییرات فشار صرف نظر نماییم (در مورد صفحهٔ تخت فرض درستی است) آنگاه معادلهٔ مومنتم در جهت x بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\frac{U}{L}+\frac{U.U}{L} \sim \upsilon \frac{U}{L^2} \qquad (۶)$$

$$\frac{UL}{\upsilon} \sim 1 \qquad (۷)$$

$$\mathrm{Re}_L \sim 1 \qquad (۸)$$

نتیجه:

برای آنکه جمله پخش $\upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ با جمله جابجایی هم مرتبه باشد لازم است که مرتبهٔ بزرگی عدد Re حدود 1 باشد. بنابراین برای آنکه جملات برای Reهای بالا نیز هم مرتبه باشند. لازم است که طول مشخصه در جهت عمود بر جریان با δ ضخامت لایهٔ مرزی متناسب باشد، آنگاه می‌توان نتایج ذیل را گرفت

پیوستگی Continuity

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{U}{L} \approx \frac{v}{\delta} \qquad (۹)$$

$$\rightarrow v \sim \frac{U\delta}{L} \qquad (۱۰)$$

مومنتم در جهت x

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{dx}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$U.\frac{U}{L}+\frac{\delta}{L}U.\frac{U}{\delta}=-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}+\upsilon\left(\frac{U}{L^2}+\frac{U}{\delta^2}\right)$$

$$\frac{U^2}{L}+\frac{U^2}{L}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\upsilon U}{\delta^2}\Big(\underbrace{\frac{\delta^2}{L^2}}_{<<1}+1\Big) \qquad (۱۱)$$

$$\frac{\upsilon U}{\delta^2}\sim\frac{\upsilon U}{L^2/\mathrm{Re}_L}\cong\frac{\upsilon U}{L^2}\mathrm{Re}_L=\frac{\upsilon U}{L^2}.\frac{UL}{\upsilon}=\frac{U^2}{L}$$

یا برعکس اگر $\frac{\partial P}{\partial x}\sim o$ آنگاه مرتبه بزرگی پخش و جابجائی باید برابر باشند

$$\frac{U^2}{L}\sim\frac{\upsilon U}{\delta^2}\rightarrow \delta/L\sim 1/\sqrt{\mathrm{Re}_L} \qquad (۱۲)$$

مومنتم در جهت y

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$U.\frac{U\delta}{L^2}+\frac{U\delta}{L}.\frac{U\delta}{L\delta}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{U\delta^2}{L}\left(\frac{U\delta}{L.L^2}+\frac{U\delta}{L\delta^2}\right) \qquad (۱۳)$$

$$\frac{U^2\delta}{L^2}+\frac{U^2\delta}{L^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{U^2\delta}{L^2}\Big(\underbrace{\frac{\delta^2}{L}}_{<<1}+1\Big)$$

پس

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\sim\frac{U^2\delta}{L^2} \qquad (۱۴)$$

شکل

$$P-P_\delta\sim\int_o^\delta\rho\frac{U^2\delta}{L^2}dy\rightarrow P\sim P_\delta+\rho\frac{U^2\delta^2}{L^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}\sim\frac{\partial P_\delta}{\partial x}+O\left[\rho\frac{U^2\delta^2}{L^3}\right]\sim\frac{\partial p_\delta}{\partial_x}+O\left[\frac{\rho U^2}{L}.\frac{\delta^2}{L^2}\right] \qquad (۱۵)$$

ولی

$$\frac{\partial P_\delta}{\partial x}=\frac{dP_\delta}{dx}\quad (P_\delta\ \textit{is independent of}\ \ y,\ \textit{Flow is inviscid})$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}\sim\frac{dP_\delta}{dx}+0\left[\frac{\rho U^2}{L}.\frac{\delta^2}{L^2}\right] \qquad (۱۶)$$

با استفاده از نتایج بدست آمدهٔ فوق در معادلهٔ مومنتم در جهت x:

$$\frac{U^2}{L}+\frac{U^2}{L}\sim-\frac{1}{\rho}\frac{dP_\delta}{dx}-\frac{1}{\rho}\left(\rho\frac{U^2}{L}.\frac{\delta^2}{L^2}\right)+\upsilon\frac{U}{\partial^2}$$

$$\frac{U^2}{L}\sim-\frac{1}{\rho}\frac{dP_\delta}{dx}-\frac{U^2}{L}\left[(\underbrace{\frac{\delta}{L}}_{<<1})^2\right]+\frac{\upsilon U}{\delta^2} \quad (۱۷)$$

بنابرین معادله مومنتم در جهت x

$$\rho U_\infty\frac{dU_\infty}{dx}+\frac{dP}{dx}=o \quad (۱۸)$$

بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U_\infty\frac{dU_\infty}{dx}+\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (۱۹)$$

مقایسه

$$\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}\sim o(\rho\frac{U^2}{L})$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\sim o(\rho\frac{U^2\delta}{L^2}) \quad (۲۰)$$

$$\frac{dP/\partial y}{\partial P/\partial x}\sim o(\frac{U^2\delta/L^2}{U^2/L})\sim o(\frac{\delta}{L})<<1$$

یا

$$\frac{\partial P}{\partial y}<<\frac{\partial P}{\partial x} \quad (۲۱)$$

ممنتوم در جهت Y

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0 \quad (۲۲)$$

معادلهٔ انرژی Energy Equation

$$\rho C_p(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y})=k(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2})+\beta T(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y})+\underset{\equiv}{\varphi} \quad (۲۳)$$

اکنون به بررسی مرتبهٔ بزرگی جملات می‌پردازیم:

$$\rho C_p T(\frac{U}{L}+\frac{\delta U}{L\delta})\sim kT(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{\delta^2})+\beta T(U_o\rho\frac{U_o^2}{L}+\frac{\delta U}{L}\rho\frac{\delta}{L^2}U^2+\varphi \quad (۲۴)$$

فرض می‌کنیم ضخامت لایهٔ مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی هم مرتبه باشند (در بخش بعدی در این مورد بیشتر توضیح داده می‌شود) داریم:

$$\frac{U}{L}+\frac{U}{L}\sim\frac{k}{\rho c_p}(\underset{<<1}{\frac{1}{L^2}}+\frac{1}{\delta^2})+\frac{\beta}{C_p}\frac{U^3}{L}(1+\underset{<<1}{\frac{\delta^2}{L^2}})+\varphi/\rho C_P T \quad (۲۵)$$

$$\varphi=\mu\left[2(\frac{\partial u}{\partial x})^2+2(\frac{\partial v}{\partial y})^2+\right]+\mu(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})^2 \qquad (۲۶)$$

$$\varphi\sim\mu\left[\left(\frac{U}{L}\right)^2+\left(\frac{\delta}{L}\frac{U}{\delta}\right)^2\right]+\mu(\frac{U}{\delta}+\frac{U\delta}{L^2})^2$$

$$\sim\mu\left[\frac{U^2}{L^2}+\frac{U^2}{\delta^2}+\frac{U^2\delta^2}{L^4}+2\frac{U^2}{L^2}\right]\sim\mu\frac{U^2}{\delta^2}$$

$$\mu\frac{U^2}{\delta^2}=\rho\upsilon\frac{U^2}{\delta^2}\sim\rho\frac{\upsilon U^2}{\upsilon L/U}\sim\frac{\rho U^3}{L}$$

درنتیجه:

$$\rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\beta Tu\underset{(b)}{\frac{\partial P}{\partial x}}+\mu\underset{(a)}{(\frac{\partial u}{\partial y})^2} \qquad (۲۷)$$

در عبارت فوق از ترم a صرف نظر می‌کنیم وقتی که داشته‌باشیم:

$$\frac{\varphi}{Inertia}\sim\frac{\rho u^3/L}{\rho C_p T\,U/L}=\frac{U^2}{C_p T}\quad if\;\; Ec=\frac{U^2}{C_p T}<<1 \qquad (۲۸)$$

ترم (a) زمانی قابل صرف نظر کردن است که Ec<<1 باشد در مورد ترم (b) می‌توان نوشت:

$$\frac{\varphi}{pressureterm}\sim\frac{\rho U^3/L}{\rho\beta T\;\; U^3/L}=\frac{1}{\beta T} \qquad (۲۹)$$

برای گاز ایده‌آل

$$\frac{1}{\beta T}\sim o(1),\beta=-\frac{1}{\rho}(\frac{\partial\rho}{\partial T})_p=-\frac{1}{T} \qquad (۳۰)$$

برای مایعات (مانند آب)

$$\beta T\sim 0.05\rightarrow\varphi>>pressureterm \qquad (۴۰)$$

به هر حال چنانچه از φ صرف نظر کنیم ترم فشار نیز صرف نظر خواهد شد. که در اینصورت معادلهٔ انرژی بصورت زیر ساده می‌شود:

$$\rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (۴۱)$$

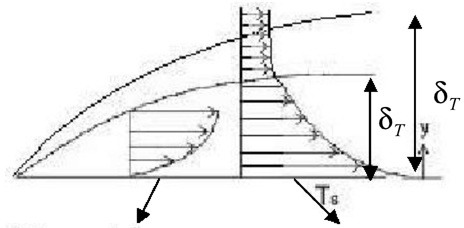
فرضیه لایه مرزی Thermal Boundary Layer Assumption

$$q=hA(T_S-T_\infty)$$

در این رابطه T_s دمای سطح، T_∞ دمای سیال به اندازهٔ کافی دور از جسم می‌باشد همانگونه که قبلا نیز اشاره شد در نزدیکی جسم انتقال حرارت تنها از طریق هدایت انجام می‌گیرد، بنابراین:

$$q=-kA\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

ضریب هدایت حرارت سیال



شکل لایهٔ مرزی بر روی یک سطح تخت

با ترکیب دو معادلهٔ فوق خواهیم داشت:

$$h = \frac{-k\left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{T_S - T_\infty}$$

برای محاسبه h باید معلوم کنیم $\frac{\partial T}{\partial y} = ?$

یا $T = f(y) = ?$

h: ضریب انتقال حرارت جابجائی موضعی: $\frac{W}{m^2 \text{°}C}$ Local Heat Transfer Coefficient

و $\bar{h}$ ضریب انتقال حرارت متوسط است که برای صفحه تخت بصورت زیر تعریف می شود:

$$\bar{h} = \frac{\int_o^x h dA}{\int_o^x dA} = \frac{\int_o^x h \times (1) \times dx}{\int_o^x (1) \times dx}$$ برای صفحه تخت به عرض واحد

مثال: اگر ضریب انتقال حرارت جابجائی موضعی به صورت زیر باشد $\bar{h}$ را محاسبه نمائید.

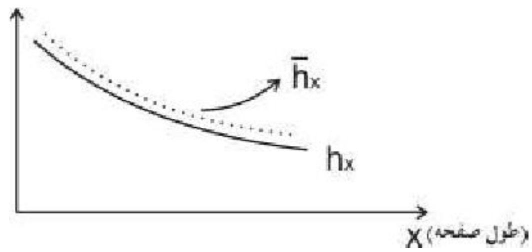
$$h_x(x) = ax^{0.1}$$

$$\bar{h}_x = \frac{1}{x}\int_o^x h_x(x) dx \;\; \rightarrow h_x(x) = ax^{0.1}$$

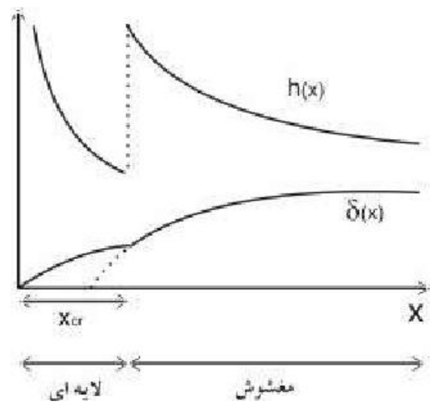
$$\Rightarrow \bar{h}(x) = \frac{1}{x}\int_o^x ax^{0.1}\, dx = \frac{a}{x}\int_o^x x^{0.1} dx = 1/1ax^{0.1}$$

$$\Rightarrow \bar{h}(x) = 1.1 h_x$$

ملاحظه می شود که تغییرات h_x و $\bar{h}_x$ به صورت زیر خواهد بود.



- مقایسه تغییرات لایه مرزی سرعت و ضریب انتقال حرارت جابجائی در طول یک صفحه:



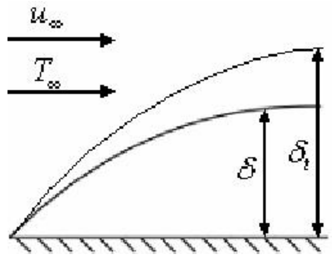
معادلات لایه مرزی وتشابه رینولدز- کولبورن (Colburn-Reynolds Analogy)

در بخش‌های قبلی معادلات لایهٔ مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی را بدست آوردیم، ملاحظه می‌کنید که حل این معادلات نسبتا آسان‌تر از حل معادلات کامل ناویر- استوکس است. بنابراین می‌توان در شرایط خاص حل بسته (Closed Form) نیز بدست آورد. برای مثال حل بلاوزیوس Blasius یکی از روش‌های کلاسیک در این مورد است که با فرض تشابه توزیع سرعت نسبت به متغییر تشابهی y/δ می‌توان معادلات دیفرانسیل مشتقات جزیی لایهٔ‌مرزی را بصورت معادلهٔ دیفرانسیل معمولی نوشت و براحتی حل نمود. البته در این جزوه حل تشابهی بلاوزیوس مورد بحث قرار نخواهد گرفت.

روش دیگری که برای تعیین ضریب اصطکاک و ضریب انتقال حرارت بکار می‌رود روش فون-کارمن Von-Karman است که بصورت انتگرال‌گیری از معادلات در فاصلهٔ $y=0$ تا $y=\delta$ و فرض توزیع چند جمله‌ای برای سرعت و دما می‌باشد. خواننده می‌تواند با مراجعه به کتب سیالات یا انتقال حرارت روش‌های ریاضی فوق‌الذکر را مورد مطالعه قرار دهد.

یکی از نکات جالب توجه در مبحث انتقال حرارت جابجایی تشابه بین دو مکانیزم انتقال مومنتم و انتقال حرارت می‌باشد. به عبارت دیگر همانگونه که از نظر فیزیکی و درک شهودی می‌توان انتقال

مومنتم و انتقال حرارت را در جریان آرام و متلاطم بطور مشابه تفسیر کرد از نظر ریاضی نیز معادلات مشابه هم برای دو نوع انتقال بدست می‌آیند.



شکل لایه مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad (۴۲)$$

فرض: $\frac{\partial p}{\partial x}=0$، در مورد صفحهٔ تخت فرض درستی است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cong\frac{V^2}{\delta^2}>>\frac{V^2}{L^2}\cong\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0 \quad (۴۳)$$

معادله لایه مرزی هیدرودینامیکی:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (۴۴)$$

معادله لایه مرزی حرارتی:

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{k}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (۴۵)$$

ابتدا معادلات را بی بعد می کنیم خواهیم داشت:

$$U^*=\frac{U}{V} \qquad T^*=\frac{T-T_\infty}{T_S-T_\infty} \qquad y^*=y/l$$
$$V^*=\frac{v}{V} \qquad P^*=\frac{P}{\rho V^2} \qquad x^*=\frac{x}{l} \quad (۴۶)$$

معادلهٔ بی بعد شده حاصل می شود:

$$u^*\frac{\partial T^*}{\partial x}+v^*\frac{\partial T^*}{\partial y}=\Pr\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (۴۷)$$

$\Pr=\frac{\nu}{\alpha}$ عدد پرانتل (۴۸)

عدد پرانتل از نظر فیزیکی نسبت پخش مومنتم υ به پخش حرارت می‌باشد. هرگاه Pr=1 باشد در آنصورت بدیهی است که ضخامت لایهٔ مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی برابر خواهندشد. البته از نظر ریاضی با حل تشابهی یا انتگرالی می‌توان نشان داد که $\frac{\delta}{\delta_t}=\Pr^{\frac{1}{3}}$ اکنون با توجه به معادلهٔ (۴۴) و (۴۷) می‌توان توابع زیر را برای توزیع سرعت و دما فرض کرد:

$$U^* = f_1(x^*, y^* \text{و} \mathrm{Re})$$
$$T^* = f_2(x^* \text{و} y^* \text{و} \mathrm{Re} \text{و} \mathrm{Pr}) \qquad (۴۹)$$

از تعریف تنش برشی داریم:

$$\tau\Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial u^* V}{\rho \partial y^*} = \frac{\mu V}{L} f_3(x^* \text{و} \mathrm{Re})$$
$$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{\mu V}{\frac{1}{2}\rho V^2 L} f_3(x^* \text{و} \mathrm{Re}) \qquad (۵۰)$$
$$\frac{C_f}{2} = \frac{1}{\mathrm{Re}} f_3(x^* \text{و} y^* \text{و} \mathrm{Re})$$

طبق تعریف شار حرارتی عبارتست از:

$$q\Big|_{y=0} = -k \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{-k(T_s - T_\infty)}{L} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \qquad (۵۱)$$

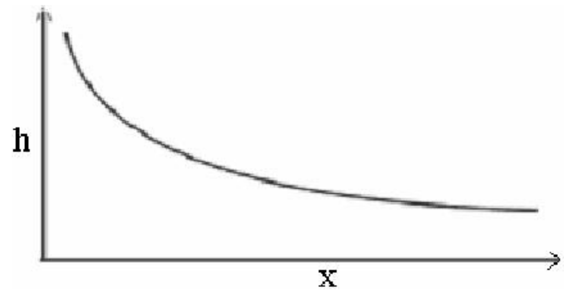
$$h = \frac{q}{T_s - T_\infty} = \frac{-k(T_\infty - T_s)}{L(T_s - T_\infty)} f_4(x^* \text{و} \mathrm{Re} \text{و} \mathrm{Pr}) \qquad (۵۲)$$

عدد بی‌بعد ناسلت بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$Nu = \frac{hL}{K} = f_4(x^*, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}) \qquad (۵۳)$$

اکنون ملاحظه می‌گردد که هرگاه عدد Pr=1 باشد آنگاه بـدلیل تـشابه معـادلات ۴۴ و ۴۷ شـکل توابع f_3 و f_4 نیز مشابه خواهدبود. در نتیجه ضریب اصطکاک و ضریب انتقال حرارت مشابه خواهند بود. عدد بی بعد استانتون را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$St = \frac{Nu}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} = \frac{h}{\rho V C_P} \rightarrow \frac{C_f}{2} \qquad (۵۴)$$



شکل توزیع ضریب انتقال حرارت بر روی سطح تخت

رابطهٔ (۵۳) اهمیت ویژه‌ای دارد و بیانگر آنست که برای بدست آوردن ضریب انتقـال حـرارت جابجایی از روش تجربی یا تئوری به جای هفت پارامتر اصلی ($h, k, C_p, \rho, \mu, L, U_\infty$) تنهـا از سه گروه بی‌بعد Pr, Nu و Re می‌توان استفاده نمود.

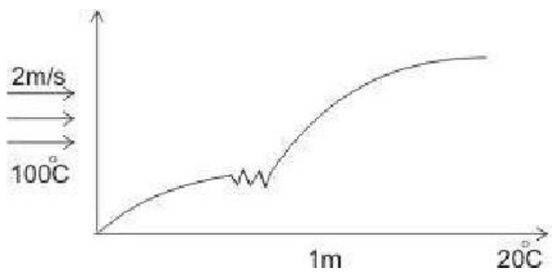
اهمیت رابطهٔ (۵۴):

رابطهٔ (۵۴) تشابه رینولدز نام دارد. توجه دارید که رابطه بین میدان سرعت و انتقال حرارت رابطه برقرار می‌نماید. البته این رابطه در شرایط Pr=1 و $\frac{\partial P}{\partial x}=0$ بدست آمده‌است، با این وجود می‌توان نشان داد از این رابطه می‌توان برای طیف وسیعی از اعداد Pr می‌توان استفاده نمود [۹] و در نهایت رابطه بصورت زیر کامل می‌شود:

$$\frac{C_f}{2} = St \, \Pr^{\frac{2}{3}} \qquad 0.6 < \Pr < 60 \qquad (۵۵)$$

نکته: در جریان آشفته روی صفحهٔ تخت گرادیان فشار نقش کمتری دارد و معادلهٔ (۵۵) در این حالت نیز بصورت تقریبی صادق خواهد بود.

مثال: در شکل روبرو h_x و $\overline{h}_x$ و q را به دست آورید.



$$\mathrm{Re}_x = \frac{\rho V x}{\mu} < 5\times10^5$$

از جدول صفحهٔ ۸۲ داریم:

$$0.332\,\mathrm{Re}^{1/2}\,\Pr^{1/3} = Nu_x$$

$$Nu_x = \frac{h_x L}{k}\,\frac{\text{معلوم}}{\text{معلوم}}\,h_x \rightarrow \text{برای هر x معلوم}$$

$$q = \overline{h}(T_\infty - T_S)$$

$$h_x = 0.664\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\Pr^{1/3}$$

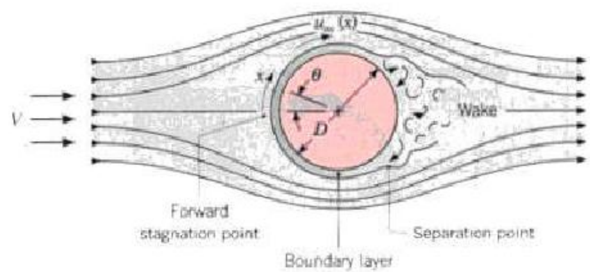
$$\Rightarrow q = h_x(T_\infty - T_s) = h_x(100-20)$$

به ازاء واحد سطح

جریان از روی هندسه‌های مختلف

برای جریان سیال از روی هندسه‌های مختلف باید از فرمول‌های تجربی پیشنهاد شده توسط محققان مختلف سود جست. برای مثال برای استوانه Nu برحسب رینولدز تعریف می شود. در زیر رابطه تجربی هلیپرت را برای جریان از روی استوانه ارائه شده‌است.

$$\begin{cases} Nu = \dfrac{hD}{k} \\ \mathrm{Re} = \dfrac{\rho VD}{\mu} \end{cases} \tag{۱۷}$$



شکل جریان از روی استوانه [۹]

رابطه تجربی هلیپرت

تمام خواص در دمای → $\overline{Nu}_D = \dfrac{\bar{h}D}{K} = C\,\mathrm{Re}_D^m \mathrm{Pr}^{1/3}$ فیلم سیال است.

جدول مقادیر رابطه هیلبرت برای مقطع دایروی به ازای اعداد مختلف رینولدز

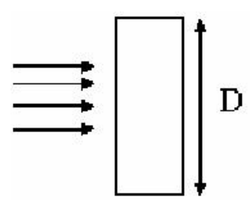
Re_D	c	m
0.4-4	0.989	0.330
4-40	0.911	0.385
40-4000	0.683	0.465
4000-40000	0.193	0.618
40000-4×10^5	0.027	0.805

توجه شود که اعداد ارائه شده در جدول فوق تنها برای جریان از روی استوانه‌های با مقطع دایره‌ای صادق است و برای هندسه‌های مختلف (مقطع شش‌ضلعی، مثلثی و ...) باید از جداول ویژهٔ این مقاطع استفاده نمود.

جدول مقادیر عدد هیلبرت برای مقاطع مختلف

Geometry	Re_D	C	m
Square			
$V \to$ (D)	5×10^3–10^5	0.246	0.588
$V \to$ (D)	5×10^3–10^5	0.102	0.675
Hexagon			
$V \to$ (D)	5×10^3–1.95×10^4	0.160	0.638
	1.95×10^4–10^5	0.0385	0.782
$V \to$ (D)	5×10^3–10^5	0.153	0.638
Vertical plate			
$V \to$ (D)	4×10^3–1.5×10^4	0.228	0.731

مثال: جریان هوا از روی صفحهٔ تختی با مشخصات زیر عبور می‌کند. نرخ انتقال حرارت از روی این استوانه را بیابید.

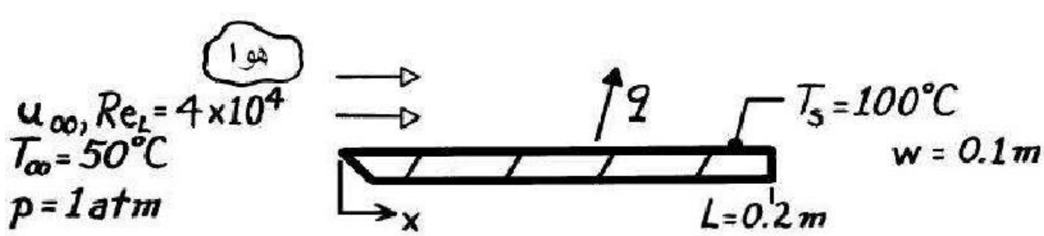


$$Re_D \to 9\times10^3 - 1.5\times10^5$$
$$C = 0.228$$
$$m = 0.731$$

توجه:

روابط گوناگونی (تجربی) برای پیدا کردن $\overline{Nu}$ حول استوانه و کره موجود می باشد که دقت آن ها متفاوت است. اینک با ذکر سه مثال به تکمیل مبحث انتقال حرارت جابجائی در جریان خارجی می‌پردازیم:

۱) هوا در فشار 1 arm و دمای 50^oC به طور موازی روی یک سطح ورق تختی که دمای آن 100^oc است جریان دارد. طول صفحه 0.2m و پهنای آن 0.1m است عدد رینولدز بر مبنای طول صفحه 4×10^4 است. نرخ انتقال گرما از صفحه به هوا چقدر است؟ اگر سرعت جریان آزاد هوا دو برابر و فشار آن 10 atm شود، نرخ انتقال گرما چقدر خواهد شد؟



حل:

طبق جدول انتهای کتاب:

$$T_f = 384^o k \text{ و } \Big| p = 1atm \rightarrow k = 0.0299\frac{m}{m.k} \text{ و } pr = 0.7$$

$$q = \overline{h}_L (w \times L)(T_s - T_\infty)$$

$$\overline{N}u = \frac{\overline{h}L}{K} = 0.664\,\mathrm{Re}_L^{0.5}\ pr^{0.33} = 118$$

$$\overline{h}_L = 118\frac{k}{L} = 118 \times \frac{0.299}{0.2} = 17.6 \Rightarrow q = 17.6x(0.\times 02)\times(100-50) = 17.6$$

درقسمت دوم فشار ۱۰ اتمسفر شده است پس:

$$\rho_2 = 10\rho_1 \Rightarrow \nu_2 = 0.1 \times \nu_1$$

$$\mathrm{Re}_{L,2} = \frac{UL}{\nu} = 2\times 10 \times (\frac{UL}{\nu})_1 = 20\,\mathrm{Re}_1 = 8\times 10^5$$

عدد رینولدز زیاد شده است و از مرز 5×10^5 گذشته است پس جریان مغشوش خواهد شد و باید از معادلات تجربی لایه مرزی مرکب استفاده نمود:

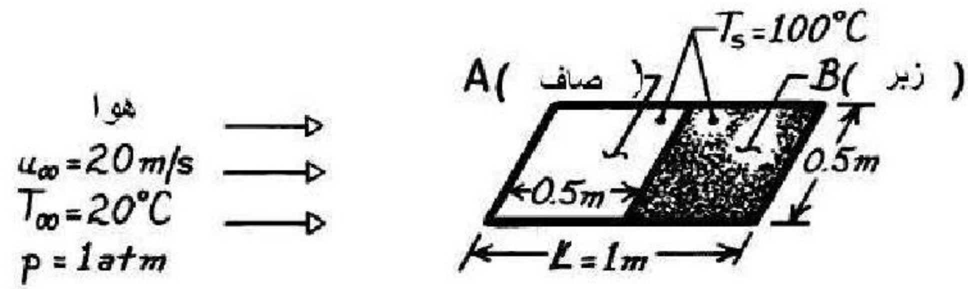
$$\overline{N}u = \frac{\overline{h}_L L}{k} = (0.037\,\mathrm{Re}_L^{0.8} - 871)\,\mathrm{Pr}^{1/3} = \left[0.037(8\times 10^5)^{0.8} - 871\right]\times(0.7)^{1/3}$$

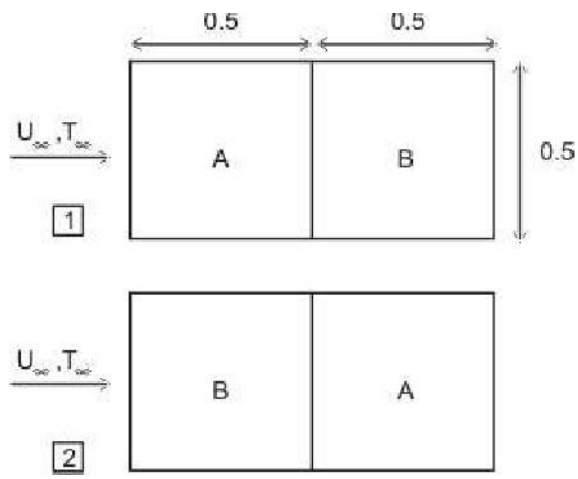
$$\overline{N}u = 961 \times \frac{0.0299}{0.2} = 143.6$$

$$q = 143.6 \times (90.1\times 0.2)(100-50) = 143.6$$

پس انتقال حرارت جابجائی بسیار زیادتر خواهد شد.

۲) سطح بالای یک محفظه گرم از یک بخش صاف (A) و یک بخش کاملاً ناصاف (B) تشکیل شده است این سطح در معرض جریان هوای محیط قراردارد.





در کـــدامیک از حـــالات ۱ و ۲ مقـــدار انتقـــال حـــرارت جابجـــائی کمتـــر اســـت؟ اگـــر $T_s=100^o$ و $T_\infty = 20^o$ و $U_\infty = 0.20 m/s$ باشد نرخ انتقال حرارت جابجائی در هر حالت چقدراست؟

حل:

طبق جدول انتهای کتاب مرجع ۹:

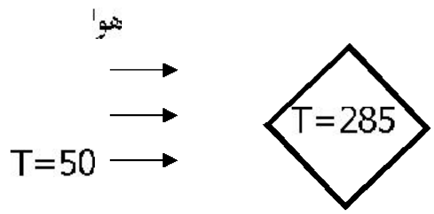
ازآنجائی که در وضعیت ۲ جریان روی صفحه از همان ابتدا مغـــشوش خواهـــد شـــد انتقـــال حـــرارت کمتردرحالت ۱ بوجود می آید. ولی برای محاسبه مقدارآن به طریق زیر عمل می کنیم:

$$\mathrm{Re}_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{20}{19.2\times10^{-6}} = 1.09\times10^6 \rightarrow$$

$$\mathrm{Re}_x = 5\times10^5 \rightarrow x_c = 0.48 \leftarrow$$ قبل از رسیدن به منطقه زبری در حالت اول

$$\overline{Nu}_{2,1} = \left[0.037(1.09\times10^{6})^{0.8} - 871\right](0.7)^{0.33} = 1366$$
$$\overline{Nu}_{1,2} = \left[0.037(1.09\times10^{6})^{0.8}\right](0.7)^{0.33} = 2140$$
$$\rightharpoonup \overline{Nu}_2 > \overline{Nu}_1 \xRightarrow{h_1<h_2} q_1 < q_2$$
$$\overline{h}_1 = 1366\frac{(28.7\times10^{-3})}{1} = 39.2$$
$$q_1 = \overline{h}_1 \times A(T_s - T_\infty) = 39.2\times(0.5\times1)(100-20)$$
$$\boxed{q_1 = 1568W}$$

۳) شمش مکعب مستطیلی به ضلع $10cm$ پس از بیرون آوردن از کوره باز پخت با دمای $285°C$ در جریان هوای خنک کننده ای با دمای متوسط $50°C$ قرار می گیرد، میزان انتقال حرارت در لحظه ی خروج از کوره چقدر است؟(فرض کنید فن باد را با سرعت $2\frac{m}{s}$ بدمد.)



حل:

$$D = \sqrt{(0.1)^2 + (0.1)^2} = \sqrt{0.2}$$

عدد رینولدز را محاسبه میکنیم :

$$\text{Re} = \frac{U_\infty D}{\nu} = \frac{2\times\sqrt{0.2}}{18\times10^{-6}} = 49688.8$$

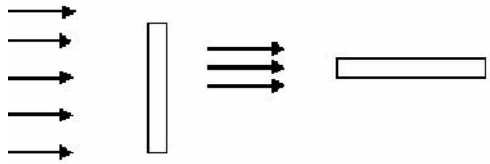
$$\rightharpoonup C = 0.246, m = 0.588$$

$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{18\times10^{-6}}{27\times10^{-6}} = 0.66$: طبق جدول حواص

و $k = 27.2\times10^{-3}$

$$\Rightarrow \overline{Nu}_D = \frac{\overline{h}D}{K} = C\,\text{Re}_D^m\,\text{Pr}^{1/3} \rightarrow 0.246\times(49688.8)^{0.588}\times(0.66)^{\frac{1}{3}} = 123.64$$
$$\rightarrow \overline{h} = \overline{Nu}\times\frac{k}{D} = 123.64\times\frac{27.2\times10^{-3}}{\sqrt{0.2}} = 7.52$$
$$\rightarrow q'' = \overline{h}\times(T_s - T_\infty) = 7.52\times(285-50) = 1767.2\frac{W}{m^2°C}$$

مسئله : با استفاده از روابط تجربی و تئوری انتقال حرارت را برای صفحه ای به طول ۱ متر و عرض بی نهایت در دو حالت عمودی و افقی که وزش باد روی آن با سرعت ۱ متر بر ثانیه میباشد ، مقایسه کنید.(سپس با فرض دما برای هوا و صفحه نتیجه خود را تائید کنید)



جدول خلاصه‌ای از روابط تجربی برای محاسبه ضرایب اصطکاک و انتقال حرارت در جریان بر روی صفحات تخت با زاویهٔ حمله صفر [۹]

Coefficient	Equation	Conditions
	LAMINAR FLOW	
Local friction coefficient	$C_{fx} = 0.664\mathrm{Re}_x^{-0.5}$	$\mathrm{Re}_x < 5 \times 10^5$
Local Nusselt number at distance x from leading edge	$\mathrm{Nu}_x = 0.332\mathrm{Re}_x^{0.5}\mathrm{Pr}^{0.33}$	$\mathrm{Pr} > 0.1$, $\mathrm{Re}_x < 5 \times 10^5$
	$\mathrm{Nu}_x = 0.565(\mathrm{Re}_x\mathrm{Pr})^{0.5}$	$\mathrm{Pr} < 0.1$, $\mathrm{Re}_x < 5 \times 10^5$
Local Sherwood number	$\mathrm{Sh}_x = 0.332\mathrm{Re}_x^{0.5}\mathrm{Sc}^{0.3}$	$\mathrm{Sc} > 0.1$, $\mathrm{Re}_x < 5 \times 10^5$
Average friction coefficient	$\bar{C}_f = 1.33\mathrm{Re}_L^{-0.5}$	$\mathrm{Re}_L < 5 \times 10^5$
Average Nusselt number between $x = 0$ and $x = L$	$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0.664\mathrm{Re}_L^{0.5}\mathrm{Pr}^{0.33}$	$\mathrm{Pr} < 0.1$, $\mathrm{Re}_L < 5 \times 10^5$
Average Sherwood number	$\overline{\mathrm{Sh}}_L = 0.664\mathrm{Re}_L^{0.5}\mathrm{Sc}^{0.33}$	$\mathrm{Sc} > 0.1$, $\mathrm{Re}_L < 5 \times 10^5$
	TURBULENT FLOW	
Local friction coefficient	$C_{fx} = 0.0576\mathrm{Re}_x^{-0.2}$	$\mathrm{Re}_x > 5 \times 10^5$, $\mathrm{Pr} > 0.5$
Local Nusselt number at distance x from leading edge	$\mathrm{Nu}_x = 0.0288\mathrm{Re}_x^{0.8}\mathrm{Pr}^{0.33}$	
Local Sherwood number	$\mathrm{Sh}_x = 0.0288\mathrm{Re}_x^{0.8}\mathrm{Sc}^{0.33}$	$\mathrm{Re}_x > 5 \times 10^5$, $\mathrm{Sc} > 0.5$
Average friction coefficient	$\bar{C}_f = 0.072[\mathrm{Re}_L^{-0.2} - 0.0464(x_{cr}/L)]$	$\mathrm{Re}_L > 5 \times 10^5$, $\mathrm{Pr} > 0.5$
Average Nusselt number between $x = 0$ and $x = L$ with transition at $\mathrm{Re}_{x,cr} = 5 \times 10^5$	$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0.036\mathrm{Pr}^{0.33}[\mathrm{Re}_L^{0.8} - 23{,}200]$	
Average Sherwood number	$\overline{\mathrm{Sh}}_L = 0.036\mathrm{Sc}^{0.33}[\mathrm{Re}_L^{0.8} - 23{,}200]$	$\mathrm{Re}_L > 5 \times 10^5$, $\mathrm{Sc} > 0.5$

* Applicable to low-speed flow (Mach number < 0.5) of gases and liquids with all physical properties at the mean film temperature, $T_f = (T_s + T_\infty)/2$.

$C_{fx} = \tau_s/(\rho u_\infty^2/2g_c)$	$\bar{C}_f = (1/L)\int C_{fx}\,dx$	$\mathrm{Pr} = c_p\mu/k$
$\mathrm{Nu}_x = h_c x/k$	$\overline{\mathrm{Nu}} = \bar{h}_c L/k$	$\bar{h}_c = (1/L)\int_0^L h_c(x)\,dx$
$\mathrm{Re}_x = \rho u_\infty x/\mu$	$\mathrm{Re}_L = \rho u_\infty L/\mu$	$\mathrm{Sc} = \nu/D_{AB}$
$\mathrm{Sh}_x = h_m x/D_{AB}$	$\overline{\mathrm{Sh}} = \bar{h}_m L/D_{AB}$	$\bar{h}_m = (1/L)\int_0^L h_m(x)\,dx$

جدول ضرایب انتقال حرارت برای جریان‌های خارجی [۹]

Geometry	Correlation equation	Restrictions
Long circular cylinder in a gas or a liquid	$\overline{Nu}_D = C\,Re_D^m\,Pr^n(Pr/Pr_s)^{1/4}$ (see Table 7.1)	$1 < Re_D < 10^6$
Noncircular cylinder in a gas	$\overline{Nu}_D = B\,Re_D^n$ (see Table 7.2)	$2500 < Re_D < 10^5$
Circular cylinder in a liquid metal	$\overline{Nu}_D = 1.125(Re_D Pr)^{0.413}$	$1 < Re_D Pr < 100$
Short cylinder in a gas	$\overline{Nu}_D = 0.123\,Re_D^{0.651} + (D/L)^{0.85}\,Re_D^{0.792}$	$7 \times 10^4 < Re_D < 1.1 \times 10^5$ $L/D < 4$
Sphere in a gas	$\dfrac{\bar{h}_c}{c_p \rho U_\infty} = (2.2/Re_D + 0.48/Re_D^{0.5})$	$1 < Re_D < 25$
	$\overline{Nu}_D = 0.37\,Re_D^{0.6}$	$25 < Re_D < 10^5$
	$\overline{Nu}_D = 430 + 5 \times 10^{-3} Re_D + 0.25 \times 10^{-9} Re_D^2 - 3.1 \times 10^{-17} Re_D^3$	$4 \times 10^5 < Re_D < 5 \times 10^6$
Sphere in a gas or a liquid	$\overline{Nu}_D = 2 + (0.4\,Re_D^{1/2} + 0.06\,Re_D^{2/3})Pr^{0.4}(\mu/\mu_s)^{1/4}$	$3.5 < Re_D < 7.6 \times 10^4$ $0.7 < Pr < 380$
Sphere in a liquid metal	$\overline{Nu}_D = 2 + 0.386(Re_D Pr)^{1/2}$	$3.6 \times 10^4 < Re_D < 2 \times 10^5$
Long flat plate, width D, perpendicular to flow in a gas	$\overline{Nu}_D = 0.20\,Re_D^{2/3}$	$1 < Re_D < 4 \times 10^5$
Half-round cylinder with flat rear surface in a gas	$\overline{Nu}_D = 0.16\,Re_D^{2/3}$	$1 < Re_D < 4 \times 10^5$
Square plate, dimension, L, perpendicular to flow of a gas or a liquid	$(\bar{h}_c/c_p \rho U_\infty)Pr^{2/3} = 0.930\,Re_L^{-1/2}$	$2 \times 10^4 < Re_L < 10^5$
Packed bed— heat transfer to or from packing, in a gas	$\overline{Nu}_{D_p} = \dfrac{1-\epsilon}{\epsilon}(0.5\,Re_{D_p}^{1/2} + 0.2\,Re_{D_p}^{2/3})Pr^{1/3}$ (ϵ = porosity of bed)	$20 < Re_{D_p} < 10^4$ $0.34 < \epsilon < 0.78$

ادامه دارد

ادامه از صفحه قبل

Geometry	Correlation equation	Restrictions
(ϵ = void fraction) (D_p = equivalent packing diameter, see Eq. 7.16)	$(\bar{h}_c/c_p\rho U_s)\mathrm{Pr}^{2/3} = \dfrac{1.075}{\epsilon}\mathrm{Re}_{D_p}^{-0.826}$	$0.01 < \mathrm{Re}_{D_p} < 10$
Packed bed— heat transfer to or from containment wall, gas	$\overline{\mathrm{Nu}}_{D_p} = 2.58\,\mathrm{Re}_{D_p}^{1/3}\mathrm{Pr}^{1/3} + 0.094\,\mathrm{Re}_{D_p}^{0.8}\mathrm{Pr}^{0.4}$	$40 < \mathrm{Re}_{D_p} < 2000$ cylinder-like packing
	$\overline{\mathrm{Nu}}_{D_p} = 0.203\,\mathrm{Re}_{D_p}^{1/3}\mathrm{Pr}^{1/3} + 0.220\,\mathrm{Re}_{D_p}^{0.8}\mathrm{Pr}^{0.4}$	$40 < \mathrm{Re}_{D_p} < 2000$ sphere-like packing
Tube bundle in cross-flow (see Figs. 7.17 and 7.18)	$\overline{\mathrm{Nu}}_D\mathrm{Pr}^{-0.36}(\mathrm{Pr}/\mathrm{Pr}_s)^{-0.25} = C(S_T/S_L)^n\,\mathrm{Re}_D^m$	
	C m n	
	0.8 0.4 0	$10 < \mathrm{Re}_D < 100$, in-line
	0.9 0.4 0	$10 < \mathrm{Re}_D < 100$, staggered
	0.27 0.63 0	$1000 < \mathrm{Re}_D < 2 \times 10^5$, in-line $S_T/S_L \geq 0.7$
	0.35 0.60 0.2	$1000 < \mathrm{Re}_D < 2 \times 10^5$, staggered $S_T/S_L < 2$
	0.40 0.60 0	$1000 < \mathrm{Re}_D < 2 \times 10^5$, staggered $S_T/S_L \geq 2$
	0.021 0.84 0	$\mathrm{Re}_D > 2 \times 10^5$, in-line
	0.022 0.84 0	$\mathrm{Re}_D > 2 \times 10^5$, staggered $\mathrm{Pr} > 1$
	$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 0.019\,\mathrm{Re}_D^{0.84}$	$\mathrm{Re}_D > 2 \times 10^5$, staggered $\mathrm{Pr} = 0.7$
	$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 4.03 + 0.228(\mathrm{Re}_D\mathrm{Pr})^{2/3}$	$2 \times 10^4 < \mathrm{Re}_D < 8 \times 10^4$, staggered liquid metals

فصل ششم:

انتقال حرارت جابجائی (جریان‌های داخـــلی)

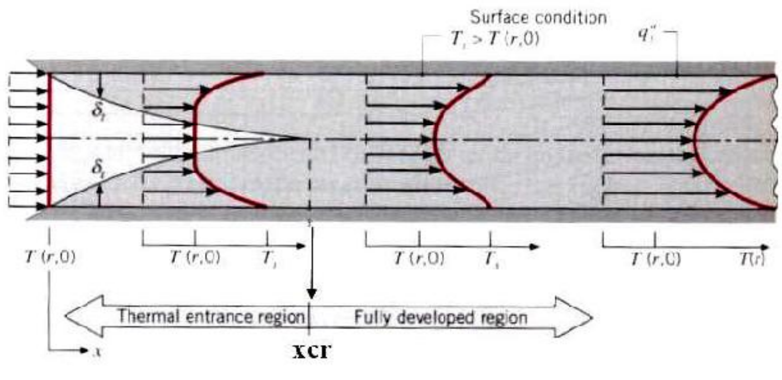
Convection Heat Transfer (Internal Flow)

ضریب انتقال حرارت جابجائی بین جدار لوله و سیال مطلوب است.

نوع رژیم ←
- Laminar آرام
- Turbulent مغشوش

انواع شرایط مرزی ←
- شار حرارتی ثابت $q'' = cte$
- دمای جداره ثابت $T_w = T_s = cte$
- حالت عمومی از شرایط مرزی
  $q'' = q''(x)$ یا $T_w = f(x)$

بررسی :
- ۱) در ناحیه ورودی لوله Entrance
- ۲) میدان جریان در فاصله دور از ورودی لوله (توسعه یافته) Fully Developed



شکل جریان داخلی (توزیع دمای توسعه یافته و توزیع دمای ورودی)

در ناحیه گسترش یافته داریم:

سرعت:

$$u = 2u_{av}\left(1-\frac{r^2}{r_o^2}\right)$$ در لوله

(۱) برای جریان بین دو صفحه

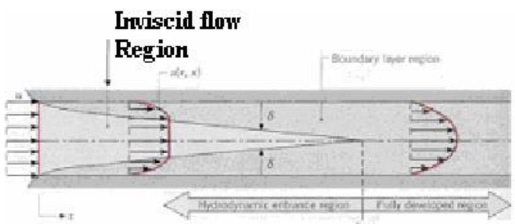
$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \rightarrow u = u_{av}\left(1-\frac{y^2}{L^2}\right)$$

در جریان توسعه یافته هیدرودینامیکی:

$$\frac{u}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \qquad (۲)$$

شرایط توسعه یافتگی

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\ v=0\\ \dfrac{\partial p}{\partial x}=const\end{cases} \qquad (۳)$$



تعریف دمای متوسط حجمی یا Bulk Mean Temp

$$T_m=\frac{\int \rho u c T dA}{\int \rho u c dA}=\frac{\int uTdA}{V_{av}A}=f(x)$$

$$\frac{T_w-T}{T_w-T_m}\neq f(x)\rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{T_w-T}{T_w-T_m}\right)_{r=r_o}=-\frac{\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=r_o}}{T_w-T_m}=const \qquad (۴)$$

$$q''=h(T_w-T_m) \text{ و } q''=-k\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=r_o}\Rightarrow \frac{h}{k}=cte\rightarrow h=cte$$

A سطح مقطع لوله است. پس نتیجه می گیریم که h تابعی از x نیست. (درجریان توسعه یافته)

فرض شرایط مرزی در جریان آرام توسعه یافته

می‌توان نشان داد که در حالت دمای دیواره ثابت و یا شار حرارتی ثابت توزیع دما در شکل بی‌بعد آن در جهت x تغییر نمی‌کند و اصطلاحا توسعه یافته تلقی می‌شود در نتیجه Nu مستقل از x بدست می‌آید. بتدا جریان با شار حرارتی ثابت از روی دیواره‌ها بررسی می‌شود.

$$q'' = h(T_w - T_m) = cte$$

$$\frac{dT_w}{dx} = \frac{dT_m}{dx} \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_w}{\partial x} = \frac{\partial T_m}{\partial x}$$

$$\frac{u}{\alpha}\frac{\partial T_m}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} r = r_o \Rightarrow T = T_w \\ r = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ u = 2u_{av}(1 - \dfrac{r^2}{ro^2}) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \dfrac{2V}{\alpha}\left(1 - \dfrac{r^2}{r_o^2}\right)\dfrac{\partial T_m}{\partial x} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial T}{\partial r}\right) \\ T = f(r_o \,\text{و}\, r \,\text{و}\, \dfrac{\partial T_m}{\partial x}) \\ T_o = g(r_o \,\text{و}\, \dfrac{\partial T_m}{\partial x}) \\ T_m = \psi\,(r_o \,\text{و}\, \dfrac{\partial T_m}{\partial x}) \end{array} \qquad (۵)$$

براساس روابط بالا می توان نتیجه گرفت که:

$$q'' = h(T_w - T_m)$$

$$h = \frac{48}{11}\frac{k}{D} \rightarrow Nu = \frac{hD}{k} = \frac{48}{11} = 4.36 \qquad (۶)$$

روابط تجربی و محاسباتی برای تعیین ضریب انتقال حرارت

۱. جریان لایه ای کاملاً توسعه یافته:

دراین بخش T_b بجای T_m بکار رفته است.

$$\frac{T - T_w}{T_b - T_w} = f(r)$$

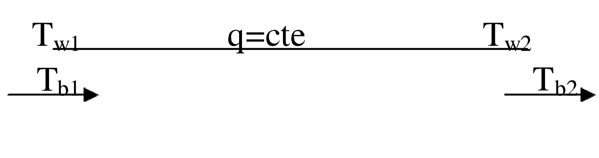
$$q = h(T_w - T_b)$$

$$q = -k(T_b - T_w) \qquad (۷)$$

$$-k(T_b - T)\left.\frac{df}{dr}\right|_{r=r_\omega} = hA(T_\omega - T_b) \rightarrow h = k\left.\frac{df}{dr}\right|_{r=r_\omega}$$

چون سمت چپ تابعی از x نمی باشد درنتیجه h نیز تابع x نیست.

1-a شارحرارتی دیوار ثابت: (q=constant)



$$Nu = 4.36 \rightarrow \frac{hd}{k} = 4.36$$

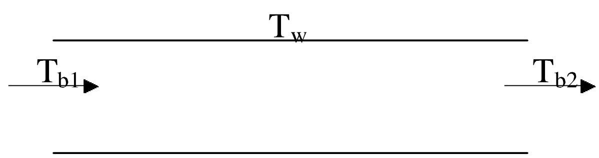
$$q = hpl\Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{q}{hpl} \qquad (۸)$$

$$\Delta T = T_{w1} - T_{b1}$$

درنتیجه برای محاسبه می توان از رابطه زیر نیز استفاده کرد.

$$\Delta T = Tw_2 - Tb_2$$ (۹)

1b دمای دیوار ثابت



$$Nu_d = 3.66 \text{ یا } \frac{hd}{k} = 3.66$$

$$q = hpl\Delta T$$ (۱۰)

$$\Delta T = Tw - T_b(x)$$

روش تقریبی:

$$\Delta T = T_w - \frac{(Tb_1 + Tb_2)}{2}$$ (۱۱)

روش دقیق:

$$\dot m C_p Tb_1 + hpdx\,(T_w - T_b) = \dot m C_p (T_b + \frac{dT_b}{dx}dx)$$

$$hp\,(T_w - T_b) = \dot m C_p \frac{dT_b}{dx}$$

$$\frac{\dot m C_p}{hp}\int_{Tb_1}^{Tb_2}\frac{dT_b}{T_w - T_b} = \int_o^l dx$$

$$\frac{\dot m C_p}{hp}\ln\frac{T_w - Tb_1}{T_w - Tb_2} = l$$

$$\frac{\dot m C_p}{h\rho} = \frac{1}{\ln\left(\frac{T_w - Tb_1}{T_w - Tb_2}\right)}$$ (۱۲)

$$q = \dot m C_p (Tb_2 - Tb_1) = hpl\,\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{\dot m C_p (Tb_2 - Tb_1)}{hpl}$$

$$\Delta T = \frac{Tb_2 - Tb_1}{\ln\left(\frac{T_w - Tb_1}{T_w - Tb_2}\right)}$$

۲. جریان لایه ای درحال توسعه در لوله های صاف دمای دیوار ثابت

$$\overline{Nu} = \frac{hD}{k_{av}} = \left\{ 3.66 + \frac{0.0668(D/L)\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}{1+0.04\left[(D/L)\,\mathrm{Re}\right]^{2/3}} \right\} \left(\frac{\mu_a}{\mu_\omega} \right)^{0.14}$$ متوسط (۱۴)

دردمای دیواره $\to \mu_\omega$

$$T_{b_a} = \frac{Tb_1 + Tb_2}{2} \text{ و } \Delta T_{\log}$$ (۱۵)

رابطهٔ معروف دیگر مربوط به سایدر و تیت (Sieder and Tate) می‌شود:

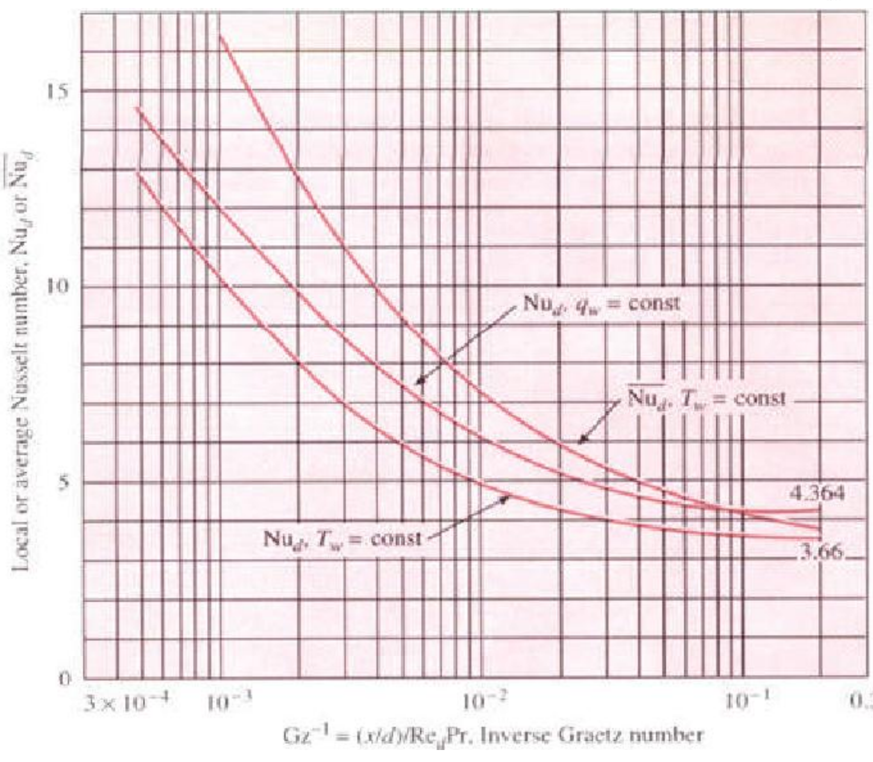
$$\overline{Nu}_d = 1.86(\mathrm{Re}_D\,\mathrm{Pr})^{1/3}\left(\frac{d}{l}\right)^{1/3}\left(\mu/\mu_w\right)^{0.14}$$

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\frac{D}{L} > 10$$ (۱۶)

$$q = \bar{h}pl\Delta T$$

$$\Delta T = T_w - \frac{1}{2}(T_{b1} - T_{b2})$$

۳. برای جریان لایه‌ای درحال توسعه در لوله های صاف و شار حرارتی ثابت در شکل زیر نوسلت موضعی نشان داده شده‌است.



شکل ناسلت موضعی و متوسط برای لوله با مقطع دایره‌ای در مقطع ورودی لوله با جریان توسعه یافته

$(\frac{T_{b1}+T_{b2}}{2})$

جریان مغشوش توسعه یافته در لوله های صاف

(Colburn Analogy) یا (Reynolds Analogy)

$$\tau = \rho(\upsilon + \varepsilon_m)\frac{\partial u}{\partial y} \quad (۱۷)$$

ε_m لزجت گردابه‌ای در جریان مغشوش تعریف می‌شود.

$$q''_w = -\rho C_p(\alpha + \varepsilon_H)\frac{\partial T}{\partial y} \quad (۱۸)$$

ε_H نیز ضریب پخش گردابه‌ای تعریف می‌شود. با فرض توزیع خطی شار حرارتی و تنش برشی و فرض برابری لزجت‌های گردابه‌ای و ضریب پخش گردابه‌ای خواهیم داشت:

$$\tau = \tau_\omega(1-\frac{y}{R}) \quad (۱۹)$$

$$q'' = q''_\omega(1-\frac{y}{R}) \quad (۲۰)$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_H \quad (۲۱)$$

اگر

$$\upsilon = \alpha, \Pr = 1 \quad (۲۲)$$

آنگاه از (۱۹) و (۲۰)

$$\frac{q''_w}{C_p\tau_w} = \frac{-\partial T}{\partial y} \rightarrow \frac{q''}{C_p\tau_w}dy = -dT$$

$$\frac{q''_w}{c_p\tau_w}\int_o^{u_{au}} du = -\int_{T_w}^{T_b} dT \quad (۲۳)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{q''_w u_{av}}{c_p\tau_w} &= T_w - T_b \\ h_x &= \frac{q''_\omega}{T_\omega - T_b} \end{aligned}\right\} h_x = \frac{C_p\tau_w}{u_{av}}$$

داریم

$$\tau_w = \frac{1}{2}C_f\rho u_{av}^2 \quad (۲۴)$$

$$\frac{h_x}{\rho c_p u_{av}} = \frac{C_f}{2} \quad (۲۵)$$

با توجه به تعریف عدد استانتون

$$St_x = \frac{C_f}{2} \quad (۲۶)$$

از طریق تجربی نشان داده شده‌است:

$$St_x \Pr^{2/3} = \frac{C_f}{2}$$

$$St = Nu / \mathrm{Re}\Pr$$

$$Nu = \mathrm{Re}\Pr^{1/3} . \frac{cf}{2}$$

دیاگرام مودي (۲۷)

$$f = 4C_f$$

$$Nu = 0.023\,\mathrm{Re}^{0.8}\Pr^{n} \quad \begin{cases} n = 0.3 & Cooling \\ n = 0.4 & heating \end{cases}$$

$$\mathrm{Re}_D > 10^4, 0.7 < \Pr < 100, L/D \geq 60$$

اگرخواص خیلی تغییرکنند:

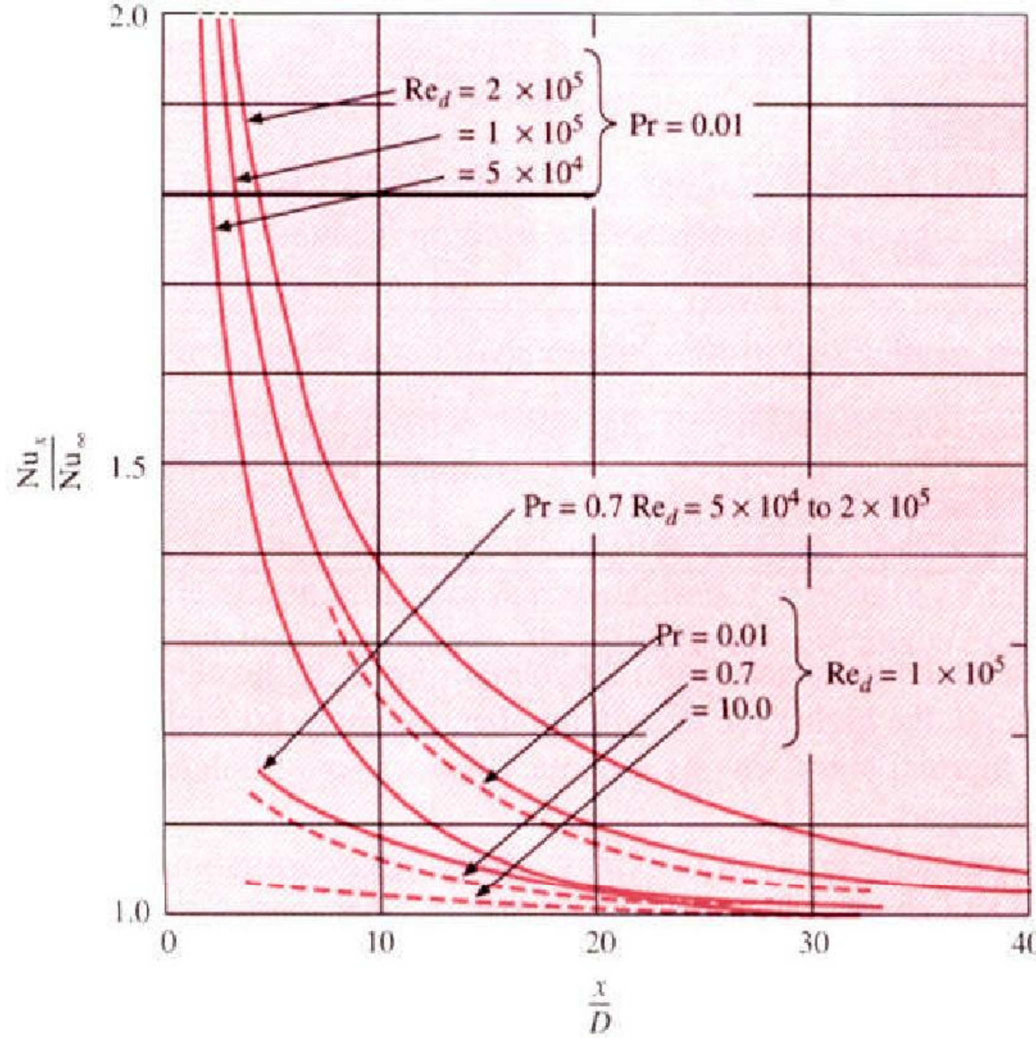
$$\overline{Nu}_D = 0.023\,\mathrm{Re}^{0.8}\Pr^{1/3}\left(\frac{\mu_{av}}{\mu_w}\right)^{0.14}$$

خواص در دماي زير: $, \Delta T = \Delta T_{\log}$ (۲۸)

$$T_{b_a} = \frac{T_{b1} + T_{b2}}{2}$$

$$T_w = cTe \rightarrow \Delta T = T_w - T_b$$

نکته: در این جزوه تنها به تعداد محدودی از روابط تجربی در جریان‌های داخلی اشاره شده‌است. روابط دقیق‌تر را می‌توان در کتاب‌های انتقال حرارت پیشرفته و یا کتابهای مربوط به مبدل‌های حرارتی جستجو کرد [۱۴] و [۱۵].



شکل ناسلت برای ورودی حرارتی لوله‌های با شار حرارتی ثابت و جریان توربولانس توسعه یافته

فصل هفتم: انتقال حرارت تابشی

Radiation Heat Transfer

از دیدگاه موجی انرژی تابشی به صورت انتشار امواج الکترومغناطیس صورت می‌پذیرد.

طیف امواج حرارتی $0.01\,\mu_m < \lambda < 200\mu_m$

طیف مرئی $0.2\mu_m < \lambda < 0.7\mu_m$

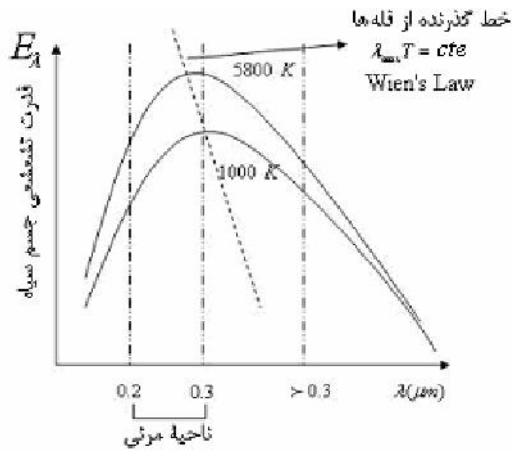
جسم ایده آل: جسم سیاه Black Body

به جسمی سیاه می گوئیم که:

۱. همه انرژی تابشی را جذب می کند.
۲. انتشار امواج در همه جهات یکنواخت است.
۳. انتشار انرژی حرارتی آن از هر جسم دیگری در دمای یکسان بیشتر است.

در شکل نمودار قدرت تشعشعی جسم سیاه $E_{b\lambda}$ بر حسب درجه حرارت و طول موج نشان داده‌شده‌است. همانگونه که در شکل نیز مشخص است برای دماهای بیشتر قله منحنی به طول موج‌های کوتاهتر انتقال می‌یابد این نقاط حداکثر طبق قانون وین به هم مربوط می‌شوند:

$$\lambda_{\max} T = 2897.6\,\mu m K\,[5215.6\,\mu m {}^\circ R]$$



* سطح زیر منحنی بیانگر انرژی منتقل شده به یا از جسم سیاه است.

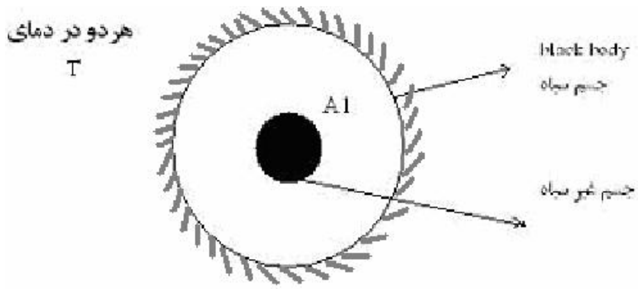
رابطهٔ پلانک

$$E_{b,\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[\exp(\frac{c2}{\lambda T}) - 1 \right]} \qquad (1)$$

رابطه انرژی بولتزمن:

$$E_b = \int_o^{\infty} E_{b,\lambda} d\lambda = \sigma T^4 \qquad (۲)$$

برای روشن شدن روابط فوق و خصوصیات جسم سیاه:



هر دو دمای T دارند.

$$q_{A_1 \text{ جسم سیاه}} = EA_1 = \varepsilon E_b A_1$$

$$\varepsilon_{\text{جسم سیاه}} = 1 \text{ ضریب جذب} \quad \text{و} \quad \varepsilon = \frac{E(T)}{E_b(T)} \text{ ضریب نشر} \qquad (۳)$$

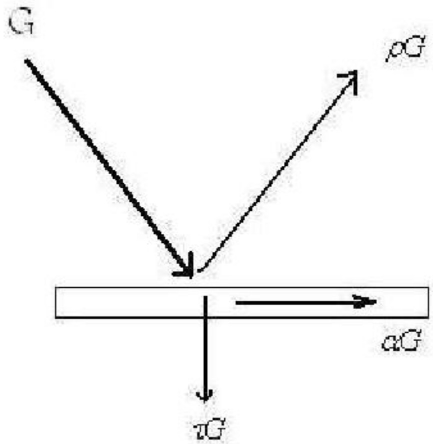
از تعادل حرارتی داریم:

$$\underbrace{E_b \alpha A_1}_{\text{جذب شده توسط } A_1} = \underbrace{E_b \varepsilon A_1}_{\text{صادر شده به جسم سیاه}} \Rightarrow \alpha = \varepsilon$$

چراکه آنچه از طریق تابش از جسم غیر سیاه خارج شده توسط جسم غیرسیاه جذب می شود و تعادل دمای حرارتی برقرارمی ماند.

جذب، بازتابش و عبور از یک سطح

آنچه انرژی تابشی به یک سطح می رسد به صورت **تعادل** جذب، بازتابش و عبور از آن جسم می‌شود.



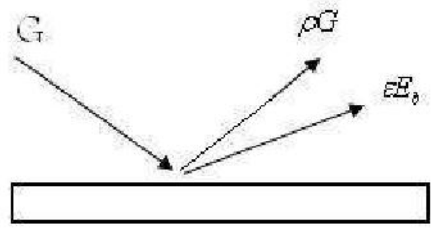
$$G = \rho G + \alpha G + \tau G$$
انرژی تابشی رسیده
$$\rho + \alpha + \tau = 1 \qquad (5)$$

τ:ضریب انتقال (عبور)

α : ضریب جذب

ρ : ضریب انعکاس

پس اگر فرض کنیم که جسم ما انرژی تابشی را از خود عبور نمی‌دهد $(\tau = 0)$ آنگاه خواهیم داشت:



εE_b: تشعشع به خاطر دمای خود جسم

$$J = \rho G + \varepsilon E_b \qquad (6)$$

در رابطهٔ فوق J رادیوسیتی می‌باشد.

$$q = A(J - G) \rightarrow q = A(J - \frac{J - \varepsilon E_b}{\rho}) = (J - \frac{J - \varepsilon E_b}{\underbrace{1 - \alpha}}) \qquad (7)$$

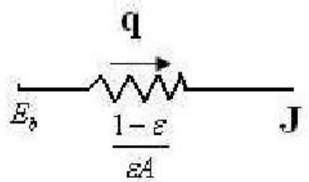
بافرض صرف نظر از τ

$$q = A\left(J - \frac{J - \varepsilon E_b}{1-\varepsilon}\right)$$

$$q = A(E_b - J)\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = A(E_b - J)\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \qquad (۸)$$

$$\Rightarrow q = \frac{E_b - J}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon A}}$$

پس برای اجسام تبادل کننده انرژی از طریق تابش داریم:



برای جسم سیاه $\Leftarrow$ $E_b = J$

ضریب دید View Factor

ضریب دید به صورت کسری از انرژی تابشی است که سطح I را ترک کرده و به سطح j می‌رسد و آن را اصطلاحاً با F_{ij} نشان می دهیم.

ترتیب مهم است

مقدار انرژی که سطح ۱ را ترک می‌کند و به سطح ۲ می‌رسد برابر است با:

$$q_{1-2} = J_1 A_1 F_{12} \qquad (۹)$$

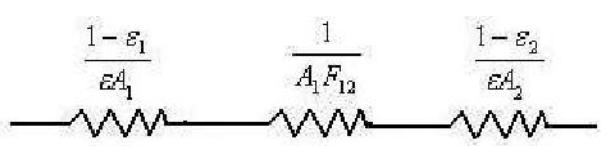
مقدار انرژی که سطح ۲ را ترک می‌کند و به سطح ۱ می‌رسد برابر است با:

$$q_{2-1} = J_2 A_2 F_{21} \qquad (۱۰)$$

در نهایت مقدار کل انرژی مبادله شده برابر خواهد بود با:

$$Q_{1-2} = J_1 A_1 F_{12} - J_2 A_2 F_{21} \qquad (۱۱)$$

مدار معادل:



- روابط بین ضرایب دید:

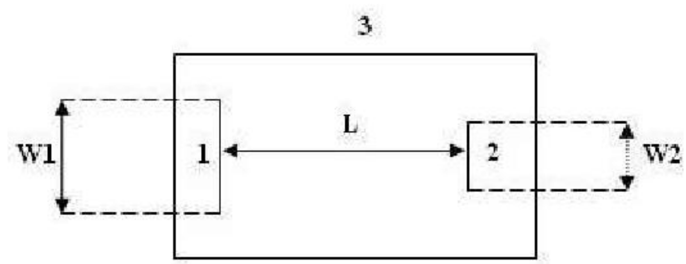
$$A_i F_{ij} = A_j A_{ji}$$
$$\sum_{j=1}^{N} F_{ij} = 1 \qquad (۱۲)$$

برای محاسبه تبادل تابش دریک محفظه N سطحی، تعداد N^2 ضریب دید مورد نیاز است. این نیاز هنگامی واضح تر بیان می شود که ضرایب دید به صورت ماتریس مرتب شوند.

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \ldots\ldots\ldots F_{18} \\ F_{21} & F_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots F_{28} \\ \vdots & \vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots\ldots\ldots\ldots F_{nn} \end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

ولی لازم نیست که تمام ضریب دیدها به طور مجزا محاسبه شوند.
با استفاده از دو رابطه اساسی گفته شده برای ضرایب دید می توان تمام ضرایب دید را مشخص نمود.

مثال:



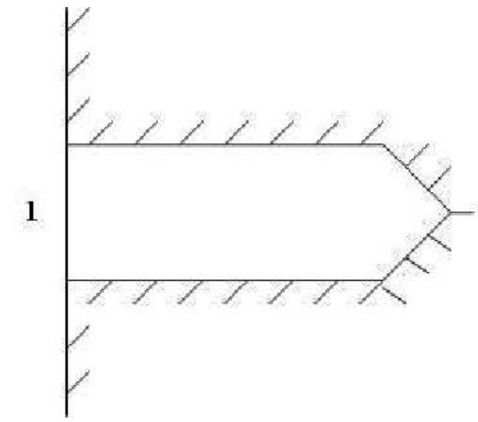
$$\sum_{j=1}^{3} F_{ij} = 1 \rightarrow F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \qquad (۱۴)$$

* ضریب دید هر جسم غیر محدب نسبت به خودش صفر می باشد.

$$F_{11} = 0$$
$$\rightarrow F_{12} + F_{13} = 1$$
$$F_{12} = \frac{\left[(w_1 + w_2)^2 + 4\right]^{1/2} - \left[(w_2 - w_1)^2 + 4\right]^{1/2}}{2w_1} \qquad (۱۵)$$
$$\rightarrow F_{13} = 1 - \frac{\left[(w_1 w_2)^2 + 4\right]^{1/2} - \left[(w_2 - w_1)^2 + 4\right]^{1/2}}{2w_1}$$

مثال:

ضریب شکل سر سوراخ ۱ رانسبت به داخل آن پیدا کنید.

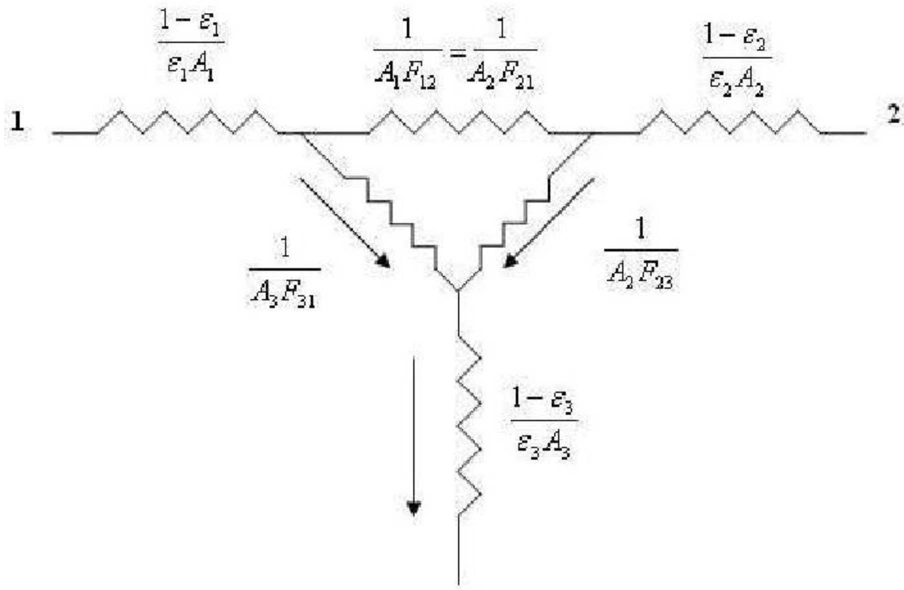


با یک نگاه می توان جواب داد که ضریب دیدسر سوراخ نسبت به خود سوراخ برابر یک است زیرا هر چه تابش از سرسوراخ وارد بدنه سوراخ شود درون سوراخ جذب یا بازتابش خواهد شد یا به عبارتی اگر چشم شخصی روی سوراخ باشد تمام دیدآن فرد درون سوراخ است و جای دیگری را نمی بیند.

تئوری روش محاسباتی

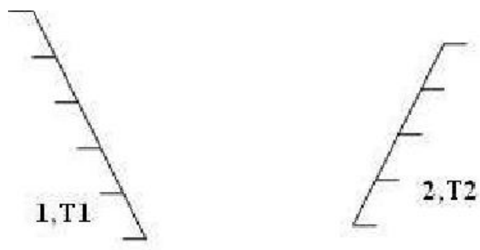
$$F_{11} + F_{12} = 1 \xrightarrow{F_{11}=0} F_{12} = 1 \qquad (۱۶)$$

شکل مدار مثال ۱:



انتقال انرژی تابشی در اجسام سیاه

برای مثال در شکل زیر:



$$q_{12} = A_1 J_1 F_{12} = A_1 E_{b_1} F_{12}$$
$$q_{21} = A_2 E_{b_2} F_{21} \qquad (۱۷)$$

تبادل انرژی ازسطح ۱:

$$q = q_{12} - q_{21}$$
$$1 = A_1 F_{12} E_{b1} - A_2 F_{21} E_{b2} \qquad (۱۸)$$
$$\Rightarrow 1 = A_1 F_{12}\, 6(T_1^4 - T_2^4)$$

به طور کلی داریم:

$$q_1 = \sum_{j=1}^{N} A_i F_{ij}\, 6(T_i^4 - T_j^4) \qquad (۱۹)$$

مثال:

در مثال ۱ نرژی انتقالی از سطح جسم را بدست آورید.

$$q = \sum_{j=1}^{N} A_i F_{ij}\, 6(T_i^4 - T_j^4) = A_1 F_{12}\, 6(T_1^4 - T_2^4) + A_1 F_{13}\, 6(T_1^4 - T_3^4)$$

$$F_{12} = \frac{\left[(w_1 + w_2) + 4\right]^{1/2} - \left[(w_2 w_1)^2 + 4\right]^{1/2}}{2w_1}$$

$$F_{13} = -\frac{\left[(w_1 + w_2)^2 + 4\right]^{1/2} - \left[(w_2 - w_1)^2 + 4\right]^{1/2}}{2w_1}$$

مراجع برای مطالعه بیشتر

[1] Carslaw, H.S., and Jaeger, J.C., Conduction of Heat in Solids, 2nd ed., Oxford University Press, London, 1959

[2] Arpaçi, V. S., Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley, Reading, M.A., 1996

[3] Myers, E.E., Analytical Methods in Conduction Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1971

[4] Kays, W.M., and Crawford, M.E., Convection Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, New York, 1980

[5] Bejan, A., Convection Heat Transfer, John Wiley & Sons, New York, 1995

[6] Eckert, E.R.G., and Drake, R.H., Jr., Analysis of Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, New York, 1981

[7] Siegel, Ro., and Howell, J.R., Thermal Radiation Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1981

[8] Özicik, Boundary Layer Value Problems of Heat Conduction, International Textbook, Scranton, P.A., 1968

[9] Incropera, F.P., and Witt, D.P., Introduction to Heat Transfer, John Wiley & Sons, New York, 1996

[10] Leinhard IV, J.H., and, Leinhard V, J.H.,A Heat Transfer Text Book, Phlogiston Press, Cambridge Massachusetts, 2001

[11] Holman, J.P., Heat Transfer, McGrow-Hill, New York, 1997

[12] White, F.M., Fluid Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1999

[13] White, F.M., Viscous Fluid Flow, McGrow-Hill, New York, 1991

[14] Kay, W.S., and London, A.L., Compact Heat Exchangers, Krieger Publishing Company, Malabor, Florida, 1998

[15] Saunders, E.A.D., Heat Exchangers: Selection, Design, and Construction, Longman, Harlow, 1988