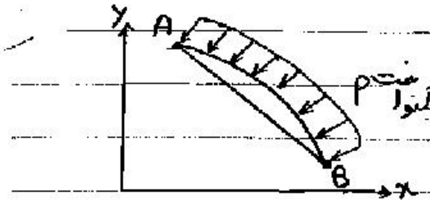
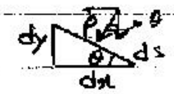


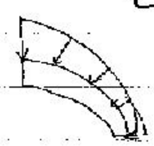


طول لبه واحد

$$dF = P\,ds \;\begin{cases} dF_y = P\cos\theta\, ds = P\,dx \\ dF_x = P\sin\theta\, ds = P\,dy \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_y = \int dF_y = \int_{x_A}^{x_B} P\,dx = P(x_B - x_A) \\ F_x = \int dF_x = \int_{y_A}^{y_B} P\,dy = P(y_B - y_A) \end{cases} \longrightarrow \frac{F_x}{F_y} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

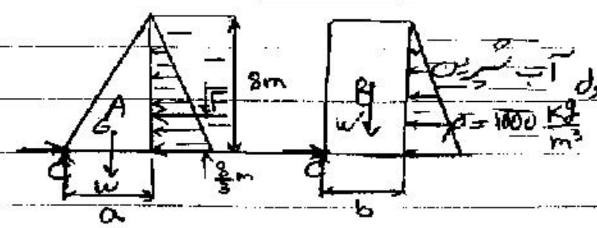
عمود بر راستای AB



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = P\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

مثال: $\rho_{\text{بتن}} = 2400\ \frac{kg}{m^3}$

کدام مقطع برای واژگون شدن حول C بتن در واحد طول کمتری مصرف می کند؟



$$F = \frac{1}{2}(8)(1000 \times 9.81 \times 8) \times 1$$

h_{max} — ρ — g — h_{max} — طول ثابت

مقطع مثلثی: $\overset{+}{\curvearrowleft}\Sigma M_C = 0 \longrightarrow w\left(\frac{2a}{3}\right) - F\left(\frac{8}{3}\right) = 0$

$w = mg = \rho V g = \rho_{\text{بتن}} \times g \times \underbrace{\left(\frac{8a}{2} \times 1\right)}_{V} \longrightarrow a = 3.65m$

حجم مثلث $= \frac{8a}{2}$

مقطع مستطیلی: $\overset{+}{\curvearrowleft}\Sigma M_C = 0 \longrightarrow \frac{w'b}{2} - F\left(\frac{8}{3}\right) = 0$

$w' = \rho_{\text{بتن}} \times g \times 8b \times 1$

$\longrightarrow b = 2.89m$

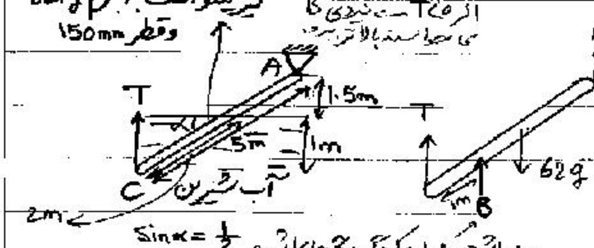
$$\longrightarrow \begin{cases} m_A = (94.2)(10^3)(3.65) \div 9.81 = 35.1 \times 10^3\ kg/m \\ m_B = (188.4)(10^3)(2.98) \div 9.81 = 57.2 \times 10^3\ kg/m \end{cases}$$

مقطع A به اندازه $22.2\ \frac{Mg}{m}$ بتن کمتری نیاز دارد.

مثال: کشش T برای حفظ تعادل؟

62kg تیر یکنواخت به جرم 150mm و قطر

اگر T صفر شود نیروی B می خواهد میله را بالا ببرد



$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ محل اثر در محل مرکز حجم جابجا شده

حجم آب جابجا شده

نیروی شناوری $B = \rho g V = 347N$

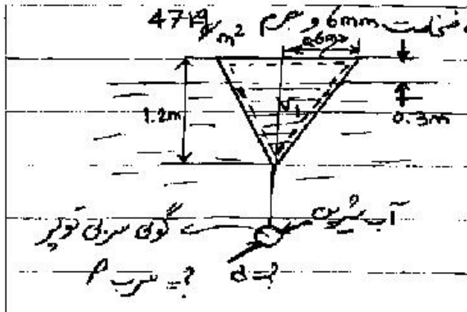
$V = \frac{\pi}{4}(0.150)^2(2)\ m^3$

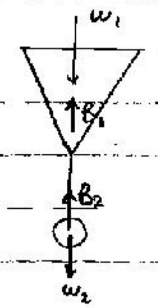
$\overset{+}{\curvearrowleft}\Sigma M_A = 0 \longrightarrow T(5\cos30) + 347(4\cos30) - 62 \times 9.81 \times 2.5\cos30 = 0$

$\longrightarrow T = 26.7N$

مثال:

ورق فولادی به ضخامت 6mm و جرم 47 kg/m²



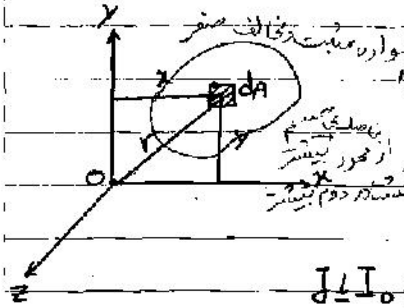


$$B_1 = \rho_{آب}\, g\, V_1 \quad , \quad B_2 = \rho_{آب}\, g \left(\frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3\right) \Rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow d = \checkmark$$

فصل ششم:

گشتاور اول سطح $\Leftarrow \int y\,dA$

گشتاور دوم سطوح مسطح:



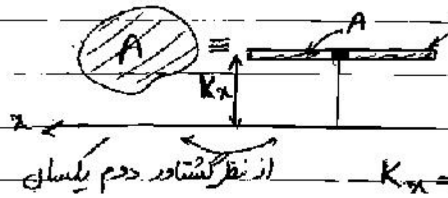
تعریف: گشتاور دوم سطح حول محور x $\leftarrow$ $I_x = \int_A y^2\,dA$

(ممان اینرسی)

گشتاور دوم سطح حول محور y $\leftarrow$ $I_y = \int_A x^2\,dA$

$$J \,\underline{\text{یا}}\, I_O \,\underline{\text{یا}}\, I_z = \int_A r^2\,dA = \int_A (x^2+y^2)\,dA = I_x + I_y$$

شعاع ژیراسیون سطح (K):

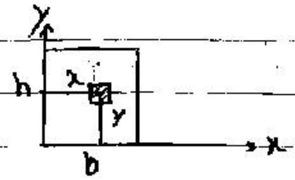


$$I_x = \int_A K_x^2\,dA = K_x^2 \int_A dA = K_x^2 \cdot A$$

$$K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad , \quad K_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad , \quad K_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

$$\Rightarrow K_z^2 = K_x^2 + K_y^2$$

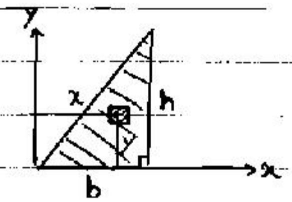
مثال: $I_x , I_y = ?$



$$dA = dx\,dy$$

$$I_x = \int y^2\,dA = \int_0^b \left(\int_0^h y^2\,dy\right) dx = \frac{1}{3} b h^3$$

$$I_y = \int x^2\,dA = \int_0^b \left(\int_0^h x^2\,dy\right) dx = \frac{1}{3} h b^3$$



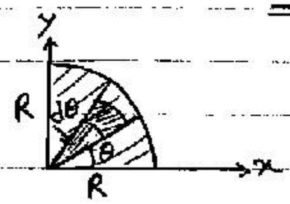
مثال: $I_x, I_y = ?$

$dA = dx\,dy$

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^b \left(\int_0^{\frac{h}{b}x} y^2 dy\right) dx = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_y = \int x^2 dA = \int_0^b \left(\int_0^{\frac{h}{b}x} x^2 dy\right) dx = \frac{1}{12} h b^3$$

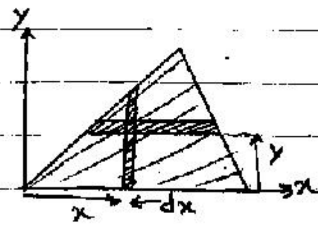
$\bar{I}_x$ ها یکسان



مثال: $I_x = ?$

$dA = r\,dr\,d\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^R \Big(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta}_{\frac{\pi}{4}}\Big) r^3 dr = \frac{\pi}{16} R^4$$



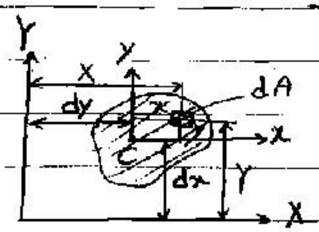
استفاده از جزءهای نواری:

*جزءهای نواری باید به یک فاصله از محور باشند

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_x = \int d I_x = \int \frac{1}{3} y^3 dx$$

انتقال محورها:



c مرکز سطح ، $C(X_c, Y_c)$

$X = x + X_c \quad , \quad Y = y + Y_c$

$$I_X = \int_A Y^2 dA = \int_A (y + \underset{\text{ثابت}}{Y_c})^2 dA = \underbrace{\int_A y^2 dA}_{\bar{I}_x} + 2Y_c \int_A y\,dA + Y_c^2 \int_A dA$$

$$\int_A y\,dA = \bar{y}\int dA = (0)\int dA = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I_X = \bar{I}_x + Y_c^2 A}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_Y = \bar{I}_y + X_c^2 A}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_Z = \bar{I}_z + R_c^2 A}$$

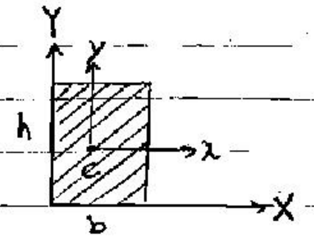
$$R_c^2 = X_c^2 + Y_c^2$$

قانون محورهای موازی

به تعبیر دیگر:

$$I_X = \bar{I}_x + d_x^2 A \quad , \quad I_Y = \bar{I}_y + d_y^2 A \quad , \quad I_Z = \bar{I}_z + d_z^2 A$$

مثال:



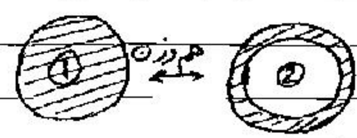
$$\bar{I}_x = I_X - Y_c^2 A$$

$$= \frac{1}{3}bh^3 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{1}{12}bh^3$$

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12}b^3h$$

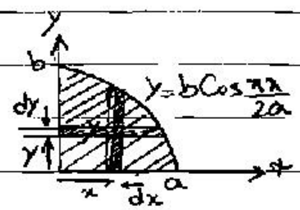
اگر $b<h$ ، $\bar{I}_y \ll \bar{I}_x$

* در واقع I مقاومت به خمش در تیر را نشان می‌دهد
* کاربرد ممان قطبی، در بحث پیچش است



$$I_{z_2} > I_{z_1}$$

مثال: $I_x = ?$

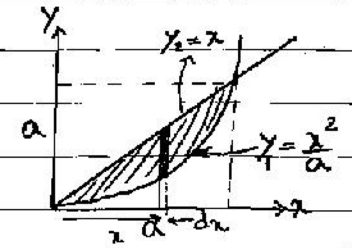


با نوار عمودی: $dI_x = \frac{1}{3}y^3 dx = \frac{b^3}{3}\cos^3\frac{\pi x}{2a}\,dx$

$$I_x = \int dI_x = \int_0^a \frac{b^3}{3}\cos^3\frac{\pi x}{2a}\,dx = \frac{4ab^3}{9\pi}$$

با نوار افقی: $dA = x\,dy \rightarrow I_x = \int y^2 dA = \int_0^b y^2 \underset{\cos^{-1}}{x}\,dy$

مثال: $I_x, I_y = ?$



$$I_x = \int dI_x$$

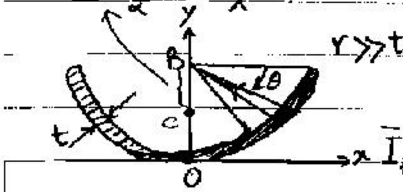
$\frac{1}{12}bh^3$ [illegible]

$$dI_x = d\bar{I}_x + dA(dx)^2 = \frac{1}{12}(y_2-y_1)^3 dx + (y_2-y_1)dx\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow I_x = \int_0^a f(x)\,dx = \frac{a^4}{28}$$

$$I_y = \int x^2 dA = \int_0^a x^2 (\underset{x}{y_2} - \underset{\frac{x^2}{a}}{y_1})dx = \int_0^a x^2\left(x - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{a^4}{20}$$

مثال: نوار نیم دایره به مساحت A $(I_x, I_y, I_z = ?)$



$\bar{r} = r\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2r}{\pi}$

$r \gg t$

$I_B = \int r^2 dA = r^2 \int dA = r^2 A$

مرکز سطح C

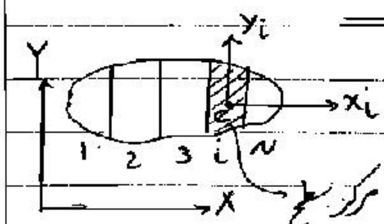
$\bar{I}_z = I_C = I_B - A d_z^2 = r^2 A - \frac{4Ar^2}{\pi^2} = r^2 A\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)$

$$I_z = I_O = I_C + A(d_z)^2 = r^2 A\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) + \underset{\pi r t}{\underset{\downarrow}{A}} r^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^2 = 2Ar^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^{\pi} r^2 (1 - \sin\theta)^2 r t \, d\theta = Ar^2\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right)$$

$$I_y = I_z - I_x = \frac{1}{2} A r^2$$

سطوح مرکب:

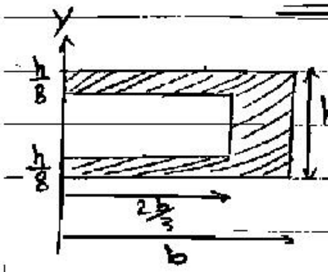


$$I_X = \sum_{i=1}^{N} \bar{I}_{xi} + A_i (dx_i)^2$$

$$I_Y = \sum_{i=1}^{N} \bar{I}_{yi} + A_i (dy_i)^2$$

جزء	A_i	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{I}_x$	$\bar{I}_y$	$\bar{I}_x + Ad_x^2$	$\bar{I}_y + Ad_y^2$
1							
2							
⋮							
N							
جمع						I_x	I_y

مثال: درصد کاهش مساحت و درصد کاهش در I_y؟

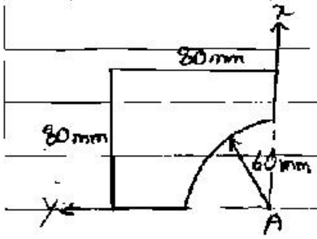


$$\text{کاهش مساحت} = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\left(\frac{2b}{3}\right)\left(\frac{3h}{4}\right)}{bh} = 50\%$$

$$I_y \text{ کاهش} = \frac{\Delta I_y}{I_y} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3h}{4}\right)\left(\frac{2b}{3}\right)^3}{\frac{1}{3} h b^3} = \frac{2}{9} = 22.2\%$$

با وجود اینکه 50% از جسم حذف شده ولی تنها 22.2% از I_y آن کاسته شده است. علت آن این است که ما قسمت دورتر را از محور y را حفظ کرده‌ایم بنابراین با این تکنیک می‌توان ضمن کم کردن وزن مقاومت خمشی یک سازه را زیاد کرد.

مثال: شعاع ژیراسیون قطبی حول A؟



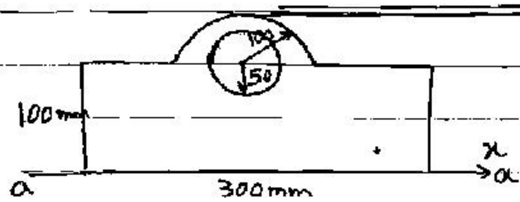
$K_A = \sqrt{\frac{I_A}{A}}$

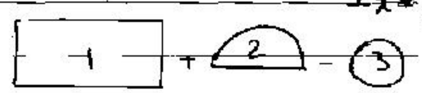
$I_x = \frac{\pi}{16} R^4 \rightarrow$ (ربع دایره)

$I_x = I_y \rightarrow I_z = 2I_x$ به دلیل تقارن

$\rightarrow I_z = 2\left[\frac{1}{3}(80)^4 - \frac{\pi}{16}(60^4)\right] \rightarrow K_A = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$

مثال: $I_x = ?$



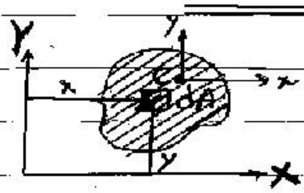
$=$ 

$\bar{I}$ نیم دایره $= 2 \times \bar{I}$ ربع دایره

جزء	$A (mm^2)$	$\bar{Y} (mm)$	$\bar{I}_x (mm^4)$	$\bar{I}_x + A\bar{Y}^2$
1	300×100	50	$\frac{1}{12}(300)(100)^3$	$\frac{1}{12}(300)(100)^3 + 300(100)(50)^2$
2	$\frac{\pi}{2}(100)^2$	$100 + \frac{4(100)}{3\pi}$	$(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi})(100)^4$	
3	$-\pi(50)^2$	100	$-\frac{\pi}{4}(50)^4$	
جمع				I_x

گشتاور دوم همیشه مثبت

حاصلضرب اینرسی:



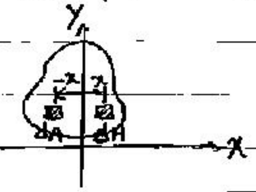
$I_{xy} = \int xy\, dA$

می‌تواند +، − یا صفر باشد.

قانون محورهای موازی: (در اینجا علامت‌ها باید ذکر شوند) $\rightarrow I_{xy} = \bar{I}_{xy} + x_c y_c A$

اگر شکل محور تقارن داشته باشد و این محور به عنوان یکی از محورهای مختصات انتخاب شود:

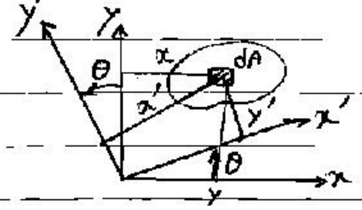
* برای حاصلضرب اینرسی نیز تقسیم اجسام مرکب صادق است.



$I_{xy} = 0$

دوران محورها:

θ مثلثاتی مثبت



$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$I_{x'}=\int y'^2 dA=\int(-x\sin\theta+y\cos\theta)^2 dA=I_x\cos^2\theta+I_y\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta\, I_{xy}$$

برحسب 2θ:

$$\boxed{I_{x'}=\frac{I_x+I_y}{2}+\frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta-I_{xy}\sin 2\theta}$$

به طور مشابه:

$$\boxed{I_{y'}=\frac{I_x+I_y}{2}-\frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta+I_{xy}\sin 2\theta}$$

$$\boxed{I_{x'y'}=\frac{I_x-I_y}{2}\sin 2\theta+I_{xy}\cos 2\theta}$$

$$\boxed{I_{x'}+I_{y'}=I_x+I_y}$$ (مستقل از زاویه θ)

این روابط متناوب با دوره تناوب π بوده و گشتاورهای دوم $I_{x'}$ و $I_{y'}$ دارای مقادیر حداکثر و حداقل می باشند که این نقاط اکسترمم به ازای یک θ رخ می دهد و حداکثرها باهم و حداقل ها باهم برابرند.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dI_{x'}}{d\theta}=0\\ \text{یا}\\ \dfrac{dI_{y'}}{d\theta}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{tg 2\theta=\frac{2I_{xy}}{I_y-I_x}}\Rightarrow \theta_1,\theta_2\Rightarrow |\theta_1-\theta_2|=\frac{\pi}{2}$$

(θ اکسترمم)

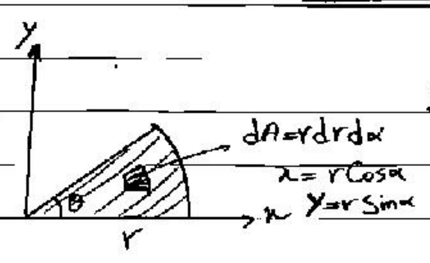
محورهایی که مقادیر I حداقل و حداکثر حول آنها رخ می دهد بر هم عمودند

$$I_{max,min}=\frac{I_x+I_y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(I_x-I_y)^2+4I_{xy}^2}$$

در همین مقدار θ، $I_{x'y'}=0$ است. (معادلها یکی می شوند)

به محورهای x' و y' در این حالت، محورهای اصلی اینرسی اشکال می گوییم و اگر نقطه O مرکز سطح شکل باشد، این محورها را محورهای اصلی مرکز سطحی می نامیم.

مثال: $I_{xy}=?$



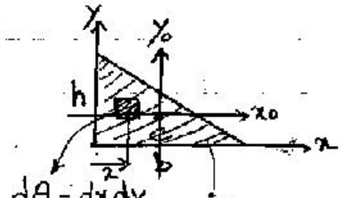
$$I_{xy}=\int xy\, dA=\int_0^{\theta}\left(\int_0^{r}r^3dr\right)\overbrace{\sin\alpha\cos\alpha}^{\frac12\sin 2\alpha}\, d\alpha=\frac{r^4}{16}(1-\cos 2\theta)$$

اگر $\theta=\frac{\pi}{2}$ ربع دایره ، $I_{xy}=\frac{r^4}{8}$

اگر $\theta=\pi$ ← نیم دایره ← $I_{xy}=0$

سید محمد جعفر سبحانی

مثال: $I_{xy}=?$

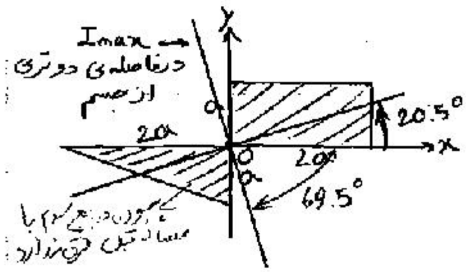


$$I_{xy}=\int xy\,dA=\int_0^b\left(\int_0^{\text{معادله خط}} y\,dy\right)x\,dx=\frac{b^2h^2}{24}$$

$$I_{xy}=\bar{I}_{xy}+X_cY_cA$$

$$\rightarrow \frac{b^2h^2}{24}=\bar{I}_{xy}+\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{h}{3}\right)\left(\frac{bh}{2}\right)\rightarrow \bar{I}_{xy}=-\frac{b^2h^2}{72}$$

مثال: $I_{max}, I_{min}=?$ و زاویه محور I_{max} با محور x؟



$$I_x=\frac{1}{3}(2a)a^3+\frac{1}{12}(2a)a^3=c_1a^4=0.833a^4$$

$$I_y=\frac{1}{3}a(2a)^3+\frac{1}{12}a(2a)^3=c_2a^4=3.33a^4$$

$$I_{xy}=0+\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2a}{2}\right)(2a^2)+\frac{a^2(2a)^2}{24}=c_3a^4=1.083a^4$$

$$tg2\theta=\frac{2I_{xy}}{I_y-I_x}=\frac{2c_3}{c_2-c_1}=0.86\rightarrow\begin{cases}\theta_1=20.5^\circ\\ \theta_2=-69.5^\circ\end{cases}$$

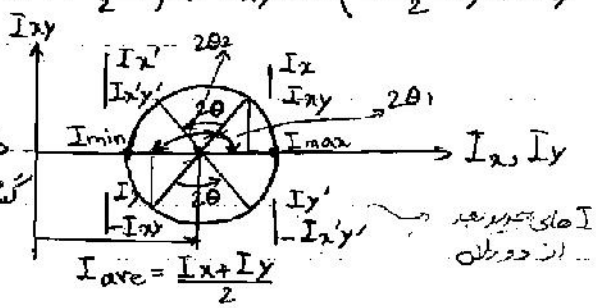
$$\Rightarrow I_{max,min}=\begin{cases}c_4a^4\\ c_5a^4\end{cases}$$

روش ترسیمی:

اگر بین $I_{x'}$، $I_{x'y'}$ یا بین $I_{y'}$، $I_{x'y'}$، θ را حذف کنیم، داریم:

$$\left(I_{x'}-\frac{I_x+I_y}{2}\right)^2+I_{x'y'}^2=\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}^2$$

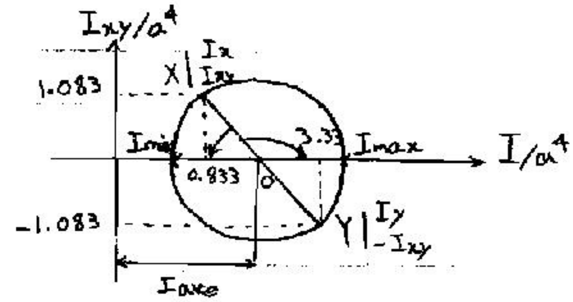
دایره‌ی مور (Mohr) برای گشتاور اینرسی سطح



نقاط $\begin{vmatrix}I_{x'}\\ I_{x'y'}\end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix}I_{x'}\\ -I_{x'y'}\end{vmatrix}$، $\begin{vmatrix}I_{y'}\\ I_{x'y'}\end{vmatrix}$، $\begin{vmatrix}I_{y'}\\ -I_{x'y'}\end{vmatrix}$ روی این دایره قرار دارند.

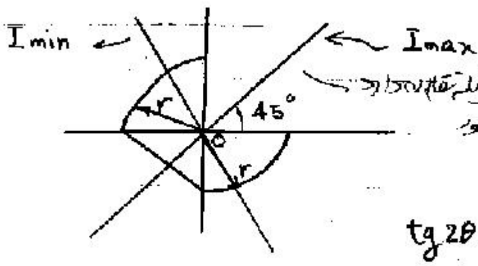
$$I_{max,min}=I_{ave}\pm R$$

* این دایره هیچ‌گاه بر محور عمودی مماس نمی‌شود زیرا I هیچ‌گاه صفر یا منفی نمی‌شود.



دایره‌ی مور برای مثال قبل:
(باید دایره را با مقیاس مناسب رسم کنیم)

مثال: $I_{max}=?$ (بادید چشمی)



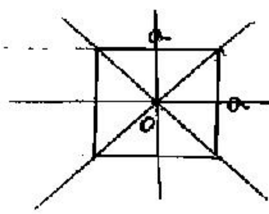
(با توجه به اینکه تقارن دارد اینست در محور

$$I_x = 2\left(\frac{\pi}{16}\right)r^4 + \frac{1}{12}r^4 = I_y$$

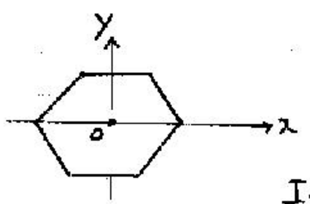
$$I_{xy} = \frac{r^4}{24} - 2\left(\frac{r^4}{8}\right) = -\frac{5r^4}{24}$$

$$tg\,2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \infty \longrightarrow \theta = \pm 45^\circ$$

$$I_{max} = I_x + |I_{xy}| = 0.684r^4$$



مثال: $I_x = I_y$ ، $I_{xy}=0$ ← دایره مور به یک نقطه تبدیل می‌شود.
هر محور گذرنده از مرکز سطح محور اصلی است. اگر شکل بیش از دو محور تقارن داشته باشد این حالت رخ می‌دهد. مانند n ضلعی منتظم و یا هر شکل منظمی که بر رئوس یک n ضلعی منتظم واقع شود.

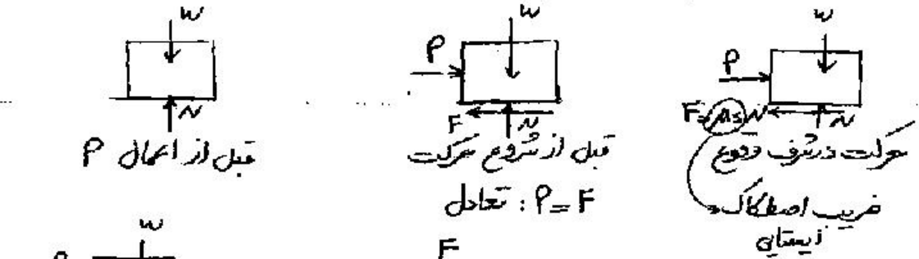


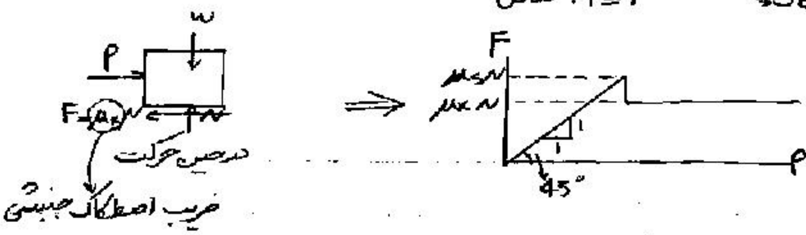
* مثال: حول کدام محور I_{xy} صفر می‌شود؟ (مهم)
از آنجایی که شکل نسبت به محورها تقارن دارد، پس $I_x=I_y$؛
همچنین $I_{xy}=0$. پس دایره مور به یک نقطه تبدیل می‌شود و لذا I_{xy} حول هر محور گذرنده از O برابر صفر می‌باشد.

سید محمدجعفر سبحانی

فصل ششم :

اصطکاک :

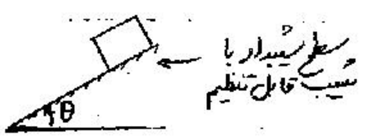




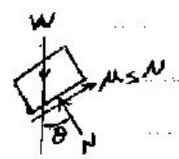
عوامل مؤثر در ضریب اصطکاک : ① زبری ② گرد و غبار ـ روغن در محل سطح ③ جنس دو جسم (بین دو ماده)

* ضرایب اصطکاک بالاتر از ۱ وجود دارد.
* تفاوتی ندارد که جسم از کدام طرف روی سطح قرار گیرد. در هر حالتی نیروی مقاوم یکسان است.

آزمایش ساده :



در حالت حدی :

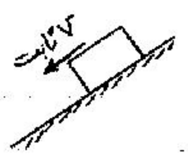


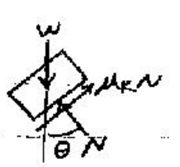
تعادل : $W\cos\theta = N$

$W\sin\theta = \mu_s N$ $\Rightarrow \mu_s = \tan\theta$

θ در این حالت ϕ_s (زاویه‌ی اصطکاک ایستایی) نامیده می‌شود.

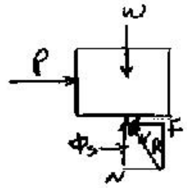
اگر بتوان بلوک را روی سطح شیبدار با سرعت ثابت به حرکت درآورد.





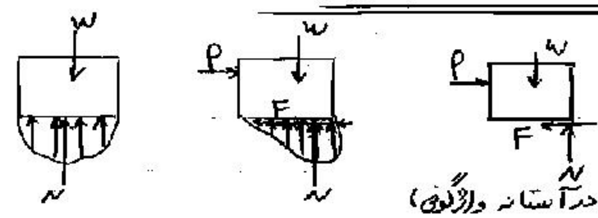
تعادل : $\mu_k = \tan\theta \rightarrow \theta = \phi_k$
(زاویه اصطکاک جنبشی)

نکته:



بعد از شروع حرکت روی ⟸ هنگامی که نیروی R روی مخروط اصطکاک ⟵ یک مخروط کوچکتر
ایستایی قرار گیرد، جسم در شرف حرکت است.

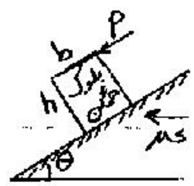
واژگونی:



جسم واژگون ⟵ $F<\mu_s N$ اگر ⟸
می شود

(در آستانه واژگونی) حالت حدی: $F=\mu_s N$

انواع سوال ⟵ ① ماکزیمم نیرو ⟸ $\mu_s N$ حرکت نکند ② در حرکت: $f_k=\mu_k N$ ③ نیروی اصطکاک لازم برای تعادل چقدر است؟
اگر $F>\mu_s N$ محاسبه شده ⟵ جسم حرکت دارد
" " $F\le\mu_s N$ ⟵ تعادل ایستایی داریم.



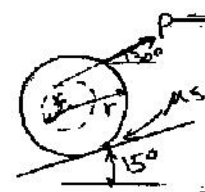
مثال: $\left(\frac{h}{b}\right)_{max}=?$ (لغزش بدون واژگونی)

تعادل: $N=w\cos\theta$

$\mu_s N = P + w\sin\theta \longrightarrow P = w(\mu_s\cos\theta - \sin\theta)$

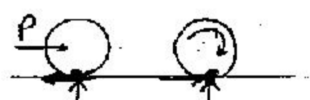
$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0 \longrightarrow Ph + w\sin\theta\left(\frac{h}{2}\right) - w\cos\theta\,\frac{b}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{h}{b} = \frac{1}{2\mu_s - tg\theta}$ $\xrightarrow{\text{هیچگاه مخرج صفر نمی شود}}$ چون در واقع $tg\theta = 2\mu_s > \mu_s$ از حالت تعادل خارج می شود

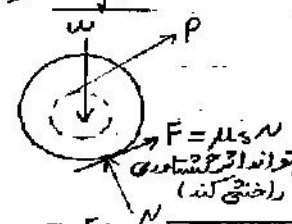


مثال: $(\mu_s)_{min}=?$ (حرکت به سمت بالای شیب با سرعت ثابت و بدون لغزش)
$P=?$ ، $F=?$ اصطکاک

نکته:

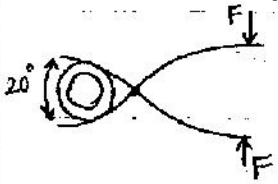


(جهت حرکت نقاط تماس مهم است)

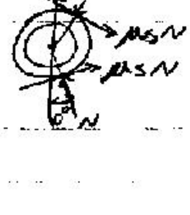


$F=\mu_s N$
(بتواند از چرخش آزاد P را خنثی کند)

⟵ ۳ معادله تعادل ⟵ P, N, $\mu_s = 0.096$

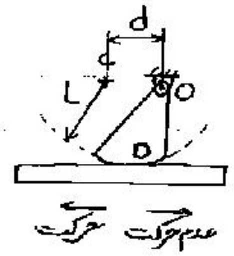


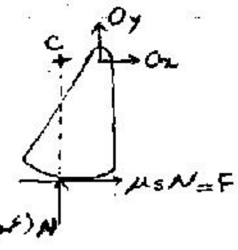
مثال: $(\mu_s)_{min}=?$ (لوله از میان فک ها نلغزد)



تعادل افقی: $2N\sin 10 = 2\mu_s N\cos 10°$
$\Rightarrow (\mu_s)_{min} = tg 10°$

* مقدار μ_s به مقدار F بستگی ندارد.



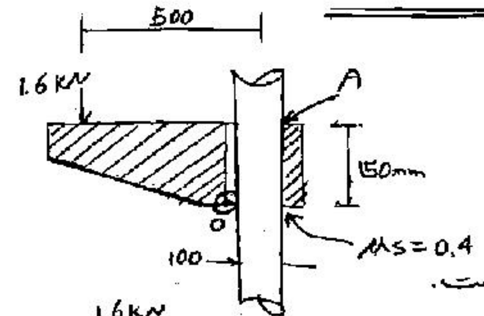


مثال: $d = ?$ (اگر $\mu_s \geq 0.2$)

تعادل: $\sum M_O = 0$

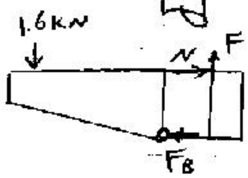
$\rightarrow FL = Nd \rightarrow F = \frac{Nd}{L} \leq \mu_s N$

$\rightarrow d \leq 0.2L$



مثال: وزن پایه ناچیز - نیروی اصطکاک =؟

* به علت لنگر ایجاد شده، فقط در نقاط A و O تماس برقرار است.



تعادل:

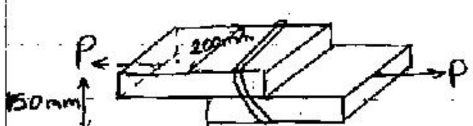
$F = 1.6\,KN$

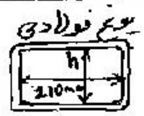
$N = F_B$

$\underbrace{(1.6)(500+50)}_{\text{کوپل}} = \underbrace{N(150)}_{\text{کوپل}} \rightarrow N = \frac{17.6}{3}\,kN$

$\frac{F}{N} = \frac{1.6}{\frac{17.6}{3}} = \frac{3}{11} < \mu_s = 0.4 \rightarrow F < \mu_s N$

پس اصطکاک لازم توسط سطح تأمین می‌شود و پایه در سر جای خود می‌ماند. (این حالت مستقل از مقدار 1.6KN است)

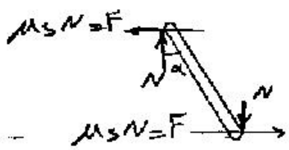




مثال: $\mu_s = 0.3$ در کلیه سطوح.

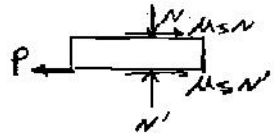
- h_{max} تا لغزش نداشته باشیم؟

اگر $P = 800N$ نیروی عمودی بین دو تخته در شرف لغزش؟



$\cos\alpha = \frac{150}{h}$

تعادل: $\mu_s N\,(150) = N h \sin\alpha \rightarrow h = 156.6\,mm$

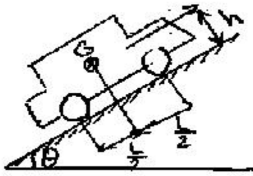


تعادل: $N = N'$

$P = \mu_s (N + N') = 2\mu_s N' \rightarrow N' = \frac{P}{2\mu_s}$

$\rightarrow N' = \frac{800}{0.6} = 1333\,N$

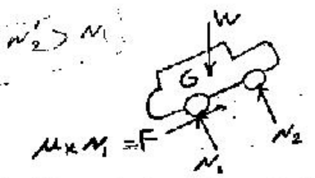
مثال: دو خودروی یکسان، یکی محرک چرخ عقب و دیگری محرک چرخ جلو، با سرعت ثابت از شیب بالا می روند. کدام خودرو در شیب بیشتری بالا می رود؟



خودروی دیفرانسیل عقب بهتر بالا می رود.
چون با سرعت ثابت چرخ جلو اصطکاک ندارد

محرک چرخ عقب:

$N_2' > N_1$



۳ معادله ی تعادل - ۳ مجهول θ, N_2, N_1

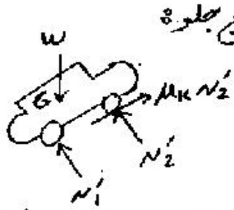
$$N_1 + N_2 = mg\cos\theta$$

$$\mu N_1 = mg\sin\theta$$

$$N_1\left(\frac{L}{2}\right) - N_2\left(\frac{L}{2}\right) - \mu N_1(h) = 0$$

$$\longrightarrow tg\,\theta = \frac{\mu}{2 - \frac{2\mu h}{L}}$$

محرک چرخ جلو:

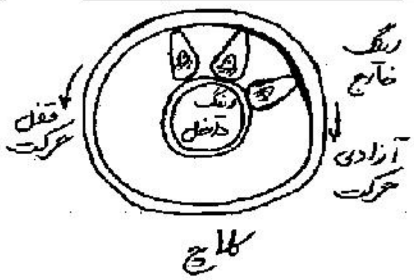


$$N_1' + N_2' = mg\cos\theta$$

$$\mu N_2' = mg\sin\theta$$

$$N_1'\left(\frac{L}{2}\right) - N_2'\left(\frac{L}{2}\right) - \mu N_2'(h) = 0$$

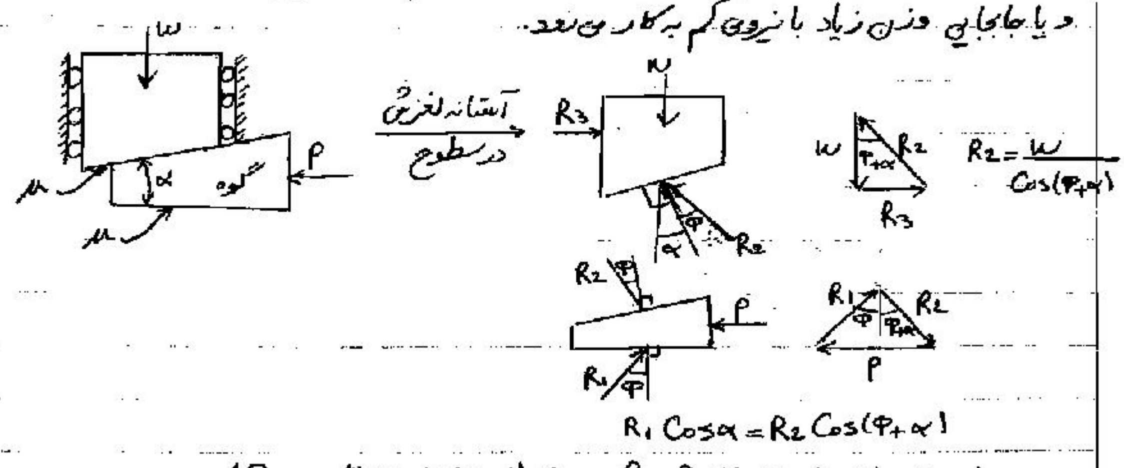
$$\longrightarrow tg\,\theta = \frac{\mu}{2 + \frac{2\mu h}{L}}$$



کلاچ

اصطکاک در ماشین ها:

گوه ها (Wedge): یک سطح شیبدار با زاویه ی شیب کم برای تنظیم دقیق موقعیت اجسام سنگین و یا جابجایی وزن زیاد با نیروی کم به کار می رود.

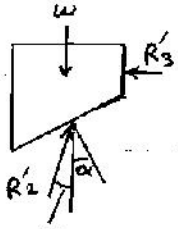


$$R_1\cos\alpha = R_2\cos(\varphi+\alpha)$$

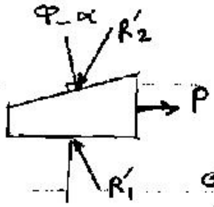
$$\uparrow P = W(tg\varphi + tg(\varphi+\alpha)) \Longleftarrow P = R_1\sin\varphi + R_2\sin(\varphi+\alpha)$$

این رابطه زمانی درست است که ضریب اصطکاک در هر دو سطح μ باشد

نیروی لازم برای بیرون کشیدن گوه (گوه خود قفل)



تعادل : $R'_2 = \frac{W}{\cos(\varphi+\alpha)}$



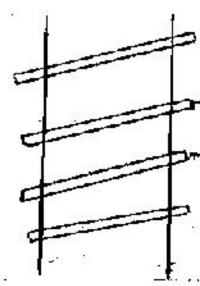
$P = R'_1 \sin\varphi + R'_2 \sin(\varphi-\alpha)$

$\downarrow P = W(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}(\varphi-\alpha))$

نیروی لازم برای پایین آوردن بار

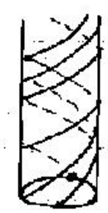
می‌خواهیم $\downarrow P > 0 \Leftarrow$ $\boxed{\text{شرط خود قفلی : } \alpha < 2\varphi}$

پیچ‌ها :



گام P (pitch)

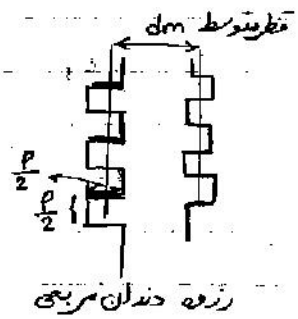
پیشروی: میزان جلو رفتن مهره روی پیچ به ازای یک دور گردش
L (Lead)

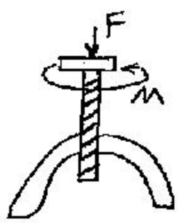


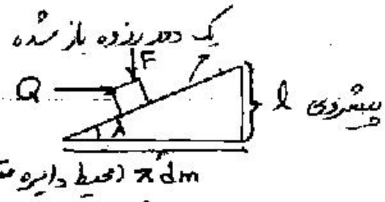
پیچ سه راهه: (مثل درب بطری)

$l = nP$

تعداد راه‌ها

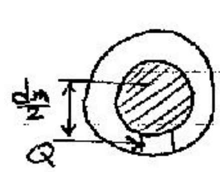






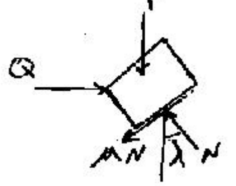
λ (زاویه پیشروی)

$\boxed{\operatorname{tg}\lambda = \frac{l}{\pi dm}}$



$M = Q\frac{dm}{2}$

حالت اول:



تعادل: $Q - N\sin\lambda - \mu N\cos\lambda = 0$

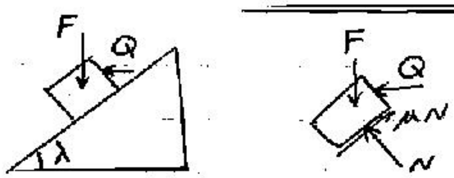
$$F - N\cos\lambda + \mu N\sin\lambda = 0$$

$$\Longrightarrow N = \frac{F}{\cos\lambda - \mu\sin\lambda}$$

(نیروی لازم برای بالا بردن) $\uparrow Q = \frac{(\sin\lambda + \mu\cos\lambda)F}{\cos\lambda - \mu\sin\lambda} = F\,tg(\lambda + \varphi)$

$\boxed{\uparrow M = \frac{F d_m}{2} tg(\lambda + \varphi)}$ ⟵ گشتاور لازم برای سفت کردن پیچ

حالت دوم:



تعادل: $Q = \mu N\cos\lambda - N\sin\lambda$

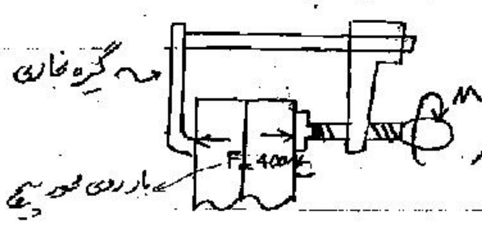
$$F = N\cos\lambda + \mu N\sin\lambda \Longrightarrow \downarrow Q = F\,tg(\varphi - \lambda) \quad \downarrow Q > 0$$

(اجسم آزاد پایین نیاید)
خود قفل باشد
$\Downarrow$
$\varphi > \lambda$

$\Longrightarrow \boxed{\downarrow M = \frac{F d_m}{2} tg(\varphi - \lambda)}$ $\Rightarrow$ گشتاور لازم برای شل کردن پیچ

* اگر پیشروی ثابت باشد و رزوه را چند راهه کنیم در مقدار گشتاورهای بدست آمده در بالا تأثیری ندارند. مزیت این حالت این است که بر رزوه ها فشار کمتری وارد می شود.
* اما اگر گام را ثابت نگهداریم و پیچ را چند راهه کنیم زاویه پیشروی بیشتر می شود.

مثال: $M = ?$



نیروی فشاری گیرندگی $400N$ ـ مفصل C بدون اصطکاک

پیچ تک راهه دندانه مربعی ـ $\mu = 0.2$ ، $l = 1.5mm$ ، $d_m = 10mm$

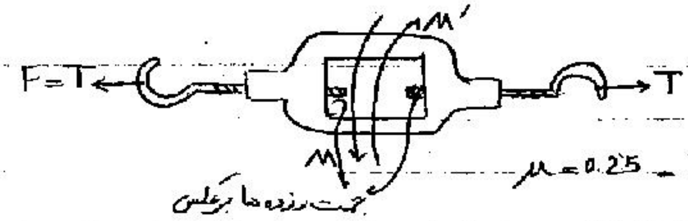
$M' = ?$ برای باز کردن گیره

$$\varphi = tg^{-1} 0.2 \Leftarrow \mu = 0.2$$

$$\lambda = tg^{-1}\frac{l}{\pi d_m} = tg^{-1}\frac{1.5}{10\pi}$$

$$M = \frac{F d_m}{2} tg(\varphi + \lambda)$$

$$M' = \frac{F d_m}{2} tg(\varphi - \lambda)$$



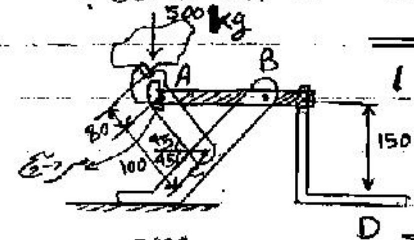
مثال: کشش کابل 40N / $M, M' = ?$

پیچ های بست مقطع مربع

قطر متوسط 30.0mm ـ پیشروی 3.5mm ـ $\mu = 0.25$

$M = 2\frac{F d_m}{2} tg(\lambda + \varphi)$ برای سفت کردن بست

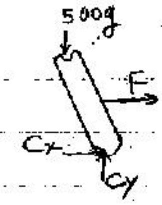
$M' = 2\frac{F d_m}{2} tg(\varphi - \lambda)$ برای شل کردن بست



(شکل ۳-۷۵)

مثال: $d_m = 10mm$ ، $l = 2mm$ ، $\mu = 0.2$

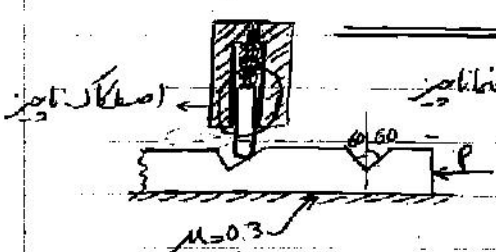
نیروی P بر دسته‌ی جک؟ برای بالا بردن و پایین آوردن بار



$\Sigma M_C = 0 \longrightarrow F(100\sin45) = 500 \times 9.81 \times (180\cos45) \rightarrow F = 8830N$

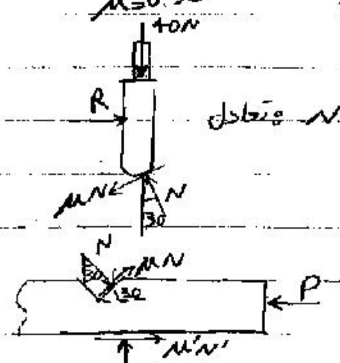
$\uparrow M = \frac{8830 \times 0.010}{2} tg\left(tg^{-1}0.2 + tg^{-1}\frac{2}{\pi \times 10}\right) = P(0.150) \rightarrow P = 78.6N$

$\downarrow M = \frac{8830 \times 0.010}{2} tg\left(tg^{-1}0.2 - tg^{-1}\frac{2}{\pi \times 10}\right) = P(0.150) \rightarrow P = 39.6N$



مثال: نیروی فنر فشاری 40N ، P = 60N / اصطکاک بین انگشتی و راهنما ناچیز

ضریب اصطکاک بین میله و شکاف؟

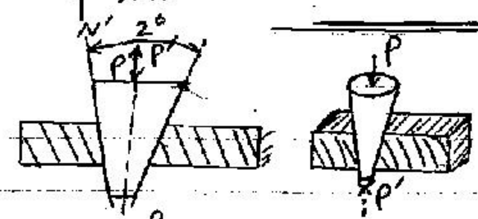


تعادل: $N\cos30 - \mu N\sin30 = 40$ ①

② تعادل قائم: $N' - N\cos30 + \mu N\sin30 = 0$

③ تعادل افقی: $-P + N\sin30 + \mu N\cos30 + 0.3N' = 0$

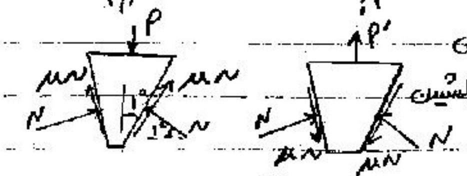
$\Longrightarrow \mu = 0.368 \quad (N = 58.6N \ , \ N' = 40N)$



مثال: پین مخروطی ، $P' = 300N$ ، $P = 400N$

جا زدن پین ـ بیرون کشیدن پین

μ بین پین و سطح سوراخ = ?



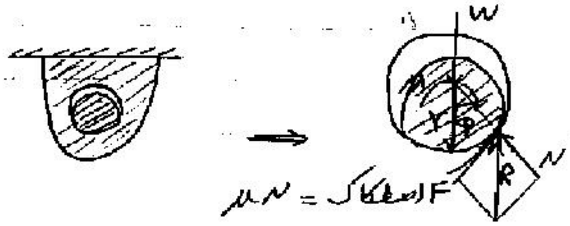
جا زدن: $-P + 2N\sin1 + 2\mu N\cos1 = 0$

بیرون کشیدن: $P' + 2N\sin1 - 2\mu N\cos1 = 0$

$\longrightarrow \mu = 0.122$

* فشار در سطح پین تا هنگامی که پین عملاً حرکت نکند، ثابت می‌ماند. $\Rightarrow$ N ثابت

یاتاقان های ژورنال :



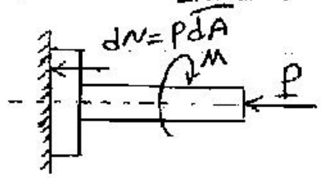
تعادل $R=W$

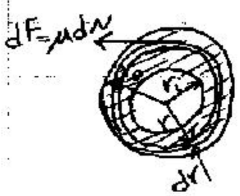
F اصطکاک $= \mu N$

$$M = Wr\sin\varphi \xrightarrow[\text{کوچک}]{\text{برای زاویه اصطکاک}} \sin\varphi \simeq tg\,\varphi = \mu \Longrightarrow M \simeq Wr\mu$$

مقدار گشتاور برای غلبه بر اصطکاک یاتاقان ژورنال خشک

اصطکاک کف گرد (دیسکی) :





مسأله دارای تقارن محوری است ← جزء حلقه ای

فشار تولید شده ی P در سطح

$$M = \int_{r_i}^{r_o} r\,dF = \int_{r_i}^{r_o} \mu \underset{\text{فشار}}{p}\, r\, dA$$

فرض فشار یکنواخت (دیسک نو) ← ثابت $= p$

$$(\text{فشار})\ p = \frac{P\ (\text{نیرو})}{\pi(r_o^2 - r_i^2)} \rightarrow M = \int_{r_i}^{r_o} 2\pi\mu r^2 \frac{P}{\pi(r_o^2 - r_i^2)}\, dr$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{2}{3}\mu P \frac{r_o^3 - r_i^3}{r_o^2 - r_i^2}} \longrightarrow \text{برای حلقه}$$

برای دایره ی کامل با شعاع R :

$$\boxed{M = \frac{2}{3}\mu \underset{\text{نیرو}}{P} R}$$

فرض سایش یکنواخت (دیسک کارکرده) :

سایش $\propto$ فشار $\times$ سرعت $\longrightarrow p = \frac{K}{r}$

سرعت: متناسب با شعاع

$$P = \int \underbrace{p\,dA}_{dN} \longrightarrow K = ?$$

$$\boxed{M = \frac{1}{2}\mu P (r_o + r_i)}$$

برای دایره ی کامل با شعاع R :

$$\boxed{M = \frac{1}{2}\mu \overset{\text{نیرو}}{P} R}$$

* این روابط را برای قطاعی از دایره نیز می توان به کار برد (لنت ترمز دیسکی)

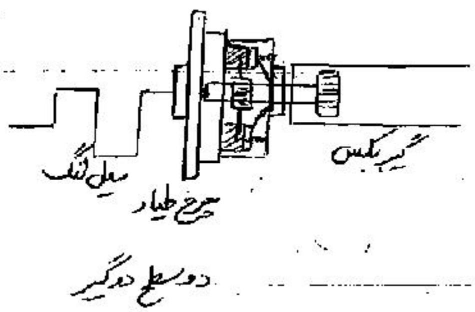
مقدار این زاویه تأثیری در گشتاور ندارد. ←

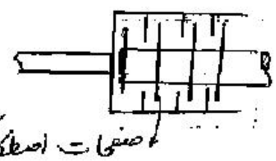
ترمز ← $\mu = \mu_k$

کلاچ ← $\mu_s = \mu$ (چون می خواهیم لغزش وجود نداشته باشد)

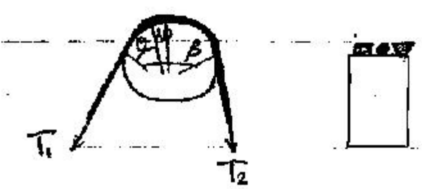
کلاچ:

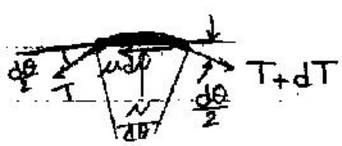
استفاده از دیسک های متعدد





تسمه های انعطاف پذیر تخت (تماس با سطح تخت):





$$dN = T\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + (T+dT)\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \longrightarrow dN = T\,d\theta$$

$$T\underbrace{\cos\frac{d\theta}{2}}_{1} + \mu\,dN = (T+dT)\underbrace{\cos\frac{d\theta}{2}}_{1}$$

$$\Rightarrow dT = \mu\,dN = \mu T\,d\theta \rightarrow \int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = \int_0^{\beta}\mu\,d\theta$$

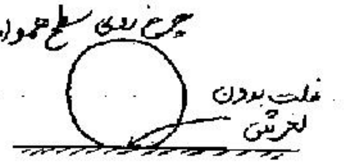
$$\Rightarrow \ln\frac{T_2}{T_1} = \mu\beta \Rightarrow \boxed{\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\beta}} \quad T_2 > T_1$$

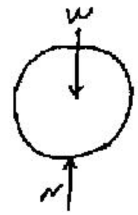
رادیان

* β می تواند بیش از 2π باشد.
* حتی اگر سطح دایره ای هم نباشد باز هم می توان از روابط بالا استفاده کرد.

مقاومت غلتشی:

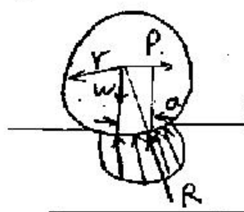
چرخ روی سطح هموار





دیاگرام آزاد چرخ با سرعت ثابت.

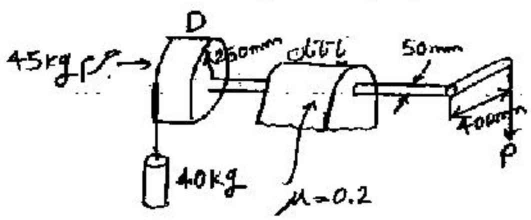
چرا حرکت چرخ کند می‌شود؟



ضریب مقاومت غلتشی $\mu_r = \frac{a}{r}$

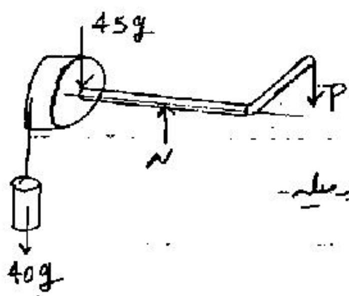
نیروی لازم برای باز نایستادن چرخ $P = \mu_r W$

مثال: در دو حالت:
(1) اصطکاک قابل چشم پوشی باشد
(2) اصطکاک محسوب شود



P لازم برای بالابردن و پایین آوردن بار؟

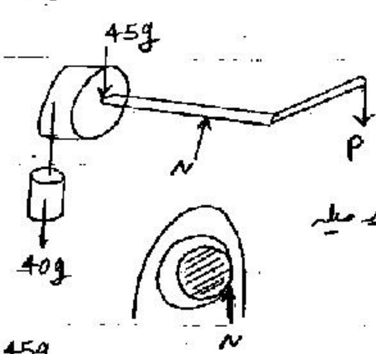
بدون اصطکاک:



گشتاور حول محور میله $P(400) = 40g(250) \rightarrow P$ ✓

برای بالابردن یا پایین آوردن بار یکسان است.

با اصطکاک:



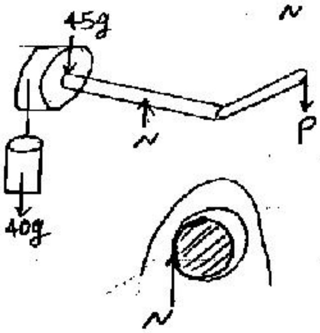
بالابردن بار: $N = P + 85g$: تعادل قائم

$\varphi = tg^{-1}(0.2)$ $\quad \frac{50}{2}$

گشتاور حول محور میله: $P(400) = 40g(250) + Nr\sin\varphi$

$$P = \frac{40g(250) + 85g(25)\sin(tg^{-1}0.2)}{400 - 25\sin(tg^{-1}0.2)}$$

پایین آوردن بار:

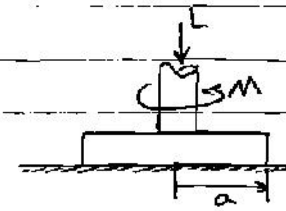


$N = P + 85g$

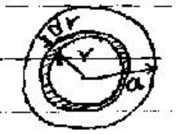
گشتاور حول محور میله $P(400) + Nr\sin\varphi = 40g(250)$

$$\rightarrow P = \frac{40g(250) - 85g(25)\sin(tg^{-1}0.2)}{400 + 25\sin(tg^{-1}0.2)}$$

مثال: ضریب اصطکاک μ . $M = f(L) = ?$



$P = \frac{-rP_0}{2a} + P_0 = P_0(1-\frac{r}{2a})$

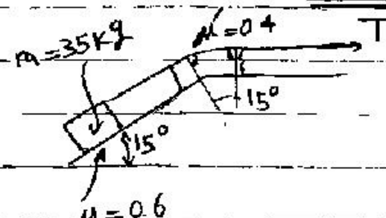


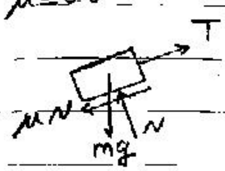
$L = \int \overbrace{PdA}^{dN} = 2\pi P_0 \int_0^a (1-\frac{r}{2a})\, r\,dr = 2\pi P_0\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{6}\right) = \frac{2}{3}\pi P_0 a^2$

$\rightarrow P_0 = \frac{3L}{2\pi a^2}$

$M = \int r\mu\, dN = 2\pi\mu P_0 \int_0^a (1-\frac{r}{2a})\, r^2 dr = 2\pi\mu P_0\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{8}\right) = \frac{5}{8}\mu L a$

مثال: $T = ?$ برای بالا کشیدن جسم





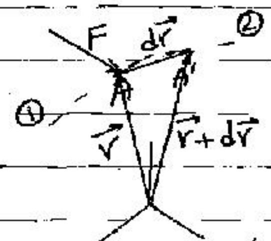
$N = mg\cos 15$

$T' = mg\sin 15 + \mu N = mg(\sin 15^\circ + \mu\cos 15^\circ)$

$\frac{T}{T'} = e^{\mu'\beta} \rightarrow T = mg(\sin 15 + \mu\cos 15)\, e^{\mu'\frac{\pi}{12}} = 320N$

کار مجازی:

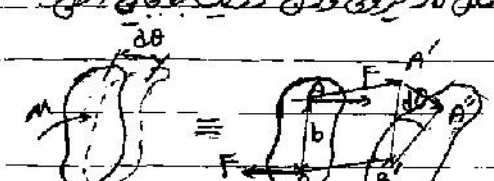
کار یک نیرو:



جزء کار $dU = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ← کل کار $U = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$

* اگر نیرو عمود بر جابجایی باشد کار انجام نمی دهد. مثل کار نیروی وزن در یک جابجایی افقی

کار یک کوپل:



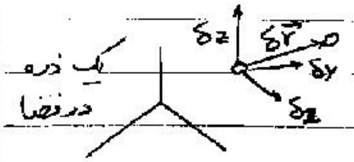
$M = Fb$

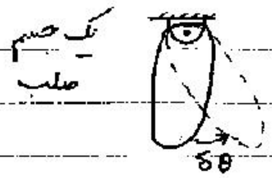
$A'A'' = b\,d\theta \rightarrow \underbrace{dU}_{\text{کار کوپل}} = F(A'A'')$

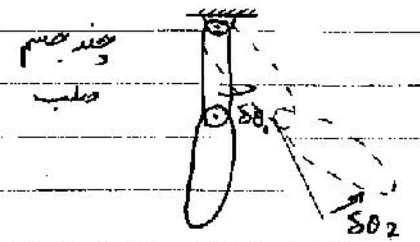
$= Fb\,d\theta = M\,d\theta$

جابجایی مجازی :

منظور از جابجایی مجازی یک جابجایی فرضی بی نهایت کوچک سازگار با قیود سیستم و مطابق با درجات آزادی آن است. این جابجایی را با پیشوند δ (به جای d) نشان می دهیم.



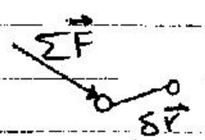




اصل کار مجازی :

اگر یک سیستم (یک ذره، یک جسم صلب، مجموعه ای از اجسام صلب) تحت بارهای وارده، در حال تعادل باشد، کار مجازی این بارها در هر جابجایی مجازی صفر است.

کار مجازی برای یک ذره :



کار مجازی $\delta U = \sum \vec{F}\cdot\delta\vec{r} = \sum F_x\,\delta x + \sum F_y\,\delta y + \sum F_z\,\delta z$

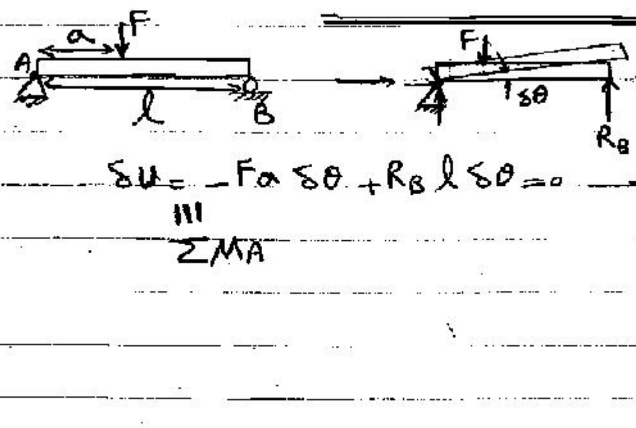
$\xrightarrow[\text{کار مجازی}]{\text{طبق اصل}} \sum F_x\,\delta x + \sum F_y\,\delta y + \sum F_z\,\delta z = 0$

اگر $\delta x \neq 0 \rightarrow \delta y = \delta z = 0 \rightarrow \sum F_x = 0$

$\delta y \neq 0 \rightarrow \delta x = \delta z = 0 \rightarrow \sum F_y = 0$

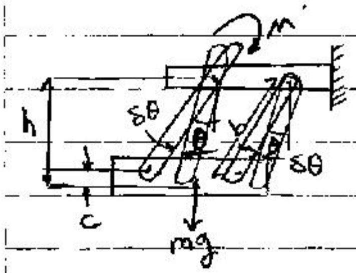
$\delta z \neq 0 \rightarrow \delta x = \delta y = 0 \rightarrow \sum F_z = 0$

کار مجازی برای یک جسم صلب :



$\underset{\sum M_A}{\underset{|||}{\delta U}} = -Fa\,\delta\theta + R_B\, l\,\delta\theta = 0 \rightarrow R_B\, l - Fa = 0 \rightarrow R_B \checkmark$

مجموعه‌ای از اجسام صلب با امکان حرکت نسبی (ماشین ـ مکانیزم)



مثال: $M = ?$

$$h = b\cos\theta + c$$

$$h' = b\cos(\theta - \delta\theta) + c$$

$$\cos\theta \cancel{\cos\delta\theta} + \sin\theta \sin\delta\theta$$

$$h' = b(\cos\theta + \sin\theta\,\delta\theta) + c$$

$$\delta h = h' - h = b\sin\theta\,\delta\theta$$

اصل کار مجازی — $\delta U = M\delta\theta + mg\,\delta h = 0 \Rightarrow M = mgb\sin\theta$

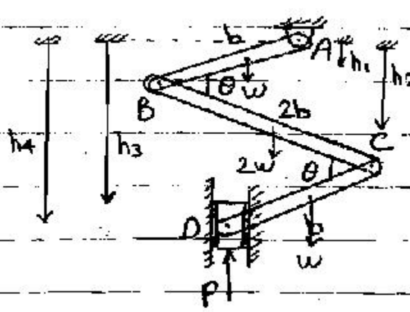
مثال: میله‌ها یکنواخت به جرم ρ بر واحد طول

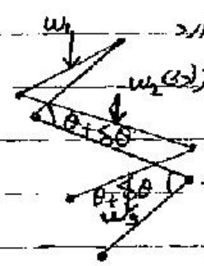
$P = ?$ برای تعادل

با فرض حرکت متقارن، این سیستم یک درجه آزادی است.

(در اصل دستگاه دو درجه آزادی دارد

اما چون دو زاویهٔ θ برابرند پس یک درجه آزادی کاهش داریم)





$$\frac{\theta}{2} \rightarrow \frac{\theta + \delta\theta}{2}$$

$h_1 = \frac{b}{2}\sin\frac{\theta^*}{2} \longrightarrow dh_1 = \frac{b}{4}\cos\frac{\theta^*}{2}\,d\theta^* \xrightarrow{\theta^* = \theta} dh_1 = \frac{b}{4}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta^*$

$h_2 = 2b\sin\frac{\theta^*}{2} \longrightarrow dh_2 = b\cos\frac{\theta^*}{2}\,d\theta^* \xrightarrow{\theta^* = \theta} dh_2 = b\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta^*$

$h_3 = \frac{7}{2}b\sin\frac{\theta^*}{2} \longrightarrow dh_2 = \frac{7}{4}b\cos\frac{\theta^*}{2}\,d\theta^* \xrightarrow{\theta^* = \theta} dh_3 = \frac{7}{4}b\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta^*$

$h_4 = 4b\sin\frac{\theta^*}{2} \longrightarrow dh_4 = 2b\cos\frac{\theta^*}{2}\,d\theta^* \xrightarrow{\theta^* = \theta} dh_4 = 2b\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta^*$

اصل کار مجازی: $\delta U = 0 \rightarrow w\,dh_1 + 2w\,dh_2 + w\,dh_3 - P\,dh_4 = 0 \rightarrow P = 2w$

$\rightarrow \boxed{P = 2\rho b g}$