

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## جزوه

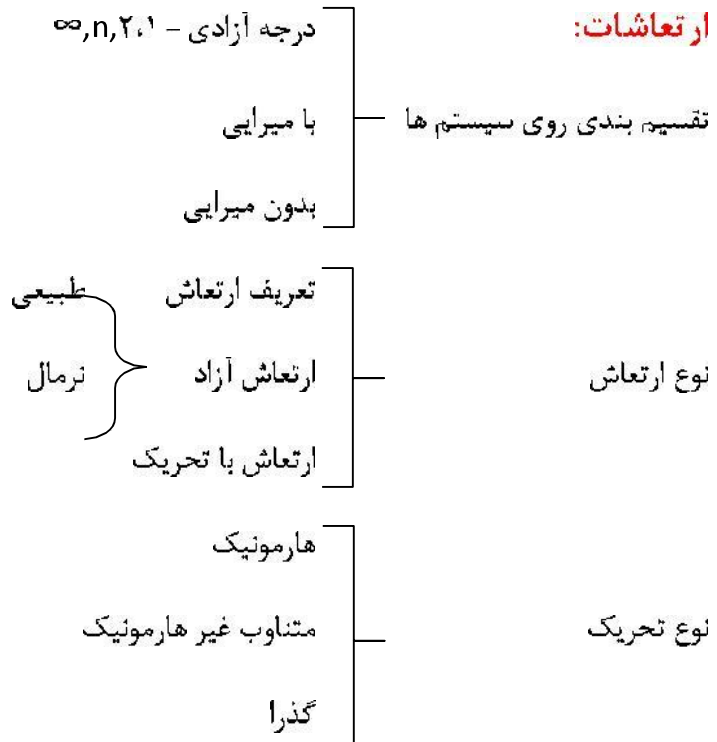
ارتعاشات

## دانشگاه

صنعتی امیر کبیر

## استاد

دکتر بختیاری نژاد



ارتعاش یک نوع حرکت ویژه است.

Conoeruatvie ← انرژی را خودش نگه می دارد ← غیر میرا

Nonconoertuie ← انرژی را تلف کرده و به حرارت تبدیل می کند ← میرا

میرایی خود چندین نوع دارد؟ میرایی یعنی آنچه که انرژی را به حرارت تبدیل می کند.

حرکت انواع مختلف دارد:

حرکت در پدیده استاتیکی ← سرعت ثابت یا ساکن ← سیالاتی که ما بررسی می کنیم در واقع استاتیکی است.

حرکت در پدیده دینامیکی ← حرکت شتابدار

حرکت ارتعاشی در واقع زیر مجموعه حرکت دینامیکی است.

ارتعاش آزاد: سیستم به صورت طبیعی ارتعاش می کند.

در سیستم های دو درجه آزادی به بالا ، ارتعاش آزاد دارای تقسیم بندی خواهد بود.

تحریک : نیرویی که از خارج به سیستم وارد می شود.

تحریک هارمونیک: ساده ترین تحریک  $\leftarrow$  به صورت  $\sin$  و  $\cos$  یا ترکیبی از این دو است. (همگی متناوب اند)

- ۱- ارتعاش آزاد سیستم های یک درجه آزادی بدون میرایی
- ۲- ارتعاش آزاد سیستم های یک درجه آزادی با میرایی ساده
- ۳- ارتعاش آزاد سیستم های یک درجه آزادی با میرایی غیرخطی
- ۴- ارتعاش با تحریک هارمونیک و متناوب با میرایی سیستم های یک درجه آزادی
- ۵- ارتعاش با تحریک گذرای سیستم های با میرایی یک درجه آزادی
- ۶- ارتعاش آزاد سیستم های دو درجه آزادی با میرایی
- ۷- ارتعاش با تحریک هارمونیک سیستم های دو درجه آزادی با میرایی
- ۸- ارتعاش با تحریک گذرای سیستم های دو درجه آزادی
- ۹- ارتعاش آزاد سیستم های با میرایی  $n$  درجه آزادی
- ۱۰- ارتعاش با تحریک هارمونیک سیستم های  $n$  درجه آزادی ساده
- ۱۱- ارتعاش آزاد سیستم های  $\infty$  درجه آزادی ساده

درجه آزادی: حداقل تعداد محورهای مختصاتی که برای تحلیل یک سیستم نیاز داریم.

گاهی تعداد درجه آزادی های یک سیستم خیلی بیشتر از تعدادی است که ما برای تحلیل سیستم نیاز داریم . مثلا یک خودرو دارای ۱۷ یا بیشتر درجه آزادی است.

برای بررسی آرامش در یک خودرو ۲ درجه آزادی در نظر می گیریم.

برای بررسی امنیت در یک خودرو ۸ درجه آزادی در نظر می گیریم.

برای بررسی آرامش و امنیت در یک خودرو ۱۲ درجه آزادی در نظر می گیریم.

مثال هایی برای سیستم های یک درجه آزادی:

چرخ در حال حرکت (سیستم دینامیکی)

اگر چرخ بدون لغزش (علتش خالصی) حرکت کند،  $v_0$  و  $\omega$  به هم وابسته اند پس سیستم یک درجه آزادی است.



$$s_0 = r\theta \quad v_0 = r\omega$$

ارتعاشات: حرکت تکراری

ولی بعضی از ارتعاشات تکرار نمی شوند! در حرکت ارتعاشی باید عوامل ارتعاشی وجود داشته باشد

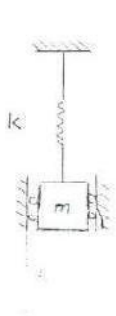
سیستم های یک درجه آزادی ارتعاشی:

دو عامل باعث حرکت ارتعاشی (تکراری) می شوند.

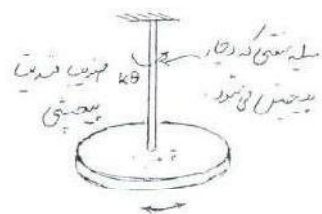
۱- سیستم هایی که دارای سر جرم باشد.

۲- سیستم هایی که دارای جرم + تغییر ارتفاع اند.

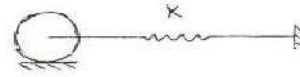
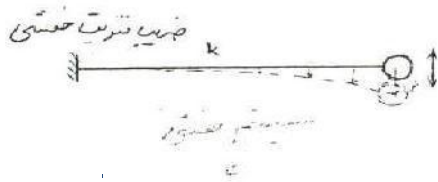
اگر در سیستمی عامل انرژی جنبشی و عامل انرژی پتانسیل وجود داشته باشد آن سیستم ارتعاشی است.



جرم سر و فنر ارتباط  
دارد و در یک مقیاس بزرگ کلید  
این سیستم ظاهر است.



دیسکی که در اثر جرم فنر متصل  
به صورت ارتعاشی می چرخند.



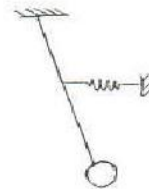
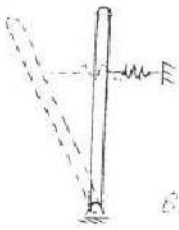
A: انرژی پتانسیل وزنی

B: انرژی پتانسیل الاستیک

انرژی استاتیکی: فشرده و کشیده شدن فنر و تغییر فنر

حرکت ارتعاشی: داد و ستد بین انرژی جنبشی (T) و پتانسیل (U) وجود داشته باشد.

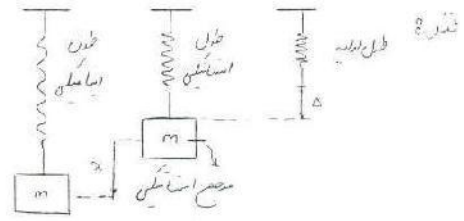
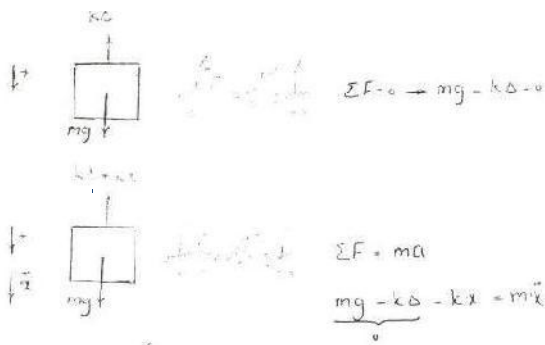
اگر سیستم conservation باشد و انرژی در آن ذخیره شود و به حرارت تبدیل نشود سیستم تا ابد ارتعاش می کند ولی در واقعیت بخشی در انرژی به دلایلی تبدیل به حرارت می شود و پس از مدتی سیستم از ارتعاش باز می ایستد. سیستم های ارتعاشی از یکی از خانواده A و B یا ترکیبی از هر دو اند.



تئوری های ارتعاشات، روی دو حالت ساده A و B بررسی می شود.

پارامتر: مشخصات فیزیکی سیستم که معمولاً ثابت اند.

متغیر: این سه متغیر به هم وابسته اند.



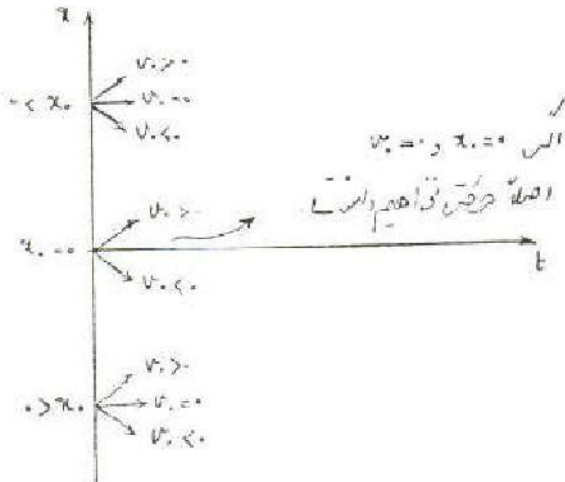
توجه: در صورتی که مقدار  $x$  مثبت باشد، نیروی فنر به سمت بالا و در صورتی که  $x$  منفی باشد، نیروی فنر به سمت پایین.

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن ضرایب ثابت

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن ضرایب ثابت}$$

حل هر معادله دیفرانسیل به شرایط اولیه نیاز دارد.

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$



حل: شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم تا ببینیم در هر لحظه  $x$  چه مقداری می‌گیرد.

$$x(t) = ?$$

$$\frac{d}{dt} = D \quad \text{...}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D^2$$

$$\rightarrow mD^2x + kx = 0 \rightarrow (mD^2 + k)x = 0 \rightarrow mD^2 + k = 0$$

هرگاه ریشه معادله مشخصه موهومی باشد، جواب تابعی هارمونیک است.

$$\rightarrow D^2 = -\frac{k}{m} \rightarrow D_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\rightarrow x(t) = x_1 e^{j\sqrt{\frac{k}{m}}t} + x_2 e^{-j\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

!

$$x(t) = A \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + B \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

در سیستم های ارتعاشی ضریب  $kx$  باید مثبت باشد تا اوپراتور به صورت موهومی درآید و تابع هارمونیک باشد. اگر ضریب  $kx$  منفی باشد حاصل دیگر تابعی هارمونیک نیست.

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0 \end{cases}$$

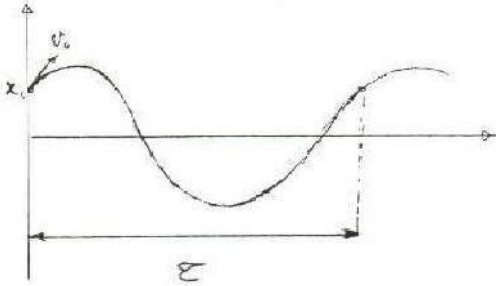
$$\rightarrow B = x_0$$

$$\rightarrow \dot{x}(0) = v_0 = A \sqrt{\frac{k}{m}} - B \sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0\right)$$

$$B = x_0$$

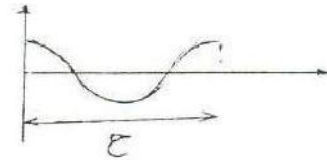
$$x(t) = \frac{u_0}{\sqrt{k/m}} \sin \sqrt{k/m} t + x_0 \cos \sqrt{k/m} t$$

$$A = \frac{u_0}{\sqrt{k/m}}$$



حالت ساکن  $\rightarrow v_0 = 0$   
 $x(0) = x_0$

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{k/m} t$$



$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \sqrt{\frac{N/m}{kg}} = \frac{1}{\text{Sec}} \rightarrow \frac{\text{rad}}{\text{Sec}}$$

$$\frac{\text{Sec}}{\text{rev}} \rightarrow \frac{\text{Sec}}{2\pi} \rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

XaufG : رابطه بین  $\omega_n$  و  $f_n$  - کاربرد هر کدام (اگر به هم ارتباطی دارند)  $f_n$  (ht, rpm)

یعنی اگر هر دو یک ماهیت را نشان می دهند، کاربرد هر یک در کجاست؟  $\omega_n$  (rad/sec)

$$(T^{-1}) \text{ واحد } f_n \text{ } \frac{\text{rev}}{\text{sec}}$$

$$(T^{-1}) \text{ واحد } \omega_n \leftarrow \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$



کیفیت  $t_n$  یک کیفیت قابل اندازه گیری در آزمایشگاه است (با وسایل اندازه گیری موجود) مثل درجه سانتیگراد یا فشار gage ، ولی مثل فشار مطلق یا درجه کلوین، کمیتی است که در روابط مورد استفاده قرار می گیرد در واقع ما  $f_n$  را اندازه گیری می کنیم و با تبدیل آن به  $W_n$  ، از آن در روابط استفاده می کنیم.

$$f_n = \frac{1}{\tau_n} \rightarrow \omega_n = 2\pi f_n$$

برای سیستم هایی که نوسان و یا فوران می کنند:

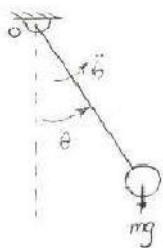
$$\omega_n = \sqrt{k/m} \text{ rad/sec}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \text{ sec/rev}$$

$$f_n = 2\pi \omega_n \text{ rev/sec (Hz, rpm)}$$

آونگ: چون گلوله را جدا نکردیم، به جز وزن، فقط باید شتاب را روی شکل نشان دهیم.

همیشه جهت مثبت شتاب را در جهت  $\theta$  می گیریم



$$\sum M_o = I_o \ddot{\theta} \Rightarrow -mg\ell \sin\theta = I_o \ddot{\theta}$$

معادله دیفرانسیل غیرخطی - همگن - مرتبه دو  $\Rightarrow I_o \ddot{\theta} + mg\ell \sin\theta = 0$

چون انرژی پتانسیل در اثر تغییر ارتفاع وزن ایجاد شده، وزن وارد معادله می شود.

چون انرژی پتانسیل از فنر می آید نه از جرم، وزن وارد معادله نمی شود.



$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad x(t) = \frac{u_0}{\sqrt{k/m}} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t$$

در حالتی که شتاب تابعی از مکان بود،  $a=f(s)$ ، داشتیم:  $v dv = a ds$  پس:

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl}{I_o} \sin\theta \Rightarrow w dw = \ddot{\theta} d\theta$$

$$w dw = \frac{mgl}{I_o} \sin\theta d\theta \Rightarrow \frac{w^2}{2} \Big|_{w_0}^w = \frac{mgl}{I_o} \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta d\theta$$

$$w^2/2 = w_0^2/2 + \frac{mgl}{I_o} (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$w = \sqrt{w_0^2 - \frac{2mgl}{I_o} \cos\theta + \frac{2mgl}{I_o} \cos\theta_0}$$

ولی ما  $\theta$  را بر حسب  $t$  می خواهیم. پس:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{a+b} \cos\theta$$

$$\rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} dt = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{a+b} \cos\theta}$$

این انتگرال nosolvable است و این معادله دیفرانسیل هم غیر قابل حل است.

Hauf GI : با نرم افزار mathematica یا mapple می توان این انتگرال را حل کرد. ولی در واقع این

نرم افزار با استفاده از حل عددی نمودار جواب را می کشد و با قرار دادن یک منحنی معادل ( fitting

curve) معادله منحنی را با خطای کمتر از 1% می دهد.

برای زوایای کوچک:

$$\text{if } \theta \approx \theta_0 \Rightarrow \frac{\sin\theta - \theta}{\cos\theta - 1}$$

$$I\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \quad w_n = \sqrt{\frac{mgl}{I_o}}$$

برای آونگ ساده : جرم در گلوله کوچک بدون بعد (ابعاد خیلی کم) متمرکز است.

$$I_o = I_G + ml^2 \rightarrow I_G = ml^2, w_n = \sqrt{g/l}$$

آونگ ساده برای اندازه گیری شتاب ثقل استفاده می شود. (ابزار اندازه گیری شتاب ثقل در جاهای مختلف)

Hauf G. به صورت بالا شتاب ثقل را در خانه بدست آوردیم.

خطای مجازی در مهندسی: 7% تا 2%

زیر 2% ← غیر عملی و غیر عقلانی و غیر اقتصادی

2 تا 5% ← رنج معمولی خطا (مخصوصاً 1.5)

2% ← مسائلی که اهمیت جانی و حیاتی دارند

7% ← مسائلی که دارای اهمیت کمتری هستند (برای حفظ هزینه)

$\theta$  های کوچک یعنی تا  $30^\circ$  که 4% خطا دارد.

$$\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\sin \theta = 0.5$$

$$\frac{\theta - \sin \theta}{\theta} = \frac{0.02}{0.52} \times 100 = 3.8\%$$

هواپیما های جنگی چون نیاز به قدرت مانور بالا دارند روی 4% خطا ساخته می شوند، ولی هواپیما های

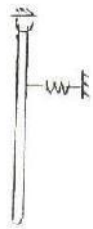
مسافر بری با 2% خطا ساخته می شوند.

(a) گاهی  $mg$  درون معادله، روی فرکانس طبیعی تاثیر می گذارد مثل  $m\ddot{x} + \frac{mg}{l}x + kx = 0$

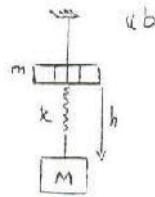
(b) گاهی  $mg$  درون معادله وارد می شود ولی فرکانس طبیعی تاثیر می گذارد مثل  $m\ddot{x} + kx = mg$

(c) گاهی اصلاً  $mg$  درون معادله دیفرانسیل وارد نمی شود.  $m\ddot{x} + kx = 0$

در لحظه  $t=0$  از ارتفاع  $h$  رها می شود و روی  $m$  قرار می گیرد و با آن ارتعاش می کند.



a

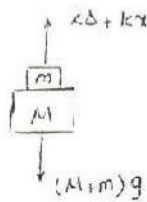


$$(M+m)g - k\Delta - kx = (M+m)\ddot{x}$$

$$mg = kx + (M+m)\ddot{x}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

$$k\Delta = Mg$$



$$x(0) = 0$$

سقوط جرم m، یک سرعت اولیه به M برای ارتعاش می دهد

← اندازه حرکت قبل از برخورد - اندازه حرکت بعد از برخورد

$$(M+m)\ddot{x}(0) = m\sqrt{2gh} \rightarrow X(\cdot) = \frac{M\sqrt{2gh}}{M+m}$$

چون معادله غیر همگن است، در جواب حاصل باید یک قسمت غیر همگن هم داشته باشیم.

$$x(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t + \frac{mg}{k}$$

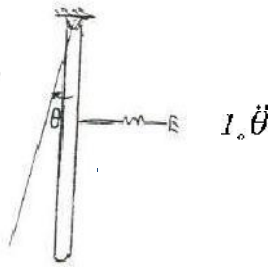
برای پیدا کردن قسمت غیر همگن، خصوصاً وقتی معادله عدد صحیح است، قسمت دینامیکی مساله

(ضریب  $\ddot{x}$  و...) را صفر می کنیم و X حاصل، جواب غیر همگن یا خصوصی مساله است.

$$0 = A(0) + B \frac{mg}{k} \rightarrow B = -\frac{mg}{k}$$

$$\dot{X}(t) = A \omega_n \cos \omega_n t - (-B \omega_n \sin \omega_n t) \rightarrow \frac{m\sqrt{2gh}}{M+m} - \omega_n \sin 0 = 0 \rightarrow A = \frac{m\sqrt{2gh}}{\omega_n(M+m)}$$

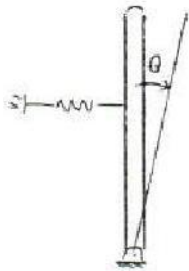




$$+k \frac{\ell}{2} \theta - mg \ell \theta = 0$$

$$w_n = \sqrt{\frac{k \frac{\ell}{2} + mg \ell}{I_0}}$$

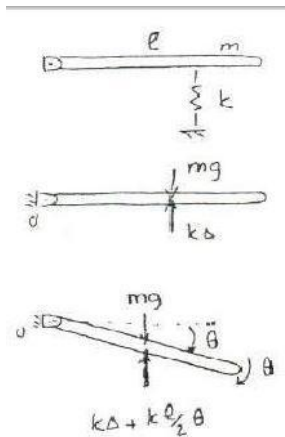
سیستم ن پایدار، اگر  $k \frac{\ell}{2} > mg \ell$  ارتعاش داریم وگرنه سیستم فقط به تعادل می رسد.



$$-K \frac{\ell}{2} \theta - mg \ell \theta = 0$$

$$I_0 \ddot{\theta} = \sqrt{\frac{k \frac{\ell}{2} - mg \ell}{I_0}}$$

چون وزن فنر و میله در ابتدا توسط فشردگی فنر خنثی شده پس نیروی متغیری نیست و عمدا وارد مساله نمی شود و نیروی ارتعاشی نیست.



$$\sum m_i = 0$$

$$k \frac{\ell}{2} = mg \frac{\ell}{2}$$

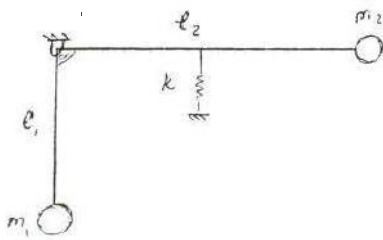
$$\sum m_i - I_0 \ddot{\theta}$$

$$mg \frac{\ell}{2} - k \frac{\ell}{2} - k \frac{\ell}{2} \theta \frac{\ell}{2} = I_0 \ddot{\theta}$$

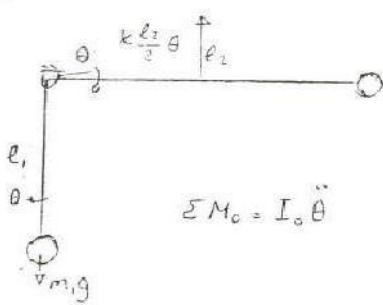
$$I_0 \ddot{\theta} + k \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \theta = 0$$

اگر با تغییر وزن، میزان فشردگی یا کشیدگی اولیه فنر تغییر کند وزن وارد مساله نمی شود ولی اگر وزن ارتباطی به فنر نداشته باشد وارد معادله دیفرانسیل می شود.

مثلا در این مثال، چون در حالت استاتیکی  $L_2$  افقی و  $L_1$  عمودی است،  $m_2$  روی  $\Delta$  تاثیر می گذارند ولی  $m_1$  نه! پس  $m_1 g$  وارد معادله دیفرانسیل می شود.

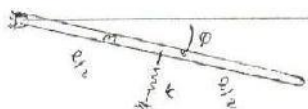


$$\sum m_o - I_o \ddot{\theta}$$



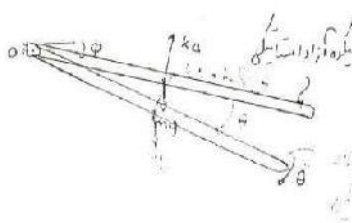
$$k \frac{l_2}{2} \theta - m_2 g \frac{l_2}{2} - I_o \ddot{\theta}$$

$$W_n = \sqrt{\frac{k(\frac{l_2}{2})^2 + m_1 g l_1}{I_o}}$$



$$\sum m_o = I_o$$

$$mg \frac{l}{2} \cos - k \frac{l}{2} = 0$$



$$\sum m_o - I_o \ddot{\theta}$$

$$mg \frac{l}{2} \cos(\theta - \varphi) - k \left[ \frac{l}{2} - k \frac{l}{2} \theta \right] = I_o \ddot{\theta}$$

$\ddot{\theta}$  زاویه کوچکی است:

$$a) \cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \quad | \quad \cos \varphi$$

$$\Rightarrow I_o \ddot{\theta} - k \left( \frac{l}{2} \right)^2 \theta = 0$$

$$b) \cos(\theta + \varphi) = \cos \varphi - \theta \sin \varphi$$

$$\Rightarrow I_o \ddot{\theta} - k(\ell/2)^2 \theta - mg \ell/2 \sin \varphi = 0 \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k(\ell/2)^2 + mg \ell/2 \sin \varphi}{I_o}}$$

به شرطی که فنر بر میله عمود باشد این حالت کامل ترین حالت است چون با توجه به مقدار  $\varphi$  میله حالت افقی و عمودی را هم در برمی گیرد.



$$\sum M_o = 0$$

$$mg = kll$$

$$I_o \ddot{\theta} - mg \ell/2 \cos(\varphi + \theta) - k \ell/2 \cos(\varphi + \theta) - k \ell/2 \theta \ell/2 \cos(\varphi + \theta)$$

$$I_o \ddot{\theta} + k(\ell/2)^2 \theta \cos(\varphi + \theta) = 0$$

$$a) \cos(\varphi + \theta) = 1$$

$$b) \cos(\varphi + \theta) = \cos \varphi$$

$$c) \cos(\varphi + \theta) = \cos \varphi - \theta \sin \varphi \rightarrow \sin \varphi \theta^2 = 0$$

$$I_o \ddot{\theta} + k(\ell/2)^2 \theta \cos \varphi = 0$$

در ارتعاشات سه عامل وجود دارد: انرژی، پتانسیل و کاری که به حرارت تبدیل می شود.

در سیستم های که conservative عامل damping و نیروی خارجی وجود ندارد،  $T+U=C$  که C مقدر ثابت است.

- عامل اصلی انرژی جنبشی سرعت است. (متغیر  $\dot{x}$ ) و پارامتری که در انرژی جنبشی اثر دارد m (در حرکت خطی) و ممان اینرسی (در حرکت زاویه ای) است.

$$T = T(\dot{x}, m, x) = T(\dot{U}, I, U)$$

انرژی پتانسیل به صورت استاتیکی است که دو حالت دارد:

$$U = U(K, X) \text{ (در اجسام انعطاف پذیر)}$$

انرژی پتانسیل گرانشی که تابعی از شتاب ثقل و جرم است و متغیر تاثیر گذار در آن ارتفاع است. (تغییرات

$$\square U = U(mg, h) \text{ (g ثابت است)}$$

خود انرژی پتانسیل در اثر وزن تعریف نمی شود یعنی به صورت مطلق وجود ندارد و در واقع تغییرات آن را

می توانیم به صورت مطمئن بررسی کنیم، ولی در فتر می توان انرژی پتانسیل کشسانی مطلق تعریف کرد

چون X نسبت به طول آزاد فنر اندازه گیری می شود.

شتاب ثقل در محدوده جو زمین حتی اگر ارتفاع تا ۱۰۰۰ کیلومتر بالاتر از سطح زمین باشد هم چندان

تغییری نمی کند چون مقایسه ما با شعاع زمین (۶۰۰۰ km) به توان ۲ است که مقدار ناچیزی می شود. به

همین خاطر در اطراف زمین g را تقریباً ثابت مپ گوئیم.

در برخی مسائل انرژی جنبشی تابعی از موقعیت هم هست؟

نکته:

دلتا = □

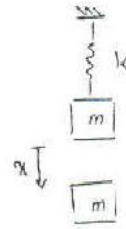
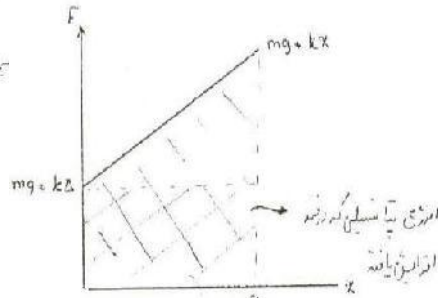
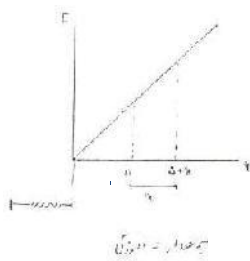


$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k (x + \square)^2 - mgx = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k \square^2 + kx \square - mgx = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k \square^2$$

$$U = \frac{1}{2} k (x + \square)^2 - mg(x + \square) = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k \square^2 + kx \square - mgx - mg \square = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k \square^2$$





حالت اولیه جسم ثابت است

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

تغییرات انرژی پتانسیل کل سیستم برابر انرژی پتانسیل است که در فنر افزایش یافته منهای انرژی پتانسیلی که در جرم کم شده.

برای اینکه مشکلاتی که در قسمت قبل مشاهده شد پیش نیاید، ما تغییرات انرژی ها را محاسبه می کنیم چون برای پتانسیل گرانشی نمی توان مبدا ثابتی در نظر گرفت و مقدار مطلق آن را محاسبه کرد.

$$T + U = C \quad \Delta(T + U) = 0 \quad \Delta T + \Delta U = 0$$

چون در انرژی پتانسیل دیگر پتانسیل گرانشی نداریم

می توان آن را به صورت مطلق نوشت و نیازی به تغییرات

نداریم.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

می تواند صفر باشد در این صورت ارتعاش نداریم.

$$\Delta T - U = 0$$

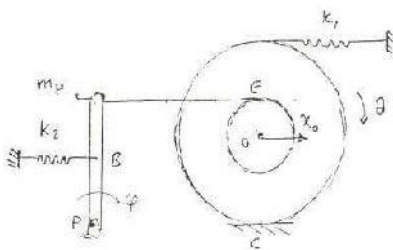
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} k x^2 \right) = 0$$

$$m \ddot{x} + k x = 0$$

$$(m \ddot{x} + k x) \dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} + k x = 0$$

این روش طولانی تر است اما برای مسائل پیچیده استفاده می شود.



$$\frac{1}{2} I_p \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2$$

$$+ \frac{1}{2} K_2 \left( \frac{\ell}{2} \varphi \right)^2 + \frac{1}{2} K_1 (2r_1 \theta)^2 - m_p g \frac{\ell}{2} (1 - \cos \varphi)$$

$$\ell \varphi = (r_1 + r_2) \theta \Rightarrow \varphi = \frac{(r_1 + r_2) \theta}{\ell}$$

$$T = \frac{1}{2} I_p \left( \frac{r_1 + r_2}{\ell} \dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2} K_2 \left( \frac{\ell}{2} \frac{(r_1 + r_2) \theta}{\ell} \right)^2 + \frac{1}{2} K_1 (2r_1 \theta)^2 - m_p g \frac{\ell}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{r_1 + r_2}{\ell} \theta \right) \right)$$

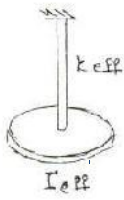
$$\Delta T = I_p \left( \frac{r_1 + r_2}{\ell} \right)^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + I_c \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

$$\Delta \Pi = k_2 \left( \frac{r_1 + r_2}{\ell} \right)^2 \ell \dot{\theta} - k_1 (2r_1)^2 \dot{\theta} - \left( \frac{r_1 + r_2}{\ell} \right) m_p g \frac{\ell}{2} \sin \left[ \frac{r_1 + r_2}{\ell} \dot{\theta} \right] \dot{\theta}$$

$$\underbrace{\left[ I_p \left( \frac{r_1 + r_2}{\ell} \right)^2 + I_c \right]}_{\text{left}} \dot{\theta} - \underbrace{\left[ k_2 \left( \frac{r_1 + r_2}{\ell} \right)^2 + k_1 (2r_1)^2 - \frac{r_1 + r_2}{2} m_p g \left( \frac{r_1 + r_2}{\ell} \right) \right]}_{k_{\text{eff}}} \dot{\theta} = 0$$

$$I_{\text{eff}} \ddot{\theta} - k_{\text{eff}} \dot{\theta} = 0$$

سیستم فوق معادله سیستم روبه رو است.



$$T + U = c$$

$$\frac{d}{dt}(T - U) = 0$$

← معادله دیفرانسیل استخراج می شود.

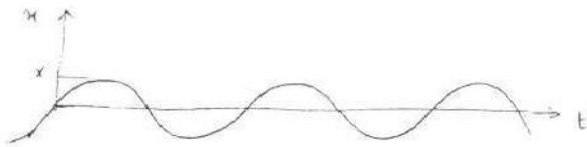
$$T - 0 \rightarrow U_{\max} = C$$

← نقطه حالت تعادل یا مرجع استاتیکی

$$U = 0 \rightarrow T_{\max} = C \rightarrow U_{\max} = T_{\max}$$

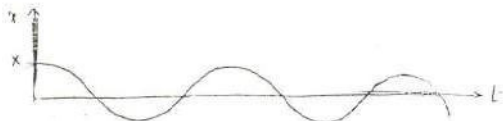
بدون نیاز به معادله دیفرانسیل، فرکانس طبیعی  $\omega_n$  استخراج می شود. →

برای پیدا کردن  $T_{\max}$  نقطه ای را پیدا کنیم که  $\dot{x}$  در آن max است.



$$x(t) = x \sin \omega_n t$$

محور مختصات یک ابزار و هر جایی بخواهیم می توانیم بگذاریم. موج یک موج هارمونیک است.



$$x(t) = x \cos \omega_n t$$

$$x(t) = x \sin \omega_n t \rightarrow \dot{x}(t) = \omega_n x \cos \omega_n t \rightarrow \dot{x}(t)_{\max} = \omega_n x$$

$$\rightarrow T_{\max} = \frac{1}{2} m \dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2} m (\omega_n x)^2$$

$$\rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 = \frac{1}{2} k (x)^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m (\omega_n x)^2 = \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

چون بین جایجایی نقاط مختلف میله، رابطه خاصی وجود دارد، سیستم یک درجه آزادی است.



برای پیدا کردن  $k$  میله برق در حالت استاتیکی یک به یک سمت ان وصل می کنیم. (جرم  $m$ )  $k = \frac{mg}{x}$

و تغییر  $x$  تغییر مکان نوک آن میله است.

سیستم رو برو هم یک درجه آزادی است ولی یک سیستم مقید است. (جرم آن نقطه ای نیست) چون جرم گسترده دارد ضریب سختی آن هم گسترده است که تابع  $y$  است.



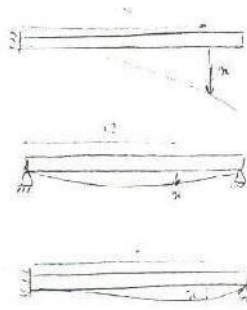
چون این طور جرم ها را نمی توان به سادگی حل کرد، از روش رامبلی (همان  $U_{max} = T + \max$ ) استفاده می کنیم.

این روش به صورت تقریبی است با ۲ تا ۵ درصد خطا.

برای حل هر مسئله باید ان را از جهات مختلف بررسی کنیم. کثلا در سوال قبل، میله مثل فنر ریز است.



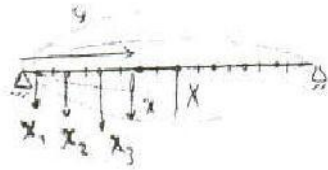
چون می توانیم تابع  $x$  بر حسب  $y$  را حدس بزنیم. (چون جواب تقریبی است)



$$x = x(y)$$

$$x = x(y)$$

$$x, x(y)$$



$$x = \frac{4x}{\ell} \left(1 - \frac{y}{\ell}\right)y$$

$$x = x \sin\left(\frac{\pi y}{\ell}\right)$$

برای پیدا کردن  $x$  در موقعیت های مختلف، تیر را به قسمت های مساوی تقسیم می کنیم. (هرچه تعداد قسمت ها بیشتر باشد، متغیر است) و جرم را در وسط هر قسمت قرار می دهیم.

برای  $x_i$  های مختلف،  $m_i$  ها را پیدا کردیم. حال اگر  $k_i$  های مختلف را هم پیدا کنیم، می توان از آن

فرکانس طبیعی را به دست آورد. در حالت استاتیکی  $k_i = \frac{m_i g}{x_i}$  (نظیر مکان در اثر جرم خود میله در حالت

استاتیکی)

$$X_i = x_i \sin w_n t$$

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

$$U_i = \frac{1}{2} k_i x_i^2$$

$$T_{i_{\max}} = \frac{1}{2} m_i (x_i w_n)^2 \quad U_{i_{\max}} = \frac{1}{2} k_i x_i^2$$

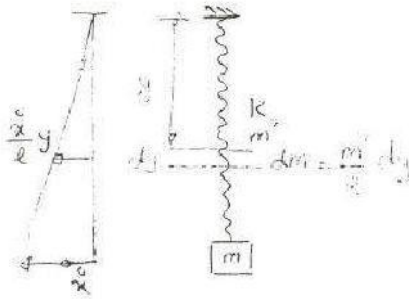
$$T_{\max} = \frac{w_n^2}{2} \sum m_i x_i^2 \quad U_{\max} = \frac{1}{2} \sum k_i x_i^2$$

برای اینکه یک مرحله تقریب را کمتر کنیم،  $\sum$  را به  $\int$  تبدیل می کنیم.

$$\rightarrow w_n^2 = \frac{g \sum m_i x_i}{\sum m_i x_i}$$

$$w_n^2 = \frac{\int_0^l EI \left( \frac{d^2 x}{dy^2} \right) dy}{\int_m x^2 dm}$$

در این فنر k متغیر است. در قسمت های بالاتر k بیشتر است رابطه سرعت را هم خطی می گیریم.



$$dT' = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{\ell} dy \right) \left( \frac{\dot{x}}{\ell} y \right)^2$$

$$x = x \sin w_n t$$

$$\dot{x} = x w_n \cos w_n t$$

$$dT'_{\max} = \frac{1}{2} \left( \frac{m'}{\ell} dy \right) \left( \frac{x w_n}{\ell} y \right)^2$$

$$T'_{\max} = \int_0^{\ell} \frac{1}{2} \left( \frac{m'}{\ell} dy \right) \left( \frac{x w_n}{\ell} y \right)^2$$

$$T'_{\max} = \frac{1}{2} \frac{m'}{\ell^3} x^2 w_n^2 \frac{\ell^3}{3} = \frac{1}{2} \left( \frac{m'}{3} \right) (x w_n)^2$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \left( \frac{m'}{\ell^3} \right) (x w_n)^2 + \frac{1}{2} m (x w_n)^2$$

$$\rightarrow T_{\max} = \frac{1}{2} \left[ \frac{m'}{3} + m \right] (x w_n)^2$$

در فنر هایی که جرم دارند می توان به جای بررسی آن ها، فنری را بررسی کنیم که جرم ندارد و  $\frac{1}{3}$  جرم

فنر به صورت یک جرم نقطه ای در انتهای آن در نظر بگیریم.



$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m + m'/3}}$$

## ارتعاشات با میرایی

در ۳۰٪ موارد، میرایی در سیستم ناخواسته است.

ولی در ۷۰٪ موارد، میرایی را در سیستم ها می خواهیم

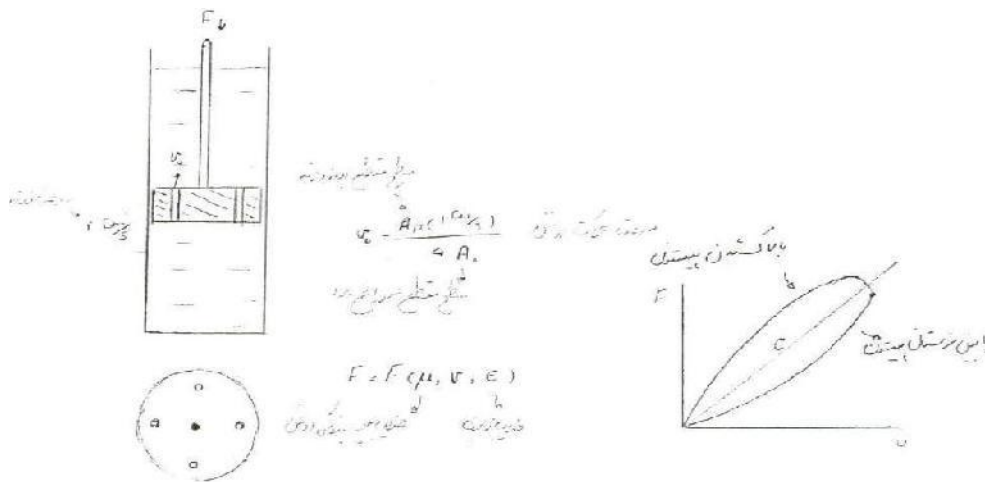
میرایی یعنی انرژی پتانسیل و جنبشی که به هم تبدیل می شوند. به حرارت تبدیل شوند و از محیط خارج شوند.

ساده ترین نوع میرایی از نظر تحلیلی میرایی ویسکوز با چسبنده است ولی از نظر ساخت، سخت ترین میرایی است.

میرایی سازه ای نوع دیگری است که هر سیستم دارد.

میرایی خشک یا کلهب هم نوع دیگری است ولی این دو نوع میرایی، تحلیلشان سخت است.

میرایی ویسکوز:



چون ما ایده آل را در نظر می گیریم، منحنی بالا به صورت خط در نظر می گیریم. (رابطه  $F$  و  $V$  را خطی می گیریم).

ولی ما  $C$  را ثابت در نظر می گیریم.

$C$  = شیب خط (ضریب ویسکوزیته)

$$C = C(A_v/A_s, M, P, U, T, \dots)$$

$$F' = cv \rightarrow F' = c\dot{x}$$

چون برای حرکت صفحه، باید مولکول های روغن روی هم بلغزند، ایجاد نیرو می کند.



در مثال بالا هم درون سوراخ ها باید روغن حرکت کند ولی به دیواره های سوراخ میچرخد.



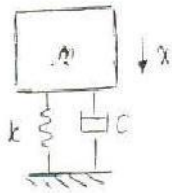
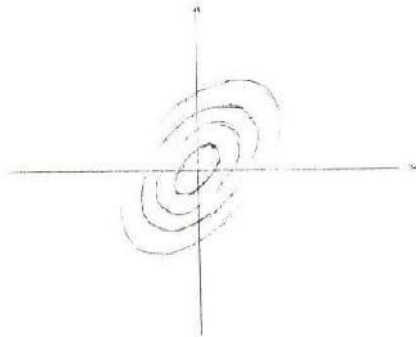
در جاهایی که میرایی نیاز داریم از میرایی ویسکوز استفاده می کنیم.

مثلا در جاهایی که به دمپر نیاز داریم.

کمک فنرهای ارون اتومبیل در واقع همان دمپر (چند فنر) اند.

منحنی های هیسترویس در فرکانس های مختلف

(درون دمپر ها)



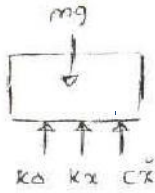
حالت استاتیکی ↓

$$\dot{x} = 0$$

$$Fd = 0$$

$$mg = k\Delta$$





$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

معادله مضرب:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}x = dx$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}x = D^2x$$

$$(mD^2 + cD + K)x = 0 \rightarrow D = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$x(t) = x_1 e^{D_1 t} + x_2 e^{D_2 t}$$

۱- اگر  $c=0$  ← ریشه ها موهمی اند ← حل معادله دیفرانسیل هارمونیک خالص

$$x(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t$$

۲- اگر  $c$  در برابر  $k, m$  بزرگ باشد  $c^2 > 4mk$  ← ریشه ها حقیقی

$$c > c_c$$

$$D_2 = \sigma_2, D_1 = \sigma_1$$

$$x(t) = x_1 e^{\sigma_1 t} + x_2 e^{\sigma_2 t}$$

$$D_1 = D = \frac{-c}{2m}$$

$$x(t) = x_1 e^{-\frac{c}{2m}t} + x_2 t e^{-\frac{c}{2m}t}$$

اگر  $c$  صفر نباشد ولی  $c = 2\sqrt{km}$

ریشه مضاعف  $c = c_c$

$c < c_c$  بحرانی یا مرزی (مرز بین هارمونیک و غیر هارمونیک)  $c_c = 2\sqrt{km}$

۴ میرایی هوا بسته یعنی  $c$  صفر نیست ولی از  $2\sqrt{km}$  کوچکتر است.

$$0 < c < c_c$$

$0 < \zeta < 1$	Under damped
$\zeta = 0$	Undamped
$\zeta = 1$	Critically damped
$\zeta > 1$	Over damped

$$\frac{c}{c_0} = \zeta$$

$$D_{o,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)}$$

اگر میرایی خیلی بزرگ باشد کل نیرو را به انتهای خودش وارد می کند (مثلا در اتومبیل کل نیرو را به سرنشین وارد می کند).

اگر میرایی نباشد فنر اتومبیل در دست انداز ها زیاد نوسان می کند.

میرایی باید باشد ولی زیاد بزرگ نباشد.

Damping ایده ال به صورت کلی (البته بسته به هدف و سیستم تغییر می کند)

$$\zeta = 0.707 < 0.5 < \zeta < 0.8$$

از  $\omega_d$  تا  $\zeta = 0$  تا  $\zeta = 1$  خواهیم داشت

$$\frac{c}{2m} = \frac{c}{2m} \cdot \frac{c_c}{c_c} = \zeta \sqrt{\frac{k}{m}} = \zeta \omega_n$$

$$D_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

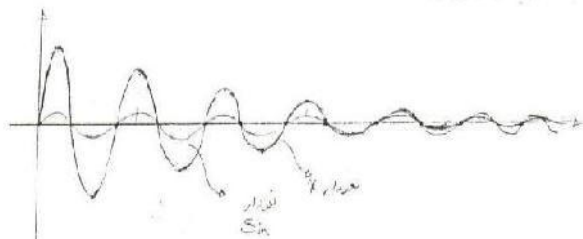
$$0 < \zeta < 1 \rightarrow D_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

وقتی  $\zeta \geq 1$  که شود دیگر نوسان نداریم

$$\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_d$$

$$0 < \zeta < 1$$

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t) = x e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n t - \varphi) = x(t)$$

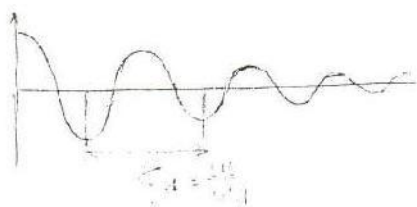


هر جسم flexible دارای خصوصیت طبیعی  $\omega_n$  و  $\zeta$  است.

همان (C)K

اگر در یک منحنی میرایی وقتی نقاط max را به هم وصل می کنیم، منحنی exp می شود و می توان ویسکوز را در نظر گرفت.

باید با داشتن یک نمودار بتوان  $\omega_n$  را به دست آورد.



$\omega_n$  به شیوه رو به رو به دست می آید.

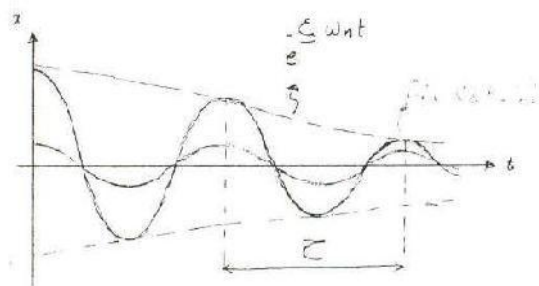
تمرین تحویلی:

۱ راهی برای یافتن  $\xi$  پیدا کنید.

۲ پیشنهاد های عملی برای پیدا کردن  $\omega_n$  (نمودار) یک خط کش بیابید.

پروژه:

نمودار نوسانات یک خط کش ۲۵ سانتیمتری را با استفاده از روش نوری با الکتریکی به دست آورید. سپس نوع میرایی و ضرایب میرایی را تعیین کنید.



$$x_1 = e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n t_1 - \varphi)$$

$$x_2 = e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n t_2 - \varphi)$$

$$\rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\xi \omega_n t_1}}{e^{-\xi \omega_n t_2}}$$

$$\frac{X_1}{X_2} = e^{\xi \omega_n G}$$

نسبت متوالی فقط به  $\xi$  بستگی دارد.

$$G = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\frac{\omega_n G \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} = e^{\frac{2\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

پس در میرایی ویسکاز نسبت دو دامنه متوالی برابراند.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_5}{x_6}$$

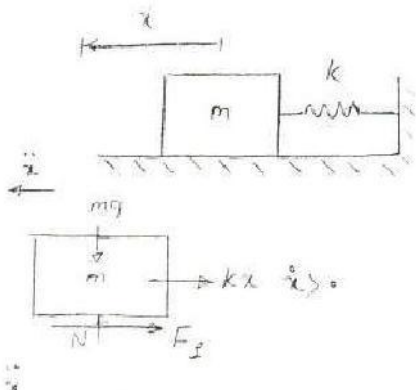
اگر نسبت دامنه ها تغییر کند باید درصد تغییرات آن را مشخص کنیم تا بفهمیم چه نوع میرایی دیگری در سیستم وجود دارد.

معمول ترین نوع میرایی در صنعت میرایی خشک است

جهت شتاب را در ارتعاشات همواره  $X$  مثبت می گیریم.

جهت نیروی اصطحکاک وابسته به  $\dot{x}$  است

در حالت اول  $\dot{x} > 0$  در نظر می گیریم.



$$\dot{x} > 0$$

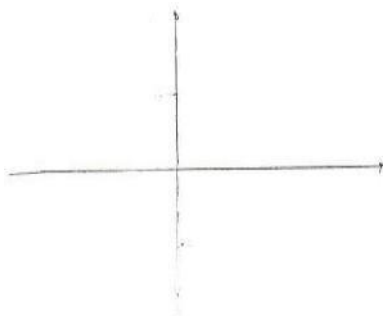
$$-kx - F_f - mX$$

$$mX - kx = -F_f$$

$$\dot{x} < 0$$

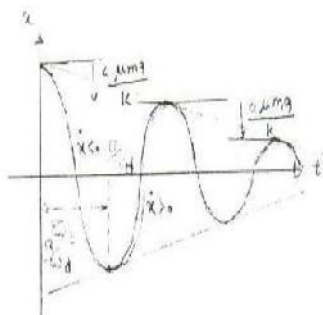
$$-kx + F_f = mX$$

$$mX - kx - F_f$$



در این نوع میرایی، نا پیوستگی وجود دارد. یعنی در حایی که  $\dot{x}$  برابر صفر می شود، معادله از حالت اول به حالت دوم تبدیل می شود. به همین خاطر این معادله دیفرانسیل بسیار دشوار است.

$$mX + kx - \mu mg$$



$$m \ddot{x} + km = Mmg$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$x(t) = A \sin w_n t + B \cos w_n t - \frac{Mmg}{k}$$

$$x(0) = x_0 = B - \frac{Mmg}{k} \rightarrow B = x_0 + \frac{Mmg}{k}$$

$$\dot{x}(0) = 0 = Aw_n \rightarrow A = 0$$

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{Mmg}{k}\right) \cos w_n t - \frac{Mmg}{k}$$

$$m \ddot{x} + kx = -F_f$$

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{w_n}\right) = \left(x_0 + \frac{Mmg}{k}\right)(-1) + \frac{Mmg}{k}$$

$$x\left(\frac{\pi}{w_n}\right) = \left(x_0 - \frac{2Mmg}{k}\right) \Rightarrow$$

$$x(t) = A_2 \sin w_n t + B_2 \cos w_n t - \frac{Mmg}{k}$$

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{w_n}\right) = 0 = A_2 w_n \mid 0 \mid 0 \rightarrow A_2 = 0$$

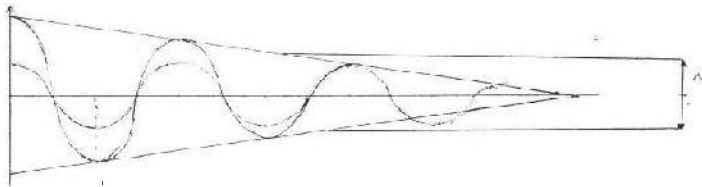
$$x\left(\frac{\pi}{w_n}\right) = B_2 \cos \pi - \frac{Mmg}{k} = -\left(x_0 - \frac{2Mmg}{k}\right)$$

$$B_2 = x_0 + \frac{3Mmg}{k}$$

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{3Mmg}{k}\right) \cos w_n t - \frac{Mmg}{k}$$

در میرایی خطی، دامنه نوسان یا ارتعاش به صورت خطی کم می شود با شیب  $\frac{4Mmg}{kGd}$

$$x\left(\frac{2\pi}{w_n}\right) = \left(x_0 + \frac{3Mmg}{k}\right) - \frac{Mmg}{k} = x_0 + \frac{2Mmg}{k}$$



وقتی فنر می ایستد حتما جسم به  $x=0$  باز نمی گردد.

$\Delta$  میبینیم جابجایی جسم است برای این که نیروی فنر بتواند اصطحکاک را خنثی کند. اگر دامنه ارتعاشات از  $\Delta$  کوچکتر باشد و سرعت صفر شود. (نقطه  $\min$  یا  $\max$ ) دیگر جسم نمی تواند حرکت کند و می ایستد.

$$\mu mg = kL$$

اگر نموداری داشته باشیم باید با دو تست: ۱. وصل کردن نقاط  $\max$  یا ۲. اندازه گیری اختلاف دامنه ها، مشخص کنیم نوع میرایی چیست نوع پوش منحنی اگر به خط نزدیکتر بود بیشتر میرایی خشک است و اگر به منحنی exp نزدیکتر بود بیشتر میرایی ویسکاز است.

گاهی هم مجموع چند میرایی داریم ، کافی است  $x$  هر کدام را بیابیم و جمع کنیم ولی ما در اینجا نمی توانیم معادلات غیر خطی را حل کنیم.

$$m \ddot{x} - kx + c\dot{x}^2 = 0$$

$$m \ddot{x} - kx \pm \mu mg = 0$$

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} - kx + c_1 \dot{x}^2 &= 0 \\ m \ddot{x} - kx + c_2 \dot{x}^2 &= 0 \\ m \ddot{x} - kx + c_3 \dot{x}^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$