مکانیک جامدات ۱

(استاتیک ـ مقاومت مصالح ـ طراحی اجزاء)

مجموعهٔ مهندسی مکانیک

دکتر علیرضا گوهری انارکی

مؤسسهٔ آموزش عالی آزاد پارسه

پارسه

فصل اول تعاریف اولیه

اتصالات استاندارد ۷

اعضای دونیروئی ۹

تعادل اعضای سه‌نیروئی ۱۰

فصل دوم تعادل

معادلات تعادل ۱۱

تعادل نیروهای هم صفحه ۱۱

تعادل نیروهای غیر هم صفحه‌ای (سه بعدی) ۱۵

فصل سوم خرپاها و قاب‌ها

خرپاها ۱۶

قاب‌ها ۱۷

مسائل خرپاها ۱۹

فصل چهارم تیرها

تیرها ۲۸

تیرهای خمیده ۳۱

فصل پنجم اصطکاک

اصطکاک ۳۵

پیچ‌دنده مربعی ۳۷

اصطکاک تسمه ۳۸

مقاومت غلتشی ۳۸

فصل ششم   خواص سطوح

خواص سطوح ۴۳
قضایای پاپوس ـ گلدینوس ۴۴

فصل هفتم   روش انرژی و برداری برای حل مسائل

اصل کار مجازی ۴۷
روش برداری ۵۳

فصل هشتم   مسائل و نکات عمومی مهم

مسائل و نکات عمومی مهم ۶۵

سوالات کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۵........ ۸۸
پاسخ کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۵........ ۹۱
سوالات کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۶........ ۱۰۰
پاسخ کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۶........ ۱۰۳
سوالات کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۷........ ۱۰۸
پاسخ کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۷........ ۱۱۰
سوالات کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۸........ ۱۱۶
پاسخ کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۸........ ۱۱۸

فصل اول

تعاریف اولیه

ـ اتصالات استاندارد:

اولین قدم در حل مسائل مکانیک اعم از استاتیک، مقاومت مصالح، دینامیک و ... رسم نمودار جسم آزاد است. به عبارتی دیگر، منظور آن می‌باشد که باید تمام نیروهای خارجی وارد بر جسم آزاد موردنظر را در یک نمودار ساده نشان دهیم. به‌عنوان مثال، در حل مسائل تعادل مربوط به یک جسم، باید تمام نیروهای وارد بر جسم را در نظر بگیریم و نیروهایی که مستقیماً بر جسم اثر نمی‌کنند را حذف کنیم. اما قبل از آن‌که بتوانیم نیروهای خارجی را رسم نماییم. باید در ابتدا جسم آزاد موردنظر را تعیین نماییم. در اکثر موارد این جسم می‌تواند جسمی باشد که معادلات تعادل مربوط به آن، دارای کمترین تعداد مجهول ممکن است. این جسم را از زمین و هر جسم دیگری که با آن در تماس است جدا نموده (به عنوان مثال توسط کشیدن یک دایره در اطراف آن) و آن را رسم می‌کنیم. اگر نیروهای جسمی قابل توجهی مثل جاذبه گرانشی یا مغناطیسی وجود داشته باشند، باید در نمودار جسم آزاد رسم شوند. مرحله‌ی دوم بعد از انتخاب جسم آزاد، تعیین کردن نیروهای خارجی (مقدار ـ امتداد و جهت) می‌باشد. به‌صورت خیلی ساده نیروی خارجی نیرویی می‌باشد که از خارج به جسم آزاد وارد می‌شود (نیروهایی که از خارج دایره‌ی رسم شده در اطراف جسم آزاد آن وارد می‌شوند را می‌توان نیروی خارجی فرض کرد).

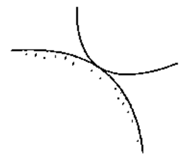
توجه داشته باشید که وقتی جسم آزاد، از چند بخش ساخته شده است، نیروهایی که بخش‌های مختلف به یکدیگر وارد می‌کنند، نیروهای داخلی‌اند و نباید در نمودار جسم آزاد رسم شوند. مقدار و امتداد نیروهای خارجی معلوم را باید بر روی نمودار جسم آزاد مشخص نمود. نیروهای مجهول که جهتشان نیز معلوم نیست، توسط بردارهایی با جهت دلخواه در نظر گرفته می‌شوند. اگر جهت درست فرض شده باشد محاسبات مقدار آن را مثبت و در غیر این صورت مقدار آن را منفی نشان خواهد داد.

برای تعیین نیروهایی که دو جسم از طریق یک اتصال به هم انتقال می‌دهند می‌توان اجسام را به‌طور ذهنی در سه راستای عمود بر هم حرکت داد. در راستاهایی که بر اثر وجود اتصال حرکت نسبی کند یا متوقف می‌شود در نمودار آزاد دو جسم در محل اتصال می‌توان یک مولفه نیرو قرار داد و در هر راستایی که بر اثر وجود اتصال دوران دو جسم نسبت به هم کند یا متوقف می‌شود، در نمودار آزاد دو جسم، در محل اتصال، می‌تواند یک گشتاور جفت (ممان) وجود داشته باشد.

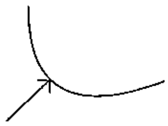
اتصالات استاندارد

تعیین نیروی خارجی (راستا ـ جهت)

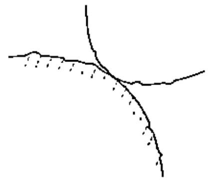
۱ـ سطوح صاف بدون اصطکاک



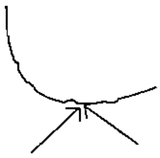
نیروی تماس فشاری و عمود بر سطح است.



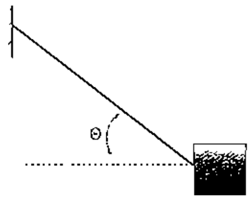
۲ـ سطوح ناصاف



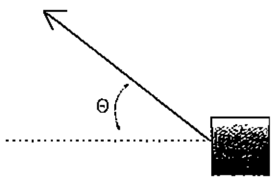
نیرویتماس دارای دومولفه فشاری قائمومماسی (اصطکاک) است.



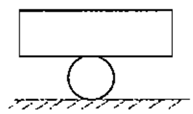
۳ـ طناب، کابل، تسمه یا زنجیر



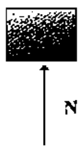
نیروی کششی در راستای طناب، کابل، تسمه یا زنجیر است



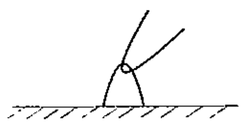
۴ ـ تکیه‌گاه غلتکی یا ساچمه‌ای



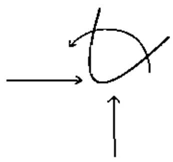
نیروی فشاری عمود بر سطح تکیه‌گاه است



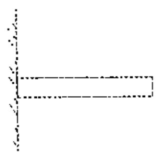
۵ـ اتصال پینی



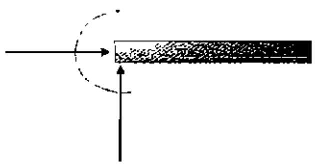
دو مولفه نیروی فشاری عمود بر هم بر آن وارد می‌شود. در صورتی‌که آزاد به چرخش نباشد یک ممان هم به آن وارد می‌شود



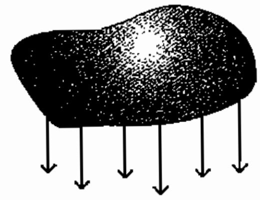
۶ـ تکیه‌گاه ثابت



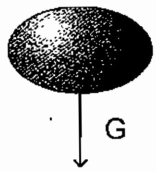
نیروی محوری، نیروی برشی، و ممان خمشی



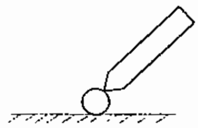
۷ـ نیروی گرانشی



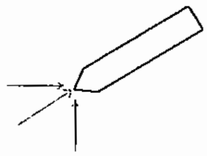
برآیند نیروی گرانشی که از مرکز جرم می‌گذرد.



۸ـ اتصال توپی (مفصلی)



سه نیروی دوبه‌دو عمودبرهم (سه بعدی)



مراحل رسم نمودار جسم آزاد:

۱ـ انتخاب جسم آزاد موردنظر

۲ـ جدا کردن جسم آزاد موردنظر از سایر اجزا توسط یک دایره فرضی

۳ـ در نظر گرفتن تمام نیروهایی که از خارج دایره به جسم وارد می‌شوند (نیروهای خارجی) با کمک جدول بالا

۴ـ در نظر گرفتن نیروی جاذبه‌ی گرانشی یا مغناطیسی به عنوان نیروی خارجی در صورت لزوم

توجه شود که در ادامه‌ی مطلب هر کجا نمودار جسم آزادی رسم شده باشد به آن معنی است که تمام مراحل بالا طی شده است و برای جلوگیری از تکرار از آوردن تک به تک مراحل خودداری شده است. به هر حال، خواننده خود می‌تواند برای تمرین بیشتر این مراحل را انجام دهد.

اعضای دو نیرویی:

در اعضای دو نیرویی نیروهای عکس‌العمل، در امتداد خطی است که ابتدا و انتهای سازه را به هم وصل می‌کند. این نیروها برابر و مخالف هم هستند.

اعضای دو نیرویی: هر گاه یک عضو یا یک جسم فقط در دو نقطه تحت بارگذاریَ قرار بگیرد، در هنگام رسم دیاگرام آزاد نیروی این عضو که به منظور نوشتن روابط تعادل استاتیکی نوشته می‌شوند، عکس‌العمل‌ها در این دو نقطه در راستای خطی خواهند بود که ابتدا و انتهای این دو نقطه را به هم وصل می‌کنند. مثال‌های زیر، نمونه‌ای از این نوع نیروها را بر روی سازه‌ها یا اجسام نشان می‌دهد.

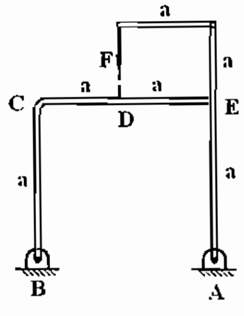
مثال: عکس‌العمل نقطه A از کدام نقطه می‌گذرد

۱) B

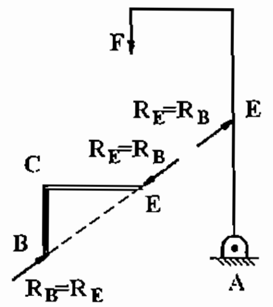
۲) C

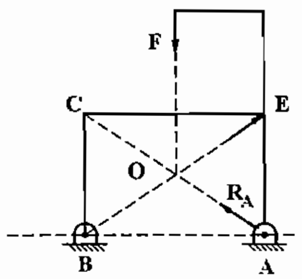
۳) D

۴) E



گزینه ۲ صحیح است. زیرا عضو BCE یک عضو دو نیرویی است و هنگام نوشتن دیاگرام آزاد به صورت زیر در می‌آید.



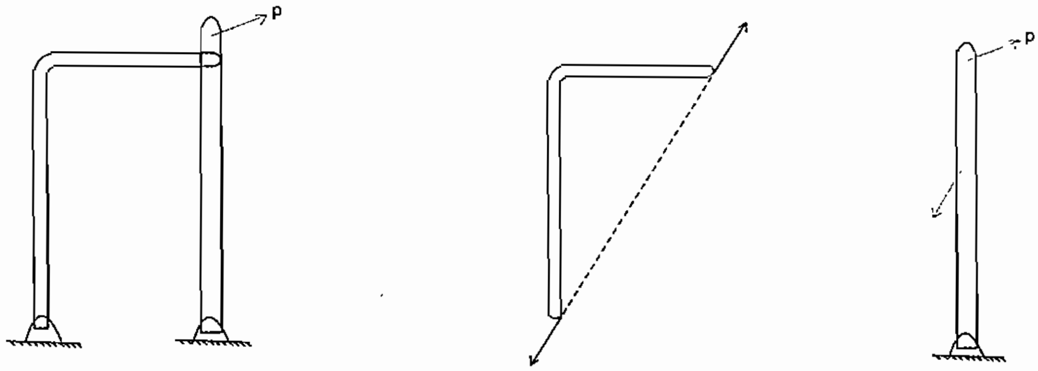


از طرفی عضو FEA یک عضو سه نیرویی است که هر سه نیرو بایستی در صفحه یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند (اصولاً در استاتیک سه نیرو و در یک صفحه موقعی در حال تعادل هستند که سه نیرو حتماً یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند).

یعنی سه نیروی اعمال شده در نقطه F و E و A بر روی دیاگرام آزاد عضو FEA بایستی بالاجبار از نقطه O، نقطه‌ی تقاطع امتداد سه نیرو یا راس C در متسطیل AECB بگذرد. لذا گزینه ۲ صحیح است.

خط‌چین فرضی BE، خطی می‌باشد که ابتدا و انتهای سازه‌ی دو نیرویی را به هم وصل کرده و نیروهای R_E, R_B در امتداد آن می‌باشند.

اگر اعضا دو نیرویی نباشد، یک بار کل جسم را در نظر می‌گیریم و دیاگرام جسم آزاد آن را می‌کشیم و سه معادله تعادل را برای آن می‌نویسیم. سپس یک جزء را جدا کرده و معادلات تعادل آن را می‌نویسیم. (نمونه آن بعداً در قاب‌ها بحث می‌شود). شکل زیر دیاگرام آزاد یک عضو دو نیروئی را نشان می‌دهد.



اعضای سه نیرویی:

سه نیروی واقع بر یک جسم هنگامی در حال تعادل هستند که امتداد هر سه نیرو از یک نقطه بگذرد. یعنی خطوط اثر سه نیرو، باید متقارب باشد. اگر متقارب نباشد، آنگاه یکی از نیروها گشتاوری حول نقطه تقارب دوتای دیگر اعمال می‌کند که با صفر بودن گشتاور نیروها حول هر نقطه، با فرض تعادل در آن نقطه در تناقض است. تنها استثنا زمانی است که سه نیرو موازی باشند که در این صورت می‌توان نقطه تقارب را در بی‌نهایت در نظر گرفت.

فصل دوم

معادلات تعادل

تعادل را حالتی تعریف می‌کنیم که در آن برآیند همه نیروهای وارد بر جسم برابر صفر است. به‌عبارت دیگر جسم وقتی در تعادل است که همه نیروها و گشتاورهای وارد بر آن، در توازن باشند. معادلات تعادل را در حالت‌های خاص زیر در نظر می‌گیریم :

تعادل نیروهای هم‌صفحه

الف) نیروهای متقاطع: هر یک از مجموعه معادلات زیر می‌تواند تعادل یک سیستم نیروهای متقاطع را تضمین نماید.

۱ـ $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ یعنی نوشتن شرط تعادل نیروها در دو راستای عمود برهم

۲ـ $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M_A = 0$ یعنی نوشتن تعادل نیروها در راستای محور x و تعادل گشتاورها حول نقطه A که نقطه‌ای دلخواه در فضا است که بر محور y واقع نشده است.

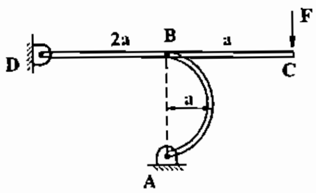
۳ـ $\Sigma M_A = 0$, $\Sigma M_B = 0$ یعنی صفر بودن برآیند گشتاورها حول دو نقطه دلخواه A , B که با مبدا مختصات روی یک خط راست قرار ندارند.

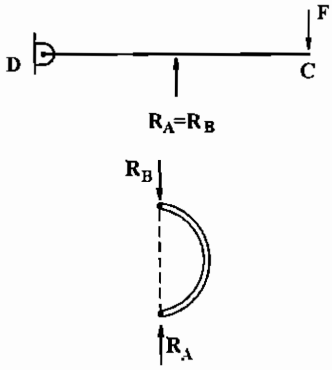
ب) نیروهای موازی: هر یک از مجموعه معادلات زیر، می‌تواند تعادل یک سیستم نیروهای موازی را تضمین کند.

۱ـ $\Sigma F = 0$, $\Sigma M_A = 0$ یعنی صفر بودن برآیند نیروها در راستای اثرشان و صفر بودن برآیند گشتاور نیروها حول نقطه دلخواه A

۲ـ $\Sigma M_A = 0$, $\Sigma M_B = 0$ یعنی صفر بودن برآیند گشتاور نیروها، حول دو نقطه دلخواه A و B به شرطی که خط واصل نقاط A و B با امتداد نیروها موازی نباشد.

مثال: عکس‌العمل A کدام است مشروط بر این‌که عضو نیم‌دایره AB دارای شعاع مساوی a باشد.





حل: عضو AB دو نیروئی است، لذا دیاگرام آزاد آن به‌صورت زیر می‌باشد. برای حل مسئله از حالت $\Delta F_x=0$, $\Sigma M_D=0$ استفاده می‌کنیم.

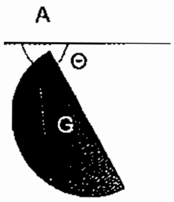
$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow R_A=R_B$$

$$\Sigma M_D=0 \Rightarrow F(3a)=R_B(2A) \Rightarrow$$

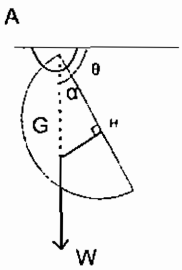
$$F(3a)=R_A(2a)$$

$$\boxed{R_A=1.5F}$$

مثال: در عضو نیم‌دایره‌ای زیر زاویه θ، تعادل کدام است. مشروط بر این‌که وزن عضو نیم‌دایره W فرض گردد.

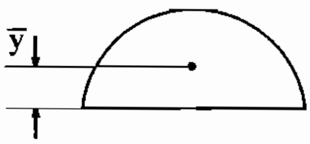


حل: برای حل مسئله از حالت $\Sigma F_x=0$, $\Sigma M_D=0$ استفاده می‌کنیم. عضو یا جسم دو نیرویی است که در دو نقطه A و G تحت نیرو قرار دارد و این دو نیرو حتماً در امتداد خط قائم که وزن در آن راستا است قرار می‌گیرد یعنی:
به عبارت دیگر در صورتی که G دقیقاً در زیر نقطه‌ی A قرار نداشته باشد، شرط $\Sigma m_A=0$ برقرار نخواهد بود.



مثلث AGH یک مثلث قائم‌الزاویه است، به طوری که:

$$tg\,\alpha=\frac{\overline{GH}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{GH}}{R}$$



از طرفی در شکل مقابل داریم:

$$\bar{y}g=\frac{4R}{3\pi}$$

پس

$$\overline{GH}=\frac{4}{3}\,\frac{R}{\pi}$$

$$tg\,\alpha=\frac{4R}{3\pi.R}=\frac{4}{3\pi}$$

از طرفی $\alpha+\theta=90^\circ$ است، زیرا جسم عضو دو نیروئی است که نیروها در امتداد خط قائم AG قرار گرفته‌اند. پس: $\tan(90-\theta)=$

$$tg\,\alpha=\cot g\,\theta=\frac{4}{3\pi}$$

$$\theta=\text{arc}\cot g\frac{4}{3\pi}$$

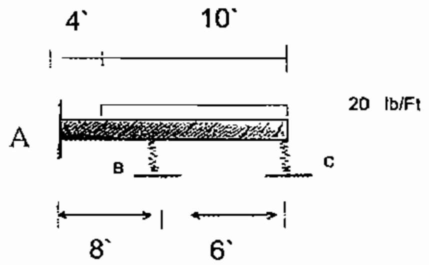
ج) نیروهای غیرمتقاطع: هر یک از مجموعه معادلات زیر، می‌تواند تعادل یک سیستم نیروهای غیرمتقاطع را تضمین کند.

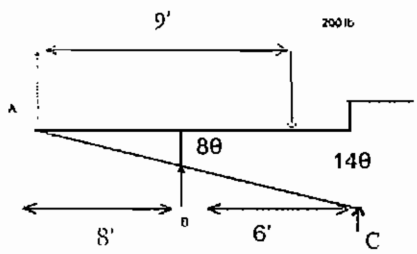
۱ـ $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_A = 0$، یعنی تعادل نیروها در دو راستای عمود بر هم x وy و تعادل گشتاور نیروها، حول نقطهA

۲ـ $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M_A = 0$, $\Sigma M_B = 0$، یعنی تعادل نیروها در راستای دلخواه x و صفر بودن گشتاور نیروها، حول دو نقطه دلخواه A وB به شرطی که خط واصل نقاط A و B بر راستای محور x عمود نباشد.

۳ـ $\Sigma M_A = 0$, $\Sigma M_B = 0$, $\Sigma M_C = 0$ یعنی تعادل گشتاورها حول سه نقطه دلخواه A و B و C بشرطی که سه نقطه روی یک خط راست قرار نگرفته باشند.

مثال: تیر صلب زیر در نقطه A دارای اتصال پینی است و در نقاط C , B روی دو فنر قرار گرفته است. این تیر تحت بار یکنواخت 20lb/Ft مطابق شکل قرار گرفته است. عکس‌العمل در A و نیرو در هر فنر چقدر است؟ $K = 240\frac{N}{m}$





حل: سیستم نیروهای صفحه‌ای موازی است. با فرض زاویه θ کوچک، تغییر طولهای دو فنر C , B به ترتیب 8θ , 14θ است. و بنابراین نیرو در فنرهای B و C به ترتیب $8\theta\times20\times12=1920\theta$, $14\theta\times240=3360\theta$ می‌باشد.

$\Sigma M_A = 0 = -200\times9+1920\theta\times8+3360\theta\times14 \rightarrow \theta = 0.0288\ \text{rad}$

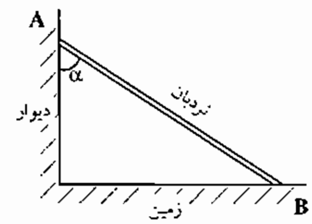
$F_B = 1920\theta = 1920(0.0288) = 55.3\text{lb}$

$F_C = 3360\theta = 3360(0.0288) = 96.8\text{lb}$

$\Sigma F_y = 0 = F_A + 55.3 + 96.8 - 200 \rightarrow F_A = 47.9\text{lb}$

در ساده‌سازی، بار یکنواخت آن را به صورت یک بار 200lb(20×10) که در فاصله‌ی $\left(4'+\frac{10'}{2}\right)=9'$ از A اعمال می‌شود در نظر گرفتیم.

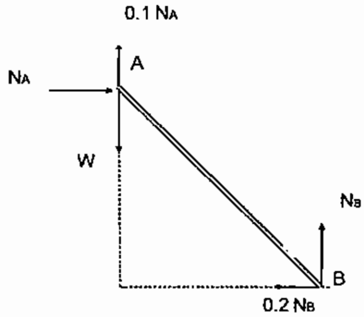
مثال: یک شخص به وزن W، می‌خواهد خود را به انتهای نردبان برساند. می‌نیمم زاویه α چقدر است؟ (یعنی زاویه‌ی α را طوری تعیین کنید که وقتی شخص در نقطه‌ی A باشد نردبان سر نخورد)



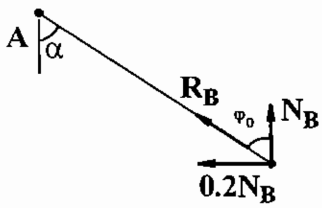
مشروط بر این‌که ضریب اصطکاک نردبان با زمین 0.2 و با دیوار 0.1 و.نردبان سبک و از وزن آن صرف‌نظر شود.

حل: حل این مثال از روی تعادل استاتیکی بـه طـور مسـتقیم وقـت‌گیـر است. لذا ازخاصیت دو نیرویی بودن عضو استفاده می‌شود یعنی :

فرض می‌کنیم شخصی در انتهای نردبان، نقطه‌ی A قرار گرفته و آغاز لغزش در نردبان فرا می‌رسد. پس دیاگرام آزاد به صورت زیر است.



چون عضو (نردبان) دو نیروئی می‌باشد، پس عکس‌العمل نیروها بایستی در راستای نردبان باشد. یعنی مثلاً در نقطه B حتماً R_B بایستی در امتداد نردبان باشد.زاویه بین N_B, R_B زاویه اصطکاک φ_θ است (زاویه بین نیروی عمود بر یک جسم با نیروی عکس‌العمل جسم را زاویه اصطکاک لغزشی φ_θ نامند) که همواره $tg\varphi_\theta=\mu_B$ می‌باشد (μ_B ضریب اصطکاک لغزشی بین نردبان با زمین است). پس:



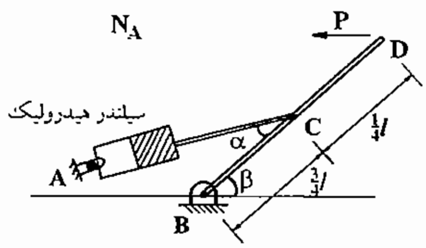
$$tg\varphi_\theta=\mu_B=0.2$$

از طرفی با توجه به شکل (۲) $\varphi_\theta=\alpha$ است. پس:

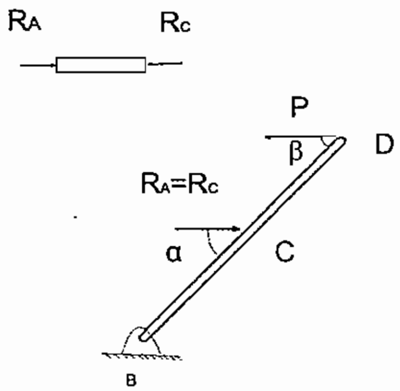
$$tg\alpha=0.2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha=\text{arc}\,tg\,0.2}$$

مثال: عکس‌العمل تکیه‌گاه A کدام است.

نیروی P، افقی اعمال شده است.



حل: سیلندر یک عضو دو نیرویی است. پس عکس‌العمل $R_A=R_C$ و در امتـداد سیلندر واقع می‌گردد یعنی (شکل ۱):



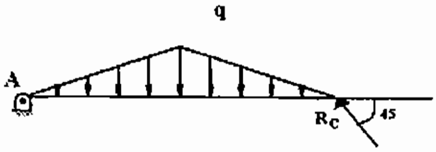
(۱)

$$\Sigma M_B=0$$

$$\rightarrow \quad PL\sin\beta=R_c\left(\frac{3L}{4}\right)\sin\alpha \quad \rightarrow \quad P\ell\sin\beta=R_A\left(\frac{3\ell}{4}\right)\sin\alpha$$

$$R_A=\frac{4P}{3}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

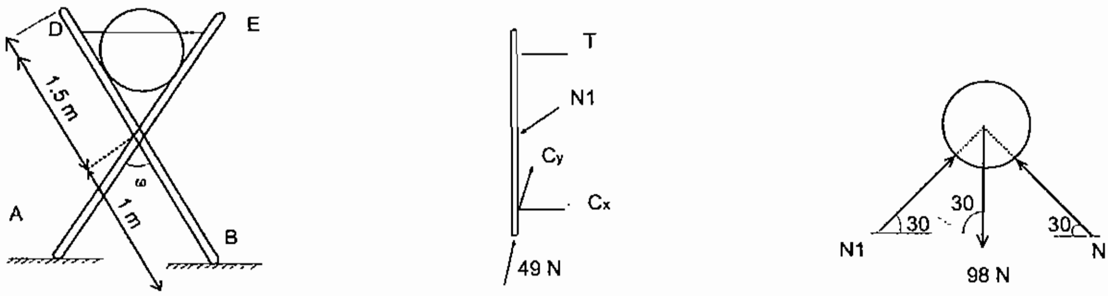
مثال: عکس‌العمل تکیه‌گاه C چقدر است؟



حل: عضو AC یک عضو دونیروئی است و با نوشتن رابطه ممان حول نقطه A، عکس‌العمل محاسبه می‌گردد.

$\Sigma M_A = 0 \;\Rightarrow\; R_c$ محاسبه می‌شود

مثال: استوانه‌ای به قطر 1 متر و وزن 10 کیلوگرم بین دو بازو مطابق شکل قرار گرفته است، به‌طوری‌که دو بازو، با هم زاویه 60 درجه می‌سازند. با فرض صاف بودن زمین، نیروی کشش در طناب DE را پیدا کنید؟



ابتدا کل جسم را به‌عنوان جسم آزاد در نظر می‌گیریم، به‌دلیل تقارن می‌توان به‌راحتی محاسبه نمود که نیرو در تکیه‌گاه‌های B , A برابر و نصف نیروی وزن استوانه است. $F_A = F_B = 49N$. نیروی عکس‌العمل استوانه که بر بازو عمود است، از دیاگرام جسم آزاد استوانه به‌راحتی بدست می‌آید :

$\Sigma F_y = 0 = 2N_1 \sin 30 - 98 \rightarrow N_1 = 98N$

فاصله نقطه اثر نیروی N_1 تا پین C مطابق با شکل زیر برابراست با : 0.866m حال با استفاده از دیاگرام آزاد یکی از بازوها، داریم :

$\Sigma M_C = 0 = -T \times 1.5 \cos 30 + 98 \times 0.866 + 49 \times 1 \sin 30$

$\rightarrow T = 84.2N$

$$\tan(30) = \frac{ON}{NC} \;\Rightarrow\; NC = \frac{ON}{\tan(30)} = \frac{0.5}{\tan(30)} = 0.866\,m$$

تعادل نیروهای غیرهم‌صفحه (سه‌بعدی)

الف) نیروهای غیرمتقاطع و غیرموازی: شرط لازم و کافی برای تعادل در این حالت که کلی‌ترین حالت است عبارتست از برقراری هر شش معادله زیر:

$\Sigma F_x = 0 \;,\; \Sigma F_y = 0 \;,\; \Sigma F_z = 0 \;,\; \Sigma M_x = 0 \;,\; \Sigma M_y = 0 \;,\; \Sigma M_z = 0$

دو حالت بعد که مورد بررسی قرار می‌گیرند، حالت‌های خاص این سیستم هستند.

ب) نیروهای متقاطع: مجموعه معادلات زیر، برای تعادل یک سیستم نیروی متقاطع و غیرهم‌صفحه لازم است:

$\Sigma F_x = 0 \;,\; \Sigma F_y = 0 \;,\; \Sigma F_z = 0$

معادله $\Sigma M = 0$ می‌تواند جایگزین یکی از معادلات فوق گردد. اما باید توجه داشته باشید که اگر مثلاً جایگزین $\Sigma F_z = 0$ گردد ΣM باید مجموع گشتاور نیروها حول محوری باشد که نه با محور z موازی است و نه آن را قطع می‌کند.

ج) نیروهای موازی : مجموعه معادلات زیر برای تعادل یک سیستم نیروی موازی و غیرهم‌صفحه لازم است :

$\Sigma F_y = 0 \;,\; \Sigma M_x = 0 \;,\; \Sigma M_z = 0$

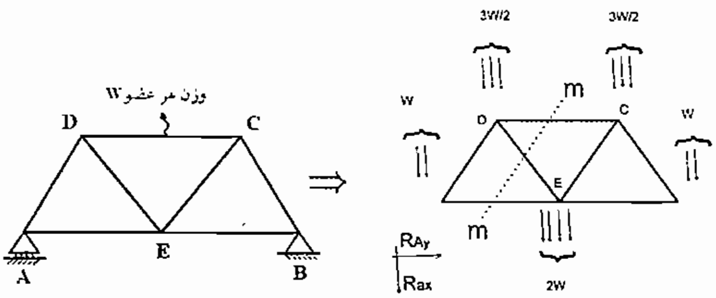
y محوری است که راستای آن با راستای نیروهای موازی یکی است.

فصل سوم

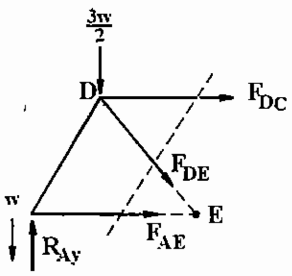
خرپاها و قاب‌ها

خرپاها

خرپاها را اصولاً در مسائل مهندسی مکانیک، بایستی به صورت اعضای دو نیروئی نگاه کرد. لذا چنانچه نیروئی به بدنه اعضاء اعمال گردد (مانند نیروی وزن عضو یا دیگر نیروهای خارجی .....)، شایسته است که ابتدا این نیروها به مفاصل منتقل گردد و سپس طبق رعایت عضو دو نیروئی مساله را حل نمود. مثلاً در سازه زیر که وزن هر میله W است داریم:

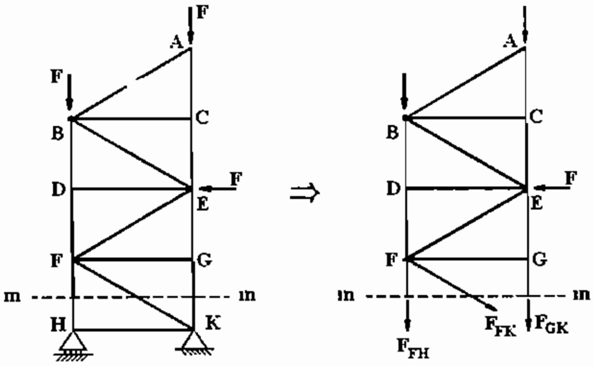


حال، مثلاً برای تعیین نیروی عضو DC مقطع mm را انتخاب می‌کنیم. دقت شود که چون تکیه‌گاه A و B در دو طرف مقطع قرار گرفته است. ابتدا بایستی با رسم دیاگرام آزاد کل جسم مقادیر تکیه‌گاه‌های R_{Ay} , R_{Bx}, R_{By} را محاسبه نمود و سپس نیروی وارد بر عضو DC را محاسبه نمود.



محاسبه می‌شود $= F_x \Rightarrow \Sigma M_E = 0 \Rightarrow$

اصولاً در مسائلی که تکیه‌گاه‌ها در دو طرف مقطع برش خورده mm قرار می‌گیرد دیگر. نیاز به محاسبه تعیین نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها نمی‌باشد و می‌توان نیروی وارد بر عضو را مستقیماً محاسبه نمود (به‌خصوص در حل مسائل تستی به این موضوع دقت شود). مثلاً در سازه زیر برای محاسبه نیروی وارد بر عضو FH دیگر نیازی به محاسبه عکس‌العمل‌های H و K نمی‌باشد، مستقیماً با انتخاب برش mm مساله حل می‌گردد.



$\Rightarrow \quad \Sigma M_K = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FH} =$ محاسبه می‌شود

به مثال‌های این فصل در صفحات بعدی دقت گردد.

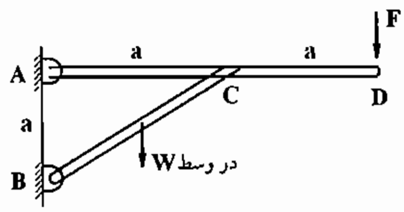
قاب‌ها:

اصولاً در قاب‌ها سه نوع مساله (مثلاً مسائل 1 , 2 , 3 در زیر) مطرح هستند.

در امتحانات کنکور با توجه به محدودیت زمانی اصولاً مساله نوع اول مطرح نمی‌باشد و فقط مسائل نوع دوم و سوم مطرح هستند. به مسائل در زیر دقت گردد.

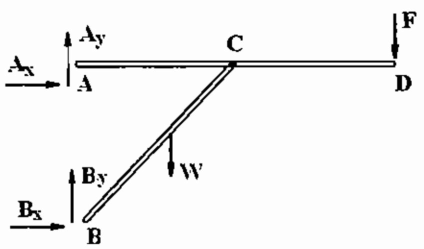
مسائل نوع اول: معمولاً حل آن‌ها زمان‌بر است و در امتحانات کنکور به روش تستی اصولاً چنین مسائلی مطرح نمی‌شوند.

مثلاً در قاب زیر نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه B چقدر است.

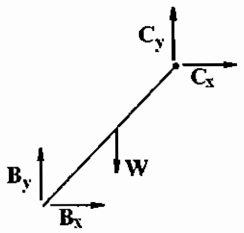


در این نوع مسائل در ظاهر چهار مجهول A_x، A_y، B_x، B_y وجود دارد و برای حل آن‌ها نهایتاً 6 معادله با 6 مجهول حاصل می‌گردد و مجهولات از این معادلات استخراج می‌شوند یعنی:

3 معادله تعادل با 4 مجهول A_y, A_x و B_y, B_x از دیاگرام آزاد مقابل، حاصل می‌شوند.



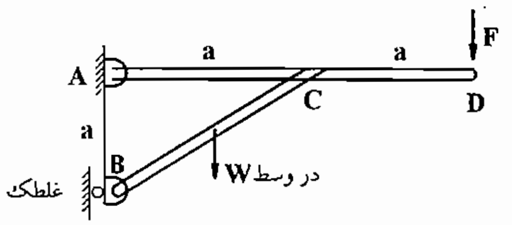
حال اجزا را جدا می‌کنیم، یعنی:



3 معادله تعادل با 2 مجهول جدید C_y, C_x حاصل می‌شوند.

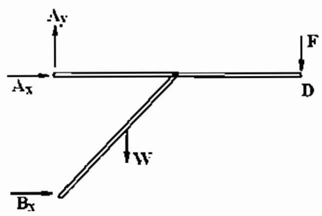
در مجموع، با توجه به مطالب بالا 6 مجهول، حاصل شده و نهایتاً B_y, B_x از آن استخراج می‌شوند.

مسائل نوع دوم : مثلاً در قاب‌ریزی نیروی عکس‌العمل B کدام است.



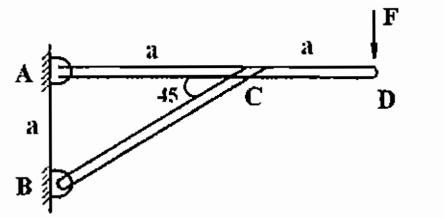
در این مسائل چون یک تکیه‌گاه غلطک دارد لذا در ظاهر سه مجهول A_x، A_y و B_x وجود دارد و با نوشتن دیاگرام آزاد کل جسم به سادگی عکس‌العمل B محاسبه می‌گردد. یعنی:

$\Sigma M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x$ محاسبه می‌گردد

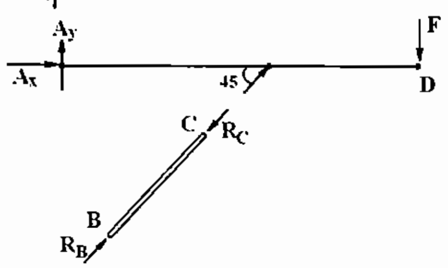


یعنی با نوشتن یک معادله تعادل عکس‌العمل محاسبه می‌گردد.

مسائل نوع سوم : عکس‌العمل B محاسبه گردد.



در این نوع مساله مانند مساله نوع اول صفحه قبل در ظاهر چهار مجهول A_x, A_y, B_x, B_y وجود دارد و بر خلاف مساله نوع اول عضو BC یک عضو دو نیروئی است که حل این نوع قاب‌ها را آسان می‌سازد. یعنی با نوشتن رابطه تعادل زیر عکس‌العمل B یعنی R_B محاسبه می‌گردد.



$$\Sigma M_A \quad \Rightarrow \quad F(2a) = R_B \, a \sin 45$$

$$R_B = \frac{2aF}{a \sin 45} = \frac{2F}{\sin 45}$$

مسائل خرپاها

تعریف : خرپا مجموعه‌ای از اعضای صلب است که از انتها به هم متصل‌اند و همه در یک صفحه قرار دارند و در مجموع به‌صورت یک جسم صلب در نظر گرفته می‌شوند. در مورد خرپاها نکات زیر را باید در نظر داشته باشید:

۱ـ اعضای خرپاها معمولاً در مقایسه با بارهای خارجی اعمال شده، بدون وزن در نظر گرفته می‌شوند.

۲ـ نیروهای خارجی فقط روی محل‌های اتصال اعضا اعمال می‌شوند و اتصال اعضا و انتقال نیرو بین آنها از طریق پین صورت می‌گیرد.

۳ـ اعضای تشکیل‌دهنده خرپا، همه عضوهای دو نیرویی هستند. یعنی امتداد نیروی داخلی هر عضو منطبق بر خط گذرنده از دو سر مفصل است.

۴ـ در صورتی که نتوان از وزن عضو، در برابر نیروی خارجی اعمال شده صرف‌نظر کرد، وزن عضو w، را می‌توان با دو نیروی $\frac{w}{2}$ روی مفصل دو عضو جایگزین نمود، (طبیعتاً جهت نیروی وزن به سمت پایین خواهد بود).

۵ـ اگر بار گسترده روی اعضا بود، آن را تبدیل به بار منفرد کرده و به دو سر عضو منتقل می‌کنیم و با المان گیری مقدار مولفه‌ها را بدست می‌آوریم.

روش‌های حل مسائل خرپا:

الف) روش مفاصل:

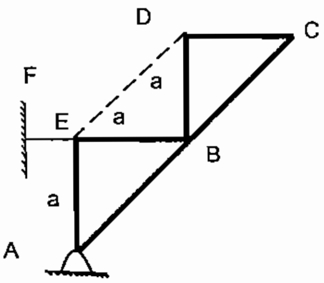
ابتدا دیاگرام آزاد همه پین‌های موجود در مفاصل خرپا را رسم می‌کنیم. سپس از مفصلی شروع به حل می‌کنیم که ماکزیمم ۲ مجهول (و یا به‌طور کلی کمترین تعداد مجهول را) داشته باشد و در آن مفصل از دو معادله $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ دو مجهول را بدست می‌آوریم. حال به سراغ مفصل بعدی می‌رویم. برای سه نیروی متقارب، از رابطه سینوس‌ها استفاده می‌کنیم.

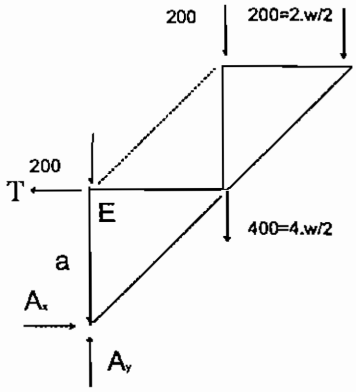
ب) روش مقاطع :

در این روش خرپا، با یک مقطع فرضی و مناسب بریده می‌شود و با اعمال سه معادله تعادل $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma M = 0$ در هر مقطع، مجهولات بدست می‌آیند. حتی‌الامکان سعی می‌شود، مقطع برش شامل اعضایی باشد که امتداد آنها از مرکز گشتاورگیری بگذرد، زیرا گشتاور این نیروها صفر خواهد شد.

در ادامه با ذکر مثال‌هائی این روش‌ها توضیح داده شده است.

مثال (تست سال ۶۹): وزن هر یک از میله‌ها 200N است و از وزن کابلهای EF , DE صرف‌نظر می‌شود. نیروی اعمال شده به تکیه‌گاه A چقدر است؟





ابتدا دیاگرام آزاد کل خرپا را رسم می‌کنیم.

با انتخاب نقطه‌ی E، گشتاور، 3 نیرو یعنی T و A_y و نیروی وزن حذف می‌شود.

$$\Sigma M_E = 0$$

$$A_x a = \overset{B}{400}a + \overset{D}{200}a + \overset{C}{200}(2a) \Rightarrow A_x = 1000N$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$A_y = \overset{E}{200} + \overset{B}{400} + \overset{D}{200} + \overset{C}{200} = 1200N$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 1562N$$

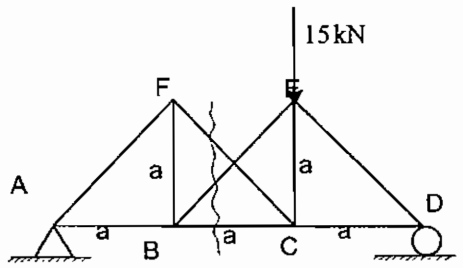
مثال (تست سال ۶۹): نیروی عضو FC در سازه مقابل چقدراست؟

۱) 8.4 kN

۲) 7.1 kN

۳) 9.5 kN

۴) 12 kN

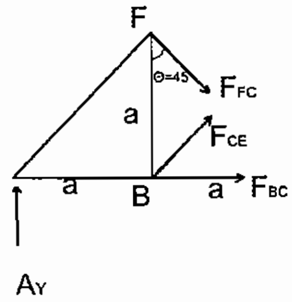


ابتدا، کل خرپا را به‌عنوان جسم آزاد در نظر می‌گیریم:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 15(2a) - D_y(3a) = 0 \Rightarrow D_y = 10kN$$

حال برای بدست آوردن نیروی F_{FC} مطابق شکل مقطع می‌زنیم.

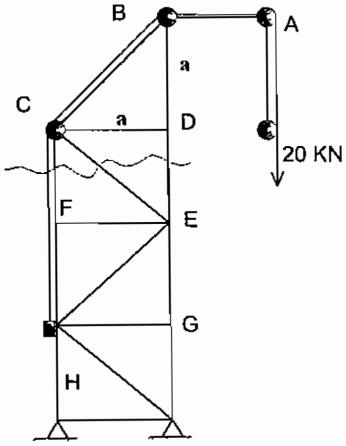


$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow A_y(a) = F_{FC}\left(\underset{}{\overset{\overset{\sin(45)}{\uparrow}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\right)a$$

$\Sigma F_y = 0 \quad \rightarrow \quad A_y = 15 - D_y = 15 - 10 = 5kN$ (با در نظر گرفتن کل خرپا به‌عنوان جسم آزاد)

$$F_{FC} = 5\sqrt{2} = 7.1N$$

مثال (تست سال ۶۹): در شکل زیر نیروی اعضای FC , CE عبارتند از :



۱) $CE = 10\sqrt{2}\ kN \quad , \quad FC = 10 kN$

۲) $CE = 10\ kN \quad , \quad FC = \frac{10}{\sqrt{2}} kN$

۳) $CE = 0\ kN \quad , \quad FC = 10 kN$

۴) $CE = \frac{10\sqrt{2}}{2}\ kN \quad , \quad FC = 10\sqrt{2}\, kN$

مطابق شکل مقطع می‌زنیم و دیاگرام آزاد قسمت بالای مقطع را در نظر می‌گیریم.

$\Sigma M_E = 0 \rightarrow F_{FC}(a) = 20(a) - T(a)$

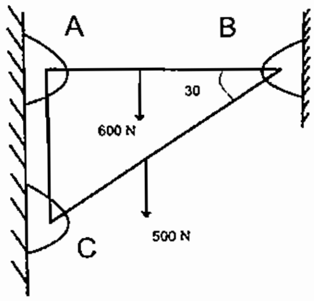
سه نیروی خارجی $T, F_{CF}, 20$ را در نظر می‌گیریم.

T نیروی کششی طناب است که مطابق شکل، نصف نیروی اعمال شده است. $T = 10\ kN$

$\rightarrow F_{CF} = 10\ kN$

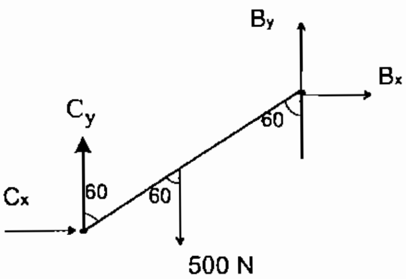
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{CE} = 0$

مثال: عکس‌العمل B کدام است؟

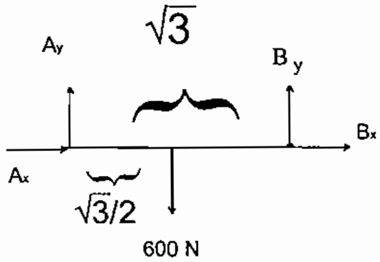


$AB = \sqrt{3} m$

$BC = 2m$



(شکل ۲)



شکل (۱)

$$\text{(شکل (۱))}\ \Sigma M_A = 0 \rightarrow 600\frac{\sqrt{3}}{2} = B_y\sqrt{3} \Rightarrow B_y = 300N$$

$$\text{(شکل (۲))}\ \Sigma M_c = 0 \Rightarrow B_y \underset{BC}{\underset{\downarrow}{(2)}} \sin 60 - B_x (2)\cos 60 - 500 \underset{\frac{BC}{2}}{\underset{\downarrow}{(1)}} \sin 60 = 0 \Rightarrow B_x = 50\sqrt{3}\ N$$

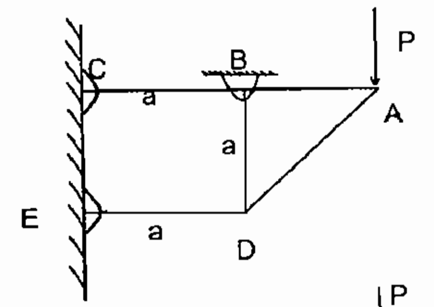
مثال: نیروی عضو BD کدام است؟

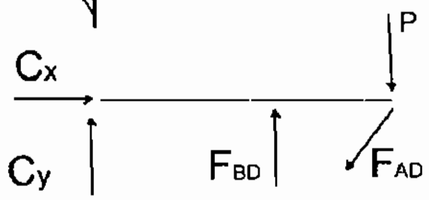
۱) 2P

۲) 0

۳) –P

۴) 5P

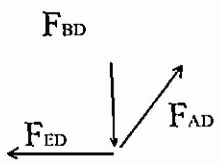




$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow F_{BD}(a) + F_{AD}(2a)\sin 45 + P(2a) = 0$$

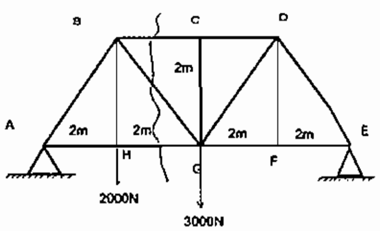
حال پین D را به‌عنوان یک جسم آزاد در نظر می‌گیریم:

$$F_{BD} = -F_{AD}\cos 45 \rightarrow F_{AD} = -F_{BD}\sqrt{2}$$



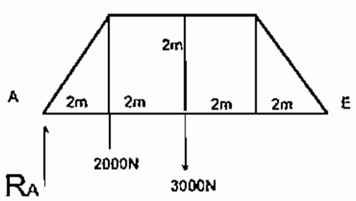
حال F_{AD} را در معادله قبل جایگذاری می‌کنیم.

$$F_{BD}(a) - F_{BD}\sqrt{2}\ (2a)\sin 45 + 2P = 0 \rightarrow F_{BD} = 2P$$

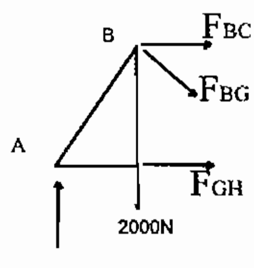


مثال: نیروی عضو GH کدام است؟

ابتدا کل جسم را به‌عنوان جسم آزاد در نظر می‌گیریم:



(۱)



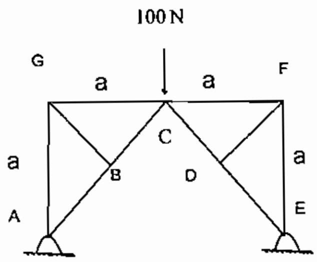
(۲)

$$\Sigma M_E = 0 \Rightarrow R_A(8) - 2000(6) - 3000(4) = 0 \rightarrow R_A = 3000\,N$$

حال مطابق شکل (۲) مقطع می‌زنیم و دیاگرام آزاد قسمت سمت چپ مقطع را رسم می‌کنیم.

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow F_{GH}(2) = R_A(2) \rightarrow F_{GH} = R_A = 3000\,N$$

مثال (تست سال ۶۹): در صورتی که تمام زوایا $45°$, $90°$ باشد نیروهای BC و CF چقدر است؟



۱) $BC = \frac{200}{\sqrt{2}}\,N \quad , \quad CF = 50\,N$

۲) $BC = \frac{200}{\sqrt{2}}\,N \quad , \quad CF = -50\,N$

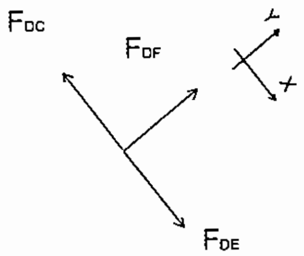
۳) $BC = \frac{200}{\sqrt{2}}\,N \quad , \quad CF = 0\,N$

۴) $BC = \frac{100}{\sqrt{2}}\,N \quad , \quad CF = 0\,N$

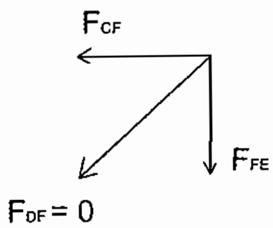
دیاگرام آزاد پینهای D , F , C را رسم می‌کنیم.

((شکل (۱)) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{DF} = 0$

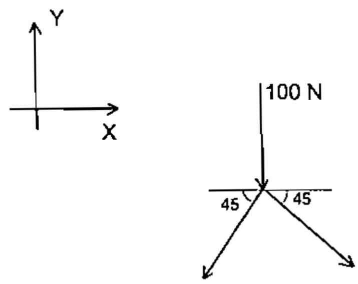
((شکل (۲)) $F_{CF} = F_{FE} = 0$



(۱)



(۲)



((شکل (۳))

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_{CB}\cos 45 + F_{CD}\cos 45 = 0 \Rightarrow F_{CB} = F_{CD}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -100 - 2F_{CB}\sin 45 = 0 \Rightarrow F_{CB} = \frac{-100}{\sqrt{2}}N$$

علامت منفی نشان‌دهنده آنست که جهت نیروهای F_{CD} , F_{CB} را اشتباه انتخاب کرده بودیم. بعد از تغییر دادن جهت نیروها:

$$F_{CB} = \frac{100}{\sqrt{2}}N$$

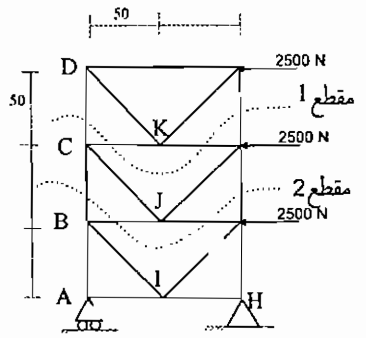
مثال (تست سال ۷۰) : نیروی داخلی در عضو FJ را بدست آورید.

۱) 3750 N

۲) 1250 N

۳) -2500 N

۴) هیچ‌کدام



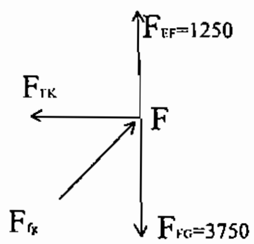
مقطع (۱) : $\Sigma M_C = 0 \Rightarrow F_{EF}(100) = 2500(50) \Rightarrow F_{EF} = 1250\,N$

مقطع (۲) : $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow F_{FG}(100) = 2500(50) + 2500(100) \Rightarrow F_{FG} = 3750\,N$

حال دیاگرام آزاد پین F را در نظر می‌گیریم:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 1250 - 3750 + F_{FJ}\cos 45 = 0$

$F_{FJ} = 3535.5\,N$



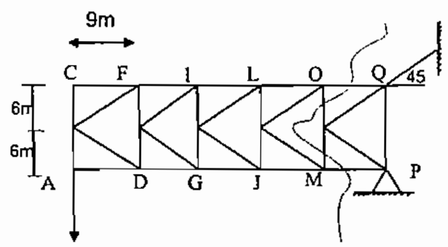
مثال (تست سال ۷۳): نیروی موجود در عضو OQ از خرپای شکل زیر چقدر است؟

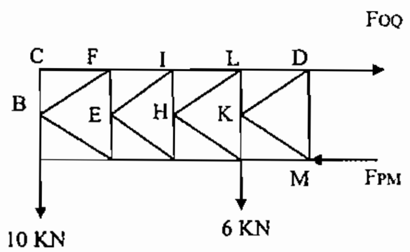
۱) 34.5 kN فشاری

۲) 30kN فشاری

۳) 34.5kN کششی

۴) 4.5kN فشاری





$\Sigma M_M = 0 \rightarrow F_{OQ}(12) = 6\times9 + 10\times9\times4$

$F_{OQ} = 34.5\,kN$

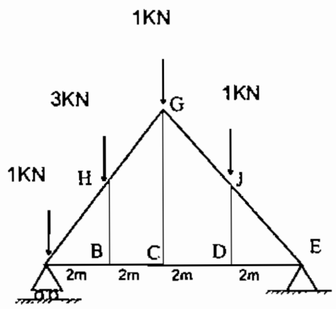
مثال (تست سال ۷۱): در خرپای مقابل نیروی عضو JD چقدر است؟

۱) صفر

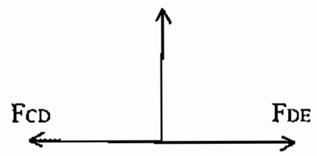
۲) 4 kN

۳) 3 kN

۴) 6 kN



پین D را به‌عنوان جسم آزاد در نظر می‌گیریم:



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{JD} = 0$$

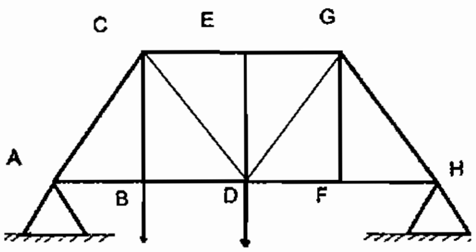
مثال (تست سال ۷۲): در خرپای مقابل، کدام‌یک از اعضا نیرویی تحمل نمی‌کنند؟

۱) ED , CB , GF

۲) CB , ED

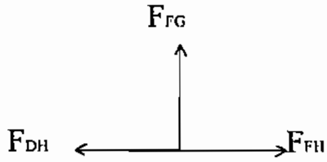
۳) CB , GF

۴) ED , GF



دیاگرام آزاد پین‌های F , E را رسم می‌کنیم:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{DE} = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{FG} = 0$$



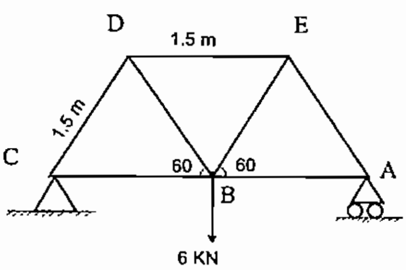
مثال (تست سال ۷۷): در خرپای نشان داده شده نیروی داخل عضو BE چقدر است؟

۱) $F_{BE} = 2\sqrt{3}\ \text{kN}$ و کششی

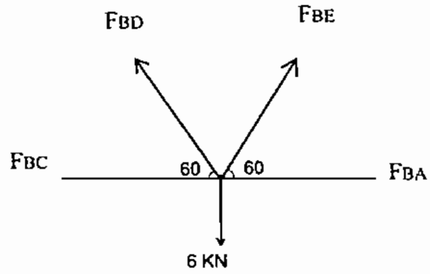
۲) $F_{BE} = 2\sqrt{3}\ \text{kN}$ و فشاری

۳) $F_{BE} = 6\ \text{kN}$ و کششی

۴) $F_{BE} = 6\ \text{kN}$ و فشاری



دیاگرام آزاد پین B را رسم می‌کنیم.



$F_{BC} = F_{BA}$

$F_{BD} = F_{BE}$

$\Sigma F_y = 0 \to 2\,F_{BE}\sin 60 = 6\,\text{kN} \Rightarrow F_{BE} = 2\sqrt{3}\,\text{kN}$

به دلیل وجود تقارن در مسئله، $F_{BC}=F_{BA}$ می‌باشد.

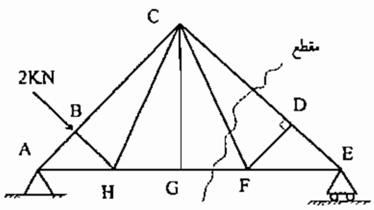
مثال: نیروی داخلی عضو FC را بدست آورید.

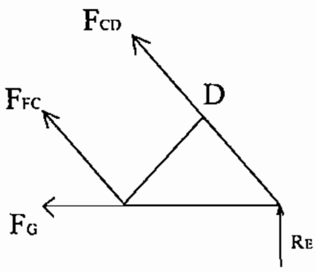
۱) صفر

۲) $\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{3}$

۴) 2

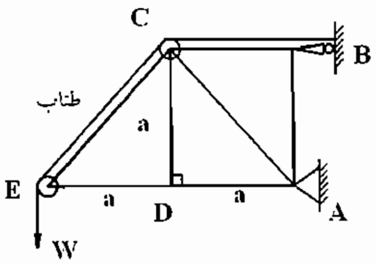




$\sum M_E = 0 \Rightarrow F_{FC} = 0$

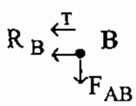
مثال: در سیستم خرپای زیر نیروی وارد بر عضوهای AB و CE محاسبه می‌گردد.

مشروط بر این‌که ضریب اصطکاک قرقره و طناب صفر فرض شوند.



$F_{AB}=0$ است زیرا:

(نقطه‌ی B)

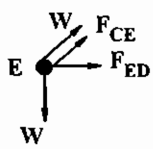


$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 0$

حل: حال برای محاسبه نیروی CE داریم:

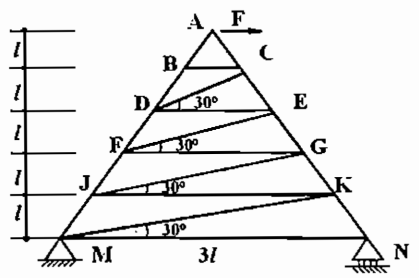
$$\Rightarrow \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad W = W\sin 45 + F_{CE}\sin 45$$

$$\Rightarrow \quad F_{CE} = \frac{W - W\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)W$$



(نقطه‌ی E)

مثال: در خرپای زیر نیروی وارد بر عضو JK چقدر است؟



جواب :

$F_{JK}=0$

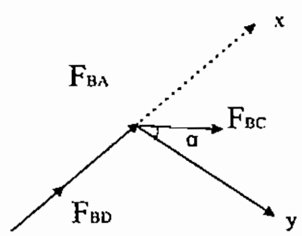
زیرا

$F_{BC}=F_{DC}=F_{DE}=F_{EF}=F_{FG}=F_{JG}=F_{KJ}=0$

به عنوان مثال، در نقطه B : محور عمودی xy را انتخاب می‌کنیم و رابطه تعادل را می‌نویسیم

$\Sigma F_y=0 \quad \Rightarrow \quad 0+0+F_{BC}\cos\alpha=0$

$F_{BC}=0$



فصل چهارم

تیرها

تیرها، اغلب میله‌های بلند منشوری هستند که علاوه بر نیروی محوری و برشی، لنگر خمشی را نیز تحمل می‌کنند. اندازه سطح مقطع این اعضا نسبت به طول‌شان کوچک است. (تیرها علاوه بر بارگذاری محوری به صورت مایل نیز بارگذاری می‌شوند)

تیرهایی که واکنش‌های خارجی تکیه‌گاه آن‌ها را می‌توان تنها با روش‌های استاتیک محاسبه نمود، به تیرهای معین استاتیکی موسومند. تیری که تعداد تکیه‌گاه‌های آن بیش از تعداد موردنیاز برای تامین تعادل است را نامعین استاتیکی می‌نامند و لازم است خواص بار تغییر شکل تیر را علاوه بر معادله‌های تعادل استاتیکی برای تعیین واکنش‌های تکیه‌گاه در نظر بگیریم.

در تیرهایی که نیروهای گسترده (متمرکز) دارند، یک روش، استفاده از نوشتن معادلات تعادل (تعادل نیروهای برشی ، تعادل نیروهای محوری، تعادل گشتاورهای خمشی) است. علاوه بر این برای هر تیر با بار گسترده می‌توان روابطی بدست آورد که به تعیین گسترش‌های گشتاور و برش در طول تیرکمک می‌کند.

$$1)\ \omega(x) = -\frac{dv}{dx}$$

یعنی شیب نمودار برشی، باید در همه جا برابر منفی مقدار بار اعمالی باشد. این معادله در دو طرف بار متمرکز معتبر است. اما نه در مکان اعمال بار، زیرا تغییر یک بارهٔ نیروی برشی، موجب ناپیوستگی می‌شود.

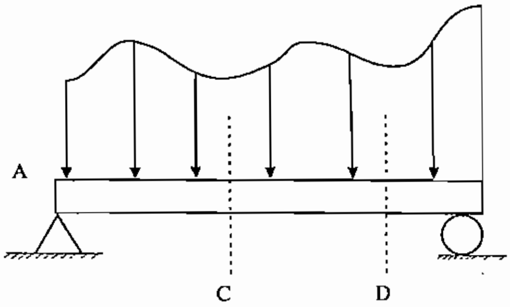
$$2)\ \omega(x) = -\frac{d^2M}{dx^2}$$

$$3)\ V = \frac{dM}{dx}$$

یعنی نیروی برشی در هر کجا، برابر شیب منحنی گشتاور است. با انتگرال‌گیری از رابطه پیش، بین دو نقطه، می‌توان تغیر نیروی برشی و اندازه تغییر لنگر خمشی را بدست آورد.

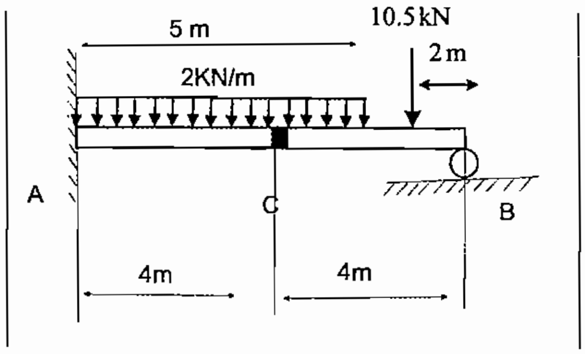
$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} \omega(x)\,dx$$

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V(x)\,dx$$



اثر یک لنگر خمشی متمرکز، ایجاد جهش به اندازه لنگر خمشی در نمودار لنگر خمشی ـ طولی تیر است.

مثال (تست سال ۷۸): دو تیر AC و BC بوسیله پین C به هم متصل شده‌اند، نیروی وارد به پین C را بدست آورید.

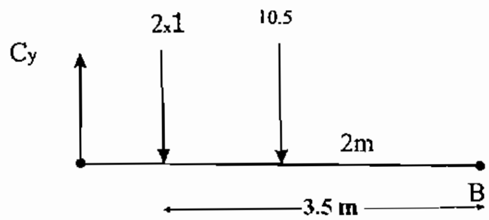


۱) 6 KN
۲) 7 KN
۳) 8 KN
۴) 14 KN

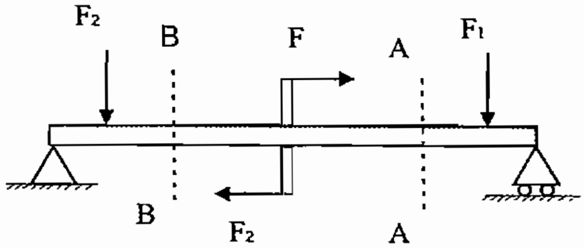
دیاگرام جسم آزاد تیر BC را رسم می‌کنیم.

$$\sum M_B = 0 \to C_y(4) - 2(1)(3.5) - 2(10.5) = \to C_y = 7\,KN$$

$$\sum F_x = 0 \to C_x = 0$$



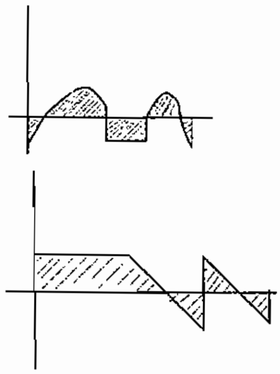
مثال (تست سال ۷۲): در تیر داده شده در شکل مقابل، منظور محاسبه نیروهای محوری و بررسی لنگر خمشی تیر در مقاطع AA و BB است. در این دو مقطع

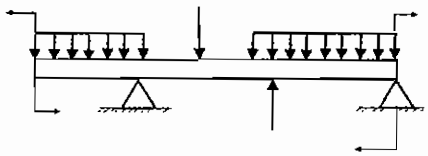


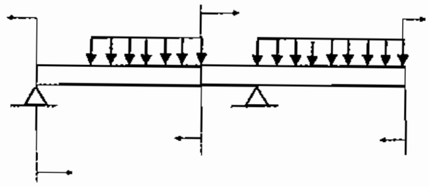
۱) نیروهای برشی و محوری لنگرهای خمشی برابرند
۲) فقط نیروهای محوری متفاوتند
۳) فقط لنگرهای خمشی دو مقطع متفاوتند
۴) فقط لنگرهای خمشی و نیروهای محوری متفاوتند

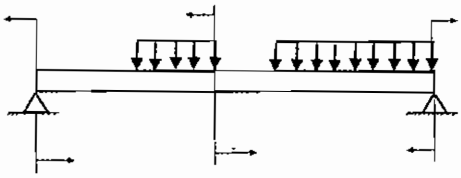
در تیر داده شده هیچ نیروی محوری وجود ندارد که در فاصله مقاطع خواسته شده تغییر کند. نیروی برشی هم در فاصله بین مقاطع A-A و B-B تغییر نمی‌کند، زیرا نیروی برشی در فاصله بین دو نیروی F_1 و F_2 ثابت است. تنها لنگر خمشی در فاصله بین A-A و B-B تغییر می‌کند. علاوه بر این کوپل وارد شده در وسط تیر در نمودار لنگر خمشی، جهش ایجاد می‌کند. بنابراین گزینه سوم صحیح است.

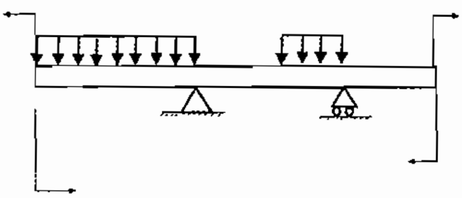
مثال (تست سال ۷۰): در شکل زیر، نمودارهای نیروی برشی و ممان خمشی یک تیر تحت بار نمایش داده شده است. بارگذاری و محل تکیه‌گاه را در تیر تعیین کنید.



۱) 

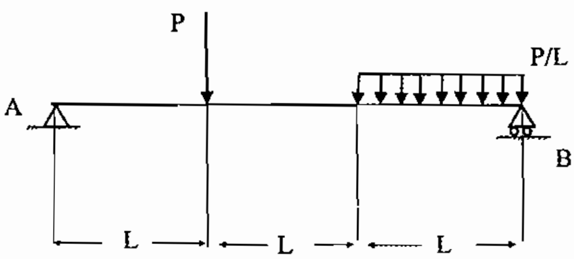
۲) 

۳) 

۴) 

مطابق نمودار برشی ، در دو سر تیر، نیروی برشی وجود دارد که بیانگر وجود تکیه‌گاه یا نیروی متمرکز در دو سر تیر است. بنابراین تنها گزینه سوم درست است. در دو سر تیر وسط آن ممان خمشی اعمال شده است که وجود جهش در نمودار ممان خمشی در وسط و دو سر تیر را تایید می‌کند.

مثال (تست سال ۶۹): در شکل مقابل، بیشینه لنگر خمشی چقدر است؟



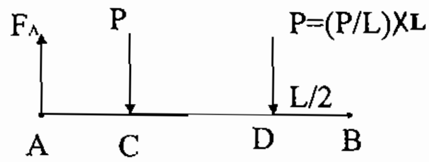
۱) $\frac{2}{3}PL$

۲) $\frac{3}{4}PL$

۳) $\frac{5}{6}PL$

۴) $\frac{6}{7}PL$

ابتدا باید اندازه عکس‌العمل در تکیه‌گاه‌ها را بدست آوریم.



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_A(3L) - P(\overset{C}{2L}) - P\left(\overset{D}{\frac{L}{2}}\right) = 0 \Rightarrow F_A = \frac{5}{6}P$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_B = \frac{7}{6}P = \left(\overset{C}{P} + \overset{D}{P} - \overset{A}{\frac{5}{6}}P\right)$$

محل لنگر خمشی ماکزیمم را با استفاده از نمودار لنگر خمشی، تعیین می‌کنیم.

$$M_{max} = F_A L = \frac{5}{6} PL$$

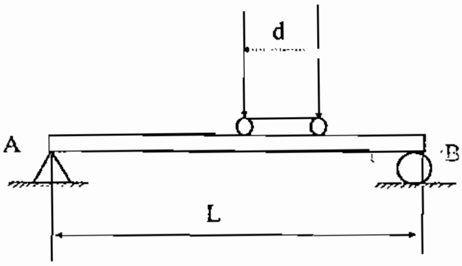
مثال (تست سال ۶۷): در شکل دو چرخ متحرک به فاصله d=6 cm بر روی یک تیر به طول L=24cm را ملاحظه می‌کنید. در صورتی که هر یک از چرخ‌ها نیروی P=3KN را بر روی تیر وارد نماید، مطلوب است، میزان ممان خمشی ماکزیمم در تیر فوق.

۱) 27 KN . m

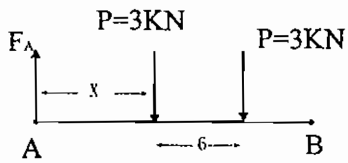
۲) 28.8 KN . m

۳) 28.2 KN . m

۴) 27.6 KN.m



با فرض این‌که نیروی P سمت چپ با فاصله x از نقطه A قرار داشته باشد.



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_A(24) - 3(24-x) - 3\left[24-(x+6)\right] = 0 \Rightarrow F_A = \frac{21-x}{4}$$

گشتاور در محل اثر نیروی P سمت چپ.

$$M = R_A x = \frac{21x - x^2}{4}$$

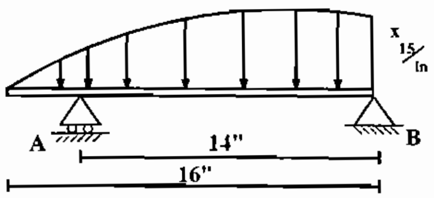
$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow x = 10.5m$$

$$M_{max} = \frac{21(10.5)-(10.5)^2}{4} = 27.6\,KN.m$$

تیرهای خمیده

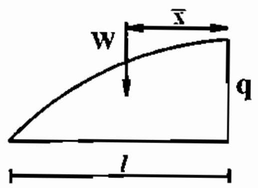
در تیرهای خمیده برای محاسبه نیروهای داخلی تیر یا نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاهها مانند تیرهای ساده، بایستی با نوشتن روابط تعادل استاتیکی مسائل حل شوند. دقت شود که اصولاً سه نوع نیروی داخلی نرمال N و برشی V و ممان M در هر مقطع برش خورده از تیر وجود دارند که با نوشتن روابط تعادل می‌توان آن‌ها را محاسبه نمود. به چند حالت مهم درتیرهای خمیده در مثال‌های زیر توجه گردد.

مثال: عکس‌العمل A و B کدام است؟ مشروط به این‌که توزیع بار گسترده به صورت یک معادله پارابولیک باشد.



$$\bar{x} = \frac{3}{8}$$

$$W = \frac{2}{3}\ell q$$



با نوشتن رابطه تعادل برای تیر خواهیم داشت.

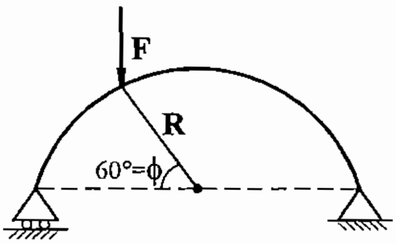
$\Sigma M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -14A_y + 6400\times 6 = 0$

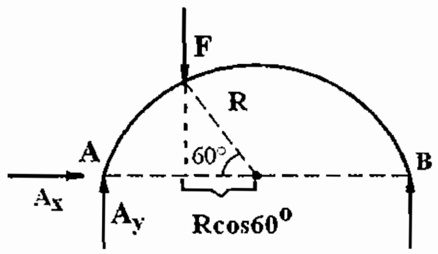
$\boxed{A_y = 27401.}$

$A_y + B_y = W \quad \Rightarrow \quad B_y = 366015$

$B_x = 0$

مثال: تعیین کنید اولاً عکس‌العمل‌ها در قوس نیم دایره را چنانچه نیروی متمرکز F در $\varphi=60°$ اعمال گردد. ثانیاً نیروی داخلی در $\varphi=30°$, $\varphi=90°$ محاسبه می‌گردد.



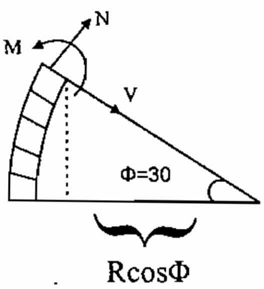


$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$

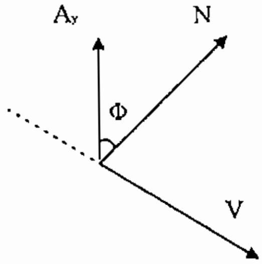
$\Sigma M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B(2R) - F(R - R\cos 60) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{1}{4}F}$

$\Sigma M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y(2R) - F(R + R\cos 60) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_y = \frac{3}{6}F}$

محاسبه نیروی داخلی در $\varphi=30$ درجه:



با توجه به دیاگرام آزاد مقابل سعی می‌شود که رابطه تعادل را در جهت V , N نوشته شود . یا به عبارت بهتر محورهای x , y را، همان جهت‌های V , N در نظر می‌گیریم.



$$N \text{ در جهت } \Rightarrow \quad N + A_y \cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = -\frac{3}{4} F\cos\varphi}$$

$$V \text{ در جهت } \Rightarrow \quad V - A_y \sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{3}{4} F\sin\varphi}$$

$$\Sigma M_S = 0 \quad \Rightarrow \quad +A_y\left(R - R\cos\varphi\right) - M = 0$$

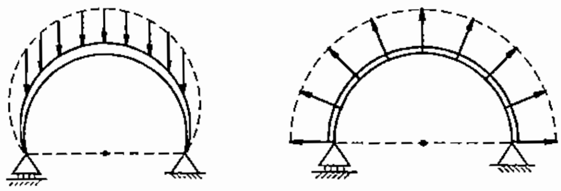
$$\Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{3}{4}\left(1 - \cos\varphi\right) FR}$$

یعنی توزیع نیروهای داخلی خمیده، به صورت معادلات سینوسی و کسینوسی می‌باشد.

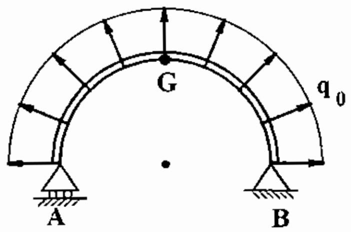
در معادلات بالا $\varphi = 30^\circ$ را قرار می‌دهیم تا مقادیر M , V , N محاسبه گردد.

به همین ترتیب در $\varphi = 90^\circ$ روابط تعادل داخلی را نوشته تا M , V , N محاسبه گردند.

تذکر: معمولاً در تیرهای خمیده بارها یا به صورت متمرکز (مانند مثال بالا) یا به صورت گسترده به یکی از دو حالات زیر اعمال می‌گردند. در این دو حالت برای محاسبه نیروهای داخلی یا محاسبه عکس‌العمل‌ها، بایستی از روش انتگرال‌گیری استفاده نمود.

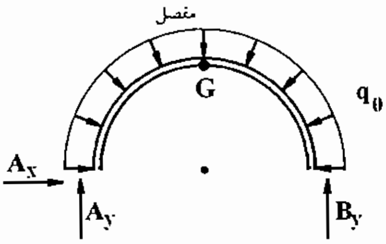


مثال: در قوسه سه مفصلی زیر، عکس‌العمل‌های G , B , A و همچنین نیروهای داخلی تیر را محاسبه نمایید.



حل: این مساله چون بار متقارن است به دو روش قابل حل است.

روش اول روش تستی است که به علت تقارن نیرو و هندسه دیگر نیاز به حل مساله نبوده و سریعاً جواب داده می‌شود و روش دوم راه‌حل کلی‌تر است . در این‌جا هر دو روش اشاره می‌شود.



روش اول : چون نیرو گسترده متقارن است، پس تصویر آن در راستای x صفر است یعنی:

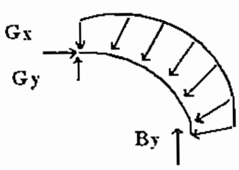
$$\Sigma F_x = 0$$

$$\boxed{A_x = 0}$$

تصویر بار گسترده در راستای محور y برابر $q_0 2R$ است، پس:

$$A_y + B_y = 2Rq_0 \quad \Rightarrow \quad A_y = B_y = Rq_0$$

و همچنین $G_y = 0$, $G_x = q_0.R$ (با در نظر گرفتن نیمه‌ی راست یا چپ قوس سه مفصلی) ←

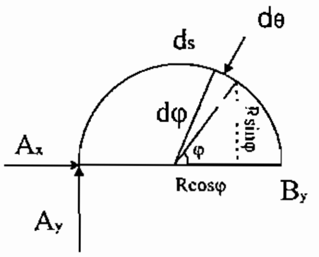


روش دوم : روش کلی‌تر : یک المان به زاویه φ و طول ds از بار گسترده را در نظر می‌گیریم. این روش کلی به خصوص، برای حل مسائلی که بار گسترده به صورت عمودی اعمال می گردد، مناسب می‌باشد.

$d\varphi_y = d\varphi \sin\varphi$

$d\varphi_x = d\varphi \cos\varphi$

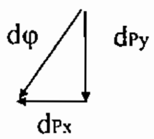
$ds = R d\varphi$



$$dQ = q_0\, ds = q_0 R\, d\varphi$$

$$dQ_y = q_0 R \overbrace{\sin\varphi\, d\varphi}^{d\varphi_y}$$

$$dQ_x = q_b R \overbrace{\cos\varphi\, d\varphi}^{d\varphi_x}$$

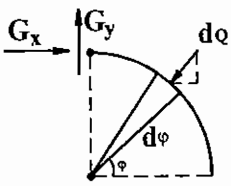


$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x - \int_0^{\pi} \overbrace{R q_0 \cos\varphi\, d\varphi = 0}^{d\varphi_x}$$

$$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y + B_y - \int_0^{\pi} R q_0 \sin\varphi\, d\varphi = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \;\Rightarrow\; -B_{y(2R)} - \int_0^{\pi} dQ_x\, R\sin\varphi\, d\varphi + \int_0^{\pi} dQ_y\,(R + R\cos\varphi)\, d\varphi = 0$$

از معادلات بالا $\boxed{A_x = 0}$, $\boxed{B_y = q_0 R}$, $\boxed{A_y = q_0 R}$ استخراج می‌شوند.



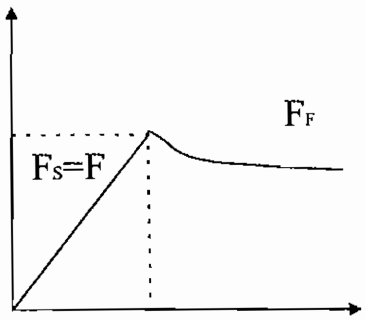
محاسبه عکس‌العمل G در محل مفصل

$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; G_x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} R q_0 \cos\varphi = 0 \;\Rightarrow\; G_x = q_0 R$$

$$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; B_y - G_y - \int_0^{\frac{\pi}{2}} R q_0 \sin\varphi\, d\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{G_y = 0}$$

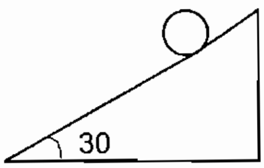
فصل پنجم

اصطکاک



در درس استاتیک مبحث اصطکاک فقط تا آستانه لغزش، بررسی می‌شود. بنابراین اصطکاک خشک یا استاتیکی موردنظر است. در اصطکاک خشک با افزایش نیروی کشنده F ، نیروی اصطکاک مساوی با آن افزایش پیدا می‌کند تا جایی که به حداکثر مقدار خود $\mu_s N$ برسد. با افزایش مجدد F در گذر از آستانه لغزش، نیروی اصطکاک به اندازه تفاوت ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s و دینامیکی μ_d کاهش پیدا کرده و ثابت باقی می‌ماند. پس همواره $F_f \le \mu_s N$.

در صورتی که شعاع غلتک 40 mm و ضریب اصطکاک غلتشی 0.02 cm و ضریب اصطکاک لغزشی 0.2 باشد، کدام گزینه صحیح است؟



۱) جسم ابتدا می‌لغزد و سپس می‌غلتد.

۲) جسم ابتدا می‌غلتد و سپس می‌لغزد.

۳) همزمان غلتش و لغزش داریم.

نیروی اصطکاک لغزشی $f = \mu N$

نیروی اصطکاک غلتشی $f = \frac{k}{R} N$

$\frac{k}{R} = \frac{0.02}{4} < 0.2 \Rightarrow$ جسم ابتدا می‌غلتد و سپس می‌لغزد

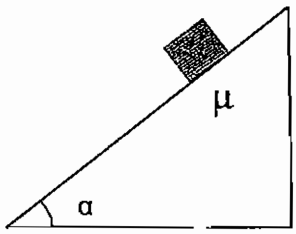
مثال: شرط اینکه جسم بطرف پایین حرکت نکند، کدام است؟

۱) $\tan\alpha > \mu$

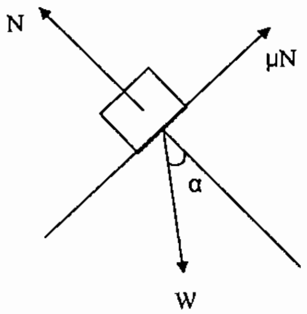
۲) $\tan\alpha < \mu$

۳) $\tan\alpha = \mu$

گزینه دوم صحیح است.



نیروی اصطکاک، باید بیشتر از نیروی وزن در جهت حرکت باشد.

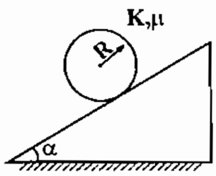


$N = W\cos\alpha$

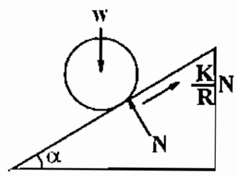
$\mu N > W\sin\alpha$

$\Rightarrow \quad \mu W\cos\alpha > W\sin\alpha \quad \rightarrow \quad \mu > \tan\alpha$

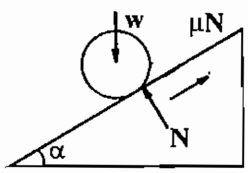
مثال: یک جسم کروی به وزن W در روی یک سطح شیبدار با زاویه α قرار دارد. معین کنید آیا این جسم اول می‌لغزد یا می‌غلتد؟



حل: دیاگرام آزاد در دو حالت لغزش و غلتش رسم می‌شود.



غلتشی



لغزشی

نیروی اصطکاکی غلتشی : $\frac{K}{R}N$

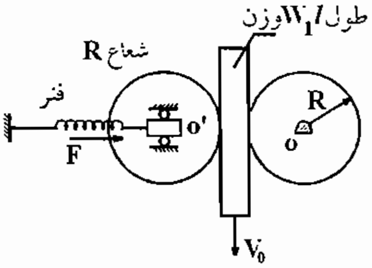
نیروین اصطکاک لغزشی : μN

(a) اگر $\mu < \frac{K}{R}$ باشد جسم ابتدا می‌لغزد. (نیروی اصطکاک غلتشی بیشتر از نیروی اصطکاک لغزشی)

(b) اگر $\mu > \frac{K}{R}$ باشد جسم ابتدا می‌غلتد. (نیروی اصطکاک لغزشی بیشتر از نیروی اصطکاک غلتشی)

(c) اگر $\mu = \frac{K}{R}$ باشد لغزش و غلتک همزمان شروع می‌شوند.

مثال: بین دو استوانه با شعاع معلوم R، یک صفحه با طول معلوم ℓ و وزن W با سرعت یکنواخت V_0 بدون سرخوردگی پائین می‌آید. اگر ضریب اصطکاک غلتش K فرض شود وزن صفحه کدام است؟ مشروط بر این‌که نیروی فنر F باشد.



۱) $W=\frac{2K}{R}F$ ۲) $W=\frac{R}{K}F$ ۳) $W=\frac{K}{R}F$ ۴) $W=\frac{2R}{K}F$

حل: گزینه ۱ صحیح است. زیرا

در غلطک 1 داریم:

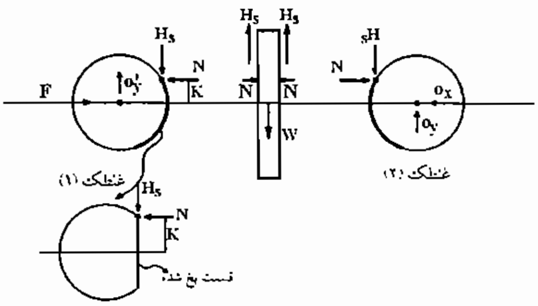
$$\sum F_x=0 \Rightarrow \boxed{F=N}$$

$$\sum M_{o'}=0 \Rightarrow H_s.R=N.K$$

$$\Rightarrow H_s=\frac{K}{R}N$$

یا

$$H_s=\frac{K}{R}F$$



در صفحه وسط، رابطه تعادل را می‌نویسیم

$$W=2H_s=\frac{2K}{R}F$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

پیچ‌دنده مربعی:

پیچ دنده مربعی یک نمونه از وسایل اصطکاکی است که اصولاً دو نمونه مسئله در مورد آن مطرح می‌شود.

الف) ممان نیروی P که برای بالا بردن یک بار موردنظر، لازم است.

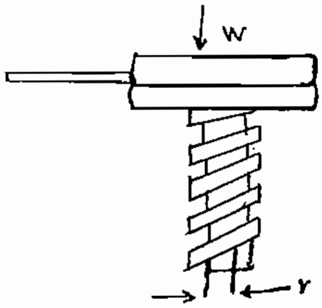
ب) ممان نیروی P که برای پایین آوردن یک بار موردنظر، لازم است.

در هر دو حالت ممان پیچشی، حول محور عمودی پیچ است. در حالت الف باید ممان پیچشی بر نیروی اصطکاک غلبه کرده و بار w را بالا ببرد در حالیکه در حالت ب بار w کمک می‌کند. فرض کنید β زاویه پیشروی باشد، یعنی زاویه‌ای که تانژانت آن برابر پیشروی (L) تقسیم بر محیط متوسط $(2\pi r)$ می‌باشد. همچنین فرض کنید φ زاویه اصطکاک باشد. در صورتی‌که r شعاع متوسط دندانه باشد، ممان موردنیاز در دو حالت فوق برابراست با:

a) $M = wr\tan(\varphi+\beta)$

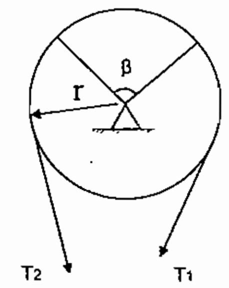
b) $M = wr\tan(\varphi-\beta)$

$\beta=\tan^{-1}\left(\frac{L}{2\pi r}\right)$



اصطکاک تسمه:

تسمه تختی، دور محور استوانه‌ای ثابتی پیچیده شده است. مقدار پیچیدن با زاویه β یا زاویه پیچش نشان داده می‌شود. در صورتی‌که ضریب اصطکاک بین تسمه و محور μ و کشش دو سر تسمه T_2 , T_1 باشد، رابطه زیر بین کشش دو سر تسمه برقرار است:

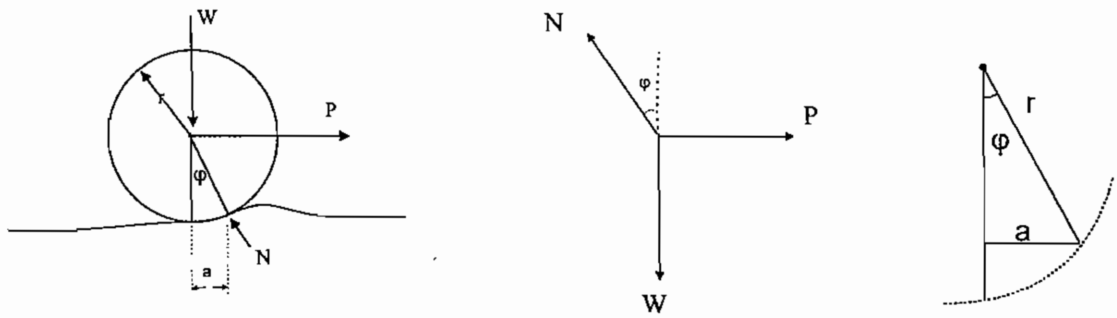


$T_2 = T_1\ e^{\mu\beta}$

دقت کنید که β باید برحسب رادیان بیان شود. اگر طناب، n بار دور محور استوانه‌ای پیچیده شود، زاویه پیچش $2\pi n$ رادیان می‌شود.

مقاومت غلتشی:

غلتکی را در نظر بگیرد که در حالی‌که بار W را در مرکز تحمل می‌کند، در راستای یک سطح افقی، بدون لغزش می‌غلتد. از آنجاکه برای حفظ حرکت یکنواخت، نیروی افقی P لازم است، نوعی مقاومت باید در کار باشد:



$W = N\cos\varphi$

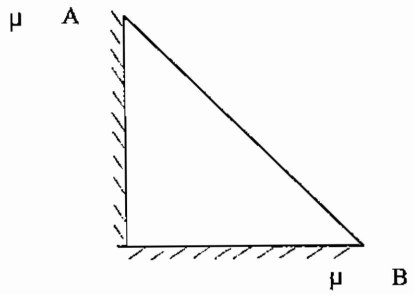
$P = N\sin\varphi$

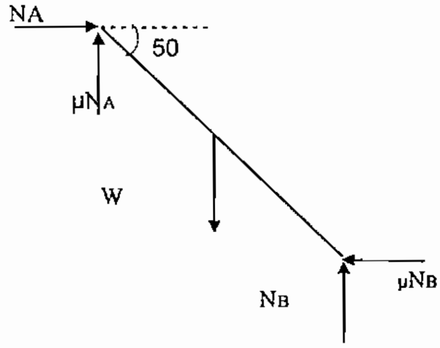
$\frac{P}{W} = \tan\varphi$

چون سطح تماس کوچک است، زاویه φ یک زاویه کوچک است و $\tan\varphi \approx \sin\varphi$ و مطابق شکل $\sin\varphi = \frac{a}{r}$ است. بنابراین می‌توان گفت : $\frac{P}{W} = \frac{a}{r}$.

فاصله a در معادله فوق ضریب مقاومت غلتشی نام دارد.

میله 12 فوتی AB که 30 پاوند وزن دارد به دیواری تکیه دارد. برای حفظ تعادل میله مطابق شکل، ضریب اصطکاک μ چقدر باید باشد؟



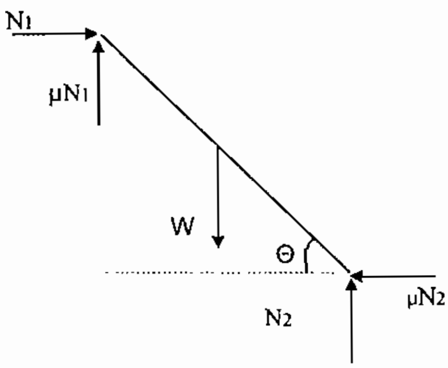


$$\Sigma F_x = 0 = N_A - \mu N_B$$
$$\Sigma F_y = 0 = N_B + \mu N_A - 30$$
$$\Sigma M_A = 0 = -30(6\cos 50) + N_B(12\cos 50^\circ) - \mu N_B(12\sin 50)$$

از دو معادله اول مقدار $N_B = \dfrac{30}{1+\mu^2}$ بدست می‌آید. با جایگذاری N_B در معادله سوم داریم:

$$-30(6\cos 50) + \frac{30}{1+\mu^2}(12\cos 50) - \frac{30}{1+\mu^2}\mu(12\sin 50) = 0$$
$$\Rightarrow \mu = 0.36$$

مثال: کوچکترین زاویه θ برای تعادل میله‌ای بطول l و وزن w که به دیوار و زمینی با ضریب اصطکاک μ تکیه دارد، چقدر است؟

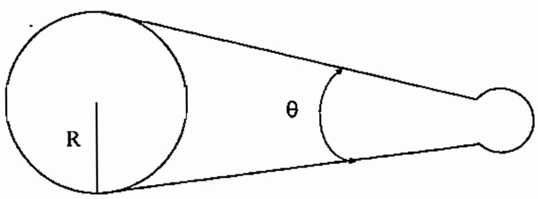


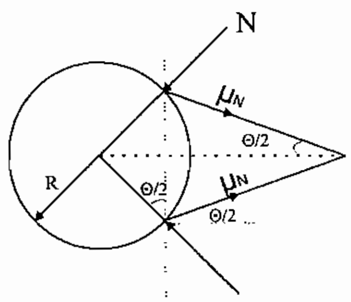
$$\Sigma F_h = 0 = N_1 - \mu N_2$$
$$\Sigma F_v = 0 = N_2 - w + \mu N_1$$
$$\Sigma M_B = 0 = -w\frac{\ell}{2}\cos\theta + N_2\, l\cos\theta - \mu N_2\, \ell \sin\theta$$

با استفاده از دو معادله اول $N_2 = \dfrac{w}{1+\mu^2}$ و جاگذاری آن در معادله سوم مقدار θ بدست می‌آید. $\theta = \tan^{-1}\left[\dfrac{(1-\mu^2)}{2\mu}\right]$

مثال (تست سال ۶۹) : برای برداشتن حلقه‌های داغ از انبری مطابق شکل استفاده می‌کنیم. در صورتی‌که μ ضریب اصطکاک بین حلقه و انبر 0.2 باشد، حداکثر زاویه θ چقدر است؟

۱) 35 درجه
۲) 28 درجه
۳) 22 درجه
۴) 14 درجه

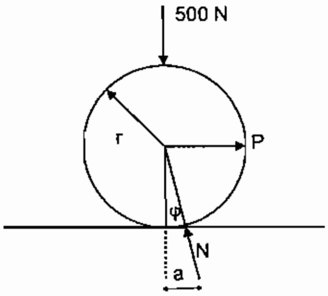




$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\mu N}{N} = \mu = 0.2 \Rightarrow \theta = 22^0$$

مثال: یک چرخ فولادی به قطر 760 mm روی یک ریل فولادی افقی می‌غلتد و باری به وزن 500N را حمل می‌کند. ضریب اصطکاک غلتشی 0.305 mm است. نیروی P لازم برای غلتاندن چرخ روی ریل چقدر است؟

$$P=\frac{Wa}{r}=\frac{500(0.305)}{380}=0.4\,N$$

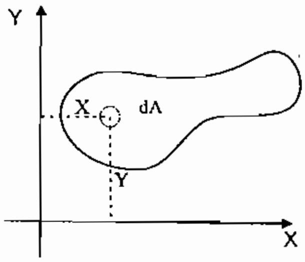


$$w=N\cos\phi$$
$$p=N\sin\phi \quad\Rightarrow\quad \frac{p}{w}=\frac{a}{r}$$
$$\tan\varphi\simeq\sin\varphi$$
$$\sin\varphi=\frac{a}{r}$$

فصل ششم

خواص سطوح

گشتاور اول سطح و مرکز سطح:



$M_x = \int_A y\,dA$ گشتاور اول سطح نسبت به محور x

$M_y = \int_A x\,dA$ گشتاور اول سطح نسبت به محور y

می‌توان کل مساحت A را در مکانی به مختصات x_c , y_c بنام مرکز سطح متمرکز دانست که در این صورت، گشتاورهای اول سطح نسبت به محورهای x , y برابر با x_cA , y_cA خواهند بود. با استفاده از این ترتیب، مختصات مرکز سطح از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$x_c = \frac{1}{A}\int_A x\,dA$$

$$y_c = \frac{1}{A}\int_A y\,dA$$

محل مرکز سطح مستقل از محورهای مختصات بکار رفته است و فقط به خود سطح بستگی دارد. اگر مبدا مختصات، بر مرکز سطح منطبق باشد، محورهای مختصات را محورهای اصلی می‌نامند و بدیهی است که گشتاورهای اول سطح نسبت به این محورها صفر است.
اگر سطحی مرکب از سطوحی باشد که مراکز سطح آنها از قبل معلوم است، مختصات مرکز سطح سطح مرکب از روابط زیر بدست می‌آید:

$$x_c = \frac{\Sigma A_i\,\overline{x}_i}{A}$$

$$y_c = \frac{\Sigma A_i\,\overline{y}_i}{A}$$

A مساحت کل سطح مرکب است.

مرکز حجم:

مرکز حجم، نقطه‌ای است که برای محاسبه گشتاور اول حجم جسم، نسبت به نقطه o (مبدا مختصات)، می‌توان کل حجم جسم را به‌طور فرضی در آن متمرکز کرد. مختصات مرکز حجم از روابط زیر بدست می‌آید:

$$x_c = \frac{\iiint x\,dV}{\iiint dV}$$

$$y_c = \frac{\iiint y\,dV}{\iiint dV}$$

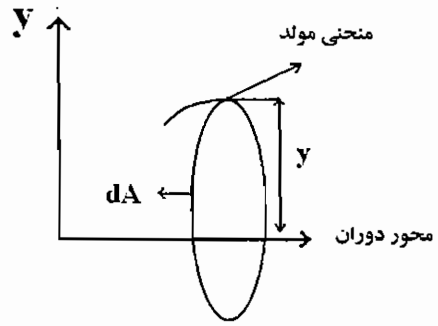
$$z_c = \frac{\iiint z\,dV}{\iiint dV}$$

اگر dV را $\rho\ g\ dV$ جایگزین کنیم، مختصات مرکز ثقل جسم بدست می‌آید.

قضایای پاپوس ـ گلدینوس

قضیه اول:

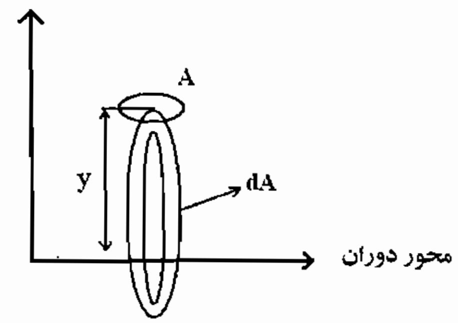
یک منحنی مولد و یک محور دوران، درصفحه این منحنی در نظر بگیرید. منحنی مولد می‌تواند با محور دوران تماس پیدا کند، اما نباید از آن بگذرد. سطح دوار حاصل از دوران منحنی مولد حول محور دوران، برابراست با طول منحنی مولد ضرب در محیط دایره‌ای که توسط مرکز منحنی مولد طی ایجاد سطح تشکیل می‌شود.



$$A = 2\pi \int y\,dl = 2\pi y_c L$$

قضیه دوم:

یک سطح مستوی و یک محور دوران هم‌صفحه با سطح را در نظر بگیرید. به‌طوری‌که محور فقط می‌تواند بر مرز سطح مماس باشد. اما به هیچ وجه نباید آن را قطع کند. حجم جسم دوار حاصل از دوران سطح مستوی حول محور دوران برابراست با حاصل‌ضرب مساحت سطح در محیط دایره‌ای که توسط مرکز سطح مولد طی تشکیل جسم دوار تشکیل می‌شود.



$$V = 2\pi \int_A y\,dA = 2\pi y_c A$$

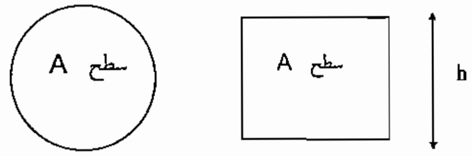
مثال (تست سال ۷۶): دو تیر با سطح مقطع یکسان یکی به شکل دایره و دیگری به شکل مستطیل به ارتفاع h مفروضند. گشتاور ماند

۱) مستطیل کوچکتر از گشتاور ماند دایره است.

۲) مستطیل برابر گشتاور ماند دایره است.

۳) مستطیل بزرگتر از گشتاور ماند دایره است.

۴) دایره نصف گشتاور ماند مستطیل است.



$$I_{\text{دایره}} = \frac{\pi r^4}{4} = A_{\text{دایره}}\frac{r^2}{4}$$

$$I_{\text{مستطیل}} = \frac{bh^3}{12} = A_{\text{مستطیل}}\frac{h^2}{12}$$

$$r = \frac{h}{2}\ ,\ \frac{I_{\text{دایره}}}{I_{\text{مستطیل}}} = \frac{A_{\text{دایره}}}{A_{\text{مستطیل}}}\ \frac{3r^2}{h^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow I_{\text{مستطیل}} > I_{\text{دایره}}$$

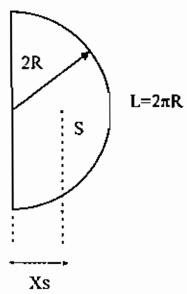
مثال (تست سال ۷۶): از یک سیم سفت و نازک، یک قوس نیم‌دایره بشعاع 2R ساخته شده است. x_{so} فاصله مرکز طولی آن قوس از مرکز نیم‌دایره برابراست با:

۱) $\frac{4}{3\pi}R$

۲) $\frac{4}{\pi}R$

۳) $\frac{6}{\pi}R$

۴) $\frac{8}{3\pi}R$



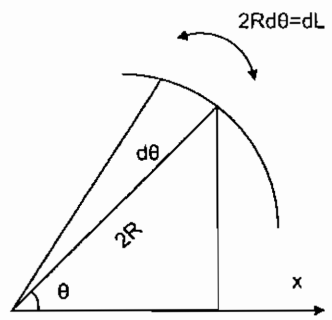
$$\bar{x} = x_{so} = \frac{\int x\,dL}{L}$$

$$L = 2\pi R$$

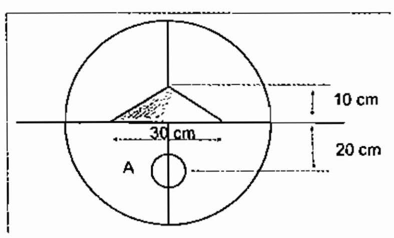
$$dL = 2R\,d\theta$$

$$x = 2R\cos\theta$$

$$x_{so} = \frac{2R\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}{\pi} = \frac{4R}{\pi}$$



مثال (تست سال ۶۹): از ورق دایره‌ای شکلی بقطر 60 سانتی‌متر مثلث متساوی‌الساقینی بقاعده 30 سانتی‌متر و ارتفاع 10 سانتی‌متر را بریده‌ایم. قطر سوراخ دیگر را که مرکز آن در نقطه A به فاصله 20 سانتی‌متر از مرکز دایره اصلی است بیابید به‌طوری‌که مرکز ثقل همان مرکز دایره اصلی باشد؟



۱) 3.42 سانتی‌متر

۲) 4.64 سانتی‌متر

۳) 5.64 سانتی‌متر

۴) 7.24 سانتی‌متر

$$\overline{y}=\frac{A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3}{A_1+A_2+A_3}=0$$

$$y_1=0$$

$$A_1=900\pi$$

$$y_2=\frac{10}{3}$$

$$A_2=30\times\frac{10}{2}$$

$$y_3=-20$$

$$A_3=\pi\frac{d^2}{4}$$

با جاگذاری مقادیر A_1 , A_2 , A_3 , y_1 , y_2 , y_3 در رابطه $\overline{y}$ مقدار d بدست می‌آید:

$$d=5.64\,\text{cm}$$

مثال: حداکثر ممان سطح مقطع داده شده را نسبت به محوری که از مرکز سطح می‌گذرد، بدست آورید. همچنین، جهت محوری که ممان اینرسی سطح نسبت به آن ماکزیمم است را بدست آورید، مشروط بر اینکه مقادیر ممان اینرسی، نسبت به محورهای z , y , x به ترتیب زیر باشند؟

$$I_x=1458\ \text{mm}^4$$

$$I_y=365\ \text{mm}^4$$

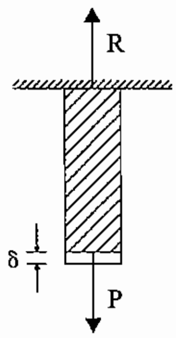
$$I_{xy}=365\ \text{mm}^4$$

$$I_{max}=\frac{I_x+I_y}{2}+\frac{I}{2}\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+4I_{xy}^2}\ =15687\ \text{mm}^4$$

$$\tan\theta=\frac{2I_{xy}}{I_x-I_y}\Rightarrow\theta=17^\circ$$

فصل هفتم

روش انرژی و برداری برای حل مسائل



حل مسایل استاتیک عموماً از دو روش زیر صورت می‌گیرد:

۱ـ از ارتباط تعادل (با در نظر گرفتن دیاگرام جسم آزاد)

این روش در بخش‌های قبل به‌طور مفصل توضیح داده شد.

۲ـ روش انرژی (کار مجازی)

(رابطه نیرو و تغییر شکل) رابطه سازگاری $\delta = \frac{PL}{AE}$

در بسیاری مسائل استفاده از روش کار مجازی، حل مسئله را به‌طور قابل توجهی ساده می‌نماید.

اصل کار مجازی

۱) تعریف کلی: شرط لازم و کافی برای تعادل یک جسم یا یک جسم مرکب، از اتصال مجموعه‌ای از اجسام صلب آن است که نمو افزایش یا تغییرات کار مجازی کلیه نیروهای فعال و موثر بر آن به ازای تغییر مکان‌های سازگار با قیدهای موجود (تکیه‌گاه‌ها و اتصالات) برابر صفر می‌شود. یا به عبارت بهتر مشتق کار خارجی انجام شده، توسط نیروهای خارجی نسبت به تغییرمکان‌های موجود در راستای نیروهای خارجی صفر شود (اصل می‌نیمم انرژی).

۲) کاربرد این روش در مسائل کنکور: اصولاً برای حل مسائل استاتیک، نیاز به مجموعه‌ای از معادلات تعادل (یعنی روابط بین نیروهای خارجی وارد بر یک جسم) و معادلات سازگاری (یعنی روابط بین نیروهای خارجی وارد بر یک جسم، با تغییر مکان‌های ایجاد شده در اثر نیروهای خارجی) می‌باشد.

در مسائل استاتیک که جسم به صورت یک جسم صلب در نظر گرفته می‌شود متاسفانه نمی‌توان روابط سازگاری را به تنهائی نوشت. لذا، مجبوریم در مسائل استاتیک از روابط انرژی (اصل کار مجازی) که در واقع نیز خود ترکیبی از معادلات تعادل و معادلات سازگاری می‌باشند استفاده نمائیم. دانشجویان عزیز قطعاً آگاه هستند که اصولاً برای حل مسائل استاتیک نامعین نیاز به هر دو سری معادلات

تعادل و معادلات سازگازی می‌باشیم و بدون داشتن معادلات سازگاری قادر به حل مسائل نامعین نمی‌باشیم، لذا توجه شود که کـاربرد روش اصل کار مجازی برای حل مسائل ذیل می‌باشند.

(a) مسائلی که فقط با روابط تعادل، قابل حل می‌باشند (یعنی مسائل استاتیکی معین).

(b) مسائلی که فقط با روابط سازگاری، قابل حل می‌باشند (یعنی مسائل سینماتیک معین).

(c) مسائلی که با ترکیبی از معادلات تعادل و معادلات سازگاری، قابل حل می‌باشند (یعنی مسائل استاتیکی نامعین).

دانشجویان محترم در امتحان کنکور دقت نمائید که در هنگام پاسخگوئی به سوالات استاتیک (- مسـائل مقاومـت مصـالح)، چنانچـه مساله‌ای به استاتیکی نامعین باشد (یعنی تعداد مجهولات مساله بیش از 3 باشد) حتماً به روش انرژی حل شود. همچنین دقت نمایند برخی از مسائل که استاتیکی معین می‌باشند را هم می‌توانند از روابط تعادل حل کنند و هم می‌توانند از روش انرژی حل کنند. برخـی از این نوع مسائل اگر به روش تعادل حل گردد نیاز به زمان زیادی (خیلی بیشتر از 3 دقیقه) دارند و برای زمان امتحانات تستی کنکور مناسب نمی‌باشند. لذا شایسته است که حتماً از روش انرژی که زمان بسیار کوتاهی برای حل نیاز دارند استفاده نمایید. به عنوان مثال در تمام مسائل استاتیک که معمولاً صحبت از یک (یا چند) فنر با سختی K به میان آمده است، حتماً به جای روش معمـولی تعـادل استاتیکی از روش انرژی استفاده نمایید (مانند مثال‌های 1, 3, 4, 5, 6 در این فصل).

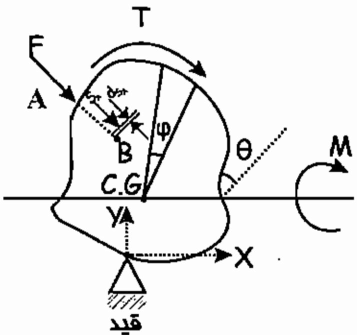
۳) **معادلات حاکم:** فرض کنید که یک جسم تحت یک نیروی متمرکز F و یک ممان M و یک گشتاور T قرار گرفتـه اسـت. مانـند شکل زیر

نکته مهم:

تغییر زاویه θ مربوط به ممان خارجی M است.

تغییر زاویه φ مربوط به گشتاور پیچشی T است.

تغییر مکان S_A مربوط به نیروی متمرکز F است.



نکته بسیار مهم، این است که حتماً برای نیروهای متمرکز (مانند F)، بایستی تغییرمکان آن در امتداد خط منطبق بر نیرو باشد. مـثلاً در شکل بالا تغییر مکان نیروی F که S_A نامیده می‌شود. حتماً بایستی در امتداد خط AB که منطبق بر امتداد نیـروی F مـی‌باشد، واقع شود.

برای شکل بالا رابطه انرژی یا کار انجام شده توسط نیروهای خارجی T و M و F، به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$W = F.S_A + M\theta + T\varphi \quad (۱)$$

حال مشتق این انرژی نسبت به جهت محور x (یا محور x یا محور y یا هر محور دلخواه دیگر) بایستی برابر صفر شود (اصل می‌نـیمم انرژی). زیرا طبق قانون اول ترمودینامیک، هر سیستمی که بخواهد از حالت عدم تعادل به حالت تعادل برسد، مقدار خالصـی از انـرژی خود را از دست می‌دهد، به‌طوری که در شرایط تعادل انرژی به می‌نیمم مقدار خود می‌رسد. پس:

$$\frac{dW}{dx} = F\frac{dSA}{dx} + M\frac{d\theta}{dx} + T\frac{d\varphi}{dx} = 0$$

$$\boxed{FdSA + M\,d\theta + Td\varphi = 0} \quad (۲)$$

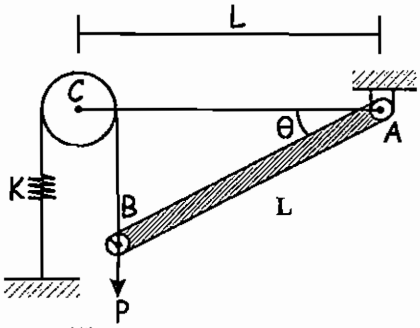
دقت شود که برای حل مسائل استاتیک دیگر نیاز به نوشتن رابطه (۱) در بالا نمی‌باشد و مسائل با استفاده از رابطه (۲) حل خواهند شد. یعنی بایستی جمع جبری نیروهای خارجی، ضربدر، تغییرات جزئی تغییر مکان هر نیرو برابر صفر شود. دقت شود که از جمع جبری استفاده گردد. یعنی در رابطه (۲) بالا بسته به هم سو یا غیر هم سو بودن جهت تغییرات تغییر مکان‌ها $d\theta, dS_A$ و $d\varphi$ بایستی از علامت‌های مثبت یا منفی استفاده شود. نمونه آن‌ها را در مثال‌های ارائه شده در بخش بعدی ملاحظه خواهید نمود.

۴) راهنمائی برای حل مسائل: تمام مسائل استاتیک را که به کمک روش انرژی (یا اصل می‌نیمم انرژی) قابل حل می‌باشند، به چند نوع مختلف در زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم. این تقسیم‌بندی می‌تواند کمک شایانی در امتحان و حل سریع مسائل، به دانشجویان محترم بنماید.

مسائل نوع اول: مسائلی که حالت اولیه (قبل از بارگذاری) و حالت ثانویه سیستم (بعد از بارگذاری)، در دسترس باشند.

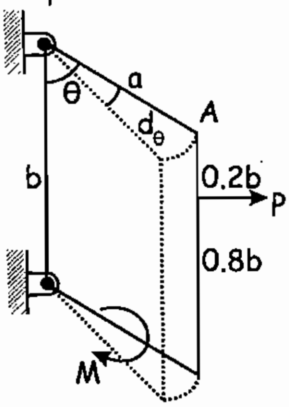
مسائل نوع دوم: مسائلی است که حالت ثانویه، در دسترس نباشند.

مثلاً اشکال زیر که در بخش بعدی حل آن‌ها ارائه می‌شود، جزو مسائل نوع اول محسوب می‌شوند و حل آن‌ها روتین و ساده می‌باشد.



فرض شعاع قرقره خیلی کوچک و قابل چشم‌پوشی باشد. حالت تعادل مجهول مساله است. این مساله نوع اول می باشد، زیرا در $\theta=0$ حالت اولیه سیستم و در θ حالت ثانویه سیستم را نشان می‌دهد. که متعاقباً در بخش بعدی حل می‌گردد.

شکل زیر که نشان دهنده 4 میله است، جزو مسائل نوع دوم می‌باشد، زیرا حالت اولیه میله معلوم است و حالت ثانویه آن در دسترس نمی‌باشد. در این شکل خط پر حالت اولیه است و خط‌چین حالت ثانویه‌ای است که توسط خود ما ایجاد شده است.



اصولاً مسائل نوع دوم به دو طریق قابل حل می‌باشند. روش اول این است که در این نوع مسائل چون حالت ثانویه در دسترس نمی‌باشد، خودمان به سیستم یک تغییر شکل بسیار کوچک، مثلاً به اندازه $d\theta$ می‌دهیم تا بدین ترتیب حالت ثانویه در یک مدت زمان بسیار کوچک معلوم گردد و سپس مانند مسائل نوع اول، حل مساله را ادامه می‌دهیم.

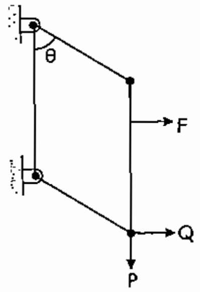
روش دوم روشی است که این روش را روش برداری می‌نامند.

اطلاعات مربوط به این روش، در بخش دیگر در این فصل به‌طور کامل توضیح داده خواهد شد.

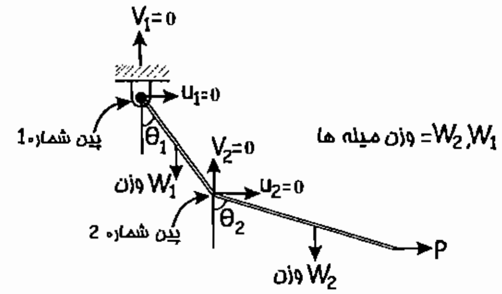
تذکر مهم: دقت شود در برخی از مسائل نوع دوم که بایستی تغییرشکل ثانویه به اندازه $d\theta$ توسط خودمان ایجاد شود، به دو دلیل زیر امکان دارد. این تغییر شکل ثانویه مشکل و پیچیده شود. لذا در این حالت بهتر است که حتماً مساله از روش دوم برداری حل گردد.

دلیل اول: در برخی از مسائل تعداد نیروهای متمرکز (مانند P و F در شکل‌های قبل) امکان دارد از یک عدد بیشتر شود و لذا دنبال کردن حرکت نقطه اثر این نیروها در امتداد خط منطبق بر نیرو خیلی مشکل شود. در این حالت بهتر است از روش برداری استفاده گردد. مانند شکل زیر که θ تعادل مجهول مساله می‌باشد.

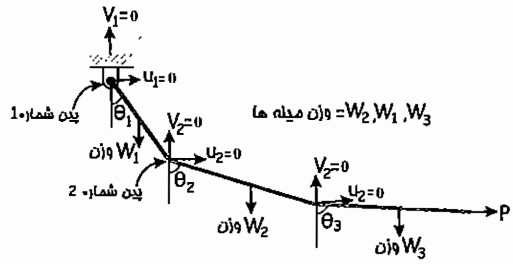
در این شکل 4 میله‌ای در محل اتصال میله‌ها پین قرار دارد و لذا دنبال کردن تغییر مکان سه نیروی متمرکز F و P و Q در حالت ثانویه مشکل می‌باشد.



دلیل دوم: اصولاً در مسائلی که تعداد درجه آزادی موجود در پین‌های اتصال زیاد است، تخمین حالت ثانویه سیستم بسیار مشکل می‌شود و لذا بهتر است که از روش برداری مساله حل گردد. مثلاً در شکل 1 پین شماره یک یک درجه آزادی θ_1 و پین شماره دو سه درجه آزادی v_2, u_2, θ_2 است و این مسئله را می‌توان به روش اول (یعنی روشی که خود ما حالت ثانویه آن را حدس می‌زنیم)، حل نمود اما در شکل ۲ سه پین شماره‌های 3, 2, 1 دارای چندین درجه آزادی $\theta_3, \theta_2, \theta_1$ و v_3, v_3, v_2, u_2 می‌باشند و این مسئله را نمی‌توان به راحتی حل نمود (یعنی حدس شرایط ثانویه و تخمین تغییرمکان نقاط اثر نیروها مشکل می‌شوند) و لذا بهتر است از روش برداری حل گردد.

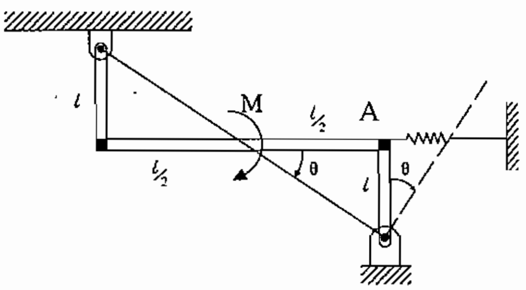


شکل ۱



شکل ۲

مثال ۱: در شکل زیر زاویهٔ θ نظیر تعادل از کدام رابطه بدست می‌آید؟



۱) $M = K\ell^2\theta$

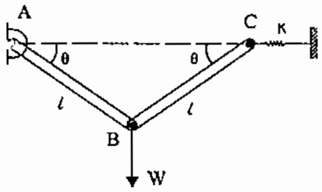
۲) $M = K\ell\theta$

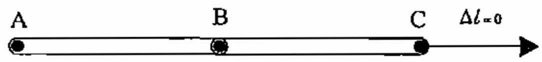
۳) $M = K/\ell\theta$

۴) هیچ‌کدام

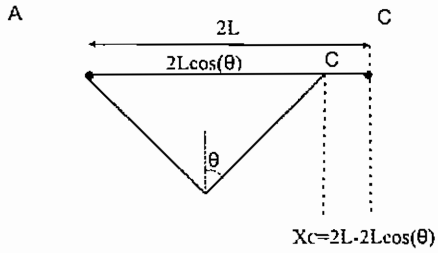
$$\delta W = 0 \Rightarrow Fdx_A - Md\theta = 0$$
$$x_A = \ell\theta \Rightarrow dx_A = \ell d\theta$$
$$F = Kx_A = K\ell\theta \quad \Rightarrow \quad K\ell^2\theta d\theta = Md\theta \quad \Rightarrow \quad M = K\ell^2\theta$$

مثال ۲: در شکل زیر θ نظیر تعادل، از کدام رابطه بدست می‌آید، مشروط بر اینکه وقتی AB و BC در حالت افقی قرار دارند، فنر در حالت آزاد باشد.





$$Wdy_B - Fdx_C = 0$$
$$y_B = \ell \mathrm{Sin}\theta \quad \Rightarrow \quad dy_B = \ell \mathrm{Cos}\theta d\theta$$
$$x_C = 2\ell(1-\mathrm{Cos}\theta) \quad \Rightarrow \quad dx_C = 2\ell \sin\theta d\theta$$
$$F = Kx_C = K2\ell(1-\mathrm{Cos}\theta)$$
$$W\ell\cos\theta d\theta - k(2\ell)(1-\cos\theta)(2\ell\sin\theta d\theta) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (1-\mathrm{Cos}\theta)\mathrm{tg}\theta = \frac{W}{4K\ell}$$

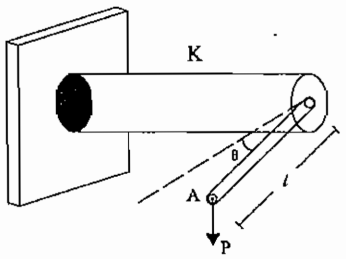


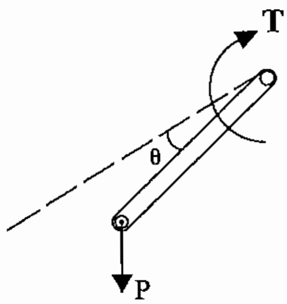
مثال۳ : در شکل زیر θ چقدر است؟

۱) $\mathrm{Sin}\theta = \frac{K}{P\ell}\theta$

۲) $\mathrm{Cos}\theta = \frac{K}{P\ell}\theta$

۳) $\mathrm{tg}\theta = \frac{K}{2P\ell}\theta$





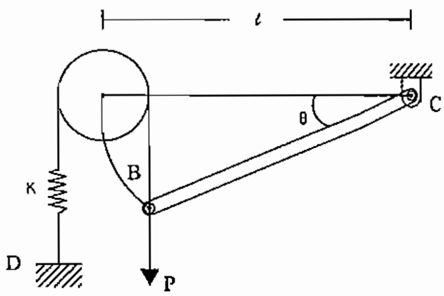
$$Pdy_A - Td\theta = 0$$
$$y_A = \ell \mathrm{Sin}\theta \Rightarrow dy_A = \ell \ \mathrm{Cos}\theta \ d\theta$$
$$T = K\theta \Rightarrow P \ \ell \ \cos\theta \ d\theta = K\theta \ d\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{K}{P\ell}\theta$$

مثال ۴ : کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\mathrm{Sin}\theta = \frac{P}{K\ell}$

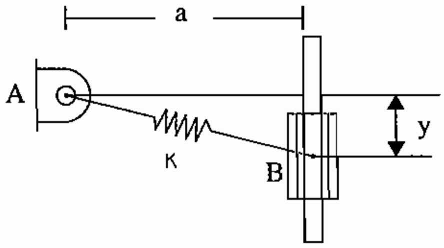
۲) $\cos\theta = \frac{P}{K\ell}$

۳) $\mathrm{tg}\theta = \frac{P}{K\ell}$



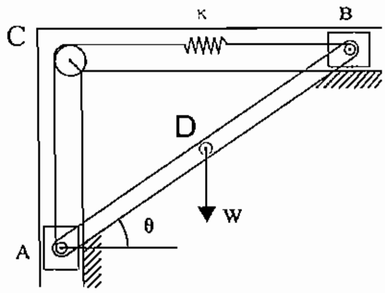
$$P dy_B - F dy_D = 0$$
$$y_B = \ell \sin\theta \Rightarrow dy_B = \ell \cos\theta d\theta$$
$$y_D = \ell \sin\theta \Rightarrow dy_c = \ell \cos\theta d\theta$$
$$P(\ell \cos\theta d\theta) - (k y_B)(\ell \cos\theta d\theta) = 0$$
$$P = K y_B = K\ell \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{P}{K\ell}$$

مثال ۵: تا رسیدن به شرایط تعادل، طوقهٔ B در جهت y در اثر وزن W حرکت می‌کند. در $y = 0$ فنر آزاد است . کدام رابطه صحیح است؟



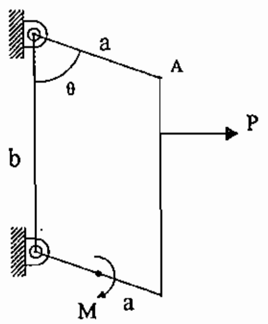
$$W dy - F ds = 0$$
$$s = \sqrt{a^2 + y^2} - a$$
$$ds = \frac{1}{2}(2y)(a^2 + y^2)^{-1/2} dy$$
$$F = K \cdot s$$
$$W dy - K\left(\sqrt{a^2 + y^2} - a\right)\left[y \left(a^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] dy = 0$$
$$\Rightarrow \quad y\left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}\right]^{-1} = \frac{W}{K}$$

مثال ۶: θ در حالت تعادل کدام است؟ مشروط بر آنکه در حالت افقی AB فنر آزاد باشد. (طول AB برابر با L می‌باشد).



$$W dy_D - F ds = 0$$
$$s = AC + CB - \ell = \ell \sin\theta + \ell \cos\theta - \ell$$
$$ds = (\ell \cos\theta - \ell \sin\theta) d\theta$$
$$y = \frac{\ell}{2} \sin\theta \Rightarrow dy_o = \frac{\ell}{2} \cos\theta d\theta$$
$$W\left(\frac{\ell}{2} \cos\theta d\theta\right) - k\ell(\sin\theta + \cos\theta - 1)(\ell \cos\theta - \ell \sin\theta) d\theta = 0$$
$$\frac{W}{2K\ell} \cos\theta - (\cos\theta + \sin\theta - 1)(1 - \tan\theta) = 0$$

مثال ۷: در سیستم چهار میله‌ای زیر کدام گزینه مقدار زاویه θ ناشی از نیروی P و ممان M را بدست می‌دهد؟

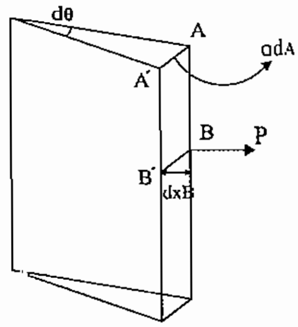


۱) $\cos\theta = \frac{M}{Pa}$

۲) $\sin\theta = \frac{M}{Pa}$

۳) $tg\theta = \frac{M}{Pa}$

چون حالت ثانویه موجود نمی‌باشد، به اندازهٔ $d\theta$ تغییر می‌دهیم.

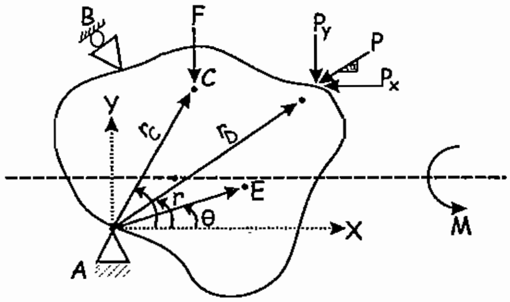


$$Md\theta - Pdx_B = 0$$
$$dx_B = ad\theta Cos\theta$$
$$Md\theta - PaCos\theta d\theta = 0$$
$$Cos\theta = \frac{M}{Pa}$$

روش برداری:

همان‌طوری که در بخش قبل به طور خلاصه توضیح داده شده روش برداری، یک روش بسیار قوی برای حل مسائل استاتیک می‌باشد. به‌خصوص این روش برای مسائل نامعین و حتی مسائل معینی که تعداد نیروهای متمرکز زیاد و یا تعداد درجه آزادی روی اعضای متصل شده به یکدیگر در محل پین‌ها در سازه زیاد است، کاربرد فراوانی دارد.

در این روش کار انجام شده توسط ممان‌ها $\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\theta_i\right)$ و یا گشتاورهای پیچشی $\left(\sum_{i=1}^{n} T_i Q_i\right)$، به صورت برداری نوشته نمی‌شود، بلکه به همان حالت اسکالر نوشته می‌شود و فقط کار انجام شده توسط نیروهای متمرکز (مثلاً P و F در شکل زیر)، به صورت برداری نوشته می‌شود. یعنی:



فرض جسم صلب در محل B , A به صورت قید تکیه‌گاهی، متصل به یک دیواره صلب متصل است. در قید A مولفه‌های تغییر مکان صفر است و در قید B فقط مولفه‌های تغییر مکان در یک جهت قید صفر است و در جهت دیگر عمود بر آن دارای حرکت و تغییر مکان می‌باشد (یعنی در B تکیه‌گاه غلطک‌دار است). جسم تحت یک نیروی متمرکز عمودی F و یک نیروی متمرکز P که با افق زاویه α می‌سازد قرار دارد. نقطه C و D به ترتیب نقاط اثر نیروهای F و P می‌باشند. موقعیت هندسی هر نقطه روی جسم صلب، به صورت مختصات قطبی $E(r,\theta)$ بیان می‌شود که E یک نقطه دلخواه روی جسم صلب است.

در روش برداری ابتدا در محل یکی از تکیه‌گاه‌ها که در هر دو جهت (مثلاً x و y) قید شده‌اند، یک محور مختصات xoy در نظر می‌گیریم. فاصله محل نقطه اثر نیروهای متمرکز تا مبدأ مختصات O را که در این‌جا r_C برای F و r_D برای نیروی P می‌باشد، به صورت برداری مانند زیر می‌نویسیم. نیروهای متمرکز را نیز در جهت x و y به صورت برداری می‌نویسیم. نکته بسیار مهم این است که چون کار یا انرژی به صورت ضرب ماتریسی نوشته می‌شوند. از طرفی بایستی قوانین ضریب ماتریسی رعایت شوند. لذا بایستی نیروها به صورت یک ماتریس ردیفی و فاصله نقطه اثر نیروها تا مبدأ مختصات به صورت یک ماتریس ستونی نوشته شوند.

طبق اصل می‌نیمم، انرژی رابطه، به صورت زیر نوشته می‌شود.

$\bar{F}.d\bar{r}_C + \bar{P}\,d\bar{r}_D + M\,d\theta = 0$ (۱) معادله

رابطه (۱) به صورت ضرب برداری بین نیروها و فاصله نقطه اثر نیروها تا مبدأ مختصات نوشته شده است، برای سادگی در حل مسائل دوبعدی در استاتیک ترجیحاً ممان‌ها یا گشتاور به صورت برداری نوشته نمی‌شوند و به همان صورت اسکالر نوشته می‌شوند.

در رابطه بالا بایستی نیروها به صورت برداری و ستونی و تغییر مکان‌ها به صورت برداری و ردیفی به صورت زیر نوشته شوند.

$\bar{F} = \left[F_x, F_y\right]$

که در این‌جا چون نیرو عمودی است $F_x = 0$ است. همچنین در رابطه (۱) دقت شود که علامت‌ها همواره مثبت نوشته می‌شوند. زیرا علائم از طریق مقایسه جهت نیروها، به محورهای y, x مدنظر قرار می‌گیرند. یعنی مثلاً برای $\bar{F}$ داریم:

$\bar{F} = [0, -F]$ (۲)

نیروی F منفی نوشته شده چون در خلاف جهت محور y ها می‌باشد.

$\bar{P} = \left[P_x, P_y\right] = [-P\cos\alpha, -P\sin\alpha]$ (۳)

نیروهای P به صورت منفی نوشته می‌شوند چون در جهت خلاف محورهای y , x است.

$\bar{r}_c = \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +r_C\cos\theta \\ +r_C\sin\theta \end{Bmatrix}$ (۴)

دقت شود که چون x_C و y_C هر دو نسبت به جهت محورهای y , x مثبت هستند در ماتریس علامت مثبت انتخاب شده.

$\bar{r}_D = \begin{Bmatrix} x_D \\ y_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_D\cos\theta \\ r_D\sin\theta \end{Bmatrix}$ (۵)

حال از معادلات ۴ و ۵ نسبت به θ مشتق می‌گیریم، یعنی:

$$d\bar{r}_C = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial x_C}{\partial_\theta}d\theta \\ \dfrac{\partial y}{\partial\theta}d\theta \end{Bmatrix} \quad , \quad d\bar{r}_D = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial x_D}{\partial\theta}d\theta \\ \dfrac{\partial y_D}{\partial\theta}d\theta \end{Bmatrix} \qquad (۶)$$

حال مقادیر موجود در روابط ۲ و ۳ و ۶ را در رابطه ۱ قرار می‌دهیم.

تذکر بسیار مهم برای حل مسائل کنکور

روش شبه‌برداری: در مسائل استاتیک (در حد دوره کارشناسی)، اصولاً مسائلی را که به روش برداری حل می‌شوند، می‌توان به روش ساده‌تری به نام روش شبه‌برداری حل نموده، یعنی در این مسائل دیگر رابطه می‌نیمم انرژی را به صورت ضرب برداری نمی‌نویسیم بلکه به همان صورت ضرب معمولی (یا اسکالر) نوشته می‌شود.

مثلاً معادله شماره ۱ قبل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$F.dy_C + P_x.dx_D + P_y\,dy_D + Md_\theta = 0$ معادله (۷)

دقت شود که (با توجه به شکل مربوط به فصل روش برداری) چون نیروی F در راستای y است، لذا در بالا از dy_c استفاده شده است و همچنین مولفه‌های نیروی P در دو جهت y , x که P_x و P_y می‌باشند. به ترتیب دارای تغییر مکان‌های dx_D و dy_D می‌باشند. حال مقادیر y_C و x_D و y_D که در واقع مختصات هندسی نقاط اثرات نیروهای F و P_x و P_y نسبت به محورهای y , x می‌باشند را می‌نویسیم.

مثلاً:

$$y_C = r_C \sin\theta \quad \Rightarrow \quad dy_C = r_C \cos\theta\, d\theta \qquad (۸)$$

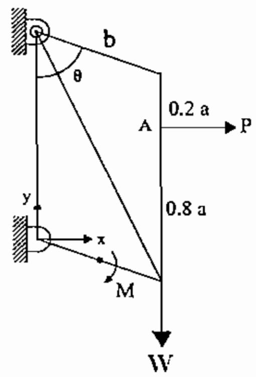
$$x_D = r_D \cos\theta \quad \Rightarrow \quad dx_D = -r_D \sin\theta\, d\theta \qquad (۹)$$

$$y_D = r_D \sin\theta \quad \Rightarrow \quad dy_D = r_D \cos\theta\, d\theta \qquad (۱۰)$$

حال مقادیر موجود در روابط ۸ و ۹ و ۱۰ را در معادله ۷ قرار می‌دهیم.

فقط دقت شود که هنگام جایگزینی مقادیر نیرو و تغییر مکان‌ها در رابطه ۷ حتماً علائم مثبت و منفی هم برای نیروها و هم برای تغییر مکان‌های dy_C و dx_D و dy_D در نظر گرفته شود. اگر نیروها و یا تغییر مکان‌ها در جهت مثبت محورهای x و یا y قرار دارند، مثبت و اگر در جهت مخالف محورهای x و y واقع هستند، منفی در نظر گرفته می‌شوند. در هر حال مثال‌های ارائه شده در این فصل اکثراً به جای روش برداری از روشی شبه‌برداری حل شده‌اند.

مثال ۸: در سیستم زیر θ در حالت تعادل از چه رابطه‌ای بدست می‌آید؟



$$\vec{P} = [P \quad 0]$$

$$\vec{W} = [0 \quad -W]$$

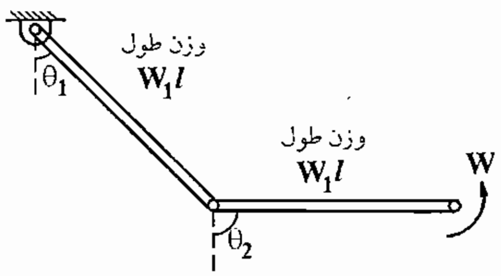
$$r_P = \begin{bmatrix} bSin\theta \\ 0.8a - bCos\theta \end{bmatrix} \qquad r_W = \begin{bmatrix} bSin\theta \\ -bCos\theta \end{bmatrix}$$

$$dr_P = \begin{bmatrix} bCos\theta \\ bSin\theta \end{bmatrix} d\theta \qquad dr_W = \begin{bmatrix} bCos\theta \\ bSin\theta \end{bmatrix} d\theta$$

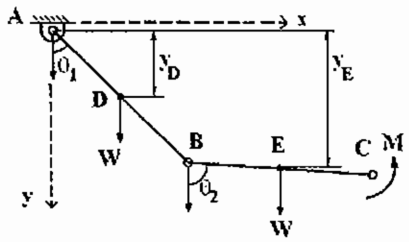
رابطه انرژی: $PbCos\theta - wbSin\theta + M = 0$

مثال ۹: اگر $d\theta_1 = 0$ باشد θ_2 تعادل در شکل زیر کدام است؟

۱) $\sin\theta_2 = \frac{2M}{w\ell}$ ۲) $\sin\theta_2 = \frac{2M}{w\ell}$ ۳) $\theta_2 = 0$ ۴) $tg\theta_2 = \frac{2M}{w\ell}$



چون بر خلاف دیگر مسائل انرژی بیش از یک مفصل وجود دارد، لذا از روش شبه‌برداری مساله حل می‌شود. یعنی در محل تکیه‌گاه که تغییر مکان $u_x = 0$,$u_y = 0$ است. یک محور مختصات سروش اکن xy در نظر می‌گیریم و مختصات هندسی محل اعمال نیروهای خارجی را نوشته و سپس از رابطه ا نرژی، مساله را حل می‌کنیم. یعنی:



$W\,dy_D + W dy_E - Md\theta_2 = 0$ رابطه انرژی

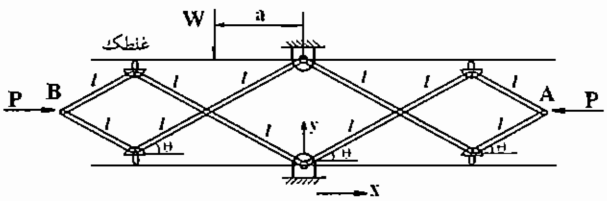
$y_D = \frac{\ell}{2}\cos\theta_1 \quad \Rightarrow \quad dy_D = \frac{-\ell}{2}\sin\theta_1\, d\theta_1$

$y_E = \ell\cos\theta_1 + \ell\cos\theta_2 \quad \Rightarrow \quad dy_E = L\sin\theta_1\, d\theta_1 - \frac{\ell}{2}\sin\theta_2\, d\theta_2$

مقادیر را در رابطه انرژی قرار می‌دهیم $d\theta_1 = 0$، قرار می‌دهیم:

$$W\left(-\frac{\ell}{2}\sin\theta_2\, d\theta_2\right) = +M(\ \ _2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin\theta_2 = \frac{2M}{W\ell}}$$

مثال ۱۰: زاویه تعادل کدام است طول اعضا ℓ و 2ℓ می‌باشند.



چون بیش از یک مفصل وجود دارد از روش شبه‌برداری مساله حل می‌شود. یعنی در تکیه‌گاه پائین محور ساکن xy را خود فرض می‌کنیم و مختصات هندسی نقاط اعمال نیرو را نوشته و سپس از رابطه انرژی مقدار θ محاسبه می‌گردد.

$x_A = x_B = 3\ell\cos\theta$

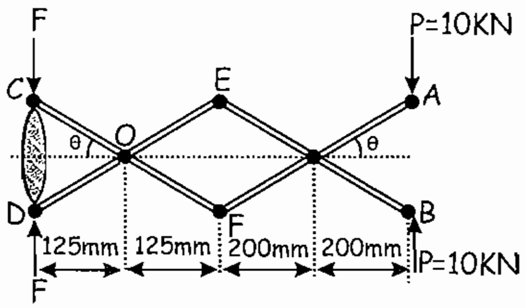
$dx_A = dx_B = -3\ell\sin\theta d\theta$

$y_W = 2\ell\sin\theta \quad \Rightarrow \quad dy_W = 2\ell\cos\theta d\theta$

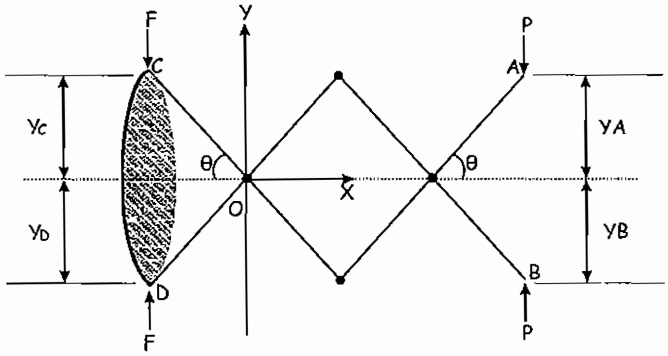
$pdx_A + pdx_B - Wdy_w = 0$ رابطه انرژی

$-P3L\sin\theta d\theta - P3L\sin\theta d\theta \ - W2\ell\cos\theta d\theta = 0 \Rightarrow \theta =$ محاسبه

مثال ۱۱: در انبر مکانیکی زیر حداقل نیروی F تعادل را محاسبه نمائید.



برای حل مساله ابتدا در نقطه‌ای که نه در جهت x و نه در جهت y حرکت دارد، یک محور xy در نظر می‌گیریم (مثلاً مفصل o در شکل) و از روش شبه‌برداری مساله را حل می‌کنیم. دقت شود که در مفاصلی مانند E و F که در جهت y حرکت دارند، نمی‌توان محور xy را در نظر گرفت. چون نیروهای F و P در جهت y دارای حرکت می‌باشند. لذا تغییر مکان‌های y_A و y_B و y_C و y_D که محل‌های اثرات نیروها می‌باشند را در نظر می‌گیریم و سپس برای محاسبه dy_A و dy_B و dy_C و dy_D از تغییر مکان‌های y_A و y_B و y_C و y_D مشتق می‌گیریم.



رابطه انرژی برای نیروها عبارتند از:

$$(-P)(dy_A)+P(-dy_B)+(-F)(dy_C)+(F)(-dy_D)=0$$

مثلاً در عبارت چهارم این معادله، چون نیروی F واقع شده در نقطه D هم جهت با محور y است. پس آن‌را مثبت در نظر گرفته‌ایم. همچنین چون y_D نسبت به محور y در قسمت منفی محور y قرار گرفته است، لذا تغییر مکان را $-dy_D$ در نظر گرفته‌ایم. دیگر عبارات این معادله نیز به همین ترتیب علامت‌گذاری شده‌اند.

$$y_A=y_B \quad\Rightarrow\quad dy_A=dy_B$$

$$y_C=y_D \quad\Rightarrow\quad dy_C=dy_D$$

این مقادیر را در رابطه انرژی قرار می‌دهیم.

$$-2Pdy_A-2Fdy_c=0 \qquad (۲)$$

$$y_A=200\tan\theta \quad\Rightarrow\quad dy_A=\frac{200}{\cos^2\theta}d\theta$$

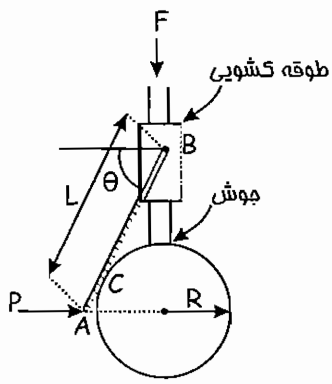
$$y_C=-125\tan\theta \quad\Rightarrow\quad dy_C=-\frac{125}{\cos^2\theta}d\theta$$

این مقادیر را در رابطه (۲) قرار می‌دهیم.

$$2P\frac{200}{\cos^2\theta}d\theta=2F\frac{125}{\cos^2\theta}d\theta \quad\Rightarrow\quad F=1.6P=16KN$$

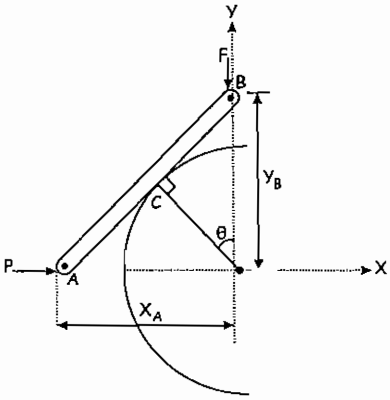
مثال ۱۲: مقدار نیروی F برای تعادل دستگاه کدام است.

اصطکاک، صفر و میله‌ها نازک و بدون وزن می‌باشند.



مساله، از روش شبه‌برداری انرژی حل می‌شود. ابتدا در یک محل ساکن که تغییر مکان در جهت افقی و عبوری صفر است، مبدأ مختصات را در نظر می‌گیریم. کره به شعاع R در مرکز خود ساکن است. پس مبدا را در آن نقطه در نظر گرفته و محور xy را حتماً جهت دلخواه انتخاب می‌کنیم.

مختصات نقاط اثر نیروهای F و P را که به ترتیب A , B می‌باشند، نسبت به محور xy می‌نویسیم و سپس از آن‌ها مشتق می‌گیریم.



رابطه انرژی $Fdy_B + Pdx_A = 0$

$$y_B = \frac{r}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad dy_B = \frac{r\sin\theta}{\cos^2\theta} d\theta$$

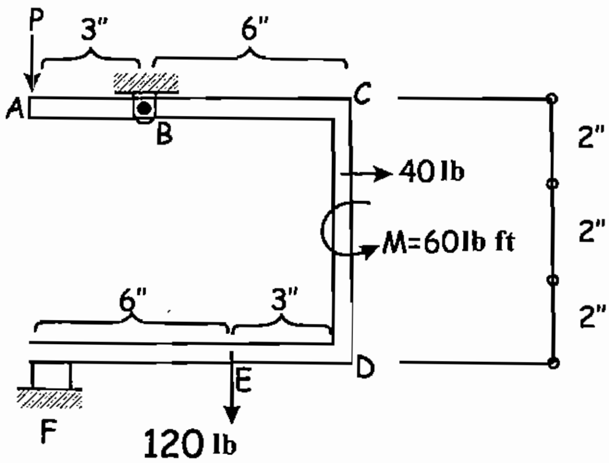
$$x_A = \ell\cos\theta \qquad dx_A = -\ell\sin\theta d\theta$$

حال این مقادیر جزئی، تغییر مکان dy_B، dx_A را در رابطه انرژی قرار می‌دهیم، یعنی:

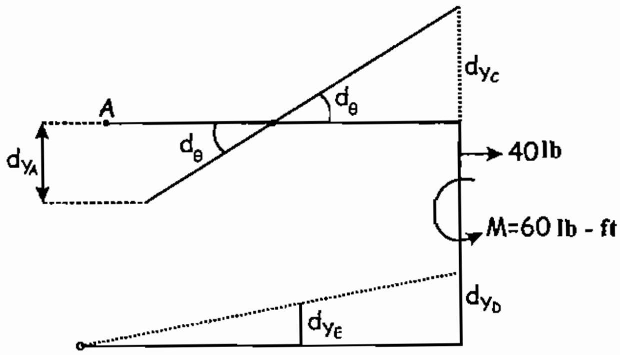
$$F\left(\frac{R\sin\theta}{\cos^2\theta} d\varphi\right) - P\ell\sin\theta d\theta = 0$$

$$\boxed{F = \frac{P\ell}{R}\cos^2\theta}$$

مثال ۱۳: مطلوبست نیروی قائم P که بایستی در نقطه A به سیستم وارد شود، تا سیستم در وضعیت تعادل بماند.



حل: این مساله از نوع اول می‌باشد. یعنی می‌توانیم با یک تغییر شکل ثانویه مساله را حل کنیم. از طرفی چون تعداد نیروهای متمرکز بیش از یک عدد می‌باشد، لذا از روش شبه‌برداری نیز به سادگی قابل حل است. در هر حال از دانشجویان محترم تقاضا می‌شود که مانند دستورالعمل گفته شده مساله را از روش شبه‌برداری نیز حل نمایند. محور مختصات xy را یا در محل پاشنه B و یا F در نظر بگیرید. در این‌جا مساله از روش انرژی نوع اول حل می‌شود. یعنی خودمان، یک تغییر چرخش $d\theta$ به سیم می‌دهیم. با توجه به ابعاد هندسی مساله و محل دو پاشنه، نقاط C و D حرکتی در جهت افقی نداشته و میله CD در امتداد خود جابجا می‌شود در نتیجه نیروی افقی 40 Lb و ممان M = 60 Lb.ft هیچ‌گونه کاری را در جهت امتداد خود، انجام نمی‌دهند. لذا



$$Pdy_A - 120\,dy_E + \underbrace{40\,\cancel{dx}}_{0} + \underbrace{\cancel{M}\,d\theta}_{0} = 0$$

هیچ‌گونه کاری در جهت θ, x انجام نمی‌شود.

$Pdy_A - 120\,dy_E = 0$

$dy_A = 3d\theta\downarrow$ حرکت به طرف پایین

$dy_C = 6\,d\theta\uparrow$

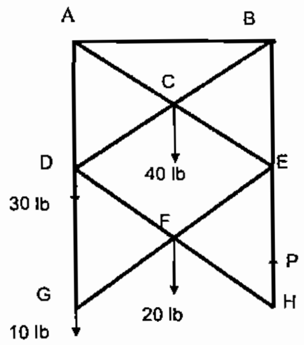
$dy_D = dy_C = 6d\theta$

$dy_E = \frac{6}{9}dy_D = \frac{6}{9}(6d\theta) = 4d\theta$

مقادیر را در رابطه انرژی، در بالا قرار می‌دهیم.

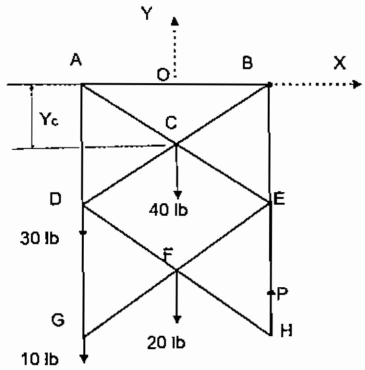
$P(3d\theta) - 120(4d\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 160\,\text{lb}$

مساله ۱۴: در سیستم آکاردوانی زیر، مطلوبست نیروی اعمالی P برای نگهداری دستگاه راه طول تمام اعضا با یکدیگر مساوی بوده به طوری که در وسط به یکدیگر پین شده‌اند.



این مساله از نوع اول می‌باشد. لذا می‌توانیم با یک تغییر شکل ثانویه آن‌را حل نمائیم. از دانشجویان محترم تقاضا می‌شود (برخلاف مثال قبل یعنی مثال 13) این مساله را از روش تغییر مکان ثانویه نیز حل نمایند. در این‌جا مساله از روش شبه‌برداری حل می‌شود و امید است، دانشجویان عزیز جواب‌های خود را با جواب‌های ناشی از روش شبه‌برداری مقایسه نمایند.

ابتدا محور مختصات را در یک نقطه ساکن که در جهت افقی و عمودی حرکت ندارند، انتخاب می‌کنیم. مثلاً نقطه O و سپس روابط انرژی را می‌نویسیم. یعنی رابطه انرژی، به صورت زیر نوشته می‌شود.



$$40(dy_C)+30(dy_D)+20(dy_F)+10(dy_G)-P(dy_H)=0$$

$y_c=a$ فرض

$dy_C=da=\delta_c$

$y_E==2a \quad\Rightarrow\quad dy_E=2da=2\delta_c$

$y_F=3a \quad\Rightarrow\quad dy_F=3da=3\delta_c$

$y_H=y_G=4a \quad\Rightarrow\quad dy_H=4da=4\delta_c$

مقادیر را در رابطه انرژی بالا قرار می‌دهیم تا مقدار P محاسبه شود.

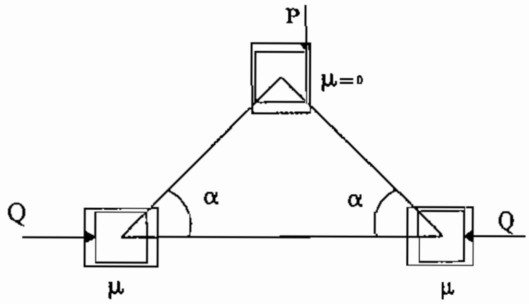
$\Rightarrow\quad P=50\,lb$

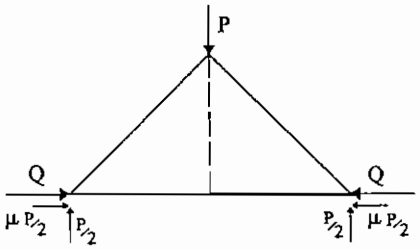
مثال: کدام گزینه صحیح است

۱) $tg\alpha=\dfrac{P}{2Q+P\mu}$

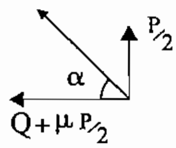
۲) $tg\alpha=\dfrac{P}{Q+P\mu}$

۳) $tg\alpha=\dfrac{2P}{Q+P\mu}$



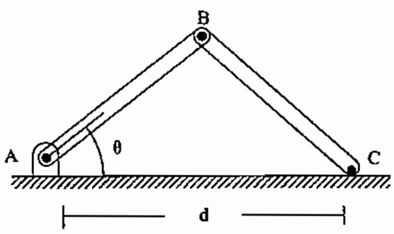


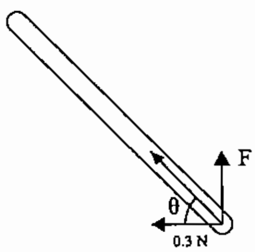
$$tg\alpha=\frac{\frac{P}{2}}{Q+\mu\frac{P}{2}}=\frac{P}{2Q+\mu P}$$



مثال: حداکثر d برای تعادل چقدر است ؟ ضریب اصطکاک با زمین 0.3 فرض شود.

عضو دو نیرویی :BC





$tg\varphi_\circ=0.3$

$\varphi_\circ=tg^{-1}0.3$

$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi_\circ=\dfrac{\pi}{2}-tg^{-1}0.3$

$$Cotg\theta=0.3=\frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{1-\frac{d^2}{4}}}=\frac{d}{\sqrt{4-d^2}}\quad\Rightarrow\quad d=$$

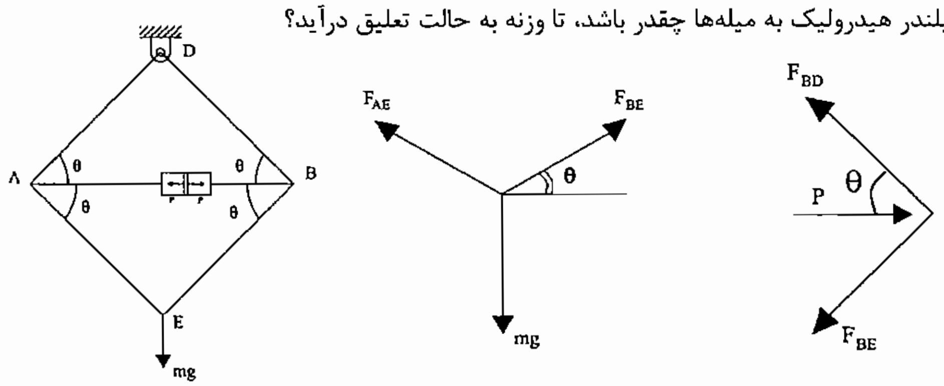
مثال: نیروی فشاری P از طرف سیلندر هیدرولیک به میله‌ها چقدر باشد، تا وزنه به حالت تعلیق درآید؟

۱) $P = mgtg\theta$

۲) $P = mgCotg\theta$

۳) $P = mgSin\theta$

۴) $P = mgCos\theta$

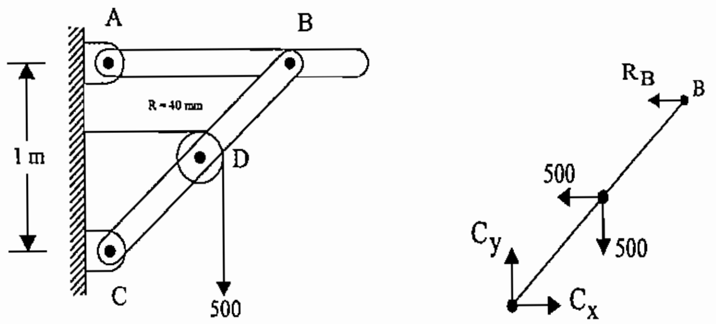


$$F_{BD} = F_{BE}$$
$$mg = 2F_{BE}Sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad P = mgCotg\theta$$
$$P = 2F_{BE}Cos\theta$$

مثال: عکس‌العمل A در هر یک از دو حالت زیر چقدر است؟

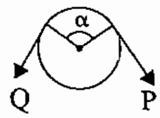
الف) اصطکاک بین طناب و قرقره صفر است.

ب) ضریب اصطکاک 0.3 است.



الف)

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B(1) + 500(\frac{1}{2}) - 500(\frac{1}{2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = 0$$

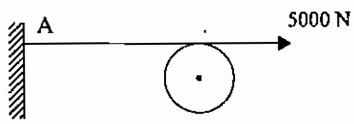


$$Q = 500e^{-\frac{\pi}{2}0.3} = 500e^{-\frac{3\pi}{20}}$$

ب)

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B(1) + \underbrace{500e^{-\frac{3\pi}{20}}}_{Q}\left(\frac{1}{2}\right) - \underbrace{500}_{P}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 ...... \Rightarrow R_B = 93.9$$

طناب چند دور بپیچد تا عکس‌العمل A ، $2000\,N$ گردد. ضریب اصطکاک طناب و قرقره 0.3 فرض شود.

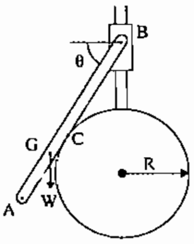


$$P = Qe^{\alpha\mu}$$
$$5000 = 2000e^{0.3\alpha}$$
$$\alpha = \frac{1}{0.3}\ln\frac{5}{2} = \frac{10}{3}(\ln 5 - \ln 2) = 3.05$$

$\frac{\alpha}{2\pi} = n$ تعداد دور طناب $= 0.48 \approx$ نیم دور

در مسائلی که به صورت دایره ، نیم دایره ،کره و... مطرح هستند و نهایتاً با چند میله یک سیستم استاتیکی را تشکیل می‌دهند، نکاتی که در مثال‌های زیر مطرح شده مدنظر می‌باشد.

مثال: در شکل زیر تمام سطوح بدون اصطکاک فرض شده است. زاویهٔ θ نظیر تعادل کدام است؟



۱) $tg\theta = 0.68$

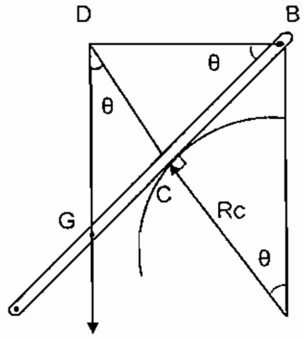
۲) $tg\theta = 0.42$

۳) $tg\theta = 0.53$

۴) $AB = 2R$ وزن میله W است.

فرض:

در این مسایل با توجه به سه نیرویی بودن اعضا و اینکه هر سه نیرو از مرکز دایره می‌گذرد، می‌توان مسئله را حل کرد.



$BG = R = CG + CB$

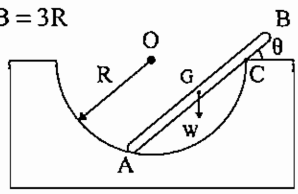
$BC = R tg\theta$

$CG = CD tg\theta \quad , \quad CD = BC tg\theta$

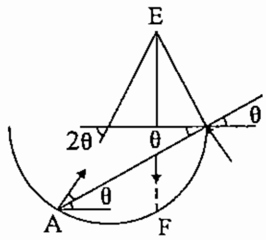
$R = R tg^3\theta + R tg\theta \quad \Rightarrow \quad tg^3\theta + tg\theta - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad tg\theta = 0.68$

مثال: زاویهٔ θ نظیر تعادل چقدر است؟

$AB = 3R$



AE قطر دایره است.

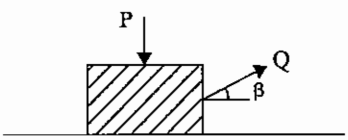


$$AF = \overset{AE}{2R}\, Cos2\theta = \overset{\frac{AB}{2}}{\frac{3}{2}}\, RCos\theta \quad \rightarrow \quad 4\cos(2\theta) = 3\cos(\theta)$$

$Cos2\theta = 2Cos^2\theta - 1$

$8Cos^2\theta - 3Cos\theta - 4 = 0 \rightarrow \theta = ...$

مثال: برای ایجاد یک حرکت یکنواخت زاویه β، کدام‌یک انتخاب شود تا Q می نیمم باشد. مقدار Q_{Min} چقدر است؟



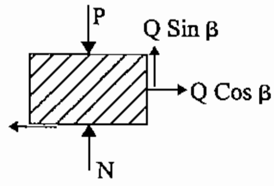
۱) $\beta = arctg\mu \qquad Q_{Min} = \dfrac{\mu P}{\sqrt{1-\mu^2}}$

۲) $\beta = \dfrac{1}{2} arctg\mu \qquad Q_{Min} = \dfrac{\mu P}{\sqrt{1+\mu^2}}$

۳) $\beta = arctg\mu \qquad Q_{Min} = \dfrac{\mu P}{\sqrt{1+\mu^2}}$

$\sum F_x = 0$

$\sum F_y = 0$



$$Q\cos\beta = \mu N \quad \Rightarrow \quad N = \frac{Q\ \ \cos\ \ \beta}{\mu}$$

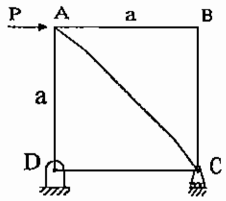
$$N - P + Q\sin\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad N + Q\sin\beta = P$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q\cos\beta}{\mu} + Q\sin\beta = P \quad \Rightarrow \quad Q\cos\beta + \mu Q\sin\beta = \mu P$$

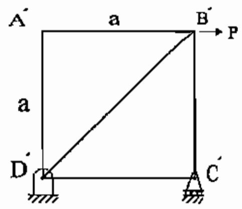
$$Q = \frac{\mu P}{\cos\beta + \mu\sin\beta}$$

$$Q_{Min} : \text{where} \quad \cos\beta + \mu\sin\beta = Max \quad \Rightarrow \quad \beta = \text{arctg}\mu$$

$$Q_{Min} = \frac{\mu P}{\sqrt{1+\mu^2}}$$



شکل (۱)



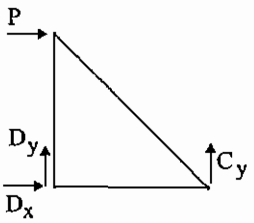
شکل (۲)

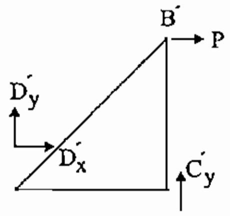
مثال: کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) $x_B > x_{B'}$

۲) $x_B < x_{B'}$

۳) $x_B = x_{B'}$





چون شکل 1 سه عضو غیرصفر دارد و شکل 2 دو عضو غیر صفر دارد، انرژی شکل 1 بیش از 2 است. پس تغییر مکان نقاطی که نیروی خارجی به آنها اعمال شده بیشتر است.

چون تمام نیروهای مقطع، غیر از CE عمودی است.

مثال: زاویهٔ θ نظیر تعادل کدام است؟

وقتی $\theta = 0$ باشد، فنر در حالت آزاد است.

$$Pdy_B - Fdx_C = 0$$

$$y_B = (h+L) - (h+L)\cos\theta$$

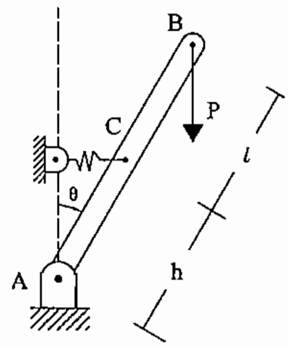
$$x_C = h\sin\theta$$

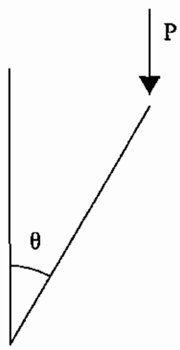
$$dx_C = h\cos\theta d\theta$$

$$F = Kx_C = Kh\sin\theta$$

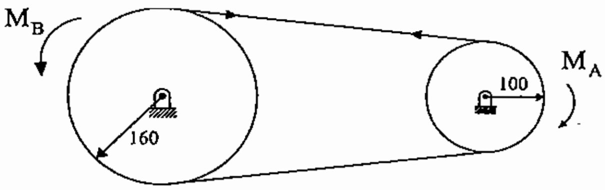
$$p(h+L)\sin\theta = Kh^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{P(\ell+h)}{Kh^2}$$





مثال: ضریب اصطکاک تسمه و چرخ 0.4 است. حداکثر گشتاور M_A که به چرخ A اعمال می‌گردد، بدون اینکه لغزشی ایجاد شود، $20N\cdot m$است. کدام عبارت صحیح است؟



۱) گشتاور مقاوم قرقره B بیشتر از $33N\cdot m$ است.

۲) در صورتی که لغزشی ایجاد شود، در A شروع می‌شود.

۳) در صورتی که لغرشی ایجاد شود، در B شروع می‌شود

۴) زاویهٔ اصطکاک ـسمه و چرخ، بیش از $45°$ است.

$$F_B = F_A \quad \Rightarrow \quad \frac{M_B}{R_B} = \frac{M_A}{R_A}$$

$$M_B = M_A \cdot \frac{R_B}{R_A} = 20 \times \frac{160}{100} = 32N \cdot m$$

اگر گشتاور یک چرخ کمتر باشد، لغزش در آن چرخ اتفاق می‌افتد. (به طراحی اجزاء ۲ رجوع شود) بنابراین لغزش در A شروع می‌شود.

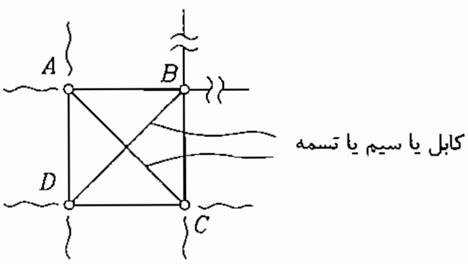
فصل هشتم

مسائل و نکات عمومی مهم

مقدمه: هدف اصلی از این بخش از جزوه استاتیک، جمع‌آوری و ذکر نکات مهم درس استاتیک در قالب مسائل نمونه در فصول مختلف می‌باشد. شایسته است که دانشجویان عزیز بعد از مطالعه دقیق جزوه، مروری بر این فصل و نکات مهم آن نیز داشته باشند. در نوشتن این فصل، علاوه بر نظرات مهم شخصی مؤلف، نکات برجسته استنتاج شده از امتحانات کنکور کارشناسی ارشد سال‌های گذشته تا سال ۱۳۸۵ نیز آورده شده است.

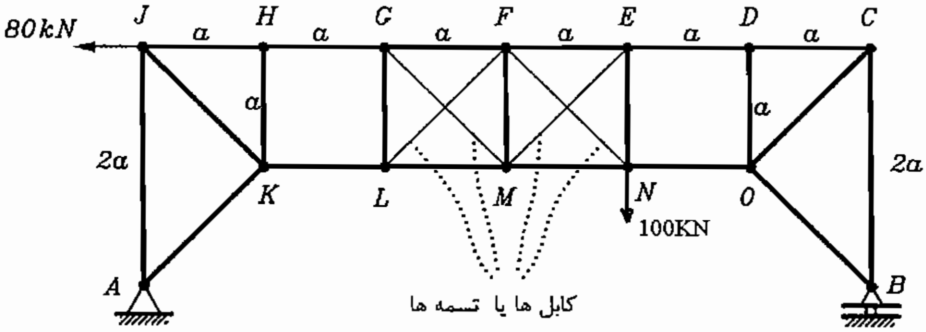
نکات اول: کاربرد کابل‌ها (یا تسمه‌های نازک) در خرپاها و سازه‌ها

درصفحه 13 این جزوه روش‌های مختلف حل خرپاها مورد بررسی قرار گرفت. در این قسمت چند مساله مهم در مورد کاربرد کابل‌ها (یا سیم بکسل‌ها یا تسمه‌ها) در خرپاها مطرح می‌گردد. اصولاً در خرپاها، برای تنظیم زوایای گوشه قاب‌ها، از کابل یا سیم بکسل به‌عنوان اعضای دو نیروئی استفاده می‌شود. (مثلاً در خرپای زیر که دارای قاب ABCD می‌باشد برای اینکه زوایای گوشه‌ها تحت شرایط متفاوت همواره گونیا شده باقی بماند. (مثلاً 90 درجه) از دو کابل AC و BD استفاده شده است).



نکته مهم در مسائل این است که کابل‌ها اصولاً می‌توانند نیروهای کششی را تحمل کنند و قادر به تحمل نیروهای فشاری نمی‌باشند. لذا در مسائل کنکور چنانچه از روی روابط مقاول استاتیکی متوجه شدید که کابلی قرار است تحت بار فشاری قرار گیرد، بدین منزله است که شرایط مساله را بایستی به‌گونه‌ای تغییر دهید، تا بار اعمال شده به این کابل صفر گردد. به‌عنوان مثال، به دو مساله زیر توجه فرمائید.

مساله ۱: در خرپای زیر از چهار کابل (یا تسمه) FN و EM و GM و FL استفاده شده است. تعیین کنید اولاً نیروی وارد شده به این کابل‌ها چقدر است؟ ثانیاً نیروی وارد بر عضو MN چقدر است؟

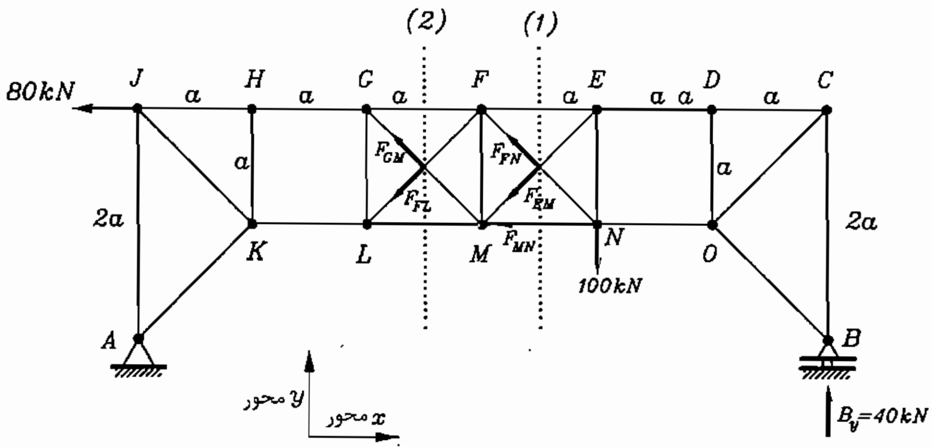


حل: قطعاً قبل از حل تشخیص می‌دهیم که نیروی وارد بر کابل‌ها یا بایستی کششی باشد یا بایستی صفر باشد. زیرا اصولاً کابل‌ها نمی‌توانند بار فشاری را تحمل کنند. لذا:

ابتدا عکس‌العمل A یا عکس‌العمل B را محاسبه می‌کنیم. ترجیحاً عکس‌العمل B را محاسبه می‌کنیم، زیرا دارای یک مجهول B_y می‌باشد. پس حول A معالات تعادل ممانی را می‌نویسیم.

$\Sigma m_A = 0 \Rightarrow 80(20) - 100(40) + B_y(90) = 0 \Rightarrow B_y = 40\,kN$

حال طبق نکاتی که در فصل‌های قبل جزوه اشاره شد، ترجیحاً از روش مقاطع استفاده کرده تا نیروی وارد بر کابل‌ها را محاسبه کنیم. از این رو مقطع ۱ و۲ را طوری انتخاب کرده تا مانند شکل زیر کابل‌ها را قطع نمایند.



فرض سازه توسط مقطع ۱ مانند شکل بالا قطع شده است. از آنجائی‌که دو کابل EM و FN فقط می‌تواند نیروی کششی را تحمل می‌کند، لذا نیروهای کششی در این دو کابل مانند، شکل بالا به‌صورت $F_{FN} \nwarrow$ $F_{EM} \swarrow$ می‌باشند. به‌عنوان مثال اگر دو نیرو را در دو کابل به‌صورت $F_{FN} \nwarrow \nearrow F_{EM}$ نشان دهیم، غلط است. زیرا آن بدین معنی است که نیروی وارد بر کابل EM فشاری است (و اصولاً کابل‌ها نمی‌توانند نیروی فشاری را تحمل کنند). با توجه به هندسه مشابه قاب‌سازه، دو نیروی کششی F_{FN} و F_{EM} یا بایستی با هم برابر بوده و یا اینکه بایستی یکی از آنها صفر (یا هر دو صفر شوند). با توجه به روابط تعادل (در جهت y یعنی $\Sigma F_y =$) برای قسمتی از سازه که در سمت راست مقطع (۱) قرار گرفته است، دو نیروی F_{EM} و F_{FN} نمی‌توانند هر دو یکسان باشند. زیرا اگر یکسان باشند، $\Sigma F_y \neq 0$ می‌شود و سازه در جهت y در حال تعادل نمی‌باشد. برای اینکه قسمتی از سازه که در سمت راست مقطع (۱) قرار گرفته در

جهت y در حال تعادل باشد، بایستی حتماً $F_{EM}=0$ باشد و مقدار F_{FW} از رابطه تعادل زیر که برای قسمتی از سازه که در سمت چپ مقطع (۱) قرار گرفته است، بدست می‌آید، یعنی:

در مقطع (۱) $\Rightarrow \Sigma F_y=0 \Rightarrow 40-100+F_{FN}\sin 45=0 \Rightarrow F_{FN}\ 84.85\ kw$

با دلایل مشابه‌ای که برای مقطع (۱) بیان شد، در مقطع (۲) نیز می‌توان نتیجه گرفت، که:

$F_{FL}=0$

در مقطع (۴) $\Rightarrow \Sigma F_y=0 \Rightarrow 40-100+F_{GM}\sin 45=0 \Rightarrow F_{GM}=84.85 kw$

برای محاسبه نیروی وارد بر عضو MN در مقطع (۱) رابطه تعادل ممان را نسبت به نقطه F می‌نویسیم. یعنی:

$\Rightarrow \Sigma M_F=0 \Rightarrow F_{MN}\times a+100a-40(3a)=0 \Rightarrow F_{MN}=20KN$

لذا جواب کلی این مساله عبارتند از:

$F_{FN}=84.85KN$

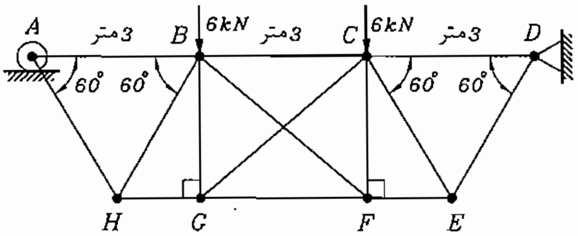
$F_{ME}=0$

$F_{GM}=84.85KN$

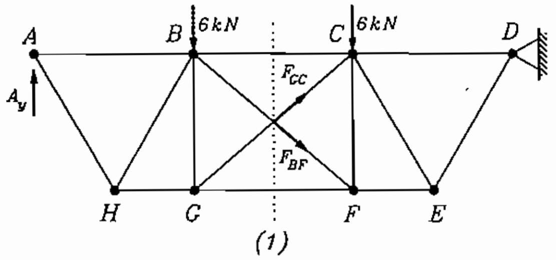
$F_{FL}=0$

$F_{MN}=20kN$

مساله ۲: در خرپای زیر، نیروی وارد بر عضو BG چقدر است؟ در این خرپا از دو کابل EF و CG استفاده شده است.



ابتدا نیروهای وارد بر دو کابل BF و CG را محاسبه می‌کنیم. برای این کار سازه را با مقطع (۱) قطع می‌کنیم.



حل: ابتدا با نوشتن رابطه تعادل، حول نقطه D برای کل سازه، می‌توان عکس‌العمل غلطک A یعنی A_y را محاسبه نمود. یعنی:

$\Sigma M_D=0 \Rightarrow A_y(9)-6(6)-+6(3)=0 \Rightarrow A_y=6\ kw$

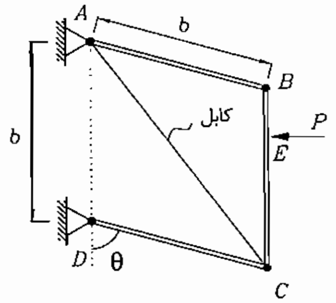
حال با همان توجیه مشابهی که در مساله قبل ذکر گردید، اولاً دو نیروی وارد به دو کابل یعنی F_{GC} و F_{BF} بایستی کششی ثانیاً به‌علت تقارن سازه، این دو نیرو بایستی یا با یکدیگر یکسان و یا بایستی هر دو (یا یکی از آنها) صفر شود. با توجه به رابطه تعادل در جهت y برای قسمتی از سازه که در سمت چپ مقطع (۱) قرار گرفته نتیجه می‌گیریم، که $F_{GC}=0$ و F_{BF} یک مقدار کششی یا صفر بوده که از رابطه زیر بدست می‌آید.

برای مقطع (۱) $\Rightarrow \Sigma F_y=0 \Rightarrow 6-6-F_{BF}\sin 45=0 \Rightarrow F_{BF}=0$

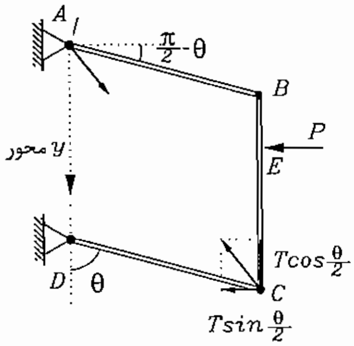
حال اگر رابطه تعادل را در مفصل G بنویسیم، نتیجه می‌گیریم که نیروی وارد بر عضو BG بایستی صفر باشد. یعنی:

$$F_{GH} \leftarrow \overset{F_{BG}\uparrow}{\bullet} \rightarrow F_{GF} \quad \Rightarrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{BG} = 0$$

مساله ۳: کابل (یا تسمه نازک) AC سازه ABCD را تحت نیروی افقی p به‌صورت یک متوازی الاضلاع در حال تعادل نگهداری می‌کند. تعیین کنید، نیروی وارد بر کابل را (T). θ زاویه متوازی الاضلاع و b ضلع آن می‌باشند.



حل: کابل AC فقط می‌تواند نیروی کششی را تحمل کند. لذا نیروی کششی مانند شکل زیر نشان داده می‌شوند. با توجه به دلایلی که در بحث انرژی (اصل کار مجازی) در جزوه آورده شده است، برای این مساله بهتر است که از روش انرژی استفاده شود. دو نیروی p و نیروی T واقع در مفصل C جزو نیروهای فعال بوده که کار انجام می‌دهند. نیروی کششی T واقع در مفصل A یک نیروی غیرفعال است، زیرا هیچ‌گونه کاری در مفصل قید شده A نمی‌تواند انجام دهد.



با توجه به مطالبی که در بحث انرژی جزوه بیان شده است، بهتر است مساله از روش شبه برداری (یعنی انتخاب محور مختصات xy) حل گردد. لذا در مفصل قید شده A محورهای مختصات xy مانند شکل انتخاب می‌شوند و رابطه انرژی با توجه دقیق به علائم مربوط به نیروها و علائم مربوط به جابجائی‌ها، به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

لازم به‌ذکر است که در روش برداری یا شبه برداری انرژی، بهتر است نیروها در راستای محور افقی x و عمودی y تجزیه شوند. لذا نیروی T در محل مفصل C در دو جهت x و y تجزیه شده است. رابطه کلی انرژی برای سازه، عبارت است از:

$$(-p)(dx_E) - \left(T\sin\frac{\theta}{2}\right)(dx_c) - \left(T\cos\frac{\theta}{2}\right)(dy_c) = 0$$

با توجه به شکل:

$$x_E = d\sin\theta \Rightarrow dx_E = b\cos\theta\, d\theta$$

$$x_c = b\sin\theta \Rightarrow dx_c = b\cos\theta\, d\theta$$

$$y_c = b + b\cos\theta \Rightarrow dy_c = -b\sin\theta\, d\theta$$

$$p\cos\theta = T\left(\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta - \sin\frac{\theta}{2}\cos\theta\right)$$

$$p\cos\theta = T\sin\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$p\cos\theta = T\sin\frac{\theta}{2}$$

$$T = \frac{p\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

نیروی کششی وارد بر کابل

نکات دوم: خواص سطوح در چرخش محورهای مختصات

در صفحه ۳۶ این جزوه در مورد خواص سطوح (مانند ممان اول و دوم سطح) نسبت به محورهای کارتزین x و y بحث گردید. حال در این فصل به خواص سطوح نسبت به محورهای متعامد 'x و 'y که از دوران محورهای x و y به‌وجود آمده است، می‌پردازیم. همین‌طور در این فصل مختصری در مورد خواص سطوح جدار نازک که قبلاً در جزوه به آن پرداخته نشده است نیز می‌پردازیم. از دانشجویان محترم تقاضا می‌گردد که خواص سطوح برای سطوح جدار ضخیم با اشکال ساده (مانند مستطیل ـ مثلث ـ و دیگر سطوح ساده) را نیز مطالعه نمایند. به‌عنوان مثال در هر مرجع استاتیک، مثال‌های حل شده فراوانی وجود دارد و امید است که دانشجویان محترم مطالعه‌ای را نیز به روی خواص سطوح این اشکال ساده داشته‌باشند. در این فصل بیشتر به اشکال پیچیده‌تر پرداخته می‌شود. شایان ذکر است که در چند ساله اخیر (سال ۱۳۸۲ به بعد) در امتحانات کنکور کارشناسی ارشد، مسائل متعددی در مورد خواص سطوح در هنگام چرخش محور مختصات مطرح بوده است، لذا این فصل می‌تواند کمک شایان را برای دانشجویان محترم به‌همراه داشته باشد.

نکاتی چند در مورد ممان اول و دوم سطوح نسبت به محورهای مختصات x و y

محورهای x و y یعنی محورهای افقی و عمودی که در این فصل از آن یاد می‌گردد:

$I_x=\int y^2\,dA$ ممان دوم سطح نسبت به محور x

$I_y=\int x^2\,dA$ ممان دوم سطح نسبت به محور y

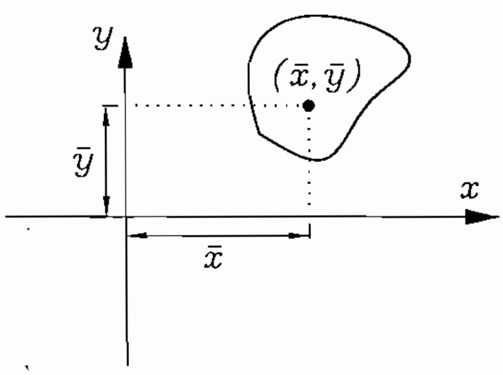
$Q_x=\int y\,dA$ ممان اول سطح نسبت به محور x

$Q_y=\int x\,dA$ ممان اول سطح نسبت به محور y

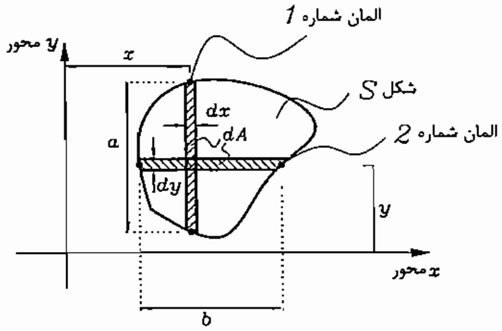
$\bar{x}=\dfrac{\Sigma x_i A_i}{\Sigma A_i}=\dfrac{\int x\,dA}{\int dA}=\dfrac{Q_y}{A}$ مختصات مرکز سطح

$\bar{y}=\dfrac{\Sigma y_i A_i}{\Sigma A_i}=\dfrac{\int y\,dA}{\int dA}=\dfrac{Q_x}{A}$ مختصات مرکز سطح

که A سطح مقطع کل و $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مختصات مراکز سطوح می‌باشند (مانند شکل زیر).



تذکر بسیار مهم: برای محاسبه I_x یا I_y (و همچنان Q_x یا Q_y)، حتماً دقت شود که المان‌های صحیح را از درون کل سطح انتخاب نمائیم. به‌عنوان مثال فرض کنید که می‌خواهیم I_x یا Q_x را در شکل بسته S در زیر محاسبه نمائیم.



$I_x=\int y^2\,dA$ ممان دوم سطح نسبت به x

$Q_x=\int y\,dA$ ممان اول سطح نسبت به x

برای محاسبه I_x و Q_x حتماً بایستی از المان شماره ۲ در بالا استفاده کرد(نه از المان شماره ۱). یعنی از $dA=bdy$ (نه از $dA=adx$) زیرا اگر به شکل بالا توجه گردد المان شماره ۲ مقدار ممان اول سطح $\int ydA$ را بیان می‌کند، در صورتی‌که المان شماره ۱ مقدار ممان اول سطح $\int xdA$ را بیان می‌کند. لذا برای محاسبه I_x و یا Q_x بایستی از الان شماره ۲ استفاده نمود و برای محاسبه I_y و Q_y بایستی از المان شماره 1 استفاده نمود. یا به عبارت دیگر:

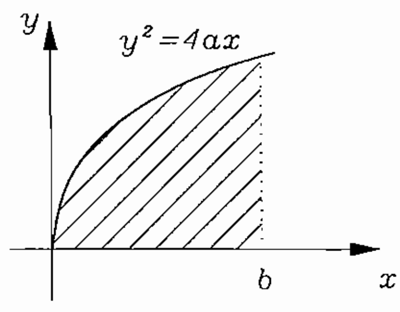
$$I_x=\int y^2\,dA=\int y^2\,bdy$$

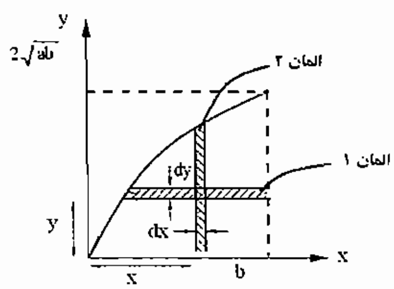
$$Q_x=\int y\,dA=\int y\,bdy$$

$$I_y=\int x^2\,dA=\int x^2\,adx$$

$$Q_y=\int x\,dA=\int xadx$$

مساله ۱: مرکز سطح زیر یعنی $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را محاسبه نمائید.





$\bar{x}$ و $\bar{y}$ را مرکز سطح می‌نامیم: لذا

$$\bar{x}=\frac{Q_y}{A}=\frac{\int xdA}{A} \quad (1$$

$$\bar{y}=\frac{Q_x}{A}=\frac{\int ydA}{A} \quad (2$$

برای محاسبه A (یعنی مخرج رابطه ۱ و۲) از المان ۱ یا المان ۲ استفاده می‌کنیم یعنی هیچ فرقی نمی‌کند از کدام المان ۱ یا ۲ استفاده شود. فرض کنید که از المان ۲ استفاده می‌کنیم. یعنی:

$dA = y\,dx$ در المان ۲

$y^2 = 4ax \Rightarrow y = 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$

$A = \int dA = \int_0^b y\,dx = \int_0^b 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{4}{3}\left(ab^3\right)^{\frac{1}{2}}$ سطح کل

برای محاسبه Q_y یعنی $\int x\,dA$ حتماً بایستی از المان شماره ۲ استفاده نمود (نه از المان شماره ۱):

$$Q_y = \int x\,dA$$

$$dA = y\,dx$$

$$Q_y = \int_0^b x\,y\,dx = 2a^{\frac{1}{2}} \int_0^b x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{4}{5}\left(ab^5\right)^{\frac{1}{2}}$$

حال برای محاسبه Q_x یعنی $\int y\,dA$ حتماً بایستی از المان شماره ۱ استفاده نمود (نه از المان شماره ۲) :

$$Q_x = \int y\,dA$$

$dA = (b-x)\,dy$ در المان شماره ۱

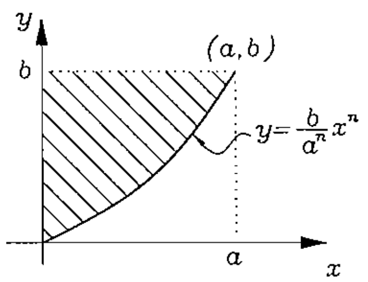
$$a_x = \int y\,dA = \int_0^{2\sqrt{ab}} y(b-x)\,dy = \int_0^{2\sqrt{ab}} y\left(b - \frac{y^2}{4a}\right) dy = ab^2$$

حال با داشتن مقادیر A و Q_x و Q_y و جایگزینی آن در روابط ۱ و ۲، خواهیم داشت:

$$\overline{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{3}{5} b$$

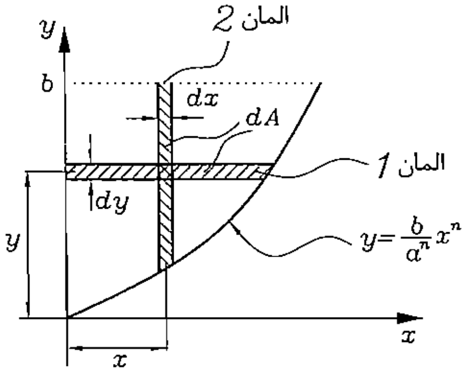
$$\overline{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{3}{4}(ab)^{\frac{1}{2}}$$

مساله ۲: مرکز سطح هاشورزده محاسبه گردد.



$$\overline{x} = \frac{Q_x}{A}\,,\ \overline{y} = \frac{Q_x}{A}$$

برای محاسبه A و همچنین Q_x و Q_y بایستی دو المان شماره ۱ و شماره ۲ مانند زیر انتخاب نمود.



برای محاسبه A یعنی سطح کل از المان ۱ یا المان ۲ استفاده شود. فرض کنید که از المان ۲ استفاده می‌کنیم، پس:

$dA=(b-y)dx$ در المان ۲

$$A=\int_0^a (b-y)dx=\int_0^a\left(b-\frac{b}{a^n}x^n\right)dx=b\int_0^a\left(1-a^{-n}x^n\right)dx$$

با حل انتگرال ساده مقدار A کل سطح، محاسبه می‌گردد.

برای محاسبه Q_y حتماً بایستی از المان شماره 2 استفاده شود. یعنی:

$$Q_y=\int x\,dA$$

$$Q_y=\int_0^a x(b-y)dx=\int_0^a x\left(b-\frac{b}{a^n}x^n\right)dx=\int_0^a\left(bx-\frac{b}{a^n}x^{n+1}\right)dx$$

با حل انتگرال ساده مقدار Q_y محاسبه می‌شود و سپس از رابطه $\bar{x}=\frac{Q_y}{A}$ مقدار $\bar{x}$ محاسبه می‌گردد.

حال برای محاسبه Q_x حتماً بایستی از المان شماره 1 استفاده شود. یعنی:

$$Q_x=\int y\,dA=\int y.x\,dy$$

از طرفی معادله منحنی را می‌توان بر حسب y، به صورت زیر نوشت:

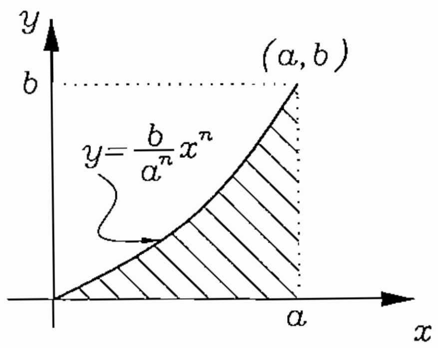
$$y=ba^{-n}x^n \quad\Rightarrow\quad x=\left(\frac{y}{b_a^{-n}}\right)^{\frac{1}{n}} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{a}{B^{\frac{1}{N}}}Y^{\frac{1}{N}}$$

پس مقدار q_X عبارت است از:

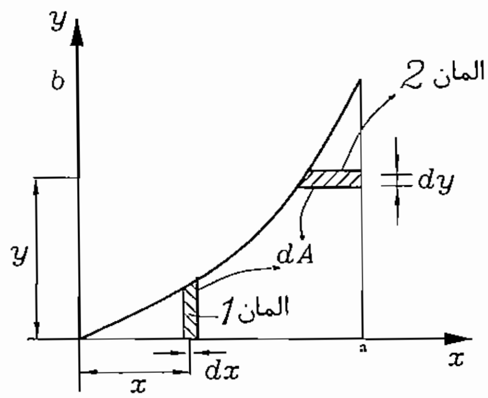
$$Q_X=\int_0^b \frac{a}{b^{\frac{1}{n}}}\,y^{\frac{1+n}{n}}dy$$

با حل انتگرال ساده مقدار Q_x محاسبه شده و سپس از $\bar{y}=\frac{Q_x}{A}$ مقدار $\bar{y}$ نیز محاسبه می‌شود.

مساله ۳: در شکل زیر مقدار $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکز سطح هاشورزده، محاسبه گردد.



راهنمائی: دقیقاً مانند مثال قبل این مساله حل می‌شود، از دانشجویان محترم تقاضا می‌گردد، با توجه به مساله قبل و راهنمائی‌های زیر، خود اقدام به حل این مساله بنمائید.



$dA = ydx$ برای المان ۱

$dA = (a-x)dy$ برای المان ۲

$$a_x = \int y\,dA = \int_0^b y(a-x)dy$$

$$Q_y = \int x\,dA = \int_0^a xy\,dx$$

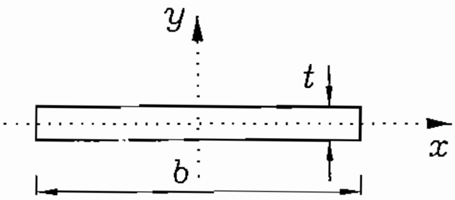
$$A = \int_0^a ydx$$

در سه معادله آخر به جای y مقدار $\frac{b}{a^n}x^n$ و به جای x مقدار $ab^{-\frac{1}{n}}y^{\frac{1}{n}}$ را قرار داده تا Q_x و Q_y و A محاسبه می‌شوند و سپس از رابطه $\bar{x}=\frac{Q_y}{A}$ و $\bar{y}=\frac{Q_x}{A}$ مقادیر $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را بدست می‌آوریم.

محاسبه ممان اول و دوم سطوح جدار نازک نسبت به محور x و y

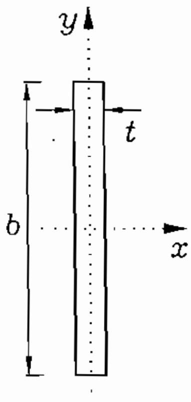
در این فصل از محورهای x و y به صورت محورهای افقی و عمودی (در مختصات جسم) نام برده می‌شود و ممان‌های اول و دوم سطح نسبت به این محورهای x و y محاسبه می‌شوند. در بخش‌های بعدی محاسبه ممان‌های اول و دوم سطوح نسبت به محورهای جدید 'x و 'y را که اولاً از انتقال محورهای x و y و ثانیاً از دوران محورهای x و y ایجاد شده‌اند بحث خواهد شد.

نکتهٔ مهم در محاسبات خواص سطوح مقاطع جدار نازک که ضخامت اعضای آن، t می‌باشد. این است که معمولاً بایستی از عبارت‌های t^2 و توان‌های بالاتر صرف نظر نمود. مثلاً اگر فرض کنیم که در یک سازه جدار نازک دو عضو آن، به صورت زیر (شکل‌های ۱ و ۲) باشد. می‌توان I_x و یا I_y را به‌صورت زیر نوشت.



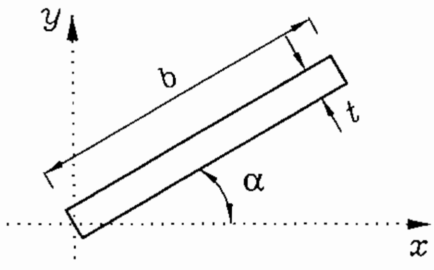
$$\Rightarrow \quad I_x = \frac{1}{12} bt^3$$

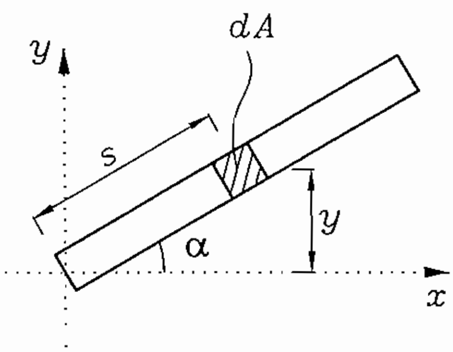
در محاسبات می‌توان از عبارت $\frac{1}{12} bt^3$ چشم‌پوشی نمود.



$$\Rightarrow I_x = \frac{1}{2} tb^3$$

و اگر عضو مربوط به سازه، مانند شکل ۳ در زیر با افق زاویه α بسازد، می‌توان I_x آنرا به صورت زیر محاسبه نمود.





برای محاسبه I_x بایستی به‌طور مستقیم، از انتگرال $\int y^2 dA$ استفاده نمود یعنی:

یک المان کوچک به طور ds در فاصله S از مبدا در نظر می‌گیریم.

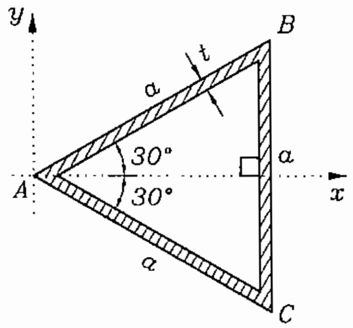
$$I_x = \int_0^b (S \sin\alpha)^2 t.ds$$

$$I_x = t.\sin^2\alpha \int_0^b S^2 ds$$

با حل انتگرال ساده بالا I_x محاسبه می‌شود.

مساله ۱: در شکل جدار نازک زیر که ضخامت اعضاء t و طول هر سه عنصر یکسان و برابر a است. مقدار I_x چقدر است؟ همین‌طور ممان اول سطح Q_x چقدر است؟

حل: عضو جدار نازک BC دارای I_x به‌صورت زیر می‌باشد:



$$I_{x,BC}=\frac{1}{12}ta^3$$

عضوهای AB و AC متقارن و یکسان می‌باشند و:

$$I_{x,AB}=\int y^2\,dA$$

طبق نکاتی که در این فصل در قسمت قبلی بحث شد، می‌توان نوشت:

$$dA=t\,ds$$

$$I_{x,AB}=\int (S\sin 30)^2\,t\,ds$$

لذا I_x کل عبارت است از:

کل $I_x=2I_{x,AB}+I_{x,BC}$

کل $I_x=2\int_0^a (S\sin 30)^2\,t\,ds+\frac{1}{12}ta^3$

$$I_x=2t\sin^2 30\int_0^a S^2\,ds+\frac{1}{12}ta^3$$

با حل انتگرال مقدار I_x محاسبه می‌شود.

برای محاسبه Q_x کل می‌توان نوشت.

کل $Q_x=2Q_{x,AB}+Q_{x,BC}$

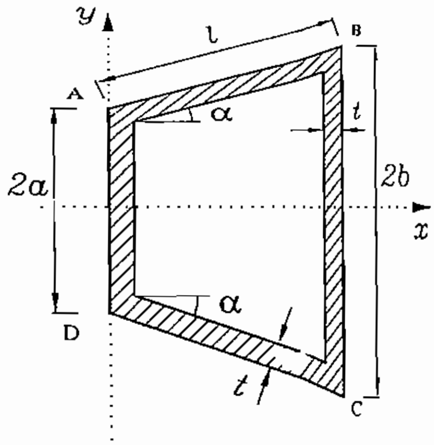
$$Q_{x,BC}=\bar{y}A=0\times a\times 1=0$$

$$Q_{x,AB}=\int y\,dA=\int_0^a (S\sin 30)\,t\,ds=\sin 30.t\int_0^a S\,ds=\frac{t.a^2}{2}\sin 30$$

کل $Q_x=2\times\frac{ta^2}{2}\sin 30=ta^2\sin 30$

مساله ۲: در پروفیل جدار نازک زیر به ضخامت t، مقدار I_x چقدر است؟

همچنین مقدار Q_x (ممان اول سطح کل نسبت به محور x) را محاسبه نمائید



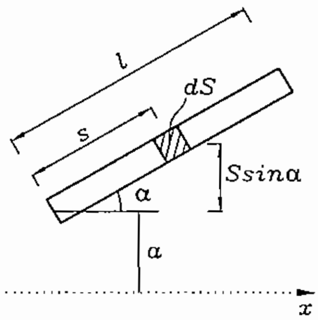
$$I_x\ \text{کل} = I_{x,AD} + I_{x,BC} + 2I_{x,AB}$$

$$I_{x,AD} = \frac{1}{12}t(2a)^3 = \frac{2}{3}ta^3$$

$$I_{x,BC} = \frac{1}{12}t(2b)^3 = \frac{2}{3}tb^3$$

$$I_{x,AB} = \int y^2\, dA$$

برای محاسبه این انتگرال، به شکل زیر توجه شود.



$$y = S\sin\alpha + a$$

$$dA = t\,ds$$

پس

$$I_{x,AB} = \int_0^{\ell} (S\sin\alpha + a)^2\, t\,ds$$

$$I_{x,AB} = t\int_0^{\ell} \left(\sin^2\alpha S^2 + 2a\sin\alpha.S + a^2\right)ds$$

با حل این انتگرال ساده مقدار $I_{x,AB}$ محاسبه می‌شود و سپس با داشتن مقادیر $I_{x,AB}$ و $I_{x,AD}$ و $I_{x,BC}$ این مقادیر را در رابطه ۱ قرار می‌دهیم تا I_x کل محاسبه شود.

محاسبه Q_x کل:

$$Q_x\ \text{کل} = Q_{x,AD} + Q_{x,BC} + 2Q_{x,AB} \qquad (2)$$

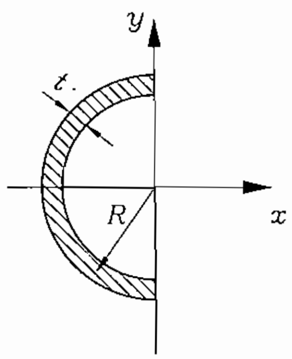
$$Q_{x,AD} = \bar{y}\,.A = 0\times 2\times t = 0$$

$$Q_{x,BC} = \bar{y}.A = 0\times 2b\times t = 0$$

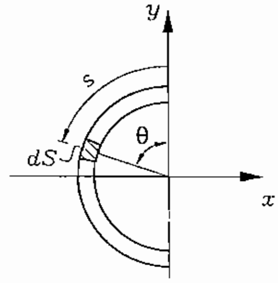
$$Q_{x,AB} = \int y\,dA = \int_0^{\ell} (S\sin + a)\,t\,ds = t\int_0^{\ell} (S\sin + a)\,ds$$

با حاصل این انتگرال ساده مقدار Q_{AB} محاسبه می‌شود و سپس با جایگزین مقادیر مربوط در رابطه 2 مقدار Q_x کل، محاسبه می‌شود.

مساله ۳: مقدار I_x و Q_x در نیم دایره جدار نازک به شعاع R چقدر است؟



حل: برای تمام سازه‌های خمیده که در مختصات قطبی (r,θ) حل می‌شوند، اصولاً خواص سطوح به‌طور مستقیم از حل انتگرال‌های مربوط زیر قابل حل هستند.



$$I_x = \int y^2\, dA$$

$$Q_x = \int y\, dA$$

$$y = R\cos\theta$$

$$dA = tds$$

$$dA = t.Rd\theta$$

$$I_x = \int_0^{\pi} (R\cos\theta)^2\, tRd\theta$$

$$I_x = tR^3 \int_0^{\pi} \cos^2\theta d\theta \quad (I)$$

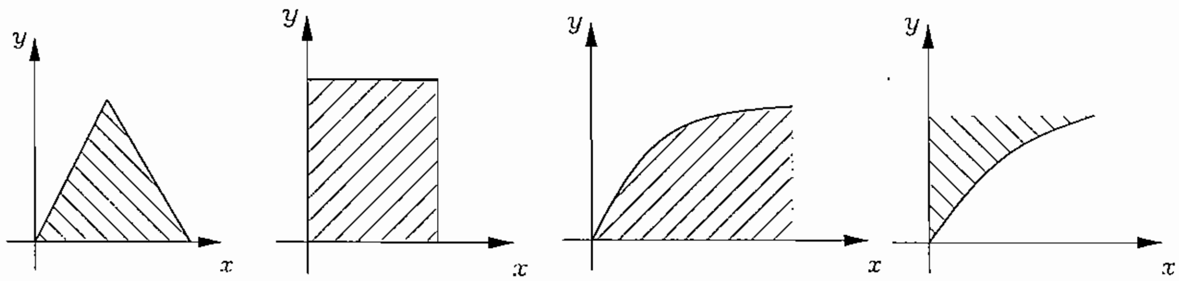
$$Q_x = \int_0^{\pi} R\cos\theta.tRd\theta$$

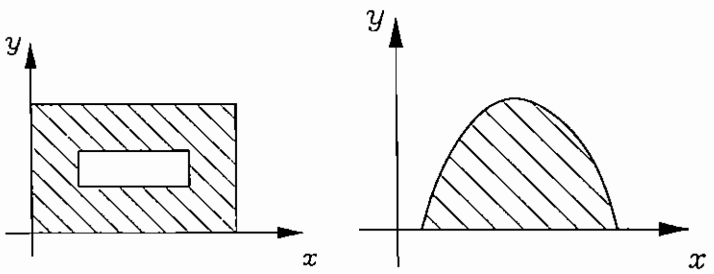
$$Q_x = tR^2 \int_0^{\pi} \cos\theta d\theta$$

با حل انتگرال روی ساده ۱ و۲ مقادیر Q_x و I_x محاسبه می‌گردد.

محاسبه ممان اول و دوم سطوح جدار ضخیم نسبت به محور x و y

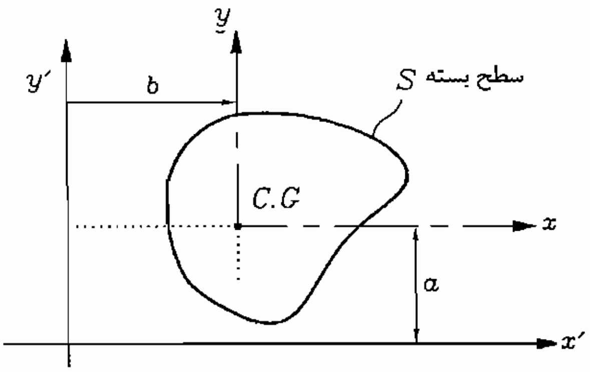
در این فصل مجدداً محورهای x و y، یعنی محورهای متعامد افقی و عمودی واقع در صفحهٔ در مورد محاسبه I_x و I_y و Q_x و Q_y به‌کار برده می‌شود. سطوح جدار ضخیم قبلاً بحث گردید و چند نمونه مساله حل گردید، مانند سطوح جدار ضخیم زیر. همان‌طوری‌که قبلاً از دانشجویان محترم تقاضا گردید برای مقاطع با شکل ساده سعی فرمائید به کتب و جزوات درسی خود مراجعه و چند نمونه مساله حل نمائید، در این جزوه علاوه بر نکات مهمی که در محاسبه خواص سطوح جدار ضخیم در بخش‌های قبل اشاره شد نیز در بخش بعدی محاسبه خواص سطوح در اثر اولاً انتقال محورهای متعامد x و y و ثانیاً در اثر دوران (یا چرخش) محورهای متعامد x و y بحث می‌شود. چند نمونه از سطوح جدار ضخیم به‌صورت زیر است:





محاسبه خواص سطوح در اثر انتقال محورهای متعامد x و y

اگر فرض کنیم که I_x و I_y (یا Q_x و Q_y) خواص سطوح نسبت به محورهای متعامد، مرجع xy (که y,x محورهای افقی و عمودی می‌باشند) باشند، می‌توان این خواص سطوح را نسبت به محورهای مختصات متعامد 'x و 'y که از انتقال عمودی و افقی دو محور به ترتیب x و y ایجاد شده‌اند، نیز محاسبه نمود. فرض یک سطح بسته S نسبت به محورهای x و y به‌ترتیب دارای I_x و I_y (یا Q_x و Q_y)، باشد. لذا می‌توان $I_{x'}$ و $I_{y'}$ (یا $Q_{x'}$ و $Q_{y'}$) را از رابطه زیر بدست آورد. شایان ذکر است که اولاً محورهای x و y به‌ترتیب به اندازه a و b در جهت عمودی و افقی جابجا شده تا محور 'x 'y ایجاد گردد و ثانیاً محورهای اولیه x و y از مرکز سطح بسته S می‌گذرند.

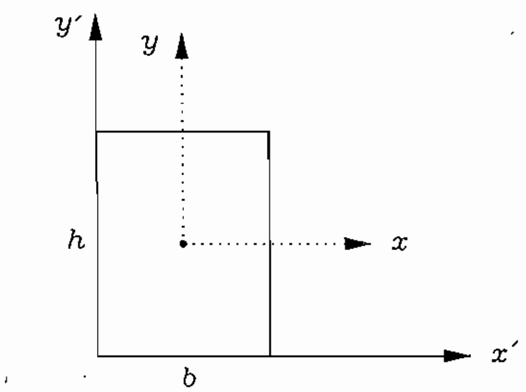


$$I_{x'} = I_x + Aa^2$$

$$I_{y'} = I_y + Ab^2$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + Aab$$

به عنوان مثال فرض در مستطیل b×h زیر می‌خواهیم $I_{x'}$ و $I_{y'}$ را محاسبه نمائیم.



$$a = \frac{h}{2}$$

$$b = \frac{b}{2}$$

$$I_{x'} = I_x + Aa^2$$

$$I_{x'} = \frac{1}{12}bh^3 + bh\frac{h^2}{4} = \frac{1}{3}bh^3$$

$$I_{y'} = I_y + Ab^2$$

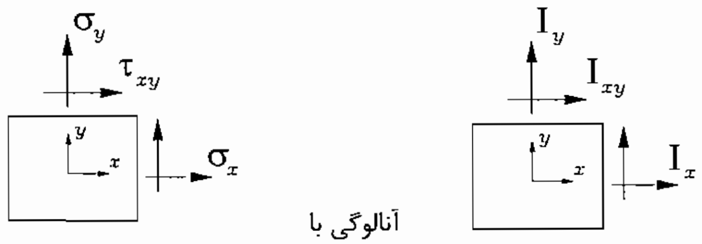
$$I_{y'} = \frac{1}{12}hb^3 + bh\frac{b^2}{4} = \frac{1}{3}hb^3$$

توجه: این قسمت معمولاً در کلاس‌های درسی دانشگاه دانشجویان محترم و در تمامی مراجع استاتیک وجود دارد و از دانشجویان خواهش می‌شود خود اقدام به حل مثال‌های بیشتری نمایند.

محاسبه خواص سطوح در اثر دوران محورهای متعامد x و y

از آنجائی‌که این فصل معمولاً در کلاس‌های درسی کمتر موردبحث قرار می‌گیرد و از طرفی در سه سال گذشته در امتحانات کنکور ارشد این فصل مورد توجه طراحان سوالات امتحانی می‌باشد. و همچنین این فصل در مقاومت مصالح در بخش دایره مور از اهمیت بالائی برخوردار است. لذا از دانشجویان محترم تقاضا می‌گردد که این فصل را در اولویت‌های بالای درسی خود قرار دهند، زیرا هم در فصل استاتیک و هم در فصل مقاومت مصالح در امتحانات کنکور اهمیت به سزایی دارند.

این فصل دقیقاً مانند دایره مور در درس مقاومت مصالح می‌باشد مشروط بر اینکه به طور آنالوگی I_x با σ_x و I_y با σ_y و I_{xy} با z_{xy} تشابه دارند. لازم به ذکر است که I_x و I_y و I_{xy}، خواص سطوح نسبت به محورهای متعامد x و y بود که از مرکز سطح مورد نظر می‌گذرند.

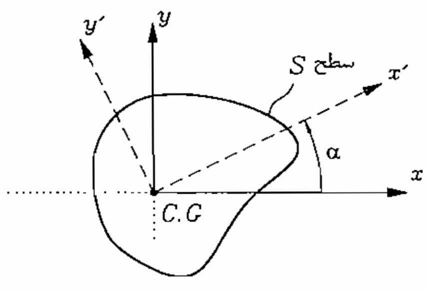


از آنجائی‌که خواص سطوح در درس استاتیک دو بعدی بحث می‌گردد، ولی مؤلفه‌های تنش در مقاومت مصالح سه بعدی بحث می‌گردد لذا در این فصل مباحث دو بعدی مورد بحث قرار می‌گیرند و در انتها به طور بسیار خلاصه روابط برای شرایط سه‌بعدی نیز مورد بحث قرار می‌گیرند. یا به عبارت دیگر در فضای سه‌بعدی، خواص سطوح I_x و I_y و I_z و I_{xy} و I_{yz} و I_{zx} و ... نیز مورد توجه قرار می‌گیرد.

توجه بسیار مهم

در این جا بحث بر اساس سه روش متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرد. یکی از این روش‌ها که بعداً آنرا روش «نامتغیر خواص سطوح» می‌نامیم اولاً برای مسائل کنکور که به‌صورت تستی بایستی در ماکزیمم دو دقیقه به سؤالات جواب داد مفید بوده و ثانیاً برای مسائل سه بعدی که حل آنها بسیار وقت‌گیر بوده نیز برای امتحان کنکور و حل سریع بسیار مفید می‌باشد ابتدا هدف اصلی از این بخش به‌صورت زبان ساده زیر بیان می‌شود.

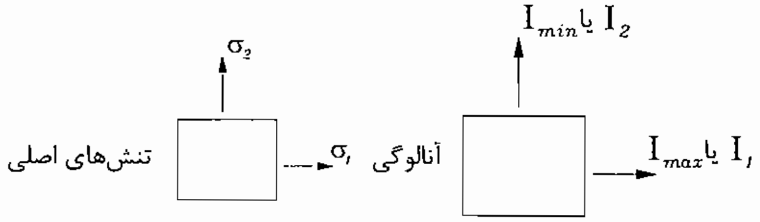
هدف: یک سطح S نسبت به محورهای متعامد x و y که از مرکز سطح می‌گذرند، دارای ممان‌های سطح دوم I_x و I_y و I_{xy} می‌باشد. اگر محور x را در جهت خلاف عقربه‌های ساعت به اندازه α دوران دهیم محور x' تشکیل می‌شود. تعیین کنید. ممان دوم این سطح را نسبت به محورهای متعامد x' و y' (یعنی $I_{x'}$ و $I_{y'}$ و $I_{x'y'}$) بدست می‌آوریم.



برای حل این مثال، سه روش زیر ارائه می‌گردد و سپس چندین مساله نمونه و کاربرد سریع هر کدام از این روش‌ها اشاره خواهد شد.

روش اول: روش دایره مور

همان‌طوری‌که اشاره شد هدفی که در بالا ذکر شد، می‌تواند آنالوگی با تنش‌ها در دایره مور، مورد بررسی قرار گیرد:

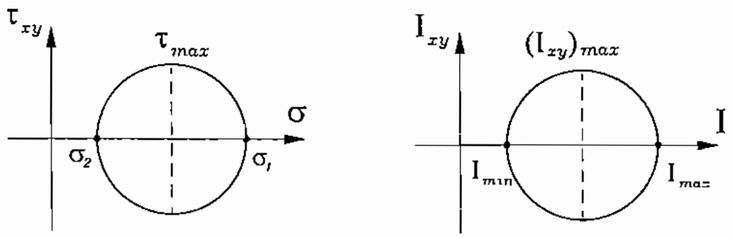


یعنی ماکزیمم و مینیمم ممان دوم سطح (I_{max}, I_{min})آنالوگی با I_{max}, I_{min} تنش‌های اصلی σ_1 و σ_2 می‌باشد، در برخی مراجع I_{max}, I_{min} را به‌ترتیب با I_1, I_2 نشان می‌دهند.

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \rightarrow I_x, I_y, I_{xy}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y \end{bmatrix}$$ یا به صورت ماتریس

و دایره مور به صورت زیر می‌باشد.



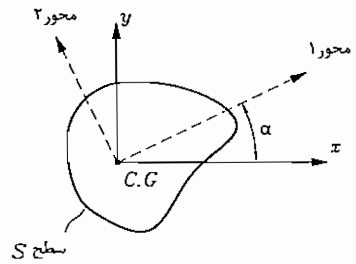
ماکزیمم و مینیمم ممان دوم سطح(یعنی I_{max} و I_{min}) را مانند تنش‌های اصلی، می‌توان به‌صورت ماتریس، مانند زیر نوشت.

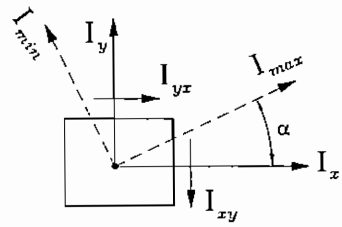
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_{max} & 0 \\ 0 & I_{min} \end{bmatrix}$$ تنش اصلی

محاسبه ماکزیمم و مینیمم ممان دوم سطح و تعین جهت ماکزیمم ممان دوم سطح

برای فهم بهتر فرض کنید که در یک سطح باز یا بسته S، خواص سطح نسبت به محورهای متعامد x و y (که محورهای xy از مرکز سطح S می‌گذرد) برابر با I_x و I_y و I_{xy} باشد. حال محور x را در جهت خلاف عقربه‌های ساعت به اندازه مثلاً α درجه دوران می‌دهیم تا محور متعامد I-2 که ماکزیمم و مینیمم ممان دوم سطح در روی آنها قرار دارند ایجاد گردد. تعیین کنید اولاً ماکزیمم و مینیمم ممان دوم سطح (I_{max} و I_{min} یا به تعریف دیگر I_1 و I_2) چقدر است؟ ثانیاً زاویه α چقدر است؟

برای جواب می‌توان یا مستقیماً از روش هندسی دایره مور استفاده نمود یا اینکه از روش ریاضی دترمینانت استفاده نمود. شایان ذکر است که چنانچه مسائل دو بعدی باشند، روش هندسی دایره مور ساده‌تر می‌باشد. ولی اگر مسائل سه بعدی باشند، روش هندسی دایره‌مور مشکل شده و بهتر است از روش ریاضی دترمینانت استفاده نموده. در هرحال در اینجا برای جواب به این مثال از هر دو روش استفاده می‌شود.





از روش هندسی دایره مور:

$$I_{max}, I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

و مقدار α از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$tg\,2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

تذکر مهم: اگر دانشجویان عزیز به خاطر داشته باشند، محاسبات بالا برای محاسبه I_{max} و I_{min} و α دقیقاً مانند فرمول‌های زیر، برای مؤلفه‌های تنش‌های اصلی در دایره مور است.

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}$$

حال از روش ریاضی حل می‌کنیم. همان‌طوری‌که قبلاً اشاره شد روش ریاضی برای مسائل سه بعدی بسیار مفیدتر می‌باشد.

در این روش خواص سطوح به صورت ماتریس نوشته می‌شود که قطعاً همیشه ماتریس متقارن است، یعنی: $\begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{bmatrix}$

$$I_{xy} = I_{yx}$$

حال از قطر اصلی یک I کم می‌کنیم و دترمینانت آنرا برابر صفر قرار می‌دهیم. یعنی:

$$\begin{vmatrix} I_x - I & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y - I \end{vmatrix} = 0$$

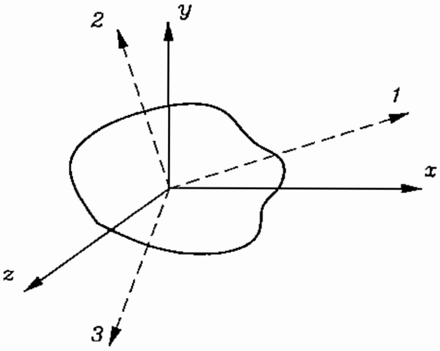
حال با حل این دترمینانت، یک معادله درجه دوم بدست می‌آید که ریشه‌های آن در واقع همان I_{max} و I_{min} می‌باشند. مثلاً:

$$I^2 - (I_x + I_y)I + (I_{xy} + I_{xy}) = 0$$

$$I_{max}, I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

تذکر مهم: این روش ریاضی برای مسائل سه بعدی هم بسیار مهم است مثلا فرض کنیم خواص سطح S (یعنی ممان دوم سطح) نسبت به محورهای متعامد x و y و z برابر I_x و I_y و I_z و I_{xy} و I_{yz} و I_{xz} باشد. حال می‌خواهیم این خواص را نسبت به محورهای اصلی 1 و 2 و 3 که بزرگترین و کوچک‌ترین ممان‌های دوم سطح I_1 و I_2 و I_3 در آن را وجود دارد، بدست آوریم. (مثلاً $I_1 > I_2 > I_3$) جواب این مساله از روش هندسی دایره مور بسیار مشکل است. لذا از روش ریاضی به‌صورت زیر می‌نویسیم:

دقت شود که محورهای 1 و 2 و3 محورهای متعامد اصلی هستند که از دوران محورهای متعامد xyz ایجاد شده‌اند.



حل:

$$\begin{vmatrix} I_x - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z - I \end{vmatrix} = 0$$

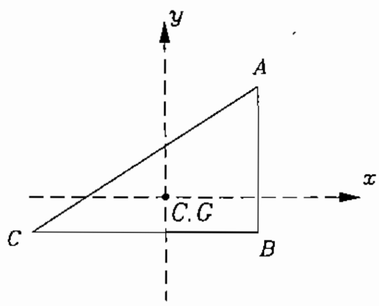
این ماتریس نسبت به قطر اصلی $[\diagdown]$متقارن است و از حل این دترمینانت معادله درجه سوم زیر برحسب I بدست می‌آید که ریشه‌های آن همان ماکزیمم و مینیمم ممان دوم سطح را نشان می‌دهد. یعنی:

$$I^3 - \left(I_x + I_y + I_z\right) I^2 + \left(I_x I_y + I_y I_z + I_z I_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2\right)$$
$$I - \left(I_x I_y I_z - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{xz}^2 - I_z I_{xy}^2 + 2 I_{xy} I_{yz} I_{zx}\right) = 0$$

از این معادله درجه سوم I_1و I_2 و I_3 بدست می‌آید.

توجه بسیار مهم: معمولاً در امتحان کنکور استاتیک مسائل معمولاً دو بعدی هستند، ولی چنانچه سه بعدی مطرح شد چون حل معادله درجه سوم بالا مشکل است و از روش حل تقریبی نیوتن، استفاده می‌شود و بسیار وقت‌گیر است. لذا از دانشجویان تقاضا می‌شود در امتحان تستی سریع ۴ گزینه داده شده را در معادله بالا چک کنند و جواب صحیح را پیدا کنند. البته در قسمت دیگر که روش ثابت‌های نامتغیر سطوح بحث می‌شود، دانشجویان می‌توانند این نوع مسائل را سریع‌تر حتی بدون نیاز به معادله درجه سوم قبل نیز جواب دهند.

مثال: فرض کنید که در مثلث قائم‌الزاویه ABC مقابل ممان‌های دوم سطح برابرند با:



$I_x = 10^4\ mm^4$

$I_y = 10^3\ mm^4$

$I_{xy} = 3 \times 10^3\ mm^4$

(البته اینجانب این اعداد را فرضی در نظر گرفته‌ام دانشجویان عزیز حتماً اگر ابعاد مثلث در دسترس بود بایستی خود ابتدا I_x و I_y و I_{xy} را محاسبه می‌نمودند).

تعیین کنید اولاً ماکزیمم و مینی‌مم ممان دوم سطح، چقدر است؟

ثانیاً در چه زاویه‌ای ماکزیمم ممان دوم سطح اتفاق می‌افتد؟ (یعنی همان‌طوری که در قبل گفته شده محور x در خلاف عقربه ساعت چند درجه α بچرخد تا ماکزیمم ممان دوم سطح نسبت به آن محور ایجاد شود)

روش هندسی:

$$I_{max} , I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

مقادیر I_x و I_y و I_{xy} را در رابطه بالا قرار داده مقدار 2α بدست می‌آید و نصف آن (بر طبق دایره مور) یعنی α جواب مساله بدست می‌آید.

روش ریاضی:

$$\begin{vmatrix} I_x - I & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y - I \end{vmatrix} = 0$$

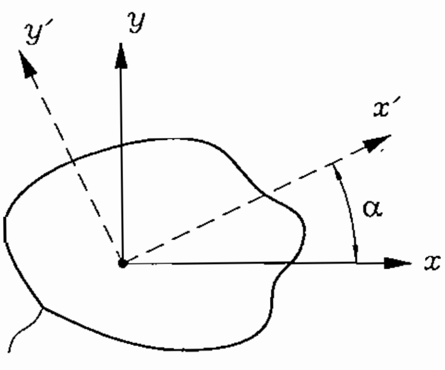
مقادیر I_x, I_y و I_{xy} را در دترمینانت بالا قرار می‌دهیم، یک معادله درجه دوم بر حسب I بدست می‌آید که جواب‌های آن همان I_{max} و I_{min} می‌باشند.

روش دوم: روش ماتریس انتقال

هدف: ابتدا به صورت دو بعدی که معمولاً هم در استاتیک مطرح است، بحث می‌کنیم. در قسمت قبل عموماً صحبت از ماکزیمم و مینیمم ممان دوم سطح بود (مانند ماکزیمم و می‌نیمم تنش‌های اصلی در دایره مور). در این فصل هدف اصلی، به‌صورت مساله زیر است.

مساله: در یک سطح S ممان‌های دوم سطح نسبت به محور متعامد xy که از مرکز سطح S می‌گذرد، برابر I_x و I_y و I_{xy} می‌باشند. حال محور x را در خلاف جهت عقربه ساعت به اندازه یک زاویه دلخواه α می‌چرخانیم تا محور متعامد x'y' ایجاد شود، ممان دوم سطح S نسبت به محور x'y' (یعنی $I_{x'}$ و $I_{y'}$ و $I_{x'y'}$) را تعیین کنید.

جواب: ابتدا فرمول ماتریس انتقال را که به‌صورت زیر است می‌نویسیم:



سطح S

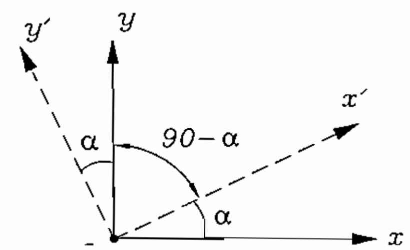
$$[I_{ij}'] = [t][I_{ij}][t]^T$$ فرمول ۱

که در این فرمول ماتریس انتقال اجزاء عبارتند از:

$$[I'_{ij}] = \begin{bmatrix} I_{x'} & I_{x'y'} \\ I_{y'x'} & I_{y'} \end{bmatrix}$$

$$[I_{ij}] = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y \end{bmatrix}$$

ماتریس t را ماتریس انتقال گویند که با توجه به چرخش محورها به‌صورت زیر نوشته می‌شود.



	محور x	محور y
محور x'	ℓ_x	ℓ_y
محور y'	m_x	m_y

معنی این جدول این است، مثلاً m_y یعنی کسینوس زاویه، بین محور y' و y

ℓ_y یعنی کسینوس زاویه، بین محور x' با y

ℓ_x یعنی کسینوس زاویه، بین محور x' با محور x

m_x یعنی کسینوس زاویه بین محور y' و محور x

پس با توجه به جدول بالا، ماتریس انتقال $[t]$ در فرمول، به‌صورت زیر می‌باشد.

$$[t]=\begin{bmatrix}\ell_x & \ell_y\\ m_x & m_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \cos(90-\alpha)\\ \cos(90+\alpha) & \cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$[t]=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

در فرمول ماتریس انتقال $[t]^T$ یعنی ترانسپوزماتریس $[T]$ یعنی جای ردیف و ستون ماتریس عوض می‌شود، یعنی:

$$[t]^T=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

پس جواب مساله عبارت است از:

$$\begin{bmatrix}I_{x'} & I_{x'y}\\ I_{y'x'} & I_{y'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_x & I_{xy}\\ I_{yx} & I_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

از حل این ماتریس مقادیر ممان دوم سطح $I_{x'}$ و $I_{y'}$ و $I_{x'y'}$ نسبت به محور متعامد x'y' بدست می‌آید.

تذکر بسیار مهم برای سؤالات تستی کنکور:

اگر دانشجویان تمایل به استفاده مستقیم از روش ماتریس انتقال و حل ماتریس قبل را ندارند، جواب ماتریس قبل به صورت فرمول زیر است و می‌توانند به‌طور مستقیم از فرمول زیر برای امتحان استفاده نمایند.

فرمول شماره ۲

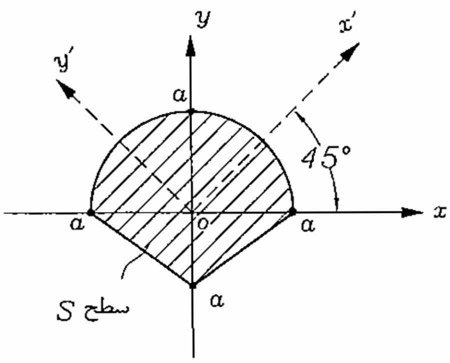
$$I_{x'}=I_x\cos^2\alpha+I_y\sin^2\alpha-I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$I_{y'}=I_y\cos^2\alpha+I_x\sin^2\alpha+I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$I_{x'y'}=\frac{1}{2}\left(I_x-I_y\right)\sin 2\alpha+I_{xy}\cos 2\alpha$$

توجه بسیار مهم در تست‌ها: در اکثر مواقع، در امتحان، تست سطح S را (مانند مثال زیر) طوری می‌دهند که نسبت به محور y (یا x) تقارن داشته باشد و لذا مقدار I_{xy} همواره برابر صفر می‌باشد.

مثال: در شکل زیر ممان دوم سطح حول محور x و y به‌ترتیب I_x و I_y است. مطلوبست اولاً : محاسبه ممان دوم سطوح نسبت به محورهای متعامد محور 'x و 'y (یعنی $I_{x'}$ و $I_{y'}$ و $I_{x'y'}$) مشروط بر اینکه محور 'x با محور x زاویه °45 بسازد. ثانیاً بزرگترین و کوچک‌ترین ممان دوم سطح و زاویه‌ای که بزرگترین ممان دوم سطح اتفاق می‌افتد را نیز بدست آورید.



حل: شکل نسبت بـه محـور y تقـارن دارد. یعنـی $I_{xy}=0$ اسـت. حـال دانشجویان محترم هم می‌توانند از فرمول ماتریس انتقال شماره یک مساله را حل کنند و یا می‌توانند به‌طور مستقیم از فرمول شماره ۲ استفاده کنند. مثلاً از فرمول ۲ به‌صورت زیر است.

$$I_{x'}=I_x\cos^2 45+I_y\sin^2 45-0$$

$$I_{y'}=I_y\cos^2 45+I_x\sin^2 45-0$$

$$I_{x'y'}=\frac{1}{2}\left(I_x-I_y\right)\sin 90+0$$

لذا از معادله بالا، مقادیر $I_{x'}$ و $I_{y'}$ و $I_{x'y'}$ برحسب داده‌های I_x و I_y بدست می‌آیند.

حل قسمت ثانیاً: محاسبه I_{max} و I_{min} و جهت آن یعنی زاویه α :

$$I_{max}, I_{min}=\frac{I_x+I_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+0^2}$$

از این رابطه I_{max} و I_{nin} (یا در واقع I_1 و I_2) بدست می‌آید و $tg2\alpha=\frac{2I_{xy}}{I_y-I_x}=\frac{2\times 0}{I_y-I_x}=0$

روش سوم: روش نامتغیرهای خواص سطح (یا ثابت‌های خواص سطح)

این روش برای مسائل دو بعدی و به خصوص سه بعدی در امتحانات تستی ارزشمند می‌باشد، زیرا با داشتن چهار گزینه دیگر شاید نیازی به استفاده از روش اول و دوم نباشد.

معنی این روش بدین صورت است که اگر در یک سطح در فضای دو بعدی ممان‌های دوم سطح نسبت به محور متعامد xy که از مرکز سطح می‌گذرد I_x و I_y و I_{xy} باشد.

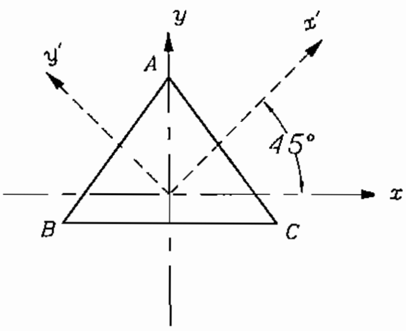
حال اگر محورx به اندازه یک زاویهٔ دلخواه بچرخد و به صورت محور متعامد x'y' درآید و ممان‌های دوم سطح $I_{x'}$ و $I_{y'}$ و $I_{x'y'}$ باشد. حتی اگر محور x به ا ندازه یک زاویهٔ معین بچرخد و به صورت محور متعامد اصلی 2-1 که ماکزیمم و می‌نیمم ممان دوم سطح (یعنی I_{max} و I_{min} تشکیل) شود، همواره بین این ممان‌های دوم سطح I_x و I_y و $I_{x'y'}$ و I_{max} و I_{min} روابط زیر برقرار است، و چون همواره مقادیر این روابط ممان‌های دوم سطوح به محورهای xy و x'y' و محور 2-1 وابسته نمی‌باشند، آنها را ثابت‌ها یا نامتغیرهای خواص سطوح نامند. یعنی:

فرمول شماره ۳

$$I_x+I_y=I_{max}+I_{min}=I_{x'}+I_{y'}=\text{const}$$

$$I_xI_y-I_{xy}^2=I_{max}.I_{min}=I_{x'}I_{y'}-I_{x'y'}^2=\text{const}$$

مثال: در مثلث ABC ممان‌های دوم سطوح نسبت به محور متعامد xy برابر I_x و I_y است، اگر محور x به اندازه $45°$ بچرخد تا محور متعامد 'x و 'y بدست آید. تعیین کنید $I_{x'}$ و $I_{y'}$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر است.



گزینه ۱

$$I_{x'}=\frac{1}{3}I_x+\frac{1}{2}I_y$$
$$I_{y'}=\frac{1}{3}I_x-\frac{1}{3}I_y$$

گزینه ۲

$$I_{x'}=\frac{1}{2}I_x+\frac{1}{2}I_y$$
$$I_{y'}=\frac{1}{2}I_x+\frac{1}{2}I_y$$

گزینه ۳:

$$I_{x'}=0,\ I_{y'}=\frac{1}{2}I_y$$

گزینه ۴:

$$I_{x'}=\frac{1}{5}I_x-\frac{1}{6}I_y$$
$$I_{y'}=I_x-\frac{1}{3}I_y$$

جواب: طبق فرمول شماره۳ بایستی همواره رابطه زیر برقرار باشد.

$$I_x+I_y=I_{x'}+I_{y'}$$

لذا گزینه ۲ صحیح است. زیرا در گزینه ۲ داریم:

$$I_{x'}+I_{y'}=\frac{I}{2}I_x+\frac{I}{2}I_y+\frac{I}{2}I_x+\frac{1}{2}I_y=I_x+I_y$$

تذکر مهم: حتی اگر یک سطح سه‌بعدی در استاتیک مطرح شد، رابطه نامتغیر ممان‌های سطوح واقع در محورهای متعامد xyz و x'y'z' و محورهای 123 برقرار خواهد بود.

$$I_x+I_y+I_z=I_{x'}+I_{y'}+I_{z'}=I_1+I_2+I_3=\text{const}$$
$$I_xI_y+I_yI_z+I_zI_x-I_{xy}^2-I_{yz}^2-I_{zx}^2=I_1I_2+I_2I_3+I_3I_1=\text{const}$$
$$I_xI_yI_z-I_xI_{yz}^2$$

فرمول شماره ۴

$$I_x+I_y+I_z=I_{x'}+I_{y'}+I_{z'}=I_1+I_2+I_3=\text{const}$$
$$I_xI_y+I_yI_z+I_zI_x-I_{xy}^2-I_{yz}^2-I_{zx}^2=I_{x'}I_{y'}+I_{y'}I_{z'}+I_{z'}I_{x'}-I_{x'y}^2-I_{y'z'}^2-I_{z'x'}^2=I_1I_2+I_2I_3+I_3I_1=\text{const}$$

$$I_x I_y I_z - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{xz}^2 - I_z I_{xy}^2 + 2I_{xy} I_{yz} I_{zx} = I_{x'y'z'} - I_{x'} I_{y'z'} - I_{y'} I_{x'z'}^2 - I_{z'} I_{x'y'}^2 + 2I_{x'y'} I_{y'z'} I_{z'x'}$$
$$= I_1 I_2 I_3 = \text{const}$$

تذکر I_1 و I_2 و I_3 در واقع ماکزیمم و مینیمم و متوسط ممان دوم سطح می‌باشند (مانند تنش‌های دو سطحی $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ در مقاومت مصالح).

تذکر مهم: معمولاً در امتحان استاتیک مساله دو بعدی یعنی فرمول ۳ کاربرد بیشتری دارد، ولی در مقاومت مصالح فرمول ۴ (اگر فرمول ۴ را برحسب تنش‌ها بنویسیم) کاربرد بیشتری دارد. مثلاً فرمول زیر. برای راحتی دیگر تنش‌ها در محورهای x'y'z نوشته نمی‌شود و فقط در محورهای متعامد xyz و محورهای اصلی 1,2,3 نوشته می‌شود.

فرمول شماره ۵

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const}$$

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = \text{const}$$

$$\sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yx} \tau_{zx} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \text{const}$$

در فرمول بالا σ_1 ، σ_2، σ_3 تنش‌های اصلی می‌باشند.

در شرایط دو بعدی فرمول۵ را می‌توان مانند فرمول ۳ (اما برحسب تنش) نوشت که در کنکور اهمیت بالایی دارد.

فرمول ۶

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}$$

$$\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 = \text{const}$$

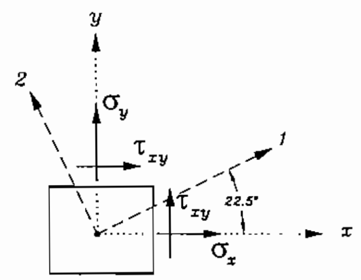
مثال مقاومتی: در نقطه‌ای از یک جسم نازک (تنش صفحه‌ای یا plane stress) مؤلفه‌های تنش نسبت به محور متعامد xy برابر σ_x و σ_y و τ_{xy} می‌باشد. اگر محور x را در جهت خلاف عقربه ساعت به اندازه 22.5 درجه بچرخانیم تا محور اصلی متعامد 2-1 ایجاد شود (تنش‌های اصلی روی محور 2-1 می‌باشند)، تنش‌های اصلی روی این دو محور به‌ترتیب $\sigma_1 = 40 Mp_a$ و $\sigma_2 = -40 Mp_a$ می‌باشند. مؤلفه‌های تنش‌های σ_x و σ_y و τ_{xy} از کدام‌یک از چهارگزینه زیر بدست می‌آید.

گزینه ۱:

$$\sigma_x = 40 Mp_a, \sigma_y = -40 Mp_a, \tau_{xy} = 0$$

گزینه ۲:

$$\sigma_x = 28 Mp_a, \sigma_y = 28 Mp_a, \tau_{xy} = 28 Mp_a$$



گزینه ۳:

$$\sigma_x = 28 Mp_a, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 28 Mp_a$$

گزینه ۴:

$$\sigma_x = -28 Mpa, \sigma_y = 28 Mpa, \tau_{xy} = -28 Mp_a$$

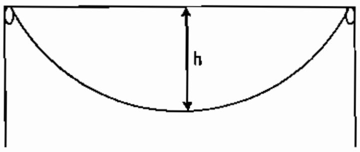
جواب:

از دانشجویان محترم تقاضا می‌گردد که سعی کنند، ابتدا این مساله را از روش اول (دایره مور) و روش دوم (ماتریس انتقال) به‌صورت کلی حل کنند (البته به در فرمول‌ها، به جای ممان‌های دوم سطح از مؤلفه‌های تنش استفاده نمایند).

ولی در امتحان کنکور به علت کمبود وقت از روش سوم یعنی فرمول۶ استفاده نمایند. یعنی سریعاً چهار گزینه داده شده را در فرمول ۶ قرار دهند و تحقیق کنند که کدام گزینه در دو فرمول ۶ صادق است. لذا به نظر می‌رسد. گزینه ۴ صحیح باشد.

سوالات کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۵:

۱ـ کابلی به طول $2L$ با عبور از روی دو پین واقع در یک سطح تراز افقی آویزان است. با صرف‌نظر از اصطکاک کابل با پین‌ها اگر شکم کابل h باشد طول قسمت‌های آویزان برابر است با:



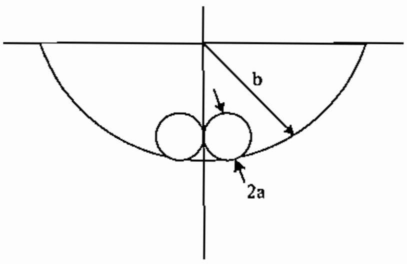
۱) $2L-h$

۲) $h+2L$

۳) $h+\sqrt{hL}$

۴) $h+1-\sqrt{2hL}$

۲ـ دو گره صاف به شعاع a و وزن W داخل کاسه کروی بدون اصطکاک ثابتی به شعاع b قرار می‌گیرند. با فرض $b=3a$ نسبت نیروی عکس‌العمل بین کره‌ها به عکس‌العمل کره و کاسه عبارت است از:



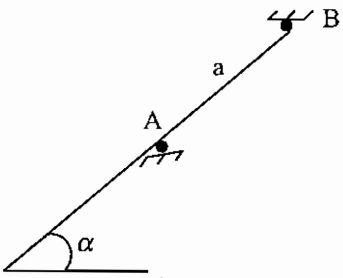
۱) 0.5

۲) 1

۳) 1.5

۴) 2

۳ـ دو پین A و B به فاصله a از یکدیگر در یک خط راست و با زاویه α نسبت به افق قرار گرفته‌اند. میله‌ای از روی A و زیر B می‌گذرد. با فرض ضریب اصطکاک μ بین میله و پین‌ها طول کوتاه‌ترین میله‌ای که در چنین وضعیتی در حال سکون می‌ماند چقدر است؟



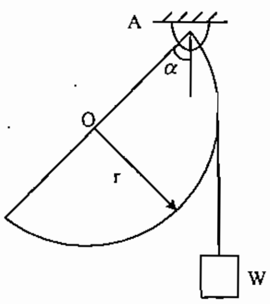
۱) $a\left(\frac{\tan\alpha-1}{2\mu}-1\right)$

۲) $a\left(\frac{\tan\alpha}{\mu}+1\right)$

۳) $a(\mu\tan\alpha+1)$

۴) $a(2\mu\tan\alpha-1)$

۴ـ یک دیسک نیم استوانه به شعاع r و وزن W مطابق شکل از نقطه A تعلیق شده است. مطلوبست نوشتن رابطه‌ای برای زاویه α اگر فاصله مرکز جرم دیسک تا نقطه O برابر $\frac{4r}{3\pi}$ باشد؟



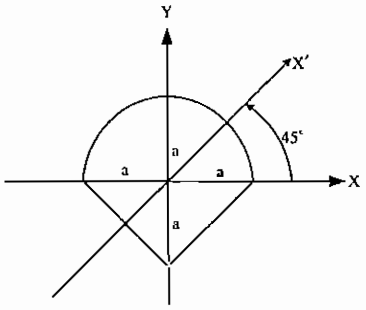
۱) $\frac{4}{3\pi}\sin\alpha+2\cos\alpha-1=0$

۲) $\frac{4}{3\pi}\cos\alpha+\sin\alpha-1=0$

۳) $\frac{4}{3\pi}\cos\alpha-2\sin\alpha+1=0$

۴) $\frac{4}{3\pi}\cos\alpha-\sin\alpha+1=0$

۵ـ در شکل روبرو اگر ممان دوم سطح حول محورهای X و Y به ترتیب I_{YY} و I_{XX} باشد، مطلوبست محاسبه ممان دوم سطح حول محوری X' که با محور X ها زاویه $45°$ می‌سازد؟



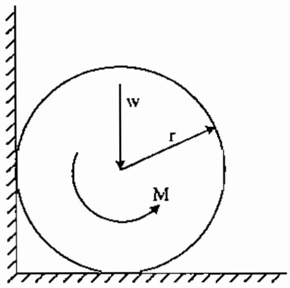
۱) $I_{XX} + I_{YY}$

۲) $\dfrac{I_{XX} + I_{YY}}{2}$

۳) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(I_{XX} + I_{YY})$

۴) $\sqrt{2}\,(I_{XX} + I_{YY})$

۶ـ مطلوبست محاسبهٔ کوپل مورد نیاز M که باعث شود چرخ شکل مقابل در شرف دوران قرار گیرد. ضریب اصطکاک با کلیه سطوح μ در نظر گرفته شود؟



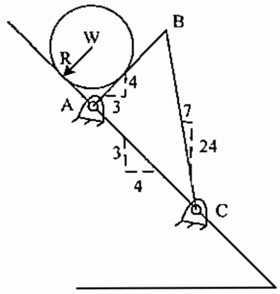
۱) $M = \mu Wr\left(\dfrac{1+\mu}{1+\mu^2}\right)$

۲) $M = \mu Wr(1+\mu)$

۳) $M = \mu Wr\left(\dfrac{1+\mu^2}{1+\mu}\right)$

۴) $M = \mu Wr(1+2\mu)$

۷ـ استوانه به وزن W و شعاع R برتاب ABC تکیه داده است اگر کلیه سطوح بدون اصطکاک بوده و طول AB برابر 2R باشد، مطلوبست محاسبه نیروی موجود در پین C:



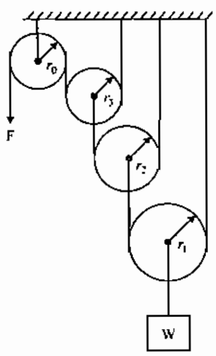
۱) $\dfrac{W}{2}$

۲) $\dfrac{W}{4}$

۳) $\dfrac{W}{8}$

۴) $\dfrac{3W}{8}$

۸ـ در شکل مقابل مقدار نیرو F را برحسب وزن وزنه (W) بدست آورید؟



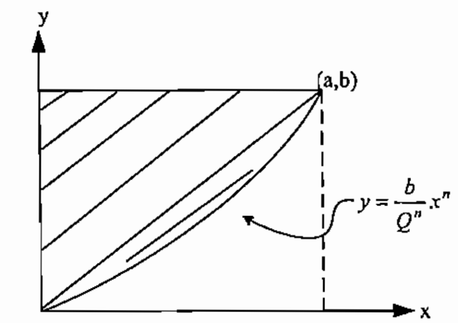
۱) $F = \dfrac{W}{4}$

۲) $F = \dfrac{W}{8}$

۳) $F = \dfrac{W}{12}$

۴) $F = \dfrac{W}{16}$

۹ ـ مطلوبست محاسبه $\overline{y}$ سطح هاشور خورده شکل مقابل:



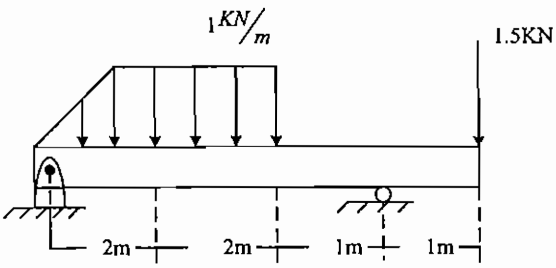
۱) $\frac{n}{n+1}b$

۲) $\frac{2n+1}{n+1}$

۳) $\frac{n+1}{2n+1}b$

۴) $\frac{n+1}{2(n+2)}b$

۱۰ ـ حداکثر گشتاور خمشی در تیر نشان داده شده عبارتست از:



۱) 1.827 کیلونیوتن بر متر

۲) 2.5 کیلو نیوتن بر متر

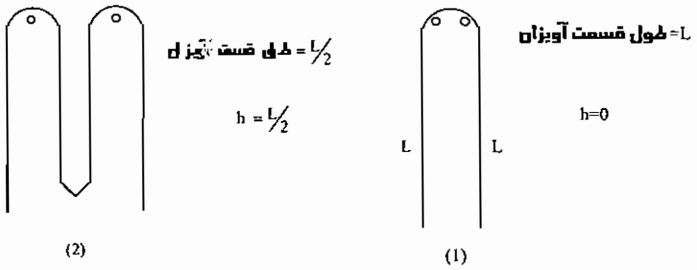
۳) 3.2 کیلو نیوتن بر متر

۴) -1.5 کیلونیوتن بر متر

پاسخ تشریحی کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۵:

۱ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با توجه به حالت‌های حدی زیر می‌توانیم گزینه صحیح را انتخاب کنیم:

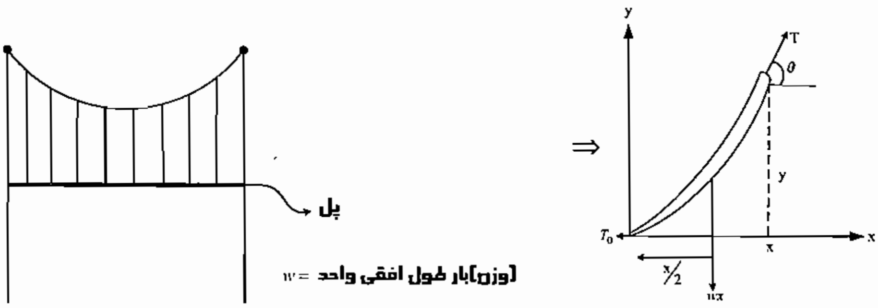


که با این حالت‌های حدی مشخص می‌شود که گزینه صحیح، گزینه ۴ می‌باشد.

نکته

۲ حالت معمول برای طناب‌های آویزان وجود دارد:

۱ـ کابل سهوی: که در این حالت کابل توسط یک وزنی که در جهت افقی دارای شدت ثابتی است آویزان است و در این حالت از وزن خود کابل نسبت به وزن خارجی مثل پل صرف‌نظر می‌شود.



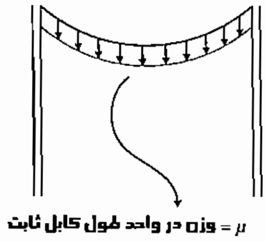
$$\sum F = 0 \ \Rightarrow \ \tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{wx^2}{T_0} + C$$

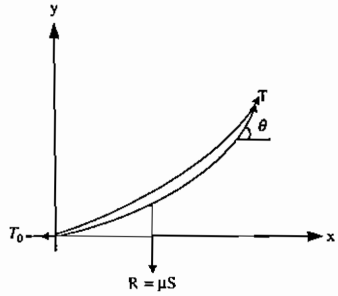
$$\text{با} \ x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{dy}{dx} = 0 \end{cases} \ \Rightarrow \ y = \frac{wx^2}{2T_0} \ \text{و} \ \text{طول کابل} \ S_A = \int_0^{S_A} ds = \int_0^{L_A} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

شرط

۲ـ کابل زنجیری: که در این حالت کابل توسط وزن خود آویزان است و در نتیجه وزن در واحد طول کابل ثابت می‌باشد.

پس در این حالت داریم:



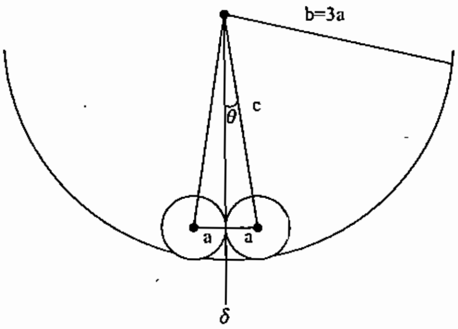


$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\mu}{T_0}\frac{ds}{dx}$$

---

۲ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

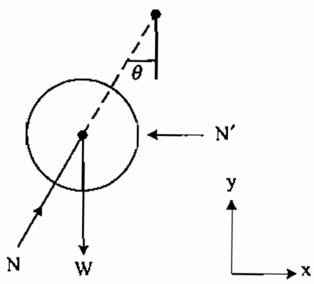
با توجه به هندسه شکل داریم:



$$c=b-a=3a-a=2a$$

$$\sin\theta=\frac{a}{c}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\theta=30^\circ$$

واضح است که خطی که از مرکز دایره‌ی کوچکتر به هم وصل می‌شود بر خط δ عمود است. همین‌طور می‌دانیم که نیروی تماس بین دوایر کوچک و بزرگ به دلیل عدم وجود اصطکاک فقط عمودی و در جهتی است که از مرکز دوایر می‌گذرد پس بنابراین برای دیاگرام آزاد یکی از دوایر کوچک داریم:

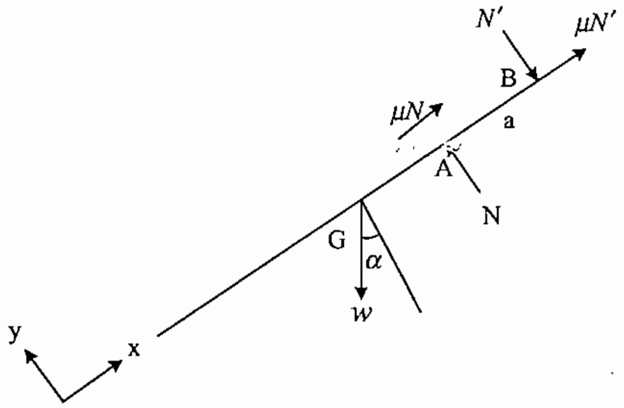


$$\sum F_x=0\quad\Rightarrow\quad N'=N\sin\theta=\frac{N}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{N'}{N}=\frac{1}{2}$$

جزوه پارسه برای مطالعه بیشتر به فصل ۵ جزوه استاتیک ارجاع داده می‌شود.

۳ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

برای دیاگرام آزاد میله داریم:



نکته

واضح است که برای تعادل میله، مرکز جرم آن که در وسط آن قرار دارد باید در زیر نقطهٔ A قرار بگیرد چون در غیراین‌صورت معادله مقابل گشتاور حول نقطه مرکز ثقل نقض می‌شود.

$$\sum M_G \neq 0$$

حال با فرض اینکه طول میله از A تا انتهای آن x باشد یعنی طول کل میله برابر $a + x$ باشد داریم:

$$\sum F_x = 0 \ (\text{در جهت میله}) \quad \Rightarrow \quad w\sin\alpha = \mu(N + N')$$

$$\sum F_y = 0 \ (\text{در جهت میله}) \Rightarrow w\cos\alpha + N' = N$$

$$\sum M_G = 0 \ (\text{طول مرکز ثقل}) \quad \Rightarrow \quad N\left[\frac{a+x}{2} - a\right] = N'\left[\frac{a+x}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad N(x-a) = N'(x+a)$$

با توجه به معادله گشتاور برای x خواهیم داشت:

$$x = \frac{a(N+N')}{(N-N')}$$

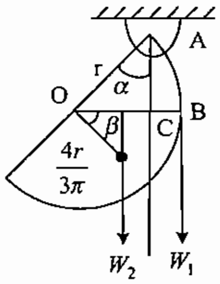
که برای صورت کسر در x از معادله اول و برای مخرج کسر از معادله دوم جایگذاری می‌کنیم:

$$x = \frac{\frac{a}{\mu} w\sin\alpha}{w\cos\alpha} = \frac{a\tan\alpha}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \text{طول کل میله} = x + a = a\left(1 + \frac{\tan\alpha}{\mu}\right)$$

۴ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

نکته

در اینگونه مسائل استاتیکی کشیدن شکل هندسی مناسب از مسئله برای حل و در ک آن بسیار کمک‌کننده می‌باشد مثلاً در اینجا واضح است که OB شعاع دایره می‌باشد و بر طناب عمود می‌شود و همین‌طور واضح است که زاویه β با α برابر است چون دو ضلع هر دو زاویه بر هم عمود می‌شوند.



حال برای حل تست داریم: با گشتاورگیری حول نقطه آویزان یعنی A خواهیم داشت:

$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; w_1\left(\overline{OB}-\overline{OC}\right) = w_2\left(\overline{OC}-\overline{OD}\right) \;\Rightarrow$$

$$w_1(r - r\sin\alpha) = w_2\left(r\sin\alpha - \frac{4r}{3\pi}\cos\beta\right) \;\Rightarrow$$

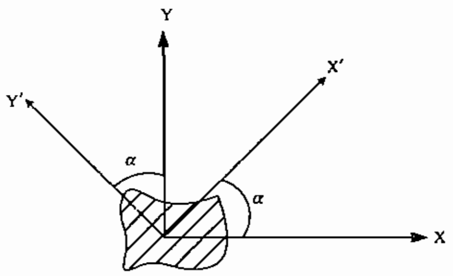
$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\beta\\ w_1=w_2=w\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; r(1-\sin\alpha) = r\left(\sin\alpha - \frac{4\cos\alpha}{3\pi}\right) \;\Rightarrow\; 2\sin\alpha - \frac{4}{3\pi}\cos\alpha - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{4}{3\pi}\cos\alpha - 2\sin\alpha + 1 = 0$$

جزوه پارسه برای مطالعه بیشتر به فصل ۲ جزوه استاتیک ارجاع داده می‌شود.

۵ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

نکته

با استفاده از آنالوگی ممان دوم سطوح با تنش در دایره مور برای یافتن ممان دوم سطح پس از دوران محورهای مختصات خواهیم داشت:



$$I_{X'X'} = I_{XX}\cos^2\alpha + I_{YY}\sin^2\alpha - I_{XY}\sin 2\alpha$$
$$I_{Y'Y'} = I_{YY}\cos^2\alpha + I_{XX}\sin^2\alpha + I_{XY}\sin 2\alpha$$
$$I_{X'Y'} = \frac{1}{2}(I_{XX} - I_{YY})\sin 2\alpha + I_{XY}\cos 2\alpha$$

با توجه به این نکته و اینکه اگر سطحی نسبت به محوری تقارن داشته باشد بنابراین ممان اینرسی‌های ضربی آن صفر می‌شود برای سطح مورد سوال در تست چون نسبت به محور Y تقارن دارد پس $I_{XY} = 0$ و در نتیجه داریم:

$$I_{X'X'} = I_{XX}\cos^2 45 + I_{YY}\sin^2 45 - I_{XY}\sin 90^\circ = \frac{I_{XX} + I_{YY}}{2}$$

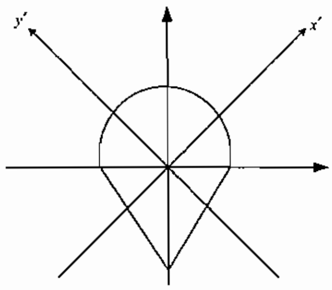
روش دوم:

نکته

همان‌طور که برای تنش در یک نقطه داشتیم که پس از دوران جمع مقادیر تنش عمودی در آن المان ثابت می‌ماند یعنی $\sigma_X + \sigma_Y + \sigma_Z = \sigma_{X'} + \sigma_{Y'} + \sigma_{Z'}$، برای ممان اینرسی سطوح هم خواهیم داشت که پس از دوران، جمع ممان اینرسی دوم حول محورها ثابت می‌مانند. یعنی $I_{XX} + I_{YY} + I_{ZZ} = I_{X'X'} + I_{Y'Y'} + I_{Z'Z'}$.

با استفاده از این نکته و اینکه نحوه گسترش سطح حول محور X' و Y' برابر است و در نتیجه $I_{X'X'} = I_{Y'Y'}$

$$I_{X'X'} + I_{Y'Y'} = I_{XX} + I_{YY} \quad \Rightarrow \quad I_{X'X'} = \frac{I_{XX} + I_{YY}}{2}$$



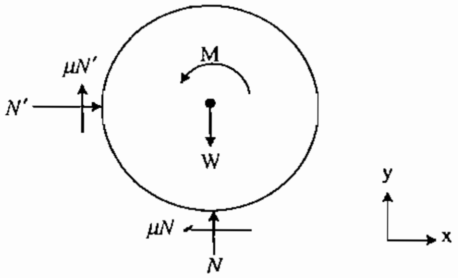
جزوه پارسه مشابه این تست در فصل ۶ جزوه استاتیک آمده است.

۶ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

نکته

نیروی اصطکاک لغزشی همیشه در جهتی است که با حرکت مخالفت کند.

برای این تست با رسم دیاگرام آزاد چرخ و توجه به جهت ممان (یعنی جهت چرخش) از نکته خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N' = \mu N$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \mu N' + N = W$$
$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow \mu(N + N')r = M$$

با توجه به سه فرمول بالا با حذف N و N′ برای M خواهیم داشت:

$$\mu^2 N + N = W \Rightarrow N = \frac{W}{1+\mu^2} \quad , \quad N' = \frac{\mu W}{1+\mu^2} \quad ,$$
$$\Rightarrow M = \frac{\mu r W}{1+\mu^2}(1+\mu)$$

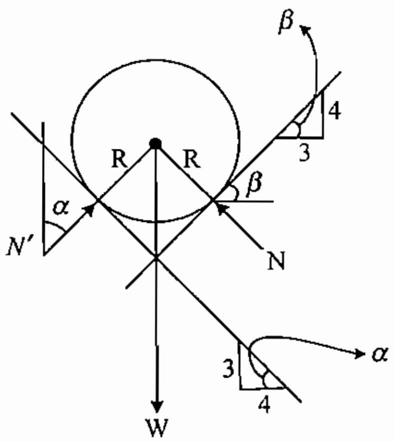
نکته

در آستانهٔ حرکت هنوز تعادل استاتیکی برقرار است.

جزوه پارسه **مشابه این تست در فصل ۳ جزوه استاتیک آمده است.**

۷ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

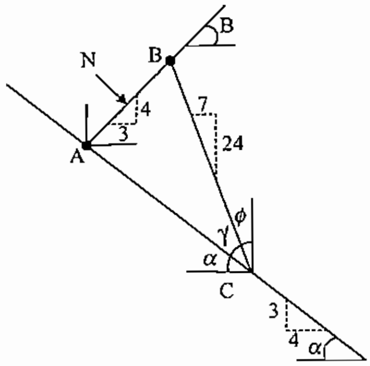
ابتدا دیاگرام آزاد را برای استوانه رسم می‌کنیم:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N\sin\beta = N'\sin\alpha \Rightarrow N\frac{4}{5} = N'\frac{3}{5}$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W = N\cos\beta + N'\cos\alpha = N\frac{3}{5} + N'\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow N = \frac{3}{5}w$$

حال برای برتاب ABC خواهیم داشت چون عضو BC یک عضو دو نیرویی است پس نیروی آن در جهت BC می‌باشد.

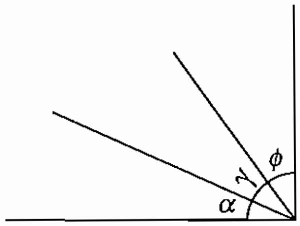


واضح است که AB بر AC عمود است چون:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}}{1-\frac{3}{4}\frac{4}{3}}=\frac{\frac{25}{12}}{0}=\infty$$

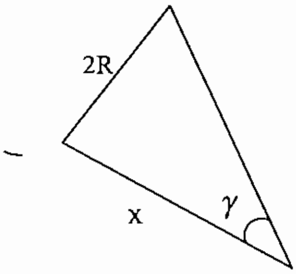
$$\Rightarrow \alpha+\beta=90^\circ$$

پس با توجه به عمود بودن AB بر AC (واضح است که فاصله نقطه اثر نیروی N تا A برابر R است.)



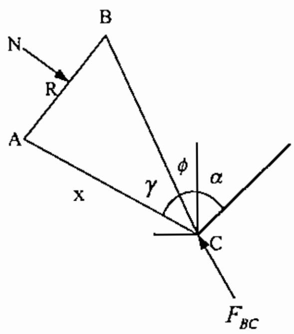
$$\alpha+\gamma+\phi=90 \quad\Rightarrow\quad \gamma=90-(\alpha+\phi) \quad\Rightarrow\quad \cot\gamma=\tan(\alpha+\phi)$$

$$\tan(\alpha+\phi)=\frac{\tan\alpha+\tan\phi}{1-\tan\alpha\tan\phi}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{7}{24}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{7}{24}}=\frac{72+28}{96-21}=\frac{100}{75}=\frac{4}{3}$$



$$\cot\gamma=\frac{x}{2R} \quad\Rightarrow\quad \frac{4}{3}=\frac{x}{2R} \quad\Rightarrow\quad x=\overline{AC}=\frac{8}{3}R$$

حال برای تعادل برتاب با گشتاورگیری حول نقطه A داریم:



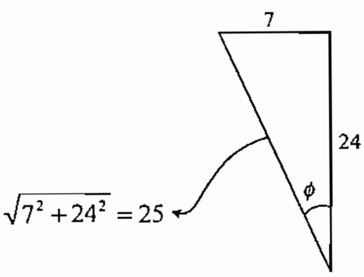
$$\sum M_A=0 \quad\Rightarrow\quad NR=F_{BC}\cos(\phi+\alpha)\times\overline{AC}$$

$$\cos(\phi+\alpha)=\cos\phi\cos\alpha-\sin\phi\sin\alpha=\frac{24}{25}\times\frac{4}{5}-\frac{7}{25}\times\frac{3}{5}=\frac{75}{125}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\phi+\alpha)=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \sum M_A=0 \quad\Rightarrow\quad NR=F_{BC}\times\frac{3}{5}\times\frac{8}{3}R \quad\Rightarrow$$

$$\frac{3}{5}W\times R=F_{BC}\times\frac{8}{5}R \quad\Rightarrow\quad F_{BC}=\frac{3}{8}W$$



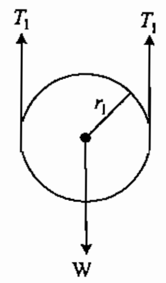
۸ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

نکته

با صرف‌نظر از وزن طناب، کشش در سراسر طناب یکسان خواهد بود.

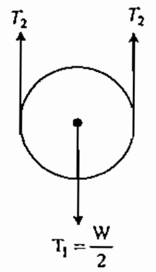
حال برای تست برابری هر قرقره به ترتیب داریم:

قرقره r_1 :



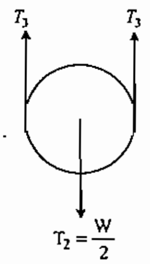
$\Rightarrow T_1 = \frac{W}{2}$

قرقره r_2 :



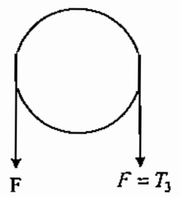
$\Rightarrow T_2 = {T_1}/{2} = \frac{W}{4}$

قرقره r_3 :



$\Rightarrow T_3 = \frac{T_2}{2} = \frac{W}{8}$

قرقره r_4 :

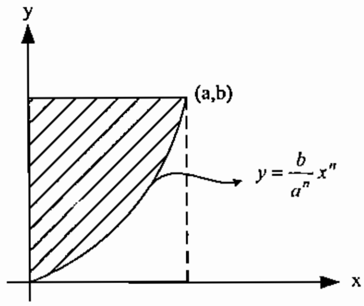


$\Rightarrow F = T_3 = \frac{W}{8}$

جزوه پارسه مشابه این تست در فصل ۲ جزوه استاتیک آمده است.

۹ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\bar{y}=\frac{\int ydA}{\int dA}=\frac{\int yxdy}{\int xdy}\quad\Rightarrow\quad y=\frac{b}{a^n}x^n\quad\Rightarrow\quad x=a\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$



$$\Rightarrow \bar{y}=\frac{\int_0^b \frac{a}{b^{\frac{1}{n}}}y^{\frac{1}{n}+1}dy}{\int_0^b \frac{a}{b^{\frac{1}{n}}}y^{\frac{1}{n}}dy}=\frac{\frac{a}{b^{\frac{1}{x}}}\left[\frac{n}{2n+1}y^{\frac{2n+1}{n}}\right]_0^b}{\frac{a}{b^{\frac{1}{n}}}\left[\frac{n}{n+1}y^{\frac{n+1}{n}}\right]_0^b}=\frac{n+1}{2n+1}b$$

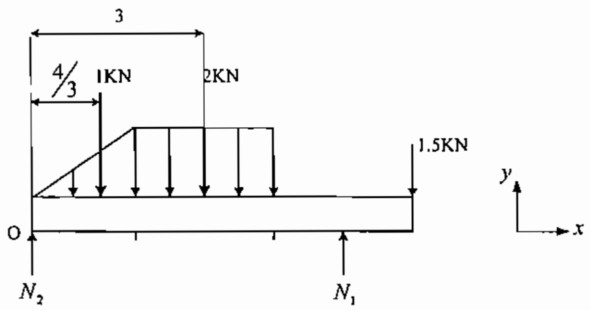
جزوه پارسه برای مطالعه بیشتر به فصل ۶ جزوه استاتیک ارجاع داده می‌شود.

۱۰ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

ابتدا دیاگرام آزاد تیر را رسم می‌کنیم و مقادیر نیرو در تکیه‌گاه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \sum M_0=0 \quad\Rightarrow\quad N_1=\frac{49}{15}KN$$

$$\Rightarrow \sum F_y=0 \quad\Rightarrow\quad N_2=\frac{18.5}{15}KN$$



حال برای تعیین گشتاور خمشی ماکزیمم در نقاط اعمال بار گشتاور را به دست می‌آوریم: در دو انتها که گشتاور برابر صفر می‌باشد و در نقطه B گشتاور برابر $1.5\,KN.m$ می‌باشد و برای $x\in[0.4]$ داریم:

$$x\in[0\,,2]\quad\Rightarrow\quad M_1=N_2x-\frac{1}{2}x\times\frac{x}{2}\times\frac{x}{3}=\frac{18.5}{15}x-\frac{x^3}{12}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial M_1}{\partial x}=\frac{18.5}{15}-\frac{x^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow x\approx 2.2\notin[0\,,2]\quad\Rightarrow\quad x\in[0\,,2]\;\; M_{1_{\max\atop x=2}}=1.8KN.m$$

$$x\in[2\,,4]\quad\Rightarrow\quad M_2=N_2x-1\left(x-\frac{4}{3}\right)-(x-2)\frac{(x-2)}{2}=\frac{18.5}{15}-x+\frac{4}{3}-\frac{x^2}{2}-2+2x$$

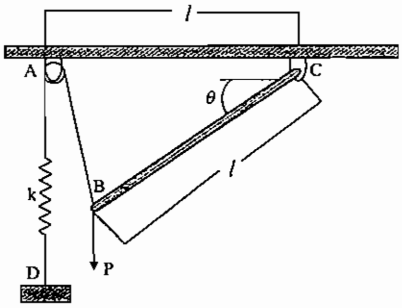
$$M_2=\frac{33.5}{15}x-\frac{2}{3}-\frac{x^2}{2}\Rightarrow\frac{\partial M_2}{\partial x}=\frac{33.5}{15}-x=0\Rightarrow x=\frac{33.5}{15}\in[2\,,4]$$

$$\Rightarrow M_2\left(x=\frac{33.5}{15}\right)=1.827KN.m$$

در کل $\Rightarrow M_{max}=1.827\,KN.m$

سوالات کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۶:

۱ـ نیروی قائم p بر انتهای میله BC که از وزن آن صرف‌نظر می‌شود اعمال می‌گردد وقتی $\theta = 0$ است هیچ کشش در فنر وجود ندارد مقدار زاویه θ را برحسب پارامترهای p و l و k به دست آورید؟



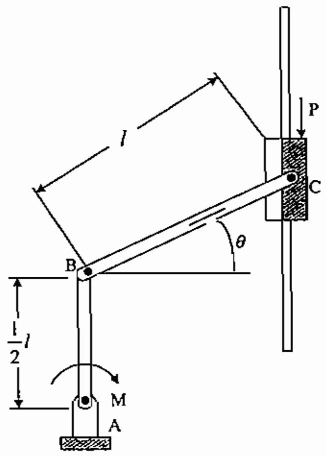
۱) $\tan\theta = \frac{p}{kl}$

۲) $\cot g\theta = \frac{p}{kl}$

۳) $\tan\theta = \frac{p}{2kl}$

۴) $\cot g\theta = \frac{p}{2kl}$

۲ـ مقدار M را برای حالت تعادل در شکل مقابل برحسب p و l و θ به دست آورید. از وزن کلیه اعضا صرف‌نظر می‌شود.



۱) $M = pl\tan\alpha$

۲) $M = \frac{pl}{2}\tan\theta$

۳) $M = pl\cot g\theta$

۴) $M = \frac{pl}{2}\cot g\theta$

۳ـ یک خودرو با سرعت اولیه V_0 در یک جاده افقی در دنده خلاص در حال حرکت است و پس از طی مسافت d می‌ایستد. در مورد نیروی $\vec{F}$ وارده از زمین به هر چرخ، کدام گزینه برتر است؟ فرض کنید مقاومت هوا قابل صرف‌نظر نیست.

۱) مؤلفه ا فقی نیرو به سمت عقب است و گشتاور ناشی از نیروی $\vec{F}$ حول محور چرخ هم‌جهت چرخش چرخ است.

۲) مؤلفه افقی نیرو به سمت عقب است و گشتاور ناشی از نیروی $\vec{F}$ حول محور چرخ خلاف جهت با چرخش چرخ است.

۳) مؤلفه افقی نیرو صفر است و گشتاو ناشی از نیروی $\vec{F}$ حول محور چرخ صفر است.

۴) مؤلفه افقی نیرو به سمت عقب است و گشتاور ناشی از نیروی $\vec{F}$ حول محور چرخ صفر است.

۴ـ در مورد ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s و جنبشی μ_k گزینه برتر را انتخاب کنید.

۱) $0 \le \mu_k \le \mu_s \le 1$

۲) $0 \le \mu_k \le \mu_s$

۳) $\mu_s \ge 0, 0 \le \mu_k \le 1$

۴) $-1 \le \mu_k \le 1$ و μ_s همه اعداد مثبت و منفی

۵ ـ یک دانشجوی کیف به دست غذای خود را از آشپزخانه دانشگاه در یک سینی مستطیل شکل می‌گیرد و با دست دیگر به سمت میز غذاخوری می‌برد. به او توصیه می‌کنید کدام نقطه سینی را بگیرد؟

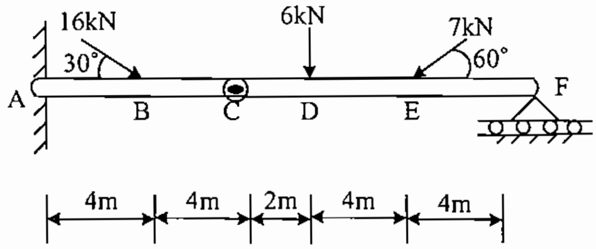
۱) گوشه سینی

۲) وسط لبه کوتاه‌تر

۳) وسط لبه بلندتر

۴) تفاوتی نمی‌کند، زیرا در هر صورت تمام وزن سینی را باید حمل کند.

۶ ـ مقدار عکس‌العمل در تکیه‌گاه A را به دست آورید.



۱) $A_x = 8.256$	۲) $A_x = 10.356$	۳) $A_x = 17.356$	۴) $A_x = 18.356$
$A_y = 10.356$	$A_y = 18.256$	$A_y = 2.256$	$A_y = 10.256$
$M_A = 68.5$	$M_A = 90.05$	$M_A = 68.5$	$M_A = 90.05$

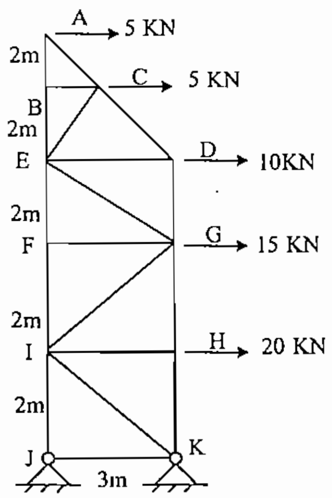
۷ ـ نیروی عضو DE از خرپای شکل مقابل برابر کدام است؟

۱) $DE = 22.5\,kNT$

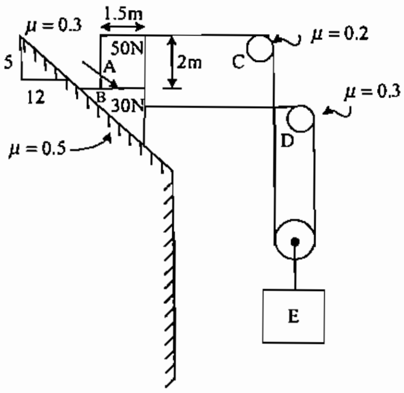
۲) $DE = 30\,kNT$

۳) $dE = 32.5\,kNT$

۴) $DE = 37.5\,kNT$



۸ـ بزرگ‌ترین مقدار وزن بلوک E را محاسبه کنید بدون اینکه حرکتی به وجود آید؟



۱) $w = 8.15\,N$

۲) $w = 2.96\,N$

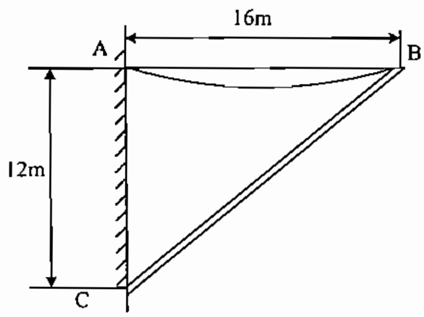
۳) $w = 35.8\,N$

۴) $w = 36.2\,N$

۹ـ نیروی $F = 100\,KN$ در امتداد قطر مکعبی با ابعاد واحد اعمال می‌شود به‌طوری که کلیه مؤلفه‌های آن در امتداد سه ضلع مکعب مثبت است. تصویر این نیرو در امتداد بردار $\vec{r} = 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) $\frac{100}{\sqrt{78}}\,kN$ ۳) $\frac{300}{\sqrt{78}}\,kN$ ۴) $100\,kN$

۱۰ـ میله یکنواخت 20 نیوتنی که در C به دیوار لولا شده است به کمک کابل یکنواخت 4 نیوتنی نگهداشته شده است. مطلوب است حداکثر زاویه کابل با افق.



۱) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

۲) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$

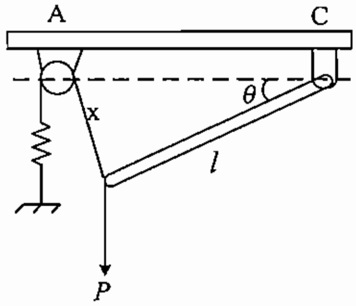
۳) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$

۴) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$

پاسخ تشریحی کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۶:

۱ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

ابتدا نیروی فنر را به دست می‌آوریم و سپس با گشتاورگیری حول نقطه C حل می‌کنیم.



برای θهای کوچک $x = l\sin\theta$ = جابجایی فنر

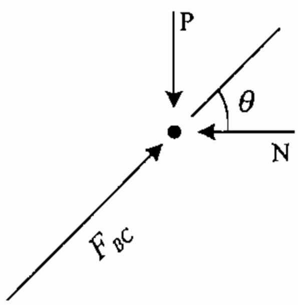
$k\ell\sin\theta$ = جابجایی $\times k$ = نیروی فنر

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow kl\sin\theta \times l = P\cos\theta \times l \Rightarrow \tan\theta = \frac{P}{kl}$$

جزوه پارسه برای مطالعه بیشتر به فصل ۷ جزوه استاتیک ارجاع داده می‌شود.

۲ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با توجه به اینکه عضو BC عضو دو نیرویی است پس نیروی آن در راستای BC می‌باشد.

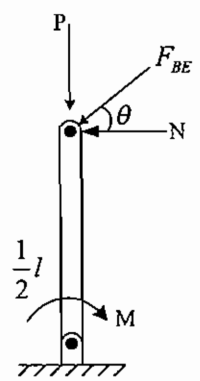


$$\Rightarrow \frac{P}{N} = \tan\theta \Rightarrow N = P\cot\theta$$

حال با گشتاورگیری حول A خواهیم داشت.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M + Pl\cos\theta = N\left(\frac{1}{2}l + l\sin\theta\right) = P\cot\theta\left(\frac{1}{2}l + l\sin\theta\right) \Rightarrow M = \frac{1}{2}Pl\cot\theta$$

یا از روش آسان‌تر با انتقال F_{BC} به مفاصل B و گشتاورگیری حول A باز خواهیم داشت:



$$\Rightarrow M = N\frac{1}{2}l = P\cot\theta\frac{1}{2}l = \frac{Pl}{2}\cot\theta$$

جزوه پارسه برای مطالعه بیشتر به فصل ۲ جزوه استاتیک ارجاع داده می‌شود.

۳ ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

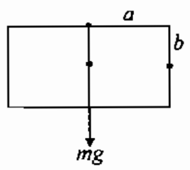
با توجه به اینکه چرخ پس از مدتی می‌ایستد پس واضح است که نیرو باید در جهتی باشد که با چرخش اتومبیل مخالفت کند و گشتاوری مخالف جهت چرخش به چرخ وارد کند پس نیروی وارد از زمین به چرخ به سمت جلو می‌باشد و در نتیجه هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

۴ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که واضح است ضریب اصکاک هیچ‌گاه منفی نمی‌باشد و همیشه ضریب اصطکاک ایستایی از ضریب اصطکاک جنبشی بیشتر یا مساوی می‌باشد و همین‌طور ضرایب اصطکاک تا مقادیر بسیار بزرگ هم می‌توانند وجود داشته باشد (مثلاً دو چرخندهٔ درگیر)

۵ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که بدیهی است با گرفتن وسط لبهٔ بلندتر گشتاور انتقالی به دست دانشجو از وزن سینی می‌نیمم خواهد بود.

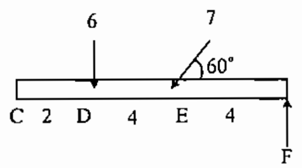


$b < a \Rightarrow mgb < mga$

جزوه پارسه برای مطالعه بیشتر فصل ۱ جزوه استاتیک ارجاع داده می‌شود.

۶ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با گشتاورگیری نیمه سمت راست تیر حول پین C (چون پین C گشتاوری تحمل نمی‌کند) نیروی عمودی در مفصل F به دست می‌آید:



$$\sum M_C = 0 \;\Rightarrow\; F \times 10 = 6 \times 2 + 7\sin 60 \times 6 \;\Rightarrow\; F = 4.83\,\text{N}$$

حال برای کل تیر داریم:

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; 16\cos 30 - 7\cos 60 - Ax = 0 \;\Rightarrow\; Ax = 10.35\text{N}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; Ay - 16\sin 30 - 6 - 7\sin 60 + 4.83 = 0 \;\Rightarrow\; Ay = 15.33\,\text{N}$$

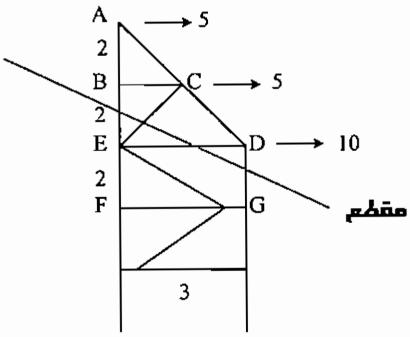
$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; M - 8 \times 4 - 6 \times 10 - 7\sin 60 \times 14 + 4.83 \times 18 = 0 \;\Rightarrow\; M_A = 89.9$$

که احتمالاً جواب گزینه ۲ منظور بوده است.

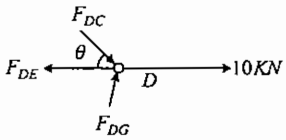
راه‌حل تستی: با توجه به اینکه A_x در هر 4 گزینه متفاوت می‌باشد پس با محاسبهٔ A_x به راحتی می‌توان گزینه ۲ را انتخاب کرد.

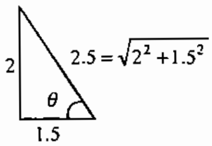
جزوه پارسه برای مطالعه بیشتر به فصل ۴ جزوه استاتیک ارجاع داده می‌شود.

۷ ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.



با زدن مقطعی به‌صورت روبه‌رو و گشتاورگیری نیمه بالایی مقطع حول E ، گشتاور ناشی از F_{DE} }، Equation.DSMT4 EMBED F_{CE} و F_{BE} حذف می‌شود و در نتیجه نیروی F_{DG} به دست می‌آید و سپس با تحلیل مفصل D نیروی عضو DE به دست می‌آید.





$$\sum M_E=0 \Rightarrow 5\times4+5\times2=F_{DG}\times3 \Rightarrow F_{DG}=\frac{30}{3}KN=10KN$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow F_{DC}\sin\theta=F_{DG} \Rightarrow F_{DC}=10\times\frac{2.5}{2}=\frac{50}{4}KN$$

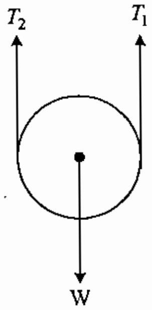
$$\sum F_x=0 \Rightarrow -F_{DC}\cos\theta+F_{DE}=10 \Rightarrow -\frac{50}{4}\times\frac{1.5}{2.5}+F_{DE}=10$$

$$\Rightarrow F_{DE}=7.5+10=17.5KN$$

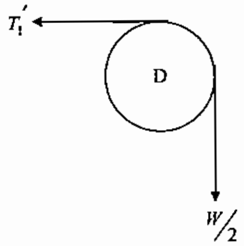
جزوه پارسه مشابه این تست در فصل ۳ جزوه استاتیک آمده است.

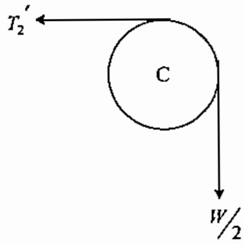
۸ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

ابتدا فرض می‌کنیم که بزرگ‌ترین مقدار بلوک E برابر w باشد آنگاه برای قرقره داریم:



$$\Rightarrow \quad T_1=T_2=\frac{w}{2}$$





حال برای هر کدام از قرقره‌های D و C خواهیم داشت:

(با توجه به رابطه اصطکاک در قرقره‌ها $\frac{T_1}{T_2}=e^{\mu\theta}$) :

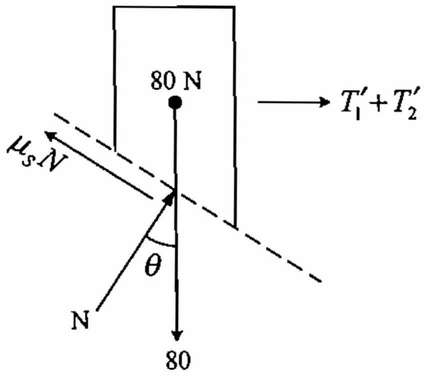
در اینجا زاویه تماس $\theta=90°$ می‌باشد پس داریم:

$$\frac{\frac{w}{2}}{T_1'}=e^{\mu_D\theta} \quad , \quad \frac{\frac{w}{2}}{T_2'}=e^{\mu_c\theta}$$

با توجه به اینکه $\mu_C = 0.2$ و $\mu_D = 0.3$ خواهیم داشت:

$$T_1' = \frac{w}{2}e^{-\mu_D\theta} = \frac{w}{2}e^{-\frac{3\pi}{20}} \quad , \quad T_2' = \frac{w}{2}e^{-\mu_C\theta} = \frac{w}{2}e^{-\frac{\pi}{10}}$$

حال اگر فرض کنیم کل مجموعه در آستانهٔ لغزش باشد پس می‌توان به جای 2 بلوک یک بلوک 80 نیوتنی قرار داد و داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} N = 80\cos\theta - (T_1'+T_2')\sin\theta \\ \mu_s N = 80\sin\theta + (T_1'+T_2')\cos\theta \end{cases} \Rightarrow T_1'+T_2' = \frac{80(\mu_s\cos\theta - \sin\theta)}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}$$

حال مقدار $T_1'+T_2'$ را محاسبه می‌کنیم با توجه به اینکه $\tan\theta = \frac{5}{12}$ و $\mu_s = 0.5$ خواهیم داشت:

$$T_1'+T_2' = \frac{80(\mu_s - \tan\theta)}{1+\mu_s\tan\theta} = \frac{80\left(0.5-\frac{5}{12}\right)}{1+0.5\times\frac{5}{12}} = \frac{160}{29}$$

حال برای چک کردن اینکه این مقدار حداکثر وزن بلوک E را تأمین می‌کند. حرکت بلوک A را به تنهایی بررسی می‌کنیم. پس نیروی مخالف حرکت اصطکاکی برای بلوک A $\mu_s' N$ می‌باشد که برابر $0.3\times 50 = 15N$ می‌باشد که از جمع $T_1'+T_2'$ در این‌حالت هم بیشتر است پس ابتدا 2 بلوک با هم شروع به حرکت می‌کنند.

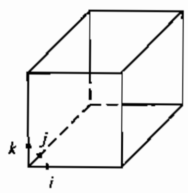
حال که $T_1'+T_2'$ برای حداکثر مقدار وزن بلوک پیدا شد خواهیم داشت:

$$T_1'+T_2' = \frac{w}{2}\left(e^{-\frac{3\pi}{20}} + e^{-\frac{\pi}{10}}\right) \Rightarrow \frac{160}{29} = \frac{w}{2}\left(e^{-\frac{3\pi}{20}} + e^{-\frac{\pi}{10}}\right) \Rightarrow \frac{w}{2} = \frac{160}{29\times 1.354} \Rightarrow w = 8.145N$$

جزوه پارسه برای مطالعه بیشتر به فصل اصطکاک جزوه استاتیک ارجاع داده می‌شود.

۹ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

ابتدا نیروی در راستای قطر را به‌صورت برداری می‌نویسیم:



$$\text{برداریکه در راستای قطر} \Rightarrow n = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$$

$$\text{نیروی } \vec{F} = \frac{100}{\sqrt{3}}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$$

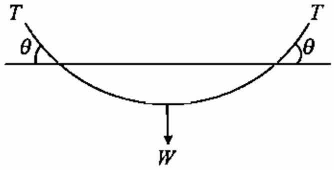
برای محاسبهٔ مؤلفه $\vec{F}$ در راستای بردار موردنظر از ضرب داخلی دو بردار استفاده می‌کنیم:

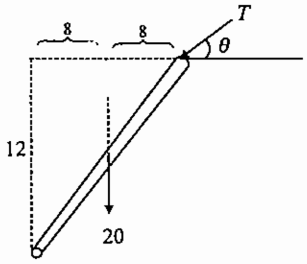
$$\text{در راستای } \overline{V} \text{ مؤلفه } F \Rightarrow \overline{F_V} = \vec{F}.\bar{V} = \frac{100}{\sqrt{3}}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}).\left(\frac{3\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}}{\sqrt{26}}\right) = \frac{100}{\sqrt{78}}(3+1-4) = 0$$

۱۰ــ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

حداکثر زاویه طناب با افق در لبه‌های طناب اتفاق می‌افتد.

برای طناب $\Rightarrow 2T\sin\theta = w = 4 \quad \Rightarrow \quad T\sin\theta = 2(\mathrm{I})$





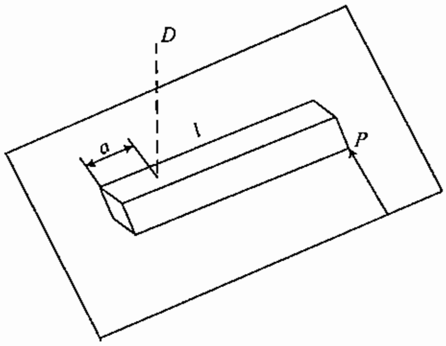
برای میله $\Rightarrow \sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad 20\times 8 + T\sin\theta\times 16 = T\cos\theta\times 12$

$$\overset{(\mathrm{I})}{\Rightarrow} \quad 20\times 8 + 2\times 16 = T\cos\theta\times 12 \quad \Rightarrow \quad 192 = T\cos\theta\times 12\ (\mathrm{II})$$

$$\frac{(\mathrm{I})}{(\mathrm{II})} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{2\times 12}{192} = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\frac{1}{8}$$

سوالات کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۷:

۱ـ میله یکنواخت به وزن W و طول l روی یک سطح افقی قرار گرفته است. اگر ضریب اصطکاک بین میله و سطح μ باشد، رابطه‌ای برای نیروی افقی P که در انتهای میله اعمال می‌شود و میله را به حرکت درمی‌آورد، به‌دست آورید.



۱) $0.414\mu W$

۲) $0.5\mu W$

۳) $0.516\mu W$

۴) μW

۲ـ مختصات مرکز سطح ناحیه محصور بین دو منحنی $y = x^3$ و $x = y^2$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

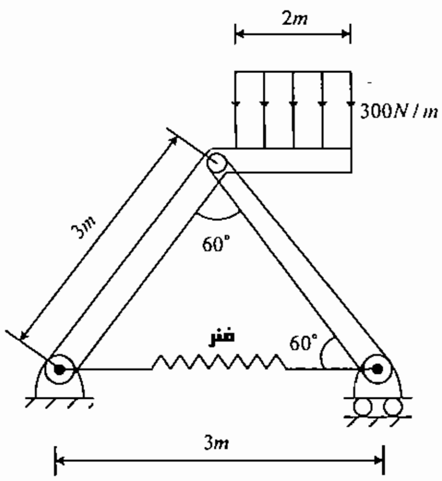
۱) $\overline{x} = 0$ و $\overline{y} = \frac{12}{25}$

۲) $\overline{x} = \frac{12}{25}$ و $\overline{y} = \frac{3}{7}$

۳) $\overline{x} = \frac{3}{7}$ و $\overline{y} = \frac{12}{25}$

۴) $\overline{x} = \frac{12}{25}$ و $\overline{y} = 0$

۳ـ در مجموعه مفصلی نشان داده شده، نیروی وارد شده بر فنر چقدر است؟



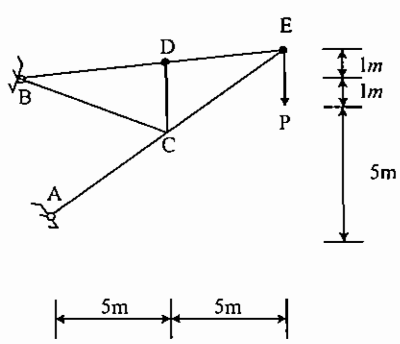
۱) $\frac{500}{3}$N

۲) $\frac{500\sqrt{3}}{3}$N

۳) $500\sqrt{3}$N

۴) 1500N

۴ـ خرپای داده شده نیروی P را در اتصال E حمل می‌کند. نیرو در عضو DC کدام است؟



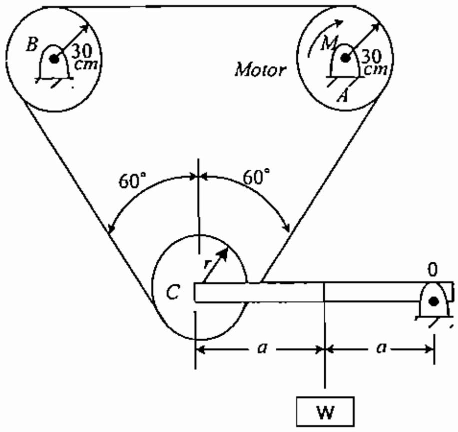
۱) $-2.78P$

۲) $-2.44P$

۳) $-2.32P$

۴) $0P$

۵ ـ موتور A قدرت را توسط یک تسمه به محور B منتقل می‌کند. چرخ هرزگرد C اصطکاک در مقابل چرخش ندارد. ضریب اصطکاک بین تسمه و چرخ برابر $\mu = \frac{2}{\pi}$ است. رابطه حداکثر لنگر (گشتاور) چرخشی قابل انتقال با W برابر است با:



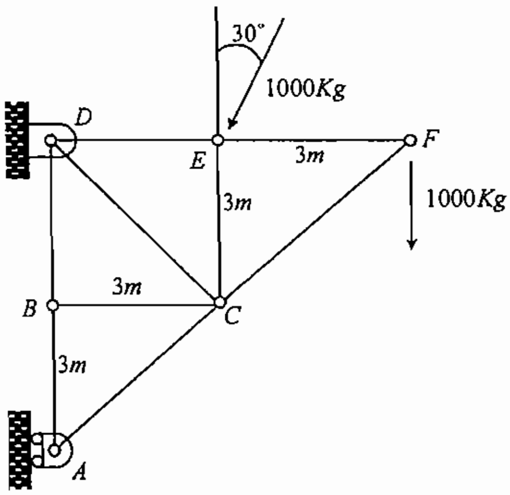
۱) $M_{max} = \frac{3}{20} W$

۲) $M_{max} = \frac{20}{3} W$

۳) $M_{max} = \frac{3}{20} W e^{\frac{5}{3}}$

۴) $M_{max} = \frac{3}{20} W \left(e^{\frac{5}{3}} - 1 \right)$

۶ ـ در خرپای داده شده در شکل، نیروی منتقله توسط عضو DC برابر است با:



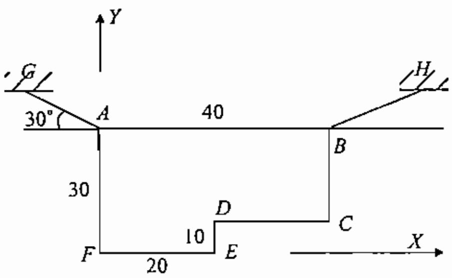
۱) 250kg کششی

۲) 250kg فشاری

۳) $250\sqrt{6}$kg کششی

۴) 0kg

۷ ـ صفحه یکنواخت ABCDEFA به جرم m توسط دو طناب، مطابق شکل، در صفحه قائم آویزان است: زاویه طناب BH با خط افقی AB برابر است با:



۱) $\tan\theta = \frac{9}{11\sqrt{3}}$

۲) $\tan\theta = \frac{4}{11\sqrt{3}}$

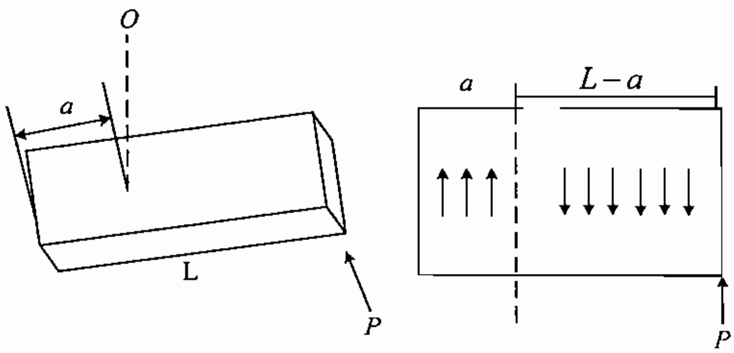
۳) $\tan\theta = \frac{11\sqrt{3}}{9}$

۴) $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

پاسخ تشریحی کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۷:

۱ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

پس از اعمال نیرو P و شروع حرکت میله، میله به‌صورت آنی دارای چرخش محض حول O، یا حرکت مرکز جرم و چرخش حول مرکز جرم خواهد داشت:



در آستانه حرکت ← انتقالی $\rightarrow \sum F=0 \rightarrow P+a\frac{W}{L}\mu=(L-a)\mu\frac{W}{L}$ (I)

در آستانه حرکت ← دورانی حول O $\rightarrow \sum M=0 \rightarrow P(L-a)=\frac{(L-a)^2}{2}\mu\frac{W}{L}+\frac{a^2}{2}\mu\frac{W}{L}$ (II)

$(I) \rightarrow a=\frac{1}{2}\left(L-\frac{PL}{\mu W}\right)$ با جایگذاری در (II)

$$P\left(\frac{L}{2}+\frac{PL}{2\mu W}\right)=\frac{\mu W}{2L}\left[L^2-L^2+\frac{PL^2}{\mu W}+\frac{1}{2}L^2+\frac{1}{2}\frac{P^2L^2}{\mu^2W^2}-\frac{PL^2}{\mu W}\right]$$

$\rightarrow P^2\left(\frac{1}{4}\frac{L}{\mu W}\right)+P\left(\frac{L}{2}\right)-\frac{1}{4}\mu WL=0$:P معادله درجه 2 برحسب

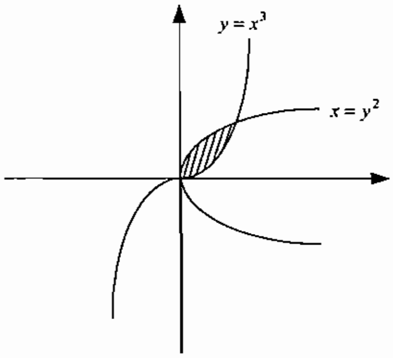
$$P=\frac{\frac{-L}{2}\pm\sqrt{\frac{L^2}{4}+\frac{L^2}{4}}}{\frac{1}{2}\frac{L}{\mu W}}=\mu W\left(-1\pm\sqrt{2}\right)=\begin{cases}-2.414\mu W & \text{غ‌ق‌ق}\\ 0.414\mu W & \text{ق‌ق}\end{cases}$$

جزوه پارسه برای مطالعه بیشتر به فصل ۵ جزوه استاتیک ارجاع داده می‌شود.

۲ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

ابتدا تلاقی دو منحنی را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}x=y^2 \rightarrow y=\sqrt{x}\\ y=x^3\end{array}\right\}\sqrt{x}=x^3 \rightarrow x=0,1$$



از روش شکل بدیهی است که مرکز سطح در نقطه‌ای است که $\begin{cases}\bar{x}\neq 0\\ \bar{y}\neq 0\end{cases}$ پس یا گزینه ۲ درست می‌باشد یا گزینه ۳. بنابراین با محاسبه $\bar{x}$ یا $\bar{y}$ جواب به‌دست می‌آید.

$$\bar{x}=\frac{Q_y}{A}=\frac{\int x dA}{A}=\frac{\int x y_{dif} dx}{\int y_{dif} dy}=\frac{\int_0^1 x\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx}{\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx}=\frac{\left.\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1}{\left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{12}}=\frac{12}{25}$$

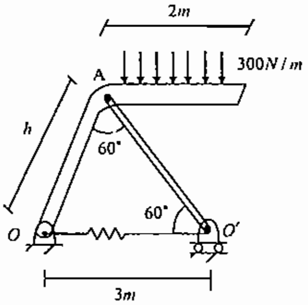
$$\bar{y}=\frac{Q_x}{A}=\frac{\int y dA}{A}=\frac{\int y x_{dif} dy}{\int x_{dif} dy}=\frac{\int_0^1 y\left(y^2-\sqrt[3]{y}\right)dy}{\int_0^1\left(y^2-\sqrt[3]{y}\right)dy}=\frac{\left.\frac{1}{4}y^4-\frac{3}{7}y^{\frac{7}{3}}\right]_0^1}{\left.\frac{1}{3}y^3-\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}\right]_0^1}=\frac{\frac{-5}{28}}{\frac{-5}{12}}=\frac{3}{7}$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

جزوه پارسه حل مشابه این تست در فصل ۸ (صفحه ۶۶) جزوه استاتیک آمده است.

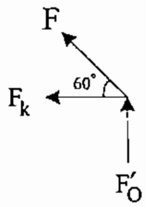
۳ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

ابتدا با گشتاورگیری نیروهای خارجی کل مجموعه حول O، نیروی عمودی O' را به‌دست می‌آوریم و سپس با بررسی نیروهای مفصل O'، نیروی فنر را به‌دست می‌آوریم:



$$(300\times2)(1+1.5)+F_{O'}\times3=0 \quad\rightarrow\quad F_{O'}=-500N$$

از آنجا که عضو AO' یک عضو دو نیرویی است در نتیجه نیروی F در امتداد عضو است.



$$\rightarrow\ F\sin 60 = F_{O'} \ \rightarrow\ F = \frac{1000}{\sqrt{3}} \ \rightarrow\ F_k = F\cos 60 = \frac{1000}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{500}{\sqrt{3}} \ \rightarrow\ F_{k\,(\text{فنر})} = \frac{500\sqrt{3}}{3}$$

جزوه پارسه مشابه این تست در فصل ۳ (صفحه ۱۷) جزوه استاتیک آمده است.

۴ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

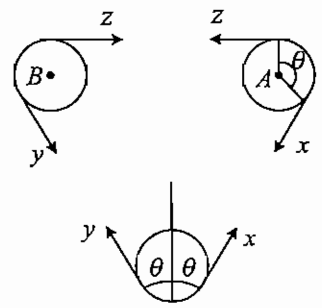
با بررسی مفصل D بدیهی است که در راستای DC نیرویی وجود ندارد یعنی اگر در DC نیرویی وجود داشته باشد نیرویی اعم از خارجی یا داخلی در مفصل D وجود ندارد که مولفه عمود بر BE نیروی DC را خنثی کند سپس نیروی DC برابر صفر است.

جزوه پارسه مشابه این تست در فصل ۳ جزوه استاتیک آمده است.

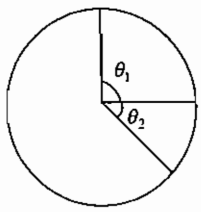
۵ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

ابتدا برای محاسبه θ خواهیم داشت:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = 90° + 60° = 150° = \frac{10\pi}{12}$$



$\Rightarrow$



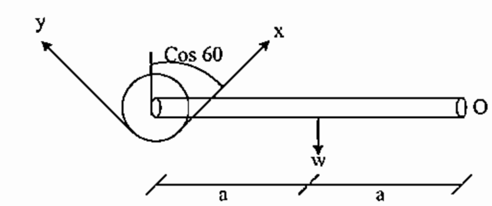
با توجه به اصطکاک تسمه با پولی‌های A و B خواهیم داشت:

$$\frac{z}{y} = e^{\mu\theta} = e^{\frac{2}{\pi}\times\frac{10\pi}{12}} = e^{\frac{5}{3}}$$

و چون پولی C هرزگرد است و در مقابل چرخش اصطکاک ندارد: $x = y$، در نتیجه

$$\frac{z}{x} = \frac{z}{y} = e^{\frac{5}{3}}$$

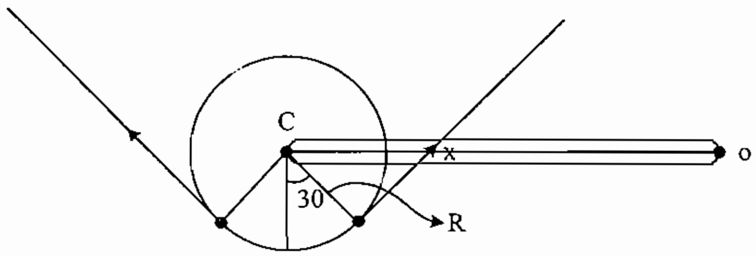
با گشتاورگیری حول O خواهیم داشت:



$$W \times a = (x+y)\cos 60 \times 2a \ \rightarrow\ x + y = w \ \rightarrow\ 2x = W \ \rightarrow\ x = \frac{W}{2}$$

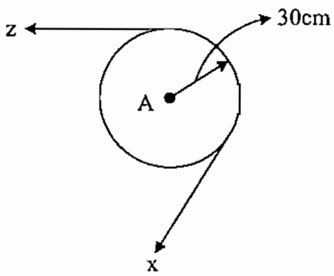
نکته

برای محاسبه دقیق گشتاور نیروهای کشش x و y حول O خواهیم داشت:



$$x\left(2a-\frac{R}{\sin 30}\right)+y\left(2a+\frac{R}{\sin 30}\right)\ \underset{x=y}{=}\ (x+y)2a$$

گشتاور انتقالی پولی A برابر است با:



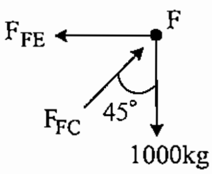
$$\rightarrow\quad M=(z-x)r$$

$$\rightarrow\quad M=\left(xe^{\frac{5}{3}}-x\right)r=x\times\frac{30}{100}\left[e^{\frac{5}{3}}-1\right]=\frac{W}{2}\,\frac{30}{100}\left[e^{\frac{5}{3}}-1\right]=\frac{3}{20}W\left(e^{\frac{5}{3}}-1\right)$$

جزوه پارسه برای مطالعه بیشتر به فصل ۵ جزوه استاتیک ارجاع داده می‌شود.

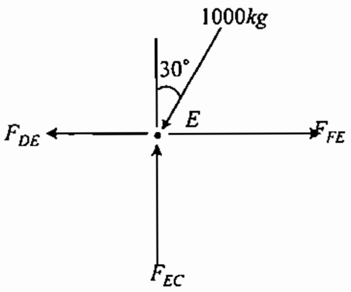
۶ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

روش اول: با بررسی مفصل F خواهیم داشت:



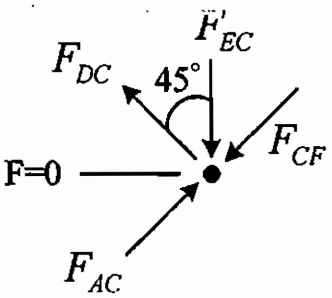
$$\rightarrow\quad F_{FC}=\frac{1000}{\cos 45^\circ}=\frac{2000}{\sqrt{2}}\ \text{فشاری}$$

با بررسی مفصل E خواهیم داشت:



$F_{EC} = 1000 \times \cos 30 = 500\sqrt{3}$ فشاری

با بررسی مفصل C خواهیم داشت:

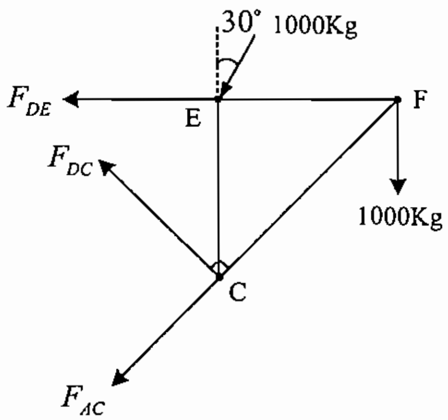


$\rightarrow \quad F_{DC} = F_{EC} \cos 45° = 500\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 250\sqrt{6}$ کششی

همانطور که ملاحظه می‌شود حتی بررسی مفصل F و به‌دست آوردن نیروی F_{CF} هم نیاز نبود.

روش دوم: حول F گشتاور می‌گیریم

$$F_{DE} \times \cancel{2}\sqrt{2} = 1000\frac{\sqrt{3}}{2} \times \cancel{2} \quad \Rightarrow \quad F_{DC} = \frac{500\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 250\sqrt{6}$$



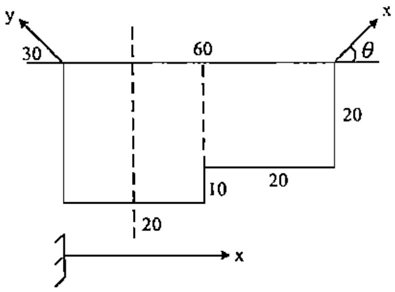
با بررسی مفصل B خواهیم داشت:

$F_{BC} = 0$

جزوه پارسه مشابه این تست در فصل ۳ جزوه استاتیک آمده است.

۷ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

ابتدا مرکز جرم صفحه را به‌دست می‌آوریم (چون گشتاورگیری می‌کنیم فقط در راستای x، آن‌را به‌دست می‌آوریم.)



$$\overline{x} = \frac{20\times30\times10 + 20\times20\times30}{20\times30 + 20\times20} = \frac{18000}{1000} = 18$$

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad y\cos 30 = x\cos\theta \qquad (I)$$

[تلاقی خطی که از مرکز جرم می‌گذرد با لبه بالایی صفحه] گشتاور حول مرکز ⇐ فقط مولفه‌های عمودی گشتاور دارند → $y\sin 30\times18 = x\sin\theta\times22$ (II)

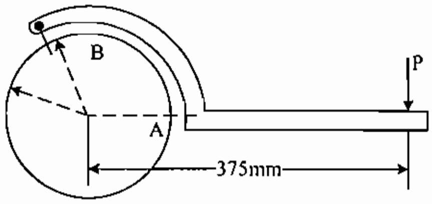
با تقسیم (II) بر (I) خواهیم داشت:

$$\frac{(II)}{(I)} \rightarrow 22\tan\theta = \frac{9\times2}{\sqrt{3}} \rightarrow \tan\theta = \frac{9}{11\sqrt{3}}$$

جزوه پارسه برای مطالعه بیشتر به فصل ۲ و فصل ۶ جزوه استاتیک ارجاع داده می‌شود.

سوالات کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۸:

۱ـ آچار لوله‌گیر مطابق شکل برای سفت کردن لوله‌ها و محورها مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر ممانی برابر 80N.m برای سفت کردن محوری به قطر 200mm و با اعمال نیروی p مورد نیاز باشد، نیروی تماس روی سطح صیقلی در A برحسب نیوتن چقدر است؟ (درگیری پین در نقطه B را می‌توان روی محیط خارجی محور در نظر گرفت.)



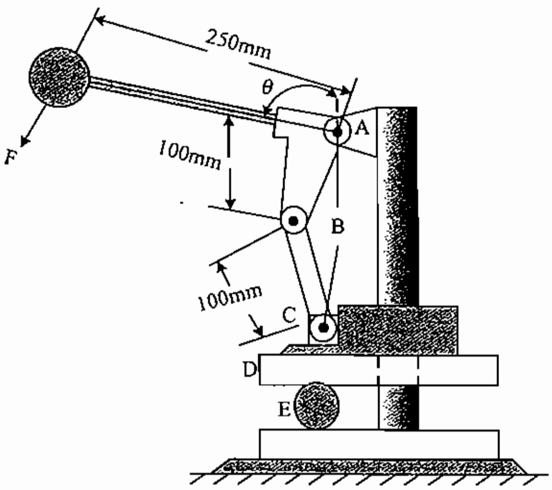
۱) 708.2

۲) 800

۳) 1047

۴) 4068

۲ـ فک بالایی D از یک دستگاه پرس مطابق شکل با اصطکاک ناچیزی روی ستون عمودی دستگاه می‌لغزد. مقدار نیروی مورد نیاز F بر دسته پرس که نیروی فشار معادل R بر استوانه E اعمال کند. برحسب زاویه θ کدام است؟



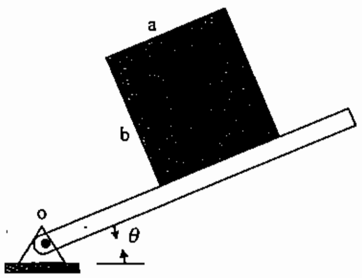
۱) $0.2R\cos\theta$

۲) $0.8R\cos\theta$

۳) $0.2R\sin\theta$

۴) $0.8R\sin\theta$

۳ـ جعبه یکنواخت نشان داده شده به جرم m روی سطح شیب‌داری که حول نقطه O لولا شده است، قرار گرفته. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی بین جعبه و سطح شیب‌دار μ باشد، شرایطی که با افزایش زاویه θ جعبه پیش از لغزیدن کله کند (واژگون شود)، کدام است؟



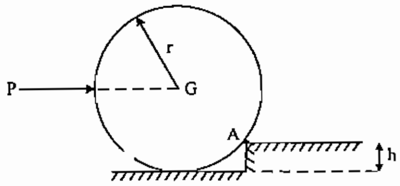
۱) $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$

۲) $\theta = \tan^{-1}(\mu)$

۳) $\theta = \tan^{-1}\left(\mu\frac{a}{b}\right)$

۴) $\theta = \min\left(\frac{\pi}{4}\tan^{-1}(\mu)\right)$

۴ ـ هدف، غلتاندن استوانه همگن نشان داده شده با اعمال نیروی افقی P به آن است. حداقل ضریب اصطکاک در محل تماس با دیواره در نقطه A چقدر باشد که لغزش احتمالی پیش از غلتش بوقوع نپیوندد؟



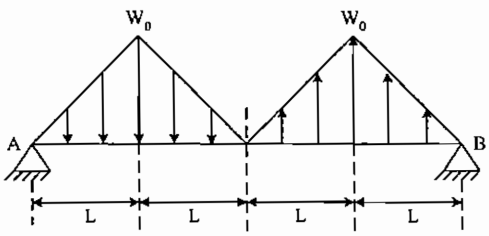
۱) $\mu_A = \frac{h}{r}$

۲) $\mu_A = \frac{h}{2r}$

۳) در این مسأله حتی اگر ضریب اصطکاک در A صفر باشد، لغزش اتفاق نمی‌افتد.

۴) در این مسأله همواره لغزش در A قبل از وقوع غلتش اتفاق می‌افتد.

۵ ـ مقدار گشتاور حداکثر در تیر نشان داده شده تحت بار گسترده کدام است؟



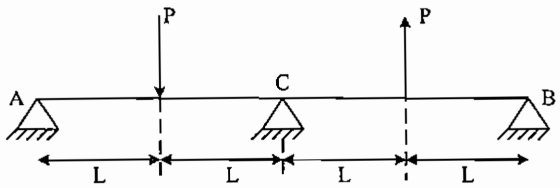
۱) $\frac{1}{2} w_0 L^2$

۲) $\frac{1}{3} w_0 L^2$

۳) $\frac{3}{2} w_0 L^2$

۴) $w_0 L^2$

۶ ـ عکس‌العمل تکیه‌گاه A در تیر یکنواخت شکل مقابل کدام است؟



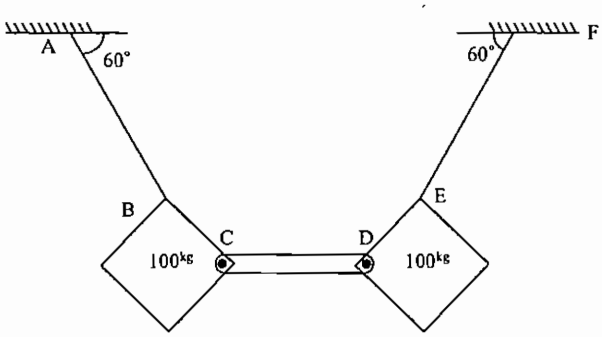
۱) صفر

۲) $\frac{P}{2}$

۳) P

۴) به‌علت وجود تکیه‌گاه اضافی، بدون داشتن مختصات E و I تیر و بدون انجام محاسبات مربوط به مفاهیم مقاومت مصالح، نمی‌توان به این سؤال پاسخ داد.

۷ ـ با توجه به شکل مقابل، نیروی منتقله توسط میله بی‌وزن CD برحسب kg چقدر است؟



۱) 100

۲) $100\sqrt{3}$

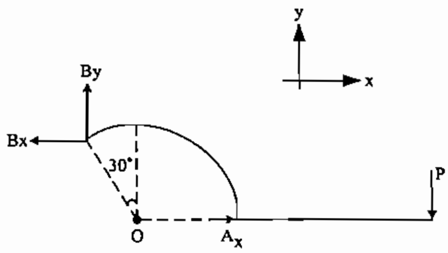
۳) $\frac{(100\sqrt{3})}{3}$

۴) صفر

پاسخ تشریحی کنکور کارشناسی ارشد سال ۸۸:

۱ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

دیاگرام آزاد اهرم به‌صورت زیر می‌باشد:



$$M = 80\,N.m = p \times 0.375 \quad \Rightarrow \quad p = 213.33$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_X = B_X$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad p = By = 213.33$$

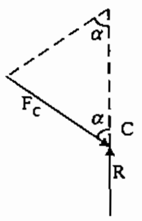
$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad p \times 0.275 + By \times (100\sin(30°) + 100) = B_X \times 100\cos(30°)$$

پس از جایگذاری مقادیر p و By:

$$\Rightarrow \quad B_X = 1047\,N \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_X = 1047\,N}$$

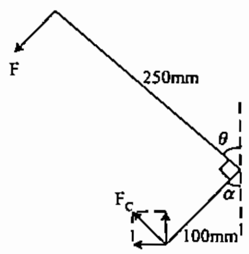
۲ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با توجه به شکل روبه‌رو:



$$R = F_c \cos\alpha \qquad ①$$

$$\alpha = 90 - \theta$$



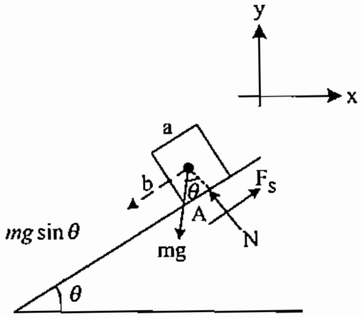
$$F_c \cos\alpha \times 100\sin\alpha + F_c \sin\alpha \times 100\cos\alpha = 250 \times F$$

$$\Rightarrow \quad 200F_c \cos\alpha\sin\alpha = 250F \quad \overset{①}{\Rightarrow} \quad 200R\sin\alpha = 250F$$

$$\Rightarrow \quad F = 0.8R\sin\alpha = \boxed{0.8R\cos\theta}$$

۳ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

در لحظه واژگونی نیروی N و بالتبع F_s نداریم و در معادلات وارد نمی‌شوند.



$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta$$

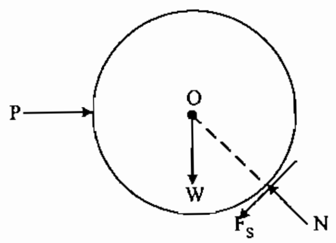
$$\sum M_A = mg\sin\theta \times \frac{b}{2} - mg\cos\theta \times \frac{a}{2}$$

در لحظه واژگونی $\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad mg\sin\theta \times \frac{b}{2} = mg\cos\theta \times \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)}$

۴ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

دیاگرام آزاد استوانه به‌صورت زیر است:

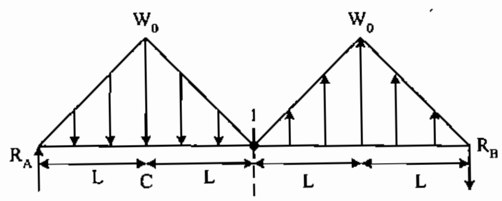
با توجه به شکل روبه‌رو $\sum M_o = F_s \times r$



در نتیجه اگر بخواهیم لغزش داشته باشیم باید $F_s = \mu_N > 0$ باشد و این در حالی است که با وجود F_s گشتاور حول نقطه O، صفر نیست و استوانه می‌غلتد. پس هیچ‌گاه لغزش قبل از غلتش اتفاق نمی‌افتد.

۵ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

ابتدا مقادیر R_A و R_B را بدست می‌آوریم:



$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad (w_0 L)(L) + R_A(4L) = (w_0 L)(3L) \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{w_0 L}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = R_B = \frac{w_0 L}{2}$$

با توجه به شکل درمی‌یابیم که تیر متقارن است و تغییرات ممان خمشی در دو نیمه تیر یکی است. بنابراین تنها نیمه سمت چپ تیر را بررسی می‌کنیم.

به‌دلیل این‌که بارگذاری گسترده خطی است، در نتیجه بار برشی (V) به‌صورت تابع درجه 2 و ممان (M) به‌صورت تابع درجه 3 می‌باشد. نقاط بحرانی یک تابع درجه 3 در مکانی است که شیب نمودار صفر باشد:

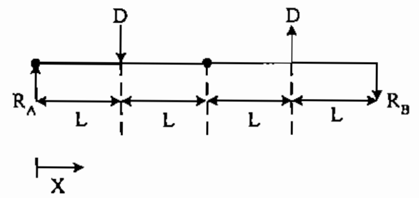
$$\frac{dM}{dX}=0 \Rightarrow V=\frac{dM}{dX}=0$$

در مکانی که $V=0$ است ما ماکزیمم یا مینیمم ممان را داریم.

در نیمه سمت چپ تیر در نقطه C $\Leftarrow$ $V=0$ $\Leftarrow$ نقطه C، نقطه مورد نظر است.

$$M_C=(R_A)(L)-\left(\frac{w_0L}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right)=\frac{w_0L^2}{2}-\frac{w_0L^2}{6}=\frac{w_0L^2}{3}$$

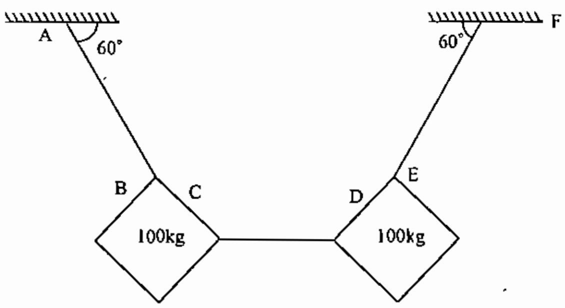
۶ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

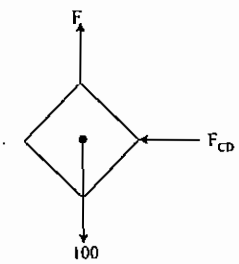


در نقطه C یک تکیه‌گاه مفصلی وجود دارد، در نتیجه باید: $M_{X=C}=0$

$$M_{X=C}=(R_A)(2L)-(p)(L)=0 \Rightarrow R_A=\frac{p}{2}$$

۷ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.





$$\sum F_y=0 \Rightarrow F\sin(60°)=100 \Rightarrow F=\frac{100}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{200}{\sqrt{3}}$$

$$\sum F_X=0 \Rightarrow F_{CD}=F\cos(60°) \Rightarrow F_{CD}=\frac{200}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{100}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{100\sqrt{3}}{3}}$$