ارتعاشات

مجموعهٔ مهندسی مکانیک

گروه مکانیک پارسه

مؤسسهٔ آموزش عالی آزاد پارسه

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

فصل چهارم

فصل پنجم

فصل اول

مفاهیم اولیه

ارتعاشات مکانیکی

ارتعاشات، یک پدیده دینامیکی و عبارت‌است از دینامیک اجسام قابل تغییر شکل (تغییر مکان در اثر نیرو). هر جسمی که دارای جرم و خاصیت الاستیسیته یعنی حرکت نسبی بین اجزا باشد، قادر به ارتعاش است.

برای تجزیه و تحلیل ارتعاشات سیستم‌های مکانیکی ابتدا باید از سیستم فیزیکی، مدل ریاضی تشکیل دهیم که نمایانگر سیستم مکانیکی حقیقی باشد. بدین‌ترتیب سیستم‌های ارتعاشی را می‌توان بر حسب نوع مدل ریاضی آن‌ها به دو دسته طبقه‌بندی نمود:

۱ـ **مدل‌های ناپیوسته یا گسسته** که دارای درجه آزادی معینی هستند و توسط معادلات دیفرانسیل معمولی توصیف می‌گردند.

۳ـ **مدل‌های پیوسته** که دارای بی‌نهایت درجه آزادی هستند و تجزیه و تحلیل آن‌ها منجر به تشکیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌گردد.

درجه آزادی: عبارت‌است از حداقل تعداد مختصات یا متغیرهای مکانی مستقل که وضعیت سیستم را در هر لحظه بیان می کند. این تعریف درجه آزادی برای سیستم‌هایی است که قید هندسی دارند (علاوه بر قید هندسی ممکن است، سیستم دارای قیود دیگری از قبیل قید سرعت و.. باشد).

در سیستم های با قید هندسی، تعداد معادلات حرکت برابر تعداد مختصات مستقل یا تعداد درجات آزادی سیستم است.

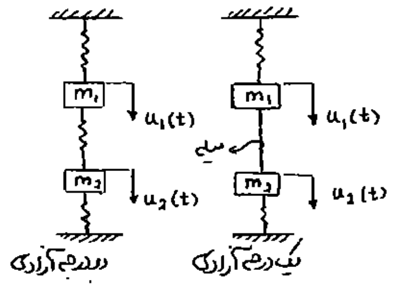
سیستم‌های موردنظر ما در این درس همه دارای قید هندسی هستند و از این پس از قید کلمه قید هندسی صرفه‌نظر می‌کنیم.

سیستم‌های ارتعاشی را بر اساس رفتارشان می‌توان به دو دسته زیر نیز طبقه‌بندی نمود:

۱ـ **سیستم‌های خطی:** سیستم‌هایی هستند که معادله دیفرانسیل حرکت آن‌ها خطی است. یعنی فقط شامل تابع یا مشتقات آن از توان اول می‌باشد.

۲ـ **سیستم‌های غیرخطی:** سیستم‌هایی هستند که معادله دیفرانسیل حرکت آن‌ها غیرخطی است، یعنی دارای تابع یا مشتقات تابع با توان بالاتر از یک و یا به صورت کسری است.

تحلیل سیستم‌های خطی بسیار ساده‌تر از سیستم‌های غیرخطی است. مهم‌ترین مزیت سیستم‌های خطی این است که می‌توان در آن‌ها از اصل سوپرپوزیشن (برهم نهش) استفاده نمود.



مثال : دو سیستم نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. در سیستم سمت راست بین دو جسم m_2 , m_1 یک میلهٔ صلب وجود دارد که طول آن ثابت است و باعث می‌شود تغییر مکان دو جسم m_2 , m_1 یکسان باشد. اما در سبستم سمت چپ بین دو جسم m_2 , m_1 فنری قرار دارد که می‌تواند تحت فشار یا کشش تغییر طول دهد. در این‌صورت تغییر مکان دو جسم m_2 , m_1 مستقل از هم خواهد بود.

در سیستم سمت راست طول میله $u_1 - u_2 = \ell$ قید هندسی است.

بنابراین سیستم سمت راست یک سیستم یک درجه آزادی و سیستم سمت چپ یک سیستم دو درجه آزادی است.

تعداد قیود هندسی ـ تعداد مختصات کل = درجه آزادی

اجزای یک سیستم ارتعاشی

یک سیستم ارتعاشی به طور کلی شامل وسیله‌ای برای ذخیره انرژی پتانسیل (فنر یا الاستیسیته)، وسیله‌ای برای ذخیره انرژی جنبشی (جرم یا اینرسی) و وسیله‌ای برای استهلاک تدریجی انرژی (دمپر) است. ارتعاش یک سیستم مستلزم تبدیل متناوب انرژی پتانسیل سیستم به انرژی جنبشی و بالعکس می‌باشد. در صورتی‌که سیستم دارای مستهلک کننده (دمپر) باشد، در هر سیکل نوسان مقداری انرژی تلف می‌شود و اگر این انرژی از یک منبع خارجی جایگزین نگردد نوسانات پس از مدت زمان معینی به‌طور کامل مستهلک یا میرا می‌گردد.

ارتعاشات به دو دسته عمومی تقسیم می‌شوند:

۱ـ ارتعاشات آزاد: هنگامی است که یک سیستم بدون حضور نیروی محرک خارجی در اثر نیروهای ذاتی و لاینفک خود تحت یک تحریک اولیه به نوسان درآید. سیستم در ارتعاشات آزاد تحت یک یا چند فرکانس طبیعی خود مرتعش می‌شود. فرکانس‌های طبیعی یک سیستم از ویژگی‌های سیستم هستند و توسط توزیع جرم و سختی سیستم تعیین می‌گردند.

۲ـ ارتعاشات اجباری: ارتعاشی است که تحت اثر نیروهای خارجی انجام می‌شود. وقتی که نیروی محرک خارجی نوسانی است، سیستم اجباراً با فرکانس نیروی محرک مرتعش می‌شود. اگر فرکانس تحریک بر یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم منطبق شود، تشدید یا رزونانس اتفاق می‌افتد و نوسانی با دامنه بسیار بزرگ نتیجه می‌گردد که ممکن است برای سیستم خطرناک باشد.

۲ـ معادلات حرکت

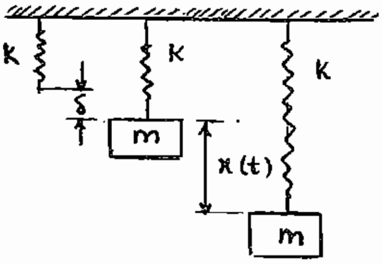
استخراج معادلات حرکت یک سیستم به روش‌های زیر امکان‌پذیر است.

۱- معادلات نیوتن – اولر: برای سیستم های یک درجه آزادی توصیه می شود. $F = ma \quad , M_0 = I_0 \alpha$

۲- روش انرژی: برای نیروهای کنسرواتیو $(\nabla \times F = 0)$ به کار برده می‌شود.

۳- روش لاگرانژ: برای سیستم های دو درجه آزادی و بالاتر توصیه می‌گردد.

۴- روش همیلتون: برای سیستم های پیوسته به‌کار می‌رود.

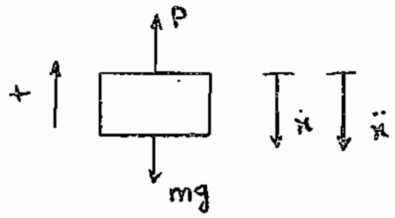


مثال : سیستم جرم و فنر زیر را در نظر بگیرید.

وزنه را می‌کشیم و رها می‌کنیم. $\delta_d = 2\delta_s = 2\dfrac{mg}{k}$

سیستم یک درجه آزادی است، ولی بسته به شرایط اولیه ای که به آن می دهیم دارای بی نهایت حرکت است. از این بی نهایت حرکت در مورد سیستم یک درجه آزادی تنها یک حرکت هارمونیک است که این حرکت «مود طبیعی» نام دارد. سیستم دو درجـه آزادی دو مود طبیعی دارد و به همین ترتیب سیستم n درجه آزادی n مود طبیعی دارد. یعنی تعداد مودهای طبیعـی سیسـتم (حرکـت هـای مستقل هارمونیک) برابر با تعداد درجات آزادی سیستم است.

معادله حرکت را برای لحظه t می نویسیم:



$F = ma$

$+P - mg = m(-\ddot{x}) \qquad P = k(x+\delta)$

$m\ddot{x} + kx = \overbrace{(mg - k\delta)}^{\text{Const}} \qquad \omega_n^2 = \dfrac{k}{m}$

$x(t) = Ae^{st} \Rightarrow ms^2 + k = 0 \rightarrow s = \pm i\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \pm i\omega_n$

$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = A_1 e^{+i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t}$

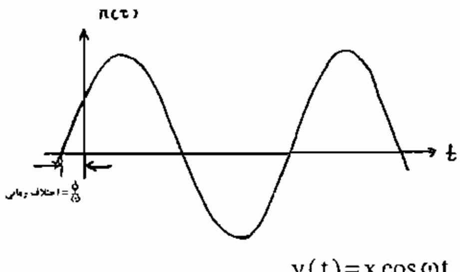
$\boxed{x(t) = C_1 \sin\omega_n t + D_1 \cos\omega_n t} \Rightarrow$ از شرایط اولیه به‌دست می آید. D_1, C_1

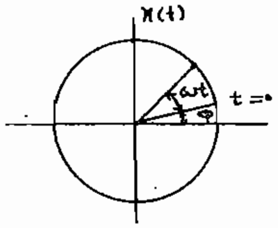
نمایش توابع هارمونیک به‌صورت فازوری

یک حرکت هارمونیک با فرکانس زاویه‌ای ω را که به صورت تابعی از t تعریف شده است، در نظر بگیرید که در آن ثابت‌های ϕ, ω, X به‌ترتیب دامنه، فرکانس و زاویه فاز نامیده می‌شوند.

$x(t) = \underset{\downarrow}{X} \sin(\underset{\downarrow}{\omega} t + \underset{\downarrow}{\phi})$

زاویه فاز   فرکانس   دامنه





$\left.\begin{array}{l} y(t) = x\cos\omega t \\ x(t) = x\sin\omega t \end{array}\right\} \Leftarrow$ ترکیب دو حرکت هارمونیک با دامنه یکسان حرکت روی دایره است.

$x(t) = X\sin(\omega t + \phi)$

حرکت هارمونیک را می‌توان به وسیله یک عدد مختلط به‌صورت زیر نیز نمایش داد:

$$\text{فازور} = \bar{X} = Xe^{i\phi}$$

عدد مختلط $\bar{X}$ که تابع هارمونیک را نشان می‌دهد فازور نمایش دهنده هارمونیک نامیده می‌شود.

$$x(t) = \mathrm{Im}(\bar{X}e^{i\omega t}) = \mathrm{Im}(Xe^{i(\omega t+\phi)}) = X\sin(\omega t+\phi)$$

اگر $x(t)$ تغییرمکان باشد، سرعت و شتاب با استفاده از جبر فازوری به صورت زیر محاسبه خواهند شد:

$$x(t) = \mathrm{Im}\left(\bar{X}e^{i\omega t}\right)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\mathrm{Im}\left(\bar{X}e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left(i\omega\bar{X}e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left(i\omega Xe^{i(\omega t+\phi)}\right)$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Im}\left(\bar{X}e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left(-\omega^2\bar{X}e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left(-\omega^2 Xe^{i(\omega t+\phi)}\right)$$

جمع توابع هارمونیک:

دیدیم که توابع هارمونیک را می‌توان به صورت فازور که یک کمیت مختلط است نمایش داد. بنابراین برای جمع آن‌ها می‌توان از قوانین ترکیب اعداد مختلط استفاده نمود.

$$x_1(t) = X_1\cos\left(\omega t+\alpha_1\right) = \mathrm{Re}\left[\bar{X}_1 e^{i\omega t}\right]$$

$$x_2(t) = X_2\cos\left(\omega t+\alpha_2\right) = \mathrm{Re}\left[\bar{X}_2 e^{i\omega t}\right]$$

$$x(t) = x_1(t)+x_2(t) = \mathrm{Re}\left[\left(\bar{X}_1+\bar{X}_2\right)e^{i\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\bar{X}e^{i\omega t}\right] = X\cos(\omega t+\beta)$$

$$|\bar{x}| = x = \sqrt{X_1^2+X_2^2+2X_1X_2\cos\left(\alpha_1-\alpha_2\right)}$$

$$\tan\beta = \frac{X_1\sin\alpha_1+X_2\sin\alpha_2}{X_1\cos\alpha_1+X_2\cos\alpha_2}$$

یکی از موارد خاص که استفاده زیادی در ارتعاشات دارد، حالتی است که دو فازور بر هم عمود باشند یا:

$$x_1(t) = X_1\cos\omega t$$

$$x_2(t) = X_2\sin\omega t$$

$$x(t) = X_1\cos\omega t+X_2\sin\omega t = X_1\cos\omega t+X_2\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left[X_1 e^{i\omega t}+X_2 e^{i\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(X_1+X_2 e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)e^{i\omega t}\right]$$

$$= X\cos(\omega t+\beta)$$

$$x = \sqrt{X_1^2+X_2^2+2X_1X_2\cos\frac{\pi}{2}} = \sqrt{X_1^2+X_2^2}$$

$$\tan\beta = -\frac{X_2}{X_1}$$

حل مثال:

برمی‌گردیم به سیستم جرم و فنر مثال قبل هر دو معادله حرکت زیر درست، است ولی حل معادله همگن راحت‌تر است.

$m\ddot{x}+kx=0$ $\qquad\qquad$ $m\ddot{y}+ky=mg$

$y(t)$ فاصله از حالت اولیه (آزاد) فنر ، $x(t)$ فاصله از حالت تعادل استاتیکی

$x(t)=A\sin\omega_n t+B\cos\omega_n t=E\sin(\omega_n t+\phi)$

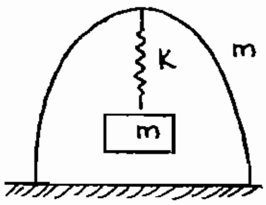
$E=\sqrt{A^2+B^2}$ $\qquad$ $\tan\phi=\dfrac{B}{A}$

$y(t)=A_1\sin\omega_n t+B_1\cos\omega_n t+\dfrac{mg}{k}=E_1\sin(\omega_n t+\phi)+\dfrac{mg}{k}$

مثال : فنر را چقدر بکشیم تا سیستم در آستانه بلند شدن باشد؟

حل: اگر فنر را به اندازه $\delta=\dfrac{mg}{k}$ بکشیم فنر از حالت تعادل به اندازه δ بالا می‌رود و به حالت آزاد فنر می‌رسد.

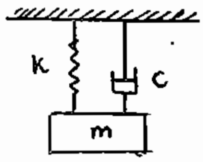
اما اگر به اندازه $\dfrac{2mg}{k}$ فنر را بکشیم، فنر به اندازه یک $\dfrac{mg}{k}$ بالا می رود تا به حالت آزاد فنر برسد و به اندازه یک $\dfrac{mg}{k}$ دیگر فشرده می شود که در این هنگام فنر نیروی $k\left(\dfrac{mg}{k}\right)$ را به چارپایه وارد می کند که برابر با وزن چارپایه است و چارپایه در آستانه بلند شدن قرار می‌گیرد.



فصل دوم

ارتعاشات آزاد

تعریف فرکانس طبیعی: فرکانس نوسانات سیستم ارتعاشی آزاد بدون در نظر گرفتن میرایی، فرکانس طبیعی سیستم نام دارد.



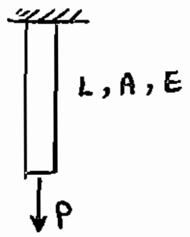
فرکانس یا فرکانس‌های طبیعی یک سیستم (یک یا چند درجه آزادی) از ویژگی‌های آن سیستم هستند و توسط توزیع جرم و سختی در سیستم تعیین می‌گردند. در مورد یک سیستم جرم و فنر فرکانس طبیعی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\text{فرکانس طبیعی} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\text{پریود طبیعی} \qquad \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

فرکانس طبیعی سیستم ارتباطی با میرایی سیستم ندارد و مستقل از آن است.

الف ـ ارتعاشات طولی:



ارتعاشات طولی تیر زیر در اثر نیروی محوری P را در نظر بگیرید. برای به‌دست آوردن فرکانس طبیعی ارتعاشات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\delta = \frac{PL}{AE} \rightarrow k = \frac{P}{\delta} = \frac{AE}{L}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{M} = \frac{AE}{ML}$$

سختی تیر با طول آن نسبت معکوس دارد، یعنی اگر طول یک تیر را نصف کنیم، سختی آن دو برابر می‌شود و به همین منوال اگر آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم، سختی آن سه برابر می‌شود.

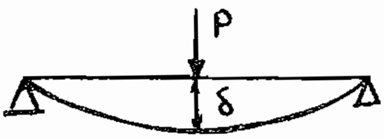
ب ـ ارتعاشات عرضی:

ارتعاشات عرضی تیر یک سر درگیر به وزن M را که از انتهای آزاد تحت تاثیر نیروی P قرار گرفته است در نظر بگیرید. فرکانس طبیعی این تیر به‌ترتیب زیر محاسبه می گردد:

$$\delta=\frac{PL^3}{3EI}\Rightarrow k=\frac{P}{\delta}=\frac{3EI}{L^3}$$

$$\omega_n^2=\frac{K}{M}=\frac{3EI}{ML^3}$$

فرکانس طبیعی تاری که مطابق شکل تحت نیروی P قرار گرفته است نیز به روشی مشابه موارد قبل قابل محاسبه است:



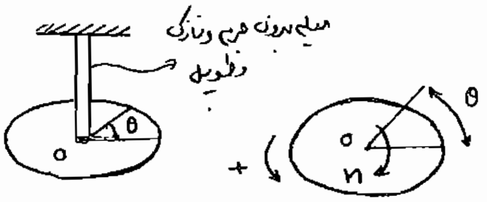
$$\delta=\frac{PL^3}{48EI}\Rightarrow k=\frac{48EI}{L^3}$$

$$\omega_n^2=\frac{K}{M}=\frac{48EI}{ML^3}$$

(مشخصات میله‌ها در شکل فوق: L, E, I)

ج ـ ارتعاشات پیچشی:

برای به‌دست آوردن فرکانس طبیعی دیسکی که توسط میله‌ای صلب به تکیه‌گاهی متصل شده و تحت ممان پیچشی M قرار گرفته است از معادلات حرکت سیستم استفاده می‌کنیم.



$J=\frac{\pi d^4}{32}$ برای دیسک

رابطه اولر:

$$M_o=I_o\,\alpha$$

$$-M=I_o\,\ddot{\theta}$$

$$I_o\,\ddot{\theta}+k_t\theta=0$$

از مقاومت مصالح:

$$\theta=\frac{ML}{GJ}$$

$$\left(J=\frac{\pi d^4}{32} \text{ برای دیسک } \right)\quad k_t=\frac{M}{\theta}=\frac{GJ}{L}$$

معادله حرکت $\quad I_o\ddot{\theta}+\frac{GJ}{L}\theta=0$

شکل استاندارد معادله حرکت برای سیستم غیر میرا $\ddot{\theta}+\omega_n^2\,\theta=0 \quad\Rightarrow\quad \omega_n^2=\frac{GJ}{LI_o}$

د ـ جرم و ممان اینرسی معادل

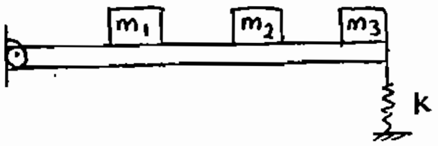
در مورد سیستم‌هایی که از چند جرم تشکیل شده‌اند، برای به‌دست آوردن فرکانس طبیعی سیستم باید جرم معادل یا ممـان اینرسـی معادل سیستم را محاسبه نماییم و فرکانس طبیعی را از روابط زیر به‌دست آوریم:

$$\boxed{\omega_n=\sqrt{\frac{k_t}{J_{eq}}}} \quad \text{یا} \quad \boxed{\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m_{eq}}}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، جرم سیستم ممکن است به‌صورت جرم خطی m یا جرم دورانی J در نظر گرفته شده باشد.

برای به‌دست آوردن جرم و یا ممان اینرسی معادل باید انرژی جنبشی سیستم اولیه را با انرژی جنبشی سیستم معادل مساوی قرار دهیم.

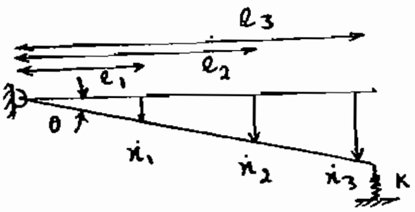
$$K.E=K.E_{eq} \quad \Rightarrow \quad m_{eq} \text{ یا } J_{eq}$$



مثال : می‌خواهیم با صرفه‌نظر از جرم میله، جرم‌های m_3, m_2, m_1 را به صورت خطی یا دورانی در یک نقطه متمرکز کنیم.

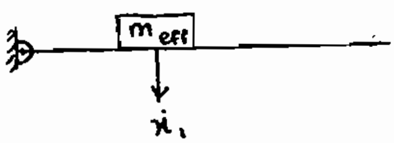
ابتدا فرض کنید می‌خواهیم مجموعه فوق را به‌صورت یک جرم خطی متمرکز مدل کنیم.

برای این کار یک تغییر مکان برای میله صلب در نظر می‌گیریم.



$$\underset{\text{اولیه}}{KE}=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2$$

$$KE_{eq}=\frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}_{eq}^2$$



حال تمام $\dot{x}$ ها را به $\dot{x}_1$ تبدیل کنیم.

$$\left.\begin{aligned} x_1&=l_1\theta \\ x_2&=l_2\theta \\ x_3&=l_3\theta \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \theta&=\frac{x_1}{l_1} \\ \theta&=\frac{x_2}{l_2} \\ \theta&=\frac{x_3}{l_3} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} x_2&=\frac{l_2}{l_1}x_1 \\ x_3&=\frac{l_3}{l_1}x_1 \end{aligned}$$

و چون l ها نسبت به زمان تغییر نمی‌کنند داریم:

$$\dot{x}_2=\frac{l_2}{l_1}\dot{x}_1$$

$$\dot{x}_3=\frac{l_3}{l_1}\dot{x}_1$$

$$KE=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_3\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2\dot{x}_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[m_1+m_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2+m_3\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2\right]\dot{x}_1^2$$

با مقایسه با انرژی جنبشی سیستم معادل و سیستم اولیه داریم:

$$m_{eq} = m_1 + m_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + m_3\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2$$

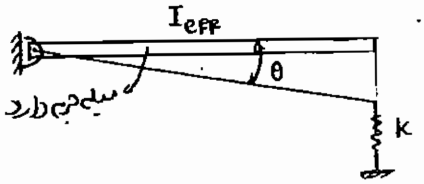
معادل‌سازی جرم دورانی یا ممان اینرسی (I_{eq}) در مثال فوق به صورت زیر است:

$$KE = \frac{1}{2}m_1(l_1\dot\theta_1)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l_2\dot\theta_2\right)^2 + \frac{1}{2}m_3\left(l_3\dot\theta_3\right)^2$$

$$K.E_{\text{اولیه}} = \frac{1}{2}\left[m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2\right]\dot\theta^2 \qquad \dot\theta_1 = \dot\theta_2 = \dot\theta_3$$

$$KE_{eq} = \frac{1}{2}I_{eq}\dot\theta^2$$

$$I_{eq} = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2$$



مثال : می‌خواهیم جرم خطی معادل و ممان اینرسی معادل در شکل زیر را به‌دست آوریم.

حالت اول: جرم خطی معادله مجموعه را می‌خواهیم. باید θ را حذف کنیم و معادلات بر حسب x به‌دست آیند.

$$K.E. = \frac{1}{2}M\dot x^2 + \frac{1}{2}J_o\dot\theta^2$$

$$x = R\,\theta$$

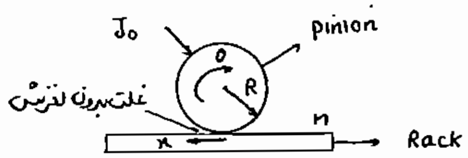
$$\dot x = R\dot\theta$$

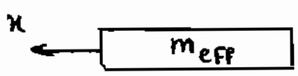
$$K.E. = \frac{1}{2}M\dot x^2 + \frac{1}{2}J_o\left(\frac{\dot x}{R}\right)^2$$

$$K.E. = \frac{1}{2}\left[M + \frac{J_o}{R^2}\right]\dot x^2$$

$$KE_{eq} = \frac{1}{2}M_{eq}\dot x^2$$

$$M_{eq} = M + \frac{J_o}{R^2}$$





حالت دوم: ممان اینرسی معادل مجموعه مدنظر است. باید معادلات بر حسب θ نوشته شود.

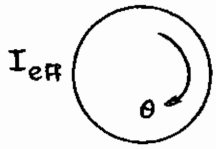
$$x = R\theta \rightarrow \dot x = R\dot\theta$$

$$K.E. = \frac{1}{2}MR^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}J_o\dot\theta^2$$

$$K.E. = \frac{1}{2}\left[MR^2 + J_o\right]\dot\theta^2$$

$$KE_{eq} = \frac{1}{2}J_{eq}\dot\theta^2$$

$$J_{eq} = MR^2 + J_o$$



هـ سختی معادل

در مورد سیستم‌هایی که از چند فنر تشکیل شده‌اند، برای به‌دست آوردن فرکانس طبیعی سیستم باید سختی معادل سیستم را محاسبه نموده و فرکانس طبیعی را با استفاده از آن به‌دست آوریم. سختی سیستم ممکن است خطی یا پیچشی باشد.

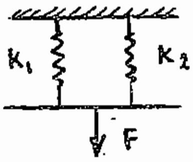
$$\boxed{\omega_n=\sqrt{\frac{k_{teq}}{J}}} \quad \text{یا} \quad \boxed{\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}}$$

برای به‌دست آوردن سختی معادا باید انرژی پتانسیل سیستم اولیه را با انرژی پتانسیل سیستم معادل مساوی قرار دهیم.

$$P.E=P.E_{eq} \Rightarrow k_{eq}$$

۱ ـ فنرهای خطی: معادله حرکت فنرهای خطی به صورت $F=kx$ است و این فنرها به دو حالت با هم ترکیب می‌شوند.

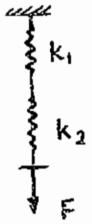
الف. فنرهای موازی (تغییر مکان فنرها مساوی است).



$$F=F_1+F_2=k_1x+k_2x=k_{eq}\,x$$

$$\boxed{k_{eq}=k_1+k_2}$$

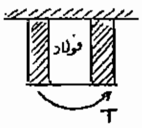
ب. فنرهای سری (نیرو در فنرها مساوی است).



$$x=x_1+x_2$$

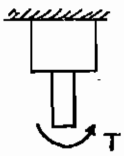
$$\frac{F}{k_{eq}}=\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}\rightarrow\boxed{\frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}$$

۲ ـ فنرهای پیچشی $T=k_t\theta$



الف. فنرهای موازی

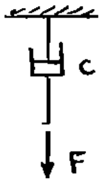
$$\boxed{k_{t_{eq}}=k_{t_1}+k_{t_2}}$$



ب. فنرهای سری

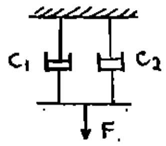
$$\boxed{\frac{1}{k_{t_{eq}}}=\frac{1}{k_{t_1}}+\frac{1}{k_{t_2}}}$$

و ـ میرایی معادل:



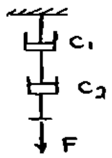
$F_d = c\dot{x}$ (مثل فنر)

موازی



الف ـ دمپرهای موازی (سرعت در دو سر دمپرها یکسان است). $\boxed{c_{eq} = c_1 + c_2}$

سری



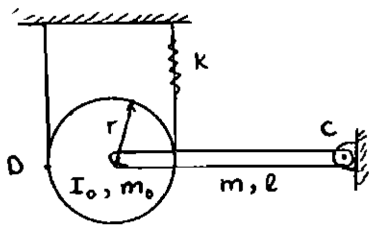
ب ـ دمپرهای سری (نیرو در دو دمپر یکسان است). $\boxed{\dfrac{1}{c_{eq}} = \dfrac{1}{c_1} + \dfrac{1}{c_2}}$

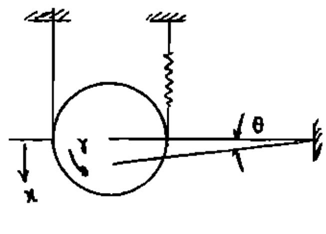
برای محاسبه میرایی معادل باید انرژی تلف شده در سیستم اولیه را با انرژی تلف شده در سیستم معادل، مساوی قرار دهیم.

$$D.E = D.E_{eq}$$

$$D.E._{eq} = \frac{1}{2} c_{eq} \dot{x}^2$$

مثال : ممان اینرسی معادل چقدر است ؟





میله $I_c = \frac{1}{3} m l^2$

$$K.E. = \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\gamma}^2 \qquad I_0 = \frac{1}{2} m_0 r^2$$

$$KE_{eq} = \frac{1}{2} I_{eq} \dot{\theta}_{eq}$$

$$\dot{\theta}_{eq} = \dot{\theta}$$

$$x = l\theta \rightarrow \dot{x} = l\dot{\theta}$$

$$r\gamma = x \rightarrow \gamma = \frac{x}{r} = \frac{l\theta}{r} \rightarrow \dot{\gamma} = \frac{l\dot{\theta}}{r}$$

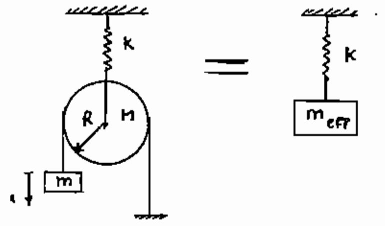
$$K.E. = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m l^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_0 l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_0 r^2\right)\left(\frac{l^2}{r^2}\theta^2\right)$$

$$K.E. = \left(\frac{1}{6} m l^2 + \frac{1}{2} m_0 l^2 + \frac{1}{4} m_0 l^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3} m + \frac{3}{2} m_0\right) l^2\right]\dot{\theta}^2$$

$$K.E._{eq} = \frac{1}{2} I_{eq} \dot{\theta}^2$$

$$I_{eq} = \left(\frac{1}{3} m + \frac{3}{2} m_0\right) l^2$$

مثال : فرکانس طبیعی سیستم زیر را پیدا کنید.



$$M=\frac{10}{3}m$$

$$J_0=\frac{1}{2}MR^2=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}m\right)R^2=\frac{5}{3}mR^2$$

$$K.E.=\frac{1}{2}\left[m+\frac{J_0}{4R^2}+\frac{M}{4}\right]\dot{x}^2=\frac{1}{2}\left[m+\frac{\frac{5}{3}mR^2}{4R^2}+\frac{\frac{10}{3}m}{4}\right]\dot{x}^2$$

$$K.E.=\frac{1}{2}\left[m+\frac{5}{12}m+\frac{5}{6}m\right]\dot{x}^2$$

$$K.E._{eq}=\frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}^2$$

$$m_{eq}=m+\frac{5}{12}m+\frac{5}{6}m=\frac{9}{4}m$$

$$P.E.=\frac{1}{2}k\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$P.E._{eq}=\frac{1}{2}k_{eq}x^2$$

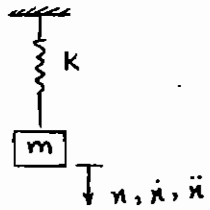
$$k_{eq}=\frac{k}{4}$$

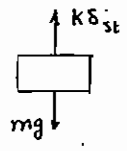
$$\rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{4}k}{\frac{9}{4}m}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

۱ـ ارتعاشات آزاد سیستم‌های بدون میرایی

الف ـ معادله حرکت و فرکانس طبیعی سیستم

در ارتعاش آزاد، ارتعاشات به دلیل خواص ذاتی سیستم و تبدیل انرژی پتانسیل به جنبشی و بالعکس صورت می‌گیرد. سیستم یک درجه آزادی بدون مستهلک‌کننده زیر را در نظر بگیرید. این سیستم ساده‌ترین سیستم ارتعاشی است که از یک جرم و یک فنر تشکیل شده است. در حالت تعادل استاتیکی، فنر به اندازه δ_{st} از حالت آزاد خود کشیده شده است و نیروی کشش در فنر با نیروی وزن جرم برابر است.

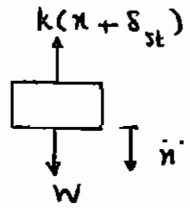




$$k\delta_{st}=mg$$

اگر جرم را از تعادل استاتیکی به اندازه x تغییر مکان داده و رها کنیم معادله حرکت جرم به صورت زیر خواهد بود.

$$m\ddot{x}=\Sigma F=mg-k(x+\delta_{st})$$
$$m\ddot{x}=mg-kx-mg=-kx$$
$$m\ddot{x}+kx=0$$



معادله حرکت عبارت‌است از:

$$\boxed{\ddot{x}+\omega_n^2x=0}$$ فرم استاندارد

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

برای حل معادله حرکت و به‌دست آوردن تابع تغییر مکان جرم بر حسب زمان یعنی $x(t)$ فرض می‌کنیم $x(t)=ce^{st}$ و در معادله حرکت جایگذاری می‌کنیم.

$$mcs^2e^{st}+kce^{st}=0\Rightarrow ms^2+k=0$$

معادله فوق معادله کمکی یا معادله مشخصه سیستم نام دارد.

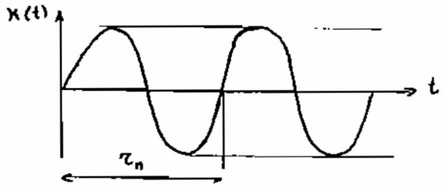
ریشه‌های معادله مشخصه مقادیر ویژه و فرکانس‌های طبیعی سیستم هستند.

$$s_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-k}{m}}=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$s_{1,2}=\pm i\omega_n$$
$$x(t)=A_1\cos\omega_n t+A_2\sin\omega_n t$$

برای به‌دست آوردن A_1 ,A_2 باید از شرایط اولیه استفاده کنیم.

$$x(t=0)=x_0\rightarrow A_1=x_0$$
$$\dot{x}(t=0)=\dot{x}_0\rightarrow A_2=\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

$$\boxed{x(t)=x_0\cos\omega_n t+\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t}$$



$$\text{پریود طبیعی}\quad \tau_n=\frac{2\pi}{\omega_n}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\text{فرکانس خطی}\quad f_n=\frac{1}{2\pi}\omega_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{فرکانس زاویه‌ای}\quad \omega_n=\frac{2\pi}{\tau_n}=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

پس سیستم بدون استهلاک کاملاً نوسانی است و کاهش دامنه در آن رخ نمی‌دهد. از به ث استاتیکی داشتیم:

$$k\,\delta_{st}=mg\rightarrow\frac{k}{m}=\frac{g}{\delta_{st}}$$

پس فرکانس طبیعی برای مثال ذکر شده به صورت زیر است:

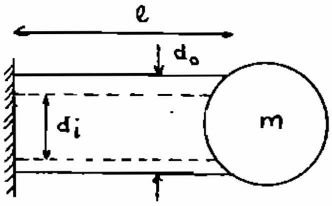
$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$

ولی دقت شود که برای فنر افقی چنین رابطه‌ای نداریم، چون اصولاً δ_{st} نداریم و g در راستای افق صفر است.

مثال : یک ژنراتور را روی چهار فنر قرار می‌دهیم که طی این عمل 4cm تغییر طول داریم. فرکانس طبیعی این سیستم چقدر است؟
دقت شود که هیچ اطلاعی راجع به جرم و سختی نداریم.
از این رو از فرمول ω_n بر حسب تغییر مکان استاتیکی استفاده می‌کنیم.

$$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{0.04}}$$

مثال : یک شافت تو خالی فولادی جرم m به آن متصل است و ارتعاشات آزاد در جهت عرضی انجام می‌دهد. معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر این سیستم را به‌دست آورید. فرکانس طبیعی را حساب کنید.



اول باید سیستم را مدل‌سازی کنیم.

$$k=\frac{3EI}{l^3}\ ;\ I=\frac{\pi}{64}\left(d_0^4-d_i^4\right)\Rightarrow k=\frac{3E\pi\left(d_0^4-d_i^4\right)}{64l^3}$$

حال معادلهٔ حرکت را برای ارتعاشات آزاد بدون استهلاک می‌نویسیم.

$$m\dot{x}+kx=0$$

$$\ddot{x}+\omega_n^2x=0\rightarrow\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}=\sqrt{\frac{3E\pi\left(d_0^4-d_i^4\right)}{64ml^3}}$$

سیستم‌های دورانی

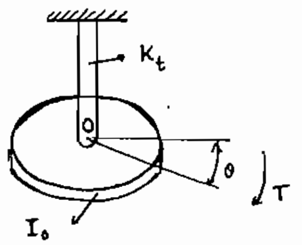
دیسکی را در نظر بگیرید که توسط میله‌ای به طول l آویزان شده است. فرض کنید که یک تغییر مکان زاویه‌ای کوچک به دیسک وارد شده و رها می‌گردد. فرکانس طبیعی نوسانات دیسک و معادله حرکت دیسک به ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

$$\Sigma M_t = I_0 \ddot{\theta}$$

$$-K_t \theta = I_0 \ddot{\theta}$$

$$K_t = \frac{GJ}{l}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$



$$I_0 \ddot{\theta} + K_t \theta = 0$$

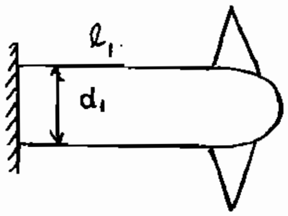
$$\ddot{\theta} + \frac{K_t}{I_0} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{I_0}}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{\theta}}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

مثال : فرکانس طبیعی سیستم زیر چقدر است؟ دو پره داریم که جرم هرکدام از پره‌ها m_2 و طول آن l_2 است. پره‌ها را با مستطیل تقریب می‌زنیم.

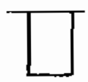


$$I_0 \ddot{\theta} + K_t \theta = 0$$

$$I_0 = 2\frac{1}{3} m_2 l_2^2 = \frac{2}{3} m_2 l_2^2$$

$$K_t = \frac{GJ}{l_1} = \frac{G\frac{\pi d_1^4}{32}}{l_1} = \frac{\pi d_1^4 G}{32 l_1}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{I_0}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi d_1^4 G}{32 l_1}}{\frac{2}{3} m_2 l_2^2}} = \sqrt{\frac{3\pi d_1^4 G}{64 m_2 l_1 l_2^2}}$$

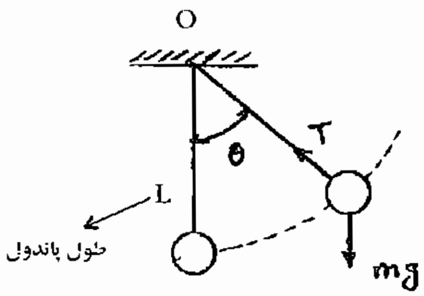


$$I = \frac{1}{3} m l_2^2$$

پاندول:

فرکانس طبیعی پاندول به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

l طول پاندول است.



قید هندسی $x^2 + y^2 = l^2$

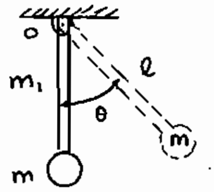
$$M_0 = I_0 \alpha$$

$$-mgl \sin\theta = ml^2 (+\ddot{\theta})$$

$\sin\theta \approx \theta \Rightarrow$ چون θ خیلی کوچک است.

(معادله حرکت برای ارتعاشات خطی (θ های کوچک) $\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0 \Rightarrow \boxed{\omega_n^2=\frac{g}{l}}$

نکته : اگر طول پاندولی به اندازه δ استاتیکی فنری باشد، فرکانس طبیعی آن دو باهم برابر است.



پاندول مرکب:

وزنه‌ای به جرم m به انتهای پاندولی به جرم m_1 متصل شده است.

$$M_0 = I_0\alpha$$

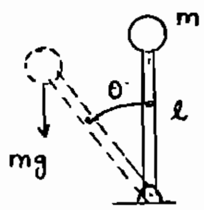
نقطه‌ای که دوران حول آن صورت می‌گیرد.

$$-m_1 g\frac{l}{2}\sin\theta + mgl\sin\theta = \left(\frac{1}{3}m_1 l^2 + ml^2\right)\ddot{\theta}$$

یعنی یک سوم جرم میلهٔ پاندول هم به جرم مؤثر سیستم اضافه می‌شود.

$$\omega_n = \frac{\text{ضریب } \theta}{\text{ضریب } \ddot{\theta}}$$

پاندول معلق:



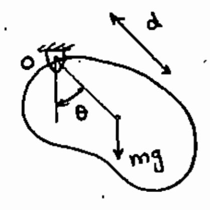
$$+M_0 = I_0\alpha$$

$$+mgl\sin\theta = ml^2(+\ddot{\theta})$$

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

نکته : اگر ضرایب معادله دینامیکی همگی هم علامت نباشند، حرکت ارتعاشی نخواهد بود.

مرکز ضربه:



$$M_0 = I_0\alpha$$

$$-mgd\sin\theta = I_0\ddot{\theta}$$

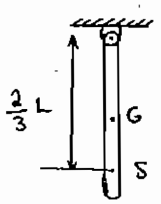
چون θ خیلی کوچک است. $\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_0}\theta = 0$

می‌خواهیم جسم فوق را با پاندولی ساده به‌طول S شبیه سازی کنیم. برای این کار باید فرکانس طبیعی هر دو سیستم یکی باشد.

$$\frac{g}{S} = \frac{mgd}{I_0} \Rightarrow S = \frac{I_0}{md}$$

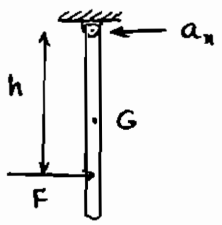
S فاصله مرکز ضربه (Center of percussion) جسم معلق از نقطه O است. (O نقطه آویزگاه است).

$$S=\frac{I_0}{md}=\frac{\frac{1}{3}ml^2}{\frac{ml}{2}}=\frac{2}{3}l$$



مثال : F را کجا وارد کنیم تا نیروی افقی وارد بر تکیه‌گاه صفر شود؟

F باید در مرکز ضربه وارد شود.



$$\sum F_x = ma_{cx}$$

$$\sum F = m\left(\frac{1}{2}\right)\alpha$$

$$\sum M = I\alpha$$

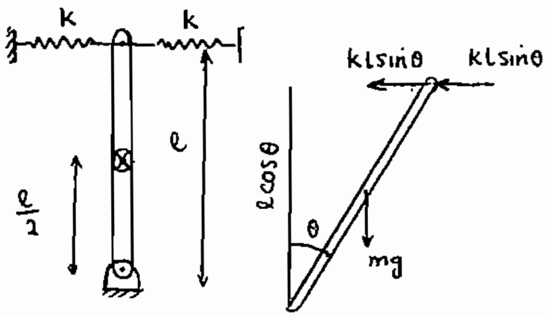
$$F.h=\frac{1}{3}mL^2\alpha$$

$$\left(\frac{ml}{2}\alpha\right)h=\left(\frac{1}{3}ml^2\right)l \quad\Rightarrow\quad h=\frac{2}{3}l$$

الف ـ پایداری سیستم:

هدف از این بخش بررسی پایداری سیستم تحت ارتعاش است.

مثال : در چه صورت این سیستم نوسانی است و در چه صورت ناپایدار است.



حل: در قدم اول معادله دیفرانسیل سیستم را می‌نویسیم.

$$\sum M_0=I_0\ddot{\theta}\to -2kl\sin\theta(l\cos\theta)+mg\left(\frac{l}{2}\sin\theta\right)=I_0\ddot{\theta}$$

$$I_0=\frac{1}{3}ml^2$$

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}+2kl^2\sin\theta\cos\theta-mg\frac{l}{2}\sin\theta=0$$

با فرض کوچک بودن θ، $\sin\theta=\theta$

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}+\left(2kl^2-mg\frac{l}{2}\right)\theta=0$$

نکته : در معادلات دیفرانسیل خطی اگر همه ضرایب وقتی معادله به شکل استاندارد $m\ddot{x}+c\dot{x}+tx+D=0$ نوشته می‌شود، هم‌علامت باشند، سیستم پایدار است و در غیراین‌صورت سیستم ناپایدار می‌باشد.

حالت اول: این سیستم هنگامی نوسانی است که ω_n حقیقی باشد. یعنی:

$$\ddot{\theta}+\frac{3\left(4kl^2-mgl\right)}{2ml^2}\theta=0$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{12kl-3mg}{2ml}}$$

$$12kl-3mg>0 \quad\Rightarrow\quad 12kl>3mg$$

$$\frac{k}{m}>\frac{g}{4l}$$

حالت دوم: اگر $\omega_n = 0$ باشد، یعنی $12kl - 3mg = 0$

$$\ddot{\theta} = 0 \rightarrow \theta(t) = C_1 t + C_2$$

این سیستم نوسانی نیست و ناپایدار است، چون نوسانات آن با زمان به صورت خطی زیاد می‌شود.

حالت سوم: وقتی که $12kl - mg < 0$ باشد که در این‌صورت با تعریف α داریم:

$$\alpha = \frac{3mg - 12kl}{2ml}$$

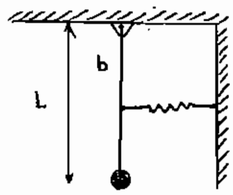
$$\ddot{\theta} - \alpha\theta = 0 \rightarrow \theta(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}$$

که با اعمال شرایط اولیه داریم:

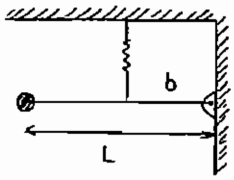
$$\theta(t) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\alpha\theta_0 + \dot{\theta}_0\right)e^{\alpha t} + \left(\alpha\theta_0 - \dot{\theta}_0\right)e^{-\alpha t}\right]$$

این سیستم هم ناپایدار است ولی فرقش با حالت قبل این است که نوسان با زمان به صورت نمایی افزایش پیدا می‌کند.

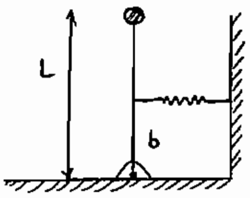
مثال : فرکانس طبیعی حرکت پاندول در سه حالت زیر را پیدا کنید.



(1)



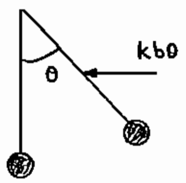
(2)



(3)

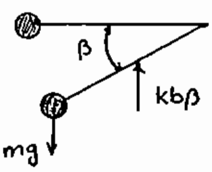
$$-mgL\theta - Kb^2\theta = mL^2\ddot{\theta}$$

وقتی معادله را به شکل $m\ddot{x} + c\dot{x} + tx + D = 0$ می‌نویسیم کلیه ضرایب هم علامت هستند لذا حرکت ارتعاشی و همیشه پایدار است.



$$mL^2\ddot{\theta} + \left(mgL + kb^2\right)\theta = 0$$

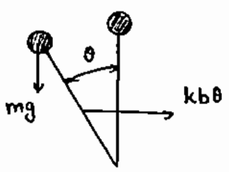
$$\omega_n^2 = \frac{mgL + kb^2}{mL^2}$$



$$M_0 = I_0\alpha$$

$$mgL - kb^2\beta = mL^2\ddot{\beta}$$

$$mL^2\ddot{\beta} - kb^2\beta = mgL \rightarrow \omega_n^2 = \frac{kb^2}{mL^2}$$



$$mgL\theta - kb^2\theta = mL^2\ddot{\theta}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + \left(kb^2 - mgl\right)\theta = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{kb^2 - mgL}{mL^2}$$

$kb^2 > mgl$ شرط پایداری

ب ـ روش انرژی:

در یک سیستم کنسرواتیو انرژی کل ثابت است و معادله دیفرانسیل حرکت را می‌توان با استفاده از قانون بقای انرژی به‌دست آورد.

برای سیستم‌های کنسرواتیو، $(\nabla \times F = 0)$ (مثل نیروی فنر خطی و غیر خطی و نیروهای به فرم kr, kr^2, $kr^{\frac{3}{2}}$, $\frac{k}{r^2}$, mg)

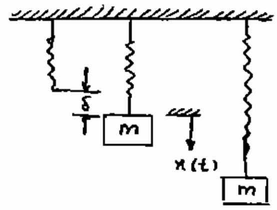
منظور از $\nabla\times F=0$ این است که کار سیستم در یک مسیر بسته صفر است یا کار سیستم در یک فرآیند به مسیر بستگی ندارد.

$$\boxed{T_1+U_1=T_2+U_2 \quad \Rightarrow \quad T+U=\text{constant}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(U+T)=0}$$

$$\boxed{U_{max}=T_{max}}$$

این روش برای سیستم‌های کنسرواتیو با هر درجه آزادی که دارای حرکت هارمونیک باشند به‌کار می‌رود. در این روش بدون این‌که معادلات حرکت را بنویسیم می‌توانیم فرکانس طبیعی سیستم را به‌دست آوریم.



$$k\delta=mg$$

$$T_{max}=U_{max}$$

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$U=\left[\frac{1}{2}k(x+\delta)^2-\frac{1}{2}k\delta^2\right]+[-mgx-0]$$

$$U=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}k\delta^2+k\delta x-\frac{1}{2}k\delta^2-mgx=\frac{1}{2}kx^2$$

چون سرعت صفر نیست پس $\dot{x}$ نمی‌تواند برابر صفر شود: $m\ddot{x}+kx=0 \quad \underline{\dot{x}\neq 0}$ $\frac{d}{dt}(T+U)=0\Rightarrow m\dot{x}\ddot{x}+kx\dot{x}=0$ روش انرژی

$$\omega_n^2=\frac{k}{m}$$

روش دوم: می‌توان پاسخ سیستم را به‌صورت $x=X\sin(\omega_n t+\varphi)$ در نظر گرفت و در معادله انرژی جنبشی و پتانسیل جاگذاری نمود.

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}mX^2\omega_n^2\cos^2(\omega_n+\phi) \qquad x=X\sin(\omega_n t+\varphi)$$

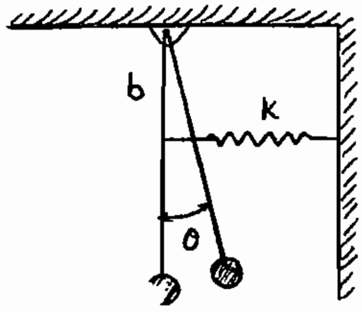
$$U=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kX^2\sin^2(\omega_n+\phi)$$

$$T_{max}=\frac{1}{2}mX^2\omega_n^2$$

$$U_{max}=\frac{1}{2}kX^2$$

$$T_{max}=U_{max}\Rightarrow\omega_n^2=\frac{k}{m}$$

مثال : با استفاده از روش انرژی فرکانس طبیعی سیستم زیر را به‌دست آورید.



$$U=\frac{1}{2}k(b\theta)^2+mgl(1-\cos\theta) \qquad T=\frac{1}{2}m(l\dot\theta)^2=\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2$$

$$U=\frac{1}{2}kb^2\theta^2+mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt}(T+U)=0\Rightarrow ml^2\ddot\theta\dot\theta+kb^2\dot\theta\theta+mgl\dot\theta\theta=0$$

$$ml^2\ddot\theta+\left(kb^2+mgl\right)\theta=0$$

$$\omega_n^2=\frac{kb^2+mgl}{ml^2}$$

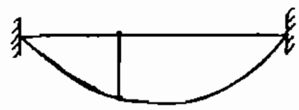
ج - روش ریلی

از روش ریلی می‌توان در محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم‌های پیوسته که درجه آزادی آن‌ها بی‌نهایت است، استفاده نمود. در این روش شکلی برای مود اول ارتعاش فرض می‌کنیم که شرایط مرزی را برآورده نماید و تغییر مکان هر نقطه را به‌صورت حاصل‌ضرب این شکل فرضی در یک تابع زمانی در نظر می‌گیریم.

$$u(x,t)=U(x)F(t)$$

ارتعاشات عرضی تار:

$$u(x,t)=U(x)F(t)=\left(ax^2+bx+c\right)F(t)$$



$$\begin{cases} x=0 & U(x)=0 \\ x=L & U(x)=0 \\ x=\frac{L}{2} & U(x)=1 \end{cases} \qquad \Rightarrow U(x)=\frac{-4}{L^2}x^2+\frac{4}{L}x \quad , \frac{dU}{dx}=\frac{-8}{L^2}x+\frac{4}{L}$$

نکته : فرکانس طبیعی مود اول را که از روش ریلی به‌دست می‌آوریم، از مقدار واقعی بیشتر است.

$$u(x,t)=\left(\frac{-4}{L}x^2+\frac{4}{L}x\right)F(t)$$

$$T=\int_0^L\frac{1}{2}\rho\dot u^2(x.t)dx=\frac{1}{2}\rho\int_0^L\left(\frac{-4}{L^2}x^2+\frac{4}{L}x\right)^2\dot F^2(t)dx$$

$$T=\frac{1}{2}\rho\dot F^2(t)\int_0^L\left(\frac{-4}{L^2}x^2+\frac{4}{L}x\right)^2dx$$

$$T=\frac{1}{2}\rho\dot F^2(t)\left[\frac{16x^5}{5L^4}+\frac{16x^3}{3L^2}-\frac{32x^4}{4L^3}\right]_0^L=\frac{1}{2}(a\rho L)\dot F^2(t) \quad , \quad a=\left[\frac{16x^5}{5L^4}+\frac{16x^3}{3L^2}-\frac{32x^4}{4L^3}\right]_0^L$$

$$m_{eff}=aL\rho$$

انرژی کرنشی ذخیره شده در تار:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L \tau\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx$$

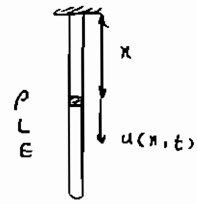
$$U=\frac{1}{2}T\int_0^L\left(\frac{-8}{L^2}x+\frac{4}{L}\right)^2 F^2(t)dx=\frac{1}{2}F^2(t)\underbrace{(\text{معادل } k)}$$

ارتعاشات طولی یک میله:

معادله حرکت عبارت‌است از:

$$E\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$u=(x,t)=U(x)F(t)=\left(ax^2+bx+c\right)F(t)$$



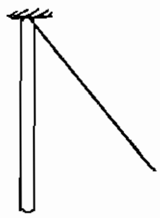
$$T=\frac{1}{2}\int_0^L \rho\dot{u}^2(x,t)dx=\frac{1}{2}\rho\int_0^L\left(ax^2+bx+c\right)^2\dot{f}^2_{(t)}dx=\frac{1}{2}\underbrace{(\rho L\ (\text{عدد}))}_{\text{جرم معادل}}\dot{F}^2(t)$$

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L E\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx=\frac{1}{2}EF^2(t)\int_0^L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx=\frac{1}{2}\underbrace{(E(\text{عدد}))}_{\text{جرم معادل}}F^2(t)$$

اگر u(x) را تابع خطی می‌گرفتیم:

$$u(x,t)=(ax+b)F(t)$$

$$\begin{cases}x=0 & u=0\\ x=L & u=1\end{cases}\quad u(x)=\frac{x}{L}$$



$u(x,t)=\frac{x}{L}F(t)$: تغییر مکان هر نقطه را بر اساس تغییر مکان انتهای میله به‌دست می‌آوریم.

$$T=\int_0^L\frac{1}{2}\rho\left(\frac{x}{L}\right)^2\dot{F}^2(t)dx=\frac{1}{2}\rho\dot{F}^2(t)\left[\frac{x^3}{3L^2}\right]_0^L=\frac{1}{2}\left(\frac{\rho L}{3}\right)\dot{F}^2(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\text{جرم فنر}}{3}\right)\dot{F}^2(t)$$

$$U=\int_0^L\frac{1}{2}EA\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx=\frac{1}{2}EA\int_0^L\left[\frac{1}{L}F(t)\right]^2 dx=\frac{1}{2}EAF^2(t)\frac{x}{L^2}\Big|_0^L$$

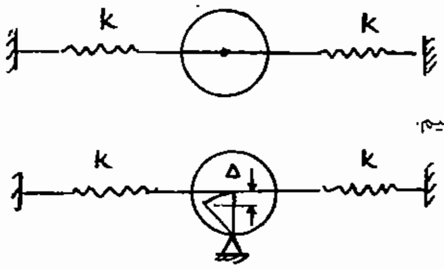
$$U=\frac{1}{2}\left(\frac{EA}{L}\right)F^2(t)\qquad \text{سختی معادل}=\frac{EA}{L}$$

انرژی کرنشی در اثر خمش:

$$U=\frac{1}{2}EI\int_0^L\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\delta x^2}$$

انرژی کرنشی در اثر پیچش:

$$U=\frac{1}{2}GJ\int_0^L\left[\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx$$



مثال : فرکانس طبیعی کدام سیستم بیشتر است؟

فرکانس طبیعی را می‌توان نسبتی از انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی تعریف نمود. انرژی جنبشی هر دو سیستم برابر است. پس انرژی‌های پتانسیل را مقایسه می کنیم.

$$\omega_n^2 = \frac{\text{انرژی پتانسیل}}{\text{انرژی جنبشی}}$$

$$U_1 = \frac{1}{2}(2k)x^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(2k)x^2 - mg\Delta$$

$$U_1 > U_2 \Rightarrow \omega_1 > \omega_2$$

مثال : فرکانس طبیعی کدام سیستم بیشتر است؟

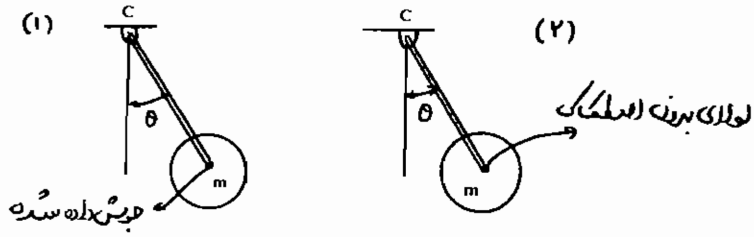
انرژی پتانسیل دو سیستم برابر است. پس انرژی‌های جنبشی را مقایسه می‌کنیم.

$$U = mg\ell(1-\cos\theta)$$

$$T_{1\,\text{جوش}} = \frac{1}{2}m(\ell\theta)^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2$$

$$T_{2\,\text{لولا}} = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2$$

$$T_{\text{جوش}} > T_{\text{لولا}} \rightarrow \omega_{\text{لولا}} > \omega_{\text{جوش}}$$



۲ـ ارتعاشات آزاد بامیرایی لزجی یا استهلاک ویسکوز:

میرایی در فرکانس میرایی مؤثر است. ضریب میرایی بحرانی را به صورت $c_c = 2m\omega_n$ تعریف می‌کنیم. در این صورت نسبت میرایی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد.

$$\boxed{\text{نسبت میرایی} \quad \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}}$$

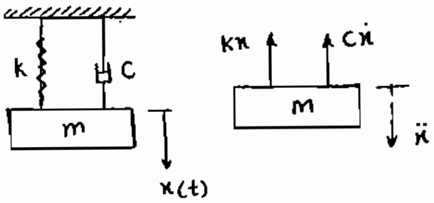
$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

$$\boxed{\text{فرکانس میرایی} \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\text{پریود میرایی} \qquad \tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

توجه: اگر $1 > \zeta > 0$ باشد حرکت نوسانی است.

کاربرد قانون دوم نیوتن در مورد سیستم جرم، فنر و دمپر زیر معادله حرکت این سیستم را به‌دست می‌دهد.



$$+kx+c\dot{x}=m(-\ddot{x})$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

جهت حل معادله حرکت جواب زیر را حدس می‌زنیم:

$$x(t)=Ae^{st}$$

با جایگذاری این جواب در معادله حرکت خواهیم داشت:

معادله مشخصه $ms^2+cs+k=0$

$$s_1,s_2=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4km}}{2m}\quad\Rightarrow\quad x_1(t)=c_1e^{s_1t}\quad,\quad x_2(t)=c_2e^{s_2t}$$

$$x(t)=c_1e^{s_1t}+c_2e^{s_2t}$$

جواب عمومی از ترکیب خطی جواب‌های $x_2(t),x_1(t)$ به‌دست می‌آید.

الف) $c^2>4km$: s_2,s_1 حقیقی‌اند و حرکت غیرنوسانی است. در این حالت سیستم در حالت فوق میرایی است.

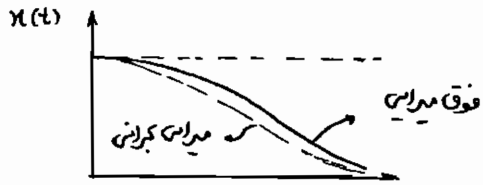
$$x(t)=A_1e^{\frac{-c+\sqrt{c^2-4km}}{2m}t}+A_2e^{\frac{-c-\sqrt{c^2-4km}}{2m}t}$$

ب) $c^2=4km$: $s_1=s_2=\frac{-c}{2m}$ سیستم دارای حالت میرایی بحرانی است.

$$x(t)=A_1e^{\frac{-c}{2m}t}+A_2te^{\frac{-c}{2m}t}$$

ضریب میرایی بحرانی $c_c=2\sqrt{km}$

ج) $c^2<4km$: سیستم دارای حالت زیر میرایی است.

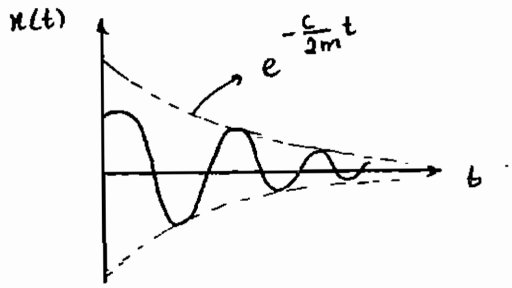


$$s_1\ ,\ s_2=\frac{-c\pm i\sqrt{4mk-c^2}}{2m}$$

$$x(t)=e^{\frac{-c}{2m}}\left[A_1e^{\frac{i\sqrt{4mk-c^2}}{2m}t}+A_2e^{\frac{-i\sqrt{4mk-c^2}}{2m}t}\right]$$

فرکانس طبیعی میرا شده $\omega_d=\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}$

در حالت کلی : $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$ $\qquad x(t)=e^{\frac{-c}{2m}t}\left[C\sin(\omega_dt+\phi)\right]$



$$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

معادله مشخصه استاندارد $s^2+(2\zeta\omega_n)s+\omega_n^2=0$

$$\zeta=\frac{c}{c_c}\Rightarrow\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=0$$

$$s=-\zeta\omega_n\pm\sqrt{\zeta^2\omega_n^2-\omega_n^2}$$

$$s=-\zeta\omega_n\left(\pm\sqrt{\zeta^2-1}+1\right)$$

اگر $1<\zeta$ باشد: سیستم دارای حالت فوق میرایی و حرکت غیر ارتعاشی است.

اگر $1=\zeta$ باشد: سیستم دارای میرایی بحرانی است. این سیستم نوسانی نیست ولی میراشونده است.

اگر $1>\zeta$ باشد: سیستم دارای حالت زیر میرایی و حرکت ارتعاشی یا نوسانی است.

در صورتی‌که فرم کلی ریشه‌های معادله مشخصه به‌صورت $S=a\pm ib$ باشد.

۱- اگر $a<0$ باشد: سیستم پایدار است.

۲- اگر $a>0$ باشد: سیستم ناپایدار است.

در حالت میرایی بحرانی:

$$\boxed{x(t)=e^{-\omega_n t}\left[(V_0+\omega_n X_C)t+X_0\right]}$$

در حالت میرایی زیر بحرانی:

$$\boxed{x(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\left[\frac{V_0+\zeta\omega_n X_0}{\omega_d}\sin\omega_d t+X_0\cos\omega_d t\right]}$$

در حالت بدون میرا:

$$\boxed{x(t)=\frac{V_0}{\omega}\sin\omega_n t+X_0\cos\omega_n t}$$

در حالت فوق میرایی:

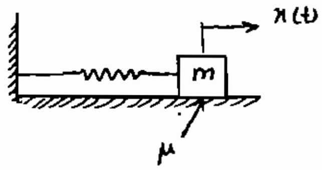
$$\boxed{x(t)=c_1 e^{-\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}+c_2 e^{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}}$$

$$c_1=\frac{\dot{x}_0+x_0\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

$$c_2=\frac{-\dot{x}_0-x_0\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

۳ـ ارتعاشات آزاد با میرایی کولمب یا اصطکاک خشک:

سیستم یک درجه آزادی زیر را که دارای اصطکاک خشک است، در نظر بگیرید. چون نیروی اصطکاک با جهت سرعت تغییر می‌کند لازم است مسئله را در دو حالت در نظر بگیریم:



$$F_d=\mu mg$$

$$-k|x|\frac{x}{|x|}-F_d\frac{x}{|\dot{x}|}=m\ddot{x}$$

الف ـ اگر $\dot{x}>0$ باشد حرکت به سمت راست است $|\dot{x}|=\dot{x}$ و معادله حرکت عبارت‌است از:

$$\dot{x}>0:-kx-F_d=m\ddot{x}\Rightarrow m\ddot{x}+kx=-F_d$$

اگر $\dot{x}<0$ باشد حرکت به سمت چپ است $|\dot{x}|=-\dot{x}$ و معادله حرکت عبارت‌است از:

$$\dot{x}<0:-kx+F_d=m\ddot{x}\Rightarrow m\ddot{x}+kx=F_d$$

اگر سیستم به سمت چپ حرکت کند:

$$m\ddot{x}+kx=F_d$$

$$x(t)=A\sin\omega_n t+B\cos\omega_n t+\frac{F_d}{k}\qquad \dot{x}(t)=A\omega_n\cos\omega_n-B\omega_n\sin\omega_n t$$

شرایط اولیه
$$\begin{cases}t=0 & x=0\\ t=0 & \dot{x}=0\end{cases}$$

با اعمال شرایط اولیه در $x(t)$, $\dot{x}(t)$:

$A=0$, $B=x_0-\frac{F_d}{k}$ تغییر مکان استاتیکی معادل نیروی اصطکاک عبارت‌است از:

$$x(t)=\left(x_0-\frac{F_d}{k}\right)\cos\omega_n t+\frac{F_d}{k}$$

نکته: در سیستم‌هایی که میرایی کولمب داریم، فرکانس طبیعی نوسان همان فرکانس طبیعی بدون میرا $\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$ است. برای پیداکردن حداکثر فشردگی از $\dot{x}=0$ زمان حداکثر فشردگی را به‌دست می‌آوریم (t_{max}) و در x قرار می‌دهیم تا حداکثر فشردگی به‌دست بیاید.

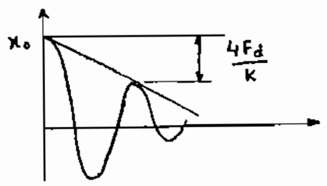
$$t=\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{2\omega_n}=\frac{\pi}{\omega_n}$$ زمان فشردگی

$$x(t)=\frac{\pi}{\omega_n}=\left(x_0-\frac{F_d}{k}\right)(-1)+\frac{F_d}{k}=-\left(x_0-2\frac{F_d}{d}\right)$$

علامت منفی نشان می‌دهد که سیستم به سمت چپ رفته است.

در اثر یک تغییر مکان اولیه x_0 سیستم شروع به نوسان کرده و در هر رفت یا برگشت $\frac{2F_d}{k}$ از دامنهٔ نوسان آن کم شده است. یعنی در یک سیکل کامل از دامنه به اندازه $\frac{4F_d}{k}$ کم شده است. به عبارت دیگر دامنه نوسان در هر دو سیکل پیاپی حرکت را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

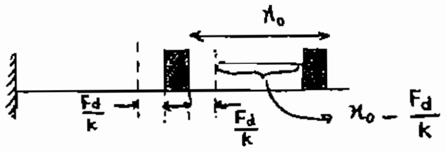
$$x_m=x_{m-1}-\frac{4\mu N}{k}$$



نکته: در سیستم جرم و فنر سیستم همیشه حول یک نقطه ثابت نوسان می‌کرد ولی در میرایی کولمب نقطهٔ ثابت که نوسان حول آن انجام شود، نداریم.

مثال: اگر $x_0=1.5\frac{F_d}{k}$ باشد سیستم در کجا می‌ایستد؟

حل: همین جا سیستم می‌ایستد.



$$1.5\frac{F_d}{k}-\frac{F_d}{k}=0.5\frac{F_d}{k}\Rightarrow 0.5F_d<F_d$$

یعنی تغییر مکان اولیه برای غلبه بر اصطکاک خشک کافی نیست و جسم اصلاً حرکت نخواهد کرد.

مثال: اگر جسم را به اندازهٔ x_0 بکشیم بعد از چند نیم سیکل می‌ایستد؟

n تعداد نیم سیکل‌ها قبل از توقف است.

$$\left(x_0-n\frac{2F_d}{k}\right)k\le F_d$$

$$F_d=\mu N \quad\Rightarrow\quad kx_0-n(2F_d)=F_d\Rightarrow n=\frac{x_0-\frac{F_d}{k}}{2\frac{F_d}{k}}\quad\Rightarrow\quad \boxed{n=\frac{x_0-\frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}}}$$

مشخصات سیستم‌های با اصطکاک خشک (میرایی کولمب)

۱- فرکانس طبیعی سیستم با افزودن اصطکاک خشک تغییری نخواهد کرد. در صورتی که با افزودن میرایی لزجی تغییر می‌کند.

۲- حرکت یک سیستم با اصطکاک خشک از نوع تناوبی است. در صورتی‌که حرکت سیستم با میرایی لزجی می‌تواند غیر تناوبی باشد.

۳- دامنه نوسانات درسیستم با اصطکاک خشک به طور خطی کاهش می‌یابد. در صورتی‌که در سیستم با میرایی لزجی به‌صورت نمایی است.

۴- در هر سیکل متوالی دامنه حرکت به اندازه $\frac{4\mu N}{k}$ کاسته شده به‌طوری‌که دامنه‌ها در پایان هر دو سیکل متوالی با رابطهٔ زیر به هم مرتبط می‌شوند.

$$\boxed{X_m = X_{m-1} - 4\frac{\mu N}{k}}$$

مثال : یک شافت فولادی به طول ۱ متر و قطر ۵۰ میلی‌متر از یک طرف فیکس و از طرف دیگر یک پولی با ممان اینرسی 25kgm^2 را حمل می‌کند. یک ترمز اصطکاکی گشتاور اصطکاکی ثابت 400 N. m را در سرتاسر محیط پولی اعمال می‌کند. اگر پولی به اندازه 6 درجه جابه‌جا و رها شود مطلوب است:

الف- تعداد سیکل‌ها قبل از توقف پولی

ب- وضعیت نشست نهایی پولی

حل:

$$n = \left\{ \frac{\theta_0 - \frac{T}{K_t}}{\frac{2T}{K_t}} \right\}$$

K_t ضریب سختی فنر پیچشی است $k_t = \frac{GJ}{L} = \frac{\left(8\times10^{10}\right)\left(\frac{T_1}{32}(0.05)^4\right)}{L} = 49087.5\frac{\text{N.m}}{\text{rad}}$

حرکت بعد از 6 نیم سیکل متوقف می‌شود.

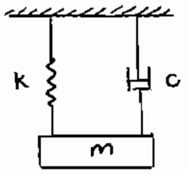
$$\Rightarrow n = \frac{0.10475 - \left(\frac{400}{49087.5}\right)}{\frac{800}{49087.5}} = 5.916$$

زاویه نشست نهایی پولی نسبت به حالت اولیه:

$$\theta = 0.10472 - 6\times 2\left(\frac{400}{49087.5}\right) = 0.39734^\circ$$

۴ـ کاهش لگاریتمی:

روشی آزمایشی است که به‌وسیلهٔ آن می‌توان ζ یک سیستم را توسط ارتعاشات آزاد اندازه‌گیری کرد. δ لگاریتم طبیعی نسبت دو دامنه متوالی است. این تعریف فقط برای سیستم‌های نوسانی است. $(0<\zeta<1)$



$$x_0(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\left[X\sin(\omega_d t+\phi)\right]$$

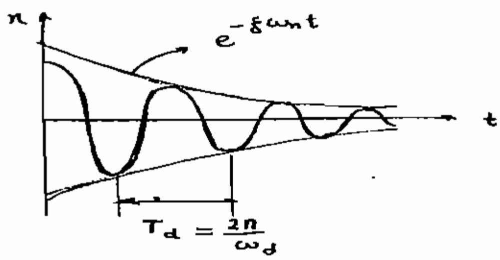
$$x_1(t)=e^{-\zeta\omega_n(t+T_d)}\sin\left[\omega_d(t+T_d)+\phi\right]$$

$$\text{مقدار ثابت} = \text{کاهش دامنه} = \frac{x_0}{x_1}=e^{\zeta\omega_n T_d}$$

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\ldots\ldots\ldots=\frac{x_n}{x_{n+1}}}$$

$$\boxed{\ln\frac{x_0}{x_1}=\zeta\omega_n T_d = \text{کاهش لگاریتمی} = \delta}$$

δ از آزمایش از روی x_0 , x_1 به‌دست می‌آید.



$$\zeta\omega_n T_d=\zeta\omega_n\frac{2\pi}{\omega_d}=\zeta\frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}=\delta$$

$$\delta=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\zeta=\frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}}$$

در صورتی‌که مقادیر ξ بسیار کوچک باشد، مقدار کاهش لگاریتمی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد:

$$\delta=2\pi\zeta$$

اگر به‌جای دو دامنه متوالی نسبت دو دامنه با n فاصله داشته باشیم، کاهش لگاریتمی برابر است با:

$$\delta=\frac{1}{n}\ln\frac{x_0}{x_n}$$

تست سال ۶۸ ـ ۶۷

اگر دامنه یک نوسان میرا در دوره تناوب اول و دوم برابر با 1.5 cm و 1 cm باشد، در دوره تناوب سوم دامنه تناوب برابر است با:

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\ln(1.5)$ ۳) $e^{1.5}$ ۴) هیچ‌کدام

از رابطهٔ مربوط به کاهش لگاریتمی استفاده می‌کنیم.

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=e^{\delta}=\text{constant}$$

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}\rightarrow\frac{1.5}{1}=\frac{1}{x_3}\Rightarrow x_3=\frac{2}{3}$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست سال ۷۰ ـ ۶۹

فرکانس طبیعی یک سیستم جرم و فنر با میرایی از نوع کولمب (خشک)

۱) از فرکانسی طبیعی بدون میرا کمتر است.

۲) از فرکانسی طبیعی بدون میرا بیشتر است.

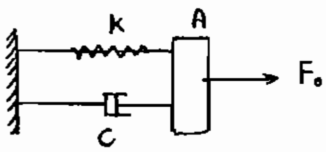
۳) با فرکانسی طبیعی بدون میرا برابر است.

۴) بستگی به ضریب اصطکاک دارد.

طبق تئوری در سیستم با اصطکاک خشک فرکانس طبیعی با فرکانس طبیعی سیستم بدون میرا (ω_n) برابر است.

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست سال ۷۰ ـ ۶۹



در سیستم روبه‌رو نیروی F_0 به طور استاتیکی به صفحه A وارد شده و جرم صفحه ناچیز است.

۱) نیروی F_0 بر روی مستهلک کننده ویسکوز کاری انجام نمی‌دهد.

۲) مقدار کار انجام شده توسط نیروی F_0 بر مستهلک کننده ویسکوز برابر با $\frac{1}{2}\frac{F_0^2}{K}$ است.

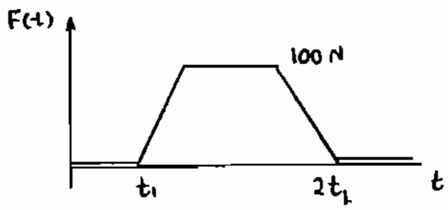
۳) مقدار کار انجام شده توسط نیروی F_0 بر مستهلک کننده ویسکوز برابر با انرژی ذخیره شده در فنر است.

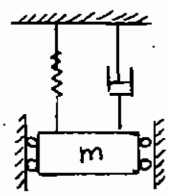
۴) مقدار کار انجام شده توسط نیروی F_0 بر مستهلک کننده ویسکوز نصف کار انجام شده بر روی فنر است.

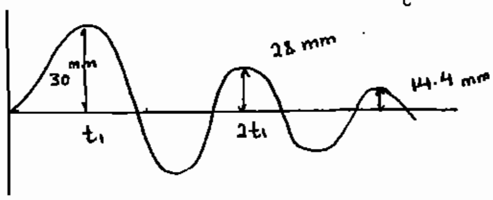
حل: چون نیروی F_0 استاتیکی است، سرعت حرکت صفحه $V = 0$ است. مستهلک کننده ویسکوز کاری انجام نمی‌دهد.

گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

مثال : با مراجعه به شکل و با فرض چسبنده بودن نوع استهلاک (viscous) با مراجعه به منحنی‌های داده شده است نسبت استهلاک $\zeta = \frac{c}{c_c}$ کدام یک از اعداد زیر است؟







۱) 0.021　　۲) 0.0011

۳) 0.061　　۴) 0.0528

نکته این است که δ برای ارتعاشات آزاد مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین منحنی از $2t_1$ به بعد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$x_2 = 28$

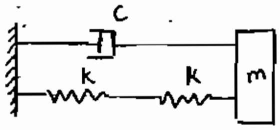
$x_3 = 14.4$

$$\delta = \ln\frac{x_2}{x_3} = \ln\left(\frac{28}{14.4}\right)$$

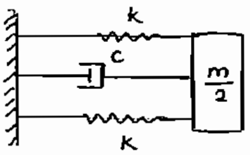
$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = 0.0528$$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تست سال ۷۳ ـ ۷۲



الف



ب

برای دو سیستم داده شده در مورد نسبت میرایی (ξ) کدام یک از جملات زیر صحیح است؟

۱) نسبت میرایی سیستم الف کمتر از ب است.

۲) نسبت میرایی سیستم الف بیشتر از ب است.

۳) نسبت میرایی سیستم الف برابر با ب است.

۴) نسبت میرایی سیستم الف بیشتر از ب است.

حل: طبق رابطهٔ گفته شده برای نسبت میرایی داریم:

در مورد سیستم الف $k_{eq}=\frac{k}{2}$ و در نتیجه $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{2m}}$

در مورد سیستم ب $k_{eq}=2k$ و در نتیجه $\omega_n=\sqrt{\frac{2k}{\frac{m}{2}}}$

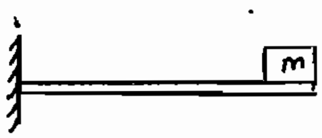
$c_c=2m\omega_n$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{الف} & \zeta=\frac{C}{C_c}=\frac{C}{2m\sqrt{\frac{k}{2m}}} \\ \text{ب} & \zeta=\frac{C}{C_c}=\frac{C}{m\sqrt{\frac{2k}{\frac{m}{2}}}} \end{array}\right\}\Rightarrow \zeta_{\text{ب}}<\zeta_{\text{الف}}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست سال ۷۹ ـ ۷۸

سیستم نشان داده شده با یک سیستم یک درجه آزادی تقریب زده شده است. اگر فرکانس طبیعی و پریود طبیعی سیستم با در نظر گرفتن جرم تیر به ترتیب ω_n و t_n و بدون در نظر گرفتن این جرم Ω_n و T_n باشند، کدام یک از عبارات زیر در مورد این سیستم صحیح است؟

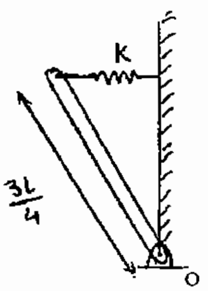


۱) $\omega_n<\Omega_n\ ,\ T_n<t_n$ ۲) $\omega_n=\Omega_n\ ,\ T_n=t_n$

۳) $\omega_n<\Omega_n\ ,\ t_n<T_n$ ۴) $\omega_n>\Omega_n\ ,\ T_n>t_n$

چون تیر در حالت جرم‌دار جرم معادل بیشتری دارد، طبق رابطهٔ $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس طبیعی کمتری دارد و $\omega_n<\Omega_n$، پس $t_n>T_n$ خواهد بود و گزینه ۱ درست است.

مثال : شرط نوسانی بودن سیستم شکل مقابل کدام است ؟



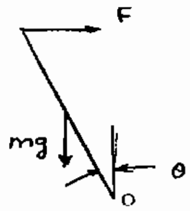
۱) $mg>\frac{9}{8}kL$

۲) $mg<\frac{9}{8}KL$

۳) $mg>\frac{8}{9}KL$

۴) هیچ‌کدام

ابتدا معادله حرکت سیستم ارتعاشی فوق را می‌نویسیم.



$$\frac{mgl}{2}\theta - k\frac{3}{4}l\theta\left(\frac{3}{4}l\right) = m\ddot{\theta}$$

$$\theta\left(\frac{mgl}{2}-\frac{9}{16}kl^2\right)=I_0\ddot{\theta}$$

همان‌طور که قبل ذکر شد، شرط نوسانی بودن سیستم این است که تمام ضرایب مثبت باشد.

$$I_O\ddot{\theta}+\left(\frac{9}{16}kl^2-\frac{mgl}{2}\right)\theta=0$$

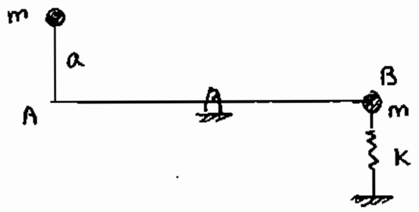
$$\frac{9}{16}kl^2-\frac{mgl}{2}>0$$

$$mg<\frac{9}{8}kl$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست سال ۷۲ ـ ۷۱

در سیستم ارتعاشی نشان داده شده، در حالت استاتیکی میله‌های صلب AB افقی و AC عمودی است. در چه صورت سیستم یک نوسان هارمونیک خواهد داشت؟



۱) اگر $\frac{K}{3m}<\frac{g}{a}$ باشد.

۲) اگر $\frac{K}{3m}>\frac{g}{a}$ باشد.

۳) اگر $\frac{K}{m}>\frac{g}{a}$ باشد.

۴) سیستم فوق یک سیستم ارتعاشی است و در هر صورت حرکت هارمونیک دارد.

ابتدا معادله حرکت سیستم را می‌نوسیم.

$$\Sigma M_0=I_0\ddot{\theta} \quad\Rightarrow\quad mga\theta-mga-Ka^2\theta+mga=I_0\ddot{\theta}$$

$$I_0\ddot{\theta}+\left(Ka^2-mga\right)\theta=0$$

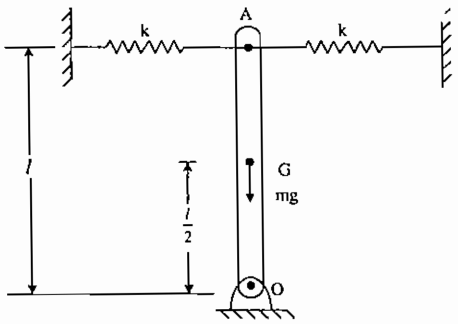
$$Ka-mg>0\rightarrow\frac{K}{m}>\frac{g}{a}$$

همان طور که قبلاً ذکر شد، شرط ارتعاشی بودن یک سیستم این است که در معادله حرکت، ضرایب مثبت باشد.

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

سؤالات سال ۱۳۸۵

۱ـ اگر ممان اینرسی یک میله به جرم m و طول L حول انتهای آن $\frac{mL^2}{3}$ باشد، شرط آنکه سیستم شکل زیر برای تغییر زاویه کوچک θ میله حول نقطه O ارتعاشات پایدار داشته باشد آن است که:



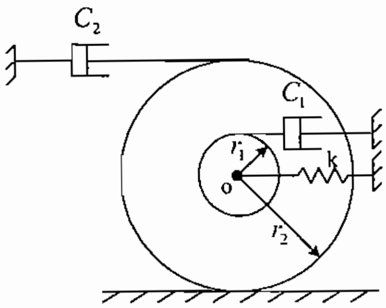
۱) $K > \frac{W}{4L}$

۲) $K = \frac{W}{4L}$

۳) $K < \frac{W}{4L}$

۴) سیستم همواره ارتعاشات پایدار دارد.

۲ـ نسبت میرایی در مجموعهٔ نشان داده شده کدام‌یک از پاسخ‌های زیر است جرم قرقره m_0 و ممان اینرسی آن حول مرکز جرمش I_0 و قرقره بدون لغزش روی مسیر افقی می‌غلتد؟



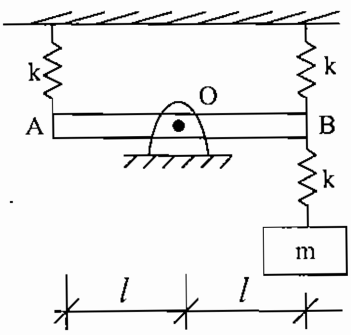
۱) $\xi = \dfrac{C_1 + 4C_2}{2\sqrt{\left(\frac{I_0}{r_2^2} + m_0\right)K}}$

۲) $\xi = \dfrac{C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2}{2\sqrt{\left(I_0 + m_0 r_2^2\right)K r_2^2}}$

۳) $\xi = \dfrac{C_1 (r_2 - r_1)^2 + 4r_2^2 C_2}{2\sqrt{\left(I_0 + m_0 r_2^2\right)K r_2^2}}$

۴) $\xi = \dfrac{C_1 (r_1 - r_2)^2 + 4r_2^2 C_2}{2\sqrt{\left(I_0 + m_0 r_2^2\right)K r_2^2}}$

۳ـ اگر میله AB صلب بدون جرم در وسط آن لولا شده باشد. مطلوبست فرکانس طبیعی سیستم متشکل از یک جرم m و 3 فنر K.



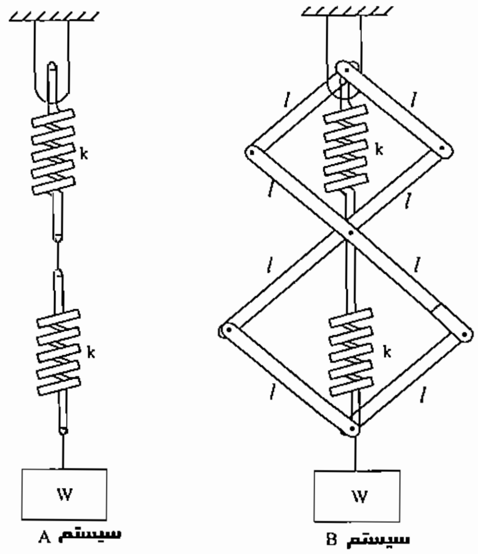
۱) $\sqrt{\frac{K}{m}}$

۲) $\sqrt{\frac{3K}{m}}$

۳) $\sqrt{\frac{2K}{3m}}$

۴) $\sqrt{\frac{3K}{2m}}$

۴ـ دو سیستم A و B مطابق شکل موجود می‌باشد. فرکانس طبیعی کدام‌یک از سیستم‌ها بزرگ‌تر می‌باشد؟



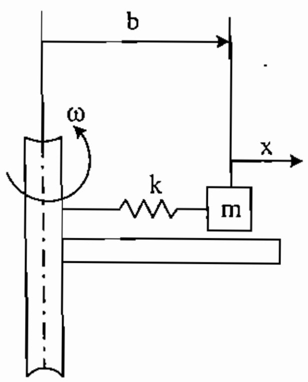
۱) فرکانس طبیعی سیستم A از سیستم B بزرگ‌تر است.

۲) فرکانس طبیعی دو سیستم A و B برابر می‌باشد.

۳) فرکانس طبیعی سیستم B از سیستم A بزرگ‌تر است.

۴) فرکانس طبیعی سیستم B بستگی به طول l میله‌ها می‌تواند از فرکانس طبیعی سیستم A بزرگ‌تر، کوچک‌تر و یا مساوی آن باشد.

۵ـ جرم m روی صفحه افقی بدون اصطکاک با سرعت زاویه‌ای ω حول محوری می‌چرخد. شعاع وضعیت تعادل m برابر b می‌باشد. فرکانس طبیعی ارتعاشات m را نسبت به این وضع تعادل بدست آورید.



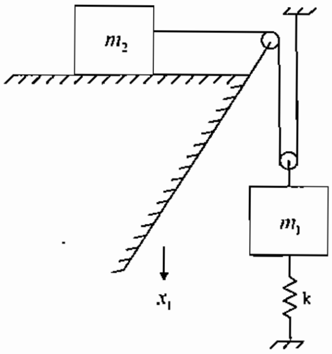
۱) $\omega_n = \omega$

۲) $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$

۳) $\omega_n = \omega + \sqrt{\frac{K}{m}}$

۴) $\omega_n = \sqrt{\omega^2 + \frac{K}{m}}$

۶ـ در مجموعهٔ نشان داده شده، بلوک m_2 روی سطح افقی با ضریب اصطکاک $\mu_K = \mu_S = \mu$ قرار گرفته است. معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش مجموعه کدام‌یک از پاسخ‌های زیر است؟



۱) $(m_1 + 4m_2)\ddot{x}_1 + kx_1 = 0$

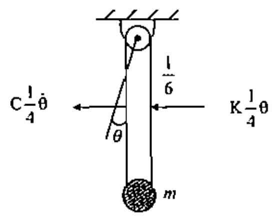
۲) $(m_1 + 4m_2)\ddot{x}_1 + kx_1 = m_1 g$

۳) $(m_1 + 4m_2)\ddot{x}_1 + kx_1 = \pm\mu m_2 g$

۴) $(m_1 + 4m_2)\ddot{x}_1 + kx_1 = \pm\mu m_2 g + m_1 g$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۶

۱ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

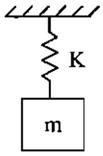


$$\Rightarrow \sum M_o = I_o\ddot{\theta} \Rightarrow -C\frac{l}{4}\dot{\theta}\frac{l}{4} - k\frac{l}{4}\theta\frac{l}{4} = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad ml^2\ddot{\theta} + \frac{cl^2}{16}\dot{\theta} + \frac{kl^2}{16}\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\theta} + \frac{c}{16}\dot{\theta} + \frac{k}{16}\theta = 0$$

۲ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

قبل از شروع حرکت به دلیل تعادل استاتیکی مجموعه، طول فنر به اندازه $\frac{mg}{k}$ افزایش یافته است و بنابراین فنر نیروی mg را به جعبه و جرم m وارد می‌کند. پس از شروع حرکت چون جعبه دارای حرکت سقوط آزاد با شتاب g می‌باشد پس برای حرکت نسبی جرم m نسبت به جعبه نیروی وزن جرم m حذف می‌شود و تنها نیروی وارد بر جرم m همان نیروی فنر به دلیل کشیدگی اولیه می‌باشد.



$$m\ddot{x} = kx \Rightarrow x = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

حال با توجه به شرایط اولیه‌ای که سرعت جرم m در شروع حرکت برابر صفر و تغییر طول اولیه برابر $\frac{mg}{k}$ می‌باشد ضرایب A و B را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x &= A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ \dot{x} &= -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = \frac{+mg}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = +\frac{mg}{k} \\ B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = +\frac{mg}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

حال مدت زمان برخورد جعبه از سکون تا زمین را به دست می‌آوریم (حرکت سقوط آزاد)

$$gH = \frac{1}{2}V^2 - 0 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2gH}$$

$$V = gt + V_0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\sqrt{2gH}}{g} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

با جایگذاری این زمان در معادله حرکت نسبی جرم m تغییر طول فنر را در زمان برخورد جعبه محاسبه می‌کنیم:

$$x\left(t = \sqrt{\frac{2H}{g}}\right) = +\frac{mg}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

حال تغییر طول نهایی فنر برابر است با x نسبی بین جرم و جعبه در شروع حرکت منهای x نسبی بین جرم و جعبه در لحظه برخورد

$$\Delta_x = \frac{mg}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{2H}{g}}\right)$$

و نیروی وارد بر جرم m در لحظه برخورد برابر نیروی فنر است که آن نیز از قانون هوک به دست می‌آید:

$$F = kx = mg\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{2H}{g}}\right)(\text{به سمت بالا}) = -mg\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{2H}{g}}\right)$$

۳ ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

از لحاظ ابعادی همه گزینه‌ها اشتباه هستند.

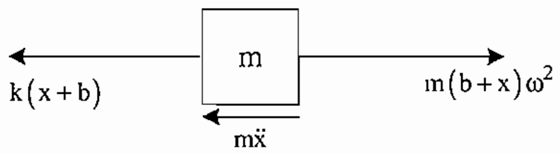
۴ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با فرض بدون اصطکاک بودن مفاصل در سازه محاط بر فنر، پس وجود سازه در عملکرد سیستم هیچ تأثیری نخواهد داشت و بنابراین فرکانس طبیعی در سیستم با هم برابر است.

نکته: اگر اصطکاک در مفاصل سازه فرض شود در این‌صورت سازه باعث افزایش سختی معادل مجموعه شده و در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم سازه‌دار بیشتر از بدون سازه می‌شود.

۵ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

با توجه به دوران جرم m، دیاگرام آزاد آن را رسم می‌کنیم که شامل یک نیروی گریز از مرکز و یک نیروی فنر می‌باشد:



حال برای قانون دوم خواهیم داشت:

$$\sum F_x = ma_x \;\Rightarrow\; m(b+x)\omega^2 - k(x+b) = m\ddot{x} \;\Rightarrow\; m\ddot{x} + \left(k - m\omega^2\right)x = 0$$

$$\Rightarrow \text{فرکانس طبیعی} = \omega_n = \sqrt{\frac{x \;\text{ضریب}}{\ddot{x} \;\text{ضریب}}} = \sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$$

۶ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

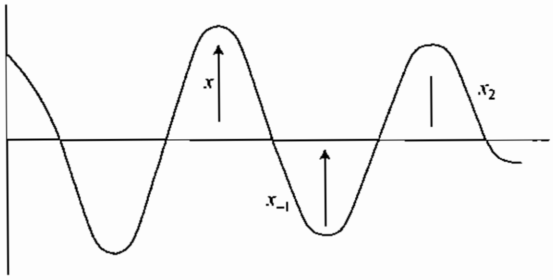
از آنجا که طناب نمی‌تواند نیروی فشاری وارد کند بنابراین پس از تحریک اولیه m_1 و طی شدن کورس کامل m_2 ، m_2 در انتهای کورس باقی مانده و دیگر در حرکت ارتعاشی نقشی ندارد و بنابراین سیستم یک سیستم جرم و فنر ساده می‌شود که معادله حاکم بر آن عبارتست از:

$$m_1\ddot{x}_1 + kx_1 = 0$$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۷

۱ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

نکته : فرکانس نوسان سیم با میرایی کولمب با فرکانس سیستم بودن میرا یکسان است.



$$\text{کار و انرژی} \rightarrow \quad \frac{1}{2}k\left(x_1^2 - x_{-1}^2\right) - f_d\left(x_1 + x_{-1}\right) = 0$$

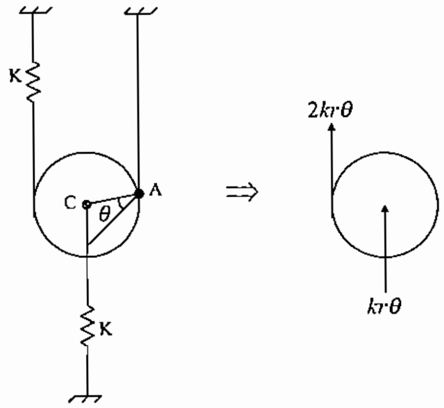
$$\rightarrow \quad x_1 - x_{-1} = \frac{2F_d}{k} = \frac{2\mu mg}{k}$$

$$\left(x_1 - x_{-1}\right) \ \text{کاهش دامنه در یک نیم‌سیکل} = \frac{2\mu mg}{k}$$

۲ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

چون نقطه A مرکز آنی دوران می‌باشد معادلات را برحسب تغییر زاویه θ می‌نویسیم:

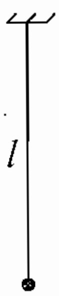
$$\sum M = I_A \alpha \quad \rightarrow \quad (-2kr\theta)2r + (-kr\theta)r = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\ddot{\theta}$$



$$\rightarrow \quad \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} + 5kr^2\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{\theta \ \text{ضریب}}{\ddot{\theta} \ \text{ضریب}}} = \frac{\sqrt{5kr^2}}{\sqrt{\frac{3}{2}mr^2}} = \sqrt{\frac{10}{3}\frac{k}{m}}$$

۳ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

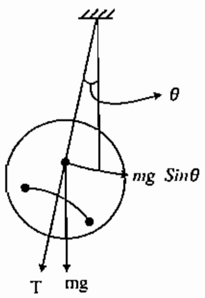
روش اول: با تحلیل ابعادی به‌راحتی می‌توان دریافت که تنها گزینه ۲ درست می‌باشد چون k_0 باید از جنس طول باشد و برای τ_n می‌توان به‌صورت تقریبی به‌دست آورد که:

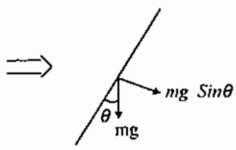


$$\rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \rightarrow \quad \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

روش دوم:

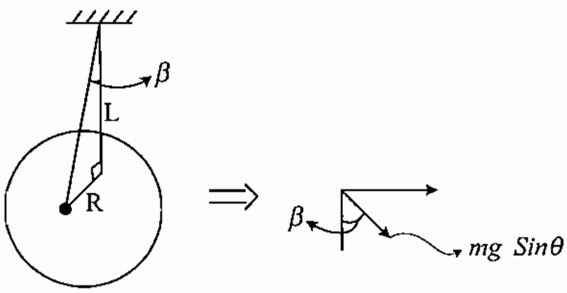
به تغییر زاویه کوچک θ در سیم‌ها برای دیاگرام آزاد خواهیم داشت:





حال برای به دست آوردن مؤلفه‌ای از $mg\sin\theta$ که عمود بر شعاع R می‌باشد خواهیم داشت:

$$\Rightarrow N = mg\sin\theta\sin\beta = mg\sin\theta\tan\beta = mg\sin\theta\frac{R}{L}$$



حال برای معادله حرکت داریم:

$$I\ddot{\theta} + mg\sin\theta\frac{R^2}{L} = 0$$

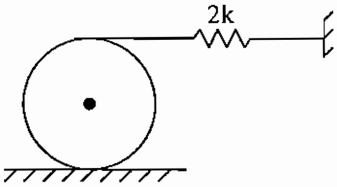
$$\text{کوچک } \theta \Rightarrow I\ddot{\theta} + mg\frac{R^2}{L}\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad mK_0^2\ddot{\theta} + mg\frac{R^2}{L}\theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mg\frac{R^2}{L}}{mK_0^2}} = \frac{R}{K_0}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \Rightarrow \quad \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi K_0}{K}\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \Rightarrow \quad K_0 = \frac{\tau_n R}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

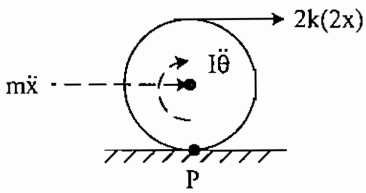
پاسخ سؤالات ۱۳۸۸

۱ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

از آنجا که سیستم یک سیستم متقارن است. نقطه وسط فنر همواره ساکن می‌ماند بنابراین می‌توان فنر را نصف کرده و وسط آن را ثابت نمود. یعنی کافی است شکل روبه‌رو را بررسی نمود.



(با نصف کردن طول فنر ضریب آن 2 برابر می‌شود.)



$$I=\frac{1}{2}mr^2$$

$$\sum M_p=0 \Rightarrow m\ddot{x}(r)+I\ddot{\theta}+4kx(2r)=0$$

$$x=r\theta \Rightarrow \ddot{x}=r\ddot{\theta}$$

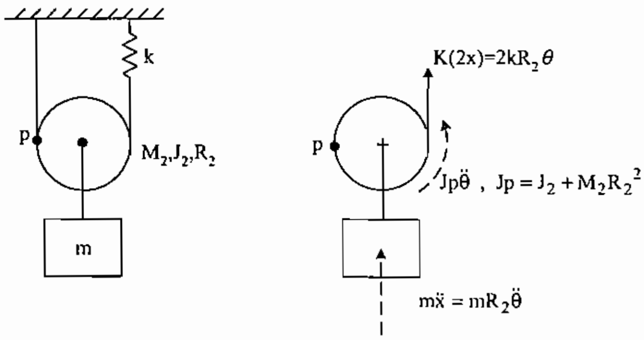
$$\Rightarrow mr^2\ddot{\theta}+\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}+8kr^2\theta=0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}m\ddot{\theta}+8k\theta=0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}+\frac{16k}{3m}\theta=0 \Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{16k}{3m}}$$

۲ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

از آنجا که پولی M_1 ثابت است و حرکتی ندارد بنابراین تأثیری در دینامیک سیستم ندارد. نقطه p نقطه سکون و مرکز دوران است. بنابراین:



$$\sum M_p=0 \Rightarrow mR_2^2\ddot{\theta}+\left(J_2+M_2R_2^2\right)\ddot{\theta}+2kR_2\theta\left(2R_2\right)=0$$

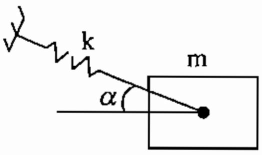
$$\Rightarrow \left(\left(m+M_2\right)R_2^2+J_2\right)\ddot{\theta}+4kR_2^2\theta=0$$

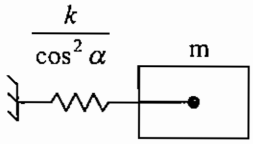
$$\Rightarrow \ddot{\theta}+\frac{4k}{m+M_2+\frac{J_2}{R_2^2}}\theta=0 \Rightarrow \omega_n\sqrt{\frac{4k}{m+M_2+\frac{J_2}{R_2^2}}}$$

راه‌حل تستی: از آنجا که پولی M_1 تأثیری بر دینامیک سیستم ندارد فرکانس طبیعی سیستم تابعی از R_2, M_2, m, k و J_2 می‌باشد. بنابراین تنها گزینه ۳ گزینه صحیح می‌باشد.

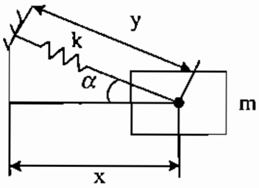
۳ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

نکته : دو سیستم مقابل با هم معادلند.

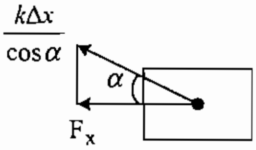




اثبات:



$$\Rightarrow \quad y = \frac{x}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \frac{\Delta x}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad F = k\,\Delta y = \frac{k\,\Delta x}{\cos\alpha}$$



$$\Rightarrow \quad F_x = \frac{k\,\Delta x}{\cos^2\alpha} = \frac{k}{\cos^2\alpha}\Delta x \quad \Rightarrow \quad k_{eq} = \frac{k}{\cos^2\alpha}$$

این معادل آن است که یک فنر افقی به ضریب فنریت $\frac{k}{\cos^2\alpha}$ داشته باشیم.

بنابراین فرکانس طبیعی سیستم به α وابسته است.

از طرف دیگر می‌دانیم که در چنین سیستمی فرکانس طبیعی سیستم به سرعت زاویه قاب نیز بستگی دارد. بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۴ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

از لحظه‌ای که سر فنر به زمین می‌رسد. سیستم مانند یک جرم و فنر عادی شروع به نوسان می‌نماید. بنابراین، با به‌دست آوردن شرایط اولیه سیستم نوسانی می‌توان پاسخ آن را به‌دست آورد.

سرعت اولیه جرم در شروع حرکت نوسانی $V_0 = \sqrt{2gh}$

با توجه به این که مبدأ در محلی قرار دارد که فنر به اندازه‌ای فشرده شده است که جرم m را تحمل نماید، بنابراین:

$$kx_0 = mg \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega_n^2}$$

توضیح این‌که لحظه‌ای که فنر به زمین می‌رسد نیروی فشاری فنر صفر است و هنوز باید جسم به اندازه $\frac{mg}{k}$ پایین رود تا سیستم نوسانی در مبدأ خود قرار گیرد.

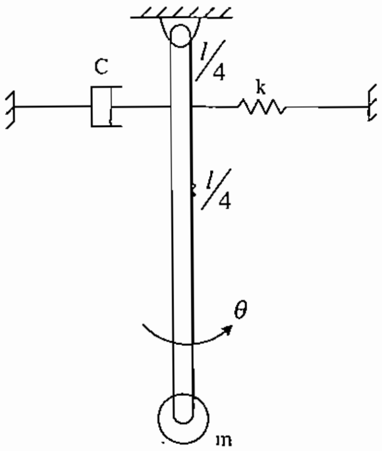
$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 \cos\omega_n t + \frac{V_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = -x_0\omega_n^2\cos\omega_n t - V_0\omega_n\sin\omega_n t = -g\cos\omega_n t - \sqrt{2gh}\,\omega_n\sin\omega_n t$$

$$\max(\ddot{x}) = -\sqrt{g^2 + 2gh\omega_n^2} = -\omega_n^2\sqrt{\left(\frac{g}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{2gh}{\omega_n^2}}$$

سؤالات ۱۳۸۶

۱ـ مجموعه مقابل در صفحه افقی قرار دارد. مطلوب است معادله حرکت مجموعه (با فرض θ کوچک):



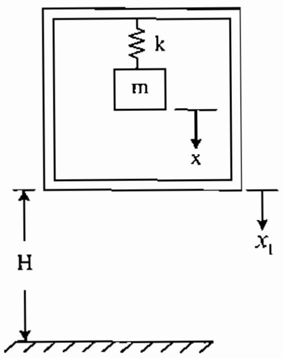
۱) $m\ddot{\theta}-\frac{cl}{4}\dot{\theta}+\frac{kl}{4}\theta=0$

۲) $m\ddot{\theta}+\frac{cl}{4}\dot{\theta}+\frac{kl}{4}\theta=0$

۳) $m\ddot{\theta}-c\dot{\theta}+k\theta=0$

۴) $m\ddot{\theta}+\frac{c}{16}\dot{\theta}+\frac{k}{16}\theta=0$

۲ـ جرم m متصل به جعبه در حال تعادل استاتیکی است. سپس از ارتفاع H مطابق شکل سقوط آزاد می‌نماید. نیروی منتقل شده به جرم m را در لحظه برخورد با زمین به دست آورید. برخوردی بین جرم m و جعبه اتفاق نمی‌افتد. x فاصله نسبی بین جرم m و جعبه است.



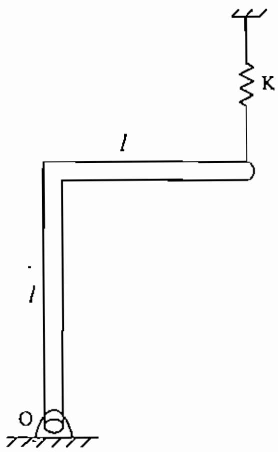
۱) 0

۲) mg

۳) $-gm\left(1-\cos\frac{k}{m}\sqrt{\frac{2H}{g}}\right)$

۴) $-gm\left(1-\sin\frac{k}{m}\sqrt{\frac{2H}{g}}\right)$

۳ـ میلهٔ خمیده یکنواخت به جرم m و طول 2l مطابق شکل خمیده شده و سیستم ارتعاشی را تشکیل داده که در حالت تعادلی استاتیکی می‌باشد. فرکانس طبیعی سیستم چقدر است؟



۱) $\sqrt{\frac{12k-3mg}{7l}}$

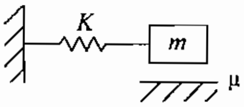
۲) $\sqrt{\frac{12k-3mg}{5l}}$

۳) $\sqrt{\frac{12k-9mg}{7l}}$

۴) $\sqrt{\frac{12k-9mg}{5l}}$

سؤالات ۱۳۸۷

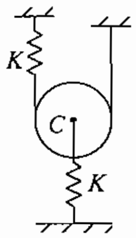
۱ـ سیستم یک درجه آزادی جرم و فنر با اصطکاک کولمب را در نظر بگیرید. ضریب اصطکاک برابر μ و شرایط اولیه برابر $x(0)=x_0$ و $\dot{x}(0)=0$ در نظر بگیرید. فرکانس طبیعی حرکت سیستم برابر .... است و دامنه حرکت در هر نیم سیکل به‌اندازه .... کم می‌شود.



۱) $\omega_n=\sqrt{\dfrac{k}{\mu m}}$ و $\dfrac{\mu mg}{k}$ ۲) $\omega_n=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ و $\dfrac{\mu mg}{k}$

۳) $\omega_n=\sqrt{\dfrac{k}{\mu m}}$ و $\dfrac{2\mu mg}{k}$ ۴) $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ و $\dfrac{2\mu mg}{k}$

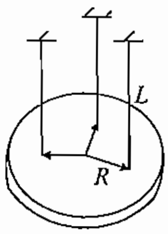
۲ـ غلتک به جرم m و ممان اینرسی $\dfrac{1}{2}mR^2$ روی نخ بدون جرم متصل به فنر غلتش ناب دارد. اگر مرکز غلتک به فنر دیگری متصل باشد مطلوبست فرکانس طبیعی سیستم؟



۱) $\omega_n=\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$ ۲) $\omega_n=\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

۳) $\omega_n=\sqrt{\dfrac{10k}{3m}}$ ۴) $\omega_n=\sqrt{\dfrac{5k}{m}}$

۳ـ چرخ لنگری به جرم m در صفحه افقی از سه سیم به‌طول L، در دایره‌ای به شعاع R متر به فواصل مساوی آویخته شده است. اگر زمان نوسان حول محور قائم در مرکز چرخ τ_n ثانیه باشد، شعاع ژیراسیون آن برابر است با:



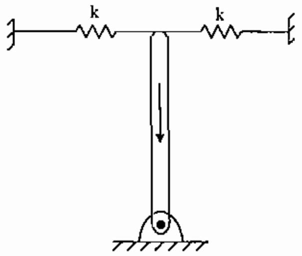
۱) $K_0=\dfrac{\tau_n}{2\pi R}\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ ۲) $K_0=\dfrac{\tau_n R}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{L}}$

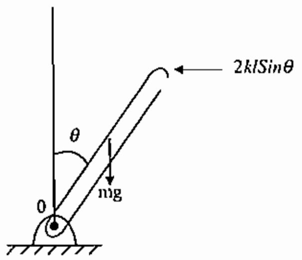
۳) $K_0=\dfrac{\tau_n}{2R}\sqrt{\dfrac{g}{L}}$ ۴) $K_0=\tau_n\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۵

۱ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

نکته : برای اینکه یک سیستم ارتعاشی دارای ارتعاشات پایدار باشد باید تمام ضرایب متغیر و مشتق‌های آن هم‌علامت باشند.





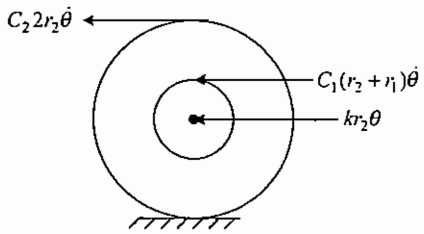
$$\Rightarrow \sum M = I\ddot{\theta} \Rightarrow mg\frac{l}{2}\sin\theta - 2kl\sin\theta\, l\cos\theta = I\ddot{\theta}$$

$$\theta << 1 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l}\sin\theta = \theta \\ \cos\theta = 1\end{array}\right\} \Rightarrow I\ddot{\theta} + \left(2kl^2 - mg\frac{l}{2}\right)\theta = 0$$

$$\text{پایداری} \Rightarrow 2kl^2 - W\frac{l}{2} > 0 \Rightarrow k > \frac{W}{4L}$$

۲ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

با توجه به حرکت غلتش بدون لغزش قرقره، نقطه تماس مرکز آنی دوران می‌شود خواهیم داشت:



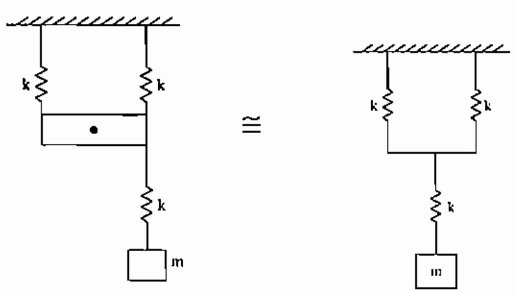
$$\Rightarrow \left(I_0 + m_0 r_2^2\right)\ddot{\theta} + \left(c_1\left(r_2 + r_1\right)^2 + 4c_2 r_2^2\right)\dot{\theta} + kr_2^2\theta = 0$$

نکته :

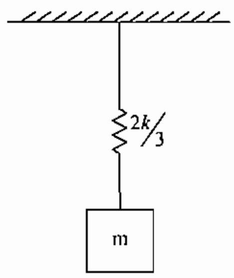
$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{\dot{\theta}}{2\sqrt{\ddot{\theta} \qquad \times \theta}} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{c_1\left(r_2 + r_1\right)^2 + c_1 c_2 r_2^2}{2\sqrt{\left(I_0 + m_0 r_2^2\right)\left(kr_2^2\right)}}$$

۳ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

برای میله بدون جرم AB داریم:



$$\Rightarrow k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{2k}} = \frac{2k}{3}$$

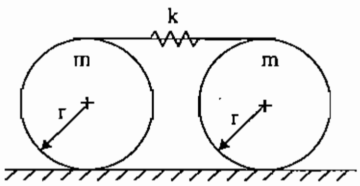


حال برای جرم m:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\frac{2k}{3}}{m}} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}}$$

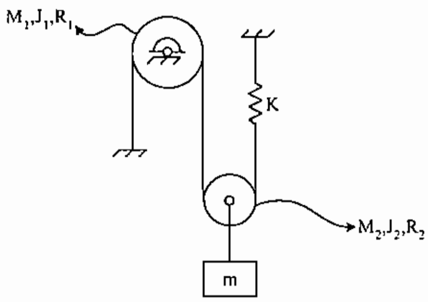
سؤالات ۱۳۸۸

۱ ـ دو دیسک متجانس مطابق شکل به‌وسیله فنری با ضریب k به یکدیگر متصل شده‌اند. با فرض غلت بدون لغزش، بزرگ‌ترین فرکانس طبیعی آن کدام است؟



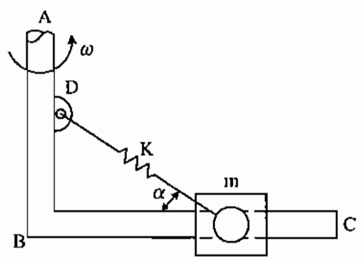
۱) $\sqrt{\frac{16k}{m}}$
۲) $\sqrt{\frac{4k}{3m}}$
۳) $\sqrt{\frac{16k}{3m}}$
۴) $\sqrt{\frac{4k}{m}}$

۲ ـ فرکانس طبیعی ارتعاشات سیستم مقابل کدام است؟ (J_1 و J_2 ممان اینرسی پولی‌ها حول محور گذرنده از مرکز جرم‌شان می‌باشند.)



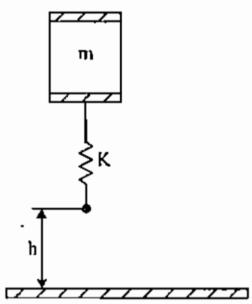
۱) $\sqrt{\frac{k}{m+M_2}}$
۲) $\sqrt{\frac{4k}{m+M_2+\frac{J_1}{R_1^2}+\frac{J_2}{R_2^2}}}$
۳) $\sqrt{\frac{4k}{m+M_2+\frac{J_2}{R_2^2}}}$
۴) $\sqrt{\frac{2k}{m+M_1+M_2+\frac{J_1}{R_1^2}+\frac{J_2}{R_2^2}}}$

۳ ـ قاب صلب ABC حول محور AB با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند. لغزنده m بدون اصطکاک روی بخش BC می‌لغزد و فنر k با زاویه α از یک طرف به جرم m و از طرف دیگر به نقطه D متصل می‌باشد. در این‌صورت می‌توان گفت: «فرکانس طبیعی سیستم به زاویه α بستگی .... و به ω بستگی ....»



۱) ندارد ـ دارد
۲) دارد ـ دارد
۳) ندارد ـ ندارد
۴) دارد ـ ندارد

۴ ـ سیستم جرم و فنر روبه‌رو از ارتفاع h سقوط می‌کند. مقدار حداکثر شتاب وارده به جرم m، کدام است؟



۱) $-\omega_n^2\left(\sqrt{\frac{2gh}{\omega_n^2}+\left(\frac{g}{\omega_n^2}\right)^2}\right)$
۲) $-\omega_n^2\left(\sqrt{\frac{2gh}{\omega_n^2}-\left(\frac{g}{\omega_n^2}\right)^2}\right)$
۳) $-\omega_n^2\left(\sqrt{\left(\frac{g}{2\omega_n^2}\right)^2-\frac{2gh}{\omega_n^2}}\right)$
۴) $-\omega_n^2\left(\sqrt{\left(\frac{g}{2\omega_n^2}\right)^2+\frac{2gh}{\omega_n^2}}\right)$

فصل سوم

ارتعاشات اجباری

ارتعاشات آزاد سیستم‌های یک درجه آزادی را در حالت‌های زیر در نظر می‌گیریم:

۱- سیستم‌های بدون استهلاک

۲- سیستم‌های با استهلاک

عامل تحریک سیستم را نیز در دو حالت زیر در نظر می‌گیریم:

۱ـ تحریک نیرو

۲ـ تحریک جابه‌جایی

۱- ارتعاشات اجباری سیستم‌های بدون استهلاک با تحریک نیرو

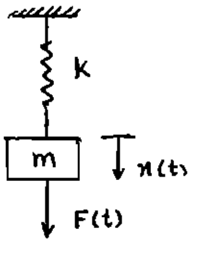
سیستم نشان داده شده در شکل زیر توسط نیروی $F(t)$ تحریک می‌شود. $F(t)$ می‌تواند به صورت هارمونیک باشد یا نباشد. فرض کنیم که نیروی تحریک هارمونیک و به صورت $F_0 \cos \omega t$ باشد (ω فرکانس تحریک نام دارد).

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

معادله حرکت چنین سیستمی عبارت‌است از:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$



توجه شود در این رابطه x_p جواب خصوصی و x_h جواب عمومی می‌باشد.

نکته : اگر $\omega \approx \omega_n$ باشد، یعنی فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی سیستم برابر باشد، حالت تشدید اتفاق می‌افتد.

$$x_h(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$$

$$x_h(t) = A_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + A_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

برای به‌دست آوردن پاسخ خصوصی یک جواب هارمونیک به‌صورت مقابل در نظر می‌گیریم:

$$x_p(t) = X \cos \omega t$$

• و آن را در معادله حرکت جایگذاری می‌کنیم.

$$-m\omega^2 X\cos\omega t + kX\cos\omega t = F_0\cos\omega t$$

دامنه پاسخ حالت پایدار $X=\dfrac{F_0}{k-m\omega^2}$ می‌باشد و بنابراین پاسخ خصوصی سیستم به‌صورت زیر خواهد بود:

$$x_p(t)=\frac{F_0}{k-m\omega^2}\cos\omega t$$

پس پاسخ کلی سیستم عبارت‌است از:

$$\boxed{x(t)=A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t + \frac{F_0}{k-m\omega^2}\cos\omega t}$$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$ خواهیم داشت:

$$x(t)=\left(x_0-\frac{F_0}{k-m\omega^2}\right)\cos\omega_n t+\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+\left(\frac{F_0}{k-m\omega^2}\right)\cos\omega t$$

دامنه استاتیکی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\boxed{\delta_{st}=\frac{F_0}{k}}$$

X حداکثر دامنه نوسان و کمیت $\dfrac{X}{\delta_{st}}$ نسبت دامنه نوسان حرکت دینامیک به استاتیک را ارائه می‌دهد و ضریب بزرگنمائی، ضریب تقویت یا نسبت دامنه نامیده می‌شود.

$$\frac{X}{\delta_{st}}=\frac{Xk}{F_0}=\frac{1}{1-\dfrac{m\omega^2}{k}}=\frac{1}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

نسبت فرکانس r را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$r=\frac{\omega}{\omega_n}$$

در این‌صورت نسبت دامنه عبارت خواهد بود از:

$$M=\frac{X}{\delta_{st}}=\frac{1}{1-r^2}$$

می‌خواهیم ارتعاش را نسبت به نسبت فرکانس r مطالعه کنیم.

حالت اول

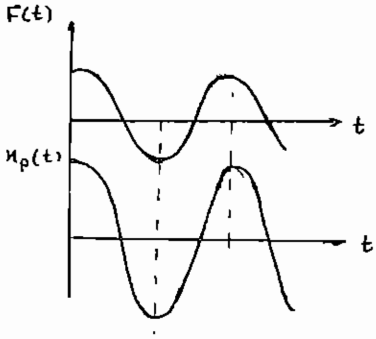
$:r<1$ یا $\omega<\omega_n \Rightarrow \dfrac{\omega}{\omega_n}<1$

در این حالت سیستم و تحریک همفازندو نسبت دامنه مثبت خواهد بود:

$$\therefore\ \frac{X}{\delta_{st}}>0$$

$F(t)=F_0\cos\omega t$

$x_p(t)=X\cos\omega t$



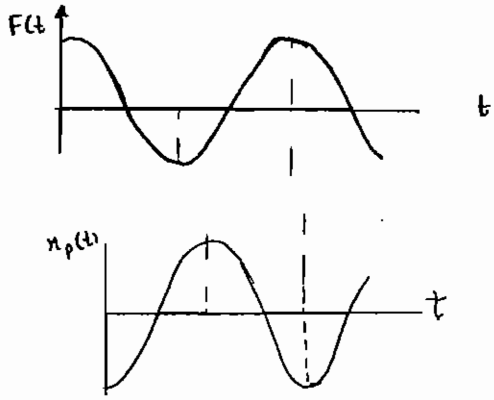
حالت دوم

$r>1$ یا $\omega>\omega_n \Rightarrow \dfrac{\omega}{\omega_n}>1$

$$\therefore \frac{X}{\delta_{st}}<0$$

در این شرایط نسبت دامنه منفی خواهد شد. چون دامنه منفی معنی ندارد جواب خصوصی را منفی کنیم و $\frac{X}{\delta_{st}}$ را مثبت در نظر می‌گیریم.

$$\frac{X}{\delta_{xt}}=\frac{1}{r^2-1}\ ,\ \begin{cases}x_p=-X\cos\omega t\\ F(t)=F_0\cos\omega t\end{cases}$$



در نتیجه پاسخ سیستم و نیروی تحریک با هم 180 درجه اختلاف فاز دارند.

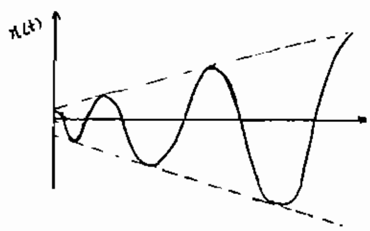
دقت کنید وقتی $r\to\infty$ باشد داریم $x\to 0$، بنابراین پاسخ سیستم به یک نیروی محرک هارمونیک با فرکانس خیلی بالا نزدیک به صفر است.

حالت سوم تشدید (Resonance) $\omega=\omega_n$ یا $r=1$

$$x(t)=A_1\cos\omega_n t+A_2\sin\omega_n t+\frac{F_0}{k-m\omega^2}\cos\omega t$$

چون مخرج کسر مربوط به پاسخ خصوصی سیستم صفر می‌شود، کسر را رفع ابهام می‌کنیم که در نهایت خواهیم داشت:

$$x(t)=x_0\cos\omega_n t+\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+\underbrace{\frac{\delta_{st}\omega_n t}{2}\sin\omega_n t}_{x_p}$$



پس در حالت تشدید همواره دامنه ارتعاشات زیاد می‌شود و اختلاف فاز بین سیستم و تحریک 90° خواهد بود.

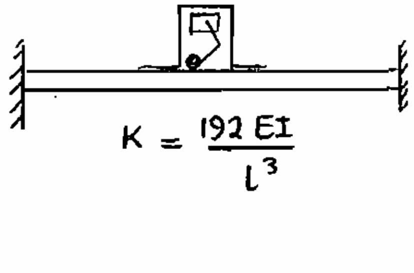
مثال: یک پمپ رفت و برگشتی به وزن 150lb در وسط یک صفحه فولادی به ضخامت $\frac{1}{2}$in و پهنای 20in و طول 100in قرار گرفته است و صفحه از دو طرف درگیر است. به علت کارکرد پمپ صفحه تحت نیروی هارمونیک $F(t)=50\cos(62.832t)$lb قرار می‌گیرد. دامنه نوسانات صفحه را پیدا کنید.

حل: ابتدا باید ممان اینرسی و سپس سختی معادل مجموعه را محاسبه نماییم.

$$I=\frac{1}{12}20\times0.5^3=0.2083\text{in}^4$$

$$k=\frac{192\,EI}{l^3}\Rightarrow k=\frac{192\times30\times10^6\times0.2083}{100^3}=1200\frac{\text{lb}}{\text{m}}$$

$$X=\frac{F_0}{k-m\omega^2}=\frac{50}{1200-\frac{150}{386.4}\times(62.832)^2}=-0.1504$$



علامت منفی X فاز متقابل تحریک و پاسخ را مشخص می‌کند. (یعنی تحریک و پاسخ با هم 180 درجه اختلاف فاز دارند).

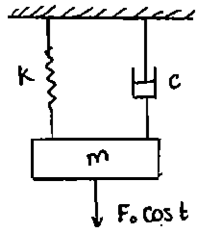
مثال : نقطه کارکرد سیستم مثال قبل عبارت‌است از:

۱) $\omega<\omega_n$ ۲) $\omega=\omega_n$

۳) $\omega>\omega_n$ ۴) هیچ‌کدام

چون دامنه منفی شده است، $\frac{\omega}{\omega_n}>1$ است وگزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۲ ـ ارتعاشات اجباری سیستم‌های با استهلاک با تحریک نیرو



$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\cos\omega t$$

$$x(t)=x_h(t)+x_p(t)$$

در این رابطه x_h جواب عمومی و x_p جواب خصوصی می‌باشد.

$$\lim_{t\to\infty} x_h(t)=0$$

چون با میل کردن زمان به سمت بی‌نهایت $x_h(t)$ به صفر می‌رسد، $x_h(t)$ را پاسخ حالت گذرای سیستم می‌گوییم. اما $\lim_{t\to\infty} x_p(t)\neq 0$ بنابراین x_p، پاسخ حالت ماندگار یا پایدار نام دارد.

بنابراین در ارتعاشات اجباری با استهلاک فقط $x_p(t)$ را مد نظر داریم.

$$x(t)=x_p(t)$$

فرض $x_p(t)=X\cos(\omega t+\phi)$

با جایگذاری $x(t)$ در معادله دیفرانسیل حرکت داریم:

$$\boxed{X=\frac{F_0}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2+(c\omega)^2}}\quad,\quad \phi=\tan^{-1}\frac{c\omega}{k-m\omega^2}}$$

$$X=\frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}\qquad \tan\phi=\frac{c\omega}{k-m\omega^2}=\frac{2\zeta}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\text{ضریب بزرگ‌نمایی}=\frac{X}{\frac{F_0}{k}}=\frac{kX}{F_0}=\frac{\text{نیروی دینامیکی در فنر}}{\text{حداکثر نیروی وارد به سیستم}}$$

که در این رابطه $\frac{F}{k}$ تغییر مکان استاتیکی است. ضریب بزرگ‌نمایی تابعی از نسبت فرکانس $\frac{\omega}{\omega_n}$ و میرایی ζ است:

$$\frac{kX}{F_0}=f\left(\frac{\omega}{\omega_n},\zeta\right)$$

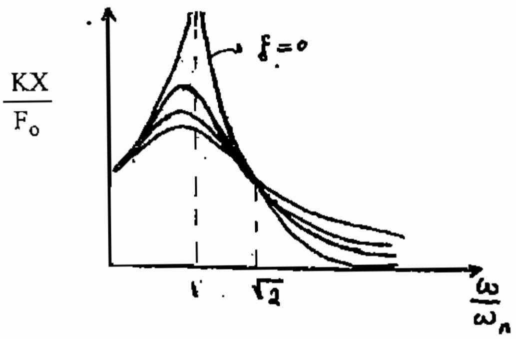
الف ـ دیاگرام بد Bode Diagram

دیاگرام بد شامل دو دیاگرام است. دیاگرام اول نشان‌دهنده منحنی تغییرات ضریب بزرگ‌نمایی بر حسب نسبت فرکانس به ازای مقادیر مختلف میرایی است. به ازای مقادیر مخالف صفر میرایی، منحنی ضریب بزرگ‌نمایی دارای یک نقطه ماکزیمم است که قبل از تشدید $\left(\frac{\omega}{\omega_n}=1\right)$ قرار دارد. محل این ماکزیمم به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{KX}{F_o}$$

$$\frac{d}{d\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}\left(\frac{kX}{F_0}\right)=0 \Rightarrow \omega=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{1-2\zeta^2}$$



اگر مقدار میرایی خیلی کوچک شود، محل ماکزیمم منحنی عبارت‌است از:

$$\frac{\omega}{\omega_n}=1$$

که حالت رزونانس یا تشدید نام دارد و دامنه در حالت رزونانس از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$X_{resonance}=\frac{\frac{F_0}{k}}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\cong\frac{\frac{F_0}{k}}{2\zeta}=\frac{F_0}{c\omega_n}$$

اگر مقدار میرایی صفر شود در نقطه تشدید دامنه به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد.

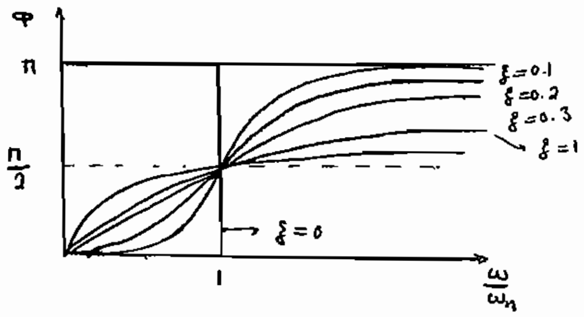
دیاگرام دوم بد دیاگرام فاز نام دارد و نشان‌دهنده اختلاف فاز سیستم و تحریک بر حسب نسبت فرکانس به ازای مقادیر مختلف میرایی است. در صورتی‌که مقدار میرایی سیستم برابر صفر باشد:

اختلاف فاز سیستم و تحریک در حالت رزونانس یا تشدید (یعنی $\omega=\omega_n$) برای تمام مقادیر میرایی $90°$ خواهد بود.

در صورتی‌که $\frac{\omega}{\omega_n}<1$ باشد، اختلاف فاز با افزایش میرایی زیاد می‌شود.

در صورتی‌که $\frac{\omega}{\omega_n}>1$ باشد، اختلاف فاز با افزایش میرایی کم می‌شود.

در صورتی که نسبت میرایی صفر شود ($\zeta=0$):



$$\frac{\omega}{\omega_n}<1 \Rightarrow \phi=0$$

$$\frac{\omega}{\omega_n}>1 \Rightarrow \phi=\pi$$

پس داریم:

$$\boxed{\frac{X}{\delta_{st}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+(2\zeta r)^2}}=M}$$

$$\boxed{\phi=\tan^{-1}\frac{2\zeta r}{1-r^2}}$$

M فاکتور بزرگ‌نمایی، فاکتور تقویت یا نسبت دامنه نام دارد.

مشاهده می‌شود که مقدار نسبت میرایی ξ هم در دامنه و هم در فاز وارد می‌شود.

پیک منحنی‌ها در نمودار تغییرات ضریب بزرگ‌نمایی قبل از نقطه تشدید خواهد بود و محل ماکزیمم منحنی عبارت‌است از:

$$r_m=\sqrt{1-2\zeta^2}<1$$

پس ماکزیمم‌ها همواره قبل از نسبت فرکانس ۱ خواهند بود و مقدار دامنه حداکثراز رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\left.\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{max}=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

در حالت تشدید یعنی $\omega=\omega_n$ مقدار X از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{X}{\delta_{st}}=\frac{1}{2\zeta}$$

مشاهده می‌شود که اگر استهلاک سیستم را افزایش دهیم، نه تنها ماکزیمم دامنه از بی‌نهایت به یک عدد می‌رسد، بلکه در حالت تشدید ($\omega=\omega_n$)، دامنه حتی از حالت ماکزیمم هم کمتر می‌شود. توجه داشته باشید که نتیجه‌گیری فوق تنها برای $0<\zeta<\frac{1}{\sqrt{2}}$ صادق است. برای $\zeta>\frac{1}{\sqrt{2}}$ ماکزیمم دامنه در $\omega=0$ رخ می‌دهد و برابر یک است و نمودار دارای نقطه ماکزیمم نخواهد بود.

مشخصات منحنی دامنه

۱- افزایش میرایی سیستم، ضریب بزرگ‌نمایی یا نسبت دامنه را برای تمامی مقادیر فرکانس نیرو کاهش می‌دهد.

۲- برای هر مقدار مشخص نسبت فرکانس r، افزایش میرایی نسبت دامنه را کاهش می‌دهد.

۳- در حالت خاص اعمال نیروی ثابت غیرهارمونیک ($r=0$)، مقدار نسبت دامنه ۱ است.

۴- کاهش نسبت دامنه در حضور میرایی، در محل تشدید یا در نزدیکی آن بسیار قابل ملاحظه است.

۵- با افزایش فرکانس نیرو تا بی‌نهایت، دامنه ارتعاشات اجباری کاهش یافته و به صفر می‌رسد.

$$r \to \infty \Rightarrow M \to 0$$

۶- برای $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ماکزیمم مقدار نسبت دامنه در r_m اتفاق می‌افتد که عبارت‌است از:

$$\omega_m = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} \qquad r_m = \sqrt{1-2\zeta^2}$$

که این مقدار کمتر از فرکانس طبیعی بدون میرا (ω_n) و حتی کوچکتر از فرکانس نوسانات میرا شده (ω_d) است.

$$\omega_m = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$$
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

پس نامساوی زیر برقرار است:

$$\omega_m < \omega_d < \omega_n$$

۷- ماکزیمم مقدار x عبارت است از:

$$\left.\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

و مقدار X در $\omega = \omega_n$ (حالت تشدید) در حضور میرایی $(\zeta \neq 0)$ عبارت‌است از:

$$\left.\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta}$$

بنابراین با اندازه‌گیری ماکزیمم دامنه و از طریق تجربی می‌توان نسبت استهلاک را به دست آورد.

۸- برای $0 < \zeta \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ و در $r=0$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)\Bigg|_{r=0} = 0$$

یعنی شیب اولیه منحنی‌ها صفر است.

برای $\zeta > \frac{\sqrt{2}}{2}$ منحنی‌ها دارای شیب اولیه صفر نخواهند بود.

مشخصات منحنی فاز

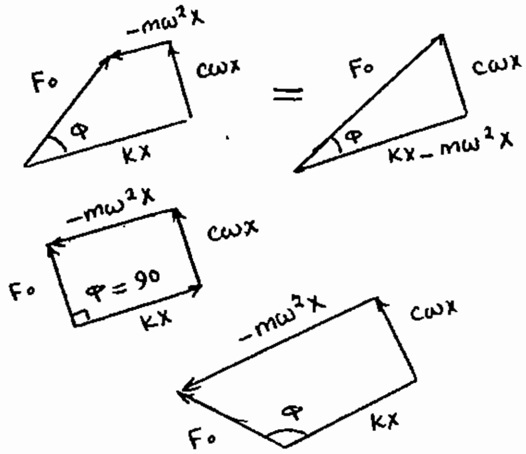
۱- برای سیستم بدون استهلاک $(\zeta = 0)$ به ازاء $0 < r < 1$ زاویه فاز $\phi = 0$ و برای $r > 1$ زاویه فاز $\phi = 180$ و برای $r = 1$ زاویه فاز $\phi = 90^\circ$ می‌باشد. به عبارتی به ازاء $0 < r < 1$ تحریک و پاسخ هم فاز و برای $r > 1$ در فاز متقابل هستند.

۲- برای $\zeta > 0$ و $0 < r < 1$ زاویه فاز در محدودهٔ $0 < \phi < 90^\circ$ خواهد بود. و برای $r = 1$ به ازاء جمیع مقادیر ζ زاویه فاز $\phi = 90^\circ$ و برای $r > 1$ زاویه فاز بین $90^\circ < \phi < 180$ خواهد بود.

۳ـ در صورتی‌که $\zeta > 0$ باشد اگر $r < 1$ باشد با افزایش میرایی φ افزایش می‌یابد و اگر $r > 1$ باشد با افزایش میرایی φ کاهش می‌یابد.

ب ـ دیاگرام فازوری

می‌دانیم سرعت و شتاب به ترتیب 90 و 180 درجه با تغییر مکان اختلاف فاز دارند. با توجه به این موضوع دیاگرام برداری ارتعاشات میرا شونده را می‌توان به‌صورت بردارهای عمود برهم به‌گونه‌ای در نظر گرفت که هر یک از انتهای دیگری آغاز شود. به چنین نمایشی دیاگرام فازوری گفته می‌شود.



۱) اگر $0<r<1$ باشد: در این حال ، kX بر $m\omega^2 X$ و $c\omega X$ غلبه می‌کند، چون ω کوچک است.

۲) اگر $r = 1$ باشد در این حالت استهلاک غالب است. (چون kX با $-m\omega_n^2 X$ خنثی می‌شود).

۳) اگر $r > 1$ باشد $90 < \phi < 180$ و در این حالت اینرسی غالب است، چون ω زیاد است و ترم $-m\omega^2 X$ خیلی بزرگ می‌شود.

۳ـ ارتعاشات اجباری با تحریک جابه‌جایی پایه:

گاهی سیستم دینامیکی به‌وسیله حرکت محل تکیه‌گاه تحریک می‌شود. فرض کنید y تغییر مکان هارمونیک تکیه‌گاه یا پایه و x تغییر مکان جرم m باشد.

با رسم دیاگرام آزاد جرم m معادله حرکت را برای سیستم ارتعاشی می‌نویسیم.

$$m\ddot{x} = -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y})$$

$z = (x-y)$ را به نام جابه‌جایی نسبی تعریف می‌کنیم. با جایگذاری داریم:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega t$$

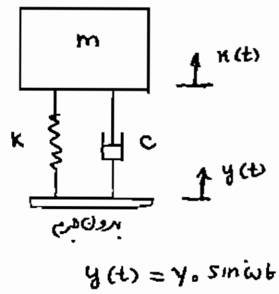
برای به‌دست آوردن جواب فرض می‌کنیم:

$$z = Z\sin(\omega t - \phi)$$

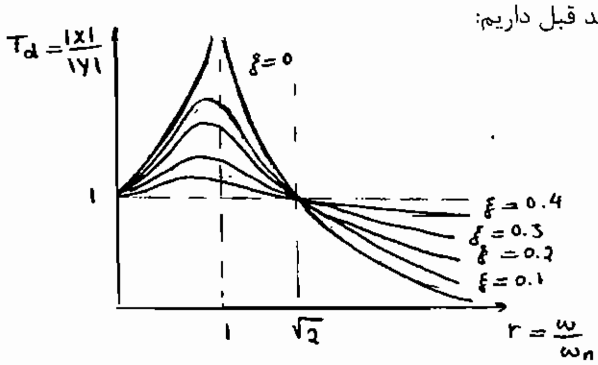
با روشی مشابه آنچه در فصل‌های قبل انجام دادیم، مقادیر دامنه و فاز جابه‌جایی نسبی عبارت خواهد بود از:

$$\boxed{Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + (c\omega)^2}} \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{c\omega}{k - m\omega^2}}$$

$$\boxed{Z = \frac{r^2 Y}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{2\zeta r}{1 - r^2}}$$



پس مانند قبل داریم:



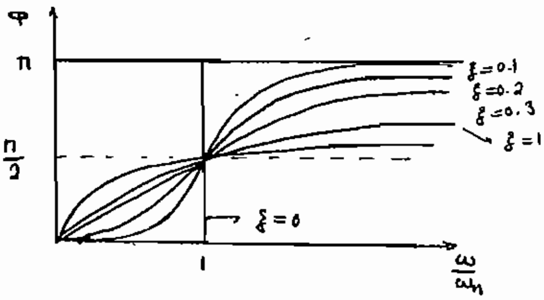
$$\begin{cases} y = Ye^{i\omega t} \\ z = Ze^{i(\omega t-\phi)} \Rightarrow Ze^{-i\phi} = \dfrac{m\omega^2 Y}{k - m\omega^2 + i\omega c} \\ x = Xe^{i(\omega t-\psi)} \end{cases}$$

$$x = \left(Ze^{-i\phi} + Y\right)e^{i\omega t} = \left(\frac{k + i\omega c}{k - m\omega^2 + i\omega c}\right)Ye^{i\omega t}$$

$$T_d = \left|\frac{X}{Y}\right| = \sqrt{\frac{k^2 + (c\omega)^2}{\left(k - m\omega^2\right)^2 + (c\omega)^2}} = \sqrt{\frac{1 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{\left(1 - r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$\tan\psi = \frac{mc\omega^3}{k\left(k - m\omega^2\right) + (\omega c)^2} = \frac{2\zeta r^3}{1 + \left(4\zeta^2 - 1\right)r^2}$$

$T_d = \left|\frac{X}{y}\right|$ ضریب انتقال یا نسبت دامنه جابه‌جایی جرم m به دامنه جابه‌جایی پایه است.



وقتی $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$ باشد، با افزایش ζ ضریب انتقال $\left|\frac{X}{Y}\right|$ نیز افزایش می‌یابد.

در صورتی‌که $\frac{\omega}{\omega_n}$ خیلی زیاد شود $\left|\frac{X}{Y}\right|$ کمتر می‌شود، چون جرم فرصت نمی‌کند که با تغییر مکان پایه تغییر مکان یابد.

دقت کنید که در نسبت فرکـانس $\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{2}$ تمـام منحنـی‌هـا دارای ضریب انتقال $\left|\frac{X}{Y}\right| = 1$ هستند.

مشخصات منحنی ضریب انتقال

۱- در $r = 0$، ضریب انتقال $T_d = 1$ می‌باشد.

۲- برای یک سیستم بدون استهلاک $(\zeta = 0)$ در حالت تشـدید $(r = 1)$، ضـریب انتقـال بـه سـمت بـی‌نهایـت میـل مـی‌کنـد، یعنـی $T_d \to \infty$ خواهد شد.

۳- برای مقادیر $r > \sqrt{2}$ مقدار T_d به ازاء جمیع مقادیر ζ کوچکتر از ۱ است.

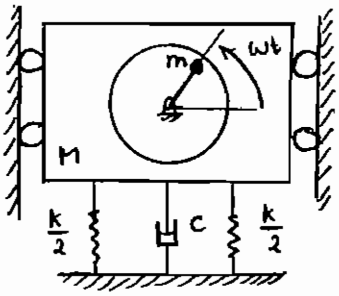
۴- برای تمامی مقادیر ζ در $r = \sqrt{2}$، ضریب انتقال $T_d = 1$ خواهد بود.

$$\forall\zeta \Rightarrow r = \sqrt{2} \therefore T_d = 1$$

۵- برای $r < \sqrt{2}$ نسبت‌های استهلاک کوچکتر منجر به مقادیر بزرگتر T_d و برای $r > \sqrt{2}$ مقادیر کوچکتر نسبت استهلاک منجر به مقادیر کوچکتر T_d می‌شود.

۶- ضریب انتقال T_d به ازاء $0 < \zeta < 1$ در نسبت فرکانس $r_m < 1$ ماکزیمم است. محل ماکزیمم منحنی ضریب انتقال عبارت‌است از:

$$r_m = \frac{1}{2\zeta}\left[\sqrt{1+8\zeta^2}-1\right]^{\frac{1}{2}}$$



الف ـ عدم بالانس (نامیزانی) چرخشی:

سیستم جرم و فنر مقابل را در نظر بگیرید. جـرم M در راسـتای قـائم حرکت می‌کند، در حالی‌که نامیزانی m با سرعت ω دوران می‌کند.

$x=$ جابه‌جایی جرم غیرچرخان $M-m$

$e=$ شعاع دوران نامیزانی

$x+e\sin\omega t=$ جابه‌جایی عمودی جرم نامیزان m

معادله حرکت سیستم را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$(M-m)\ddot{x}+m\frac{d^2}{dt^2}(x+e\sin\omega t)=-kx-c\dot{x}$$

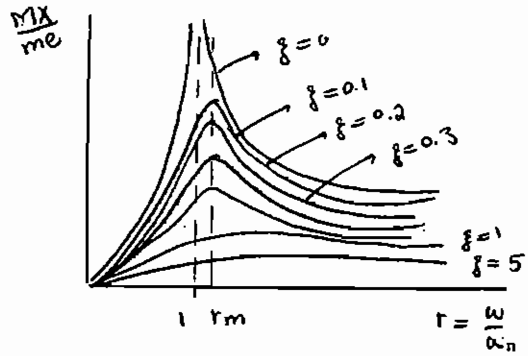
بعد از ساده‌سازی داریم:

$$-kx-c\dot{x}=(M-m)\ddot{x}+m\left(\ddot{x}-e\omega^2\sin\omega t\right)$$

$$M\ddot{x}+c\dot{x}+kx=me\omega^2\sin\omega t$$

$$X=|x|=\frac{me\omega^2}{\sqrt{\left(k-M\omega^2\right)^2+(c\omega)^2}} \qquad \tan\phi=\frac{c\omega}{k-M\omega^2}$$

$$X=\frac{me\frac{\omega^2}{k}\times\frac{M}{M}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}$$



$$\frac{MX}{me}=\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}=\frac{r^2}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+(2\zeta r)^2}} \quad \text{و} \quad \tan\varphi=\frac{2\zeta r}{1-r^2}$$

$$\left.\frac{MX}{me}\right)_{max}=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

در حالت تشدید یا رزونانس دامنه پاسخ سیستم برابر است با:

$$X=\frac{\frac{me}{M}}{2\zeta}$$

با افزایش فرکانس تحریک و نهایتاً نسبت فرکانس، $\frac{MX}{me}$ به سمت مقدار ثابت یک میل می‌کند.

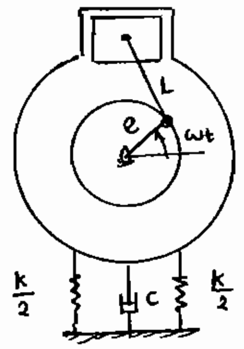
مثال : برای ایجاد کردن نوسانات هارمونیک برای سیستم جرم و فنر نشان داده شده در شکل قبل از نامیزانی خارج ازمرکز استفاده شده است. با تغییر دادن سرعت چرخش در یک سرعت خاص مشاهده می‌شود که سیستم دارای دامنه تشدید 0.6cm می‌گردد. هنگامی‌که سرعت دوران را خیلی زیاد می‌کنیم دامنه به مقدار ثابت 0.08cm می‌رسد. نسبت استهلاک سیستم عبارت‌است از:

۱) $\zeta=0.05$ ۲) $\zeta=0.07$ ۳) $\zeta=1$ ۴) $\zeta=12$

برای حالت تشدید داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{MX}{me}=\dfrac{1}{2\zeta}\rightarrow X=\dfrac{me}{M}\dfrac{1}{2\zeta}=0.6\\ r>>1\rightarrow \dfrac{MX}{me}=1\rightarrow \dfrac{me}{M}=0.08\end{array}\right]\rightarrow \zeta=0.066\simeq 0.07$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.



مثال : یک کمپرسور هوا به وزن 450kg در دور کارکرد 1750 rpm کار می‌کند. قسمت‌های گردان کاملاً میزان می‌باشند. جرم قسمت‌های رفت و برگشتی 10kg و شعاع لنگ (e) 100 mm می‌باشد. اگر استهلاک حاصل از موادی که برای نصب کمپرسور روی فونداسیون به‌کار رفته ضریبی معادل $\xi=0.15$ برای استهلاک سیستم به وجود آورد، ثابت فنر معادل برای حالتی که تنها 20 ٪ از نیروی نامیزانی به فونداسیون انتقال یابد را به‌دست آورید. دامنه نیروی انتقال یافته به فونداسیون چه مقدار می‌باشد؟

حل: معادله شتاب را برای جرم خارج از مرکز می‌نویسیم.

$$a_r=e\omega^2\left[-\sin\omega t+\left|\frac{e}{l}\right|\cos\omega t\right]$$

اگر $\frac{e}{l}$ را ندادند آن‌را کوچک فرض می‌کنیم.

$$\omega=2\pi\left(\frac{N}{60}\right)=2\pi\frac{1750}{60}=138.2\frac{rad}{s}$$

نیروی نامیزانی $F=ma_r$

نیروی نامیزانی $F=me\omega^2\sin\omega t$

$$F=10\times0.1\left(1750\times\frac{2\pi}{60}\right)^2=33.584kN$$

$$F_R=TR.F=0.2\times\left(1750\times\frac{2\pi}{60}\right)^2=6.72kN$$

$$K=\omega_n^2.M \quad \text{و} \quad TR=0.2=\frac{\sqrt{1+(2r\xi)^2}}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+(2\xi r)^2}}\Rightarrow r=\frac{\omega}{\omega_n}=2.72$$

$$\Rightarrow\quad \omega_n=97.4\frac{rad}{s}\ \Rightarrow K=M\omega_n^2=2042\frac{kN}{m}$$

بالانسینگ

برای اینکه سیستمی بالانس شود باید نیروها در تکیه‌گاه‌ها صفر شود یعنی:

۱- مرکز جرم روی محور دوران قرار بگیرد (بالانس استاتیکی).

۲- محور دوران محور اصلی باشد.

اگر هر دو شرط فوق برقرار باشند، بالانس دینامیکی برقرار است.

. در عکس العمل تکیه‌گاه‌ها نیرو باشند، نامیزانی استاتیکی است.

اگر عکس العمل تکیه‌گاه‌ها کوپل باشند، نامیزانی استاتیکی و دینامیکی هر دو وجود دارند.

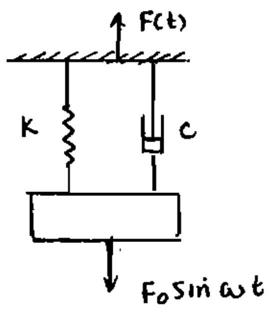
اگر سیستم نازک باشد، نامیزانی استاتیکی وجود دارد.

اگر سیستم طویل باشد، نامیزانی دینامیکی وجود دارد.

ب ـ قابلیت انتقال:

فرض کنید نیروی محرک $F_0 \sin \omega t$ به سیستم یک درجه آزادی زیر وارد می‌شود. نیروی منتقل شده توسط فنر و میراکننده به پایه، F_t می‌باشد که به ترتیب زیر محاسبه می‌گردد:

$F(t)$ نیروی منتقل شده به کف است.



$$F_t = kx(t) + c\dot{x}(t)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \Rightarrow$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + (c\omega)^2}}$$

$$F_t = kX \sin(\omega t + \phi) + c\omega X \cos(\omega t + \phi)$$

$$|F_t| = \sqrt{(kX)^2 + (c\omega X)^2}$$

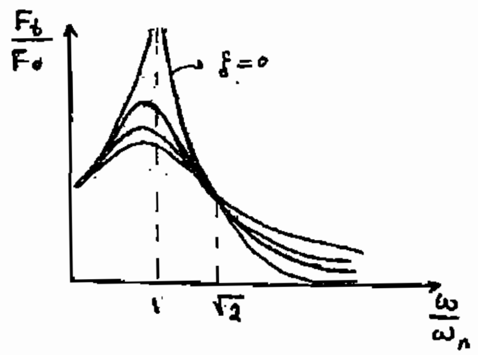
$$F_t = X\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}$$

$$\frac{F_t}{F_0} = \frac{\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{m\omega}{k}\right)\right]^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}}$$

نسبت نیروی منتقل شده به پایه به نیروی تحریک را ضریب انتقال‌پذیری (TR) گویند.

$$\boxed{TR = \frac{F_t}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}}$$

در بعضی موارد مایلیم که نیروی ارتعاشی زاید از سیستم به پایه منتقل نشود. برای این منظور از ایزولاسیون یا جداسازی ارتعاش استفاده می‌کنیم.



برای ایزولاسیون باید $TR<1$ باشد، یعنی مطابق نمودار باید $\frac{\omega}{\omega_n}>\sqrt{2}$ باشد. ω که در اختیار طراح نیست، پس باید ω_n یعنی $\frac{k}{m}$ خیلی کوچک باشد. m که جرم سیستم است و قابل تغییر نیست، پس باید k فنر کوچک باشد. این سیستم مشابه سیستم کمک فنر ماشین است که در آن می‌خواهیم نیروهای وارد شده از زمین به ماشین منتقل نشود.

برای اینکه $\frac{F_t}{F_0}$ یا $\frac{X}{Y_0}$ خیلی کوچکتر از ۱ شود، باید $\frac{\omega}{\omega_n}$ خیلی بزرگ باشد و میرایی ξ نیز تا حد امکان کوچک باشد.

اگر میرایی قابل صرفه‌نظر باشد، می‌توان انتقال‌پذیری را از رابطهٔ زیر محاسبه نمود.

$$TR=\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2-1}$$

در رابطه فوق به روشنی مشخص است که برای این‌که $TR<1$ شود باید $\frac{\omega}{\omega_n}>\sqrt{2}$ باشد.

$$\frac{Z}{Y_0}=\frac{MX}{me}=\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$\frac{Z}{Y_0}=1 \Rightarrow Z\cong Y_0 \Rightarrow$ خیلی بزرگ باشد $\frac{\omega}{\omega_n}$ $\Rightarrow$ خیلی کوچک ω_n $\Rightarrow$ خیلی کوچک $\frac{k}{m}$ $\Rightarrow$ K خیلی کوچک، m خیلی بزرگ

یعنی برای اینکه دستگاهی بتواند تغییر مکان را اندازه بگیرد باید سختی کوچک یا جرم خیلی بزرگ داشته باشد.

مثال: یک ماشین به جرم 100kg بر روی فنرهایی با سختی کل $700\frac{kN}{m}$ قرار گرفته که در آن اجزاء دورانی سبب ایجاد کردن نیروی تحریک 350N با سرعت 3000rpm می‌شود. با فرض $\zeta=0.2$ دامنه حرکت سیستم، ضریب انتقال (TR) و دامنه نیروی انتقال یافته به پایه را محاسبه کنید.

حل:

$$\delta_{st}=\frac{100\times9.81}{700\times10^3}=1.401\times10^{-3}\,m=1.401mm$$

$$f=\frac{1}{2\pi}\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi N}{60}=\frac{N}{60}=\frac{3000}{60}=50\,Hz$$

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.81}{1.401\times10^{-3}}}=13.32\ Hz$$

$$X=\frac{\frac{F_o}{k}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{f}{f_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{f}{f_n}\right]^2}}$$

$$X=\frac{\frac{350}{700\times10^3}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{50}{13.32}\right)^2\right]^2+\left[2\times0.2\times\frac{50}{13.32}\right]^2}}=3.79\times10^{-3}=0.0379\text{mm}$$

ب) $$TR=\frac{F_T}{F_o}=\frac{\sqrt{1+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}=\frac{\sqrt{1+\left[2\zeta\frac{f}{F_n}\right]^2}}{\sqrt{\left[1-\left[\frac{f}{f_n}\right]^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{f}{f_n}\right]^2}}=4 \quad\Rightarrow\quad TR=0.137$$

ج) $F_T=TR.F_0=0.137\times350=47.89N$

۴ ـ انرژی تلف شده توسط میرایی در یک سیکل رفت و برگشت

اثر میرایی در سیستم‌های ارتعاشی، اتلاف انرژی است. یک سیستم ارتعاشی شامل جرم و فنر با میرایی لزجی را در نظر می‌گیریم. نیروی میرایی در این سیستم متناسب با سرعت است $F_d=c\dot{x}$ بنابراین:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\sin\omega t$$

$$x(t)=X\sin(\omega t+\phi)$$

$$X=\frac{F_0}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2+(c\omega)^2}}=\frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}$$

W_d کار انجام شده توسط میرایی $=\int F.dx=\int c\dot{x}dx=\int_0^T c\dot{x}^2\,dt$ (T زمان یک رفت و برگشت)

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

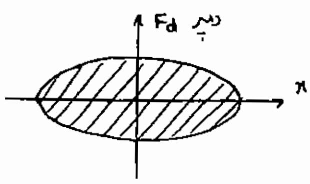
با جایگذاری $x(t)=X\sin(\omega t+\phi)$ در انتگرال فوق، انرژی تلف شده توسط میرایی لزجی برابر است با:

$$W_d=\pi c\omega^2 x$$

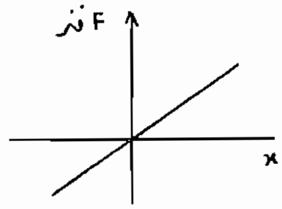
انرژی میرایی تلف شده را می‌توان به صورت زیر به‌طور ترسیمی نمایش داد:

$$F_d=c\dot{x}=c\omega X\cos(\omega t+\phi)$$

$$\left(\frac{F_d}{c\omega X}\right)^2+\left(\frac{x}{X}\right)^2=1 \qquad x=X\sin(\omega t+\phi)$$

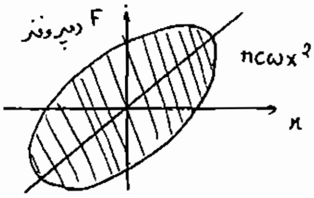


این معادله معادله یک بیضی است که در آن محور x در راستای افق و نیروی F_d در امتداد عمودی است. مساحت این بیضی برابر نیروی تلف شده است.



در مورد فنر، کار در یک سیکل رفت و برگشت صفر است، چون سیستم کنسرواتیو است.

مجموع کار فنر و کار دمپر بر حسب x را نیز می توان رسم کرد.



اگر میرایی سیستم از نوع دیگر غیر از میرایی لزجی بود:

انرژی تلف شده $=\pi c_e \omega X^2$

که در آن c_e میرایی معادل سیستم است.

با فرض $x = X\sin\omega t$ انتگرال پایین را حساب می‌کنیم و آن‌را با رابطهٔ بالا مساوی قرار می‌دهیم. بدین‌ترتیب میرایی لزجی معادل سیستم به‌دست می‌آید.

$W_d = \oint F_d\, dx$

۵ـ ارتعاشات اجباری با میرایی کولمب یا اصطکاک خشک:

برای یک سیستم یک درجه آزادی که دارای میرایی کولمب یا اصطکاک خشک است و تحت تاثیر نیروی هارمونیک $F_0 \sin\omega t$ قرار گرفته است معادله حرکت عبارت‌است از:

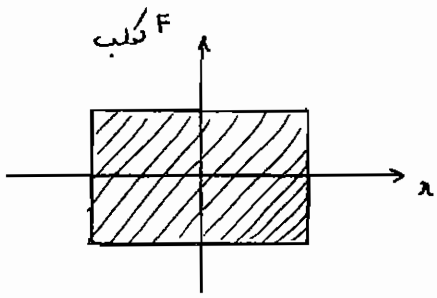
$m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F_0 \sin\omega t$

علامت نیروی اصطکاک μN بستگی به جهت حرکت دارد. برای به‌دست آوردن پاسخ چنین سیستمی باید انرژی تلف شده در این سیستم را با انرژی تلف شده در سیستمی با استهلاک ویسکوز معادل قرار دهیم. نیروی اصطکاک μN را می‌توان در حالت کلی‌تر به‌صورت نیروی مقاوم F_d نشان داد.

$w_d = \oint F_d\, dx = \int_0^{2\frac{\pi}{\omega}} c\dot{x}^2 dx$

انرژی تلف شده توسط میرایی کولمب $=\pi c_e \omega X^2$

انرژی تلف شده توسط اصطکاک خشک در یک سیکل: $2\int_{-x}^{x} F_d dx = 4F_d.X$



$\pi c_e \omega X^2 = 4F_d X$

$c_e = \dfrac{4F_d}{\pi\omega X}$

پس پاسخ حالت یکنواخت به‌صورت زیر است:

$x_p(t) = X\sin(\omega t - \varphi)$

که در آن دامنه نوسان از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$X=\frac{F_0}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2+\left(c_e\omega\right)^2}}$$

$$X=\frac{F_0}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2+\left(\frac{4F_d}{\pi X}\right)^2}}$$

$$X=\frac{F_0}{K}\,\frac{\sqrt{1-\left(\frac{4F_d}{\pi F_0}\right)^2}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$\left(\frac{4F_d}{\pi F_0}\right)^2<1$: شرط وجود جواب

و زاویه فاز φ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد:

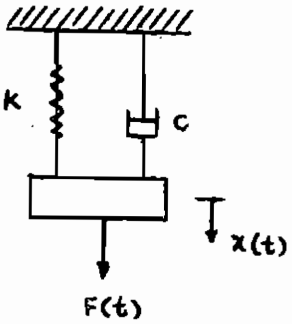
$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right)$$

$$\varphi=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{4F_d}{\pi kX}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{4F_d}{\pi F_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2}{1-\left[\frac{4F_d}{\pi F_0}\right]}}\right]$$

$$\varphi=\tan^{-1}\left[\frac{\pm\frac{4F_d}{\pi F_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{4F_d}{\pi F_0}\right)^2}}\right]$$

تست مهندسی مکانیک: سال ۸۳ ـ ۸۲

برای یک سیستم یک درجه آزادی با میراکننده که تحت اثر نیروی هارمونیک $F(t)=F_0\cos\omega t$ می‌باشد، کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟



۱) همواره مقدار ماکزیمم دامنه در $\frac{\omega}{\omega_n}\le 1$ اتفاق می‌افتد.

۲) همواره مقدار ماکزیمم دامنه در $\frac{\omega}{\omega_n}\ge 1$ اتفاق می‌افتد.

۳) همواره مقدار ماکزیمم دامنه در $\frac{\omega}{\omega_n}=1$ اتفاق می‌افتد.

۴) همواره مقدار ماکزیمم دامنه به ضریب میرایی c وابسته بوده و درمورد محل وقوع آن نمی‌توان اظهارنظر کرد.

پیک یا ماکزیمم منحنی نسبت دامنه $\left(\frac{F_t}{F_o}\right)$ بر حسب $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$ قبل از نقطه تشدید $\frac{\omega}{\omega_n}=1$ می‌باشد.

$\frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{1-2\zeta^2}$ محل ماکزیمم منحنی

بنابراین مقدار ماکزیمم دامنه در $\frac{\omega}{\omega_n}\le 1$ اتفاق می افتد.

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۸۰ ـ ۷۹

چنانچه یک سیستم یک درجه آزادی دارای میرایی لزجی فوق بحرانی باشد، کدام گزینه غلط است؟

۱) فرکانس تشدید ندارد.

۲) نوسانات طبیعی ندارد.

۳) دامنه آن به تدریج افزایش می‌یابد.

۵) در اثر اعمال شرایط اولیه، در نهایت به وضعیت ابتدایی باز نمی‌گردد.

چنانچه سیستم یک درجه آزادی دارای میرایی لزجی فوق باشد، حرکت سیستم غیرارتعاشی است و نوسانات طبیعی ندارد. در این حالت با گذشت زمان دامنه سیستم کاهش می‌یابد.

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۶۸ ـ ۶۷

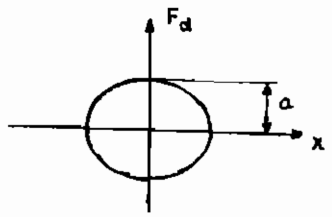
در یک سیستم جرم و فنر با نیروی استهلاک از نوع لزج، منحنی تغییرات نیروی استهلاک بر حسب تغییر مکان، برای یک سیکل به صورت زیر نشان داده شده است. مقدار a با فرض این‌که ω فرکانس سیستم، X حداکثر دامنه و c ضریب میرایی باشد برابر است با:

۱) $c\omega X$

۲) $\frac{1}{2}X^2$

۳) X

۴) $c\omega^2 X$



سطح محصور شده توسط بیضی برابر با انرژی تلف شده در یک سیکل برای میرایی لزجی است. مقدار انرژی تلف شده توسط میرایی لزجی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد.

$$W_d=\pi c\omega X^2$$

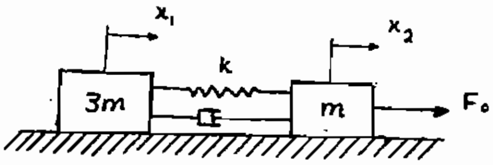
سطح محصور به منحنی یک بیضی که نصف قطر بزرگ آن X و نصف قطر کوچک آن a می‌باشد برابر با $\pi a X$ است. از تساوی دو مقدار به‌دست آمده برای انرژی تلف شده خواهیم داشت:

$$\pi c\omega X^2=\pi aX \quad\Rightarrow\quad a=c\omega X$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۰ ـ ۶۹

در سیستم روبه‌رو در درازمدت کشیدگی فنر برابر است با:



۱) $\frac{F_0}{4k}$

۲) $\frac{F_0}{k}$

۳) $\frac{F_0}{k}$

۴) $\frac{3F_0}{4k}$

معادله حرکت دو جسم $3m$, m به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$3m\ddot{x}_1+c(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+k(x_1-x_2)=0$$

$$m\ddot{x}_2+c(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+k(x_2-x_1)=F_0$$

کشیدگی فنر از حرکت نسبی دو جرم ناشی می‌شود و بنابراین تابع تغییر مکان نسبی $z=x_2-x_1$ است.

با کم کردن سه برابر معادله دوم از معادله اول خواهیم داشت.

$$3m(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)+4c(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+4k(x_1-x_2)=-3F_0$$

$$3m\ddot{z}+4c\dot{z}+4kz=3F_0$$

ارتعاشات گذرای دو جرم در اثر مرور زمان از بین می‌رود و بنابراین در نهایت سیستم به وضعیت پایدار رسیده و سرعت و شتاب دو جسم در هر لحظه یکسان خواهد بود، یعنی:

$$\ddot{x}_1=\ddot{x}_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{z}=0$$

$$\dot{x}_1=\dot{x}_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{z}=0$$

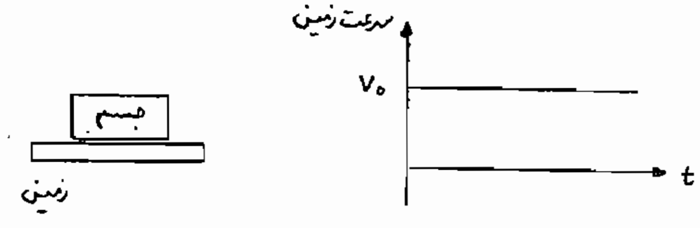
با قرار دادن $\ddot{z}$ و $\dot{z}$ در معادله فوق خواهیم داشت:

کشیدگی فنر $z=\frac{3F_0}{4k}$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک سال ۷۰ ـ ۶۹

جسمی بر روی زمین قرار دارد. فرض می‌شود که بین زمین و جسم استهلاک ویسکوز با ضریب استهلاک c باشد. در لحظه $t = 0$ زمین را با سرعت V_0 به حرکت در می‌آوریم. در درازمدت سرعت جسم برابر است با:



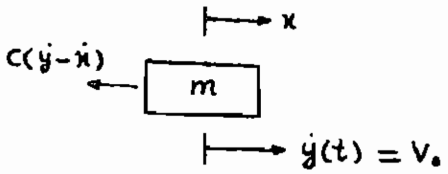
۱) V_0

۲) صفر

۳) $\frac{1}{2}V_0$

۴) CV_0

در نهایت سرعت جسم با سرعت زمین یعنی V_0 برابر خواهد شد. برای اثبات این موضوع می‌توان مسئله را مشابه ارتعاشات اجباری با تکیه‌گاه متحرک با حرکت ثابت و یکنواخت پایه در نظر گرفت. معادله حرکت عبارت‌است از:



$$m\ddot{x}=c(\dot{y}-\dot{x})$$
$$m\ddot{x}+c\dot{x}=c\dot{y}=cV_0$$
$$x(t)=x_p+x_h$$
$$x_h=V_0 t$$

برای به‌دست آوردن جواب خصوصی، معادله را از روش سنتی $x=e^{st}$ حل می‌کنیم.

$$\left(mS^2+cS\right)e^{St}=0 \Rightarrow mS^2+cS=0 \Rightarrow S=0\ ,\ S=-\frac{c}{m}$$

$$x(t)=V_0 t+A+Be^{-\frac{c}{m}t}$$

شرایط اولیه $x(0)=\dot{x}(0)=0 \Rightarrow A=-V_0 \quad , \quad B=V_0\frac{m}{c}$

$$x(t)=\frac{V_0 m}{c}\left(e^{-\frac{c}{m}t}-1\right)+V_0 t$$

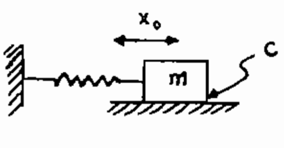
$$\dot{x}(t)=V_0-V_0 e^{-\frac{c}{m}t}$$

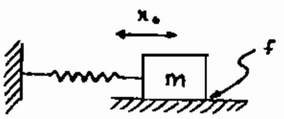
$$t\to\infty:\dot{x}(t)=V_0$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۰ ـ ۶۹

در سیستم روبه‌رو که تغییر مکان اولیه x دارد در درازمدت اصطکاک خشک از اصطکاک ویسکوز





۱) انرژی بیشتری تلف می‌کند.

۲) انرژی کمتری تلف می‌کند.

۳) به یک اندازه انرژی تلف می‌کند.

۴) بستگی به ضریب استهلاک ویسکوز c و ضریب اصطکاک خشک f دارد.

محل توقف جرم با اصطکاک ویسکوز در نقطه تعادل یا نقطه‌ای است که نیروی فشردگی یا کشیدگی فنر صفر می‌شود، در حالی‌که جرم با اصطکاک خشک در مکانی غیر از نقطه تعادل متوقف می‌شود. $\left(x_f\right)$

اتلاف انرژی سیستم $\Delta U=U_1-U_2$ در دو حالت اولیه و نهایی برابر است با:

اصطکاک ویسکوز $\Delta U=\frac{1}{2}kx_0^2-0=\frac{1}{2}kx_0^2$

اصطکاک خشک $\Delta U=\frac{1}{2}kx_0^2-\frac{1}{2}kx_f^2=\frac{1}{2}k\left(x_0^2-x_f^2\right)$

بنابراین انرژی تلف شده در سیستم با اصطکاک خشک، کمتر از سیستم با اصطکاک ویسکوز است.

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۰ ـ ۶۹

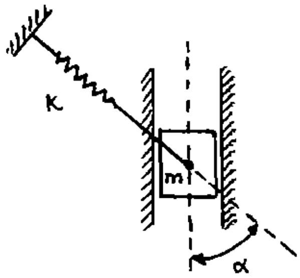
جسمی به جرم m در یک شیار صاف می‌تواند حرکت کند و به فنری به ضریب سختی k متصل است. مطابق شکل فرکانس طبیعی ارتعاشات سیستم عبارت‌است از:

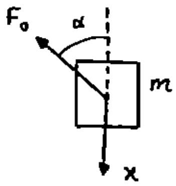
۱) $\sqrt{\frac{k}{m}}\cos^2\alpha$

۲) $\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\alpha$

۳) $\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\alpha$

۴) $\sqrt{\frac{k}{m}}\sin^2\alpha$





$$F_o = kx\cos\alpha$$

$$m\ddot{x} + F_o\cos\alpha = 0$$

$$m\ddot{x} + (kx\cos\alpha)\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + \left(k\cos^2\alpha\right)x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\cos^2\alpha\, x = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}\cos\alpha$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۰ ـ ۶۹

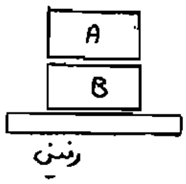
دو جسم A , B مطابق شکل روی زمین قرار دارند. فرض می‌شود که بین دو جسم و بین جسم B و زمین استهلاک ویسکوز با ضریب استهلاک c باشد. در لحظه $t=0$ زمین را با سرعت V_o به حرکت در می‌آوریم. در این صورت دو جسم به قسمی حرکت می‌کنند که:

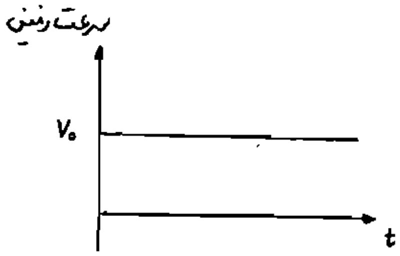
۱) جسم A همواره جلوتر از جسم B است.

۲) جسم B همواره جلوتر از جسم A است.

۳) دو جسم با سرعت V_o شروع به حرکت می‌کنند.

۴) سرعت دو جسم مساوی و برابر با صفر است.



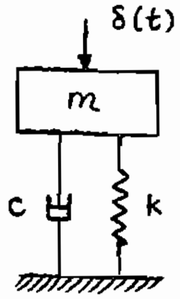


در حالت گذرا، جسم B که با زمین در تماس مستقیم است، از جسم A جلو می‌افتد. اما با گذشت زمان نهایتاً سیستم به حالت پایدار می‌رسد که در این حالت سرعت هر دو بلوک مساوی سرعت زمین خواهد شد. بنابراین جسم B که در مرحله گذرا از جسم A جلو افتاده همواره جلوتر از جسم A حرکت می‌کند.

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۸۴ ـ ۸۳

یک سیستم با مشخصات $m=1kg$, $c=6\dfrac{NS}{m}$, $k=2\dfrac{N}{m}$ را در نظر می‌گیریم که تحت ضربهٔ $\delta(t)$ قرار گرفته است. پاسخ این سیستم چگونه خواهد بود؟



۱) غیرنوسانی است.
۲) نوسانی با دامنه متغیر است.
۳) نوسانی با دامنه ثابت است.
۴) بستگی به جهت اعمال ضربه دارد.

ابتدا ضریب استهلاک بحرانی سیستم را محاسبه می‌کنیم.

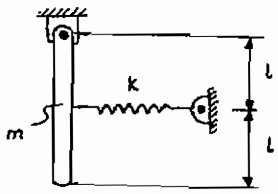
$$c_c=2\sqrt{km}=2\sqrt{2\times 1}=2\sqrt{2}$$

چون استهلاک این سیستم یعنی c از ضریب استهلاک بحرانی سیستم بیشتر است $(c_c<c)$، نسبت میرایی بزرگتر از یک است $\left(\xi=\dfrac{c}{c_c}>1\right)$ و سیستم فوق میرا است و پاسخ سیستم فوق میرا غیرنوسانی است.

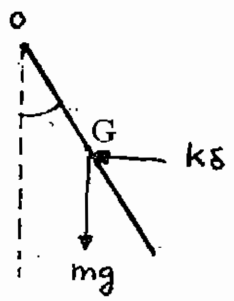
گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۸۴ ـ ۸۳

فرکانس طبیعی تیر صلب با جرم گسترده m در حالی که تیر به صورت قائم آویزان است و شبیه پاندول نوسان می‌نماید و ممان اینرسی آن حول مرکز جرم $\dfrac{4ml^2}{12}$ می‌باشد، کدام است؟



۱) $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$
۲) $\sqrt{\dfrac{g}{2l}}$
۳) $\sqrt{\dfrac{g}{2l}+\dfrac{k}{m}}$
۴) $\sqrt{\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{g}{l}+\dfrac{k}{m}\right)}$

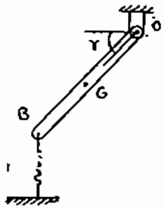


$$\delta=l\sin\theta\cong l\theta$$
$$\sum M_o=I_o\ddot{\theta}$$
$$I_o\ddot{\theta}=-k\delta l-mgl\sin\theta$$
$$I_o=I_G+ml^2=\frac{4ml^2}{12}+ml^2=\frac{4ml^2}{3}$$
$$\frac{4ml^2}{3}\ddot{\theta}=-kl^2\theta-mgl\theta$$
$$\ddot{\theta}+\frac{kl+mg}{\frac{4ml}{3}}\theta=0$$
$$\omega_n=\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{k}{m}+\frac{g}{l}\right)}$$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۸۴ ـ ۸۳

میله همگن OB در مجموعه ارتعاشی نشان داده شده در حالت استاتیکی با افق زاویه γ را می‌سازد. طول و جرم میله به‌ترتیب m , l است و مرکز جرم میله در $\frac{1}{2}$ واقع است. فرکانس طبیعی این مجموعه برای زاویه کوچک نوسان حول حالت استاتیکی آن کدام است؟



۱) $\omega_n=\sqrt{\frac{3k}{m}}$ ۲) $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}\cos\gamma}$

۳) $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}+\frac{g}{l}}$ ۴) $\omega_n=\sqrt{\left(\frac{k}{m}+\frac{g}{l}\right)\cos\gamma}$

چون کوپل ناشی از نیروی وزن میله زمانی که ارتعاشات حول حالت استاتیکی است، همواره در یک جهت است، پس نقشی در معادلات حرکت سیستم ندارد. θ زاویه انحراف از حالت تعادل استاتیکی است.

$$\Sigma M_o=J_o\ddot{\theta}$$

$$-k\delta(l)=\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}$$

$$-k(l\theta)l=\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{1}{3}m\ddot{\theta}+k\theta=0 \Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۸۰ ـ ۷۹

در حالت تشدید، وقتی که مستهلک‌کننده به صورت اصطکاک خشک (کولمب) عمل نماید دامنه ارتعاش

۱) به سمت صفر میل می‌کند. ۲) محدود می‌باشد.

۳) بستگی به ضریب اصطکاک دارد. ۴) به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

ضریب میرایی لزجی معادل سیستم با میرایی کولمب، با استفاده از برابری انرژی تلف شده توسط میرایی لزجی $\left(\pi c_{eq}\omega X^2\right)$ با انرژی تلف شده توسط میرایی کولمب $\left(4F_d X\right)$ به‌دست می‌آید.

$$\pi c_{eq}\omega X^2=4F_d X \Rightarrow c_{eq}=\frac{4F_d}{\pi\omega X}$$

از طرفی، دامنه ارتعاش برای سیستم با میرایی لزجی برابر است با:

$$X=\frac{F_o}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2+\left(c_{eq}\omega\right)^2}}$$

با جایگزینی c_{eq} در رابطهٔ فوق نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{kX}{F_o}=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{4F_d}{\pi F_o}\right)^2}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

در حالت تشدید $\omega=\omega_n$ است و دامنه به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۸ ـ ۷۷

یک تیر آهنی و یک تیر چوبی با اندازه‌ها و شرایط تکیه‌گاهی یکسان مفروض هستند، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) شکل مشخصه (مودها) و فرکانس‌های طبیعی آن‌ها یکسان است.

۲) شکل مشخصه (مودها) و فرکانس‌های طبیعی آن‌ها متفاوت است.

۳) شکل‌های مشخصه (مودها) این دو تیر مشابه هم هستند، ولی فرکانس‌های طبیعی آن‌ها یکسان نیستند.

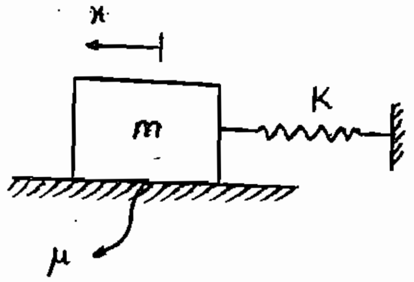
۴) شکل‌های مشخصه (مودها) این دو تیر متفاوت، ولی فرکانس‌های طبیعی آن‌ها یکسان است.

شکل مودهای ارتعاشی فقط به ابعاد هندسی و شرایط تکیه‌گاهی وابسته است. پس در مورد این دو تیر که اندازه و شرایط تکیه‌گاهی یکسان دارند با هم مشابه است، ولی فرکانس طبیعی علاوه بر ابعاد و شرایط تکیه‌گاهی به خواص ماده تشکیل دهنده تیر نیز بستگی دارد. بنابراین فرکانس‌های طبیعی تیر آهنی و چوبی با هم متفاوت است.

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۸ ـ ۷۷

دامنه ارتعاش آزاد با وجود اصطکاک خشک چگونه می‌شود؟



۱) دامنه به‌صورت نمایی کم می‌شود و به سمت صفر میل می‌کند.

۲) دامنه به‌صورت نمایی خطی کم می‌شود و به سمت صفر میل می‌کند.

۳) دامنه به‌صورت خطی کم می‌شود ولی به سمت صفر میل نمی‌کند.

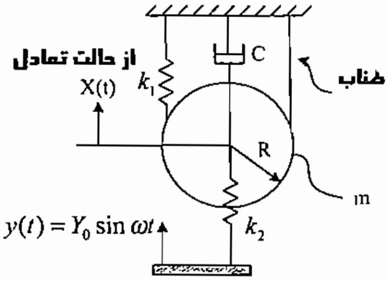
۴) دامنه به‌صورت نمایی کم می‌شود ولی به سمت صفر میل نمی‌کند.

دامنه ارتعاشات سیستم جرم و فنر با اصطکاک خشک (میرایی کولمب) با گذشت زمان به‌طور خطی کاهش می‌یابد و ارتعاشات آن حول نقطه $\frac{F_d}{K}$ صورت می‌گیرد. یعنی وقتی که t به سمت بی‌نهایت میل می‌کند دامنه به $\frac{F_d}{K}$ نزدیک می‌شود.

گزینه ۳ صحیح است.

سؤالات ۱۳۸۶

۱ـ با توجه به شکل نشان داده شده استوانه‌ای به جرم m و به شعاع R نگهداری شده است. پایه فنر k_2 دارای حرکت هارمونیک $y(t) = Y_0 \sin \omega t$ می‌باشد. معادله حرکت این سیستم کدام است؟ x تغییر مکان مرکز جرم دیسک است.



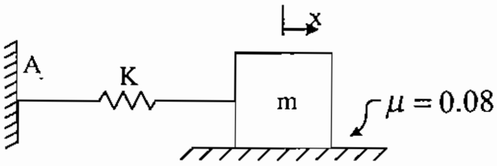
۱) $\frac{3}{2}m\ddot{x} + (4k_1 + k_2)x + c\dot{x} = k_2 Y_0 \sin \omega t$

۲) $\frac{3}{2}m\ddot{x} + (2k_1 + k_2)x + c\dot{x} = k_2 Y_0 \sin \omega t$

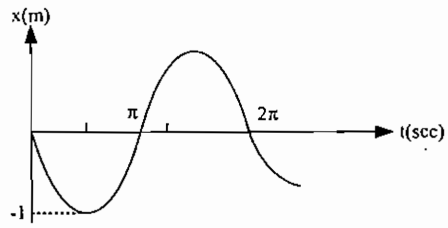
۳) $m\ddot{x} + (4k_1 + k_2)x + c\dot{x} = k_2 Y_0 \sin \omega t$

۴) $m\ddot{x} + (2k_1 + k_2)x + c\dot{x} = k_2 Y_0 \sin \omega t$

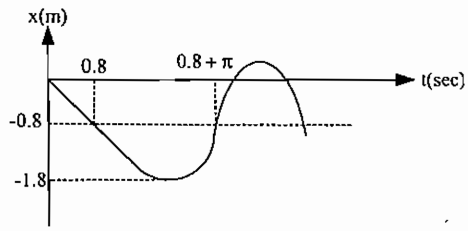
۲ـ جسمی به جرم $m = 1\text{kg}$ بر سطحی با ضریب اصطکاک $\mu = 0.08$ مطابق شکل به فنری به سختی $k = 1\frac{N}{m}$ وصل است. اگر سطح را با سرعت $1\frac{m}{s}$ به طرف چپ حرکت دهیم و این سرعت ثابت باشد، چنانچه نقطهٔ A محل اتصال فنر به دیوار همواره ساکن باشد و $g = 10\frac{m}{s^2}$ فرض شود، منحنی x برحسب t کدام است؟



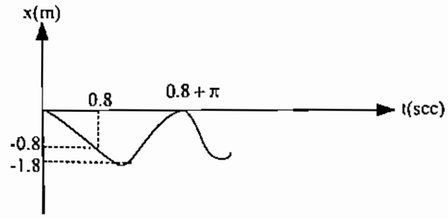
۱)



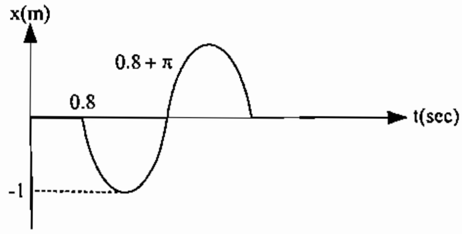
۲)



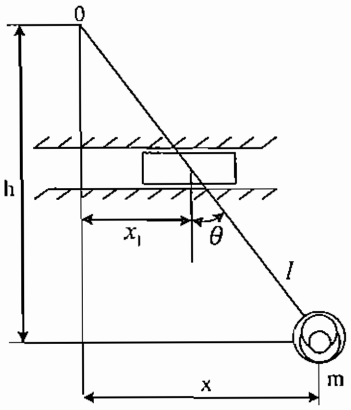
۳)



۴)



۳ـ نقطهٔ آویز آونگ ساده با حرکت هماهنگ $x_1 = X_1 \sin \omega t$ در خط افق نوسان می‌کند. اگر حرکت پاندول در زوایا و تغییر مکان‌های کوچک نوسان کند. فاصلهٔ h که در آن گره تشکیل می‌شود، کدام است؟



۱) $h = l\left(\dfrac{\omega_n}{\omega}\right)^2$

۲) $h = l\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2$

۳) $h = l\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)$

۴) $h = l\left(\dfrac{\omega_n}{\omega}\right)$

سؤالات ۱۳۸۷

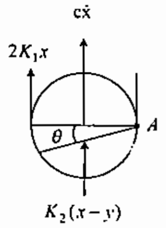
۱ـ لاستیکی زیر موتوری جهت تقلیل دامنه ارتعاش قرار داده شده است. موتور به اندازه 10 سانتی‌متر در لاستیک فرو می‌رود. سرعت دورانی (برحسب دور در دقیقه) که در آن موتور حداکثر دامنه در جهت قائم خواهد داشت چقدر است؟ فرض کنید $g = 10\frac{m}{sec^2}$.

۱) $\frac{300}{\pi}$　　۲) $\frac{100}{\pi}$　　۳) 10　　۴) $\frac{10}{\pi}$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۶

۱ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

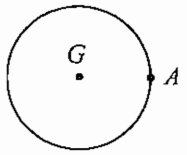
چون نقطه A حرکت غلتش بدون لغزش انجام می‌دهد مرکز آنی دوران است پس:



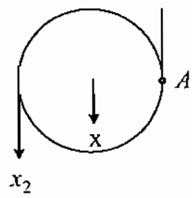
$$\Rightarrow x = R\theta \;\Rightarrow\; \sum M_A = I_A\ddot{\theta} \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} + CR\dot{\theta}R + 2k_1R\theta \times (2R) + k_2(R\theta - y)R = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + (4k_1 + k_2)x = k_2y = k_2Y_0\sin\omega t$$

توجه:



$$I_A = I_\sigma + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$



$$x_2 = 2x$$

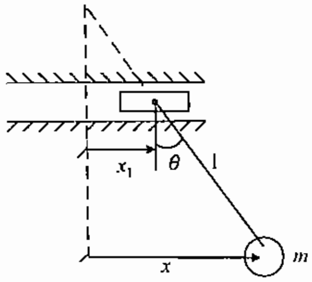
۲ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با شروع حرکت سطح به سمت چپ و ایجاد حرکت نسبی جسم و سطح، نیروی اصطکاک برابر $F_S = \mu_S N = \mu_S mg = 0.08 \times 10 = 0.8\,N$ به جرم در جهت خلاف حرکت جسم m نسبت به زمین (یعنی به سمت چپ) وارد می‌شود که این نیرو به‌صورت خطی باعث فشرده شدن فنر تا نقطه تعادل یعنی $x = \frac{f}{k} = \frac{0.8}{1} = 0.8\,m$ به سمت چپ یعنی منفی می‌شود. بنابراین گزینه ۲ و ۳ می‌توانند درست باشند و از نقطه تعادل به بعد به دلیل داشتن انرژی جنبشی جرم m و تبدیل آن به انرژی پتانسیل فنر و تکرار این عمل باعث حرکت نوسانی جرم با دامنهٔ 1cm می‌شود و از آنجا که می‌دانیم اصطکاک خشک تغییری در فرکانس طبیعی سیستم ایجاد نمی‌کند پس برای این سیستم مانند یک سیستم جرم وَ فنر ساده داریم:

$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1\frac{rad}{s}$ و از آنجا $\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi(s)$. پس پریود نوسان جرم m برابر 2π می‌باشد پس گزینه ۲ صحیح است.

نکته: دامنه 1m حرکت نوسانی به دلیل داشتن سرعت $1\frac{m}{s}$ در نقطه تعادل جرم و تبدیل آن به انرژی پتانسیل فنر در $\left(\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow V = 1\frac{m}{s} \Rightarrow x = 1m\right)$ به دست می‌آید که البته در این محاسبات از اصطکاک صرف‌نظر شده است.

۳ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.



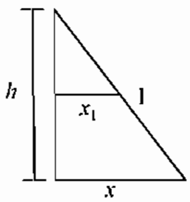
$$x = x_1 + l\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{x - x_1}{l}$$

معادله حرکت : $m\ddot{x} = -mg\theta = -\frac{mg}{l}(x - x_1)$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{l}x = \frac{g}{l}x_1 \begin{cases} x_1 = X_1 \sin \omega t \\ x = X \sin \omega t \end{cases}$$

$$\Rightarrow -X\omega^2 \sin \omega t + \frac{g}{l}X \sin \omega t = \frac{g}{l}X_1 \sin \omega t \Rightarrow X = \frac{\frac{g}{l}X_1}{\frac{g}{l} - \omega^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \frac{g}{l} = \omega_n^2 \Rightarrow X = \frac{X_1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \Rightarrow \left|\frac{X_1}{X}\right| = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$



قضیه تالس $\Rightarrow \frac{h}{|X|} = \frac{h - l}{|X_1|} \quad \Rightarrow \quad h\left|\frac{X_1}{X}\right| = h - l$

$$\Rightarrow h\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) = h - l \quad \Rightarrow \quad h = l\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2$$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۷

۱ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

نکته :

۱ـ حداکثر دامنه در سرعتی اتفاق می‌افتد که فرکانس طبیعی لاستیک با سرعت محور معادل می‌شود.

۲ـ فرکانس طبیعی برای سیستم برابر است با $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta S}}$ که در آن ΔS، تغییر مکان استاتیکی است. (چون $mg = k\Delta S$)

پس خواهیم داشت:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta S}} = \sqrt{\frac{10\,\frac{m}{s^2}}{0.1\,m}} = 10\frac{rad}{s}$$

$$\omega_{max} = \omega_n = 10\frac{rad}{s} = 10 \times \frac{1}{2\pi} \times 60 = \frac{300}{\pi}\,rpm$$

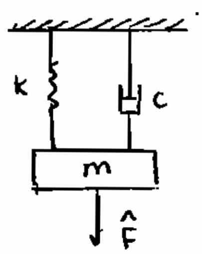
فصل چهارم

ارتعاشات گذرا

ارتعاشات گذرا هنگامی صورت می‌گیرد که یک سیستم تحت تاثیر یک محرک خارجی غیرهارمونیک ناگهانی $F(t)$ قرار بگیرد. پاسخ سیستم به این نیروی محرک غیرهارمونیک، پاسخی گذرا است که در فرکانس‌های طبیعی سیستم روی می‌دهد.

سه نیروی غیرهارمونیک موردنظر ما نیروی ضربه‌ای، نیروی پله‌ای و نیروی شیب هستند.

۱ ـ پاسخ به نیروی تحریک ضربه‌ای



نیروهای ضربه‌ای نیروهایی با دامنه بزرگ هستند که در بازه زمانی کوتاهی اثر می‌کنند و انتگرال زمانی این نیروها یعنی سطح محصور شده در زیر منحنی نیرو ـ زمان ضربه نامیده می‌شود.

$$\int F\,dt = \int \hat{F}\delta(t)\,dt = \hat{F}$$

ضربه واحد، ضربه‌ای است که مقدار آن یک است: $\hat{F}=1$

نیروی ضربه‌ای باعث تغییر سرعت جسم می‌شود بدون این‌که تغییر مکان قابل ملاحظه‌ای در جسم به‌وجود بیاید، یعنی ضربه $\hat{F}$ به جرم m سرعت اولیه $V_0=\dfrac{\hat{F}}{m}$ می‌دهد.

در مورد یک سیستم غیرمیرا که تحت تاثیر ضربه $\hat{F}$ قرار گرفته است، پاسخ سیستم عبارت‌است از:

$$x(t)=\frac{\dot{x}(t)}{\omega_n}\sin\omega_n t+x(0)\cos\omega_n t=\frac{V_o}{\omega_n}\sin\omega_n t+x(0)\cos\omega_n t$$

در صورتی‌که سیستم در ابتدا ساکن باشد $x(0)=0$ و پاسخ سیستم عبارت‌است از:

$$\boxed{x(t)=\frac{\hat{F}}{m\omega_n}\sin\omega_n t}$$

$$x=\hat{F}h(t)$$

که در آن $h(t)$ پاسخ سیستم به ضربه واحد است. در مورد سیستم غیرمیرا $h(t)$ عبارت‌است از:

$$\boxed{h(t)=\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t}$$

اگر سیستم دارای میرایی باشد، پاسخ سیستم به نیروی ضربه عبارت‌اند از:

$$\boxed{x(t)=\frac{\hat{F}}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t}$$

که در آن $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ فرکانس نوسانات میرا شده است.

$h(t),x(t)$ در مورد سیستم دارای میرایی عبارتند از:

$$x(t)=\hat{F}h(t)$$

$$\boxed{h(t)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t}$$

۲ـ پاسخ به نیروی تحریک پله‌ای:

می‌خواهیم عکس‌العمل سیستم جرم، فنر و دمپر را به نیروی تحریک پله‌ای با مقدار F_0 تعیین کنیم.

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0u(t)$$

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=\frac{F_0}{m}$$

حل معادله حرکت سیستم مجموع جواب‌های همگن و خصوصی معادله فوق خواهد بود که با فرض شرایط اولیه صفر برابر است با:

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\;\omega_n t-\psi\right)\right]\;,\quad \tan\psi=\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

در حالت بدون میرا $c=0$ است و معادله حرکت سیستم و پاسخ سیستم عبارت خواهند بود از:

$$m\ddot{x}+kx=F_0u(t)$$

$$x(t)=A\sin\omega_n t+B\cos\omega_n t+\frac{F_0}{k}$$

$$\left.\begin{aligned}x(0)=0\\ \dot{x}(0)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x(t)=\frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t)=F_0\,g(t)$$

$$\boxed{g(t)=\frac{1}{k}(1-\cos\omega_n t)}$$

که در آن $g(t)$ پاسخ سیستم به پله واحد است.

نکته: دقت داشته باشید که تابع ضربه واحد مشتق تابع پله واحد است و متناظر با آن پاسخ سیستم به تابع ضربه، مشتق پاسخ سیستم به تابع پله است.

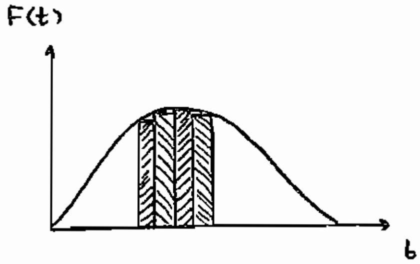
$$\delta(t-\tau)=\frac{du(t-\tau)}{dt}$$

$$h(t)=\frac{dg(t)}{dt}$$

پاسخ در حوزه زمانی

انتگرال کانولوشن ⇐ برای پاسخ به ضربه

انتگرال دو هامل ⇐ برای پاسخ به پله



$$\Delta x = \hat{F}h(t-t_0)$$
$$= F(\tau)\Delta\tau h(t-\tau)$$
$$x(t) = \int_0^{t_0} F(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

انتگرال فوق انتگرال کانولوشن با شرایط اولیه صفر نام دارد.

۳ـ پاسخ به نیروی تابع شیب

$$F(t) = c\,tu(t)$$

راه اول $x(t) = x_h + x_p \qquad t=0:\begin{cases} x=0 \\ \dot{x}=0 \end{cases}$

راه دوم $x(t) = \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t c\tau u(\tau)\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$

$$x(t) = \frac{c}{m\omega_n}\int_0^t \tau\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

باید انتگرال جز به جز بگیریم.

انتگرال	مشتق
$\sin\omega_n(t-\tau)$	τ +
$\frac{1}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\tau)$	1 −
$\frac{-1}{\omega_n^2}\sin\omega_n(t-\tau)$	0

$$x(t) = \left[\frac{\tau}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\tau) + \frac{1}{\omega_n^2}\sin\omega_n(t-\tau)\right]\Bigg|_0^t$$

$$x(t) = \frac{c}{k}\left(1 - \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\right)u(t) = cr(t)$$

پاسخ به شیب واحد $r(t) = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\right)u(t)$

۴ـ تحریک پایه:

اغلب در سیستم‌های دینامیکی، تکیه‌گاه تحت تاثیر یک حرکت ناگهانی که به وسیله تغییر مکان، سرعت و یا شتاب آن مشخص می‌شود قرار می‌گیرد. در این‌صورت معادله حرکت را بر حسب تغییر مکان نسبی $z = x - y$ به‌صورت زیر بیان می‌کنند:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

در این حالت پاسخ سیستمی با تحریک پایه مشابه نتایج سیستمی است که توسط نیرو تحریک شده با این تفاوت که در آن عبارت $\frac{F_0}{m}$ با عبارت $-\ddot{y}$ جایگزین شده است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t-t_0)=\phi(t_0)$$

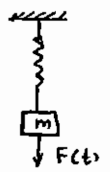
قضیه:

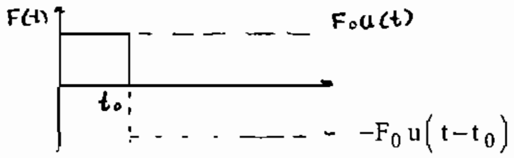
$$۱)\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta'(t-t_0)=-\phi'(t_0)$$

$$۲)\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t)\delta(t-t_0)=\phi'(t_0)$$

مثال : پاسخ به ورودی $F(t)$ در شکل زیر را بیابید.

ابتدا تابع ورودی را می‌نویسیم:



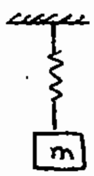


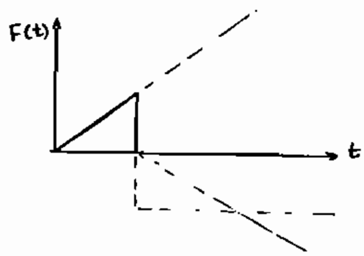
$$F(t)=F_0u(t)-F_0u(t-t_0)$$
$$x(t)=F_0g(t)u(t)-F_0g(t-t_0)u(t)$$
$$x(t)=\frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t)u(t)-\frac{F_0}{k}\left[1-\cos\omega_n(t-t_0)\right]u(t-t_0)$$

پاسخ سیستم در زمانهای مختلف عبارت‌است از:

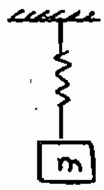
$$t<0 \qquad x(t)=0$$
$$0<t<t_0 \qquad x(t)=\frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t)$$
$$t>t_0 \qquad x(t)=\frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t)-\frac{F_0}{k}\left[1-\cos\omega_n(t-t_0)\right]$$

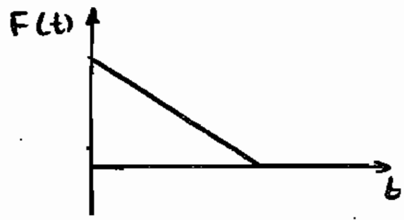
مثال : پاسخ به ورودی $F(t)$ در شکل‌های زیر را بیابید.





$$F(t)=\frac{F_0}{k}tu(t)-\frac{F_0}{t_0}(t-t_0)u(t-t_0)-F_0u(t-t_0)$$
$$x(t)=\frac{F_0}{t_0}\frac{1}{k}\left(t-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\right)u(t)-\frac{F_0}{t_0}\frac{1}{k}\left[(t-t_0)-\frac{\sin\omega_n(t-t_0)}{\omega_n}\right]u(t-t_0)-\frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t)u(t-t_0)$$

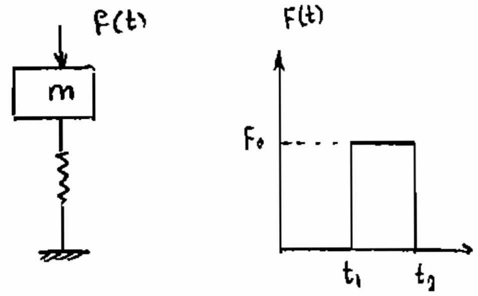




$$F(t)=-\frac{F_0}{t_0}(t-t_0)\left[u(t)-u(t-t_0)\right]$$
$$=\frac{-F_0}{t_0}(t-t_0)u(t)+\frac{F_0}{t_0}(t-t_0)u(t-t_0)$$

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۷-۷۶

طبق شکل زیر اگر عکس العمل یک سیستم غیر میرای جرم و فنر در برابر تحریک پله‌ای برابر $\frac{F_0}{K}[1-\text{Cos}\omega_n t]$ باشد، $x(t)$ عکس العمل تحریک نشان داده شده برای این سیستم به ازاء $t > t_2$ کدام است؟



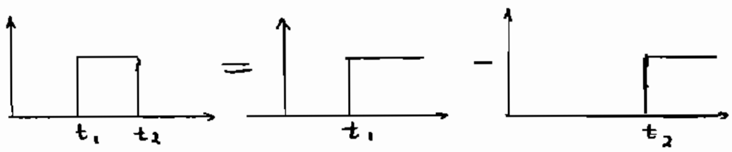
۱- $\frac{F_0}{K}\left[\text{Sin}\omega_n\left(t-t_1\right)-\text{Cos}\omega_n\left(t-t_2\right)\right]$

۲- $\frac{F_0}{K}\left[\text{Sin}\omega_n\left(t-t_2\right)-\text{Cos}\omega_n\left(t-t_2\right)\right]$

۳- $\frac{F_0}{K}\left[1-\text{Cos}\omega_n\left(t-t_2\right)+\text{Cos}\omega_n\left(t-t_2\right)\right]$

۴- $\frac{F_0}{K}\left[\text{Cos}\omega_n\left(t-t_2\right)-\text{Cos}\omega_n\left(t-t_1\right)\right]$

مسئله را می‌توان با استفاده از اصل برهم نهش (سوپرپوزیشن) حل نمود.



$$x_1(t)=\frac{F_0}{K}\left[1-\text{Cos}\omega_n\left(t-t_1\right)\right]$$

$$x_2(t)=\frac{F_0}{K}\left[1-\text{Cos}\omega_n\left(t-t_2\right)\right]$$

$$t>t_2 : x(t)=x_1(t)-x_2(t)=\frac{F_o}{k}\left[\cos\omega_n\left(t-t_2\right)-\cos\omega_n\left(t-t_1\right)\right]$$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

فصل پنجم

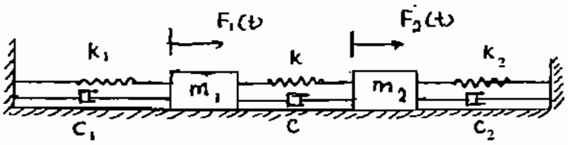
سیستم‌های دو درجه آزادی

در حالت کلی، حرکت یک سیستم n درجه آزادی توسط n معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم بیان می‌شود. تعداد فرکانس‌های طبیعی این سیستم برابر با تعداد درجات آزادی آن است. هر فرکانس طبیعی متناظر با یک مود ارتعاشی است و حرکت سیستم ترکیبی از حرکات مربوط به این مودهای ارتعاشی خواهد بود.

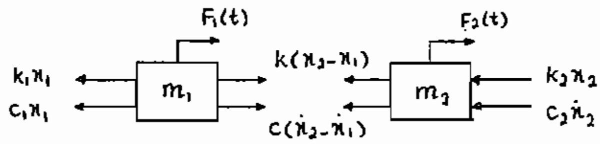
در این بخش نیز همانند قسمت قبل ارتعاشات را در دو حالت مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱- ارتعاشات آزاد

۲- ارتعاشات اجباری



سیستم نشان داده شده در شکل یک سیستم دو درجه آزادی است. باید دیاگرام آزاد هر یک از دو جسم m_2, m_1 را رسم کنیم و معادلات حرکت دو جسم را بنویسیم.



$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = F_1 - k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 - k(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m_2\ddot{x}_2 = F_2 + k(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2x_2 - c_2\dot{x}_2 \end{cases}$$

سیستم دو درجه آزادی دارای دو معادله حرکت و دو فرکانس طبیعی است.

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c+c_1)\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 + (k_1+k)x_1 - kx_2 = F_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 - c\dot{x}_1 + (c+c_2)\dot{x}_2 + (k_2+k)x_2 - kx_1 = F_2(t) \end{cases}$$

بهتر است که این معادلات را به صورت ماتریسی بنویسیم:

$$[M][\ddot{x}]+[C][\dot{x}]+[K][x]=[F(t)]$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c+c_1 & -c \\ -c & c+c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k & -k \\ -k & k_2+k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

دقت کنید که هر سه ماتریس جرم $[M]$، میرایی $[C]$ و سختی $[K]$ متقارن هستند.

$$[M]=[M]^T \quad , \ [C]=[C]^T \quad ,[K]=[K]^T$$

پس فرم کلی معادلهٔ دیفرانسیل سیستم دو درجه آزادی به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{bmatrix}$$

در صورتی‌که سیستم بدون استهلاک در نظر گرفته شود ماتریس میرایی $[C]$ صفر است.

اگر در ماتریس جرم عناصر غیرقطری غیرصفر باشند $(m_{12}\neq 0 , m_{21}\neq 0)$، سیستم دارای کوپلینگ دینامیکی است.

و اگر در ماتریس سختی عناصر غیرقطری غیرصفر باشند $(k_{12}\neq 0 , k_{21}\neq 0)$، سیستم دارای کوپلینگ استاتیکی است.

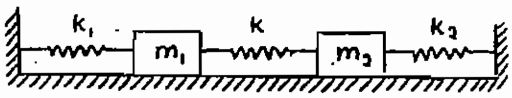
و اگر در ماتریس میرایی عناصر غیرقطری غیرصفر باشند $(c_{12}\neq 0 , c_{21}\neq 0)$، سیستم دارای کوپلینگ سرعت است.

۱- ارتعاشات آزاد سیستم‌های دو درجه آزادی و بدون استهلاک

سیستم دو درجه آزادی زیر را که تحت فرکانس‌های طبیعی خود نوسان می‌کند (دارای ارتعاشات آزاد است) در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+(k_1+k)x_1-kx_2=0 \\ m_2\ddot{x}_2-kx_1+(k+k_2)x_2=0 \end{cases}$$

$$x_1=X_1 e^{st} \quad , \quad x_2=X_2 e^{st}$$



برای به‌دست آوردن نسبت دامنه‌ها یا مودهای ارتعاشی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

x_1, x_2 و مشتقات آن‌ها را در معادلات حرکت جایگذاری می‌کنیم.

معادله دامنه‌ها:

$$\begin{cases} \left[(k+k_1)+m_1s^2\right]X_1-kX_2=0 \\ -kX_1+\left[(k+k_2)+m_2s^2\right]X_2=0 \end{cases}$$

شرط داشتن جواب‌های غیر صفر برای دستگاه معادلات فوق این است که دترمینان ضرایب صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} (k+k_1)+m_1s^2 & -k \\ -k & (k+k_2)+m_2s^2 \end{vmatrix}=0$$

با حل این دترمینان به یک معادله درجه ۴ برای s می‌رسیم که ریشه‌های آن عبارت‌اند از:

$$s_{1,2}=\pm j\omega_1 \qquad s_{3,4}=\pm j\omega_2$$

به ω_1 و ω_2 فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌گویند.

پاسخ کل سیستم $\begin{cases} x_1=A_{11}\sin(\omega_1 t+\psi_{11})+A_{12}\sin(\omega_2 t+\psi_{12}) \\ x_2=A_{21}\sin(\omega_1 t+\psi_{21})+A_{22}\sin(\omega_2 t+\psi_{22}) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \psi_{11}=\psi_{21}=\psi_1 \\ \psi_{12}=\psi_{22}=\psi_2 \end{matrix}$

نسبت دامنه $u_1=\dfrac{A_{21}}{A_{11}}\ , \ u_2=\dfrac{A_{22}}{A_{12}}$

با جایگذاری در معادلات بالا داریم:

$$\begin{cases} x_1=A_{11}\sin(\omega_1 t+\psi_1)+A_{12}\sin(\omega_2 t+\psi_2) \\ x_2=u_1A_{11}\sin(\omega_1 t+\psi_1)+u_2A_{12}\sin(\omega_2 t+\psi_2) \end{cases}$$

نسبت دامنه u_1 را در فرکانس طبیعی اول ω_1 و نسبت دامنه u_2 را در فرکانس طبیعی دوم ω_2 به‌دست می‌آوریم و اثبات می‌شود که مقدار آن برابر است با:

مقادیر X_2, X_1 مربوط به ω_1 را به صورت $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$ و مقادیر X_2, X_1 مربوط به ω_2 را به صورت $X_1^{(2)}$, $X_2^{(2)}$ نشان می‌دهیم:

$$u_1 = \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} \quad , \quad u_2 = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}}$$

پس از به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی با استفاده از معادلات حرکت می‌توان نسبت دامنه‌ها یا مودهای ارتعاشی را به‌دست آورد.

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \dfrac{(k+k_1)-m_1\omega_1^2}{k} = \dfrac{k}{(k+k_2)-m_2\omega_1^2} \\ u_2 = \dfrac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \dfrac{(k+k_2)-m_1\omega_2^2}{k} = \dfrac{k}{(k+k_2)-m_2\omega_2^2} \end{cases}$$

u_1 و u_2 (نسبت دامنه‌های سیستم)کاملاً به خواص سیستم بستگی دارند .

حال که u_1 و u_2 مشخص شدند، تنها ۴ مجهول و ۴ شرط مرزی برای جواب‌ها باقی می‌ماند. پس جواب‌ها عبارت‌اند از:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \end{bmatrix} A_{11}\,\text{Sin}(\omega_1 t + \psi_1) + \begin{bmatrix} 1 \\ u_2 \end{bmatrix} A_{12}\,\text{Sin}(\omega_2 t + \psi_2)$$

اگر کاری کنیم که $A_{12} = 0$ شود ،شکل جابه‌جایی سیستم در فرکانس اول (ω_1) خواهد بود و اصطلاحاً می‌گوییم سیستم در مود اول ارتعاش می‌کند. در این‌صورت شکل پاسخ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \end{bmatrix} A_{11}\,\text{Sin}(\omega_1 t + \psi_1)$$

اما اگر $A_{11} = 0$ شکل جابه‌جایی سیستم در فرکانس دوم (ω_2) را خواهیم داشت و سیستم در مود دوم ارتعاش می‌کند. در این‌صورت شکل پاسخ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ u_2 \end{bmatrix} A_{12}\,\text{Sin}(\omega_2 t + \psi_2)$$

در حالت کلی داریم:

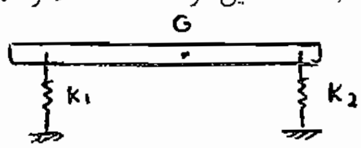
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11}\text{Sin}(\omega_1 t + \psi_1) \\ A_{12}\text{Sin}(\omega_2 t + \psi_2) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix} \qquad \begin{aligned} P_1(t) &= A_{11}\,\text{Sin}(\omega_1 t + \psi_1) \\ P_2(t) &= A_{12}\,\text{Sin}(\omega_2 t + \psi_2) \end{aligned}$$

ماتریس $[u]$ را ماتریس مودال می‌نامیم.

$$[u] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

مثال: سیستم دو درجه آزادی (خطی + دورانی) زیر را در نظر بگیرید. این سیستم دارای دو حرکت انتقالی و دورانی است. پس دارای دو درجه آزادی θ, x است. این دو مختصه کاملاً از هم مستقل هستند. معادله ماتریسی حرکت را به‌دست آورید.

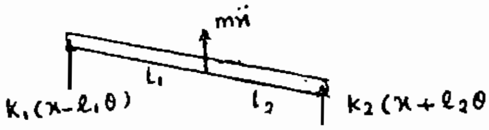


$$\Sigma F_x = m\ddot{x}$$

$$\Sigma M_G = J\ddot{\theta}$$

$$\begin{cases} -k_1(x-l_1\theta)-k_2(x+l_2\theta)=m\ddot{x} \\ k_1(x-l_1\theta)l_1-k_2(x+l_2\theta)l_2=J_c\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}+(k_1+k_2)x-(k_1 l_1-k_2 l_2)\theta=0 \\ J_c\ddot{\theta}-(k_1 l_1-k_2 l_2)x+(k_1 l_1^2+k_2 l_2^2)\theta=0 \end{cases}$$



و معادله ماتریسی حرکت عبارت خواهد بود از:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -(k_1l_1-k_2l_2) \\ -(k_1l_1-k_2l_2) & k_1l_1^2+k_2l_2^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

در حالت کلی اگر المان‌های غیر قطری غیر صفر باشند، می‌گوییم سیستم دارای کوپلینگ است.

$m_{12}, m_{21} \neq 0 \rightarrow$ کوپلینگ دینامیکی

$c_{12}, c_{21} \neq 0 \rightarrow$ کوپلینگ سرعت (دمپینگ)

$k_{12}, k_{21} \neq 0 \rightarrow$ کوپلینگ استاتیکی

معادلات به‌دست آمده در مثال قبل وابسته هستند، چون دارای کوپلینگ استاتیکی می‌باشند. حال اگر سیستم طوری بود که $k_1l_1 = k_2l_2$ می‌بود، سیستم دی‌کوپله و کوپلینگ استاتیکی برطرف می‌شد.

نکته: نوع کوپلینگ موجود در معادلات سیستم یک خاصیت ذاتی سیستم نمی‌باشد، بلکه بستگی به مختصات استفاده شده برای سیستم دارد و امکان دارد بتوان از مختصاتی استفاده نمود که با استفاده از آن معادلات حرکت به‌دست آمده کوپله نمی‌باشد. به چنین مختصاتی مختصات اصلی یا مبنا می‌گویند. مزیت چنین مختصاتی آن است که معادلات دی کوپله حرکت را می‌توان به صورت مجزا حل نمود.

اگر در سیستم دو درجه آزادی، ماتریس جرم $[M]$ و ماتریس سختی $[K]$ را داشته باشیم، برای به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی سیستم از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

$$\det\left[K - M\omega^2\right]=0$$

مقادیر ω به‌دست آمده از رابطهٔ فوق را در فرمول نسبت دامنه‌ها قرار می‌دهیم و به ازای هر فرکانس طبیعی، مود ارتعاشی مربوط به آن را به‌دست می‌آوریم.

مختصات اصلی

این مختصات دارای این خاصیت است که اگر وارد سیستم شود، ماتریس‌های جرم و سختی قطری می‌شوند و معادلات سیستم اصطلاحاً دی‌کوپله می‌شود. یعنی معادلات ماتریسی حرکت به فرم زیر خواهند بود.

$$\left(k_{12}=k_{21}=0\ ,\ m_{12}=m_{21}=0\right)$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

پس دستگاه معادلات دیفرانسیل به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{p}_1+k_{11}p_1=0 \\ m_{22}\ddot{p}_2+k_{22}p_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} p_1=A_{11}\mathrm{Sin}(\omega_1 t+\psi_1) \\ p_2=A_{12}\mathrm{Sin}(\omega_2 t+\psi_2) \end{matrix}$$

در این معادلات $\omega_1^2=\dfrac{k_{11}}{m_{11}}$, $\omega_2^2=\dfrac{k_{22}}{m_{22}}$ به‌سادگی محاسبه می‌شوند.

اگر این معادلات را در مختصات دلخواه عمومی $\{q\}$ بنویسیم که در آن کوپلینگ استاتیکی و دینامیکی وجود دارد خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix}A_{11}\mathrm{Sin}(\omega_1 t+\psi_1)+\begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix}A_{12}\mathrm{Sin}(\omega_2 t+\psi_2)$$

بنابراین رابطهٔ بین مختصات اصلی و مختصات عمومی به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

$$\{q\}=[u]\{P\}\Rightarrow\{p\}=[u]^{-1}\{q\}$$

اگر داشته باشیم:

$$u=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

مختصات اصلی عبارت‌است از:

$$\{P\}=\frac{1}{u_{11}u_{22}-u_{12}u_{21}}\begin{bmatrix} u_{22} & -u_{12} \\ -u_{21} & u_{11} \end{bmatrix}\{q\}$$

مثال: مختصات اصلی سیستمی که معادلات حرکت آن به‌صورت زیر داده شده است را به‌دست بیاورید.

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1+2kx_1-kx_2=0 \\ m\ddot{x}_2-kx_1+2kx_2=0 \end{cases}$$

$$[M]=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} : [K]=\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

برای به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی داریم:

$$\left|[K]-[M]\omega^2\right|=0$$

$$m\omega^2=k \rightarrow \omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$m\omega^2=3k \rightarrow \omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

با فرض $x_1=X_1e^{st}$ و $x_2=X_2e^{st}$ به معادله دامنه‌ها می‌رسیم.

معادله دامنه‌ها
$$\begin{cases} \left(2k-m\omega^2\right)X_1-kX_2=0 \\ -kX_1+\left(2k-m\omega^2\right)X_2=0 \end{cases}$$

$$u_1=\frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}}=\frac{2k-m\omega^2}{k}\ \overset{\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}}{\Rightarrow}\ u_1=1$$

$$u_2=\frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}}=\frac{-k}{2k-m\omega^2}\ \xrightarrow{\omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}}\ u_2=-1$$

$$[u]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ u_1 & u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\{P\}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}p_1\\ p_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}(x_1+x_2)\\ \frac{1}{2}(x_1-x_2)\end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases}m\ddot{x}_1+2kx_1-kx_2=0\\ m\ddot{x}_2-kx_1+2kx_2=0\end{cases}$$

دو معادله را یک‌بار با هم جمع و یک‌بار از هم کم می‌کنیم.

$$\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\begin{cases}m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)+k(x_1+x_2)=0\\ m(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)+3k(x_1-x_2)=0\end{cases}$$

با تعریف p_1 و p_2 در بالا داریم:

$$\begin{cases}m\ddot{p}_1+kp_1=0\\ m\ddot{p}_2+3kp_2=0\end{cases}$$

معادلات فوق معادلات حرکت بر حسب مختصات اصلی هستند.

۲ـ ارتعاشات اجباری سیستم‌های دو درجه آزادی و بدون استهلاک

معادله حرکت سیستم ارتعاشی دو درجه آزادی در حالت ارتعاشات اجباری بدون مستهلک کننده به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

پاسخ در ارتعاشات اجباری همیشه دارای فرکانسی برابر با فرکانس تحریک است. برای حل باید پاسخ را به‌صورت هارمونیک در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \operatorname{Sin}\omega t \\ x_2 = X_2 \operatorname{Sin}\omega t \\ F_1 = F_{10} \operatorname{Sin}\omega t \\ F_2 = F_{20} \operatorname{Sin}\omega t \end{cases}$$

بعد از جایگذاری داریم:

$$\begin{bmatrix} k_{11}-m_{11}\omega^2 & k_{12}-m_{12}\omega^2 \\ k_{21}-m_{21}\omega^2 & k_{22}-m_{22}\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

$$Z_{rs}(\omega)=k_{rs}-m_{rs}\omega^2$$

$z(\omega)$ ماتریس امپدانس نامیده می‌شود.

ماتریس امپدانس $\left[Z(\omega)\right]=\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$

$$\{x\}=\left[Z(w)\right]^{-1}\{F_0\}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\frac{1}{z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}}\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

الف ـ خاصیت تعامد مودهای طبیعی

اگر ϕ_1 و ϕ_2 مودهای طبیعی یک سیستم ارتعاشی باشند داریم:

$$\phi_1{}^t[M]\phi_2=0$$

یعنی مودهای طبیعی نسبت به ماتریس جرم متعامدند.

$$\phi_1{}^t[K]\phi_2=0$$

یعنی مودهای طبیعی نسبت به ماتریس سختی نیز متعامدند.

دو محدودیت داریم: $\begin{matrix}[M]^t=[M] \\ [K]^t=[K]\end{matrix}$, $\omega_1 \neq \omega_2$ یعنی باید ماتریس‌های جرم و سختی متقارن باشند. و φ_1 و φ_2 مودهای دو فرکانس متفاوت باشند.

اگر سیستم مورد نظر سه درجه آزادی باشد دارای سه مود طبیعی ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 خواهد بود و مودهای طبیعی دو به دو نسبت به ماتریس جرم و سختی متعامدند، یعنی:

$$\phi_1^t[M]\phi_2=0 \;,\; \phi_1^t[M]\phi_3=0 \;,\; \phi_2^t[M]\phi_3=0$$

$$\phi_1^t[K]\phi_2=0 \;,\; \phi_1^t[K]\phi_3=0 \;,\; \phi_2^t[K]\phi_3=0$$

$$\phi_1^t[M]\phi_1 \neq 0 \;,\; \phi_2^t[M]\phi_2 \neq 0 \;,\; \phi_3^t[M]\phi_3 \neq 0$$

$$\underbrace{\phi_1^t[K]\phi_1}_{\text{سختی مودال (۱)}} \neq 0 \;,\; \underbrace{\phi_2^t[k]\phi_2}_{\text{سختی مودال(۲)}} \neq 0 \;,\; \underbrace{\phi_3^t[K]\phi_3}_{\text{سختی مودال (۳)}} \neq 0$$

برای نرمالیزه کردن مودهای طبیعی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم. α را طوری تعیین می‌کنیم که جرم مودال برابر یک شود.

$$\phi_1 = \alpha\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\phi_1^t[M]\phi = 1$$

$$[\alpha \;\; \alpha]\begin{bmatrix}m & 0\\0 & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\\alpha\end{Bmatrix} = 1 \Rightarrow 2m\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{2m}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{Bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{Bmatrix}$$

اگر مودهای طبیعی یا ϕ ها به روش فوق نرمالیزه کنیم، جرم‌های مودال برابر با ۱ می‌شوند.

$$\begin{matrix}\phi_1^t[M]\phi_1 = 1\\ \phi_2^t[M]\phi_2 = 1\end{matrix} \quad \rightarrow \begin{cases}\phi_1^t[K]\phi_1 = \omega_1^2\\ \phi_2^t[K]\phi_2 = \omega_2^2\end{cases}$$

این روش، آنالیز مودال نام دارد.

ب ـ دی‌کوپله کردن

فرض کنید مسئله دارای معادلات حرکت به فرم زیر باشد:

$$\begin{bmatrix}m_1 & 0\\0 & m_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\-k_2 & k_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}F(t)\\0\end{Bmatrix}$$

با دی‌کوپله کردن دستگاه معادلات فوق به دو معادله مجزا برای x_1 و x_2 می‌رسیم و مسئله را با آنالیزه مودال حل می‌کنیم.

برای این منظور یک تبدیل مختصات انجام می‌دهیم.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \begin{Bmatrix}F(t)\\0\end{Bmatrix}$$

$$\{x\} = [\phi]\{q\}$$

$[\phi]$ماتریسی $n \times n$ است که ستون‌هایش مودهای طبیعی ارتعاش سیستم هستند:

$$[M][\phi][\ddot{q}] + [K][\phi]\{q\} = \begin{Bmatrix}F(t)\\0\end{Bmatrix}$$

$$[\phi]^t[M][\phi][\ddot{q}] + [\phi]^t[K][\phi]\{q\} = [\phi]^t\begin{Bmatrix}F(t)\\0\end{Bmatrix}$$

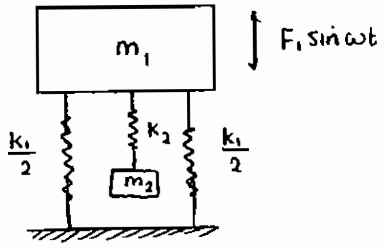
$$\begin{bmatrix}\phi_1^tM\phi_1 & \phi_1^tM\phi_2 & \phi_1^tM\phi_3\\ \phi_2^tM\phi_1 & \phi_2^tM\phi_2 & \phi_2^tM\phi_3\\ \phi_3^tM\phi_1 & \phi_3^tM\phi_2 & \phi_3^tM\phi_3\end{bmatrix}\{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix}\phi_1^tK\phi_1 & \phi_1^tK\phi_2 & \phi_1^tK\phi_3\\ \phi_2^tK\phi_1 & \phi_2^tK\phi_2 & \phi_2^tK\phi_3\\ \phi_3^tK\phi_1 & \phi_3^tK\phi_2 & \phi_3^tK\phi_3\end{bmatrix}\{q\} = \begin{bmatrix}\phi_1^tF(t)\\ \phi_2^tF(t)\\ \vdots\end{bmatrix}$$

طبق روش نرمالیزه کردن مودهای طبیعی، عناصر روی قطر اصلی جرم‌های مودال و سختی‌های مودال هستند و بقیهٔ عناصر (بنا به تعامد بردارهای ویژه) صفرند و ماتریس‌هایی که در $\{\ddot{q}\}$ و $\{q\}$ضرب می‌شوند قطری می‌شوند و مسئله از حل معادلات سادهٔ یک درجه آزادی حل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\{\ddot{q}\}+\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix}\{q\}=\begin{bmatrix} \varphi_1^t F(t) \\ \varphi_2^t F(t) \\ \varphi_3^t F(t) \end{bmatrix}$$

ج ـ جاذب دینامیکی ارتعاشات

جرم جاذب، جرمی است مانند m_2 در شکل زیر که توسط فنری با سختی k_2 به سیستم تحت ارتعاشات اجباری اضافه می‌شود و نقش جذب‌کننده دینامیکی ارتعاشات را به عهده دارد. این جرم می‌تواند به گونه‌ای انتخاب شود که ارتعاشات جرم اصلی m_1 را به صفر برساند.



به‌طور کلی اگر در سیستمی فرکانس طبیعی با فرکانس نیروی محرک برابر شده یعنی $\omega=\omega_n$ باشد سیستم دچار حالت تشدید شده و باید به فکر راه‌حلی برای آن بود.

برای حل این مشکل راه‌حل‌های متعددی وجود دارد:

۱- تغییر ω_n یا فرکانس طبیعی سیستم (با تغییر k یا m)

۲- افزودن استهلاک به سیستم

۳- افزایش درجه آزادی سیستم با اضافه کردن یک جرم جاذب به سیستم. به این جرم و فنر k_2, m_2 که به سیستم اولیه اضافه شده و با فرکانس تحریک ارتعاش می‌کند،جاذب دینامیکی ارتعاشات می‌گوییم.

این جرم ارتعاشات سیستم اولیه را کاهش می‌دهد و دامنه حرکت جرم m_1 را به صفر می‌رساند. معادلات حرکت مجموعه سیستم و جاذب دینامیکی ارتعاشات عبارت‌است از:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=F_{10} \\ m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=0 \end{cases}$$

$$[m]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad [K]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & +k_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_1=\dfrac{z_{22}F_{10}-z_{12}F_{20}}{z_{11}z_{22}-z_{12}^2} \xrightarrow{F_{20}=0} X_1=\dfrac{z_{22}F_{10}}{z_{11}z_{22}-z_{12}^2} \\ X_2=\dfrac{-z_{12}F_{10}+z_{11}F_{20}}{z_{11}z_{22}-z_{12}^2} \xrightarrow{F_{20}=0} X_2=\dfrac{-z_{12}F_{10}}{z_{11}z_{22}-z_{12}^2} \end{cases}$$

$$X_1=\frac{(k_2-m_2\omega^2)F_{10}}{\left[(k_2-m_2\omega^2)\right]\left[(k_1+k_2)-m_1\omega^2\right]-k_2^2}$$

برای این که $X_1=0$ باید:

$$k_2-m_2\omega^2=0 \Rightarrow \omega^2=\frac{k_2}{m_2}$$

یعنی در $\omega^2=\frac{k_2}{m_2}$ دامنه حرکت جرم m_1 صفر می‌شود.

چون سیستم در حال تشدید است و فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی سیستم، یعنی $\omega_n^2=\frac{k_1}{m_1}$ برابر شده رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{k_1}{m_1}=\frac{k_2}{m_2}$$

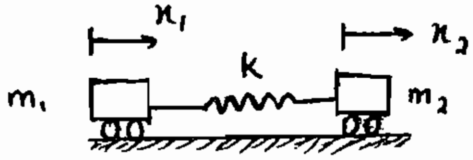
در این شرایط جرم m_2 دامنه حرکتی برابر X_2 دارد:

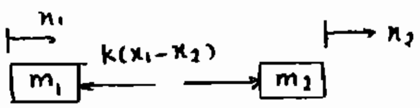
$$X_2=\frac{k_2F_0}{-k_2^2}=\frac{-F_0}{k_2}\Rightarrow k_2X_2=-F_0$$

مطابق رابطه فوق سیستم جاذب دینامیکی ارتعاشات یا جرم m_2، نیروی مساوی مختلف‌الجهت با نیروی تحریک را اعمال می‌کند.

د ـ سیستم‌های نیمه معین

سیستم نیمه معین، سیستمی است که یکی از فرکانس‌های طبیعی‌اش صفر باشد و یا به عبارت دیگر، سیستم فاقد نوسان می‌باشد و می‌توان این‌طور در نظر گرفت که هیچ حرکت نسبی بین دو جرم موجود در سیستم وجود ندارد و کل سیستم به‌صورت یک جسم صلب جابه‌جا می‌شود.





$$m_1\ddot{x}_1=-k(x_1-x_2)$$
$$m_2\ddot{x}_2=k(x_1-x_2)$$
$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+kx_1-kx_2=0 \\ m_2\ddot{x}_2-kx_1+kx_2=0 \end{cases}$$
$$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad , \quad [K]=\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$
$$\left|[K]-[M]\omega^2\right|=0\Rightarrow\begin{vmatrix} k-m_1\omega^2 & -k \\ -k & k-m_2\omega^2 \end{vmatrix}=0$$
$$\left(k-m_1\omega^2\right)\left(k-m_2\omega^2\right)-k^2=0$$
$$k^2+m_1m_2\omega^4-k(m_1+m_2)\omega^2-k^2=0$$
$$\omega^2\left[m_1m_2\omega^2-k(m_1+m_2)\right]=0$$
$$\omega_1=0$$
$$\omega_2^2=\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2} \quad\Rightarrow\quad \omega_2=\sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}}$$

در صورتی‌که دو جرم m_1، m_2 مساوی باشند فرکانس طبیعی غیرصفر از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$m_1=m_2=m\Rightarrow\omega_2^2=\frac{2k}{m}$$
$$\begin{cases} x_1=X_1\sin\omega t \\ x_2=X_2\sin\omega t \end{cases}\rightarrow\begin{cases} \left(k-m\omega^2\right)X_1-kX_2=0 \\ \left(k-m\omega^2\right)X_2-kX_1=0 \end{cases}$$

$$u_1=\frac{X_2}{X_1}\bigg|_{\omega=\omega_1=0}=1 \qquad u_2=\frac{X_2}{X_1}\bigg|_{\omega=\omega_2=\sqrt{\frac{2K}{m}}}=-1$$

$$u_1=1=\frac{A_{21}}{A_{11}}$$

$$u_2=-1=\frac{A_{22}}{A_{11}}$$

توجه شود در این سیستم‌ها در مود اول چون $\omega=0$ است، هر دو جرم مانند یک جسم صلب به یک اندازه و به یک سمت حرکت می‌کنند.

در مود دوم چون فرکانس داریم حرکت سیستم نوسانی است.

هـ ـ روش لاگرانژ:

این روش، روشی کلی است که از آن می‌توان در استخراج معادلات حرکت یک سیستم n درجه آزادی استفاده نمود. به‌طور کلی معادلات حرکت یک سیستم n درجه آزادی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{\partial R}{\partial q_i}=P_i^{nc} \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$P_i=P_i^{c}+P_i^{nc}+P_i^{d}$$

q_i = مختصات عام مستقل

$\dot{q}_i$ = سرعت عام

T = انرژی جنبشی

P_i = نیروهای عام

U = انرژی پتانسیل

P_i^{d} = نیروهای لزجی خطی

P_i^{c} = نیروهای کنسرواتیو

P_i^{nc} = نیروهای غیر کنسرواتیو غیر از لزجی

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{\partial R}{\partial q_i}=p_i^{nc} \qquad i=1\,,2\,,\dots\,,n$$

مثال: سیستم دو درجه آزادی زیر را در نظر بگیرید. معادلات حرکت این سیستم را به روش لاگرانژ به‌دست آورید.

اولین قدم محاسبهٔ انرژی‌ها شامل انرژی جنبشی، پتانسیل و انرژی تلف شده در اثر میرایی است.

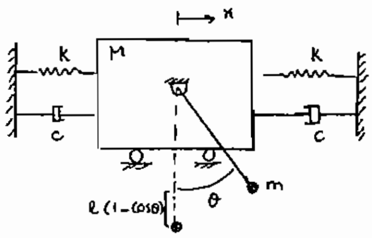
فنرها با هم موازی هستند، پس فنر معادل $2k$ می‌باشد.

دمپرها نیز با هم موازی هستند پس دمپر معادل $2c$ می‌باشد.

انرژی پتانسیل $U=\frac{1}{2}(2k)x^2+mgl(1-\cos\theta)$

انرژی تلف شده $R=\frac{1}{2}(2c)\dot{x}^2$

انرژی جنبشی $T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}mV_c^2$



به‌دست آوردن V_c

$$\begin{cases} y_c = l\cos\theta \\ x_c = x + l\sin\theta \end{cases}$$

$$V_c^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_c = -l\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{x}_c = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

$$V_c^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

انرژی جنبشی $T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right)$

در رابطهٔ انرژی جنبشی ترم اول مربوط به جرم M و ترم دوم مربوط به جرم m است.

چون ارتعاشات سیستم به‌صورت آزاد صورت می‌گیرد، نیروهای عام P_i همه صفر هستند.

$$P_i = 0$$

حال مقادیر محاسبه شده را در معادله لاگرانژ قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 0 & (1) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$(1) \Rightarrow M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + 2kx + 2c\dot{x} = 0 \qquad \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 2c\dot{x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 2kx$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta \quad \text{و} \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = mgl\sin\theta$$

$$(2) \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + mgl\sin\theta$$

در دو معادله (1)، (2) برای خطی کردن با فرض زاویه انحراف کوچک θ، تبدیلات $\sin\theta \to \theta$ و $\cos\theta \to 1$ را در نظر می‌گیریم و نیز پارامترهای $\dot{\theta}^2$, $\dot{x}\dot{\theta}$ را صفر فرض می‌کنیم.

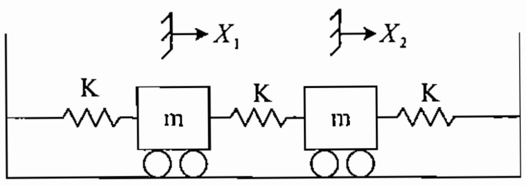
بنابراین معادلات حرکت سیستم عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} (1) & (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + 2c\dot{x} + 2kx = 0 \\ (2) & ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} + mgl\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [M] = \begin{bmatrix} M+m & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix} \; : \; [C] = \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad : [K] = \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}$$

سؤالات ۱۳۸۵

۱ـ سیستم دو درجه آزادی زیر را در نظر بگیرید. برای این سیستم:



۱) $[M]=\begin{bmatrix} m & m \\ m & m \end{bmatrix}$

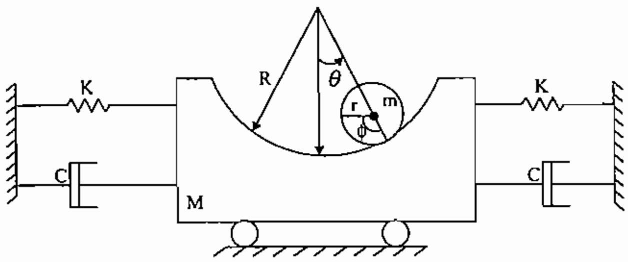
۲) $[K]=\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$

۳) سیستم همواره داری فرکانس طبیعی $\omega_n = 0$ می‌باشد.

۴) در صورتی که یکی از جرم‌ها $m = 0$ شود سیستم دارای یک فرکانس طبیعی $\omega_n = 0$ خواهد بود.

سؤالات ۱۳۸۶

۱ـ برای شکل زیر معادله حرکت جنبشی، پتانسیل و انرژی از دست رفته کدام‌یک از گزینه‌ها می‌باشد؟



۱) $$KE_0=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}$$
$$PE_0=Kx^2+mg(R-r)(1-\cos\theta)$$
$$DE_0=C\dot{x}^2$$

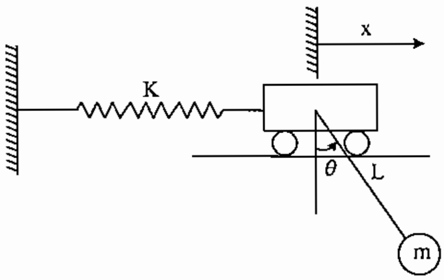
۲) $$KE_0=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}$$
$$PE_0=Kx^2+mg(R-r)(1-\cos\theta)$$
$$DE_0=C\dot{x}^2$$

۳) $$KE_0=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$
$$PE_0=Kx^2+mg(R-r)(1-\cos\theta)$$
$$DE_0=C\dot{x}^2$$

۴) $$KE_0=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2+(R-r)^2\dot{\theta}^2+2\dot{x}\dot{\theta}(R-r)\cos\theta\right]+\frac{1}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2$$
$$PE_0=Kx^2+mg(R-r)(1-\cos\theta)$$
$$DE_0=C\dot{x}^2$$

سؤالات سال ۱۳۸۸

۱ـ اگر دامنه حرکت θ کوچک باشد، فرکانس طبیعی عبارتست از:



۱) $\sqrt{\dfrac{g}{L+\dfrac{mg}{k}}}$

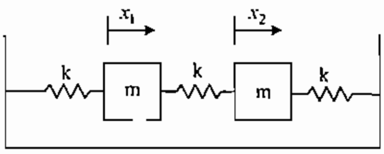
۲) $\sqrt{\dfrac{g}{2L+\dfrac{mg}{k}}}$

۳) $\sqrt{\dfrac{mg}{L+\dfrac{g}{k}}}$

۴) $\sqrt{\dfrac{mg}{2L+\dfrac{g}{k}}}$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۵

۱ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

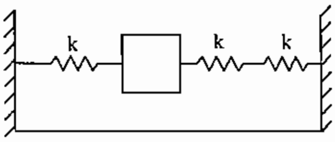


$$\begin{matrix} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 = kx_2 \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 = kx_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

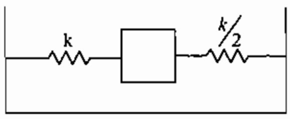
پس گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(2k - m\omega^2\right) - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \left(2k - m\omega^2\right) - k = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \left(2k - m\omega^2\right) + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\dfrac{3k}{m}} \end{matrix}$$

و در حالتی‌که یکی از جرم‌ها صفر شود پس سیستم تبدیل به سیستم روبه‌رو می‌شود:



$\cong$

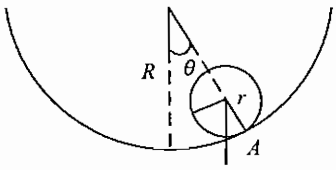


$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{3\dfrac{k}{2}}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{k}{m}}$$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۶

۲ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

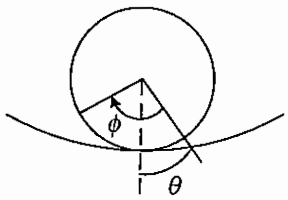
برای واگن چون همیشه روی سطح افقی است پس $PE_1 = 0$ و برای انرژی جنبشی آن $KE_1 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$ و برای استوانه که حرکت انتقالی به همراه دورانی دارد انرژی جنبشی آن از حرکت ناشی از مرکز جرم به علاوه دوران جسم حل مرکز جرم ناشی می‌شود:



$$R\theta = r\phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{R\theta}{r}$$

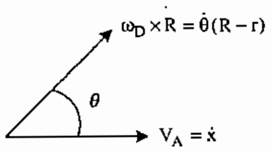
دوران مطلق $= \phi - \theta \quad \Rightarrow \quad w_D = \dot{\phi} - \dot{\theta} = \dot{\theta}\left(\frac{R}{r} - 1\right)$

دیسک



نقطه تماس استوانه با واگن مرکز آنی دوران برای استوانه محسوب می شود پس سرعت مرکز جرم استوانه از سرعت نقطه A که همان سرعت واگن $(\dot{x})$ به علاوه سرعت نسبی مرکز جرم نسبت به A به دست می‌آید:

$$V_G = V_A + V_{G/A}$$



پس برای انرژی جنبشی استوانه داریم:

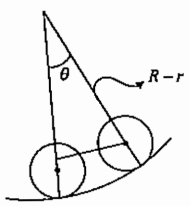
$$KE_2 = \text{انتقال مرکز جرم} + \text{دوران حول مرکز جرم} = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_D^2$$

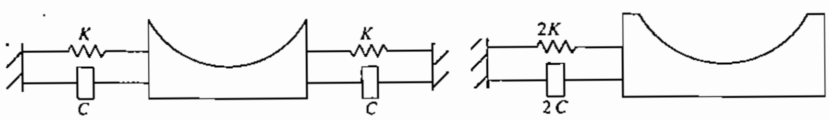
$$KE_2 = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2(R-r)^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}(R-r)\cos\theta\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}\frac{R}{r} - 1\right)^2$$

$$\Rightarrow KE_t = KE_1 + KE_2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{\theta}(R-r)^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}(R-r)\cos\theta\right] + \frac{1}{4}m\dot{\theta}^2(R-r)^2$$

با محاسبه انرژی جنبشی می‌توان جواب صحیح را انتخاب نمود.

$$PE_{tg} = PE_{1g} + PE_{2g} = 0 + mg(R-r)(1-\cos\theta)$$





$$\Rightarrow PE_{ts} = \frac{1}{2}2kx^2 = kx^2$$

$$\Rightarrow PE = kx^2 + mg(R-r)(1-\cos\theta)$$

$$DE = \frac{1}{2}(2c)\dot{x}^2 = c\dot{x}^2$$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۸

۱ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با استفاده از روش لاگرانژ این مسأله حل می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=0$$

$$U=\frac{1}{2}kx^2+mgL(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}kx^2\cdot\frac{1}{2}mgL\theta^2$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}+L\dot{\theta}\right)^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2+mL\dot{x}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=kx \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \theta}=mgL\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}+mL\dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=mL^2\dot{\theta}+mL\dot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial \theta}=0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x}+mL\ddot{\theta}+kx=0 \\ mL\ddot{x}+mL^2\ddot{\theta}+mgL\theta=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} m & mL \\ mL & mL^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mgL \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}=0$$

حال فرکانس های طبیعی این سیستم را به‌دست می‌آوریم:

$$\left|k-M\omega^2\right|=0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} k-m\omega^2 & -mL\omega^2 \\ -mL\omega^2 & mgL-mL^2\omega^2 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad mL\left(k-m\omega^2\right)\left(g-L\omega^2\right)=m^2L^2\omega^4$$

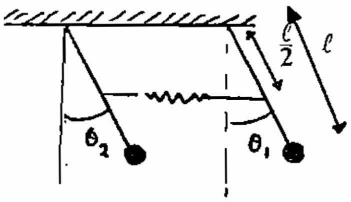
$$\Rightarrow \quad kg-kL\omega^2-mg\omega^2+m^2L^2\omega^4=m^2L^2\omega^4$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2(mg+kL)=kg \quad \Rightarrow \quad \omega^2=\frac{g}{L+\frac{mg}{k}} \quad \Rightarrow \quad \omega=\sqrt{\frac{g}{L+\frac{mg}{k}}}$$

تست‌های دوره‌ای

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۹ – ۷۸

اگر θ_{12} و θ_{22} به ترتیب دامنه‌های زاویه نوسان کوچک میله‌های ۱ و ۲ در مود دوم باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



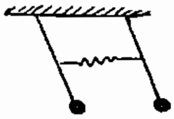
۱- $\theta_{22}=-\theta_{12}$ و ماکزیمم نیروی فنر عبارت‌است از: $kl\theta_{12}$

۲- $\theta_{22}=-\theta_{12}$ و ماکزیمم نیروی فنر عبارت‌است: $2kl\theta_{12}$

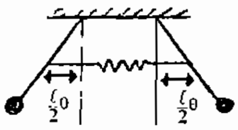
۳- $\theta_{22}=-\theta_{12}$ و نیروی فنر همواره صفر است.

۴- $\theta_{22}=-\theta_{12}$ و ماکزیمم فنر عبارت‌است از: $kl\theta_{12}$

سیستم متقارن است. پس مودهای ارتعاشی آن به صورت هم فاز و فاز متقابل می‌باشد و عبارت‌اند از $\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$



اگر سیستم در مود اول یعنی $\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$ نوسان کند $\theta_{11}=\theta_{21}$، تغییر طولی در فنر ایجاد نمی‌شود و نیروی فنر برابر صفر است.



اگر سیستم درمود دوم یعنی $\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$ نوسان کند $\theta_{12}=-\theta_{22}$، مقدار تغییر طول فنر $2\left(\frac{1}{2}\theta_{12}\right)$ یا $l\theta_{12}$ می‌شود و بنابراین نیروی فنر $kl\theta_{12}$ است.

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۵ ـ ۷۴

فرکانس ارتعاشات آزاد یک سیستم یک درجه آزادی با استهلاک کم

۱- بسته به میزان استهلاک ممکن است بزرگتر یا کوچکتر از فرکانس طبیعی غیر استهلاکی آن باشد.

۲- بستگی به دامنه ارتعاشات دارد.

۳- همیشه بزرگتر از فرکانس طبیعی غیر استهلاکی آن است.

۴- همیشه کوچکتر از فرکانس طبیعی غیر استهلاکی است.

چون $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$، پس $\omega_d<\omega_n$ و فرکانس ارتعاشات آزاد با استهلاک کم همیشه کوچکتر از فرکانس طبیعی غیراستهلاکی است.

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۵- ۷۴

دامنه ارتعاشات آزاد یک سیستم یک درجه آزادی در سیکل‌های متوالی اندازه‌گیری شده و مقادیر ۵۰ و ۴۵ و ۴۰ و ۳۵ و ... ثبت گردیده است.

۱- این سیستم دارای استهلاک لزج است.
۲- این سیستم دارای استهلاک خشک است.
۳- این سیستم دارای استهلاک هیسترزیس است.
۴- چنین نتایجی برای هیچ استهلاکی امکان ندارد.

در صورت وجود اصطکاک خشک یا میرایی کولمب کاهش دامنه در سیکل‌های متوالی با زمان به صورت خطی است. چون در هر سیکل دامنه به اندازه ثابتی کم شده استهلاک از نوع اصطکاک خشک است .

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

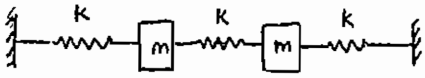
تست مهندسی مکانیک: سال ۶۸ ـ ۶۷

برای یک سیستم دو درجه آزادی نشان داده شده اطلاعات زیر موجود است.

$$[M]=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \qquad [K]=\begin{bmatrix} +2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

$$\omega_1=\sqrt{0.624\frac{k}{m}} \qquad \phi_1=\begin{bmatrix} 0.73 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2=\sqrt{2.366\frac{k}{m}} \qquad \phi_2=\begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



تبدیل مختصاتی که معادلات فوق را دی کوپله می‌کند کدام است؟

۱- $X_2=q_2+0.73q_1 \quad , \quad X_1=q_1-2.73q_1$

۲- $X_2=q_1-q_2 \quad , \quad X_1=q_1+q_2$

۳- $X_2=q_1+q_2 \quad , X_1=0.73q_1-2.73q_2$

۴- $X_2=-2.73q_1+0.73q_2 \quad , \quad X_1=q_1+q_2$

تبدیل مختصاتی که معادلات را دی کوپله می‌کند، عبارت‌است از:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=[\phi]\{q\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.73 & -2.73 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

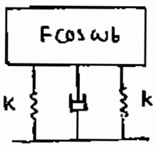
$$x_1=0.73q_1-2.73q_2$$

$$x_2=q_1+q_2$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۶۸-۶۷

اگر X ماکزیمم دامنه باشد. ماکزیمم نیروی منتقل شونده به فونداسیون در شکل زیر برابر است با:



۱- $F_t=kX\sqrt{1+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$

۲- $F_t=kX\sqrt{1+\left(\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$

۳- $F_t=kX\sqrt{4+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$

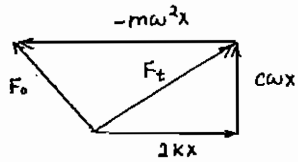
۴- $F_t=kX\sqrt{\left(4\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+4}$

نیروی وارد بر فوندانسیون مجموع فازوری نیروهای دمپر و فنرها می‌باشد. این دو نیرو 90 درجه اختلاف فاز دارند.

$$F_t=\sqrt{(2kX)^2+(c\omega X)^2}=kX\sqrt{4+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}$$

$$\frac{c}{k}=\frac{c}{c_c}\cdot\frac{c_c}{k}=\zeta\cdot\frac{2m\omega_n}{k}=\frac{2\zeta}{\omega_n}$$

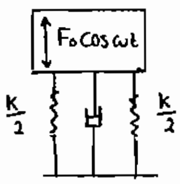
$$F_t=kX\sqrt{4+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۶۸- ۶۷

در سیستم نشان داده شده حداکثر نیروی منتقل شده به جرم برابر است با:



$x(t)=X\sin(\omega t+\varphi)$

$y(t)=Y\sin\omega t$

۱- $\sqrt{(kX)^2+(c\omega X)^2}$

۲- $\sqrt{(kY)^2+(c\omega Y)^2}$

۳- $\sqrt{[k(X-Y)]^2+[\omega(X-Y)]^2}$

۴- هیچ‌کدام

تغییر مکان نسبی $z(t)$ را به‌صورت تفاضل $y(t), x(t)$ در نظر می‌گیریم.

$$F_t=\frac{k}{2}(x-y)+\frac{k}{2}(x-y)+c(\dot{x}-\dot{y})=k(x-y)+c(\dot{x}-\dot{y})$$

$$z(t)=x(t)-y(t)\,,\ z(t)=Z\sin(\omega t-\beta)$$

$$F_t=kZ\sin(\omega t-\beta)+c\omega Z\cos(\omega t-\beta)$$

$$Z=\frac{m\omega^2Y}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2+(c\omega)^2}}$$

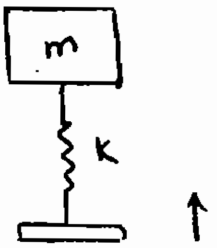
$$|F_t|=Z\sqrt{k^2+c^2\omega^2}=\frac{m\omega^2Y\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2+(c\omega)^2}}$$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۰ – ۶۹

در سیستم شکل زیر حرکت پایه با رابطه $x_f = e\sin\omega t$ داده شده است. حرکت پایدار جرم m به ازاء $\omega > \sqrt{\frac{K}{m}}$ برابر است با:

$$\left(r = \frac{\omega}{\omega_n} \right)$$



$x_f = e\sin(\omega t)$

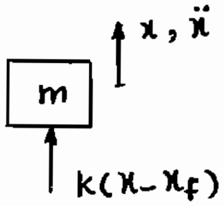
۱- $x(t) = \dfrac{e}{1-r^2}\operatorname{Sin}\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

- $x(t) = \dfrac{ke}{m}\operatorname{Sin}(\omega t - \pi)$

۳- $x(t) = \dfrac{e}{1-r^2}\operatorname{Sin}(\omega t - \pi)$

۴- $x(t) = \dfrac{ke}{m}\operatorname{Sin}\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

معادله حرکت را برای سیستم فوق می‌نویسیم.



$$m\ddot{x} = -k(x - x_f) \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = kx_f$$

$$X = \frac{ke}{k - m\omega^2} = \frac{e}{1 - \frac{m}{k}\omega^2} = \frac{e}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{e}{1 - r^2}$$

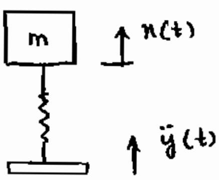
$$\omega < \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow x(t) = \frac{e}{1-r^2}\sin\omega t$$

$$\omega > \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow x(t) = \frac{e}{1-r^2}\sin(\omega t - \pi)$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست سال ۷۳- ۷۲

در سیستم نشان داده شده به پایه شتاب $\ddot{y}(t) = Y_0 u(t)$ وارد می‌شود. تغییر مکان جرم m نسبت به پایه برابر است با:



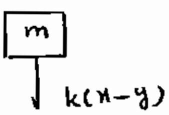
۱- $\dfrac{Y_0}{\omega_n^2}(1 - \cos\omega_n t)$

۲- $\dfrac{Y_0}{k}(1 - \cos\omega_n t)$

۳- $\dfrac{Y_0}{k}(1 - \sin\omega_n t)$

۴- $\dfrac{F_0}{k}(1 - \cos\omega_n t)$

با رسم دیاگرام آزاد جرم m داریم:



$$-k(x - y) = m\ddot{x}$$

$$z = x - y \quad \Rightarrow \quad x = z + y$$

$$-kz = m(\ddot{z} + \ddot{y})$$

$$m\ddot{z} + kz = -m\ddot{y} = -mY_0 u(t)$$

$$\ddot{z}+\omega_n^2 z=-Y_0 u(t)$$

$$z(t)=z_h+z_p=A_1\cos\omega_n t+A_2\sin\omega_n t+\left(\frac{-Y_0}{\omega_n^2}\right)(\cos\omega_n t-1)$$

شرایط اولیه $z(0)=0$, $\dot{z}(0)=0$

$$A-\frac{Y_0}{\omega_n^2}=0\Rightarrow A_1=\frac{Y_0}{\omega_n^2}\quad,\quad A_2=0$$

$$z(t)=\frac{Y_0}{\omega_n^2}\cos\omega_n t-\frac{Y_0}{\omega_n^2}=\frac{Y_0}{\omega_n^2}(\cos\omega_n t-1)$$

روش دوم: شتاب اولیه وارد به پایه معادل ضربه است. پاسخ سیستم بدون میرا به ضربه پله‌ای با اندازه F_0 برابر است با:

$$x(t)=\frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t)$$

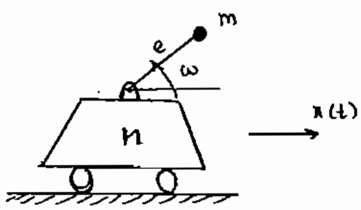
$$F_0=m\ddot{y}=mY_0 u(t)$$

$$x(t)=\frac{mY_0 u(t)}{k}(1-\cos\omega_n t)=\frac{Y_0}{\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)u(t)$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد. (البته یک منفی اختلاف دارد).

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۳- ۷۲

معادله حرکت سیستم نشان داده شده در جهت x برابر است با:



۱) $m\ddot{x}=me\omega^2\cos\omega t$

۲) $M\ddot{x}=me\omega^2\cos\omega t$

۳) $\ddot{x}=e\omega^2\cos\omega t$

۴) $(M+m)\ddot{x}=me\omega^2\cos\omega t$

معادله حرکت مجموعه را در راستای محور xها می‌نویسیم.

$\ddot{x}$: شتاب جرم M در راستای محور xها

$\frac{d^2}{dt^2}(x+e\cos\omega t)$: شتاب جرم m در راستای محور xها

$$M\ddot{x}+m\frac{d^2}{dt^2}(x+e\cos\omega t)=0\Rightarrow(M+m)\ddot{x}-me\omega^2\cos\omega t=0$$

$$\Rightarrow\quad(M+m)\ddot{x}=me\omega^2\cos\omega t$$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۸-۷۷

در یک سیستم ارتعاشی ۲ درجه آزادی ماتریس جرم و سختی فنر به صورت:

$$[M]=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix} \quad , \quad [K]=\begin{bmatrix}4&0\\0&9\end{bmatrix}$$

داده شده است. کدام یک از پاسخ‌های زیر برای فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها صحیح است ؟

ω_1	ω_2	$\left(\frac{X_1}{X_2}\right)_{\omega_1}$	$\left(\frac{X_1}{X_2}\right)_{\omega_2}$	جواب
$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	1	1	۱)
$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	0	1	۲)
$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	∞	0	۳)
$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	1	1	۴)

ماتریس‌های جرم و سختی قطری هستند (عناصر غیرقطری آن‌ها صفر است). بنابراین سیستم دی‌کوپله است (هم از نظر استاتیکی و هم از نظر دینامیکی). در سیستم دی‌کوپله فرکانس طبیعی معادل مودهای ارتعاشی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{4}{2}}=\sqrt{2}$$

$$\omega_2=\sqrt{\frac{9}{3}}=\sqrt{3}$$

$$\text{معادله دامنه‌ها}=\left\{\,[K]-[M]\,\omega^2\right\}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4-2\omega^2&0\\0&9-3\omega^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases}\left(4-2\omega^2\right)x_1=0\\\left(9-3\omega^2\right)x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4-2\omega^2=0\Rightarrow\quad\omega=\sqrt{2}\\9-3\omega^2=0\Rightarrow\quad\omega=\sqrt{3}\end{cases}$$

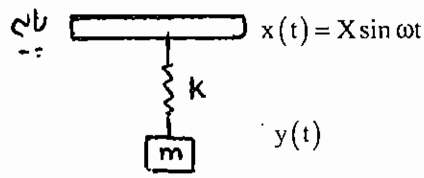
$$\text{مود اول}\ \omega=\sqrt{2}\Rightarrow 3\times X_2=0\Rightarrow X_2=0\Rightarrow\frac{X_1}{X_2}\Big|_{\omega_1}=\infty$$

$$\text{مود دوم}\ \left.\begin{matrix}\omega=\sqrt{3}\Rightarrow 0\times X_2=0\Rightarrow X_2\\-2X_1=0\Rightarrow X_1=0\end{matrix}\right\}=0\Rightarrow\frac{X_1}{X_2}\Big|_{\omega_2}=0$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۴ ـ ۷۳

جرم m از فنر خطی با ضریب k آویزان شده است. پایه فنر مطابق شکل بایک حرکت سینوسی با فرکانس ω ارتعاش می‌کند. در چه فرکانسی دامنه جا به‌جایی جرم برابر جابه‌جایی پایه می‌گردد ؟



۱- $\omega=1.414\omega_n$

۲- $\omega=2\omega_n$

۳- $\omega=2.828\omega_n$

۴- $\omega=0.707\omega_n$

نکته: دامنه جابه‌جایی جرم و پایه فقط در نسبت‌های فرکانسی 0 , $\sqrt{2}$ برابر یک می‌شود یعنی:

$$\frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \omega=1.414\omega_n$$

در صورتی‌که این نکته را به‌خاطر نداشته باشیم، باید مسئله را به روش کلی حل کنیم:

طبق روابطی که برای حرکت پایه داشتیم:

$$m\ddot{y}=k(x-y)$$

$$m\ddot{y}+ky=kx$$

$$x=xe^{i\omega t} \quad , \quad y=ye^{i(\omega t-\varphi)}$$

$$\frac{x}{y}=\left|\frac{k}{k-m\omega^2}\right|=\left|\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right|=1$$

$$1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2=\pm1\Rightarrow\begin{cases}\frac{\omega}{\omega_n}=0\\ \frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{2}\rightarrow\omega=\sqrt{2}\,\omega_n=1.414\omega_n\end{cases}$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۵ ـ ۷۴

اگر در ارتعاشات اجباری یک سیستم یک درجه آزادی ضریب تقویت کوچکتر ازواحد باشد،.....

۱- فرکانس نیروی خارجی بزرگتر از فرکانس طبیعی است.

۲- فرکانس نیروی خارجی کوچکتر از فرکانس طبیعی است.

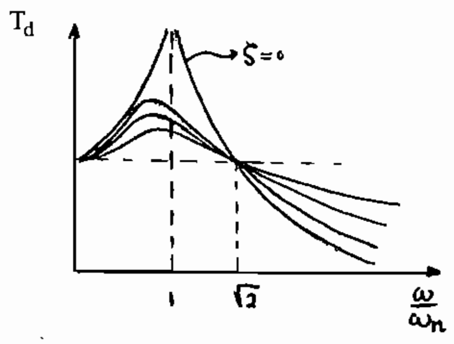
۳- ممکن است فرکانس نیرو بزرگتر از فرکانس طبیعی باشد.

۴- ضریب تقویت بستگی به فرکانس نیروی خارجی ندارد.

با توجه به منحنی ضریب تقویت بر حسب $\frac{\omega}{\omega_n}$:

در $\frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{2}$ ضریب تقویت برابر یک است.

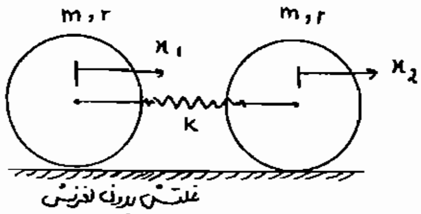
در $\frac{\omega}{\omega_n}>\sqrt{2}$ ضریب تقویت کوچکتر از یک است.



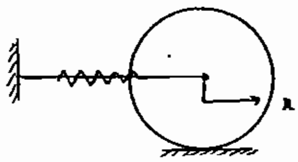
گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال: دو دیسک مشابه توسط فنر k به‌هم وصل شده‌اند. فرکانس طبیعی سیستم چقدر است ؟

چون سیستم قید ندارد در یک مود مثل جسم صلب حرکت می‌کند و $\omega_1 = 0$



به‌علت تقارن، در وسط فنر گره داریم. بنابراین همان‌طور که در شکل مشخص شده چون نقطه وسط (گره) هیچ حرکتی ندارد، می‌توان به‌جای کل سیستم، فرکانس طبیعی یکی از دیسک‌ها را که نصف فنر به آن متصل است، محاسبه نمود. سختی نصف فنر $2k$ خواهد بود:



$$\frac{d}{dt}(T+U)=0$$

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2$$

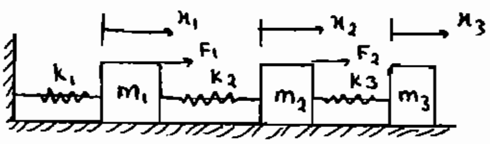
$$U=\frac{1}{2}(2k)x^2$$

$$\frac{3}{2}m\dot{x}\ddot{x}+2kx\dot{x}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}m\ddot{x}+2kx=0$$

$$\omega_n^2=\frac{4k}{3m}$$

تست مهندسی مکانیک: سال ۸۰ ـ ۷۹

در سیستم ارتعاشی روبه‌رو، رابطه بین نیروهای f_2, f_1 را طوری به‌دست آورید که جرم m_3 هیچ حرکتی نکند.



۱) $\frac{f_2}{f_1}=\frac{-k_1}{k_1+k_2}$

۲) $\frac{f_2}{f_1}=\frac{-k_2}{k_1+k_2}$

۳) $\frac{f_2}{f_1}=\frac{-k_1+k_2}{k_1+k_2+k_3}$

۴) $\frac{f_2}{f_1}=\frac{-k_1+k_2}{k_1+k_2+k_3}$

سیستم سه درجه آزادی است. ابتدا معادلات حرکت سه جرم m_2, m_1 و m_3 را می‌نویسیم. x_3 را مساوی صفر می‌گذاریم تا نسبت $\frac{f_2}{f_1}$ به‌دست بیاید.

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}+\left(k_1+k_2\right)x_1-k_2x_2=f_1 \\ m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+\left(k_2+k_3\right)x_2-k_3x_3=f_2 \\ m_3\ddot{x}_3-k_3x_2+k_3x_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1=X_1e^{st} \qquad x_2=X_2e^{st} \qquad x_3=X_3e^{st} \qquad f_1=F_1e^{st} \qquad f_2=F_2e^{st}$$

$$\left[s^2M-K\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

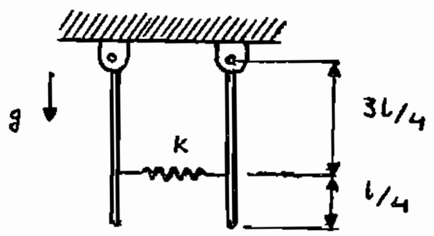
$$-k_3x_2+k_3x_3=0 \xrightarrow{x_3=0} x_2=0$$

$$\begin{cases} \left(k_1+k_2\right)x_1-k_2x_2=f_1 \\ -k_2x_1+\left(k_2+k_3\right)x_2=f_2 \end{cases} \xrightarrow{x_2=0} \frac{f_2}{f_1}=\frac{-k_2}{k_1+k_2}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک ـ سال ۸۲

مطلوب‌است محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سیستم نشان داده شده در شکل (میله‌ها یکنواخت به طول l و جرم m می‌باشند.)



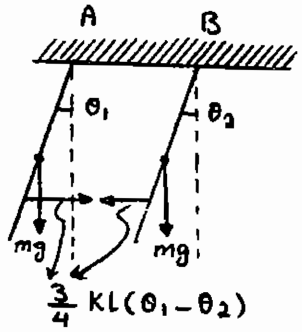
۱) $\omega_1^2=\frac{3}{2}\frac{g}{l}$, $\varphi_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$
$\omega_2^2=\frac{3}{2}\frac{g}{l}+\frac{27}{8}\frac{k}{m}$, $\varphi_2=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

۲) $\omega_1^2=\frac{3}{2}\frac{g}{l}$, $\varphi_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$
$\omega_2^2=\frac{3}{2}\frac{g}{l}-\frac{27}{8}\frac{k}{m}$, $\varphi_2=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

۳) $\omega_1^2=\frac{3}{4}\frac{g}{l}$, $\varphi_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$
$\omega_2^2=\frac{3}{2}\frac{g}{l}+\frac{9}{8}\frac{k}{m}$, $\varphi_2=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

۴) $\omega_1^2=\frac{3}{2}\frac{g}{l}$, $\varphi_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$
$\omega_2^2=\frac{3}{2}\frac{g}{l}+\frac{27}{8}\frac{k}{m}$, $\varphi_2=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

سیستم دو درجه آزادی است. ابتدا باید دیاگرام آزاد را رسم کنیم و سپس معادلات حرکت را استخراج نماییم:



$$\Sigma M_A = I_A \ddot{\theta}_1$$

$$-\frac{3}{4}kl(\theta_1-\theta_2)\left(\frac{3}{4}l\right)-mg\left(\frac{l}{2}\theta_1\right)=\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}_1$$

$$\Sigma M_B = I_B \ddot{\theta}_2$$

$$\frac{3}{4}kl(\theta_1-\theta_2)\left(\frac{3}{4}l\right)-mg\left(\frac{l}{2}\theta_2\right)=\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}_2$$

دو معادله فوق را به فرم ماتریسی می‌نویسیم.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}ml & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ml \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{9}{16}kl+\frac{1}{2}mg & -\frac{9}{16}kl \\ -\frac{9}{16}kl & \frac{9}{16}kl+\frac{1}{2}mg \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=0$$

مقادیر فرکانس طبیعی از رابطه زیر محاسبه می‌گردند:

$$\det\left(K-M\omega^2\right)=0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{9}{16}kl+\frac{1}{2}mg-\frac{1}{3}ml\omega^2 & -\frac{9}{16}kl \\ -\frac{9}{16}kl & \frac{9}{16}kl+\frac{1}{2}mg-\frac{1}{3}ml\omega^2 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{9}{16}kl+\frac{1}{2}mg-\frac{1}{3}ml\omega^2\right)\left(\frac{9}{16}kl+\frac{1}{2}mg-\frac{1}{3}ml\omega^2\right)-\left(-\frac{9}{16}kl\right)\left(-\frac{9}{16}kl\right)=0$$

$$\omega_1^2=\frac{3}{2}\frac{g}{l}$$

$$\omega_2^2=\frac{3}{2}\frac{g}{l}+\frac{27}{8}\frac{k}{m}$$

و مودهای طبیعی ارتعاش به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\left[K-M\omega^2\right]x=0$$

$$\omega^2=\frac{3}{2}\frac{g}{l}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{9}{16}kl+\frac{1}{2}mg-\frac{1}{3}ml\left(\frac{3}{2}\frac{g}{l}\right) & -\frac{9}{16}kl \\ -\frac{9}{16}kl & \frac{9}{16}kl+\frac{1}{2}mg-\frac{1}{3}\left(ml\frac{3}{2}\frac{g}{l}\right) \end{vmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0$$

$$\left(\frac{9}{16}kl+\frac{1}{2}mg-\frac{1}{2}mg\right)x_1-\left(\frac{9}{16}kl\right)x_2=0$$

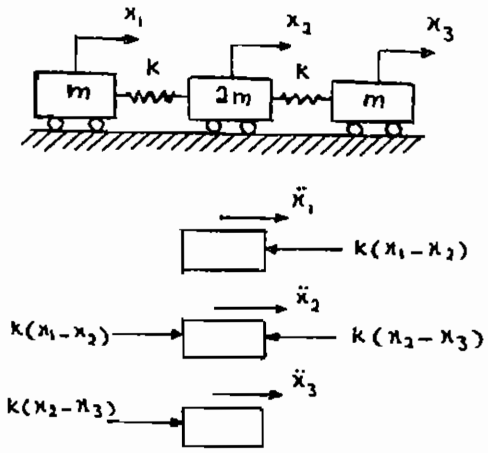
$$\left(\frac{9}{16}kl\right)x_1-\left(\frac{9}{16}kl\right)x_2=0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

برای به‌دست آوردن مود دوم ارتعاش، مقدار ω_2^2 را در معادله $\left[K-M\omega^2\right]x=0$ جایگذاری می‌کنیم.

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک ـ سال ۸۳

فرکانس‌های طبیعی سیستم در شکل مقابل کدامند؟



۱) $0\ ,\ \sqrt{\dfrac{k}{m}}\ ,\ \sqrt{\dfrac{k}{2m}}$

۲) $0\ ,\ \sqrt{\dfrac{k}{m}}\ ,\ \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

۳) $0\ ,\ \sqrt{\dfrac{k}{2m}}\ ,\ \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

۴) $\sqrt{\dfrac{k}{m}}\ ,\ \sqrt{\dfrac{k}{2m}}\ ,\ \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

معادلات حرکت سه جرم را به شکل زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1+kx_1-kx_2=0 \\ 2m\ddot{x}_2-kx_1+2kx_2-kx_3=0 \\ m\ddot{x}_3-kx_2+kx_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$$

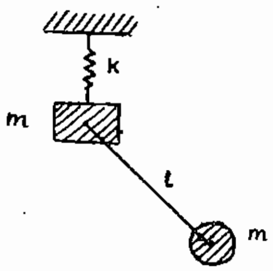
$$\det\left(K-M\omega^2\right)=0$$

$$\begin{vmatrix} k-m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k-m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k-m\omega^2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \omega_1=0\ ,\ \omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}}\ \ ,\ \ \omega_3=\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک ـ سال ۸۳

فرکانس (و یا فرکانس‌های) طبیعی سیستم روبه‌رو برابر است با:

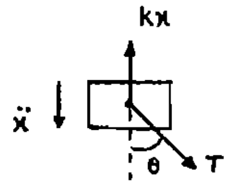


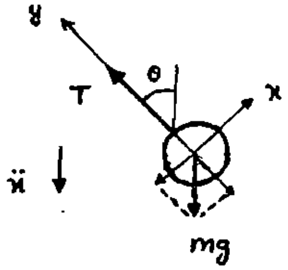
۱) $\dfrac{g}{l}\ ,\ \dfrac{k}{m}$

۲) $\dfrac{k}{2m}\ ,\ \dfrac{g}{2l}$

۳) $\dfrac{k}{2m}\ ,\ \dfrac{g}{l}$

۴) $\dfrac{k}{4m}\ ,\ \dfrac{g}{2l}$





ابتدا باید دیاگرام آزاد هر یک از دو جسم را رسم کنیم و معادلات حرکت آن‌ها را بنویسیم.

$\sum F_x = m\ddot{x}$

$m\ddot{x} = T\cos\theta - kx \quad , \quad \cos\theta \cong 1$

$m\ddot{x} + kx = T$

توجه کنید نوسانات پاندول باید کوچک فرض شود تا معادلات را بتوان خطی فرض نمود.

$\sum F_y = m\dot{a}_y$

$mg\cos\theta - T = m\ddot{x}\cos\theta$

$mg - m\ddot{x} \cong T$

T را از یکی از معادلات در معادله دیگر جایگذاری می‌کنیم.

$$m\ddot{x} + kx = mg - m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad 2m\ddot{x} + kx = mg \quad \Rightarrow \quad \omega_n^2 = \frac{k}{2m}$$

حال معادله حرکت جسم دوم را به‌دست می‌آوریم.

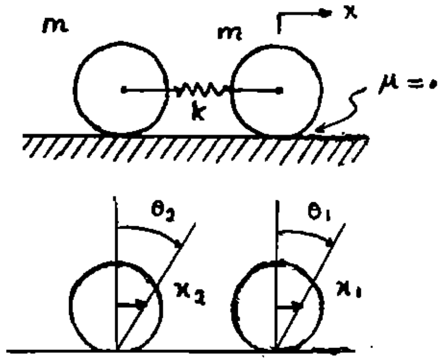
$$\sum F_x = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad -mg\sin\theta = ml\ddot{\theta} \quad , \quad \sin\theta \approx \theta$$

$$\Rightarrow \quad l\ddot{\theta} + g\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_n^2 = \frac{g}{l}$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد (البته مقادیر گزینه‌ها ω^2 است).

تست:

برای سیستم ارتعاشی مقابل، فرکانس‌های طبیعی سیستم به ازای نوسانات کوچک کدام است؟



۱) $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{2k}{3m}$

۲) $\omega_1^2 = 0 \quad , \quad \omega_2^2 = \frac{4k}{m}$

۳) $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{4k}{3m}$

۴) $\omega_1^2 = 0 \quad , \quad \omega_2^2 = \frac{2k}{m}$

انرژی پتانسیل $U = \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2$,

انرژی جنبشی $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}_2^2$

$x_1 = r\theta_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}_1 = \frac{\dot{x}_1}{r}$

$$x_2=r\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}_2=\frac{\dot{x}_2}{r}$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right)+\frac{1}{2}\left(mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}_2^2}{r^2}+\frac{\dot{x}_1^2}{r^2}\right)$$

معادلات لاگرانژ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}=0 \quad , \quad q_i=x_i \quad , \quad i=1,2,\ldots\ldots$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1+\frac{1}{2}m\ddot{x}_1+k\left(x_1-x_2\right)=0 \\ m\ddot{x}_2+\frac{1}{2}m\ddot{x}_2-k\left(x_1-x_2\right)=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{3}{2}m\ddot{x}_1+kx_1-kx_2=0 \\ \frac{3}{2}m\ddot{x}_2-kx_1+kx_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}=0$$

$$\det\left(K-M\omega^2\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} k-\frac{3}{2}m\omega^2 & -k \\ -k & k-\frac{3}{2}m\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1^2=0 \quad , \quad \omega_2^2=\frac{4k}{3m}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست:

اگر ماتریس سختی و ماتریس جرم یک سیستم دو درجه آزادی به صورت زیر باشد، فرکانس‌های طبیعی سیستم کدام‌اند؟

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad k=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

۱) $\omega_1=\sqrt{2} \quad , \quad \omega_2=\sqrt{3}$

۲) $\omega_1=4 \quad , \quad \omega_2=9$

۳) $\omega_1=1 \quad , \quad \omega_2=1$

۴) $\omega_1=2 \quad , \quad \omega_2=3$

$$\det\left(K-M\omega^2\right)=0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\omega^2 & 1 \\ 1 & 3-\omega^2 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(2-\omega^2\right)\left(3-\omega^2\right)-1=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \omega_1^2=2 \quad \Rightarrow \quad \omega_1=\sqrt{2} \\ \omega_2^2=3 \quad \Rightarrow \quad \omega_2=\sqrt{3} \end{matrix}$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک ـ سال ۷۰ ـ ۶۹

معادلات دیفرانسیل حرکت یک سیستم دو درجه آزادی به‌صورت زیر داده شده است.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 24 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 8\sin 20t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

بزرگترین فرکانس طبیعی سیستم برابر است با:

۱) $2\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ۲) $2\sqrt{2}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ۳) هیچ‌کدام ۴) $8\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

مقادیر

$$\det\left[K-M\omega^2\right]=0$$

$$\begin{vmatrix} 24-4\omega^2 & -4 \\ -4 & 6-\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

$$\left(24-4\omega^2\right)\left(6-\omega^2\right)-16=0 \quad\Rightarrow\quad \omega_1=\sqrt{4}=2 \quad , \quad \omega_2=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک ـ سال ۸۰ ـ ۷۹

با توجه به اضافه نمودن جاذب دینامیکی ارتعاشات به سیستم اصلی، کدام گزینه غلط است؟

۱) جرم اصلی و جرم جاذب، هم فاز حرکت خواهند کرد.

۲) ارتعاشات سیستم اصلی صفر است، ولی سیستم فرعی ارتعاش می‌کند.

۳) مقدار نیروی وارد از طرف جاذب برابر نیروی تحریک است.

۴) فرکانس طبیعی سیستم جاذب به‌طور مجزا برابر فرکانس تحریک می‌باشد.

اضافه کردن جرم جاذب به جرم اصلی اغلب به‌منظور میرا نمودن ارتعاشات سیستم اصلی صورت می‌گیرد و جرم جاذب نیروی مساوی و مختلف‌الجهت با نیروی تحریک اعمال می‌کند و گاهی حتی ارتعاشات جرم اصلی به صفر می‌رسد. بنابراین جرم اصلی و جرم جاذب هم فاز حرکت نخواهند کرد.

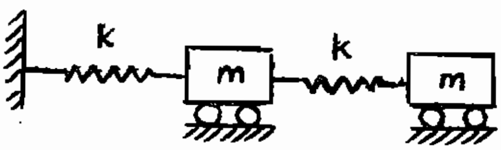
گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک ـ سال ۷۹ ـ ۷۸

اگر فرکانس‌های طبیعی اول و دوم سیستم نشان داده شده به ترتیب ω_1, ω_2 باشند، نسبت $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ تقریباً برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) 0.4 ۲) 1

۳) 2.6 ۴) 6.9



معادلات حرکت سیستم عبارت‌اند از:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=0$$

فرکانس‌های طبیعی سیستم از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$\det\left[K-\omega^2 M\right]=0$$

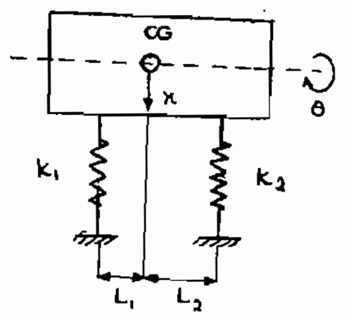
$$\begin{vmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & k-m\omega^2 \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow\; \omega_1^2=\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2} \quad , \quad \omega_2^2=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{2}}=2.61$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک ـ سال ۷۸ ـ ۷۷

در سیستم شکل زیر ضریب سختی k_2 برای غیر کوپل شدن استاتیکی و دینامیکی حرکات انتقالی x زاویه‌ای θ کدام است؟ $\left(L_2=2L_1\right)$



۱) $k_2=\frac{1}{2}k_1$

۲) $k_2=2k_1$

۳) $k_2=8k_1$

۴) حرکات θ, x برای جمیع مقادیر k_2 کوپل شده‌اند.

معادلات حرکت سیستم عبارت‌اند از:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & k_2L_2-k_1L_1 \\ k_2L_2-k_1L_1 & k_1L_1^2+k_2L_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

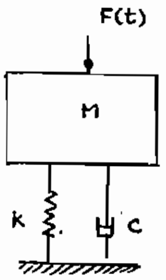
معادلات فوق فقط دارای کوپلینگ دینامیکی هستند و برای دی کوپله شدن دینامیکی باید عناصر غیرقطری ماتریس سختی صفر شوند.

$$k_2L_2-k_1L_1=0 \;\Rightarrow\; k_2=\frac{L_1}{L_2}k_1=\frac{1}{2}k_1$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک ـ سال ۷۸ ـ ۷۷

نیروی هارمونیک $F(t)=F\sin\omega t$ بر مجموعه‌ای مطابق شکل اثر می‌کند. در حالتی که $\omega>>\omega_n$ باشد، افزایش میرایی چه تاثیری بر ضریب انتقال ($TR = \frac{\text{دامنه نیروی منتقل شده به پایه}}{\text{دامنه نیروی وارده}}$) دارد؟



۱) بستگی به مقادیر M , k نیز دارد.

۲) ضریب انتقال افزایش می‌یابد.

۳) ضریب انتقال کاهش می‌یابد.

۴) میرایی تاثیری بر ضریب انتقال ندارد.

$$TR=\sqrt{\frac{1+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{2} \Rightarrow TR=1$$

$$\frac{\omega}{\omega_n}>\sqrt{2} \Rightarrow TR<1$$

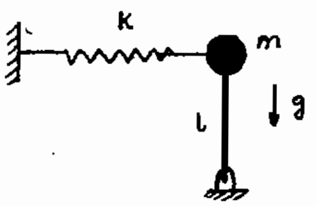
$$\frac{\omega}{\omega_n}<\sqrt{2} \Rightarrow TR>1$$

در این تست چون $\omega>>\omega_n$ است، ضریب انتقال TR کوچکتر از یک است و افزودن یک مقدار مساوی به صورت و مخرج یک کسر کوچکتر از یک مقدار کسر یعنی TR را افزایش می‌دهد. این مقدار افزوده شده میرایی (ζ) است که در فرمول TR به صورت و مخرج کسر افزوده می‌شود.

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک ـ سال ۷۸ ـ ۷۷

در شکل زیر فرکانس طبیعی با افزایش g (شتاب ثقل) چگونه می‌شود؟



۱) افزایش می‌یابد.

۲) کاهش می‌یابد.

۳) فرقی نمی‌کند.

۴) بستگی به k , m نیز دارد.

$$T=\frac{1}{2}m\left(R\dot{\theta}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\dot{\theta}^2=\frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2$$

$$U=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k\left(R\theta\right)^2=\frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(T+U\right)=0 \Rightarrow \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+kR^2\theta\dot{\theta}=0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}+\frac{2}{3}\frac{k}{m}\theta=0 \Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}}$$

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست:

معادلات حرکت سیستمی به قرار زیر است. فرکانس‌های طبیعی و مودهای طبیعی این سیستم کدامند؟

$$\ddot{x}=-\left(x-y\right)-x$$

$$2\ddot{y}=\left(x-y\right)-y$$

۱) $\sqrt{0.63}$, $\sqrt{2.36}$, $\begin{Bmatrix}0.73\\1.00\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}-2.73\\1.00\end{Bmatrix}$

۲) $\sqrt{1.35}$, $\sqrt{3.24}$, $\begin{Bmatrix}0.73\\1.00\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}-2.73\\1.00\end{Bmatrix}$

۳) $\sqrt{1.35}$, $\sqrt{3.24}$, $\begin{Bmatrix}0.27\\1.00\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}-0.35\\1.00\end{Bmatrix}$

۴) $\sqrt{0.90}$, $\sqrt{1.90}$, $\begin{Bmatrix}0.24\\1.00\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}-0.35\\1.00\end{Bmatrix}$

$$\begin{cases}\ddot{x}+2x-y=0\\2\ddot{y}-x+2y=0\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\\ddot{y}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}+2&-1\\-1&+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$$

$$\det\left[K-M\omega^2\right]=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}2-\omega^2&-1\\-1&2-2\omega^2\end{vmatrix}=0$$

$$\left(2-\omega^2\right)\left(2-2\omega^2\right)-1=0 \Rightarrow \begin{matrix}\omega_1^2=0.63\\\omega_2^2=2.36\end{matrix}$$

با جایگذاری ω_2,ω_1 در معادله ماتریسی فوق، مودهای طبیعی سیستم به‌دست می‌آیند. گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک ـ سال ۸۳ ـ ۸۲

یک قطعه لاستیک تحت آزمایش بوده و روی آن وزنه‌ای برابر N قرار داده‌ایم. تغییر مکان استاتیکی آن 1 سانتی‌متر اندازه گرفته شده است. وزنه را به مقدار سانتی‌متر پایین کشیده و رها می‌کنیم. پس از سه سیکل نوسان دامنه 2 سانتی‌متر می‌گردد. ضریب استهلاک سیستم کدام است؟

۱) 2

۲)

۳) 7

۴)

$_1 =\ \ \ c$

$_2 = 2\ c$

$$\delta=1\left(\frac{1}{}\right) \Rightarrow \delta=\frac{1}{}1\left(\frac{1}{}\right)=\frac{1}{}1\left(\frac{}{2}\right)=\ \ 1$$

$$\zeta=\frac{\delta}{\sqrt{\pi^2+\delta^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi^2+(\ \ 1\ )^2}}=$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک ـ سال ۸۳ ـ ۸۲

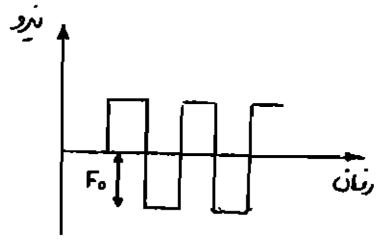
یک سیستم جرم و فنر یک درجه آزادی بدون استهلاک تحت تاثیر نیروی پریودیک مربعی شکل نشان داده شده در شکل می‌باشد. چنانچه با استفاده از روش تبدیل فوریه، این نیرو تبدیل به نیروهای هارمونیکی ساده گردد و در این تبدیل فقط از سه ترم اول بسط استفاده شود، در محاسبات چند درصد خطا در تابع نیرو اعمال خواهد شد؟

۱) 1

۲) 12

۳) 1

۴)



این تابع تابعی فرد است. اگر دوره تناوب آن برابر 2τ باشد، ضرایب بسط فوریه آن برابر خواهند بود با:

$$a\ =\ \ \ \ \ b\ =\frac{2}{\tau}\int^{\tau}\ (t)\ \ \frac{\pi t}{\tau}\ t=\frac{2}{\tau}\int^{\tau}\ {}_o\ \ \frac{\pi t}{\tau}\ t$$

$$b\ =\frac{2\ _o}{\tau}\ \left[-\frac{\tau}{\pi}co\ \frac{\pi t}{\tau}\right]^{\tau}=\frac{2\ _o}{\pi}\left[1-(-1)\ \ \right]$$

$$,\ b_1=\frac{_o}{\pi}\qquad b_2=\qquad b\ =\frac{_o}{\pi}$$

$$(t)=\ _o=\frac{_o}{\pi}\frac{\pi t}{\tau}+\frac{_o}{\pi}\frac{\pi t}{\tau}+\ \ (t)$$

(t) مقدار خطاست.

$$(t) = {}_{o} - \frac{o}{\pi} \quad \frac{\pi t}{\tau} - \frac{o}{\pi} \quad \frac{\pi t}{\tau}$$

$$= {}_{o}\left(1 - \frac{}{\pi} \quad \frac{\pi t}{\tau} - \frac{}{\pi} \quad \frac{\pi t}{\tau}\right)$$

$$= \int^{\tau} {}_{o}\left(1 - \frac{}{\pi} \quad \frac{\pi t}{\tau} - \frac{}{\pi} \frac{\pi t}{\tau}\right) t$$

$$= {}_{o}\tau\left(1 - \frac{}{\pi^2} - \frac{}{\dot{\pi}^2}\right) = \qquad {}_{o}\tau \cong 1 \ {}_{o}\tau$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مناسب‌تر بود این تست به‌جای درس ارتعاشات در درس ریاضی مهندسی مطرح می‌گردید!

یادداشت