کنترل

مجموعهٔ مهندسی مکانیک

گروه مکانیک پارسه

مؤسسهٔ آموزش عالی آزاد پارسه

پارسه

فصل اول   مفاهیم اولیه کنترل

فصل دوم   مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی

فصل سوم   نمایش سیستم‌های دینامیکی

فصل چهارم   پاسخ زمانی سیستم‌های کنترل

فصل پنجم   پایداری سیستم‌های کنترل

فصل ششم خطای حالت ماندگار

فصل هفتم مکان هندسی ریشه‌ها

فصل هشتم پاسخ فرکانسی سیستم‌های کنترل

فصل نهم دیاگرام بد

فصل دهم جبران‌کننده‌ها و کنترلرها

فصل اول

مفاهیم اولیه کنترل

پیش از شروع مبحث کنترل لازم است مفاهیم اولیه زیر معرفی گردند:

سیستم: به مجموعه‌ای از اجزاء، المان‌ها که برای یک هدف و منظور مشخصی با یکدیگر ترکیب شده‌اند، سیستم گفته می‌شود.

کنترل: درک و تحت فرمان درآوردن یک سیستم است.

خروجی سیستم کنترل: پارامتری است که تغییراتش برحسب زمان برای ما مهم است؛ به عبارت دیگر خروجی سیستم کنترل یک عامل اثرپذیر در سیستم است.

ورودی سیستم کنترل : ورودی یک عامل اثرگذار در سیستم است. به عبارت دیگر آن‌چه از خارج سیستم بر آن اثر می‌گذارد و باعث تغییر در متغیرهای حالت سیستم می‌شود ورودی نام دارد.

متغیرهای حالت: متغیرهایی هستند که با دانستن مقادیر آن‌ها در هر لحظه مشخص، بتوان وضعیت و رفتار سیستم در آن لحظه را معین نمود. به‌عنوان مثال در سیستم جرم و فنر برای مشخص شدن وضعیت جرم در هر لحظه باید تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه جرم را بدانیم، پس این دو متغیر $(\dot{x},x)$ متغیرهای حالت در سیستم جرم و فنر هستند.

سیستم استاتیکی: سیستمی که در آن خروجی به سابقه ورودی وابسته نیست.

سیستم دینامیکی: سیستمی است که دارای حافظه بوده و گذشته خود را به‌خاطر داشته باشد و رفتارش در هر لحظه به رفتارش در گذشته بستگی داشته باشد.

سیگنال: اجزائی است که بین دو سیستم و یا در یک سیستم مبادله می‌شود.

اغتشاش: سیگنالی است که بر خروجی سیستم اثر نامطلوب می‌گذارد.

کنترل سیستم: یعنی به نظم در آوردن یا تنظیم خروجی سیستم که تنها راه رسیدن به آن، کنترل و تنظیم ورودی سیستم است.

سیستم کنترل فیدبکی: سیستمی است که از راه مقایسه ورودی و خروجی با استفاده از اختلاف آن‌ها به‌عنوان ابزار کنترل، رابطه از پیش تعیین شده میان ورودی و خروجی را حفظ می‌کند.

سیستم کنترل حلقه باز: سیستم کنترلی است که خروجی آن تاثیری بر سیگنال ورودی ندارد.

اشکال سیستم حلقه باز در این است که در آن نمی‌توان اثر اغتشاش‌های مختلف وارد شده به سیستم را بر روی خروجی تضعیف نمود. در حالی‌که این امر در سیستم حلقه بسته امکان‌پذیر است. به‌علاوه یک سیستم ناپایدار را به هیچ وجه نمی‌توان با سیستم کنترل حلقه باز کنترل نمود، در صورتی‌که با استفاده از سیستم کنترل حلقه بسته این کار ممکن است.

سیستم کنترل حلقه بسته: سیستم کنترلی است که در آن سیگنال خروجی بر ورودی سیستم تاثیر می‌گذارد.

در سیستم کنترل حلقه بسـ ـه می‌توان اثرات اغتشاش‌های ورودی (نویز) را تا حد امکان کاهش داد یا از بین برد. علاوه بر این می‌توان حساسیت سیستم به تغییر پارامترهای سیستم را نیز کاهش داد.

خصوصیات سیستم کنترل حلقه باز:

۱ـ ارزان‌تر بودن و سادگی سیستم

۲ـ دقت متوسط یا کم (ویژگی منفی)

۳ـ پاسخ آهسته (ویژگی منفی)

۴ـ مطرح نبودن مسئله پایداری

۵ـ حساسیت زیاد نسبت به تغییر شرایط محیط و اغتشاشات (ویژگی منفی)

خصوصیات سیستم کنترل حلقه بسته:

۱ـ دقت بالا

۲ـ پاسخ سریع

۳ـ استقلال نسبی از شرایط محیط و نویز در مقایسه با سیستم حلقه باز

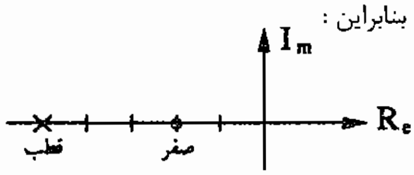
۴ـ پیچیدگی سیستم و گران بودن آن

صفرها و قطب‌های سیستم

در تابع تبدیل کسری $G(S)=\dfrac{N(S)}{D(S)}$ صفرهای سیستم مقادیری هستند که به ازای آن‌ها تابع تبدیل $G(S)=0$ و یا بـه عبـارت دیگـر صورت کسر صفر می‌شود، یعنی $N(S)=0$ می‌شود. همچنین هر مقداری که مخرج کسر را صفر نماید قطب سیستم موردنظر نامیـده می‌شود، به‌عبارت دیگر به ازای قطب‌های سیستم تابع تبدیل $G(S)$ مساوی ∞ می‌شود. بنابراین :

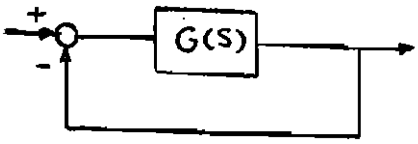
صفرها: ریشه‌های معادله $N(S)=0$

قطب‌ها: ریشه‌های معادله $D(S)=0$



تابع تبدیل حلقه باز و تابع تبدیل حلقه بسته سیستم نشان داده شده به ترتیب زیر می‌باشد:

توجه: در صورتی که از عبارت تابع تبدیل سیستم استفاده شود، منظور تابع تبدیل حلقه بسته است.



$$\text{تابع تبدیل حلقه باز} = G(S)=\frac{N(S)}{D(S)}$$

$$\text{تابع تبدیل حلقه بسته} =\frac{G(S)}{1+G(S)}=\frac{N(S)}{N(S)+D(S)}$$

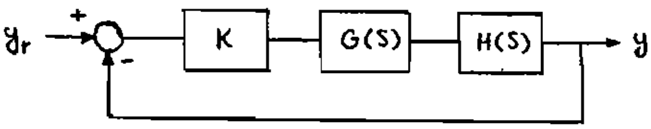
توجه: در صورتی که از عبارت تابع تبدیل سیستم استفاده شود، منظور تابع تبدیل حلقه بسته است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، $G(S)$ به‌صورت تقسیم دو چند جمله‌ای $D(S)$, $N(S)$ در نظر گرفته شده است که در آن درجه چندجمله‌ای صورت کوچکتر یا مساوی چند جمله‌ای مخرج است.

مقادیری از S که صورت تابع تبدیل سیستم را برابر صفر نمایند «صفرهای سیستم» نامیده می‌شوند. واضح است که صفرهای سیستم حلقه بسته همان صفرهای سیستم حلقه باز (ریشه‌های چندجمله‌ای $N(S)$) هستند. در مقابل، مقادیری از S که چند جمله‌ای مخرج تابع تبدیل سیستم را مساوی صفر می‌گردانند «قطب‌های سیستم» نامیده می‌شوند و پیداست که ریشه‌های چند جمله‌ای $N(S)$ با ریشه‌های چند جمله‌ای $N(S)+D(S)$ متفاوت هستند. بنابراین قطب‌های سیستم حلقه باز با قطب‌های سیستم حلقه بسته متفاوت هستند. تابع تبدیل یک سیستم کنترل را می‌توان به‌صورت $G(S)=\frac{K(S-Z_1)(S-Z_2)....}{(S-P_1)(S-P_2)}$ نیز نشان داد که در آن پارامترهای Z_i ها نشان‌دهنده صفرها و P_i ها نشان‌دهندهٔ قطب‌های سیستم هستند.

تست : مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۴

در سیستم فیدبک زیر برای $K>0$ کدام گزاره صحیح است؟



۱) صفرهای مدار بسته و قطب‌های مدار باز متفاوتند و بستگی به مقدار K دارند.

۲) صفرهای مدار بسته همان صفرهای مدار بازند ولی قطب‌های مدار بسته بستگی به مقدار K دارند.

۳) صفرهای مدار بسته به مقدار K بستگی دارند ولی قطب‌های مدار بسته همان قطب‌های مدار بازند.

۴) صفرها و قطب‌های مدار بسته همان صفرها و قطب‌های مدار بازند.

تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارت است از $KG(S)H(S)$ در حالی‌که تابع تبدیل حلقه بسته سیستم عبارت است از $\frac{KG(S)H(S)}{1+KG(S)H(S)}$ در صورتی‌که $H(S),G(S)$ به‌صورت نسبت چند جمله‌ای‌های D , C , B , A بیان شوند توابع تبدیل حلقه باز و حلقه بسته سیستم به ترتیب عبارت خواهند بود از:

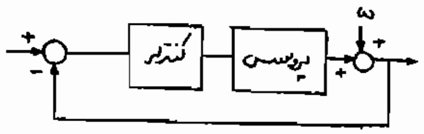
$$\text{تابع تبدیل حلقه باز} =KG(S)H(S)=K\frac{A}{B}\frac{C}{D}=\frac{KAC}{BD}$$

$$\text{تابع تبدیل حلقه بسته} =\frac{KG(S)H(S)}{1+KG(S)H(S)}=\frac{K\frac{A}{B}\frac{C}{D}}{1+K\frac{A}{B}\frac{C}{D}}=\frac{KAC}{BD+KAC}$$

بنابراین صفرهای تابع تبدیل مدار بسته و مدار باز یکی است، اما قطب‌های مدار باز و مدار بسته با هم متفاوت هستند و قطب‌های مدار بسته به مقدار K بستگی دارند. گزینه ۲ صحیح است.

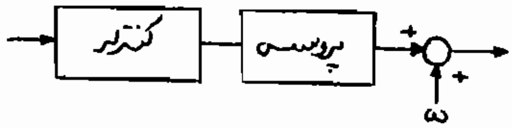
تست : مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۴

کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



controller process

(a)



controller Process

(b)

۱) سیستم (a) نسبت به ورودی مزاحم ω و تغییرات پارامترهای پروسس مقاوم تراز سیستم (b) است.

۲) سیستم (b) نسبت به ورودی مزاحم ω و تغییرات پارامترهای پروسس مقاوم‌تر از سیستم (a) است.

۳) سیستم (a) نسبت به ورودی مزاحم و سیستم (b) نسبت به تغییر پارامترهای پروسس مقاوم‌ترند.

۴) سیستم (b) نسبت به ورودی مزاحم و سیستم (a) نسبت به تغییر پارامترهای پروسس مقاوم‌ترند.

سیستم (a) نمایشگر یک سیستم کنترل مدار بسته با فیدبک واحد است، در حالی‌که سیستم (b) یک سیستم کنترل حلقه باز را نشان می‌دهد. همان‌طور که در متن درس اشاره شده است سیستم کنترل مدار بسته یعنی سیستم (a) نسبت به اغتشاشات ورودی و تغییر پارامترهای پروسس مقاومتر از سیستم کنترل مدار باز یعنی سیستم (b) است.

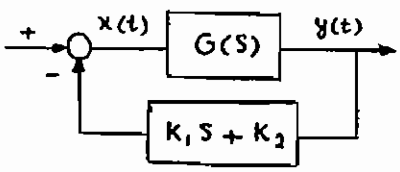
گزینه ۱ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۶۹

معادله دینامیک سیستم مدار باز $G(S)$ به صورت زیر می‌باشد :

$$x(t)=y''(t)-3y'(t)+2y(t)$$

ضرایب K_1 و K_2 چه مقدار باشند تا قطب‌های تابع تبدیل مدار بسته در نقاط $S=-1$ و $S=-3$ قرار گیرند؟



۱) $K_1=7 \quad , \quad K_2=1$

۲) $K_1=5 \quad , \quad K_2=3$

۳) $K_1=16 \quad , \quad K_2=5$

۴) $K_1=16 \quad , \quad K_2=3$

در فصل سوم خواهیم دید که تابع تبدیل عبارت است از، نسبت تبدیل لاپلاس خروجی سیستم به تبدیل لاپلاس ورودی با فرض شرایط اولیه صفر. بنابراین ابتدا با استفاده از تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین معادله دینامیک سیستم مدار باز، تابع تبدیل حلقه باز سیستم را به‌دست می‌آوریم:

$$S^2\,Y(S)-3SY(S)+2Y(S)=X(S)$$

$$\frac{Y(S)}{X(S)}=\frac{1}{S^2-3S+2}=G(S)$$

چون محل قطب‌های تابع تبدیل مدار بسته داده شده است، باید ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته یا مدار بسته سیستم را تشکیل دهیم:

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G(S)}{1+G(S)\left(K_1S+K_2\right)}=\frac{\frac{1}{S^2-3S+2}}{1+\frac{K_1S+K_2}{S^2-3S+2}}=\frac{1}{S^2+\left(K_1-3\right)S+\left(K_2+2\right)}$$

همان‌طور که می‌دانیم قطب‌های تابع تبدیل مقادیری از S هستند که مخرج تابع تبدیل را صفر می‌نمایند بنابراین :

$$S^2+(K_1-3)S+(K_2+2)\equiv(S+1)(S+3)$$

دقت دارید که $S=-1$ و $S=-3$ قطب‌های تابع تبدیل مدار بسته هستند که در صورت تست داده شده‌اند.

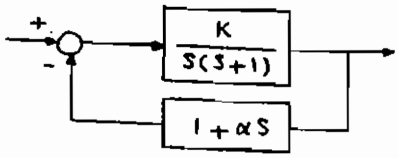
از معادله فوق مقادیر K_1 و K_2 به‌ترتیب زیر محاسبه می‌گردند :

$$K_1=7 \quad , \quad K_2=1$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست : مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۷

در سیستم کنترل شکل زیر α , K را چنان تعیین کنید که قطب‌های سیستم حلقه بسته در $S=-1\pm j\sqrt{3}$ قرار گیرند.



۱) $\alpha=\frac{1}{4}$, $K=4$

۲) $\alpha=\frac{3}{4}$, $K=4$

۳) $\alpha=4$, $K=\frac{1}{4}$

۴) $\alpha=4$, $K=\frac{3}{4}$

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته سیستم را تشکیل می‌دهیم.

$$G(S)=\frac{K}{S(S+1)} \quad , \quad H(S)=1+\alpha S$$

$$\text{تابع تبدیل حلقه بسته}=\frac{G(S)}{1+G(S)H(S)}$$

$$\text{تابع تبدیل حلقه بسته}=\frac{\frac{K}{S(S+1)}}{1+\frac{K(1+\alpha S)}{S(S+1)}}=\frac{K}{S(S+1)+K(1+\alpha S)}=\frac{K}{S^2+(\alpha K+1)S+K}$$

$$S^2+(\alpha K+1)S+K\equiv(S+1+j\sqrt{3})(S+1-j\sqrt{3})$$

$$S^2+(\alpha K+1)S+K\equiv S^2+2S+4$$

$$K=4$$

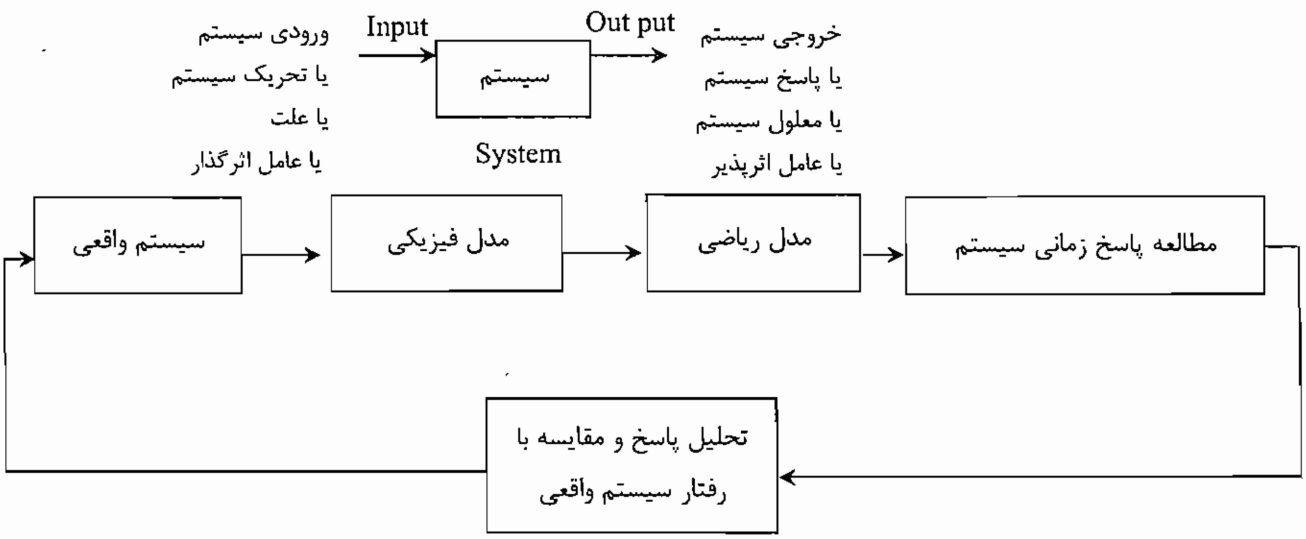
$$\alpha K+1=2 \quad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{1}{4}$$

گزینه ۱ صحیح است.

فصل دوم

مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی

در سیستم استاتیکی خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه بستگی دارد، اما در سیستم دینامیکی خروجی در هر لحظه به ورودی در آن لحظه و لحظات قبل از آن بستگی دارد.



مشخصات مطلوب یک سیستم کنترلی:

۱ـ باید سریع باشد.

۲ـ باید دقیق باشد.

۳ـ باید پایدار باشد.

تابع تبدیل: تابع تبدیل یک سیستم نسبت تبدیل لاپلاس خروجی سیستم به ورودی آن با فرض شرایط اولیه صفر است.

۱ـ مدل‌سازی سیستم‌های الکتریکی

اجزای اصلی سیستم‌های الکتریکی عبارت از مقاومت، خازن، و سلف می‌باشد که برای به‌دست آوردن تابع تبدیل هر یک از این اجزا باید رابطه بین ورودی و خروجی هر جزء مشخص گردد. فرض می‌کنیم ورودی سیستم در مورد هر سه جزء (مقاومت، خازن و سلف) شدت جریان و خروجی سیستم ولتاژ باشد. با این فرض تابع تبدیل مقاومت، خازن و سلف به صورت زیر به‌دست می‌آید.

۱ـ مقاومت

$$V = V_1 - V_2$$

$$V = Ri$$

یعنی اگر از مقاومت R جریان i عبور کند در دو سر مقاومت اختلاف پتانسیل V ایجاد می‌شود. در این صورت دیاگرام بلوکی سیستم به صورت زیر در می‌آید.

$$i \longrightarrow \boxed{R} \longrightarrow V$$

حال اگر فرض کنیم ورودی سیستم اختلاف پتانسیل و خروجی آن جریان باشد یعنی در اثر ایجاد اختلاف پتانسیل V در دو سر مقاومت R از آن جریان i عبور نماید.

$$i = \frac{V}{R}$$

و دیاگرام بلوکی سیستم به صورت زیر در می‌آید:

$$V \longrightarrow \boxed{\frac{1}{R}} \longrightarrow i$$

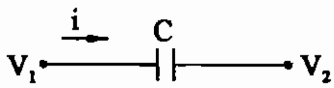
۲ـ خازن

با فرض این‌که ورودی سیستم جریان و خروجی آن اختلاف پتانسیل باشد:

$$V = V_1 - V_2$$

$$q = CV$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV}{dt} \Rightarrow V = \frac{1}{C}\int i dt$$



برای به‌دست آوردن تابع تبدیل سیستم در این حالت از دو طرف رابطه فوق تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

توجه شود که شرایط اولیه صفر در نظر گرفته می‌شوند.

$$I(s) = c[SV(S)] \Rightarrow$$

$$V(S) = \frac{1}{CS} I(S)$$

در این‌صورت دیاگرام بلوکی سیستم به صورت زیر در خواهد آمد:

$$I(S) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{CS}} \longrightarrow V(S)$$

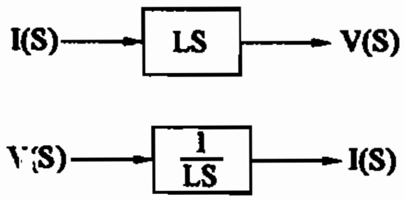
اما اگر جای ورودی و خروجی سیستم خازن را عوض کنیم یعنی با وصل کردن دو سر خازن به یک اختلاف پتانسیل معین در خازن جریان الکتریکی ایجاد نماییم دیاگرام بلوکی سیستم به صورت زیر در می‌آید:

$$V(S) \longrightarrow \boxed{CS} \longrightarrow I(S)$$

۳ـ سلف

مشابه آنچه در مورد مقاومت و خازن گفته شد دیاگرام بلوکی یک سلف به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:

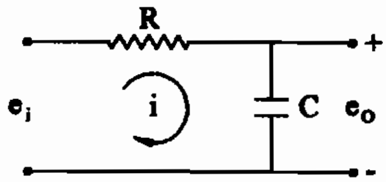
$$V = V_1 - V_2$$
$$V = L\frac{di}{dt}$$
$$V(S) = LSI(S)$$
$$I(S) = \frac{1}{LS}V(S)$$



مثال : تابع تبدیل سیستم الکتریکی زیر را پیدا کنید.

e_i = ورودی

e_o = خروجی



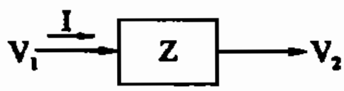
$$e_i = Ri + \frac{1}{C}\int idt \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}} E_i(S) = R.I(S) + \frac{1}{C}.\frac{I(S)}{S}$$
$$e_o = \frac{1}{C}\int idt \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}} E_o(S) = \frac{1}{CS}.I(S)$$
$$\text{تابع تبدیل} \Rightarrow \frac{E_o(S)}{E_i(S)} = \frac{\frac{1}{CS}I(S)}{RI(S) + \frac{1}{CS}I(S)} = \frac{1}{RCS+1}$$

روش امپدانس الکتریکی:

در این روش امپدانس الکتریکی یا مقاومت الکتریکی معادل هر یک از اجزاء (مقاومت، خازن و سلف) را محاسبه می‌کنیم و مدار الکتریکی را به صورت مجموعه‌ای از این امپدانس‌ها در نظر می‌گیریم.

$$V = ZI$$

(Z = امپدانس الکتریکی)



مقاومت $\begin{cases} V = Ri \\ V(S) = RI(S) \end{cases} \Rightarrow Z_R = R$

خازن $\begin{cases} i = C\frac{dV}{dt} \Rightarrow dV = \frac{1}{C}idt \Rightarrow V = \frac{1}{C}\int idt \\ V(S) = \frac{1}{C.S}I(S) \end{cases} \Rightarrow Z_C = \frac{1}{C.S}$

سلف $\begin{cases} V = L\frac{di}{dt} \\ V(S) = L.SI(S) \end{cases} \Rightarrow Z_L = L.S$

امپدانس الکتریکی کل مدار برای مدارهایی که دارای المان‌های سری و موازی هستند به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شود.

برای المان‌های سری الکتریکی : $Z_{eq} = \sum Z_i$

برای المان‌های موازی الکتریکی : $Z_{eq} = \frac{1}{\sum \frac{1}{Z_i}}$

تست: سال ۷۶ـ۷۵ (دکترای اعزام به خارج)

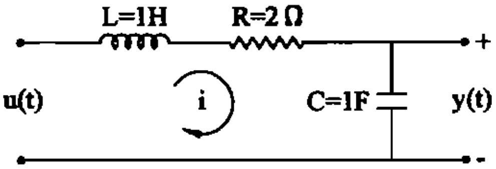
تابع تبدیل مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل زیر عبارت است از:

۱) $\frac{Y(S)}{U(S)}=\frac{1}{S(S^2+2S+1)}$

۲) $\frac{Y(S)}{U(S)}=\frac{1}{S^2+2S+1}$

۳) $\frac{Y(S)}{U(S)}=\frac{S+1}{S^2+2S+1}$

۴) $\frac{Y(S)}{U(S)}=\frac{S}{(S+1)(S+2)}$



$$u(t)=L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt \qquad y(t)=\frac{1}{C}\int idt$$

$$\frac{Y(S)}{U(S)}=\frac{\frac{1}{CS}}{LS+R+\frac{1}{CS}}\Rightarrow\frac{Y(S)}{U(S)}=\frac{\frac{1}{S}}{S+2+\frac{1}{S\times 1}}=\frac{1}{S^2+2S+1}$$

گزینه ۲ صحیح است.

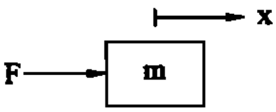
۲ـ مدل‌سازی سیستم‌های مکانیکی

اجزای اصلی سیستم‌های مکانیکی عبارت‌اند از جرم ، فنر و دمپر. در این سیستم‌ها ابتدا معادله دیفرانسیل حرکت سیستم را می‌نویسیم و سپس با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین آن و اعمال شرایط اولیه صفر تابع تبدیل سیستم را به‌دست می‌آوریم.

۱ـ جرم m

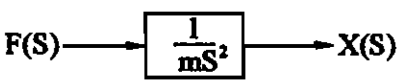
ورودی = نیروی F

خروجی = جابه‌جایی x



معادله حرکت $f=m\ddot{x} \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}} F(S)=mS^2X(S)\rightarrow\frac{X(S)}{F(S)}=\frac{1}{mS^2}$

دیاگرام بلوکی سیستم به‌صورت زیر خواهد بود.



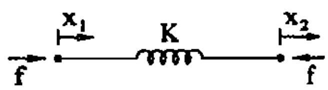
۲ـ فنر K

با فرض این‌که ورودی سیستم نیروی F و خروجی آن ایجاد جابه‌جایی x در فنر باشد، تابع تبدیل سیستم را با تبدیل لاپلاس گرفتن از معادله حرکت سیستم به‌دست می‌آوریم:

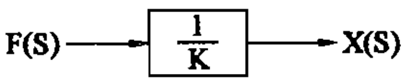
ورودی = نیروی F

خروجی = جابه‌جایی x

$x=x_1-x_2$



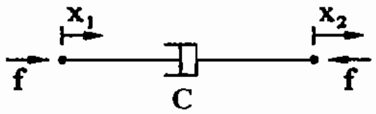
معادله حرکت $f=Kx \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}} F(S)=KX(S) \quad \rightarrow\frac{X(S)}{F(S)}=\frac{1}{K}$



۳ـ دمپر (مستهلک‌کننده) C

دمپر نیرو را به‌صورت انرژی جنبشی (تغییر سرعت) تلف می‌نماید. در صورتی‌که ورودی سیستم نیروی F و خروجی آن باز هم جابه‌جایی x در دوطرف دمپر باشد تابع تبدیل سیستم به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

$\dot{x} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$

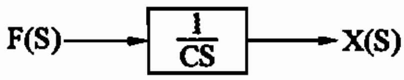


ورودی = نیروی F

خروجی = جابه‌جایی x

معادله $f = C\dot{x} \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}} F(S) = CSX(S) \quad \rightarrow \dfrac{X(S)}{F(S)} = \dfrac{1}{CS}$

دیاگرام بلوکی سیستم به‌صورت زیر در می‌آید:



روش امپدانس مکانیکی:

در این روش امپدانس مکانیکی معادل هر یک از اجزای سیستم‌های مکانیکی (جرم ، فنر و دمپر) را محاسبه نموده و بر اساس سری یا موازی بودن اجزا، امپدانس مکانیکی معادل کل سیستم را به‌دست می‌آوریم.

$f = m\ddot{x} \Rightarrow F(S) = mS^2X(S)$

$f = C\dot{x} \Rightarrow F(S) = CSX(S)$

$f = KX \Rightarrow F(S) = KX(S)$

در حالت کلی رابطه بین نیرو و جابه‌جایی بر اساس امپدانس مکانیکی عبارت است از: $F = z_m . X$

جرم $f = m\ddot{x} \Rightarrow Z_m = mS^2$

دمپر $f = C\dot{x} \Rightarrow Z_c = CS$

فنر $f = Kx \Rightarrow Z_k = K$

برای المان‌های سری مکانیکی $Z_{eq} = \dfrac{1}{\sum \dfrac{1}{Z_i}}$

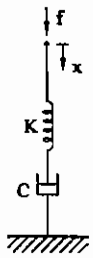
برای المان‌های موازی مکانیکی $Z_{eq} = \sum Z_i$

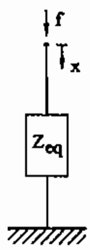
مثال : امپدانس مکانیکی سیستم زیر را به‌دست آورید.

ابتدا امپدانس مکانیکی هر یک از اجزای سیستم را به‌دست آوریم و سپس بر اساس سری بودن امپدانس‌ها، امپدانس مکانیکی معادل را به‌دست می‌آوریم:

$$Z_k = K \quad , \quad Z_c = CS$$

$$Z_{eq} = \frac{1}{\sum \frac{1}{Z_i}} = \frac{1}{\frac{1}{K} + \frac{1}{C.S}} = \frac{KC.S}{CS+K}$$

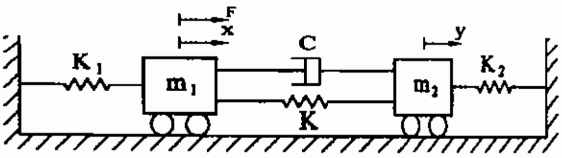


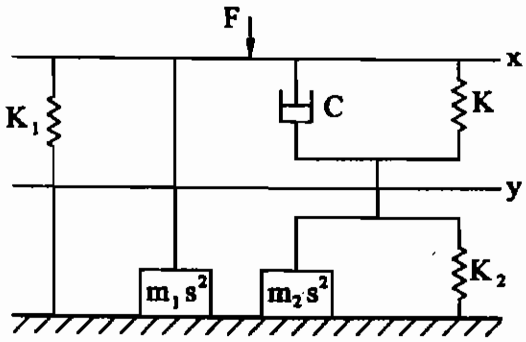


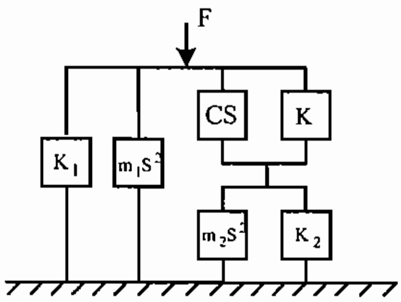
مثال : تابع تبدیل سیستم روبه‌رو را به‌دست آورید.

سیستم دو درجه آزادی است از روشی به نام Grounded chain استفاده می‌کنیم.

به ازای جابه‌جایی‌ها در سیستم یک خط افقی می‌کشیم، عضوی که نیرو به آن اعمال می‌شود را بالاتر از همه قرار می‌دهیم و زمین پائین‌تر از همه قرار می‌گیرد. طبیعتاً y هم وسط قرار می‌گیرد.



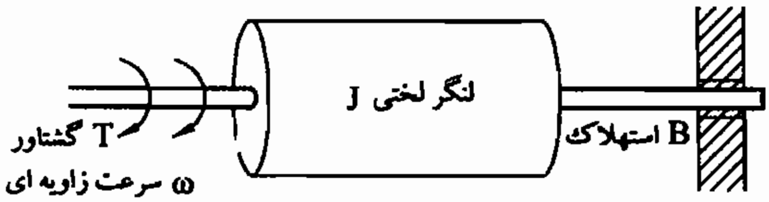




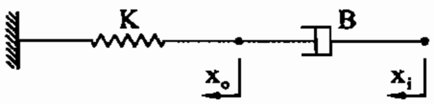
$$F = \left[K_1 + m_1S^2 + \frac{1}{\frac{1}{K+CS} + \frac{1}{K_2 + m_2S^2}} \right] X$$

تست: مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۷

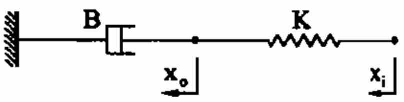
چهار سیستم مکانیکی به همراه توابع تبدیل آن‌ها در زیر نشان داده شده است. کدامیک از توابع تبدیل **نادرست** است؟



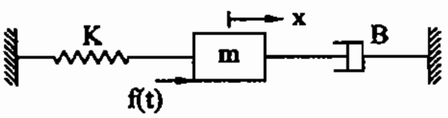
۱) $\frac{\omega(S)}{T(S)}=\frac{1}{S(JS+B)}$



۲) $\frac{X_o(S)}{X_i(S)}=\frac{BS}{BS+K}$



۳) $\frac{X_o(S)}{X_i(S)}=\frac{k}{BS+k}$



۴) $\frac{X(S)}{F(S)}=\frac{1}{mS^2+BS+k}$

در گزینه ۱: ورودی = T که مقداری از آن صرف غلبه بر استهلاک می‌شود و باعث شتاب گرفتن میله می‌گردد. با استفاده از قانون دوم نیوتن:

خروجی = ω

$$T-B\dot{\theta}=J\ddot{\theta}\xrightarrow{\dot{\theta}=\omega}T=J\dot{\omega}+B\omega \;\Rightarrow\; T(S)=(JS+B)\omega(S)\to\frac{\omega(S)}{T(S)}=\frac{1}{JS+B}$$

رابطه گزینه ۱ نادرست است و بنابراین جواب تست گزینه ۱ است.

در گزینه ۲:

$$Kx_o=B(\dot{x}_i-\dot{x}_o)\longrightarrow (K+BS)X_o(S)=BSX_i(S)$$

$$\Rightarrow \frac{X_o(S)}{X_i(S)}=\frac{BS}{BS+K}$$

در گزینه ۳:

$$B\dot{x}_o=K(x_i-x_o)\longrightarrow(BS+K)X_o(S)=KX_i(S)$$

$$\frac{X_o(S)}{X_i(S)}=\frac{K}{BS+K}$$

در گزینه ۴:

$$\sum F = m\ddot{x} \rightarrow F(t) - Kx - B\dot{x} = m\ddot{x} \longrightarrow F(S) = mS^2X(S) + BSX(S) + KX(S)$$

$$\frac{X(S)}{F(S)} = \frac{1}{mS^2 + BS + K}$$

تست: مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۸

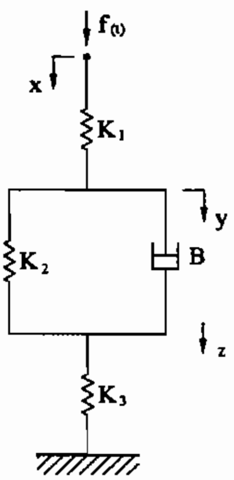
در سیستم مکانیکی شکل مقابل ورودی نیروی f(t) و پاسخ تغییر مکان y(t) نقطه A است، تابع تبدیل این سیستم $G(S) = \frac{Y(S)}{F(S)}$ کدام است؟

۱) $\frac{k_3(k_2 + k_3 + BS)}{k_2 + BS}$

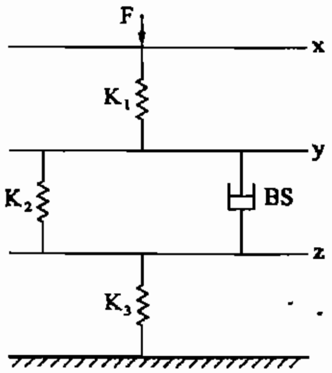
۲) $\frac{k_2 + k_3 + BS}{k_3(k_2 + BS)}$

۳) $\frac{k_2 + BS}{k_3(k_2 + k_3 + BS)}$

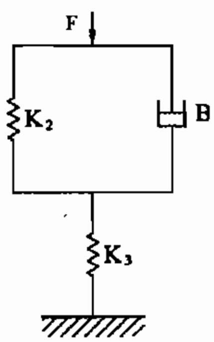
۴) $\frac{k_3(k_2 + BS)}{k_2 + k_3 + BS}$



از روش Grounded chain استفاده می‌کنیم. (شکل الف)



شکل الف



شکل ب

نیروی فنر K_1 به همه اعضا اعمال می‌شود و هر سه جزء به صورت سری هستند، بنابراین مشابه حالتی است که F به‌طور مستقیم به شکل ب وارد شود.

$$F(S) = \left[\frac{1}{\frac{1}{k_2 + BS} + \frac{1}{k_3}}\right] Y(S) \Rightarrow G(S) = \frac{Y(S)}{F(S)} = \frac{k_2 + k_3 + BS}{k_3(k_2 + BS)}$$

اگر تابع تبدیل بین y و z را می‌خواستیم،یک‌بار تابع تبدیل بین y,f را به‌دست می‌آوریم و بار دیگر تابع تبدیل بین f و z را به‌دست می‌آوریم و حاصل تقسیم دو تابع تبدیل مذکور تابع تبدیل بین z,y است.

روش دوم: می‌توان جابه‌جایی فنر k_3 را z فرض نمود و معادلات دیفرانسیل حرکت را به صورت زیر نوشت:

$$f = k_3 z \longrightarrow F(S) = k_3 Z(S)$$

$$f = k_2(y - z) + B(\dot{y} - \dot{z}) \longrightarrow F(S) = (k_2 + BS)Y(S) - (k_2 + BS)Z(S)$$

با حذف $Z(S)$ از دو رابطه فوق تابع تبدیل سیستم به شکل زیر خواهد بود.

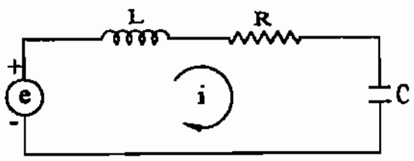
$$\frac{Y(S)}{F(S)} = \frac{k_2 + k_3 + BS}{k_3(k_2 + BS)}$$

تشابه سیستم‌های الکتریکی و مکانیکی:

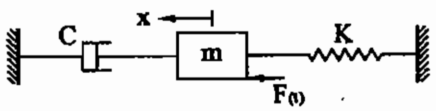
الف : تشابه نیرو ـ ولتاژ (تشابه مستقیم)

مکانیکی	الکتریکی
نیرو (F) و گشتاور (T)	ولتاژ (V)
جرم (m) و ممان اینرسی (I)	اندوکتانس سلف (L)
استهلاک ویسکوز دمپر (C)	مقاومت(R)
ثابت فنر(K)	عکس ظرفیت خازن $\left(\frac{1}{C}\right)$
تغییر مکان خطی(x) و تغییر مکان زاویه‌ای (θ)	بار الکتریکی(q)
سرعت خطی ($\dot{x}$) و سرعت زاویه‌ای (ω)	شدت جریان(i)

مثال : دو سیستم (۱) و (۲) مشابه هم هستند.



$e = e_L + e_R + e_C$



$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t)$

f(t) معادل ولتاژ است که از مجموع اجزا دیگر حاصل شده است. پس اجزا باید سری باشند. معادله دیفرانسیل حرکت سیستم مکانیکی معادله‌ای آشناست. برای به‌دست آوردن معادله دیفرانسیل سیستم الکتریکی به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$e = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

داریم: $i = \frac{dq}{dt}$

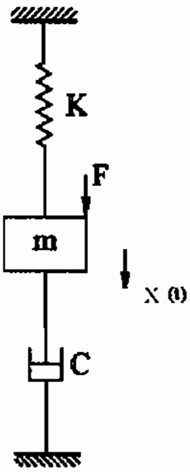
$$\Rightarrow e = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q$$

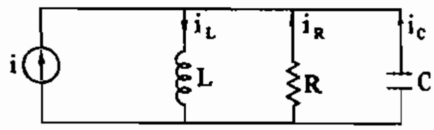
$$\Rightarrow e = L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q$$

ب: مشابهت نیرو ـ شدت جریان (تشابه معکوس)

الکتریکی	مکانیکی
شدت جریان(i)	نیرو (F) و گشتاور (T)
ظرفیت خازن(C)	جرم (m) و ممان اینرسی (I)
عکس مقاومت $\left(\frac{1}{R}\right)$	استهلاک ویسکوز دمپر (C)
عکس اندوکتانس سلف $\left(\frac{1}{L}\right)$	ثابت فنر (K)
شار مغناطیسی (Φ)	تغییر مکان خطی(x) و تغییر مکان زاویه‌ای (θ)
ولتاژ(V)	سرعت خطی $(\dot{x})$ و سرعت زاویه‌ای (ω)

مثال : دو سیستم زیر تشابه معکوس دارند.





$$m\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=f(t)$$

$$i_S=i_L+i_R+i_C$$

$$i_S=\frac{1}{L}\int V\,dt+\frac{V}{R}+C\frac{dV}{dt}$$

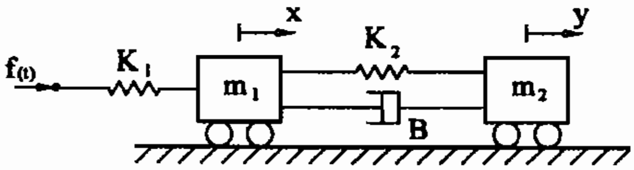
داریم $V=\frac{d\phi}{dt}$

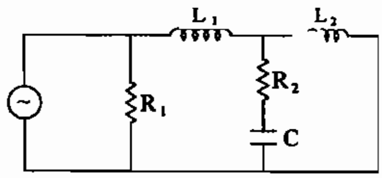
$$\Rightarrow i_S=\frac{1}{L}\phi+\frac{1}{R}\frac{d\phi}{dt}+C\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

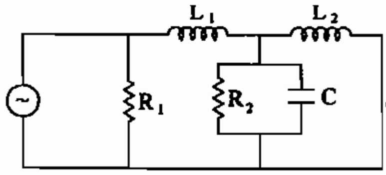
$$\Rightarrow C\ddot{\phi}+\frac{1}{R}\dot{\phi}+\frac{1}{L}\phi=i_s$$

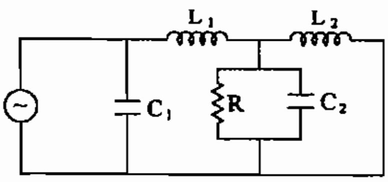
تست:

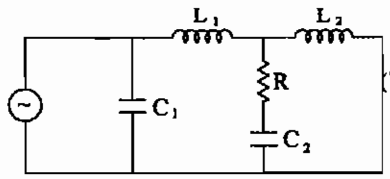
سیستم مکانیکی نشان داده شده دارای تشابه مستقیم (تشابه نیرو ـ ولتاژ) با کدام یک از سیستم‌های الکتریکی زیر است؟



۱)


۲)


۳)


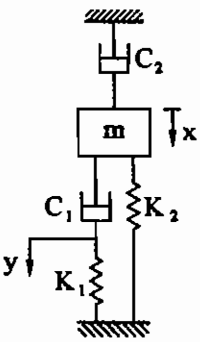
۴)


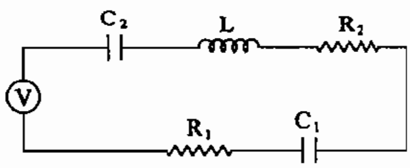
ساده‌ترین راه‌حل این تست روش حذف گزینه‌هاست. گزینه‌های(۱) و(۲) اشتباه هستند چون دو تا مقاومت دارند، در حالی‌که در سیستم مکانیکی فقط یک دمپر داریم.دمپر و فنر K_2 دو المان هستند که نیرو در آن‌ها لزوماً مساوی نیست ولی جابه‌جایی آن‌ها مساوی است پس موازی هستند و تشابه مستقیم با مقاومت و خازنی دارند که به‌طور سری به هم متصل شده باشند. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

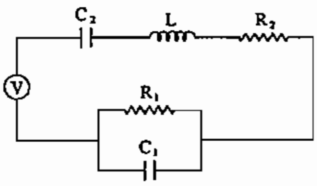
تست: مهندسی هوافضا

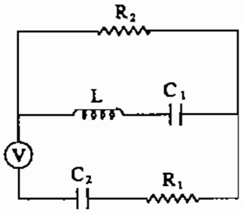
سیستم الکتریکی معادل با سیستم مکانیکی زیر کدام است؟

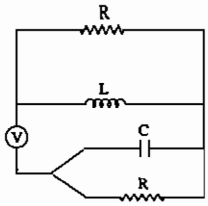
راهنمایی: منبع ولتاژ در گزینه‌ها وجود دارد، بنابراین منظور تشابه مستقیم است.



۱)


۲)


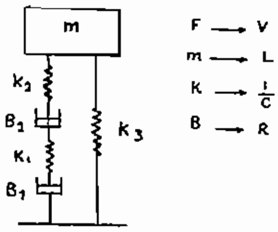
۳)


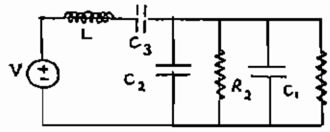
۴)


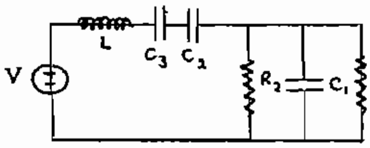
در سیستم مکانیکی نشان داده شده، جابه‌جایی جرم m ، دمپر C_2 ، فنر K_2 و مجموعهٔ دمپر C_1 و فنر K_1 با هم مساوی است. پس این اجزا با هم سری هستند و معادل سلف L ، خازن C_2 و مقاومت R_2 هستند که با مجموعه‌ای از یک مقاومت R_1 و خازن C_1 که به صورت موازی به هم وصل شده‌اند به‌طور سری در مدار قرار گرفته است. گزینه ۲ صحیح است.

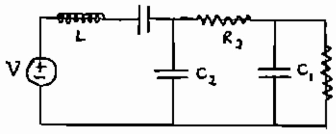
تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۳

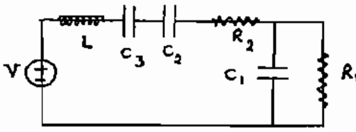
معادل الکتریکی سیستم مکانیکی زیر بر اساس نیرو ـ ولتاژ کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

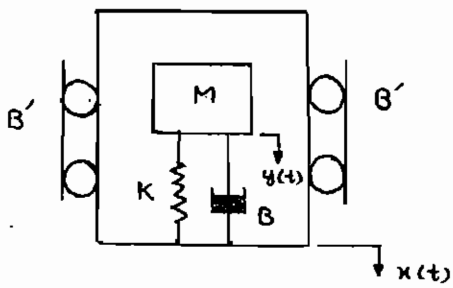
۴) 

چون نیرو در فنر K_2 ، دمپر B_2، فنر K_1 و دمپر B_1 یکسان است، تمام این اجزاء با هم به‌صورت سری در نظر گرفته می‌شوند و در مدار الکتریکی معادل آن‌ها، مقاومت R_2، خازن C_2، مقاومت R_1 و خازن C_1 باید موازی هم قرار گرفته باشند و این مجموعه با خازن C_3 و سلف L سری باشد. چون در سیستم مکانیکی، جرم m ، فنر K_3 و مجموعه فنرها و دمپرهای B_2, B_1, K_2, K_1 دارای تغییر مکان مساوی یعنی سری هستند. گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست : مهندسی برق ـ سال ۷۸

در سیستم شکل زیر $x(t)$ جابه‌جایی بدنه آسانسور و $y(t)$ جابه‌جایی جرم m (نسبت به یک مرجع مشترک) می‌باشند.

تابع تبدیل $G(S)=\frac{Y(S)}{X(S)}$ کدام است؟



۱) $\dfrac{-1}{S^2+\frac{B}{M}S+\frac{K}{M}}$

۲) $\dfrac{\frac{B'}{M}S}{S^2+\frac{B}{M}S+\frac{K}{M}}$

۳) $\dfrac{\frac{B}{M}S+\frac{K}{M}}{S^2+\frac{B}{M}S+\frac{K}{M}}$

۴) $\dfrac{((B+B')M)S+\frac{K}{M}}{S^2+\frac{B}{M}S+\frac{K}{M}}$

اصطکاک مجموعه با دیواره مجاورش به‌صورت یک نوع دمپر با میرایی B' نشان داده شده است. اما این اصطکاک در معادله حرکت جرم M نقشی ندارد.

معادله دیفرانسیل حرکت: $M\ddot{y}=K(x-y)+B(\dot{x}-\dot{y})$

$$MS^2Y(S)=KX(S)-KY(S)+BSX(S)-BSY(S)$$

$$\left(MS^2+BS+K\right)Y(S)=(BS+K)X(S)$$

$$\frac{Y(S)}{X(S)}=\frac{BS+K}{MS^2+BS+K}=\frac{\frac{B}{M}S+\frac{K}{M}}{S^2+\frac{B}{M}S+\frac{K}{M}}$$

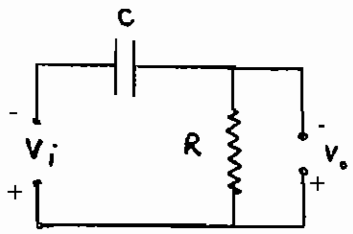
گزینه ۳ صحیح است.

تست :

در مدار زیر تابع تبدیل $G(S)=\frac{V_o(S)}{V_i(S)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1+CS}{1-RCS}$ ۲) $\frac{1}{1+RCS}$

۳) $\frac{RCS}{1+RCS}$ ۴) $\frac{1-RCS}{1+RCS}$



$$V_o=Ri \quad\Rightarrow\quad V_o(S)=RI(S)$$

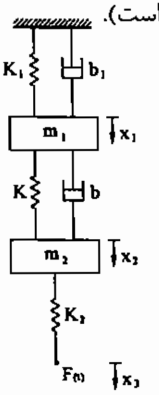
$$V_i=Ri+\frac{1}{C}\int idt \quad\Rightarrow\quad V_i(S)=RI(S)+\frac{1}{CS}I(S)$$

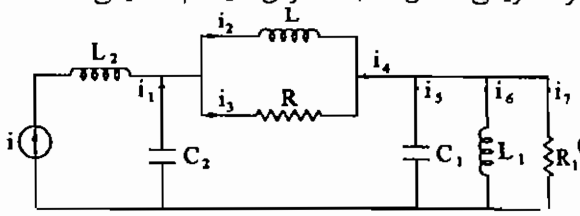
$$\frac{V_o(S)}{V_i(S)}=\frac{RI(S)}{RI(S)+\frac{1}{CS}I(S)}=\frac{1}{1+\frac{1}{RCS}}=\frac{RCS}{1+RCS}$$

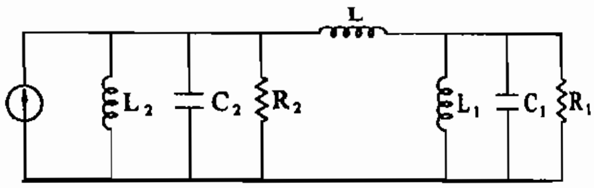
گزینه ۳ صحیح است.

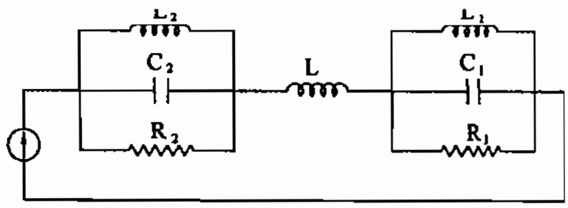
تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۸۱

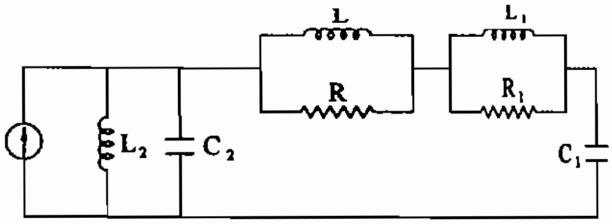
مدار الکتریکی معادل تشابه معکوس سیستم مکانیکی داده شده کدام است؟ (نیروی $f(t)$ ورودی سیستم است).



۱)




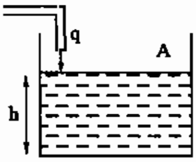
۳)


۴)


نیروی فنر k_2 برابر با نیروی مجموعه بالای خودش است. بنابراین فنر k_2 با کل مجموعه بالا سرش سری است. از آنجائی که در تشابه معکوس فنر مشابه سلف است، جریان سلف L_2 بایستی با جریان کل مدار برابر باشد. گزینه ۱ صحیح است.

۳ـ مدل‌سازی سیستم‌های سیالاتی

در چنین سیستم‌هایی ورودی و خروجی را می‌توان فشار و دبی سیال در نظر گرفت و چون فشار هیدرواستاتیک سیال را می‌توان بر حسب ارتفاع ستون سیال بیان نمود می‌توان به‌جای فشار، ارتفاع یا هد سیال را در نظر گرفت. مقاومت جداره‌ها در مقابل عبور سیال و نیز موانعی از قبیل شیر، زانویی و غیره را با مقاومت R مدل‌سازی می کنیم.سیستم حلقه باز است. با در نظر گرفتن مخزنی با سطح مقطع A که در حال پر شدن[1]ست می‌توان دیاگرام بلوکی را به ترتیب زیر پیدا کرد:



$$q=\frac{d}{dt}(Ah)=A\frac{dh}{dt}\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}}Q(S)=AS\,H(S)$$

$$H(S)\longrightarrow\boxed{AS}\longrightarrow Q(S)$$

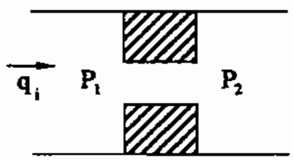
$$Q(S)\longrightarrow\boxed{\frac{1}{AS}}\longrightarrow H(S)$$

یعنی سطح مقطع مخزن A مشابه ظرفیت خازن C در یک سیستم الکتریکی است که در آن شدت جریان با دبی سیال و اختلاف پتانسیل با اختلاف ارتفاع سیال مشابه است.

$\Delta P=P_1-P_2=f\big(q(t)\big)$

اگر جریان مغشوش باشد: $\Delta P=R'_L q^2(t)$

اگر جریان آرام باشد: $\Delta P=R'_L q(t)$



$\Delta P=\rho g\Delta h\rightarrow\Delta h=\dfrac{\Delta P}{\rho g}$

در جریان آرام: $\Delta h=\dfrac{R'_L}{\rho g}.q(t)\;\Rightarrow\;\Delta h=R.q(t)$

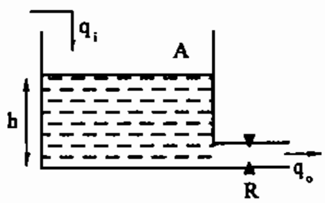
فقط در حالت جریان آرام می‌توان برای این سیستم یک مدل خطی به‌دست آورد.

وقتی مدل ریاضی از حالت خطی خارج شود تبدیل لاپلاس معنی ندارد. مگر اینکه معادله ریاضی بسط داده شده و خطی گردد و سپس از آن تبدیل لاپلاس بگیریم.

مثال : تابع تبدیل سیستم سیالاتی زیر را به‌دست آورید. ابتدا با استفاده از بقای حجم

$q_i-q_o=\dfrac{d}{dt}(Ah)=A\dfrac{dh}{dt}$

$R=\dfrac{h-0}{q_0}$



$$\left.\begin{aligned}q_i-q_o&=A\frac{dh}{dt}\\ q_o&=\frac{h}{R}\end{aligned}\right\}\Rightarrow q_i=A\frac{dh}{dt}+\frac{h}{R}\overset{\text{لاپلاس}}{\Rightarrow}Q_i(S)=\left(AS+\frac{1}{R}\right)H(S)$$

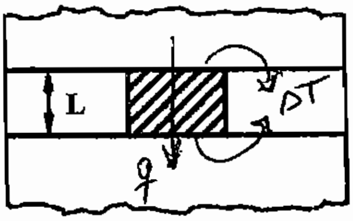
$$\Rightarrow\frac{H(S)}{Q_i(S)}=\frac{R}{RAS+1}$$

۴ـ مدل‌سازی سیستم‌های حرارتی

در چنین سیستم‌هایی ورودی سیستم اختلاف دما (مشابه اختلاف پتانسیل در سیستم‌های الکتریکی) و خروجی سیستم دبی حرارتی (مشابه شدت جریان در سیستم‌های الکتریکی) در نظر گرفته می‌شود. در سیستم‌های حرارتی نیز می‌توان مقاومت معادل مقاومت و خازن در سیستم‌های الکتریکی را به‌دست آورد. برای به‌دست آوردن مقاومت حرارتی سه مکانیزم مختلف انتقال حرارت را در نظر می‌گیریم:

۱ـ هدایت حرارتی

در مورد هدایت حرارت در جسمی با ضریب هدایت حرارت K، سطح مقطع A و ضخامت L، رابطه خطی زیربین دبی حرارتی و اختلاف دما برقرار است.



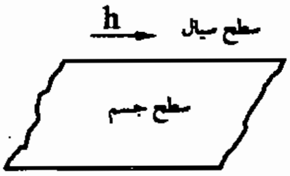
$$q = KA\frac{\Delta T}{L}$$

بنابراین طبق رابطه $q = \frac{\Delta T}{R}$ مقاومت هدایت به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_{cond} = \frac{L}{KA}$$

۲ـ جابه‌جایی

اگر انتقال حرارت از جسمی با مساحت A با ضریب جابه‌جایی h به محیط صورت گیرد، دبی حرارتی و اختلاف دما مطابق رابطه زیر با هم ارتباط دارند.



$$q = hA\Delta T$$

و مقاومت حرارتی جابه‌جایی از رابطه $R_{conv} = \frac{1}{hA}$ به‌دست می‌آید.

۳ـ تشعشع

برای انتقال حرارت تشعشعی نمی‌توان مدل خطی به‌دست آورد چون انتقال حرارت با توان چهارم دما ارتباط دارد که غیرخطی است.

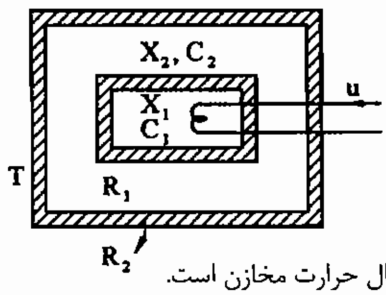
برای تعیین مدل حرارتی یک مخزن از این اصل استفاده می‌کنیم که در جایی که نشت حرارت وجود ندارد رابطه تعادل حرارتی سیستم عبارت است از:

$$q = c\frac{dT}{dt} \qquad \text{یا} \qquad Q = mc\frac{dT}{dt} = C\frac{dT}{dt}$$

که در آن C=mc ظرفیت گرمایی سیال و معادل ظرفیت خازن در سیستم الکتریکی است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۱

شکل زیر یک سیستم حرارتی شامل دو مخزن حرارتی را نشان می‌دهد. C_2,C_1 ظرفیت حرارتی دو مخزن (حاصل‌ضرب جرم در گرمای ویژه سیال هر کدام از مخازن) و X_2,X_1 درجه حرارت هر کدام از مخازن است. R_1 مقاومت حرارتی معادل بین دو منبع و R_2 مقاومت حرارتی معادل بین منبع دوم و محیط اطراف است. u دبی حرارتی ورودی مخزن ۱ است. خروجی سیستم را $Y=X_1$ در نظر بگیرید. با فرض $C_1=C_2=1$, $R_1=R_2=1$ و دمای محیط اطراف T=0 تابع تبدیل سیستم یعنی: $G(S)=\frac{Y(S)}{U(S)}$ کدام است؟



۱) $G(S)=\frac{1}{S^2+3S+1}$

۲) $G(S)=\frac{1}{S^2+2S+3}$

۳) $G(S)=\frac{S+2}{S^2+3S+1}$

۴) $G(S)=\frac{S+2}{S^2+2S+3}$

جریان گرمایی خالص وارد به مخزن ۱ باعث تغییر دما می‌شود. u همان q یا نرخ انتقال حرارت مخازن است.

$$\Rightarrow\ u-u_1 = C_1\frac{dX_1}{dt} \quad \text{و} \quad u_1 = \frac{X_1-X_2}{R_1}$$

$$u_1-u_2 = C_2\frac{dX_2}{dt} \quad \text{و} \quad u_2 = \frac{X_2-T}{R_2}$$

از ۴ رابطه فوق تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$\text{چون}\begin{cases} C_1=C_2=1 \\ R_1=R_2=1 \\ T=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U-U_1 = SX_1 \\ U_1 = X_1-X_2 \\ \left.\begin{array}{l} U_1-U_2 = SX_2 \\ U_2 = X_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad U_1=(S+1)X_2 \quad (1) \end{cases}$$

$$(S+1)X_2 = X_1-X_2 \Rightarrow (S+2)\ X_2 = X_1 \Rightarrow X_2 = \frac{1}{S+2}X_1 \xrightarrow{(1)} U_1 = \frac{S+1}{S+2}X_1$$

$$U-U_1 = SX_1 \Rightarrow U - \frac{S+1}{S+2}X_1 = SX_1$$

$$\Rightarrow U = SX_1 + X_1\left(\frac{S+1}{S+2}\right) \Rightarrow U = \left(S+\frac{S+1}{S+2}\right)X_1 = \left(\frac{S^2+3S+1}{S+2}\right)X_1$$

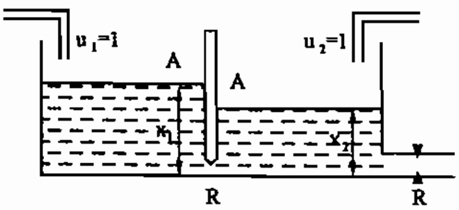
$$G(S) = \frac{X_1(S)}{U(S)} = \frac{X_1}{\left[\frac{S^2+3S+1}{S+2}\right]X_1}$$

$$\Rightarrow \frac{X_1}{U} = \frac{S+2}{S^2+3S+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{S+2}{S^2+3S+1}$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۶

در شکل مقابل u_1 و u_2 دبی ورودی به مخازن 1 و 2 است. سطح مقطع هر مخزن برابر A=1 و مقاومت بین مخازن و مقاومت شیر خروجی R=1 است. ارتفاع آب در مخازن به ترتیب x_1 و x_2 است. در حالت تعادل



۱) $x_2 = 1 \ , \ x_1 = 2$

۲) $x_2 = 2 \ , \ x_1 = 1$

۳) $x_2 = 3 \ , \ x_1 = 2$

۴) $x_2 = 2 \ , \ x_1 = 3$

$$\frac{dV_1}{dt} = A\frac{dx_1}{dt} = u_1 - \frac{x_1 - x_2}{R} \xrightarrow{R=1, A=1} \frac{dx_1}{dt} = u_1 - x_1 + x_2$$

$$\frac{dV_2}{dt} = A\frac{dx_2}{dt} = u_2 + \frac{x_1 - x_2}{R} - \frac{x_2}{R} \xrightarrow{R=1, A=1} \frac{dx_2}{dt} = u_2 + x_1 - 2x_2$$

در حالت تعادل نرخ تغییرات ارتفاع در هر مخزن با هم مساوی و برابر صفر می‌گردد.

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$$

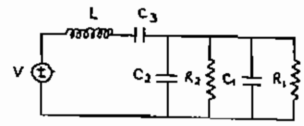
با توجه به‌این‌که $u_1 = u_2 = 1$ است داریم:

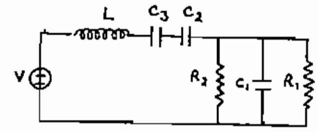
$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 3 \ , \ x_2 = 2$$

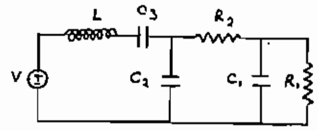
گزینه ۴ صحیح است.

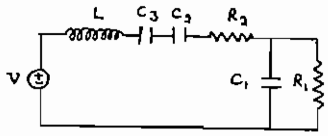
تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۳

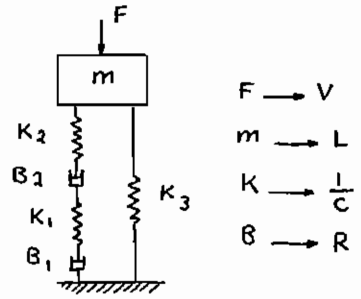
معادل الکتریکی سیستم مکانیکی زیر بر اساس نیرو ـ ولتاژ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

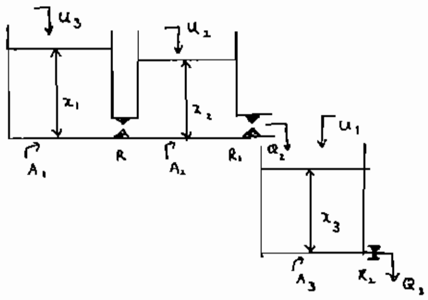
۴) 



فنرهای k_2, k_1 و دمپرهای B_2 ,B_1 نیروی یکسانی را تحمل می‌کنند، بنابراین ولتاژ دوسر آن‌ها با هم برابر بوده و با هم موازی هستند. فنر k_3 مشابه خازن C_3 است که با مجموعه مقاومت‌های R_2, R_1 و خازن‌های C_2, C_1 سری است. گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست:

شکل زیر سیستم متشکل از سه ظرف را نشان می‌دهد. سطح مقطع ظروف A_1 و A_2 و A_3 و مقاومت شیرهای خروجی R_1 و R_2 و ورودی‌ها u_1 تا u_3 هستند. اگر دبی خروجی از ظرف‌های ۲ و ۳ که با Q_2 و Q_3 نشان داده شده، به عنوان خروجی سیستم انتخاب شود و $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ و $R = R_1 = R_2 = 1$ تابع تبدیل $\frac{Q_3}{u_1}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{s+1}$ ۲) $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$

۳) $\frac{1}{(s+1)^2}$ ۴) $\frac{1}{s(s+1)^2}$

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به این‌که ورودی‌ها مستقل از یکدیگر هستند، تابع تبدیل $\frac{Q_3}{u_1}$ به‌صورت زیر است:

$$\frac{Q_3}{u_1} = ? \qquad (u_2 = u_3 = 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 - Q_3 = A_3 \dot{x}_3 \\ R_2 = \frac{x_3}{Q_3} \Rightarrow x_3 = Q_3 \end{array}\right\} \Rightarrow u_1 - Q_3 = A_3 \dot{Q}_3 \Rightarrow Q_3(1 + A_3 S) = u_1 \Rightarrow \frac{1}{1 + A_3 S} = \frac{1}{1+S}$$

فصل سوم

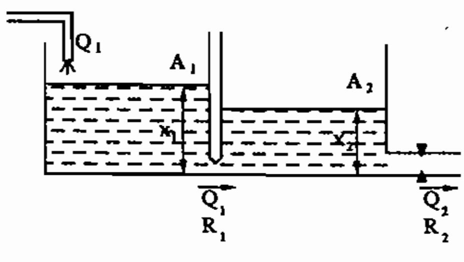
نمایش سیستم‌های دینامیکی

با در دست داشتن مدل فیزیکی می‌توان مدل ریاضی آن سیستم که ممکن است یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n، معادله‌برداری حالت و یا تابع تبدیل آن سیستم باشد و یا مدل ترسیمی آن سیستم به صورت دیاگرام بلوکی یا دیاگرام جریانی را ارائه نمود.

۱ـ معادله‌برداری حالت

یک مدل ریاضی برای نمایش یک سیستم است که در آن به جای نمایش سیستم به وسیله یک معادله دیفرانسیل مرتبه n از n معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول و یا یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول برداری استفاده می‌شود.

مثال : سیستم هیدروستاتیکی نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید: دبی Q_1 که از ظرف اول وارد ظرف دوم می‌شود به‌عنوان خروجی سیستم و دبی ورودی به ظرف اول یعنی Q_i به عنوان ورودی سیستم مدنظر است:



برای مخزن اول : $A_1\frac{dx_1}{dt}=Q_i-\frac{x_1-x_2}{R_1}\Rightarrow\frac{d}{dt}x_1=\frac{-1}{R_1A_1}x_1+\frac{1}{R_1A_1}x_2+\frac{1}{A_1}Q_i$

برای مخزن دوم : $A_2\frac{dx_2}{dt}=\frac{x_1-x_2}{R_1}-\frac{x_2}{R_2}\Rightarrow\frac{d}{dt}x_2=\frac{1}{R_1A_2}x_1-\left(\frac{1}{R_1A_2}+\frac{1}{A_2R_2}\right)x_2$

دو معادله فوق را می‌توان به صورت زیر به فرم ماتریسی نوشت:

(۱)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1A_1} & \frac{1}{R_1A_1} \\ \frac{1}{R_1A_2} & -\left(\frac{1}{R_1A_2}+\frac{1}{R_2A_2}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} Q_i$$

$$Q_1 = \frac{x_1 - x_2}{R_1} = \frac{x_1}{R_1} - \frac{x_2}{R_2}$$

(۲)

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{-1}{R_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0Q_i$$

دو معادله ماتریسی فوق را به شکل زیر خلاصه می‌کنیم و آن را معادله حالت سیستم موردنظر می‌نامیم.

$$\frac{d}{dt}x = Ax + BQ_i$$

$$Q_1 = Cx + DQ_i$$

بردار $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ در معادله فوق بردار حالت نام دارد. Q_i ورودی و Q_1 خروجی سیستم کنترل است و نیز

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1A_1} & \frac{1}{R_1A_1} \\ \frac{1}{R_1A_2} & -\left(\frac{1}{R_1A_2}+\frac{1}{R_2A_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \; C = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{-1}{R_2} \end{bmatrix} \quad , \quad D = 0$$

در حالت کلی برای یک سیستم خطی مرتبه n با پارامترهای مجزا می‌توان n متغیر حالت در نظر گرفت و آن‌ها را به صورت یک بردار ستونی x که بردار حالت نام دارد نمایش داد.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

با فرض این‌که سیستم دارای n متغیر حالت، یک ورودی اسکالر u و یک خروجی اسکالر y باشد،معادله حالت شامل n معادله دیفرانسیل خطی مرتبه یک به صورت زیر است:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n + b_1u$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n + b_2u$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots + a_{nn}x_n + b_nu$$

خروجی اسکالر y نیز ترکیبی خطی از n متغیر حالت و ورودی u است.

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots\dots + c_nx_n + du$$

نمایش ماتریسی معادلات فوق به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt}x = Ax + BU$$

$$y / CX + DU$$

که در آن

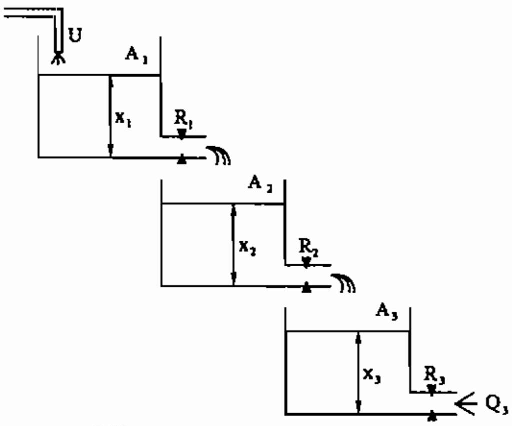
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

معادلات دیفرانسیل برداری فوق معادلات حالت یک سیستم خطی مرتبه n با یک ورودی u و یک خروجی y می باشند.

مثال :

سیستم شکل زیر را در نظر بگیرید. سیستم دارای یک ورودی u به مخزن اول و خروجی از مخزن سوم یعنی Q_3 بـه عنـوان خروجـی سیستم است. معادله حالت سیستم را به‌دست آورید.



دبی خروجی ـ دبی ورودی = تغییر حجم مایع در هر مخزن

$$A_1\frac{dx_1}{dt} = u - \frac{x_1}{R_1} \rightarrow \frac{dx_1}{dt} = \frac{-1}{R_1A_1}x_1 + \frac{1}{A_1}u$$

$$A_2\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1}{R_1} - \frac{x_2}{R_2} \rightarrow \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{R_1A_2}x_1 - \frac{1}{R_2A_2}x_2$$

$$A_3\frac{dx_3}{dt} = \frac{x_2}{R_2} - \frac{x_3}{R_3} \rightarrow \frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{R_2A_3}x_2 - \frac{1}{R_3A_3}x_3$$

$$y = Q_3 = \frac{x_3}{R_3} = \frac{1}{R_3}x_3$$

معادلات فوق را به فرم ماتریسی معادلات حالت می‌نویسیم:

$$\frac{d}{dt}x = Ax + BU$$

$$Y = CX + DU$$

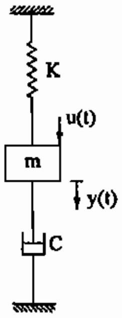
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad a = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1A_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1A_2} & \frac{-1}{R_2A_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2A_3} & \frac{-1}{R_3A_3} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

۲ ـ تابع تبدیل

یکی دیگر از روش‌های ریاضی نمایش یک سیستم خطی، نوشتن تابع تبدیل آن سیستم است. همان‌طور که در فصل قبل تعریف کردیم برای سیستمی با یک ورودی و خروجی تابع تبدیل عبارت است از، نسبت تبدیل لاپلاس خروجی سیستم به تبدیل لاپلاس ورودی با فرض شرایط اولیه صفر. تابع تبدیل را می‌توان از معادله حالت سیستم یا معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n حاکم بر سیستم به‌دست آورد.

مثال : با فرض این‌که در سیستم جرم و فنر و دمپر زیر ورودی نیروی u(t) و خروجی جابه‌جایی جرم یعنی x(t) باشد و با استفاده از این که معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=u(t)$ می‌باشد، تابع تبدیل سیستم را به‌دست آورید.



از طرفین معادله دیفرانسیل سیستم تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$m\left[S^2X(S)-Sx(0)-\dot{x}(0)\right]+c\left[SX(S)-x(0)\right]+kX(S)=U(S)$$

$$\left[mS^2+cS+k\right]X(S)=U(S)$$

توجه داشته باشید که مطابق تعریف تبدیل لاپلاس باید شرایط اولیه یعنی $x(0)$ و $\dot{x}(0)$ صفر در نظر گرفته شوند. چون خروجی سیستم x(t) و ورودی آن $u(t)$ در نظر گرفته شده است تابع تبدیل سیستم عبارت است از:

$$\text{تابع تبدیل}=G(s)=\frac{X(S)}{U(S)}=\frac{1}{mS^2+cS+k}$$

به‌دست آوردن تابع تبدیل سیستم از معادله حالت آن

در حالت ساده، سیستمی با تنها یک ورودی و یک خروجی را در نظر می‌گیریم. معادله حالت چنین سیستمی عبارت است از:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$Y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

u(t) ورودی سیستم و y(t) خروجی سیستم در نظر گرفته شده است.

از طرفین معادلات فوق تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$SX(S)-x(0)=AX(S)+BU(S)$$
$$Y(S)=CX(S)+DU(S)$$

فرم ماتریسی معادلات فوق به شکل زیر خواهد بود:

$$X(S)=(SI-A)^{-1}\left[x(0)+BU(S)\right]$$
$$Y(S)=C(SI-A)^{-1}\left[x(0)+BU(S)\right]+DU(S)$$

با فرض x(0)=0 داریم:

$$Y(S)=\left[C(SI-A)^{-1}B+D\right]U(S)$$

$$G(S)=\frac{Y(S)}{U(S)}=C(SI-A)^{-1}B+D$$

تست : مهندسی برق ـ سال ۷۱

در سیستمی که با معادلات حالت زیر توصیف شده است حدود تغییرات K را برای پایداری سیستم به‌دست آورید.

$\dot{x}_1(t)=2x_1(t)+3x_2(t)+x_3(t)+u_1(t)$

$\dot{x}_2(t)=x_1(t)+2x_2(t)-x_3(t)+2u_2(t)$

$\dot{x}_3(t)=Kx_1(t)+x_3(t)+u_1(t)+u_2(t)$

$y(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$

۱) به ازای $K>\frac{1}{5}$ پایدار است.

۲) به ازای $\frac{1}{5}<K<5$ پایدار است.

۳) به ازای $K<\frac{1}{5}$ یا $K>5$ پایدار است.

۴) به ازای همه مقادیر K ناپایدار است.

ابتدا معادلات حالت را به فرم ماتریسی می‌نویسیم.

$$\frac{d}{dt}x=AX+BU$$

$$Y=CX+DU$$

معادله مشخصه سیستم از رابطه زیر به‌دست می‌آید :

$$|SI-A|=0$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ K & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|SI-A|=\begin{vmatrix} S-2 & -3 & -1 \\ 1 & S-2 & +1 \\ -K & 0 & S-1 \end{vmatrix}=S^3-5S^2+(-K+5)S+5K-1=0$$

برای پایداری مطابق معیار راث باید تمام ضرایب معادله مشخصه مثبت باشند در حالی‌که در معادله مشخصه فوق ضرایب 1 و -5 مختلف‌العلامت هستند. علاوه بر این، باید اعداد ستون اول جدول راث همه هم علامت باشند (برای توضیحات بیشتر به فصل پنجم مراجعه نمایید).

بنابراین به ازای هیچ مقدار K سیستم موردنظر پایدار نیست.

گزینه ۴ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۷۵

معادلات فضای حالت سیستمی عبارت‌اند از:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\omega=\dot{x}_1+y$$

$$u=r-\omega$$

که در آن r ورودی مرجع، y خروجی، x بردار حالت، ω یک فیدبک داخلی و u سیگنال کنترل است. تابع تبدیل سیستم حلقه بسته کدام است؟

۱) $g(S)=\frac{1}{S+1}$

۲) $g(S)=\frac{1}{(S+1)^2}$

۳) $g(S)=\frac{S+2}{(S+1)^2}$

۴) $g(S)=\frac{1}{(S+1)(S+2)}$

معادلات حالت را از فرم ماتریسی خارج می‌کنیم.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u$$
$$y = x_1 + x_2$$
$$\omega = \dot{x}_1 + y$$
$$u = r - \omega = r - \dot{x}_1 - y$$
$$\dot{x}_2 = u = r - \dot{x}_1 - y = r - \dot{x}_1 - \left(x_1 + x_2\right)$$
$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = r - \dot{x}_1 - \left(x_1 + x_2\right) = r - \dot{x}_1 - \left(x_1 + \dot{x}_1\right)$$
$$\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1 + x_1 = r$$

دقت کنید که مطابق تعریف فضای حالت، $\dot{x}_2 = \ddot{x}_1$ ، $x_2 = \dot{x}_1$ را در معادلات فوق جایگزین نموده‌ایم. حال از طرفین معادله دیفرانسیل فوق تبدیل لاپلاس می‌گیریم :

$$S^2 X_1(S) + 2SX_1(S) + X_1(S) = R(S)$$
$$\left(S^2 + 2S + 1\right) X_1(S) = R(S)$$

تابع تبدیل سیستم نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به ورودی است. چون خروجی سیستم y است باید $Y(S)$ را نیز به‌دست آوریم.

$$y = x_1 + x_2 = x_1 + \dot{x}_1$$
$$Y(S) = X_1(S) + SX_1(S) \Rightarrow Y(S) = (1+S)X_1(S)$$
$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{(S+1)}{S^2+2S+1} = \frac{(S+1)}{(S+1)^2} = \frac{1}{S+1}$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست : مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۶

معادلات فضای حالت سیستمی عبارت است از :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

تابع تبدیل این سیستم عبارت است از:

۱) $\frac{1}{S^3+S^2+S+1}$ ۲) $\frac{1}{S^3}$ ۳) $\frac{S+1}{S^3}$ ۴) $\frac{S+1}{S\left(S^2+1\right)}$

معادلت حالت را از فرم ماتریسی خارج می‌کنیم تا معادله دیفرانسیل بین ورودی و خروجی سیستم و نهایتاً تابع تبدیل سیستم را به‌دست آوریم: (دقت کنید که بردار x به صورت $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ و بردار $\dot{x}$ به صورت $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}$ در نظر گرفته می‌شوند.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = u$$

$$y=x_1 \Rightarrow \dot{y}=\dot{x}_1=x_2$$
$$\ddot{y}=\dot{x}_2=x_3$$
$$y^{(3)}=\dot{x}_3=u \overset{\text{لاپلاس}}{\Rightarrow} S^3Y(S)=U(S) \Rightarrow \frac{Y(S)}{U(S)}=\frac{1}{S^3}$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۷۶

معادلات حالت و خروجی سیستمی عبارت‌اند از:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & K+1\\ -K-2 & -2K-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

به ازای چه مقدار از K این سیستم پایدار است.

۱) $K>-2$
۲) $-2<K<-1$
۳) $K>-1$
۴) سیستم همواره پایدار است و به K بستگی ندارد.

هدف از طرح این تست در این فصل، به‌دست آوردن معادله مشخصه سیستم از روی معادلات فضای حالت است. برای مطالعه مبحث پایداری به فصل پنجم رجوع نمایید.

ابتدا معادلات را از فرم ماتریسی خارج می‌کنیم.

$$\dot{x}_1=(K+1)x_2+u$$
$$\dot{x}_2=(-K-2)x_1+(-2K-3)x_2$$

از معادله فوق مشتق گرفته و $\dot{x}_1$ را از معادله اول در آن جایگذاری می‌کنیم.

$$\ddot{x}_2=(-K-2)\dot{x}_1+(-2K-3)\dot{x}_2$$
$$\ddot{x}_2=(-K-2)(K+1)x_2+u(-K-2)+(-2K-3)\dot{x}_2$$

حال از طرفین معادله فوق تبدیل لاپلاس می‌گیریم :

$$S^2X_2(S)+(K+2)(K+1)X_2(S)+(2K+3)SX_2(S)=(K+2)U(S)$$
$$Y(S)=X_2(S)$$
$$\frac{Y(S)}{U(S)}=\frac{K+2}{S^2+(2K+3)S+(K+2)(K+1)}$$

معادله مشخصه سیستم عبارت است از:

$$S^2+(2K+3)S+(K+2)(K+1)$$

مطابق معیار پایداری راث، برای پایداری باید

$$2K+3>0 \Rightarrow K>-\frac{3}{2}$$
$$(K+2)(K+1)>0 \Rightarrow K>-1 \text{ یا } K>-2$$

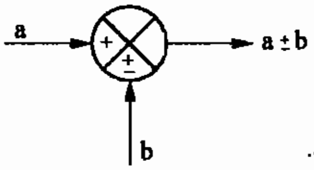
نتیجتاً باید $K>-1$ باشد.

گزینه ۳ صحیح است.

۳ـ نمایش ترسیمی یک سیستم کنترل

نمایش ترسیمی یک سیستم کنترل خطی می‌تواند به دو صورت دیاگرام بلوکی و یا دیاگرام جریانی باشد.

دیاگرام بلوکی:

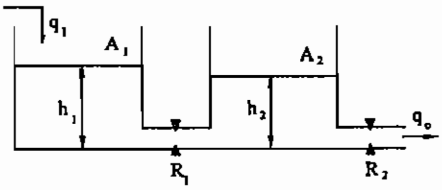


سیگنال: اجزایی که بین دو سیستم مبادله می‌شوند سیگنال نام دارند.

مرکز جمع (نقطه مجموع): جایی است که دو سیگنال با هم جمع می‌شوند یا از هم کم می‌شوند.

مثال :

نمودار بلوکی سیستم هیدروستاتیکی زیر را رسم نمایید.



مخزن اول

$$(1)\quad \begin{cases} q_i - q = A_1 \dfrac{dh_1}{dt} \\ q = \dfrac{h_1 - h_2}{R_2} \end{cases}$$

مخزن دوم

$$(2)\quad \begin{cases} q - q_o = A_2 \dfrac{dh_2}{dt} \\ q_o = \dfrac{h_2}{R_2} \end{cases}$$

از ۴ معادله فوق تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

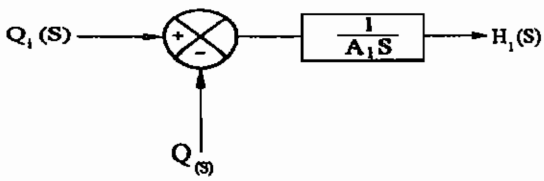
$$Q_i(S) - Q(S) = A_1 S H_1(S) \quad \Rightarrow \quad \frac{H_1(S)}{Q_i(s) - Q(S)} = \frac{1}{A_1 S}$$

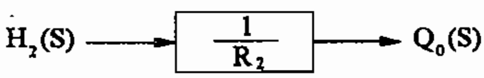
$$R_1 = \frac{H_1(S) - H_2(S)}{Q(S)} \Rightarrow \frac{Q(S)}{H_1(S) - H_2(S)} = \frac{1}{R_1}$$

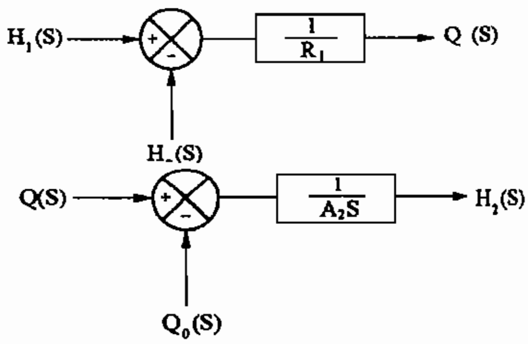
$$Q(S) - Q_o(S) = A_2 S H_2(S) \quad \Rightarrow \frac{H_2(S)}{Q(S) - Q_o(S)} = \frac{1}{A_2 S}$$

$$R_2(S) = \frac{H_2(S)}{Q_0(S)} \quad \Rightarrow \frac{Q_o(S)}{H_2(S)} = \frac{1}{R_2}$$

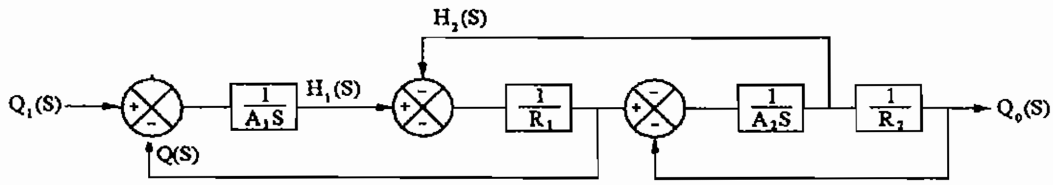
نمودار بلوکی چهار معادله فوق به شکل زیر خواهد بود:





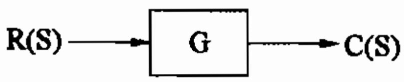


حال چهار حالت بالا را ترکیب می‌کنیم.



روش میسون برای به‌دست آوردن تابع تبدیل یک سیستم

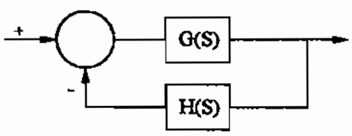
دیاگرام بلوکی یک سیستم را می‌توان بدون خدشه‌دار شدن مفهوم کلی آن به گونه‌ای تغییر داد که رابطه بین ورودی و خروجی تنها توسط یک بلوک قابل بیان باشد.



در این‌صورت تابع بیان شده در این بلوک همان تابع تبدیل سیستم خواهد بود.

مطابق دستور میسون در هر سیستم فیدبک تابع تبدیل سیستم از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\text{تابع تبدیل سیستم} = \frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}} = \frac{\text{مسیر مستقیم بین ورودی و خروجی}}{\text{۱ - تمام حلقه‌های بسته}}$$

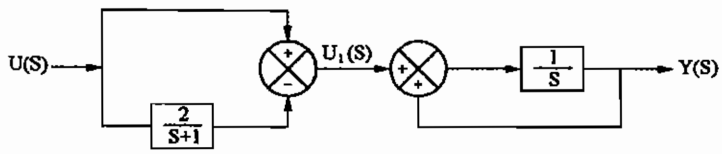


به‌عنوان مثال تابع تبدیل سیستم فیدبک زیر به صورت زیر است.

$$\text{تابع تبدیل سیستم} = \frac{G(S)}{1-[-G(S)H(S)]} = \frac{G(S)}{1+G(S)H(S)}$$

تست:

تابع تبدیل بین ورودی $U(S)$ و خروجی $Y(S)$ در شکل زیر کدام است؟



۱) $\frac{1}{S+1}$

۲) $\frac{1}{(S+1)^2}$

۳) $\frac{S+1}{S-1}$

۴) $\frac{1}{(S+1)(S-1)}$

$$\frac{U_1(S)}{U(S)} = 1-\frac{2}{S+1} = \frac{S-1}{S+1}$$

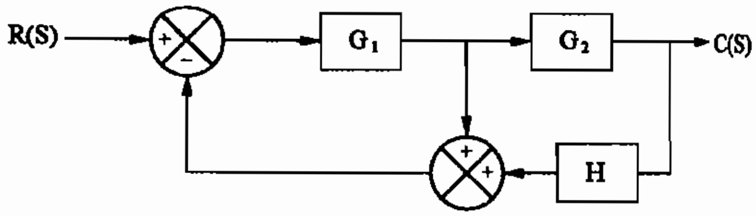
$$\frac{Y(S)}{U_1(S)} = \frac{\frac{1}{S}}{1-\frac{1}{S}} = \frac{1}{S-1}$$

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{1}{S+1}$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۸

تابع تبدیل سیستم نشان داده شده در شکل زیر کدام است؟



۱) $\frac{C}{R}=\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}$

۲) $\frac{C}{R}=\frac{G_1G_2}{1+G_2+G_1G_2H}$

۳) $\frac{C}{R}=\frac{G_1G_2}{1+G_1+G_2+G_1G_2H}$

۴) $\frac{C}{R}=\frac{G_1G_2}{1+G_1+G_1G_2H}$

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G_1G_2}{1-\left(-G_1\right)-\left(-G_1G_2H\right)}$$

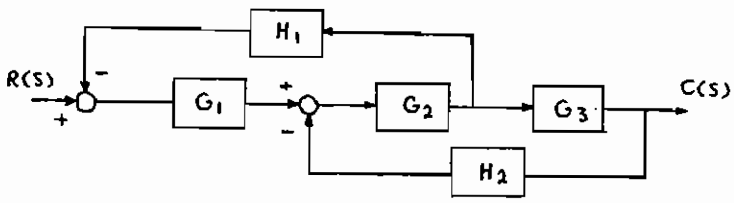
$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G_1G_2}{1+G_1+G_1G_2H}$$

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2\left(H+\frac{1}{G_2}\right)}=\frac{G_1G_2}{1+G_1+G_1G_2H}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۹

تابع تبدیل بین ورودی $R(S)$ و خروجی $C(S)$ در سیستم با دیاگرام بلوکی زیر کدام است؟



۱) $\frac{G_1G_2G_3}{1+G_1G_2G_3\left(\frac{H_1}{C_3}+\frac{H_2}{G_1}\right)}$

۲) $\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2G_3H_1+G_2G_3}$

۳) $\frac{G_1G_2G_3}{1+G_1G_2G_3H_1H_2}$

۴) $\frac{G_1G_2G_3}{G_1G_2H_1+G_2G_3H_2}$

با استفاده از دستور میسون به راحتی می‌توان تابع تبدیل سیستم فوق را به‌دست آورد.

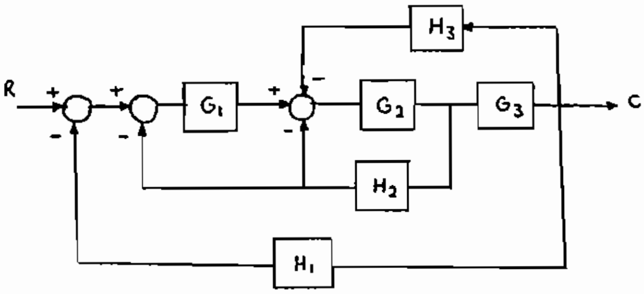
$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{\text{مسیر مستقیم بین ورودی و خروجی}}{1-\text{حلقه‌های بسته}}$$

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G_1G_2G_3}{1-\left(-G_1G_2H_1-G_2G_3H_2\right)}=\frac{G_1G_2G_3}{1+G_1G_2G_3\left(\frac{H_1}{G_3}+\frac{H_2}{G_1}\right)}$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست : مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۸

تابع تبدیل $\frac{C(S)}{R(S)}$ سیستم نشان داده شده در شکل مقابل کدام است؟



۱) $\frac{G_1G_2G_3}{1+G_2H_2-G_1G_2H_2+G_1G_2G_3H_1+G_2G_3H_3}$

۲) $\frac{G_1G_2G_3}{1+G_2H_2+G_1G_2H_2+G_1G_2G_3H_1+G_2G_3H_3}$

۳) $\frac{G_1G_2G_3}{1+G_1+G_2H_2+G_1G_2H_2+G_1G_2G_3H_1+G_2G_3H_3}$

۴) $\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1+G_2H_2-G_1G_2H_2+G_1G_2G_3H_1+G_2G_3H_3}$

با استفاده از دستور میسون تابع تبدیل سیستم را می‌یابیم.

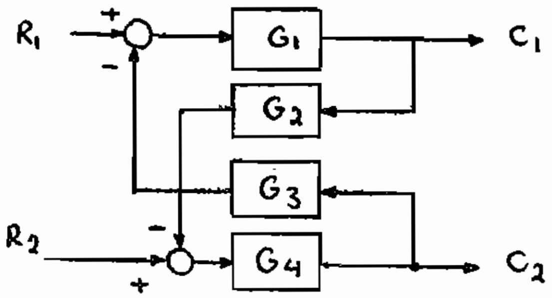
$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G_1G_2G_3}{1-(-G_2H_2)-(-G_1G_2H_2)-(-G_1G_2G_3H_1)-(-G_2G_3H_3)}$$

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G_1G_2G_3}{1+G_2H_2+G_1G_2H_2+G_1G_2G_3H_1+G_2G_3H_3}$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۸۳

در سیستم مقابل، تابع تبدیل بین ورودی R_1 و خروجی C_2 کدام است؟



۱) $G=\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_1G_2G_4}$

۲) $G=\frac{-G_1G_2G_3G_4}{1-G_1G_2G_4}$

۳) $G=\frac{-G_1G_2G_4}{1-G_1G_2G_3G_4}$

۴) $G=\frac{G_1G_2G_4}{1+G_1G_2G_3G_4}$

با استفاده از دستور میسون تابع تبدیل سیستم را به‌دست می‌آوریم. علامت‌های مثبت و منفی فلش‌ها را در نظر می‌گیریم:

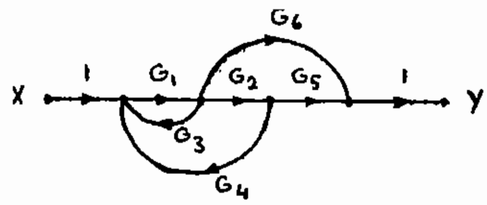
$$\frac{C_2}{R_1}=\frac{-G_1G_2G_4}{1-G_1G_2G_4G_3}$$

دقت کنید تنها مسیر مستقیم از ورودی به خروجی از بلوک‌های G_3, G_2, G_1 می‌گذرد و تنها حلقه بسته تشکیل شده شامل هر چهار بلوک G_4, G_3, G_2, G_1 می‌شود. به علامت منفی بین بلوک‌های G_4, G_2 نیز توجه داشته باشید.

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۸۲

تابع تبدیل سیستم کنترل با دیاگرام گذر سیگنال نشان داده شده در شکل مقابل کدام است؟



۱) $\dfrac{G_1G_2G_5-G_1G_6}{1-G_1G_3+G_1G_2G_4}$

۲) $\dfrac{G_1G \;\; G_6+G_1G_5}{1+G_1G_6-G_1G_2G_3}$

۳) $\dfrac{G_1G_2G_5+G_1G_6}{1+G_1G_3+G_1G_2G_4}$

۴) $\dfrac{G_1G_2G_5+G_1G_6}{1-G_1G_3-G_1G_2G_4}$

با استفاده از دستور میسون

$$\frac{Y(S)}{X(S)}=\frac{G_1\left(G_2G_5+G_6\right)}{1-G_1\left(G_3+G_2G_4\right)}$$

$$\frac{Y(S)}{X(S)}=\frac{G_1G_2G_5+G_1G_6}{1-G_1G_3-G_1G_2G_4}$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۴

معادلات حالت سیستم پیوسته خطی به شکل زیر است. تابع تبدیل سیستم عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix}-4&0&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix} \;,\; B=\begin{bmatrix}5\\0\\2\\7\end{bmatrix} \;,\; C=\begin{bmatrix}1&1&1&0\end{bmatrix} \;,\; D=0$$

۱) $G(S)=\dfrac{1}{S+4}+\dfrac{1}{S+3}$

۲) $G(S)=\dfrac{5}{S+4}+\dfrac{2}{S+2}$

۳) $G(S)=\dfrac{7}{S+3}+\dfrac{2}{S+4}$

۴) $G(S)=\dfrac{5}{S+7}+\dfrac{4}{S+2}$

مطابق مطالب ارائه شده در جزوه با داشتن معادلات حالت یک سیستم، تابع تبدیل از روابط زیر به‌دست می‌آید.

$$\dot{X}=AX+BU$$

$$Y=CX+DU$$

$$\text{تابع انتقال}=G(S)=\frac{Y(S)}{U(S)}=C(SI-A)^{-1}B+D$$

$$G(S)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}S & 0 & 0 & 0\\ 0 & S & 0 & 0\\ 0 & 0 & S & 0\\ 0 & 0 & 0 & S\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}5\\0\\2\\7\end{bmatrix}+0$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S+4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & S+3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & S+2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\0\\2\\7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{S+4} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{S+3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{S+2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{S+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\0\\2\\7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{S+4} & \frac{1}{S+3} & \frac{1}{S+2} & \frac{1}{S+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\0\\2\\7\end{bmatrix}=\frac{5}{S+4}+\frac{2}{S+2}$$

$$G(S)=\frac{5}{S+4}+\frac{2}{S+2}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست: مهندسی هوافضا ـ سال ۸۰

معادلات حرکت یک هواپیما به صورت فضای حالت داده شده است.

$$\dot{x}=Ax+Bu$$
$$y=Cx+Du$$

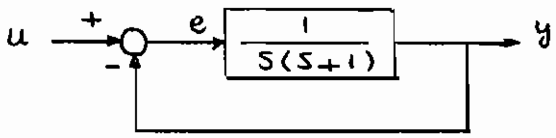
ماتریس تبدیل بین ورودی و خروجی عبارت است از:

۱) $C(SI-A)^{-1}B$ ۲) $B(SI-A)^{-1}C$ ۳) $B(SI-A)^{-1}C+D$ ۴) $C(SI-A)^{-1}B+D$

مطابق مطالب ارائه شده در این فصل و مشابه تست قبل گزینه ۴ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۳

اگر برای سیستم کنترلی زیر متغیرهای حالت $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$ فرض شود، معادلات دینامیکی (معادلات حالت و خروجی) عبارت‌اند از:



۱) $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

$$\frac{Y(S)}{U(S)}=\frac{G(S)}{1+G(S)H(S)}=\frac{\frac{1}{S(S+1)}}{1+\frac{1}{S(S+1)}}=\frac{1}{S^2+S+1}$$

$$U(S)=S^2Y(S)+SY(S)+Y(S)$$

$$u(t)=\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+y(t)$$

$$\begin{cases}x_1=y\\ x_2=\dot{y}\end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق}} \begin{cases}\dot{y}=\dot{x}_1=x_2\\ \ddot{y}=\dot{x}_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_2=\ddot{y}=u-\dot{y}-y=u-x_2-x_1\\ \dot{x}_1=x_2\end{cases}$$

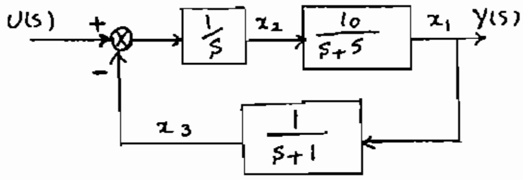
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست: اگر x_1 و x_2 و x_3 متغیرهای حالت سیستم و y خروجی سیستم نشان داده شده در شکل انتخاب شوند، ماتریس‌های حالت سیستم عبارتند از:

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$$



۱) $A=\begin{bmatrix}-5 & 10 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

۲) $A=\begin{bmatrix}-5 & 10 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix}-5 & 10 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

۴) $A=\begin{bmatrix}5 & -10 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

با توجه به دیاگرام جعبه‌ای:

$$\begin{cases} x_2\left(\dfrac{10}{s+5}\right)=x_1 \\ x_1\left(\dfrac{1}{s+1}\right)=x_3 \\ (u-x_3)\dfrac{1}{s}=x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1+5x_1=10x_2 \\ \dot{x}_3+x_3=x_1 \\ u-x_3=\dot{x}_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 10 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}[u]$$

$$y=x_1\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}$$

گزینه ۱ صحیح است.

فصل چهارم

پاسخ زمانی سیستم‌های کنترل

۱ـ سیستم‌های خطی مرتبه اول

اگر خروجی سیستم با یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به ورودی آن مربوط شود سیستم را مرتبه اول می‌گویند. تابع تبدیل یک سیستم مرتبه اول دارای فرم استاندارد $\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{K}{\tau S+1}$ است. K بهره حالت پایدار یا ضریب تقویت سیستم است که در ادامه برای راحتی کار آن را یک در نظر می‌گیریم.

می‌خواهیم پاسخ یک سیستم مرتبه اول خطی را در اثر اعمال ورودی‌های مختلف در حوزه زمانی به‌دست آوریم. برای روشن‌تر شدن روش کار با یک مثال شروع می‌کنیم.

مثال : فرض کنید تابع تبدیل سیستمی به شکل زیر باشد. پاسخ زمانی این سیستم به ازای ورودی پله واحد را به‌دست آورید.

$$R(S) \longrightarrow \boxed{\frac{S+2}{S+5}} \longrightarrow C(S) \qquad G(S)=\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{S+2}{S+5}$$

$$\text{ورودی پله واحد}\quad r(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases} \Rightarrow R(S)=\frac{1}{S}$$

$$C(S)=G(S)R(S)\Rightarrow C(S)=\frac{1}{S}\frac{S+2}{S+5}=\frac{S+2}{S(S+5)}=\frac{A}{S}+\frac{B}{S+5}$$

$$A=\left.\frac{S+2}{S+5}\right|_{S=0}=\frac{2}{5}$$

$$B=\left.\frac{S+2}{S}\right|_{S=-5}=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow C(S)=\frac{\frac{2}{5}}{S}+\frac{\frac{3}{5}}{S+5}$$

$$c(t)=L^{-1}\{C(s)\}=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}e^{-5t}$$

$\frac{2}{5}$ پاسخ ماندگار سیستم به ورودی پله واحد است که به زمان بستگی ندارد.

$\frac{3}{5}e^{-5t}$ پاسخ‌گذرای این سیستم به ورودی پله واحد است که با میل کردن زمان به سمت بی‌نهایت این پاسخ به سمت صفر میل می‌کند.

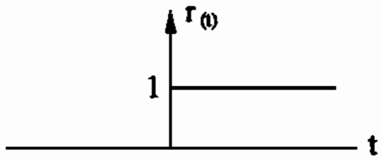
$t \to \infty: \ e^{-5t} \to 0$

سیستم فوق یک سیستم مرتبه اول نبود و هدف از این مثال روشن شدن پاسخ زمانی یک سیستم کنترل دلخواه بود که می‌تواند شامل دو ترم پاسخ ماندگار مستقل از زمان و پاسخ گذرای وابسته به زمان باشد.

الف) پاسخ زمانی سیستم مرتبه اول به ورودی پله واحد

شکل متعارف تابع تبدیل مرتبه یک به صورت $G(S)=\frac{1}{\tau s+1}$ می‌باشد.

در حالت کلی‌تر می‌توان ورودی را تابع پله (و نه لزوماً پله واحد) در نظر گرفت.

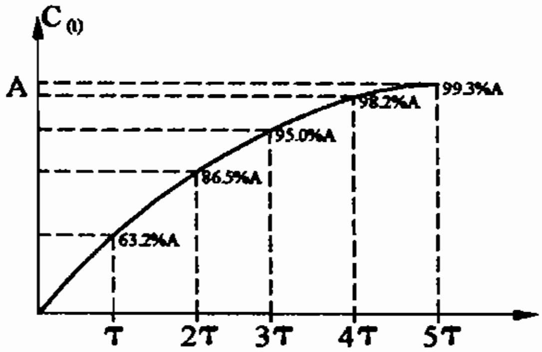


$$r(t)=\begin{cases}A & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases} \to R(S)=\frac{A}{S}$$

$$G(S)=\frac{C(S)}{R(S)} \Rightarrow C(S)=G(S)R(S)=\frac{A}{S}\,\frac{1}{\tau S+1}=\frac{A}{S(\tau S+1)}$$

$$C(S)=\frac{\alpha}{S}+\frac{\beta}{\tau S+1}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \left.\frac{A}{\tau S+1}\right|_{S=0}=A\\ \beta &= \left.\frac{A}{S}\right|_{S=\frac{-1}{\tau}}=-A\tau\end{aligned}\right\} \Rightarrow C(S)=A\left[\frac{1}{S}-\frac{\tau}{\tau S+1}\right]$$



$$C(S)=A\left[\frac{1}{S}-\frac{1}{S+\frac{1}{\tau}}\right] \Rightarrow c(t)=L^{-1}\{C(S)\}=A\left[1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right],\ t\ge 0$$

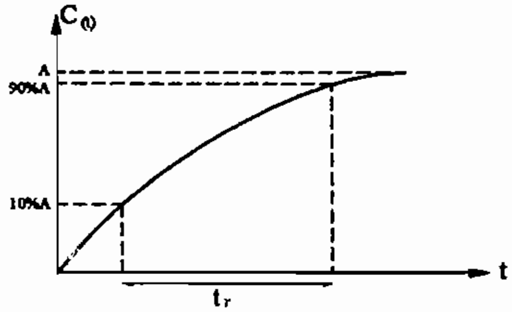
تقریباً بعد از 4τ ثانیه پاسخ سیستم به مقدار نهایی خود نزدیک شده است.

مشخصات عملکرد سیستم‌های مرتبه اول

τ**: ثابت زمانی،** مدت زمانی است که طول می‌کشد تا پاسخ سیستم به تابع پله به 63.2% مقدار نهایی خـود برسـد. هـر چـه ثابت زمانی یک سیستم کنترل کمتر باشد، پاسخ سیستم سریع‌تر است و بالعکس.

4τ**: زمان نشست** (Settling time)، مدت زمانی است که طول می‌کشد پاسخ سیستم به محدوده ±2% مقدار نهایی خود برسـد و در آن محدوده باقی بماند.

t_r: **زمان برخاست،** زمانی است که پاسخ سیستم از 10% مقدار نهایی به 90% مقدار نهایی خود می‌رسد (زمان برخاست نشان می‌دهد که سرعت پاسخ سیستم به ورودی چقدر است).



اگر قطب سیستم در صفر باشد مانند سیستمی با تابع تبدیل $G(S)=\frac{1}{\tau S}$ سیستم در حالت پایداری بحرانی می‌باشد.

$$\frac{1}{S} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\tau S}} \longrightarrow \frac{1}{\tau S^2}$$

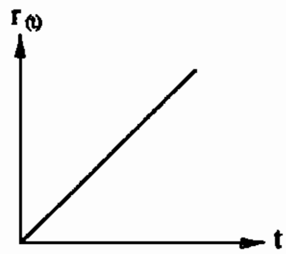
$$c(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{\tau S^2}\right\}=\frac{t}{\tau} \quad , \quad t\geq 0$$

همیشه محل مطلوب قطب‌ها سمت چپ محور موهومی است.

هر چه قطب S دورتر از مبدا باشد یا به‌عبارتی دورتر از محور $j\omega$ باشد یعنی τ کوچکتر باشد $\left(S=-\frac{1}{\tau}\right)$ زمان نشست کوچکتر خواهد بود و پاسخ سیستم سریع‌تر می‌شود و هر چه قطب به مبدأ نزدیک‌تر باشد زمان نشست بزرگتر و سیستم کندتر پاسخ خواهد داد.

ب) پاسخ زمانی سیستم مرتبه اول به ورودی شیب واحد

$$R(S) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\tau S+1}} \longrightarrow C(S)$$



$$G(S)=\frac{1}{\tau S+1}=\frac{C(S)}{R(S)}$$

$$r(t)=\begin{cases} t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \Rightarrow R(S)=\frac{1}{S^2}$$

$$C(S)=R(S)G(S)=\frac{1}{S^2}\frac{1}{\tau S+1}=\frac{1}{S^2(\tau S+1)}=\frac{A}{S}+\frac{B}{S^2}+\frac{C}{\tau S+1}$$

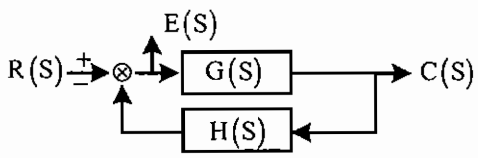
$$c(t)=L^{-1}\{C(S)\}=\tau\left[\frac{t}{\tau}-1+e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

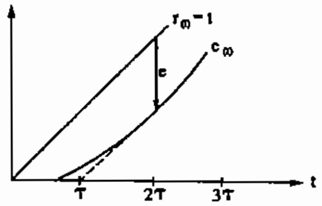
خطای سیستم $e(t)=r(t)-c(t)$

$$e(t)=t-t+\tau-\tau e^{\frac{-t}{\tau}}=\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty} e(t)=\tau$$

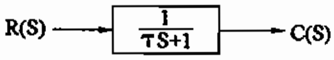
خطای حالت ماندگار یعنی اختلاف در ورودی و خروجی سیستم هنگامی که زمان به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. درحالت کلی سیگنال خطا به صورت زیر تعریف می‌شود:

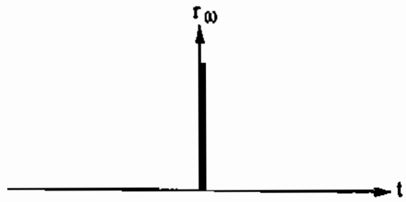




بنابراین خطای حالت ماندگار سیستم مرتبه اول به ورودی شیب واحد برابر τ (ثابت زمانی سیستم) است.

ج) پاسخ زمانی سیستم مرتبه اول به ورودی ضربه واحد





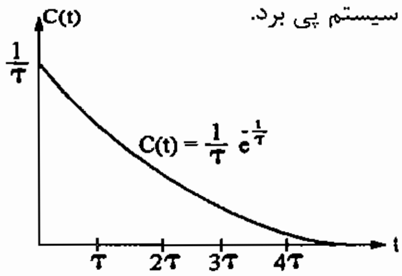
$r(t)=\delta(t)=$ ضربه واحد $\longrightarrow R(S)=1$

$$G(S)=\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{1}{\tau S+1}$$

$$C(S)=R(S)G(S)=\frac{1}{\tau S+1}=G(S)$$

یعنی دینامیکی که در پاسخ سیستم می‌بینیم همان دینامیکی است که در خود سیستم داشته‌ایم. یعنی از روی پاسخ دینامیکی می‌توان به مشخصات سیستم پی برد.

$$c(t)=L^{-1}\{C(S)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{\tau S+1}\right\}=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$



همان‌طور که در جدول مقابل مشاهده می‌نمایید پاسخ سیستم مرتبه اول به پله واحد، مشتق پاسخ سیستم مرتبه اول به شیب واحد است. همچنین پاسخ سیستم مرتبه اول به ضربه واحد، مشتق پاسخ سیستم مرتبه اول به پله واحد است.

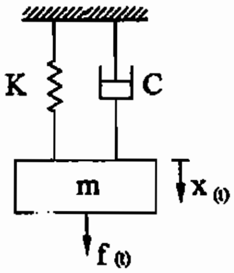
خروجی (سیستم مرتبه یک)	ورودی
$c(t)=\frac{1}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}$	ضربه واحد : $r(t)=\delta(t)\ ,\ R(s)=1$
$\frac{d}{dt}\uparrow$	
$c(t)=1-e^{\frac{-t}{\tau}}$	پله واحد : $r(t)=1\ ,\ t\ge 0, R(S)=\frac{1}{S}$
$\frac{d}{dt}\uparrow$	
$c(t)=\tau\left(\frac{t}{\tau}-1+e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$	شیب واحد : $r(t)=t\ ,\ t\ge 0, R(S)=\frac{1}{S^2}$

$$\frac{d}{dt}c(t)_{\text{شیب واحد}}=c(t)_{\text{پله واحد}}$$

$$\frac{d}{dt}c(t)_{\text{پله واحد}}=c(t)_{\text{ضربه واحد}}$$

۲ـ سیستم‌های خطی مرتبه دوم

سیستم شکل روبه‌رو مشابه یک سیستم کنترل مرتبه دوم است که در آن خروجی سیستم توسط یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بـه ورودی آن مرتبط می‌شود.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

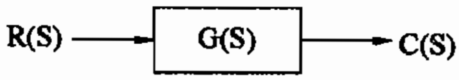
$$G(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{1}{mS^2 + cS + k}$$

شکل متعارف تابع تبدیل حلقه باز سیستم مرتبه دو عبارت است از :

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{\omega_n^2}{S(S+2\xi\omega_n)}$$

و شکل متعارف تابع تبدیل حلقه بسته سیستم‌های مرتبه دو عبارت است از:

$$G(S) = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2}$$



معادله مشخصه $A(S) = S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2$

الف : پاسخ زمانی سیستم‌های مرتبه دو به ورودی پله واحد

$$r(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Rightarrow R(S) = \frac{1}{S}$$

در اینجا ورودی می‌تواند یک نیروی واحد باشد که به سیستم وارد می‌شود.

$$C(S) = G(s).R(s) = \frac{\omega_n^2}{(S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2)S}$$

$$c(t) = L^{-1}\{C(s)\}$$

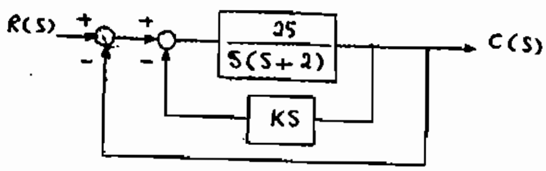
$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_d t - \tan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

که در آن ω_n فرکانس طبیعی نامیرا، ω_d فرکانس طبیعی میرا و ξ نسبت میرایی است.

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۴

برای سیستم نشان داده شده در شکل زیر، مقدار K را به گونه‌ای تعیین کنید که ضریب استهلاک سیستم 0.5 باشد.



۱) $K=0.12$

۲) $K=0.54$

۳) $K=1$

۴) $K=1.5$

ابتدا تابع تبدیل سیستم نشان داده شده را به‌دست می‌آوریم و آن را با فرم استاندارد تابع تبدیل سیستم مرتبه دو مقایسه می‌کنیم، با استفاده از دستور میسون :

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{\frac{25}{S(S+2)}}{1-\frac{-25}{S(S+2)}KS-\frac{-25}{S(S+2)}}$$

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{25}{S^2+(25K+2)S+25}$$

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{\omega_n^2}{S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_n^2=25 \ , \ 2\xi\omega_n=25K+2$$

$$\Rightarrow \quad \omega_n=5$$

$$2(0.5)5=25K+2 \quad \Rightarrow \quad K=0.12$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۴

معادله دیفرانسیل مربوط به عملکرد یک سیستم به قرار زیر است. پاسخ $y(t)$ سیستم برای حالتی که $F(t)=u(t)$ یک تابع پله‌ای واحد بوده و تمام شرایط اولیه صفر باشند کدام است؟

$$Y(D)=\frac{12(D+1)}{(D+3)(D+4)}F(D)$$

۱) $y(t)=3+e^{-t}-2e^{-2t}$

۲) $y(t)=10+e^{-4t}-5e^{-6t}$

۳) $y(t)=2e^{5t}-5e^{-2t}$

۴) $y(t)=1+8e^{-3t}-9e^{-4t}$

از آن‌جا که مخرج تابع تبدیل سیستم دارای دو ریشه حقیقی و مجزای $-4,-3$ است و این ریشه‌ها به نوعی همان مقادیر ویژه معادله مشخصه سیستم هستند باید جملات e^{-3t} , e^{-4t} در پاسخ زمانی سیستم وجود داشته باشند. اگر گزینه‌ها پیچیده‌تر باشند، ناگزیر از حل کامل مسئله هستیم.

$$\frac{Y(S)}{F(S)}=\frac{12(S+1)}{(S+3)(S+4)} \quad , \quad F(S)=\frac{1}{S}$$

$$Y(S)=\frac{12(S+1)}{S(S+3)(S+4)}$$

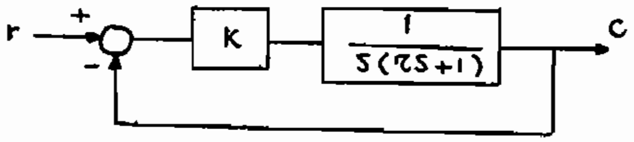
$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{12(S+1)}{S(S+3)(S+4)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{S}+\frac{8}{S+3}-\frac{9}{S+4}\right]$$

$$y(t)=1+8e^{-3t}-9e^{-4t}$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۶

سیستم فیدبک زیر را در نظر بگیرید به ازای کدام مقادیر τ, K ، پاسخ زمانی $c(t)$ به $r(t)$ ایمپالس واحد برابر $c(t)=\frac{5}{2}e^{-t}\sin 2t$ می‌شود؟



۱) $\tau=0.5 \quad , \quad K=2.5$

۲) $\tau=2 \quad , \quad K=2.5$

۳) $\tau=0.5 \quad , \quad K=5$

۴) $\tau=2 \quad , \quad K=5$

$$G(S)=\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{\frac{K}{S(\tau S+1)}}{1+\frac{K}{S(\tau S+1)}}=\frac{K}{S(\tau S+1)+K}=\frac{K}{\tau S^2+2S+K}$$

$$R(S)=1$$

$$C(S)=R(S)G(S)=\frac{K}{\tau S^2+S+K}$$

حال از پاسخ زمانی داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم و آن را با $C(S)$ به‌دست آمده در بالا مساوی قرار می‌دهیم.

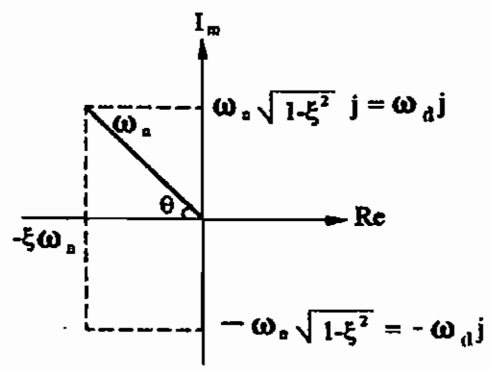
$$c(t)=\frac{2}{5}e^{-t}\sin 2t \quad \Rightarrow \quad C(S)=\frac{5}{2}\frac{2}{(S+1)^2+4}=\frac{5}{S^2+2S+5}$$

$$\frac{K}{\tau S^2+S+K}\equiv\frac{5}{S^2+2S+5} \quad \Rightarrow \quad K=2.5 \quad , \quad \tau=0.5$$

گزینه ۱ صحیح است.

ب ـ حالت‌های مختلف میرایی

۱ـ حالت فرومیرا (Underdamped Case) $0<\xi<1$



حالتی است که در آن معادله مشخصه سیستم دو ریشه مختلط مزدوج دارد:

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{\omega_n^2}{S^2+2\zeta\omega_n S+\omega_n^2}$$

معادله مشخصه $\Delta(S)=S^2+2\zeta\omega_n S+\omega_n^2=0 \rightarrow S_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

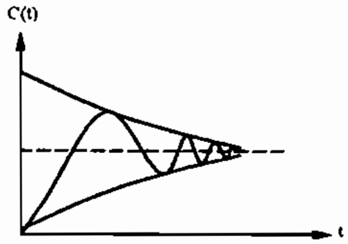
$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ فرکانس طبیعی میرا

$S_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$

با فرض ورودی پله واحد برای این سیستم مرتبه دو خواهیم داشت:

$$R(S) = \frac{1}{S}$$

$$C(S) = \frac{\omega_n^2}{\left(S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2\right)S} = \frac{1}{S} - \frac{S + 2\zeta\omega_n}{S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2}$$



$$C(S) = \frac{1}{S} - \frac{S+\zeta\omega_n}{(S+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(S+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{S}\right] = 1$$

$$L^{-1}\left\{\frac{S+\zeta\omega_n}{\left(S+\zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d^2}\right\} = e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{\omega_d}{\left(S+\zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d^2}\right\} = e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t$$

$$C(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

مشاهده می‌شود که پاسخ سیستم مرتبه دو به ورودی پله واحد در حالت فرومیرا به صورت تابعی نوسانی به همراه کاهش دامنه نوسان به‌صورت نمایی است.

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t + \theta\right)$$

$$C(\infty) = \lim_{t\to\infty} C(t) = \lim_{s\to 0} SC(S) = \lim_{s\to 0} S\frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2}\,\frac{1}{S} = 1$$

اگر در صورت تابع تبدیل در حالت استاندارد ω_n^2 داشتیم پاسخ ماندگار سیستم به سمت 1 میل می‌کند، در غیر این‌صورت، پاسخ ماندگار می‌تواند چیزی غیر از 1 باشد.

خطای سیستم $e(t)=r(t)-c(t)$

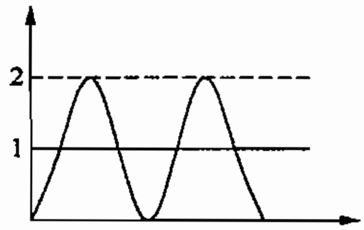
$$e(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)\qquad t\geq 0$$

$$e(\infty)=0$$

یعنی خطای سیستم با میل کردن زمان به سمت بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کند.

۲ـ حالت نامیرا $\xi=0$ (Undamped Case)

با مساوی صفر قرار دادن ζ دررابطه قبل پاسخ سیستم نامیرا به ازای ورودی پله واحد به‌دست خواهد آمد که این پاسخ به شکل نوسانی است.



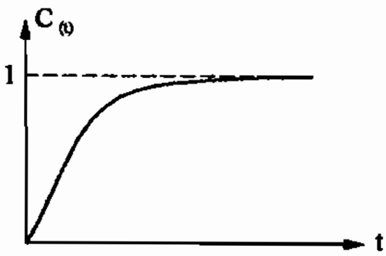
$$\zeta=0\Rightarrow c(t)=1-\cos\omega_n t\qquad t\geq 0$$

معادله مشخصه سیستم : $\Delta(S)=S^2+\omega_n^2=0\Rightarrow S=\pm j\omega_n$

$$|\cos\omega_n t|<1\Rightarrow 1<C(t)<2$$

۳ـ حالت میرایی بحرانی $\zeta=1$ (Critically Damped Case)

اگر دو قطب تابع تبدیل سیستم مرتبه دومی حقیقی و با هم برابر باشند سیستم اصطلاحاً در حالت میرایی بحرانی می‌باشد. پاسخ چنین سیستمی به ورودی پله واحد به‌صورت زیر خواهد بود.



$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{\omega_n^2}{S^2+2\omega_n S+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{(S+\omega_n)^2}$$

$$R(S)=\frac{1}{S}\rightarrow C(S)=\frac{\omega_n^2}{S(S+\omega_n)^2}$$

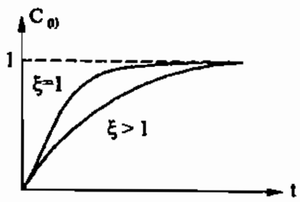
$$c(t)=L^{-1}\{C(S)\}=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)\qquad,\qquad t\geq 0$$

در این حالت پاسخ سیستم دیگر نوسانی نخواهد بود.

۴ـ حالت فوق‌میرا $\zeta>1$ (Overdamped Case)

در این حالت دو قطب تابع تبدیل سیستم مرتبه دو حقیقی، منفی و متفاوت هستند. پاسخ چنین سیستمی به ورودی پله واحد به شکل نمایی و غیرنوسانی است و با تقریب قابل قبولی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$c(t)=1-e^{-\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t}$$



ج ـ مشخصات عملکرد سیستم‌های مرتبه دو

عملکرد سیستم‌های کنترل را بر اساس پاسخ گذرای آن‌ها به ورودی پله واحد مشخص می‌کنند.

۱ـ زمان تأخیر t_d (Delay Time)

مدت زمانی است که طول می‌کشد تا پاسخ یک سیستم فرومیرا $(0<\xi<1)$ برای اولین بار به نصف مقدار نهایی‌اش برسد.

۲ـ زمان برخاست t_r (Rise Time)

مدت زمانی است که طول می‌کشد تا پاسخ سیستم از 10 درصد تا 90 درصد، از 5 درصد تا 95 درصد و یا از صفر تا صد درصد مقدار نهایی خود برسد. در مورد سیستم‌های مرتبه دوم فرومیرا معمولاً زمان برخاست صفر تا صد درصد و در سیستم‌های مرتبه دوم فوق میرا معمولاً زمان برخاست 10 تا 90 درصد در نظر گرفته می‌شود.

$$t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} \quad , \quad \beta = \tan^{-0}\frac{\sqrt{0-\xi^1}}{\xi} = \cos^{-0}\xi$$

۳ـ زمان اوج t_p (Peak Time)

مدت زمانی است که طول می‌کشد تا پاسخ یک سیستم فرومیرا برای اولین بار به مقدار حداکثر خود برسد.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{0-\xi^1}}$$

در این زمان $\frac{dc(t)}{dt}=0$ است.

۴ـ ماکزیمم فراجهش M_d (Maximum Overshoot)

حداکثر افزایش خروجی یک سیستم مرتبه دو نسبت به مقدار نهایی‌اش را ماکزیمم فراجهش می‌گویند که معمولاً بر حسب درصد بیان می‌گردد.

$$M_p = \frac{C_{max}-C_{final}}{C_{final}} = \frac{c(t_p)-c(\infty)}{c(\infty)}$$

در صورتی‌که ورودی پله واحد باشد:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

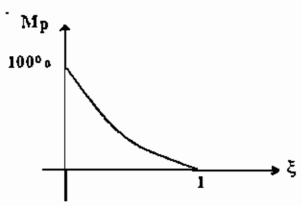
مقدار ماکزیمم فراجهش مستقیماً پایداری نسبی سیستم را نشان می‌دهد.

از نمودار تغییرات ماکزیمم فراجهش برحسب نسبت میرایی ξ می‌توان دریافت:

۱ـ به ازای $\xi=0$ مقدار ماکزیمم فراجهش 100% است.

۲ـ به ازای مقادیر $\xi>1$ مقدار ماکزیمم فراجهش صفر است.

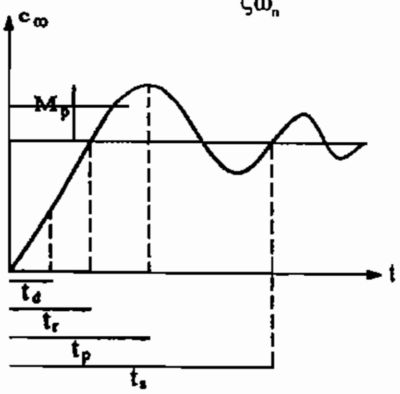
۳ـ به ازای مقادیر $0<\xi<1$ با افزایش ξ مقدار ماکزیمم فراجهش کاهش می‌یابد.



۵ـ زمان استقرار t_s (Settling Time)

مدت زمانی است که طول می‌کشد تا پاسخ یک سیستم مرتبه دوم فرومیرا به ورودی پله واحد وارد محدوده معینی حول مقدار نهـایی شود و در آن محدوده باقی بماند. این محدوده معمولاً 2 تا 5 درصد مقدار نهایی (و گاهی ±1 درصد آن) است.

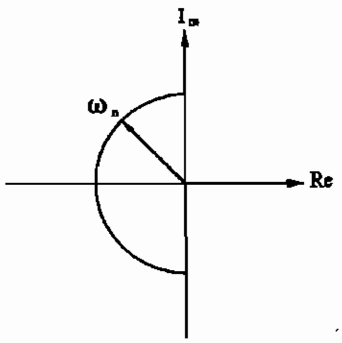
تلورانس ±5%	تلورانس ±2%	تلورانس ±1%
$T_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$	$T_S = \frac{4}{\zeta\omega_n}$	$T_S = \frac{4.8}{\zeta\omega_n}$



هر چه قطب‌ها به سمت منفی می‌روند سیستم پایدارتر می‌شود، میرایی سیستم افزایش می‌یابد و در نتیجه :

۱ـ ماکزیمم فراجهش سیستم کاهش می‌یابد.

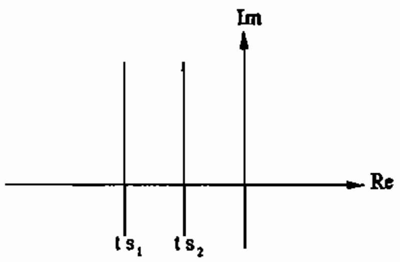
۲ـ زمان استقرار کاهش می‌یابد (چون $\zeta\omega_n$ افزایش یافته و t_s نسبت عکس با $\zeta\omega_n$ دارد).



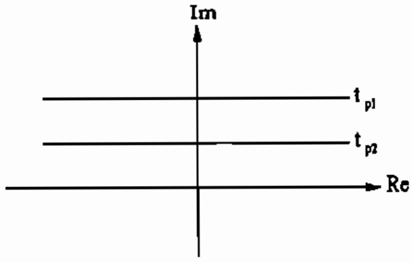
۳ـ زمان اوج کاهش می‌یابد.

مکان هندسی قطب‌هایی که فرکانس طبیعی همه یکسان باشد فرکانس طبیعی معین داشته باشند) یک نیم دایره است.

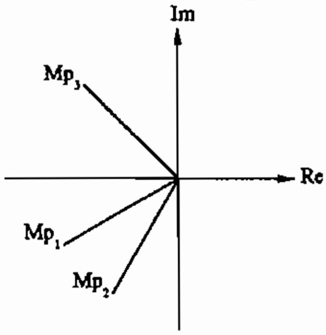
مکان هندسی قطب‌هایی که زمان استقرار همه یکسان باشد خطـوطی به موازات محور I_m هستند.



مکان هندسی قطب‌هایی که مکان و زمان اوج یکسان دارند خطوطی به موازات محور حقیقی Re است.

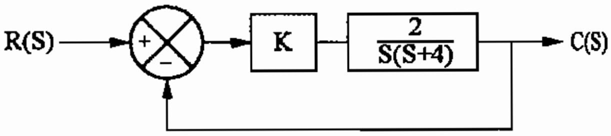


مکان هندسی قطب‌هایی که ماکزیمم فراجهش یکسان داشته باشند خطوطی با زوایای ثابت نسبت به محور حقیقی است.



تست : مهندسی برق ـ سال ۷۹

در سیستم کنترل شکل زیر هیچ‌گونه فراجهشی مجاز نیست. پارامتر k چنان تعیین شده است که سریعترین پاسخ ممکن حاصل شود. زمان استقرار این سیستم کدام است؟



۱) 4
۲) 2
۳) 1
۴) $\frac{1}{2}$

$$C(S)=\frac{\frac{2k}{s(s+4)}}{1+\frac{2k}{s(s+4)}}=\frac{2k}{s^2+4s+2k}$$

$$\omega_n^2=2k \Rightarrow \omega_n=\sqrt{2k}$$

چون فراجهشی مجاز نیست. میرایی سیستم بزرگتر یا مساوی یک است. چون سریع‌ترین پاسخ ممکن حاصل شده است، میرایی سیستم یک است.

$$2\zeta\omega_n=4 \to \zeta\omega_n=2$$

$$\zeta=1 \to 2\zeta\omega_n=4 \to 2\omega_n=4 \to \omega_n=2 \to \omega_n^2=4$$

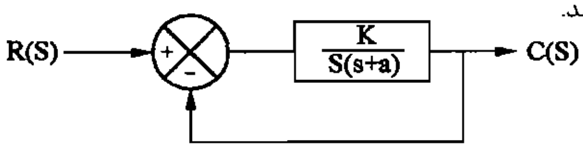
$$\omega_n^2=2k \Rightarrow k=2$$

$t_s=\frac{3}{\zeta\omega_n}=\frac{3}{0\times 1}=1$ (منظورش زمان استقرار با محدوده $\pm2\%$ بوده است)

گزینه ۲ صحیح است.

مثال :

در سیستم کنترل زیر پارامترهای a,k را چنان تعیین کنید که درصد فراجهش به ازای تغییر پله‌ای در ورودی از 10% تجاوز نکند و زمان استقرار در محدودهٔ ±5% کمتر از 1s باشد.



$$(\%5)\,t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{k}{S^2 + aS + k} \qquad M_p = 10\%$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} < 1 \Rightarrow \zeta\omega_n > 3$$

$$M_p < 10\% \Rightarrow e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} < 0.1$$

$$e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.1 \Rightarrow \zeta = 0.59 \cong \zeta \geq 0.6$$

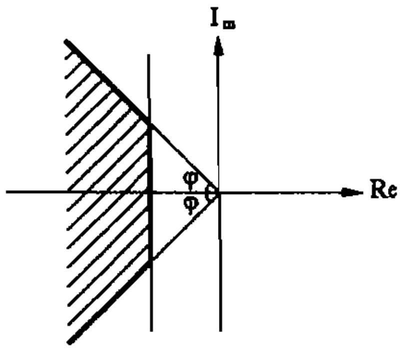
هر چه میرایی بیشتر شود M_p کمتر می‌شود.

$$\phi = \cos^{-1}\zeta = \cos^{-1}0.6$$

$$\begin{cases} \zeta = 0.6 \\ \zeta\omega_n = 3 \end{cases} \Rightarrow \omega_n = \frac{3}{0.6} = 5\frac{rad}{s}$$

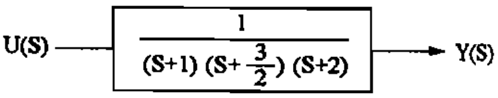
$$2\zeta\omega_n = a \Rightarrow a = 6$$

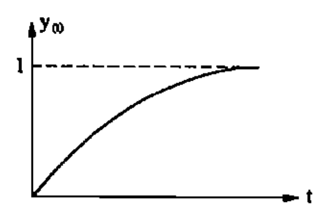
$$\omega_n^2 = k \Rightarrow \left(\frac{3}{0.6}\right)^2 = k \Rightarrow k = 25$$

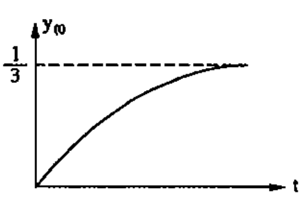


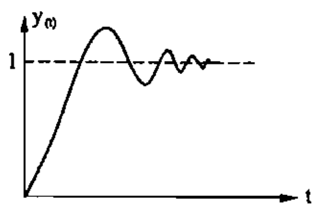
تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۰

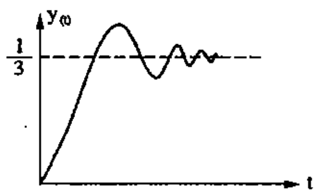
کدام یک از چهار پاسخ زیر نمایش تقریبی عکس‌العمل y(t) سیستم شکل زیر نسبت به ورودی u(t) (تابع پله‌ای واحد) است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

سیستم سه تا قطب دارد که هر سه قطب‌های حقیقی منفی هستند و هر قطب حقیقی منفی پاسخ نمایی ایجاد می‌کند. پس هیچ کدام از پاسخ‌های نوسانی درست نیست چون پاسخ نوسانی بر اساس قطب مثبت به‌دست می‌آید. گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{Y(S)}{U(S)}=\frac{1}{(S+1)\left(S+\frac{3}{2}\right)(S+2)}$$

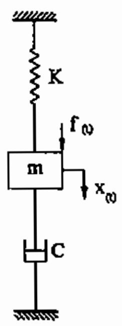
$$U(S)=\frac{1}{S}$$

$$Y(S)=\frac{1}{S(S+1)\left(S+\frac{3}{2}\right)(S+2)}$$

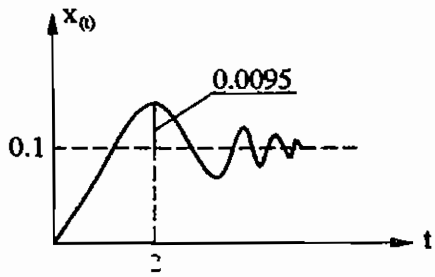
$$y(\infty)=\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to 0}SY(S)$$

$$=\lim_{s\to 0}S\frac{1}{s(s+1)\left(s+\frac{3}{2}\right)(s+2)}=\frac{1}{3}$$

مثال: سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل الف در اثر اعمال یک نیروی 2 نیوتنی به صورت پله‌ای مطابق شکل «ب» نوسان می‌کند. تابع تبدیل تقریبی این سیستم را تعیین کنید.



(الف)



(ب)

$$m\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=f(t)$$

$$G(S)=\frac{X(S)}{F(S)}=\frac{0}{mS^{1}+CS+K}=\frac{\frac{0}{m}}{S^{1}+\frac{C}{m}S+\frac{K}{m}}$$

$$2\zeta\omega_n=\frac{C}{m}$$

$$\omega_n^2=\frac{K}{m}$$

$$M_p=\frac{C_{max}-C_{final}}{C_{final}}=\frac{0.0095}{0.1}=0.095=9.5\%$$

$$M_P=0.095=e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\Rightarrow\zeta\cong 0.6$$

زمان اولین اوج $t_P=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=2\Rightarrow\omega_n=1.96\frac{rad}{s}$

مقدار نهایی را نسبت به یک ورودی پله حساب می‌کنیم:

$$F(S)=\frac{2}{S}\to X(S)=\frac{2}{S\left(mS^2+cS+k\right)}$$

$$\Rightarrow\ /.0 = X(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to /} SX(S) = \frac{1}{k} \Rightarrow k = 1/\ \frac{N}{m}$$

$$\Rightarrow m = \frac{k}{\omega_n^2} = 5.2\text{kg}$$

$$C = 2\zeta\omega_n.m = 12.2\frac{N.S}{m}$$

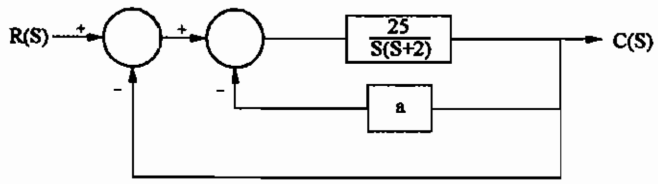
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \Rightarrow 5.2\ddot{x} + 12.2\dot{x} + 20x = f(t)$$

$$5.2S^2 \times (S) + 12.2S \times (S) + 20 \times (S) = F(S)$$

$$\frac{X(S)}{F(S)} = \frac{1}{5.2S^2 + 12.2S + 20}$$

تست: مهندسی برق ـ سال ۷۶

در سیستم کنترل مدار بسته شکل زیر، مقدار a چقدر باشد تا قطب‌های سیستم مدار بسته دارای نسبت میرایی $\zeta = 0.6$ باشند.



۱) 0.88
۲) 0.12
۳) 0.16
۴) 0.25

$$G(S) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{\frac{25}{S(S+2)}}{1 - \frac{25a}{S(S+2)} + \frac{25}{S(S+2)}} = \frac{25}{S(S+2) + 25(1-a)}$$

$$G(S) = \frac{25}{S^2 + 2S + 25(1-a)} \to \begin{cases} 2\zeta\omega_n = 2 \\ \zeta = 0.6 \end{cases} \to \omega_n = \frac{5}{3}$$

$$\omega_n^2 = 25(1-a) \to \frac{25}{9} = 25(1-a) \to a = \frac{8}{9} = 0.88$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست:

اگر توابع تبدیل دو سیستم کنترل به صورت $G_1(S) = \frac{10}{3S^2 + 45 + 5}, G_2(S) = \frac{12}{3S^2 + 3S + 6}$، باشد کدام سیستم نسبت به یک ورودی پله‌ای، زمان برخاست (rise time) کمتری دارد؟

۱) G_1
۲) G_2
۳) زمان برخاست دو سیستم مساوی است.
۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

$$G_1(S) = \frac{10}{3S^2 + 4S + 5} = 2\frac{\frac{5}{3}}{S^2 + \frac{4}{3}S + \frac{5}{3}} = 2\frac{\omega_{n_1}^2}{S^2 + 2\zeta_1\omega_{n_1}S + \omega_{n_1}^2}$$

$$\frac{4}{3} = 2\zeta_1\omega_{n_1}$$

$$\frac{5}{3} = \omega_{n_1}^2 \to \omega_{n_1} = \sqrt{\frac{5}{3}} \to \zeta_1 = 0.56$$

$$G_2(S)=\frac{12}{3S^2+3S+6}=2\frac{2}{S^2+S+2}$$

$$1=2\zeta_2\omega_{n_2}$$

$$2=\omega_{n_2}^2 \to \omega_{n_2}=\sqrt{2} \to \zeta_2=0.35$$

$$t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}=\frac{\pi-\beta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad ,\beta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

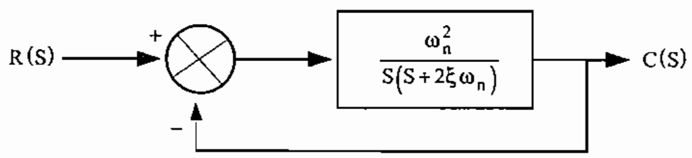
$$t_{r_1}=83.7 \quad , \quad t_{r_2}=109.5 \to t_{r_2}>t_{r_1}$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست: مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۴

نمودار بلوکی سیستمی در شکل زیر داده شده است. زمان برخاست (rise time) این سیستم چقدر است؟

فرکانس طبیعی این سیستم 10 و نسبت میرایی آن $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.



۱) $t_r=0.184$

۲) $t_r=0.333$

۳) $t_r=0.435$

۴) $t_r=0.492$

$$t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}=\frac{\pi-\beta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad , \quad \beta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

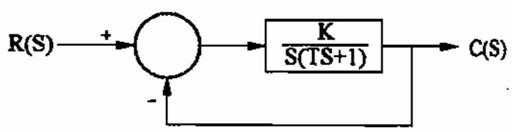
$$\beta=\tan^{-1}1=45^\circ=\frac{\pi}{4}$$

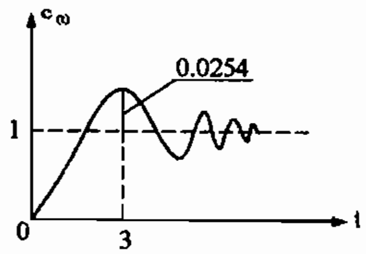
$$t_r=\frac{\pi-\frac{\pi}{4}}{10\sqrt{1-\frac{1}{2}}}=0.333$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست:

سیستم زیر تحت ورودی پله واحد قرار گرفته و خروجی آن به صورت نمودار زیر است. با توجه به نمودار زیر مقادیر T , K کدام است؟





۱) $K=1.42$, $T=1.42$

۲) $K=1.09$, $T=1.09$

۳) $K=1.42$, $T=1.09$

۴) $K=1.09$, $T=1.42$

$$M_p = \exp\left[\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right] = 0.254 \rightarrow \zeta = 0.4$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-(0.4)^2}} = 3 \rightarrow \omega_n = 1.14$$

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{K}{S(TS+1)+K} = \frac{K}{TS^2+S+K} = \frac{\frac{K}{T}}{S^2+\frac{1}{T}S+\frac{K}{T}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} \rightarrow K = T\omega_n^2 = 1.09(1.14)^2 = 1.42$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{1}{T} \rightarrow T = \frac{1}{2\zeta\omega_n} = \frac{1}{2(0.4)(1.14)} = 1.09$$

گزینه ۳ صحیح است.

تاثیر اضافه کردن قطب و صفر به پاسخ سیستم‌های مرتبه ۲ در برابر ورودی پله واحد

با اضافه کردن یک قطب به تابع تبدیل حلقه باز:

۱ـ ماکزیمم فراجهش سیستم افزایش می‌یابد.

۲ـ زمان خیز افزایش می‌یابد.

۳ـ پهنای باند سیستم کاهش می‌یابد.

با اضافه کردن یک قطب به تابع تبدیل حلقه بسته ماکزیمم فراجهش کاهش می‌یابد، و زمان برخاست به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. این در صورتی است که قطب اضافی در سمت چپ محور موهومی صفحه S قرار گرفته باشد و در فاصله‌ای دورتر از 4 برابر قسمت حقیقی قطب‌های مختلط قرار نداشته باشد.

اضافه کردن قطب در سمت راست محور موهومی عامل ناپایداری است و سیستم را ناپایدار می‌کند.

با اضافه کردن یک صفر به تابع تبدیل حلقه باز میرایی سیستم بهبود یافته و ماکزیمم فراجهش کاهش می‌یابد.

با اضافه کردن یک صفر به تابع تبدیل حلقه بسته:

۱ـ در صورتی که صفر در نیم صفحه چپ صفحه S باشد، ماکزیمم فراجهش افزایش و زمان برخاست کاهش می‌یابد.

۲ـ در صورتی که صفر در نیم صفحه راست صفحه S باشد، ماکزیمم فراجهش کاهش خواهد یافت.

تست : مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۴

هنگامی‌که مقدار استهلاک (ξ) یک سیستم درجه 2 کاهش یابد چه تغییری در پاسخ آن سیستم به ورودی پله‌ای حاصل می‌گردد؟ مقدار حداکثر جهش .... می‌یابد و پاسخ سیستم .... می‌شود.

۱) افزایش ، سریع‌تر   ۲) افزایش ، کندتر

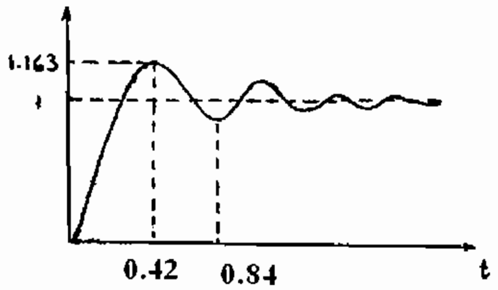
۳) کاهش ، سریع‌تر   ۴)کاهش ، تندتر

هر چه مقدار استهلاک کمتر شود، سیستم به حالت نوسانی نزدیک‌تر می‌شود و مقدار حداکثر جهش افزایش می‌یابد و پاسخ سیستم تندتر می‌گردد.

گزینه ۱ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۶۹

در صورتی‌که پاسخ پله واحد یک سیستم حلقه بسته درجه دو با فیدبک واحد به‌صورت زیر باشد، محل قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز این سیستم عبارت است از:



۱) $S_1=0\ ,\ S_2=-4.32$

۲) $S_{1,2}=-4.32\pm j7.5$

۳) $S_1=0\ ,\ S_2=-8.64$

۴) $S_1=-4.32\ ,\ S_2=8.64$

$$M_p=1.163-1=0.163$$

$$t_p=0.42=\frac{\pi}{\omega_d}$$

$$M_p=e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \xi=0.497 \quad 0.5$$

$$\omega_d=\frac{\pi}{t_p}=\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \frac{\pi}{0.42}=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=\omega_n\sqrt{1-0.25} \Rightarrow \omega_n=8.64$$

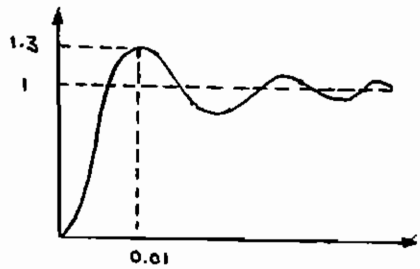
در یک سیستم درجه دو استاندارد با فیدبک واحد :

$$S_1=0\ ,\ S_2=-2\xi\omega_n=-2(0.5)(8.64)=-8.64$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۷۷

پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دومی در شکل زیر داده شده است. تابع تبدیل تقریبی این سیستم کدام گزینه است؟



۱) $\frac{240}{S^2+1365+240}$

۲) $\frac{(240)^2}{S^2+1365+(240)^2}$

۴) $\frac{336}{S^2+240S+336}$

۴) $\frac{(336)^2}{S^2+240S+(336)^2}$

$$M_p=1.3-1=0.3=e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \xi=0.356$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=0.01 \Rightarrow \omega_n=336$$

$$2\xi\omega_n=2(0.356)(336)=239.2 \quad 240$$

$$G(S)=\frac{\omega_n^2}{S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^2}=\frac{(336)^2}{S^2+240S+(336)^2}$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۸

پاسخ سیستم‌های با تابع تبدیل

$$G_1(S)=\frac{1}{S^2+\frac{1}{2}S+1}$$

به ورودی پله دارای جهش 15% و زمان نشست تقریبی 6 ثانیه با معیار % 2 است. در این صورت برای پاسخ سیستم $G_2(S)=\frac{(25+1)}{S^2+\frac{1}{2}+1}$ به ورودی پله‌ای می‌توان گفت:

۱) دارای جهش کمتر از % 10 و زمان نشست کمتر از 6 ثانیه است.

۲) دارای جهش بیشتر از % 10 و زمان نشست بیشتر از 6 ثانیه است.

۳) دارای جهش بیشتر از % 10 و زمان نشست 6 ثانیه است.

۴) دارای جهش بیشتر از % 10 و زمان نشست کمتر از 6 ثانیه است.

یک صفر به تابع تبدیل حلقه بسته اضافه شده است که در نیمه چپ صفحه S قرار دارد $\left(S=-\frac{1}{2}\right)$. با اضافه شدن این صفر ماکزیمم فراجهش افزایش و زمان نشست کاهش می‌یابد. گزینه ۴ صحیح است.

تست : مهندسی هسته‌ای ـ برق ۸۰

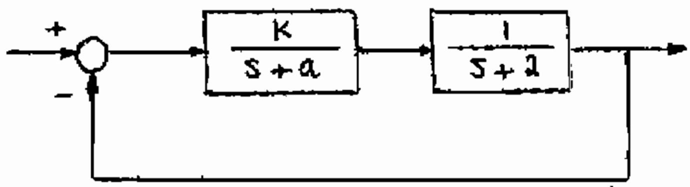
در سیستم کنترل شکل زیر مقادیر a , K چگونه باید انتخاب شوند تا زمان مستقر شدن 2 درصدی کمتر از یک ثانیه بوده و حداکثر فراجهش (Over Shoot) کمتر از 10 درصد باشد؟

۱) $a=4 \quad , \quad K=44.44$

۲) $a=6 \quad , \quad K=32.44$

۳) $a=4 \quad , \quad K=32.44$

۴) $a=6 \quad , \quad K=44.44$



$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{K}{S^2+(2+a)S+(2a+K)}$$

$$2+a=2\xi\omega_n$$

$$2a+K=\omega_n^2$$

$\pm 2x$ تلورانس $t_s=\frac{4}{\xi\omega_n}$

$$t_s=\frac{4}{\xi\omega_n}<1 \quad\Rightarrow\quad \xi\omega_n>4$$

$$e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}<\frac{10}{100} \quad\Rightarrow\quad \xi>0.591 \quad\Rightarrow\quad \xi \;\; 0.6$$

$$\omega_n>\frac{4}{0.6} \quad\Rightarrow\quad \omega_n>6.67$$

$$\begin{cases} K=\omega_n^2-2a \\ a=2\xi\omega_n-2 \end{cases} \Rightarrow K=32.44 \quad , \quad a=6$$

$$\omega_n=6.67 \quad , \quad \xi=0.6$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۸۲

سیستم کنترل با فیدبک واحد در شکل زیر نشان داده شده است. پاسخ این سیستم به ورودی پله واحد نیز رسم شده است.

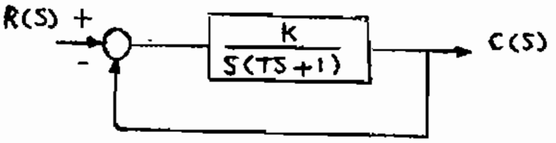
با توجه به اطلاعات داده شده در منحنی مقادیر T , K را تعیین نمایید.

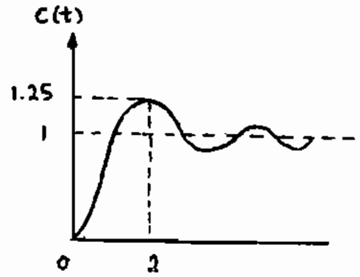
۱) $K=3.12 \quad , \quad T=0.52$

۲) $K=1.42 \quad , \quad T=1.09$

۳) $K=2.13 \quad , \quad T=0.72$

۴) $K=1.42 \quad , \quad T=0.94$





$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{\dfrac{K}{S(TS+1)}}{1+\dfrac{K}{S(TS+1)}}$$

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{K}{TS^2+S+K}=\frac{\dfrac{K}{T}}{S^2+\dfrac{1}{T}S+\dfrac{K}{T}}$$

$$\frac{1}{T}=2\xi\omega_n \Rightarrow T=\frac{1}{2\xi\omega_n}$$

$$\frac{K}{T}=\omega_n^2 \Rightarrow K=T\omega_n^2=\frac{\omega_n}{2\xi}$$

$$M_p=1.25-1=0.25=e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \xi=0.4037$$

$$t_p=2=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \omega_n=1.717$$

$$K=\frac{\omega_n}{2\xi}=2.13$$

$$T=\frac{1}{2\xi\omega_n}=0.72$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ آزاد ۸۳

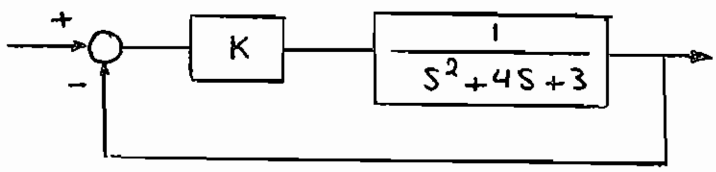
به ازای چه مقداری از K نسبت میرایی $\xi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ به‌دست می‌آید؟

۱) $K=0$

۲) $K=5$

۳) $K=10$

۴) $K=15$



$$\text{تابع تبدیل حلقه بسته}=\frac{\frac{K}{S^2+4S+3}}{1+\frac{K}{S^2+4S+3}}=\frac{K}{S^2+4S+(K+3)}$$

معادله مشخصه: $S^2+4S+(K+3)=0$

فرم استاندارد معادله مشخصه: $S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^2=0$

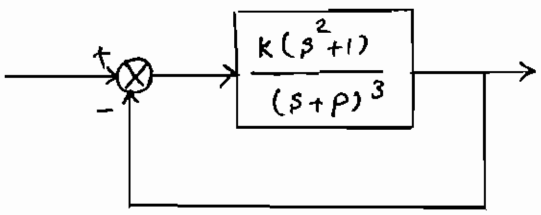
$$2\xi\omega_n=4\xrightarrow{\xi=\frac{\sqrt{2}}{2}}2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\omega_n=4\quad\Rightarrow\quad\omega_n=2\sqrt{2}$$

$$\omega_n^2=K+3\quad\rightarrow\quad\left(2\sqrt{2}\right)^2=K+3\quad\Rightarrow\quad K=5$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست:

در سیستم مدار بسته شکل مقابل $P>0$ و $0<K$ است. به ازاء چه مقداری از P می‌توان قطب‌های مسلط سیستم مدار بسته را در $S=-2\pm j$ قرار داد؟



۱) 2.5

۲) 3

۳) 3.5

۴) 4

معادله مشخصه:

$$1+\frac{K\left(S^2+1\right)}{(S+P)}=0\quad\Rightarrow\quad(S+P)^3+K\left(S^2+1\right)=0\quad\Rightarrow$$

$$S^3+3PS^2+3P^2S+P^3+KS^2+K=0$$

$$S_{1,2}=-2\pm j\quad\Rightarrow\quad S^2+4S+5=0$$

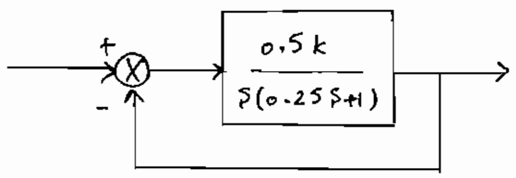
$$S^3+(3P+K)S^2+3P^2S+P^3+K=\left(S^2+4S+5\right)(S+x)\quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases}3P+K=4+x\\3P^2=4x+5\quad\Rightarrow\quad P=3\\P^3+K=5x\end{cases}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست:

دیاگرام جعبه‌ای یک سرو مکانیزم در شکل مقابل نشان داده شده است. مقدار K برای اینکه سیستم مدار بسته ریشه مضاعف داشته باشد و مقدار ریشه‌ها در این حالت کدامند؟



۱) $K = 1 , S_{1,2} = 2$

۲) $K = 2 , S_{1,2} = -1$

۳) $K = 1 , S_{1,2} = -2$

۴) $K = 2 , S_{1,2} = -2$

معادله مشخصه:

$$0.25S^2 + S + 0.5K = 0 \Rightarrow S^2 + 4S + 2K = 0$$

$$2\xi\omega_n = 4 \Rightarrow \xi = \frac{2}{\omega_n} = \frac{2}{\sqrt{2K}} = 1 \Rightarrow 2K = 4 \Rightarrow K = 2$$

$$S^2 + 4S + 4 = 0 \Rightarrow (S+2)^2 = 0 \Rightarrow S_{1,2} = -2$$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

فصل پنجم

پایداری سیستم‌های کنترل

سیستمی پایدار نامیده می‌شود که به ازای تمام ورودی‌های محدود، پاسخ کراندار داشته باشد. اگـر در سیسـتمی یـک ورودی محـدود پاسخ نامحدودی ایجاد نماید، آن سیستم ناپایدار است.پایداری یک سیستم حلقه بسته خطی به محل قطب‌های حلقه بسته آن سیستم بستگی دارد. (ریشه‌های معادله مشخصه)

پایداری یا ناپایداری یک سیستم از خواص درونی و ذاتی سیستم بوده و بستگی به ورودی سیستم ندارد.

اگر قطبی در سمت راست محور موهومی وجود داشته باشد، پاسخ گذرای سیستم به‌طور یکنواخت افـزایش مـی‌یابـد، کـه ایـن حالـت نشان‌دهنده وجود ناپایداری در سیستم است. بنابراین شرط لازم برای پایداری مطلق سیستم‌های کنترل این است که همه قطـب‌هـای تابع تبدیل مدار بسته، در سمت چپ محور موهومی قرار داشته باشد.

در مبحث پایداری سیستم‌های کنترل باید با تعاریف زیر آشنا باشیم :

سیستم پایدار : سیستمی است که قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته آن در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشد.

سیستم ناپایدار: سیستمی است که تمام یا حداقل یکی از قطب‌های تابع تبدیل حلقـه بسـته آن در سـمت راسـت محـور $j\omega$ قـرار داشته باشد.

سیستم پایدار مرزی یا حاشیه‌ای : چنانچه یک یا چند قطب ساده تابع تبدیل روی محور موهومی باشند و سایر قطـب‌هـا سـمت چپ قرار گیرند، پاسخ به‌صورت نوسانی سینوسی و نامیرا خواهد بود.

سیستم می‌نیمم‌فاز : سیستمی است که قطب‌ها و صفرهای آن در سمت چپ محـور $j\omega$ قـرار داشـته باشـد. چنـین سیسـتمی در مقایسه با توابع تبدیل سیستم‌های دیگر با دامنه یکسان دارای کمترین فاز خواهد بود.

اگر سیستم حداقل یک قطب یا صفر در نیمه راست محور $j\omega$ داشته باشد، سیستم را غیر می‌نیمم فاز می‌گویند.

سیستم پایدار مشروط : در بعضی سیستم‌ها نمودار مکان ریشه‌ها به نیمه راست صفحه S نیز کشیده می‌شود. لذا برای محـدوده‌ای از K سیستم پایدار و برای محدوده‌ای از K سیستم ناپایدار است. چنین سیستمی دارای پایداری مشـروط (بـه ازای مقـادیر مشـخص K) خواهد بود.

معیار پایداری راث ـ هرویتس

فرض کنید معادله مشخصه سیستمی به صورت زیر باشد:

$$a_0S^n + a_1S^{n-1} + \dots\dots\dots + a_{n-1}S + a_n = 0$$

شرط لازم برای پایداری سیستم (منفی بودن قسمت حقیقی ریشه‌های معادله مشخصه) آن است که:

۱ـ تمام ضرایب معادله مشخصه موجود باشند (مخالف صفر باشند).

۲ـ تمام ضرایب معادله مشخصه مثبت باشند.

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 > 0$$

یعنی اگر دو شرط فوق برقرار نباشند سیستم پایدار نخواهد بود. اما اگر دو شرط فوق برقرار باشند برای اطمینان حاصل کردن از پایداری سیستم، جدول راث را مطابق روش زیر تشکیل می‌دهیم. شرط پایداری آن است که تمام اعداد ستون اول این جدول مثبت (بزرگتر از صفر) باشند. هر تغییر علامت در اعداد این ستون نشان‌دهنده وجود یک قطب ناپایدار در سیستم است.

$$\begin{array}{l|llll}
S^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
S^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
S^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
S^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & & & & \\
S^1 & & & & \\
S^0 & & & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$$

به‌عنوان مثال، برای معادله مشخصه درجه 4 جدول راث به صورت زیر خواهد بود:

$$a_4S^4 + a_3S^3 + a_2S^2 + a_1S + a_0 = 0$$

$$\begin{array}{l|lll}
s^4 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^3 & a_3 & a_1 & 0 \\
s^2 & \dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1 & \dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2 & \dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_3 = 0 \\
s^1 & \dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1 & \dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = c_2 = 0 & \dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = c_3 = 0 \\
s^0 & \dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = b_2 & &
\end{array}$$

بنابراین، شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم کنترل آن است که علاوه بر مثبت بودن و موجود بودن همه ضرایب معادله مشخصه، ضرائب ستون اول جدول راث نیز مثبت (و مخالف صفر) باشند.

اگر یکی از اعداد ستون اول جدول راث صفر شود به سه روش می‌توان ادامه داد:

۱) به‌جای صفر عدد ε (یک عدد مثبت خیلی کوچک) می‌گذاریم و ادامه می‌دهیم.

۲) بجای S در معادله مشخصه $\frac{1}{S}$ قرار می‌دهیم و جدول راث را برای این حالت تشکیل می‌دهیم.

۳) معادله مشخصه را در $(S+1)$ ضرب می‌کنیم و جدول راث را تشکیل می‌دهیم. به این ترتیب در حقیقت یک ریشه $S=-1$ به سیستم اصلی اضافه می‌شود که چون قسمت حقیقی آن منفی است در پایداری سیستم تاثیری سارد.

اگر تمام اعداد یک ردیف از جدول راث صفر شود از معادله کمکی استفاده میکنیم. معادله کمکی معادله‌ای است که با استفاده از ضرایب ردیف قبل از ردیفی که تمام اعداد آن صفر است به‌وجود می‌آید. ریشه‌های معادله کمکی ریشه‌های معادله مشخصه نیز می‌باشد.کافی است از معادله کمکی نسبت به S مشتق گرفته و ضرایب معادله به‌دست آمده را در ردیفی که اعداد آن صفر شده است قرار دهیم و ادامه دهیم.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۶۹

تابع تبدیل سیستمی به صورت $\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{S^4+4S^3+4S^2-16S-32}$ است. پاسخ‌گذرای این سیستم شامل:

۱) دو تابع سینوسی میراست.

۲) یک تابع سینوسی میرا و دو تابع نمایی میرا است.

۳) یک تابع سینوسی میرا و یک تابع نمایی نامیرا است.

۴) یک تابع سینوسی میرا و دو تابع نمایی نامیرا است.

S^4	1	4	-32
S^3	4	-16	0
S^2	$\overbrace{-\frac{1}{4}(-16-16)}^{1}$	$\overbrace{-\frac{1}{4}(0+32\times 4)}^{-4}$	
S^1	0	0	0
S^0	-4		

جدول راث را تشکیل می‌دهیم. ضرایب همه مثبت نیستند و سیستم ناپایدار (نامیرا) است. پس گزینه‌های ۱ و ۲ حتماً غلط است، چون در آن‌ها اسمی از نامیرایی برده نشده است.

$S^2-4=0 \Rightarrow$: معادلهٔ کمکی $2S=$ مشتق

عدد 2 ضریب S است که در ردیفی که صفر شده قرار داده می‌شود.

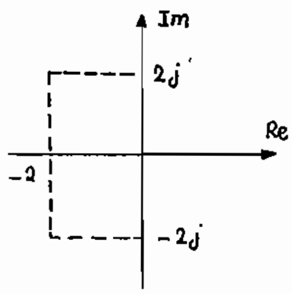
تغییر علامت‌های ستون اول یک است پس یک ریشهٔ ناپایدار دارد.

$S^2-4=0 \Rightarrow S=\pm 2 \Rightarrow$ ریشه‌ها حقیقی و نسبت به مبدأ متقارن هستند

برای پیدا کردن بقیهٔ ریشه‌ها باید چند جمله‌ای را بر s^2-4 تقسیم کنیم.

$$S^4+4S^3+4S^2-16S-32=(S^2-4)\ (S^2+4S+8)$$

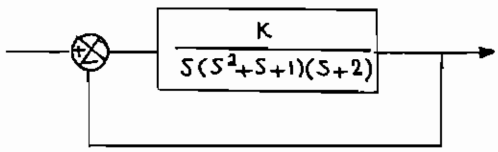
$$\Rightarrow S^2+4S+8=0 \Rightarrow S=-2\pm 2j$$



دو ریشهٔ موهومی $-2+2j$, $-2-2j$ یک پاسخ سینوسی میرا تشکیل می‌دهند. مانند سیستم‌های مرتبهٔ ۲، $s^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^2=0$ که دو ریشه یک تابع سینوسی را ایجاد می‌کنند.

-2 یک پاسخ نمایی میرا و $+2$ یک پاسخ نمایی نامیرا درست می‌کنند، پس گزینهٔ ۳ درست است.

تست : مهندسی مکانیک ـ ۶۹



سیستم مقابل

۱) به ازای همهٔ مقادیر k پایدار است.

۲) به ازای تمام مقادیر $k > \frac{14}{9}$ پاسخ پایدار نوسانی میرا است.

۳) به ازای تمام مقادیر $0 < k \le \frac{14}{9}$ پایدار است.

۴) به ازای $0 < k < \frac{14}{9}$ پایدار بوده و به ازای $k = \frac{14}{9}$ پاسخ نوسانی است.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{k}{s(s^2+s+1)(s+2)}}{1+\frac{k}{s(s^2+s+1)(s+2)}} = \frac{k}{s^4+3s^3+3s^2+2s+k}$$

همهٔ ضرایب موجود و همه مثبت هستند پس شرط لازم پایداری $k > 0$ است.

معادله مشخصه : $s^4+3s^3+3s^2+2s+k=0$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & k \\ s^3 & 3 & 2 & 0 \\ s^2 & \frac{7}{3} & k & 0 \\ s^1 & \frac{14-9k}{7} & 0 & 0 \\ s^0 & k & & \end{array}$$

شرط کافی پایداری این است که هیچ تغییر علامتی در ستون اول به وجود نیاید.

$$\frac{14-9k}{7} > 0 \Rightarrow k < \frac{14}{9}$$

$$k > 0 \;\Rightarrow\; 0 < k < \frac{14}{9}$$

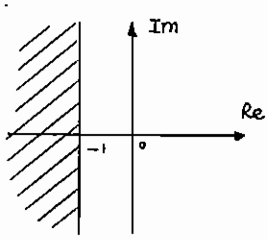
به ازای $k = \frac{14}{9}$ عدد اول در سطر s^1 صفر می‌شود پس به ازای $k = \frac{14}{9}$ پاسخ نوسانی و در مرز پایداری است.بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

تست : مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۹

معادله دیفرانسیل سیستمی با ورودی r و خروجی C به صورت زیر است:

$$\dddot{C}+6\ddot{C}+11\dot{C}+KC=\ddot{r}-r$$

به ازای کدام مقدار k تمامی ریشه‌های معادله مشخصه در ناحیهٔ هاشورزده طبق شکل قرار می‌گیرند؟



۱) $0 < k < 6$

۲) $6 < k < 12$

۳) $k > 6$

۴) $k < 12$

از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم و با مساوی قرار دادن شرایط اولیه صفر تابع تبدیل سیستم را به‌دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)}=\frac{s^2-1}{s^3+6s^2+11s+k}\Rightarrow \Delta(s)=s^3+6s^2+11s+k=0$$ معادله مشخصه:

مطابق معیار راث قسمت حقیقی قطب‌ها باید کوچکتر از صفر باشد، اما در این جا خواسته شده که مقدار حقیقی قطب‌ها کوچکتر از 1- باشد پس sها را شیفت می‌دهیم به $s-1$ و معادله مشخصه جدید بدست می‌آید.

$$(s-1)^3+6(s-1)^2+11(s-1)+k=s^3+3s^2+2s+k-6=0$$

شرط لازم پایداری $k-6>0\Rightarrow k>6$

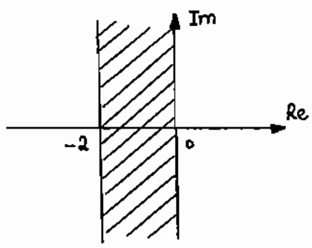
$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & 3 & k-6 & 0 \\ s^1 & \frac{12-k}{3} & 0 & 0 \\ s^0 & k-6 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{12-k}{3}>0\Rightarrow k<12 \\ k-6>0\Rightarrow k>6 \end{array}\right\}\Rightarrow 6<k<16$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۷۸

معادلهٔ مشخصهٔ سیستمی عبارت است از $s^3+5s^2+11s+15=0$ حال ناحیهٔ مشخص شده در شکل مقابل را در نظر بگیرید. این معادله مشخصه:

۱) یک ریشه در ناحیهٔ هاشور زده دارد.
۲) دو ریشه در ناحیهٔ هاشور زده دارد.
۳) سه ریشه در ناحیهٔ هاشور زده دارد.
۴) ریشه‌ای در ناحیهٔ هاشور زده ندارد



شرط لازم پایداری برقرار است؛ یعنی همه ضرایب معادله مشخصه موجود مثبت هستند.
در ستون اول هم تغییر علامت مشاهد نمی‌شود. پس همهٔ ریشه‌ها در سمت چپ محور موهومی قرار دارد.
حال برای اینکه ببینیم چند ریشه در ناحیه موردنظر است باید تبدیل $S\to S-2$ را انجام دهیم و معادله مشخصه جدید را به‌دست آوریم:

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 11 & 0 \\ s^2 & 5 & 15 & 0 \\ s^1 & 8 & 0 & 0 \\ s^0 & 15 & 0 & 0 \end{array}$$

$$s\to s-2\Rightarrow (s-2)^3+5(s-2)^2+11(s-2)+15=0\Rightarrow \quad s^3-s^2+3s+5=0\Rightarrow$$

تعداد تغییر علامت‌ها در ستون اول از بالا به پایین، برابر با تعداد قطب‌های ناپایدار کننده سیستم است. (تعداد قطب‌های سمت راست محور $j\omega$)

s^3	1	3	0
s^2	−1	5	0
s^1	8	0	0
s^0	5	0	0

همان‌طور که مشاهده می‌شود دو تغییر علامت در ستون اول داریم پس دو ریشه از ریشه‌های معادله در سمت راست خط $s=-2$ قرار دارند.

گزینه ۲ صحیح است.

تست: مهندسی برق ـ سال ۷۹

معادلهٔ $S^8+3S^7+5S^6+9S^5+9S^4+9S^3+7S^2+3S+2=0$ چند جفت ریشه روی محور $j\omega$ (چند ریشه موهومی) دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ریشه موهومی ندارد.

S^8	1	5	9	7	2
S^7	3	9	9	3	0
S^6	2	6	6	2	0
S^5	0	0	0	0	0
S^4	1	2	1	0	0
S^3	0	0	0	0	0
S^2					
S^1					
S^0					

$\Rightarrow$

S^8	1	5	9	7	2
S^7	3	9	9	3	6
S^6	2	6	6	2	0
S^5	6	12	6	0	0
S^4	1	2	1	0	0
S^3	0	0	0	0	0

ریشه‌های معادله کمکی ریشه‌های معادله مشخصه نیز هستند.

s^6 سطر $A(s)=s^6+3s^4+3s^2+1=0$

$(s^6+1)+3s^2(s^2+1)=0 \Rightarrow (s^2+1)^3=0 \Rightarrow s=\pm j$ سه مرتبه است.

بنابراین سه جفت ریشه روی محور موهومی قرار دارد.

$\frac{dA}{ds}=6s^5+12s^3+6s \Rightarrow$ این ضرایب را در سطر s^5 قرار می‌دهیم

s^3 سطر $A(s)=s^4+2s^2+1=0 \Rightarrow (s^2+1)^2=0 \Rightarrow s=\pm j$ دو مرتبه است

گزینه ۳ صحیح است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۹

در صورتی‌که معادله مشخصه یک سیستم به‌صورت زیر باشد:

$$S^4+4S^3+5S^2+2KS+4=0$$

سیستم کاملاً پایدار است اگر :

۱) $K<8$　　۲) $K>2$　　۳) $3<K<9$　　۴) $2<K<8$

جدول راث را تشکیل می‌دهیم:

S^4	1	5	4
S^3	4	2K	0
S^2	$\frac{20-2K}{4}$	4	
S^1	$\frac{2(10K-K^2-16)}{10-K}$		
S^0	4		

$$\frac{20-2K}{4}>0 \Rightarrow K<10$$

$$\frac{-K^2+10K-16}{10-K}>0 \Rightarrow 2<K<8$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست : مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۸

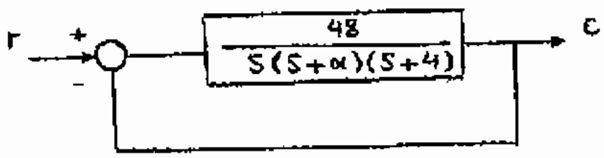
به ازای چه مقدار α سیستم کنترل شکل زیر نوسانی است و فرکانس نوسان آن کدام است؟

۱) $S=\pm j2\sqrt{2}$, $\alpha=2$

۲) $S=\pm j\sqrt{2}$, $\alpha=2$

۳) $S=\pm j2\sqrt{2}$, $\alpha=4$

۴) $S=\pm j\sqrt{2}$, $\alpha=4$



ابتدا معادله مشخصه سیستم را تشکیل می‌دهیم :

$$S(S+\alpha)(S+4)+48=0$$

$$S^3+(4+\alpha)S^2+4\alpha+48=0$$

$$\begin{array}{c|cc} S^3 & 1 & 4\alpha \\ S^2 & 4+\alpha & 48 \\ S^1 & \dfrac{4\alpha(4+\alpha)}{4+\alpha} & \\ S^0 & 48 & \end{array} \qquad 4+\alpha>0 \Rightarrow \alpha>-4$$

باید سطر S^1 صفر شود.

$\alpha=-6$ غیرقابل قبول است.

$$16\alpha+4\alpha^2-48=0 \Rightarrow \alpha=2 \ , \ \alpha=-6$$

برای پیدا کردن فرکانس نوسان ریشه‌های معادله کمکی را به‌دست می‌آوریم.

$$(4+\alpha)S^2+48=0$$

$$6S^2+48=0 \Rightarrow S=\pm 2\sqrt{2}\,j$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست : مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۷

در چه مواردی در هنگام تشکیل جدول راث کلیه عناصر یک سطر ممکن است صفر شوند.

۱) وجود یک جفت ریشه مزدوج بر روی محور $j\omega$

۲) وجود یک جفت ریشه حقیقی مساوی با علامت‌های مختلف

۳) وجود دو جفت ریشه مزدوج مختلط که نسبت به مبدأ صفحه S متقارن است.

۴) در هر سه حالت

در هر سه حالت کلیه عناصر یک سطر از جدول راث صفر می‌شوند (پاسخ این تست را به‌خاطر بسپارید).

گزینه ۴ صحیح است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۷

اگر یک قطب در $S=-2$ به سیستم کنترلی که تابع تبدیل حلقه باز آن با معادله $G(S)H(S)=\dfrac{K(S+3)}{S^2}$ داده شده است اضافه نماییم، در $K>0$ کدام یک از تغییرات زیر در مورد سیستم اتفاق خواهد افتاد؟

۱) از نوسانی به پایدار　　۲) از ناپایدار به پایدار　　۳) از پایدار به نوسانی　　۴) از پایدار به ناپایدار

معادله مشخصه سیستم اولیه عبارت است از:

$$K(S+3)+S^2=0 \quad \Rightarrow \quad S^2+KS+3K=0$$

این سیستم به ازای $K>0$ همواره پایدار است.

در صورت اضافه شدن یک قطب در $S=-2$، تابع تبدیل حلقه باز به‌صورت زیر در می‌آید:

$$G(S)H(S)=\frac{K(S+3)}{S^2(S+2)}$$

معادله مشخصه سیستم ثانویه عبارت است از:

$$S^3+2S^2+KS+3K=0$$

$$\begin{array}{c|cc} S^3 & 1 & K \\ S^2 & 2 & 3K \\ S^1 & \dfrac{-K}{2} & \\ S^0 & 3K & \end{array}$$

در سیستم حاصل به ازای $K>0$، دو تغییر علامت در ستون اول جدول راث به وجود می‌آید و در نتیجه سیستم ناپایدار است.

گزینه ۴ صحیح است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۵

معادله مشخصه سیستمی به‌صورت زیر است. برای این‌که سیستم همواره پایدار باشد، کدام‌یک از روابط زیر باید برقرار باشد؟

$$S^4+3S^3+2S^2+(3+K)S+K=0$$

۱) $K>0$ ۲) $0<K<1$

۳) $1<K<10$ ۴) $0<K<10$

جدول راث را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{c|cc} S^4 & 1 & 2 \\ S^3 & 3 & 3+K \\ S^2 & \dfrac{3-K}{3} & K \\ S^1 & \dfrac{-K-9K+9}{3-K} & \\ S^0 & K & \end{array}$$

$$S^2: \Rightarrow \quad 3-K>0 \quad \Rightarrow \quad K<3$$

$$S^1: \Rightarrow \quad -9.91<K<0.91 \quad \Rightarrow \quad 0<K<0.91$$

$$S^0: \Rightarrow \quad K>0$$

گزینه ۲ به جواب نزدیک‌تر است.

تست: مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۶

معادله مشخصه سیستمی عبارت است از:

$$S^3-7S^2+(16+K)S+5+2K=0$$

کدام عبارت برای این سیستم صحیح است؟ معادله مشخصه برای .... ریشه ناپایدار دارد.

۱) $K<-13$ ، دو ۲) $-13<K<-3.5$، سه

۳) $K>-2.5$ ، یک ۴) کلیه K منحنی، همواره سه

جدول راث را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{array}{c|cc} S^3 & 1 & 16+K \\ S^2 & -7 & 5+2K \\ S^1 & \dfrac{9K+117}{7} & \\ S^0 & 5+2K & \end{array}$$

به ازای $K>-2.5$ حاصل $9K+117$ و $5+2K$ هر دو مثبت می‌شود و دو تغییر علامت در ستون اول جدول راث خواهیم داشت. (از 1 به 7- و از 7- به یک مقدار مثبت) بنابراین دو ریسه ناپایدار وجود دارد.

به ازای $-13<K<-2.5$ حاصل $9K+117$ مثبت و $5+2K$ منفی می‌شود و سه تغییر علامت در اعداد ستون اول جدول راث و بنابراین یک ریشه ناپایدار خواهیم داشت.

گزینه ۲ صحیح است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۴

معادله مشخصه سیستمی برابر است با $S^3+6S^2+13S+K=0$ برای آن‌که سیستم دو ریشه روی محور موهومی داشته باشد، مقدار K و ریشه‌ها کدام است؟

۱) $S=\pm\sqrt{6}\,j \quad , \quad K=60$

۲) $S=\pm\sqrt{13}\,j \quad , \quad K=60$

۳) $S=\pm\sqrt{6}\,j \quad , \quad K=78$

۴) $S=\pm\sqrt{13}\,j \quad , \quad K=78$

جدول راث را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{c|cc} S^3 & 1 & 13 \\ S^2 & 6 & K \\ S^1 & \dfrac{78-K}{6} & 0 \\ S^0 & K & \end{array} \qquad 78-K=0 \;\Rightarrow\; K=78$$

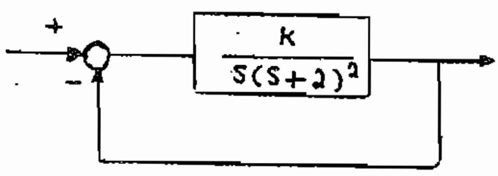
اگر دو ریشه موهومی روی محور موهومی وجود داشته باشد، تمام اعداد یکی از سطرهای جدول راث صفر می‌شود. برای این منظور $K=78$ می‌باشد برای به‌دست آوردن مقدار دو ریشه از معادله کمکی استفاده می‌کنیم.

$$6S^2+K=0 \;\Rightarrow\; S^2=-\frac{K}{6}=-13 \;\Rightarrow\; S=\pm\sqrt{13}\,j$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست : مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۹

به ازای کدام مقدار K سیستم کنترل شکل زیر به حالت نوسانی در می‌آید و فرکانس نوسانات آن کدام است؟



۱) $\omega=5 \quad , \quad K=250$

۲) $\omega=10\pi \quad , \quad K=250$

۳) $\omega=5 \quad , \quad K=25$

۴) $\omega=10\pi \quad , \quad K=25$

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{\frac{K}{S(S+5)^2}}{1+\frac{K}{S(S+5)^2}}=\frac{K}{S(S+5)^2+K}$$

معادله مشخصه $S(S+5)^2+K=S^3+10S^2+25S+K=0$

S^3	1	25
S^2	10	K
S^1	$\frac{250-K}{10}$	0
S^0	K	

ریشه نوسانی یعنی یک جفت ریشه روی محور موهومی $j\omega$ برای این‌که چنین جفت ریشه‌ای داشته باشیم باید در جدول راث یک سطر تمام صفر داشته باشیم.

$$250-K=0 \Rightarrow K=250$$

برای به‌دست آوردن مقدار ریشه‌های S_1، S_2 و تعیین فرکانس نوسانات ω از معادله کمکی استفاده می‌کنیم.

$$10S^2+K=0 \Rightarrow S^2=-\frac{K}{10}=-25 \Rightarrow S_{1,2}=\pm 5j \Rightarrow \omega=5$$

فرم عمومی $S_{1,2}=\pm\omega j$

گزینه ۱ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۷۲

معادله مشخصه سیستمی به‌صورت $\Delta(S)=S^2+(\alpha+\beta)S+\alpha\beta+K=0$ است که در آن $\alpha>0$ ، $\beta>0$ و $\alpha\neq\beta$ محدوده K را برای سیستم پایدار به‌دست آورده و K را چنان تعیین کنید که ضریب میرایی (ξ) برابر 0.707 باشد.

۱) برای $K>-\alpha\beta$ سیستم پایدار و به ازای $K=\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{2}$ ضریب میرایی مطلوب به‌دست می‌آید.

۲) تنها برای $0<K<\alpha<\beta$ سیستم پایدار و به ازای $K=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$ ضریب میرایی مطلوب به‌دست می‌آید.

۳) برای $0<K<\infty$ سیستم پایدار و به ازای $K=\alpha\beta$ ضریب میرایی مطلوب به‌دست می‌آید.

۴) برای $0<K<\infty$ سیستم پایدار و برای $K=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$ ضریب میرایی مطلوب به‌دست می‌آید.

برای پایداری سیستم باید کلیه ضرایب معادله مشخصه موجود و مثبت باشند یعنی:

$$\alpha+\beta>0$$

$$K+\alpha\beta>0 \Rightarrow K>-\alpha\beta \xRightarrow{\alpha>0,\beta>0} 0<K<\infty$$

فرم استاندارد معادله مشخصه سیستم مرتبه دو به‌صورت $S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^2=0$ می‌باشد. از مقایسه این معادله با معادله مشخصه داده شده مقدار K به‌دست می‌آید.

$$\alpha+\beta=2\xi\omega_n \xRightarrow{\xi=0.707=\frac{\sqrt{2}}{2}} \alpha+\beta=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\omega_n \Rightarrow \omega_n=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha\beta+K=\omega_n^2 \Rightarrow K=\omega_n^2-\alpha\beta=\left(\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}\right)^2-\alpha\beta=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۴

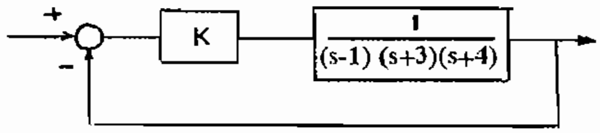
در سیستم شکل زیر، سیستم مدار باز قطب ناپایدار دارد. در مورد پایداری سیستم مدار بسته و ارتباط آن با K کدام گزینه صحیح است؟ $(K > 0)$

۱) برای مقادیر K بزرگتر از 12 و کوچکتر از 42 سیستم مدار بسته پایدار است.

۲) برای مقادیر K کوچکتر از 30 سیستم مدار بسته همواره پایدار است.

۳) چون سیستم مدار باز ناپایدار است، سیستم مدار بسته به ازای همه مقادیر $K > 0$ ناپایدار است.

۴) گرچه سیستم مدار باز ناپایدار است ولی سیستم مدار بسته به ازای همه مقادیر $K > 0$ پایدار است.



تابع تبدیل حلقه باز سیستم و معادله مشخصه سیستم را به ترتیب زیر به‌دست می‌آوریم.

تابع تبدیل حلقه باز:

$$GH(S)=\frac{K}{(S-1)(S+3)(S+4)}$$

تابع تبدیل حلقه بسته:

$$1+GH(S)=1+\frac{K}{(S-1)(S+3)(S+4)}=0$$

معادله مشخصه سیستم:

$$S^3+6S^2+5S+K-12=0$$

برای بررسی پایداری سیستم جدول راث را برای معادله مشخصه سیستم تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{array}{c|cc} S^3 & 1 & 5 \\ S^2 & 6 & K-12 \\ S^1 & \frac{42-K}{6} & \\ S^0 & K-12 & \end{array}$$

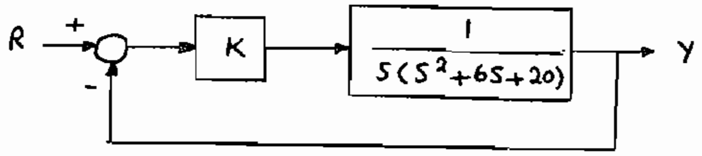
شرط لازم و کافی برای پایداری این است که اعداد ستون اول جدول راث همگی مثبت باشند:

$$\begin{cases} \frac{42-K}{6}>0 \quad \Rightarrow \quad K<42 \\ K-12>0 \quad \Rightarrow \quad K>12 \end{cases} \Rightarrow \quad 12<K<42$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۴

در سیستم کنترل نشان داده شده در شکل، حداکثر مقدار ضریب بهره K برای این‌که کلیه قطب‌های مدار بسته $(S_i=\sigma+j\omega_i)$ سمت چپ خط $\sigma=-1$ قرار گیرند چقدر است؟



۱) 15

۲) 48

۳) 120

۴) 288

معادله مشخصه سیستم به ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

$$G(S)H(S)=\frac{K}{S\left(S^2+6S+20\right)}$$

$$1+G(S)H(S)=1+\frac{K}{S\left(S^2+6S+20\right)}=0 \quad\Rightarrow\quad S^3+6S^2+20S+K=0$$

در حالت کلی برای پایداری سیستم باید کلیه قطب‌های مدار بسته سیستم سمت چپ محور موهومی قرار بگیرد. برای این‌که کلیه قطب‌های مدار بسته سیستم سمت چپ خط $\sigma=-1$ قرار گیرد باید در معادله مشخصه تغییر متغیر زیر را انجام دهیم:

$$S=S'-1$$

$$(S'-1)^3+6(S'-1)^2+20(S'-1)+K=0$$

$$S'^3+3S'^2+11S'+K-15=0$$

جدول راث را برای معادله مشخصه جدید تشکیل می‌دهیم:

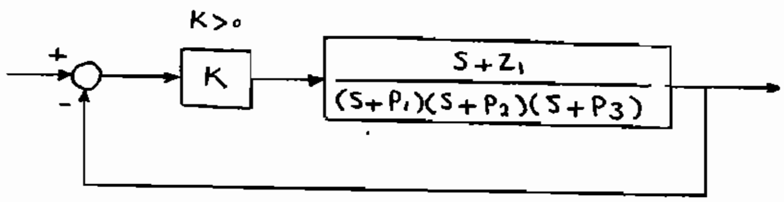
$$\begin{array}{c|cc} S'^3 & 1 & 11 \\ S'^2 & 3 & K-15 \\ S'^1 & \frac{48-K}{3} & 0 \\ S'^0 & K-15 & \end{array}$$

$$\begin{cases} \frac{48-K}{3}>0 \quad\Rightarrow\quad K<48 \\ K-15>0 \quad\Rightarrow\quad K>15 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad 15<K<48$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۴

در سیستم شکل مقابل $G(S)$ دارای سه قطب و یک صفر است و داریم $\left(P_1>P_2>P_3\right)$ همگی قطب‌ها و صفر مدار باز در LHP (نیمه صفحه سمت چپ) قرار دارند. چه رابطه‌ای بین صفر مدار باز و قطب‌های مدار باز برقرار باشد تا سیستم مدار بسته برای همه مقادیر $K>0$ (از صفر تا ∞) همواره پایدار باشد؟



۱) $Z_1>P_1$

۲) $Z_1<P_3$

۳) $Z_1>\left(P_1+P_2+P_3\right)$

۴) $Z_1<\left(P_1+P_2+P_3\right)$

$$1+G(S)H(S)=1+\frac{K\left(S+Z_1\right)}{\left(S+P_1\right)\left(S+P_2\right)\left(S+P_3\right)}=0$$

$$S^3+\left[P_1+P_2+P_3\right]S^2+\left[\left(P_1+P_2\right)P_3+P_1P_2+K\right]S+\left(KZ_1+P_1P_2P_3\right)=0$$

$$a_0S^3+a_1S^2+a_2S+a_3=0$$

شرط پایداری این است که کلیه اعداد ستون اول جدول راث مثبت باشند:

$$\begin{array}{c|cc} S^3 & a_0 & a_2 \\ S^2 & a_1 & a_3 \\ S^1 & \dfrac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1} & 0 \\ S^0 & a_3 & \end{array}$$

شرط پایداری: $a_1a_2-a_0a_3>0$

$$(P_1+P_2+P_3)\left[(P_1+P_2)P_3+P_1P_2+K\right]-(KZ_1+P_1P_2P_3)>0$$

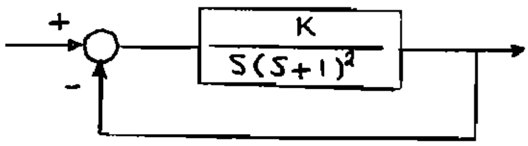
$$(P_1+P_2+P_3)\left[\frac{(P_1+P_2)P_3+P_1P_2}{K}+1\right]>\left(Z_1+\frac{P_1P_2P_3}{K}\right)$$

اگر $K\to\infty$: $P_1+P_2+P_3>Z_1$

گزینه ۴ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ۸۱

در سیستم شکل مقابل، یکی از قطب‌های سیستم مدار بسته در -4 قرار دارد. کدام عبارت در مورد پایداری این سیستم صحیح است؟



۱) سیستم مدار بسته ناپایدار است.

۲) سیستم مدار بسته پایدار است.

۳) سیستم مدار بسته در مرز پایداری قرار دارد.

۴) چون در متن سوال مقدار K داده نشده نمی‌توان اظهارنظر کرد.

$$1+GH=1+\frac{K}{S(S+1)^2}=\frac{S(S+1)^2+K}{S(S+1)^2}$$

معادله مشخصه $S(S+1)^2+K=0$

$$S=-4 \quad\Rightarrow\quad K=36$$

$$S^3+2S^2+S+36=0$$

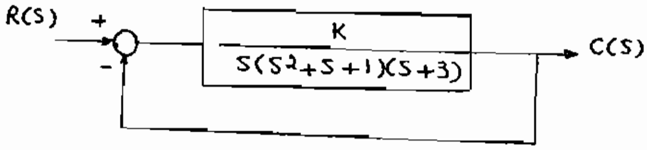
$$\begin{array}{c|cc} S^3 & 1 & 1 \\ S^2 & 2 & 36 \\ S^1 & -17 & \\ S^0 & 36 & \end{array}$$

در ستون اول جدول راث دو تغییر علامت دیده می‌شود. بنابراین دو ریشه از ریشه‌های معادله مشخصه در سمت راست محور موهومی قرار دارد و در نتیجه سیستم ناپایدار است.

گزینه ۱ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۰

بازه مقادیر K برای پایداری سیستم مقابل کدام است؟



۱) $0<K<1.77$

۲) $0<K<2.44$

۳) $0<K<3.15$

۴) $-2.44<K<0$

$$1+GH=1+\frac{K}{S\left(S^2+S+1\right)\left(S+3\right)}=0$$

$$S\left(S^2+S+1\right)\left(S+3\right)+K=0$$

$$S^4+4S^3+4S^2+3S+K=0$$

جدول راث را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{c|ccc}
S^4 & 1 & 4 & K \\
S^3 & 4 & 3 & \\
S^2 & \frac{13}{4} & K & \\
S^1 & \dfrac{\frac{39}{4}-4K}{\frac{13}{4}} & 0 & \\
S^0 & K & &
\end{array}$$

$$\begin{cases}\frac{39}{4}-4K>0 \\ K>0\end{cases} \Rightarrow \quad 0<K<2.44$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ آزاد ۸۳

معادله دینامیکی یک سیستم به صورت $\frac{d^3y(t)}{dt^3}+2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+Ky(t)=5f(t)$ داده شده است. ماکزیمم مقدار K که بیش از آن سیستم ناپایدار خواهد شد چقدر است؟

۱) $K\geq 0$

۲) $-6\leq K<0$

۳) $K=6$

۴) به ازای هیچ مقدار K سیستم ناپایدار نمی‌شود.

از معادله دینامیکی سیستم تبدیل لاپلاس می‌گیریم تا تابع تبدیل سیستم را به‌دست بیاوریم.

$$\left(S^3+2S^2+3S+K\right)Y(S)=5F(S)$$

$$\frac{Y(S)}{F(S)}=\frac{5}{S^3+2S^2+3S+K}$$

معادله مشخصه سیستم به صورت زیر است:

$$S^3+2S^2+3S+K=0$$

$$\begin{array}{c|cc} S^3 & 1 & 3 \\ S^2 & 2 & K \\ S^1 & \frac{6-K}{2} & 0 \\ S^0 & K & \end{array}$$

$$\begin{cases} \frac{6-K}{2}>0 \quad \Rightarrow \quad K<6 \\ K>0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0<K<6 \quad \Rightarrow \quad K_{max}=6$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی هوافضا ـ آزاد ۸۱

وضعیت پایداری را در سیستمی با تابع تبدیل مقابل معین کنید.

$$T(S)=\frac{(S-2)(S+3)}{\left(S^2+S-2\right)(S+1)}$$

۱) پایدار ۲) پایداری مرزی ۳) پایداری محدود ۴) ناپایدار

معادله مشخصه سیستم را به‌دست می‌آوریم:

$$1+T(S)=1+\frac{(S-2)(S+3)}{\left(S^2+S-2\right)(S+1)}=0$$

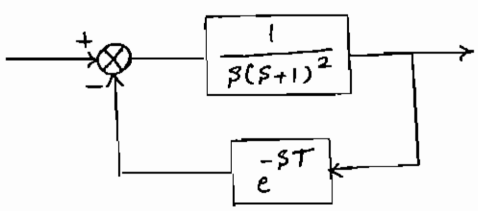
$$\left(S^2+S-2\right)(S+1)+(S-2)(S+3)=0$$

$$S^3+3S^2-8=0$$

شرط لازم برای پایداری یک سیستم این است که کلیه ضرایب معادله مشخصه مخالف صفر و مثبت باشند. اما ضریب S در معادله فوق صفر است. بنابراین سیستم ناپایدار است. گزینه ۴ صحیح است.

تست:

در سیستم کنترلی زیر، حداکثر مقدار تأخیر T را که به ازای آن سیستم حلقه بسته هنوز پایدار است کدام است؟



۱) 0.25

۲) 0.381

۳) 0.547

۴) 0.853

با نوشتن معادله مشخصه:

$$1+\frac{e^{-ST}}{S(S+1)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad S^3+2S^2+S+e^{-ST}=0 \quad \Rightarrow$$

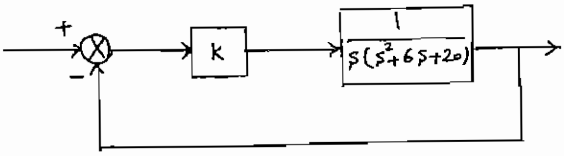
$$S^3+2S^2+S+\left(1-TS+\frac{T^2S^2}{2}-\frac{T^3S^3}{3!}+\dots\right)=0 \quad \Rightarrow$$

$$S^3\left(1-\frac{T^3}{6}\right)+S^2\left(2+\frac{T^2}{2}\right)+(1-T)S+1=0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{llll} S^3 & , & 1-\dfrac{T^3}{6} & , \quad 1-T \\ S^2 & , & 2+\dfrac{T^2}{6} & , \quad 1 \\ S^1 & , & \dfrac{-\dfrac{T^3}{3}+\dfrac{T^2}{2}-2T+1}{2+\dfrac{T^2}{2}} & , \quad 0 \\ S^0 & , & 1 & \end{array}$$

تست:

در سیستم کنترل زیر حداکثر مقدار ضریب بهره k برای اینکه کلیه قطب‌های حلقه بسته سیستم در سمت چپ $\sigma=-1$ قرار گیرند، چقدر است؟



۱) 15

۲) 48

۳) 120

۴) 287

$$1+\frac{K}{S\left(S^2+6S+20\right)}=0 \quad \Rightarrow \quad S^3+6S^2+20S+K=0$$

$$S\to S-1 \quad \Rightarrow \quad (S-1)^3+6(S-1)^2+20(S-1)+K=0 \quad \Rightarrow$$

$$S^3-3S^2+3S-1+6\left(S^2-2S+1\right)+20S-20+K=0$$

$$S^3+3S^2+11S-15+K=0$$

$$\begin{array}{lll} S^3 & 1 & 11 \\ S^2 & 3 & K-15 \\ S^1 & \dfrac{33-K+15}{3} & 0 \\ S^0 & K-15 & \end{array}$$

$$48-K>0 \quad \Rightarrow \quad K<48$$

$$K-15>0 \quad \Rightarrow \quad K>15$$

$$15<K<48$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

فصل ششم

خطای حالت ماندگار

دسته‌بندی سیستم‌های کنترل: سیستم‌های کنترل را می‌توان بر اساس قابلیت آن‌ها درتعقیب ورودی‌های پله، شیب و شتاب دسته‌بندی نمود. فرض کنید تابع تبدیل یک سیستم کنترل حلقه باز به طور کلی به صورت زیر می‌باشد:

$$G(S)=\frac{K(T_aS+1)(T_bS+1).......(T_mS+1)}{S^N(T_1S+1)(T_2S+1)......(T_pS+1)}$$

توان N در مخرج تابع تبدیل تعیین‌کننده نوع سیستم است.

N=0 سیستم نوع صفر

N=1 سیستم نوع یک

N=2 سیستم نوع دو

بالا بودن نوع سیستم باعث بالا رفتن دقت و کاهش خطای ماندگار می شود اما با احتمال ناپایداری همراه است.

دقت کنید نوع سیستم با مرتبه سیستم تفاوت دارد. منظور از مرتبه سیستم، بالاترین توان S در مخرج تابع تبدیل حلقه بسته است. در حالی‌که نوع سیستم را از روی تابع تبدیل حلقه باز تعیین می‌کنیم.

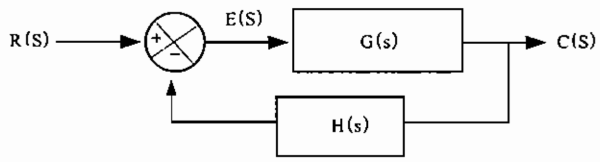
خطای حالت ماندگار در سیستم‌های فیدبک واحد:

قضیه مقدار نهایی اساس روش ما در محاسبه خطای حالت ماندگار است:

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}SE(S)$$

برای به‌دست آوردن $E(S)$، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G(S)}{1+G(S)H(S)}$$ تابع تبدیل حلقه بسته



$$E(S)=R(S)-C(S)H(S)$$

$$\frac{E(S)}{R(S)}=1-\frac{C(S)H(S)}{R(S)}=1-\frac{G(s)H(S)}{1+G(s)H(S)}=\frac{1}{1+G(S)H(S)}$$

$$E(S)=\frac{1}{1+G(S)H(S)}R(S)$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{SR(S)}{1+G(S)H(S)}$$

الف) خطای حالت ماندگار به ورودی پله واحد

$$r(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}\Rightarrow R(S)=\frac{1}{S}$$

خطای حالت ماندگار به ورودی پله واحد برابر است با:

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{S}{1+G(S)}\ \frac{1}{S}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(S)}=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(S)}$$

ثابت خطای موقعیت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(S)$$

$$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$$

در سیستم نوع صفر N=0:

$$K_p=\lim_{s\to 0}\frac{K(T_a S+1)(T_b S+1).......(T_m S+1)}{(T_1 S+1)(T_2 S+1).........(T_p S+1)}=K$$

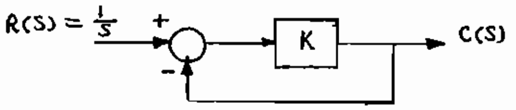
$$e_{ss}=\frac{1}{1+K}$$

در سیستم نوع یک N=1 و بالاتر:

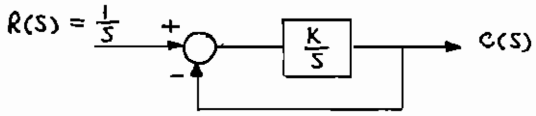
$$K_p=\lim_{s\to 0}\frac{K(T_a S+1)(T_b S+1)......(T_m S+1)}{S^N(T_1 S+1)(T_2 S+1).....}=\infty$$

$$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}=0$$

در این حالت خطای ماندگار سیستم برابر صفر خواهد بود. بنابراین برای این‌که خطای حالت ماندگار سیستمی صفر شود باید حداقل یکی از قطب‌های سیستم در S=0 باشد. نوع سیستم برابر تعداد قطب‌هایی است که تابع تبدیل در S=0 دارد.



سیستم نوع صفر $\begin{cases} e_{ss} = \dfrac{1}{1+K_p} = \dfrac{1}{1+K} \\ K_p = \lim\limits_{s\to 0} G(S) = K \end{cases}$

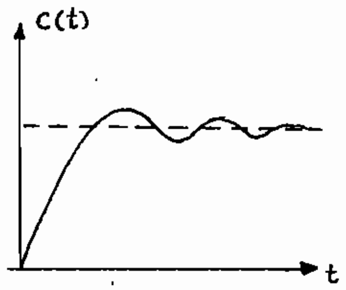


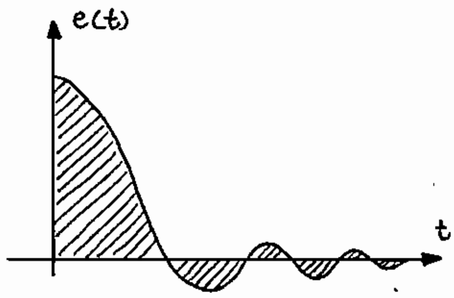
سیستم نوع یک $\begin{cases} e_{ss} = \dfrac{1}{1+K_p} = 0 \\ K_p = \infty \end{cases}$

$\dfrac{1}{S}$ تبدیل لاپلاس تابع تبدیل انتگرال بوده است.

$$C(S) = \frac{K}{S} E(S)$$

$$c(t) = K\int_0^t e(t)dt$$





برای این‌که یک سیستم کنترل فیدبک با ورودی پله واحد بتواند ورودی را بدون خطا دنبال کند لااقل بایـد یـک انتگـرال‌گیـر داشـته باشد. مزیت انتگرال‌گیر این است که در هر لحظه از زمان از گذشته‌های خطا تا به این لحظه آگاه است و خطا بین ورودی و خروجی را کم می‌کند.

ب ـ خطای حالت ماندگار به ورودی شیب واحد

$$r(t) = \begin{cases} t & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \rightarrow R(S) = \frac{1}{S^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} S \frac{1}{1+G(S)} \frac{1}{S^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{S+SG(S)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} SG(S)}$$

با تعریف ثابت خطای سرعت K_v خواهیم داشت:

$$K_v = \lim_{s\to 0} SG(S)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

برای سیستم‌های با نوع مختلف مقدار خطای حالت ماندگار به ورودی شیب واحد را محاسبه می‌کنیم.

$N=0 \Rightarrow K_v = 0 \quad , \quad e_{ss} = \infty$

$N=1 \Rightarrow K_v = K \quad , \quad e_{ss} = \dfrac{1}{K}$

$N=2 \Rightarrow K_v = \infty \quad , \quad e_{ss} = 0$

$N=2 \Rightarrow K_v = \infty \quad , \quad e_{ss} = 0$

بنابراین سیستم نوع صفر در حالت تعادل قادر نیست ورودی شیب را دنبال نماید.
سیستم نوع یک، ورودی را با مقدار خطای ثابت در حالت تعادل تعقیب می‌کند که این مقدار ثابت با بهره K نسبت عکس دارد.
سیستم نوع دو و بالاتر برای ورودی شیب هیچ خطایی ندارد. بنابراین برای این‌که خطای ماندگار سیستم صفر شود نوع سیستم باید حداقل دو باشد و یا به‌عبارت دیگر تابع تبدیل حلقه باز سیستم دو قطب در مبدا یا دو عامل انتگرال‌گیر داشته باشد.

ج ـ خطای حالت ماندگار به ورودی شتاب واحد

$$r(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}\Rightarrow R(S)=\frac{1}{S^3}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} S\frac{1}{1+G(S)}\frac{1}{S^3}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{S^2G(S)+S^2}=\frac{1}{\lim_{s\to 0} S^2G(S)}$$

با تعریف ثابت خطای شتاب K_a خواهیم داشت:

$$K_a=\lim_{s\to 0} S^2G(S)$$

$$e_{ss}=\frac{1}{K_a}$$

برای سیستم‌های با نوع مختلف مقدار خطای حالت ماندگار به ورودی شتاب را محاسبه می‌کنیم.

$$N=0 \Rightarrow K_a=0 \quad , \quad e_{ss}=\infty$$

$$N=1 \Rightarrow K_a=0 \quad , \quad e_{ss}=\infty$$

$$N=2 \Rightarrow K_a=K \quad , \quad e_{ss}=\frac{1}{K}$$

$$N=3 \Rightarrow K_a=\infty \quad , \quad e_{ss}=0$$

$$N>0 \Rightarrow K_a=\infty \quad , \quad e_{ss}=0$$

بنابراین سیستم‌های نوع صفر و یک در حالت تعادل قادر به تعقیب ورودی شتاب نیستند.
سیستم نوع دو ورودی شتاب را با مقدار خطای ثابتی در حالت تعادل تعقیب می‌کند که این خطای ثابت با بهره K نسبت عکس دارد.
سیستم نوع سه و بالاتر برای ورودی شتاب خطایی ندارد.

خطای حالت ماندگار به ورودی سهموی هنگامی مساوی صفر خواهد شد که سیستم از نوع 3 یا بالاتر باشد (حداقل سه تا انتگرال‌گیر می‌خواهد).

نوع ورودی	رابطهٔ خطای ماندگار	سیستم نوع صفر: ثابت خطا	سیستم نوع صفر: مقدار خطا	سیستم نوع یک: ثابت خطا	سیستم نوع یک: مقدار خطا	سیستم نوع دو: ثابت خطا	سیستم نوع دو: مقدار خطا
پله واحد	$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$ $K_p=\lim_{s\to 0} G_{op}(s)$	$K_p=cte$	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	0	∞	0
شیب	$e_{ss}=\frac{1}{K_v}$ $K_V=\lim_{s\to 0} sG_{op}(s)$	0	∞	$K_v=cte$	$\frac{1}{K_v}$	∞	0
سهموی	$e_{ss}=\frac{1}{K_a}$ $K_a=\lim_{s\to 0} s^2G_{op}(s)$	0	∞	0	∞	$K_a=cte$	$\frac{1}{K_a}$

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۶

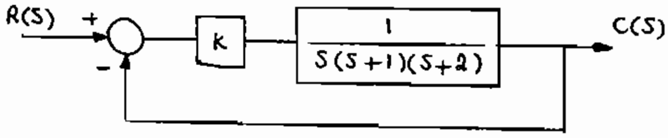
به ازای کدام مقدار K خطای حالت ماندگار به ورودی r (t) شیب واحد برابر 0.01 می‌شود؟

۱) 200

۲) 50

۳) 0.02

۴) هیچ‌کدام



$e_{ss}=0.01$

$R(S)=\frac{1}{S^2}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{SR(S)}{1+G(S)H(S)}$$

$$e_{ss}=\lim_{S\to 0}\frac{S\frac{1}{S^2}}{1+\frac{K}{S(S+1)(S+2)}}=\lim_{S\to 0}\frac{(S+1)(S+2)}{S(S+1)(S+2)+K}=\frac{2}{K}$$

$$\Rightarrow K=\frac{2}{0.01}=200$$

اما باید شرط پایداری را هم حتماً چک کنیم.

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{k}{S^3+3S^2+2S+k}$$

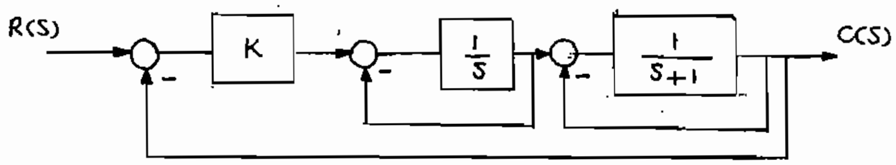
$$\begin{array}{c|ccc} S^3 & 1 & 2 & 0 \\ \hline S^2 & 3 & k & 0 \\ S^1 & \frac{6-k}{3} & 0 & 0 \\ S^0 & k & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow 0 < k < 6$$

بنابراین مقدار k=200 قابل قبول نیست.

گزینه ۴ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۶۹

در سیستم شکل زیر، k را طوری پیدا کنید که به ازای ورودی پله واحد، مقدار نهایی عکس‌العمل سیستم $c(\infty)$ مساوی 0.8 گردد.



۱) چون در بلوک وسط ترم انتگرال‌گیرنده $\frac{1}{s}$ وجود دارد خطای حالت ماندگار صفر می‌شود، هیچ مقداری از k نمی‌تواند مقدار عکس‌العمل نهایی سیستم را 0.8 گرداند.

۲) چون به ازای همه مقادیر مثبت k سیستم مدار بسته پایدار است و ثابت زمانی بلوک سوم مساوی واحد است، k نیز باید مساوی 0.8 انتخاب شود.

۳) $k = 2$

۴) $k = 8$

تابع تبدیل سیستم فوق را به‌دست می‌آوریم.

$$C_{ss} = \lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{S\to 0} SC(S)$$

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{k}{S^2+3S+(2+k)}$$

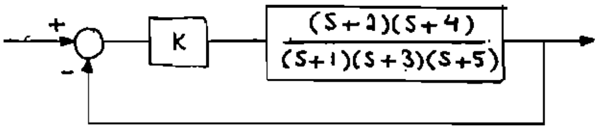
$$C_{ss} = \lim_{S\to 0} S\frac{k}{S^2+3S+(2+k)}\ R(S), \qquad R(S) = \frac{1}{S}$$

$$C_{ss} = \frac{k}{2+k} = 0.8 \Rightarrow k = 8$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۰

در سیستم شکل مقابل و به ازای ورودی پله‌ای واحد



۱) اگر k خیلی بزرگ شود سیستم مدار بسته ناپایدار می‌شود.

۲) وقتی k به اندازه کافی بزرگ شود عکس‌العمل سیستم مدار بسته $c(t)$ نوسانی پایدار می‌شود.

۳) هیچ مقدار k عکس‌العمل سیستم مدار بسته را نوسانی نمی‌کند و سیستم همواره پایدار است.

۴) مقدار offset یا خطای حالت ماندگار مستقل از مقدار k می‌شود.

تعریف افست: افست عبارت است از خطای حالت ماندگار در یک سیستم با تابع تبدیل مدار باز نوع صفر به ورودی نوع یک

معادله مشخصه $S^3+(9+k)S^2+(23+6k)\,S+15+8k=0$

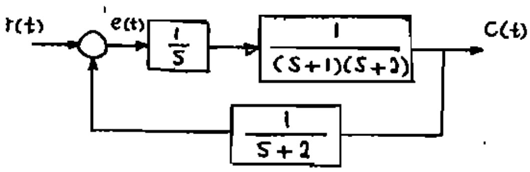
مطابق روش راث به ازای همه مقادیر مثبت k سیستم مورد نظر پایدار و غیر نوسانی است.

راه حل بهتر این مسئله، استفاده از روش مکان هندسی ریشه‌هاست. مطابق این روش ریشه‌های سیستم همه در قسمت منفی محور حقیقی قرار دارند و سیستم پایدار بدون نوسان است.

گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۰

کدام‌یک از پاسخ‌های زیر عکس‌العمل $c(t)$ و خطای $e(t)$ مربوط به سیستم شکل مقابل را به ازای ورودی مبنا پله‌ای واحد $r(t)=1$ در حالت ماندگار نشان می‌دهد.



	$\underset{t\to\infty}{c(t)}$	$\underset{t\to\infty}{e(t)}$
۱)	1	0
۲)	2	-1
۳)	2	0
۴)	-1	-1

$$G(S)=\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{S+2}{1+S(S+1)(S+2)^2}$$

سیستم از نوع یک و ورودی سیستم پله واحد است، بنابراین خطای حالت ماندگار آن صفر است.

$$e_{ss}=\lim_{S\to 0}\frac{SR(S)}{1+GH}=\lim_{S\to 0}\frac{S\frac{1}{S}}{1+\frac{1}{S(S+1)(S+2)^2}}$$

$$e_{ss}=\lim_{S\to 0}\frac{S(S+1)(S+2)^2}{1+S(S+1)(S+2)^2}=0$$

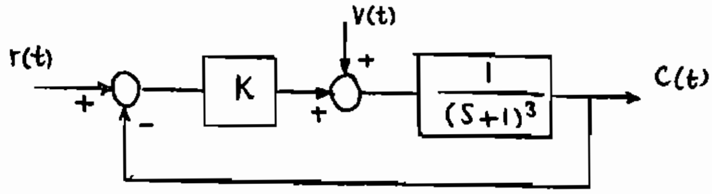
$$C_{ss}=\lim_{S\to 0}S\,C(S)=\lim S\,R(S)\,G(S)$$

$$C_{ss}=\lim_{S\to 0}S\frac{1}{S}\;\frac{S+2}{1+S(S+1)(S+2)^2}=2$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۲

در سیستم شکل زیر ورودی مبنا مساوی صفر و ورودی مزاحم برابر $v(t)=1$ (تابع پله‌ای واحد) است. به ازای $k=4$ خطای حالت ماندگار $e(t)_{t\to 0}=e_{ss}$ عبارت است از :



۱) چون ورودی مبنا $r(t)$ مساوی صفر است پس خطای حالت ماندگار سیستم نیز صفر است.

۲) چون سیستم اصلی از نوع صفر و کنترلر نیز P-action است پس خطای حالت ماندگار سیستم نیز صفر است.

۳) $e_{ss}=1$

۴) $e_{ss}=-0.2$

ورودی فراهم $V(S)=\frac{1}{S}$

ورودی مبنا $R(S)=0$

$$e_{ss}=\lim_{S\to 0} S\,E(S)$$

$$E(S)=R(S)-C(S)=0-G(S)\left[V(S)+K\,E(S)\right]$$

$$E(S)\left[1+KG(S)\right]=-G(S)V(S)$$

$$E(S)=-\frac{G(S)V(S)}{1+KG(S)}=-\frac{\frac{1}{(S+1)^3}\ \frac{1}{S}}{1+\frac{k}{(S+1)^3}}=-\frac{\frac{1}{S}}{(S+1)^3+K}$$

$$e_{ss}=\lim_{S\to 0} S\,E(S)=\lim_{S\to 0}\frac{-1}{(S+1)^3+K}=-\frac{1}{1+4}=-0.2$$

گزینه ۴ صحیح است.

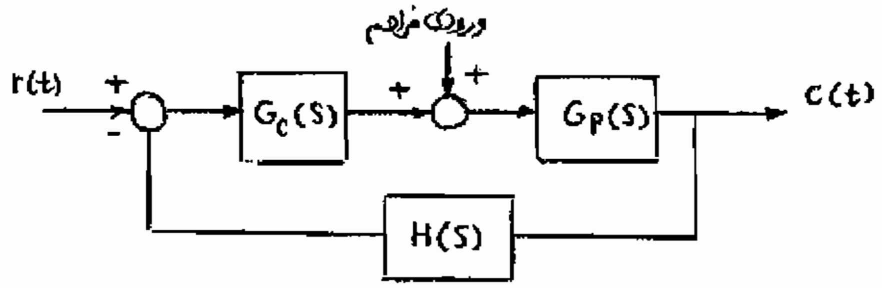
راه ساده‌تر:

$$\left.\begin{matrix} N=1 \\ R(s)=\frac{1}{s}\end{matrix}\right\} \text{نوع سیستم ورودی (پله واحد)} \Rightarrow\ e_{ss}=0\ \Rightarrow\ C(\infty)=r(\infty)=1$$

$$\Rightarrow\ \lim_{s\to 0} S(s)H(s)=1\ \Rightarrow\ \text{قضیه مقدار نهایی}\ \lim_{s\to 0} C(\infty)\frac{1}{S+2}=1\ \Rightarrow\ C(\infty)=2$$

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۲

در سیستم شکل زیر $G_P(S)$ یک سیستم رسته 3 و پایدار و از نوع صفر و $G_C(S)$ یک انتگرال گیرنده است. اگر ورودی مزاحم مساوی صفر و ورودی مبنا $r(t) = 1$ باشد و $H(S)=\frac{1}{S+2}$ و ضریب کنترلر طوری انتخاب شود که سیستم مدار بسته پایدار باشد کدام پاسخ صحیح است؟



۱) چون $G_P(S)$ از نوع صفر است عکس‌العمل سیستم $c(t)$ در حالت ماندگار دارای offset یا خطای حالت ماندگار است.

۲) چون کنترلر از نوع I- action است عکس‌العمل سیستم $c(t)$ در حالت ماندگار به سمت مقدار ورودی مبنا یعنی بـه سـمت مقدار واحد میل می‌کند.

۳) عکس‌العمل سیستم $c(t)$ در حالت ماندگار به سمت عدد ۲ میل می‌کند.

۴) بدون داشتن مقادیر عددی تابع $G_P(S)$ نمی‌توان در مورد مقدار نهایی $c(t)$ اظهار نظر نمود.

$G_P(S)$ یک سیستم مرتبه ۳، پایدار و نوع صفر است بنابراین در حالت کلی می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد.

$$G_p(S):\frac{k_p}{(S+\alpha)(S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^2)}$$

$G_c(S)$ یک انتگرال گیرنده است، بنابراین :

$$G_c(S)=\frac{k_c}{S}$$

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G_c(S)G_p(S)}{1+G_c(S)G_p(S)H(S)}$$

$$=\frac{k_c k_p (S+2)}{S(S+\alpha)(S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^2)(S+2)+k_c k_p}$$

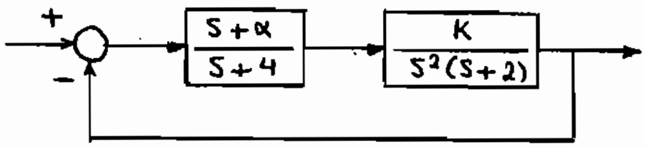
$$C_{ss}=\lim_{S\to 0} S\frac{C(S)}{R(S)}R(S) \quad , \quad R(S)=\frac{1}{S}$$

$$C_{ss}=\lim_{S\to 0}\frac{C(S)}{R(S)}=\lim_{S\to 0}\frac{K_c K_p(S+2)}{S(S+\alpha)\left(S^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2\right)(S+2)+K_c K_p}=\frac{K_P K_c(2)}{K_P K_c}=2$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی برق ـ سال ۷۶

در سیستم مدار بسته شکل زیر اگر مقدار k برابر ۱۲ در نظر گرفته شده و لیکن α را به عنوان متغیر فرض کنیم، به ازای چه مقدار α این سیستم پایدار خواهد بود؟



۱) $0<\alpha<1$
۲) $0<\alpha<12$
۳) $1<\alpha<12$
۴) $0<\alpha<72$

ابتدا معادله مشخصه سیستم را با صفر قرار دادن مخرج تابع تبدیل حلقه بسته سیستم به‌دست می‌آوریم :

$$1+\frac{S+\alpha}{S+4}\ \frac{k}{S^2(S+2)}=0$$

$$\frac{S^2(S+4)(S+2)+k(S+\alpha)}{S^2(S+4)(S+2)}=0 \quad , \quad k=12$$

$$S^4+6S^3+8S^2+12S+12\alpha=0$$

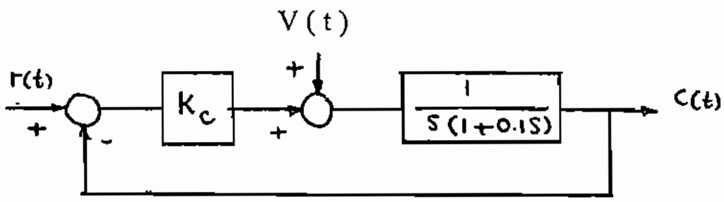
$$\begin{array}{l|lll} s^4 & 1 & 8 & 12\alpha \\ s^3 & 6 & 12 & \\ s^2 & 6 & 12\alpha & \\ s^1 & \frac{72-72\alpha}{6} & 0 & \\ s^0 & 12\alpha & 0 & \end{array}$$

$$12\alpha>0 \Rightarrow \alpha>0$$
$$\frac{72-72\alpha}{6}>0 \quad \Rightarrow \alpha<1$$
$$\Rightarrow 0<\alpha<1$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۱

در سیستم شکل مقابل با فرض آن‌که ورودی مبنا یعنی $r(t)$ و ورودی مزاحم یعنی $v(t)$ هر کدام توابع پله‌ای واحد $(r(t)=v(t)=1)$ باشند مقدار k_c را طوری پیدا کنید که اثر ورودی مزاحم در خروجی، کمتر از ٪۱۰ ورودی مبنا در خروجی حالت ماندگار باشد.



۱) $k_c>10$
۲) $k_c>2$
۳) $k_c>5$
۴) $k_c>1$

$$R(S)=\frac{1}{S}$$

$$V(S)=\frac{1}{S}$$

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{k_c}{S(1+0.1S)+k_c}$$

$$C(S)=\frac{1}{S}\ \frac{k_c}{S(1+0.1S)+k_c}$$

$$C_{ss}=\lim_{S\to 0}\ SC(S)=1$$

$$\frac{C(S)}{V(S)}=\frac{1}{S(1+0.1S)+k_c}$$

$$C'_{ss}=\lim_{S\to 0} S\ C_v(S)=\frac{1}{k_c}$$

$$C'_{ss}<0.1\ C_{ss}\ \Rightarrow\ \frac{1}{k_c}<0.1\Rightarrow\ k_c>10$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۹

خطای حالت ماندگار یک سیستم فیدبک واحد که تابع تبدیل مسیر پیشرو آن $\frac{7}{S(S-1)(S^2+7S+12)}$ می‌باشد در مقابل ورودی‌های پله واحد، شیب واحد و شتاب واحد کدام گزینه است؟

	برای پله واحد	برای شیب واحد	برای شتاب واحد
(۱	0	7	$\frac{7}{12}$
(۲	0	$\frac{12}{7}$	∞
(۳	0	$\frac{7}{12}$	∞
(۴	7	$\frac{7}{12}$	∞

سیستم از نوع یک است بنابراین خطای حالت ماندگار آن در برابر ورودی پله واحد صفر و در برابر ورودی شتاب واحد بی‌نهایت است. اما برای ورودی شیب واحد داریم:

$$e_{ss}=\frac{1}{K_v}=\lim_{S\to 0}\ \frac{1}{SG(S)\ H(S)}=\ \lim_{S\to 0}\ \frac{1}{S\frac{7}{S(S-1)\ (S^2+7S+12)}}$$

$$e_{ss}=\frac{1}{\frac{7}{12}}=\frac{12}{7}$$

همچنین می‌توان مقدار خطای حالت ماندگار در هر حالت را از رابطه کلی زیر به‌دست آورد:

$$e_{ss}=\lim_{S\to 0}\ \frac{SR(S)}{1+G(S)}$$

پله واحد $R(S)=\frac{1}{S}$

$$e_{ss}=\lim_{S\to 0}\ \frac{S\frac{1}{S}}{1+\frac{7}{S(S-1)\left(S^2+7S+12\right)}}=\lim_{S\to 0}\frac{S(S-1)\left(S^2+7S+12\right)}{7+S(S-1)\left(S^2+7S+12\right)}=0$$

$$R(S)=\frac{1}{S^2}$$

$$e_{ss}=\lim_{S\to 0}\frac{S\frac{1}{S^2}}{1+\frac{7}{S(S-1)\left(S^2+7S+12\right)}}=\lim_{S\to 0}\frac{(S-1)\left(S^2+7S+12\right)}{7+S(S-1)\left(S^2+7S+12\right)}=\frac{12}{7}$$

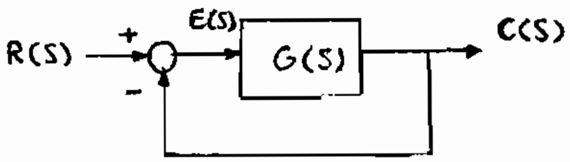
شتاب واحد $R(S)=\frac{1}{S^3}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{S\frac{1}{S^3}}{1+\frac{7}{S(S-1)\left(S^2+7S+12\right)}}=\lim_{s\to 0}\frac{(S-1)\left(S^2+7S+12\right)}{S\left[7+S(S-1)\left(S^2+7S+12\right)\right]}=\infty$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۷۷

برای سیستم کنترل شکل زیر، $G(S)$ از کمترین مرتبه را چنان تعیین کنید که اولاً خطای حالت دائمی ناشی از اعمال ورودی شیب واحد مساوی $\frac{3}{2}$ باشد و ثانیاً دو ریشه از ریشه‌های معادله مشخصه سیستم در $-1\pm j$ باشند.



۱) $G(S)=\frac{4}{S\left(S^2+4S+6\right)}$

۲) $G(S)=\frac{6}{S\left(S^2+6S+6\right)}$

۳) $G(S)=\frac{6}{S\left(S^2+4S+9\right)}$

۴) $G(S)=\frac{6}{S\left(S^2+6S+9\right)}$

با توجه به فرم گزینه‌ها $G(S)$ باید به‌صورت $\frac{K}{S\left(S^2+aS+b\right)}$ باشد. در این‌صورت معادله مشخصه عبارت است از:

$$S\left(S^2+aS+b\right)+K=0$$

$$S^3+aS^2+bS+K=0$$

معادله فوق سه ریشه دارد که دوتای آن‌ها $S_1=-1+j$ ، $S_2=-1-j$ در صورت تست داده شده‌اند. بنابراین معادله مشخصه باید بر $\left(S-S_1\right)\left(S-S_2\right)$ بخش‌پذیر باشد.

$$(S+1-j)(S+1+j)=S^2+2S+2$$

$$\begin{array}{l|l} S^3+aS^2+bS+K & S^2+2S+2 \\ \underline{S^3+2S^2+2S} & S+(a-2) \\ (a-2)S^2+(b-2)S+K & \\ \underline{(a-2)S^2+2(a-2)S+2(a-2)} & \\ (b-2a+2)S+(K-2a+4) & \end{array}$$

باقی‌مانده باید صفر شود پس:

$$b-2a+2=0 \qquad (1)$$

$$K-2a+4=0 \qquad (2)$$

حال از رابطه خطای حالت ماندگار استفاده می‌کنیم.

$$e_{ss}=\frac{3}{2}=\lim_{S\to 0}\frac{SR(S)}{1+G(S)}=\lim_{S\to 0}\frac{S\frac{1}{S^2}}{1+\frac{K}{S\left(S^2+aS+b\right)}}=\lim_{S\to 0}\frac{S^2+aS+b}{S\left(S^2+aS+b\right)+K}=\frac{b}{K} \qquad (3)$$

از سه رابطه فوق نتیجه می‌گیریم $K=4$, $a=4$, $b=6$

گزینه ۱ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۷۷

تابع تبدیل حلقه بسته سیستمی با پس‌خورد واحد به‌صورت زیر است:

$$M(S)=\frac{4(S+1)}{S^3+2S^2+4S+4}$$

خطای حالت دائمی (ماندگار) این سیستم به ورودی $r(t)=\left(3-t+\frac{t^2}{4}\right)u(t)$ برابر کدام است؟

۱) صفر　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) $\frac{1}{4}$　　۴) $\frac{1}{8}$

از تعریف خطای حالت ماندگار استفاده می‌کنیم:

$$e_{ss}=\lim_{S\to 0}SE(S)=\lim_{S\to 0}S\left[R(S)-C(S)\right]=\lim_{S\to 0}SR(S)\left[1-\frac{C(S)}{R(S)}\right]$$

$$R(S)=\frac{3}{S}-\frac{1}{S^2}+\frac{1}{2S^3}$$

$$e_{ss}=\lim_{S\to 0}S\left[\frac{3}{S}-\frac{1}{S^2}+\frac{1}{2S^3}\right]\left[1-\frac{4(S+1)}{S^3+2S^2+4S+4}\right]$$

$$=\lim_{S\to 0}S\left(\frac{3}{S}-\frac{1}{S^2}+\frac{1}{2S^3}\right)\frac{S^3+2S^2}{S^3+2S^2+4S+4}=\frac{1}{4}$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۸۰

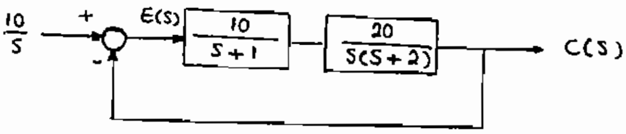
برای سیستم زیر پاسخ حالت دائمی $C(t\to\infty)$ و خطای حالت دائمی $e(t\to\infty)$ به‌ترتیب کدام است؟

۱) $0\,,\,10$

۲) $0.0975\,,\,10$

۳) $1000\,,\,10$

۴) $\infty\,,\,\infty$



$$C(t\to\infty)=C_{ss}=\lim_{S\to 0}\frac{SR(S)G(S)}{1+G(S)}=\lim_{S\to 0}\frac{S\dfrac{10}{S}\dfrac{200}{S(S+1)(S+2)}}{1+\dfrac{200}{S(S+1)(S+2)}}=10$$

$G(S)$ در رابطه فوق تابع تبدیل حلقه باز سیستم است و عبارت $\dfrac{G(S)}{1+G(S)}$ تابع تبدیل حلقه بسته معادل آن است.

$$e(t\to\infty)=e_{ss}=\lim_{S\to 0}SE(S)=\lim_{S\to 0}S\left[R(S)-C(S)\right]=\lim_{S\to 0}SR(S)\left[1-\frac{G(S)}{1+G(S)}\right]$$

$$=\lim_{S\to 0}S\frac{10}{S}\left[1-\frac{200}{200+S(S+1)(S+2)}\right]=0$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۸

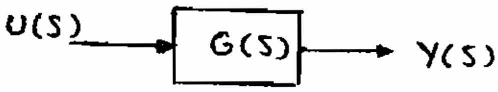
خطای ماندگار سیستمی با تابع تبدیل $G(S)=\dfrac{2}{S+1}$ به ورودی‌های پله واحد $u(t)=1(t)$ و شیب واحد $u(t)=t(1(t))$ به ترتیب برابر کدام است؟

۱) $1\,,\,0$

۲) $0\,,\,1$

۳) $\infty\,,\,1$

۴) $1\,,\,1$



$$e_{ss}=\lim_{S\to 0}SE(S)=\lim_{S\to 0}S\left[U(S)-Y(S)\right]=\lim_{S\to 0}SU(S)\left[1-\frac{Y(S)}{U(S)}\right]$$

$$e_{ss}=\lim_{S\to 0}SU(S)\left[1-\frac{2}{S+1}\right]=$$

پله واحد $U(S)=\dfrac{1}{S}\quad\Rightarrow\quad e_{ss}=\lim\limits_{S\to 0}S\dfrac{1}{S}\left[1-\dfrac{2}{S+1}\right]=-1$

شیب واحد $U(S)=\dfrac{1}{S^2}\quad\Rightarrow\quad e_{ss}=\lim\limits_{S\to 0}S\dfrac{1}{S^2}\left[1-\dfrac{2}{S+1}\right]=\infty$

قدرمطلق خطای حالت ماندگار مدنظر است .

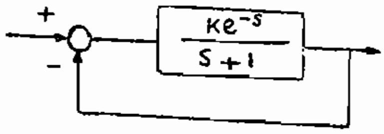
گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۹

حداقل خطای حالت ماندگار به ورودی پله واحد در سیستم کنترل تأخیردار شکل زیر کدام است؟

۱) 0.8　　　۲) 0.5

۳) 0.3　　　۴) صفر



$$e_{ss}=\lim_{S\to 0}\ SE(S)=\lim_{s\to 0}\frac{SR(S)}{1+G(S)}=\frac{S\frac{1}{S}}{1+\frac{Ke^{-S}}{S+1}}=\frac{1}{1+K}$$

برای این‌که خطای حالت ماندگار حداقل شود باید K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد و در ضمن در محدوده پایداری قرار داشته باشد. شرط زاویه و شرط اندازه را برای محاسبه حد فاز و حد بهره سیستم می‌نویسیم (برای جزئیات بیشتر به فصل هشتم مراجعه کنید).

$$-\omega-\tan^{-1}\omega=-\pi \quad\Rightarrow\quad \omega=2.03$$

$$\left|\frac{Ke^{-5}}{\sqrt{1+\omega^2}}\right|<1 \quad\Rightarrow\quad \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2}}<1 \quad\Rightarrow\quad K<2.263$$

$$\left(e_{ss}\right)_{min}=\frac{1}{1+2.263}=0.306$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ آزاد ۸۲

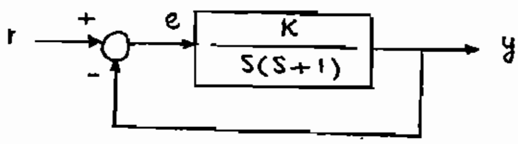
حداقل مقدار K برای این‌که خطای حالت ماندگار سیستم زیر به ورودی $r(t)=2t$ برابر 0.1 باشد چقدر است؟

۱) $K>10$

۲) $K>1$

۳) $K>20$

۴) دست‌یابی به خطای ماندگار 0.1 غیرممکن است.



$$E(S)=R(S)-Y(S)=R(S)\left(1-\frac{Y(S)}{R(S)}\right)$$

$$\frac{Y(S)}{R(S)}=\frac{\frac{K}{S(S+1)}}{1+\frac{K}{S(S+1)}}=\frac{K}{S(S+1)+K}$$

$$r(t)=2t \quad\Rightarrow\quad R(S)=\frac{2}{S^2}$$

$$E(S)=\frac{2}{S^2}\left(1-\frac{K}{S(S+1)+K}\right)=\frac{2}{S^2}\frac{S(S+1)}{S(S+1)+K}=\frac{2(S+1)}{S\left[S(S+1)+K\right]}$$

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{S\to 0}SE(S)=\lim_{S\to 0}\frac{2(S+1)}{S(S+1)+K}=\frac{2}{K}=0.1$$

$$\Rightarrow\quad K=20$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۰

برای درصد خطای حالت ماندگار یک سیستم کنترل با پس خوراند منفی که تابع تبدیل حلقه باز آن برابر $G(S)H(S)=\frac{10(S+3)(2S+1)}{S(S+1)(2S+3)}$ باشد، کدام پاسخ صحیح است؟

۱) 30%　　۲) 15%　　۳) 10%　　۴) 15%

چون در مخرج تابع تبدیل S با توان یک وجود دارد $N=1$ یعنی سیستم مرتبه اول است.

اگر $N=1 \quad \Rightarrow \quad e_{ss}=\frac{1}{K_v}$

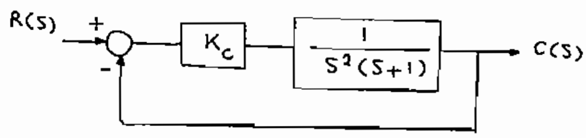
$$K_v=\lim_{S\to 0} SGH(S)=\lim_{S\to 0} S.\frac{10(S+3)(2S+1)}{S(S+1)(2S+3)}=10$$

$$e_{ss}=\frac{1}{K_v}=\frac{1}{10}=0.1=10\%$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۰

در مدار زیر اگر ورودی به صورت $R(t)=t$ باشد خطای ماندگار کدام است؟



۱) 0　　۲) $\frac{1}{2}K_c$　　۳) K_c　　۴) $2K_c$

$$R(t)=t \quad \Rightarrow \quad R(S)=\frac{1}{S^2} \quad \Rightarrow \quad e_{ss}=\frac{1}{K_v}$$

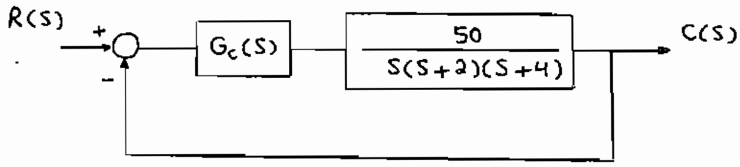
$$G(H)H(S)=\frac{K_c}{S^2(S+1)}$$

$$K_v=\lim_{S\to 0} S.G(S)H(S)=\lim_{S\to 0} S.\frac{K_c}{S^2(S+1)}=\infty \quad \Rightarrow \quad e_{ss}=0$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۰

برای سیستم مدار بسته نشان داده شده کدام یک از جبران سازهای $G_c(S)$ زیر سیستم مدار بسته را پایدار نموده و قطب‌های غالب سیستم مدار بسته را در $S=-1\pm 10j$ قرار می‌دهد؟



۱) $2(S+2)$
۲) $3(S+3)$
۳) $4(S+2)$
۴) $2(S+4)$

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G_c(S)G(S)}{1+G_c(S)G(S)H(S)} \quad , \quad H(S)=1 \quad , \quad G(S)=\frac{50}{S(S+2)(S+4)}$$

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{\frac{50G_c}{S(S+2)(S+4)}}{1+\frac{50G_c(S)}{S(S+2)(S+4)}}=\frac{50G_c(S)}{S(S+2)(S+4)+50G_c(S)}$$

معادله مشخصه: $S(S+2)(S+4)+50G_c(S)=0$

$$S^3+6S^2+8S+50G_c(S)=0$$

چون $S_1=-1-10j$, $S_2=-1+10j$ ریشه‌های معادله مشخصه هستند باید باقی‌مانده تقسیم معادله مشخصه بر $(S+1+10j)(S+1-10j)$ برابر صفر شود.

$$(S+1+10j)(S+1-10j)=S^2+2S+101$$

باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $S^3+6S^2+8S+50G_c(S)$ بر $S^2+2S+101$ برابر است با:

$$R=-101S-404+50G_c(S)$$

$$R=0 \quad \Rightarrow \quad G_C(S)=\frac{101}{50}S+\frac{404}{50} \quad 2S+8=2(S+4)$$

گزینه ۴ صحیح است.

فصل هفتم

مکان هندسی ریشه‌ها (Root Locus)

مکان هندسی ریشه‌ها، منحنی تغییر محل ریشه‌های یک سیستم مدار بسته به ازای تغییرات پارامتر k در سیستم مدار باز است.
به بیان دیگر، در صفحه مختلط با تغییر پارامتر K (ضریب تقویت، ضریب بهره سیستم) از صفر تا بی‌نهایت، برای ریشه‌های سیستم مدار بسته یک مکان هندسی به وجود می‌آید که آن را مکان هندسی ریشه‌های می‌نامند. به عبارت دیگر حرکت ریشه‌های مدار بسته روی صفحه s وقتی که پارامتر k از صفر تا بی‌نهایت تغییر می‌کند را منحنی مکان هندسی ریشه‌ها می‌نامند. دقت داشته باشید که مکان هندسی ریشه‌ها از روی تابع تبدیل حلقه باز رسم می‌شود ولی در نهایت شکل به‌دست آمده مکان هندسی ریشه‌های تابع تبدیل حلقه بسته خواهد بود. در این فصل با استفاده از روش مکان هندسی ریشه‌ها، منحنی مکان هندسی ریشه‌ها رسم می‌شود.

۱ـ اصول روش مکان هندسی ریشه‌ها

۱) مشخصه اصلی پاسخ‌گذرای یک سیستم حلقه بسته به کمک قطب‌های حلقه بسته تعیین می‌شود.

۲) اگر نقطه S_1 جزء منحنی مکان هندسی ریشه‌ها باشد باید در شرایط زاویه و اندازه صدق کند.

شرط اندازه (آرگومان): $|C(S)H(S)|=1$

شرط زاویه: $\angle G(s)H(s)=\pm 180(2k+1) \qquad k=0,1,2,.....$

مفهوم شرط اندازه:

$$\frac{|K|\left|(S+Z_1)(S+Z_2)....(S+Z_m)\right|}{\left|(S+P_1)(S+P_2)....(S+P_n)\right|}=1$$

$$|K|=\frac{|S+P_1||S+P_2|.....|S+P_n|}{|S+Z_1||S+Z_2|....|S+Z_m|}$$

$$|K|=\frac{\text{حاصل ضرب طول بردارهای رسم شده از قطب‌ها به نقطه موردنظر}}{\text{حاصل ضرب طول بردارهای رسم شده از صفرها به نقطه موردنظر}}$$

روی صفرهای مدار باز K بی‌نهایت و روی قطب‌های مدار باز K صفر است.

۳) در رسم مکان ریشه‌ها برای پارامتر k دو حالت در نظر می‌گیریم. در حالت اول k از صفر تا مثبت بی‌نهایت تغییر کرده و در حالت دوم k از منفی بی‌نهایت تا صفر تغییر می‌کند. در این حالت مکان ریشه‌ها را مکمل حالت اول می‌نامند.

$$\begin{cases} 0 < k < \infty \longrightarrow (RL) & \text{مکان ریشه‌ها} \\ \infty < k < 0 \longrightarrow (CRL) & \text{مکان مکمل ریشه‌ها} \end{cases}$$

معمولاً رسم مکان هندسی ریشه‌ها برای $K > C$ موردنظر است.

۴) در به‌دست اوردن مکان ریشه‌ها با تغییر یک پارامتر مانند k بایستی k را حتماً به صورت ضریب در تابع تبدیل حلقه باز درآورد.

تابع تبدیل حلقه باز بایستی به فرم مقابل باشد:

$$G(s)H(s)=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)....(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)}$$

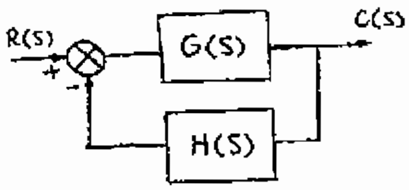
۲ـ ترسیم مکان هندسی ریشه‌ها :

برای رسم کردن مکان هندسی ریشه‌ها، قوانین زیر را باید رعایت کرد.

۱) ابتدا $G(s)H(s)$ تابع تبدیل مدار باز سیستم را تشکیل می‌دهیم ریشه‌های مخرج قطب $(k=0)$ و ریشه‌های صورت صفر $(k=\infty)$ می‌شوند، مسیر ریشه‌ها از قطب‌های مدار باز آغاز شده و به صفرهای مدار باز ختم می‌شود (یعنی K از صفر تا ∞ تغییر می‌کند).

۲) مکان هندسی ریشه‌ها نسبت به محور حقیقی متقارن است.

۳) تعداد شاخه‌های مکان هندسی برابر با تعداد قطب‌های تابع تبدیل مدار باز سیستم است.



$$Q(s)=1+G(s)H(s)=1+\frac{k\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s^n\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$

$$Q(s)=0\Rightarrow s^n\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)+k\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)=0$$

اگر $k=0$ باشد، جواب‌های حلقه بسته، جواب‌های حلقه باز می‌شود و از معادله زیر قطب‌های حلقه بسته به‌دست می‌آید.

$$k=0\Rightarrow s^n\prod_{j=j}^{n}(s+p_j)=0$$

۴) تعداد مجانب‌های مکان هندسی ریشه‌ها برابر با تفاضل تعداد قطب‌های مدار باز و صفرهای مدار باز (غیر از ∞) می‌باشد.

n-m= تعداد مجانب‌ها (m تعداد صفر و n تعداد قطب)

نکته : مجانب، جهت حرکت نمودار را به سمت ∞ نشان می‌دهد.

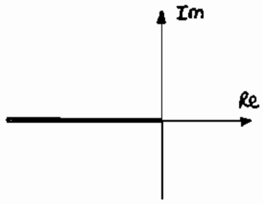
۵) زاویه مجانب‌ها عبارت است از:

زاویه مجانب‌ها

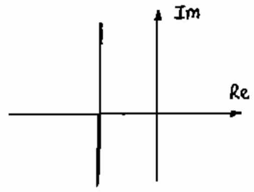
$$\theta_k=\begin{cases} k>0 & \dfrac{(2k+1)}{|n-m|}180^\circ \\ k<0 & \dfrac{2k}{|n-m|}180^\circ \end{cases}$$

اگر $n - m = 0$ باشد، مکان هندسی ریشه‌ها مجانب ندارد.

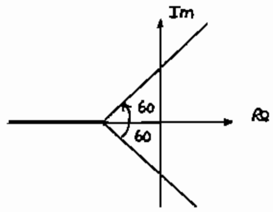
$n - m = 1 \Rightarrow$



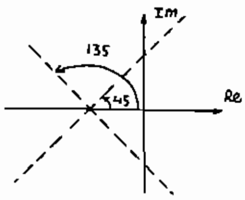
$n - m = 2 \Rightarrow$



$n - m = 3 \Rightarrow$



$n - m = 4 \Rightarrow$



۶) محل تلاقی مجانب‌ها با محور حقیقی از معادله زیر حاصل می‌شود. (Re قسمت حقیقی می‌باشد).

$$\sigma = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} = \frac{\text{(جمع صفرهای حلقه باز) ـ (جمع قطب‌های حلقه باز)}}{\text{تعداد صفرها (حلقه باز) ـ تعداد قطب‌ها (حلقه باز)}}$$

: محل تقاطع مجانب‌ها

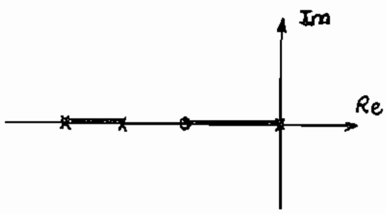
نکته : تعداد منحنی‌های مجاز از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

n : **تعداد قطب**

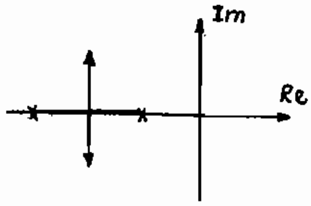
m : **تعداد صفر**

$$\begin{cases} m > n & \text{اگر} \longrightarrow N = n \\ n > m & \text{اگر} \longrightarrow N = m \end{cases}$$

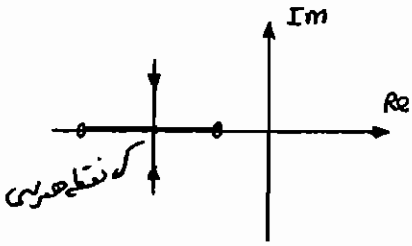
۷) قسمتی از محور حقیقی جزء نمودار مکان هندسی ریشه‌ها (برای $k > 0$) می‌باشد که مجموع تعداد قطب‌ها و صفرهای مدار باز در سمت راست آن، عددی فرد باشد.



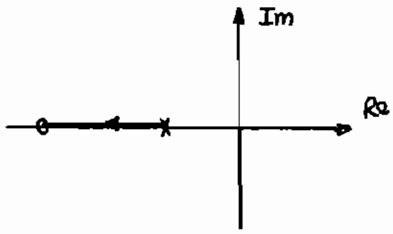
نکته ۱: قسمتی از مکان هندسی ریشه‌ها که بین دو قطب وجود دارد.



نکته ۲: اگر مکان هندسی ریشه‌ها بین دو صفر واقع شده باشد.



نکته۳: قسمتی از مکان هندسی ریشه‌ها که بین یک صفر و یک قطب واقع شده باشد.



نکته ۴ : در حقیقت تمام محور حقیقی همواره جزو مکان است، اما قسمتی برای $K>0$ و قسمتی برای $K<0$. یعنی قسمت‌هایی از محور حقیقی که برای $K>0$ جزو مکان هندسی ریشه‌ها نیستند برای $K<0$ جزو مکان هندسی ریشه‌ها هستند.

۸) زاویه خروج از قطب‌های مختلط یا ورود به صفرهای مختلط به صورت زیر محاسبه می‌شود.

جمع زاویه بردارهای رسم شده از صفرها به آن قطب	+	جمع زاویه بردارهای رسم شده از بقیه قطب‌ها به آن قطب	۱۸۰-= زاویه خروج از قطب مختلط
جمع زاویه بردارهای رسم شده از قطب‌ها به آن صفر	+	جمع زاویه بردارهای رسم شده از بقیه صفرها به آن صفر	۱۸۰-= زاویه ورودبه صفر مختلط

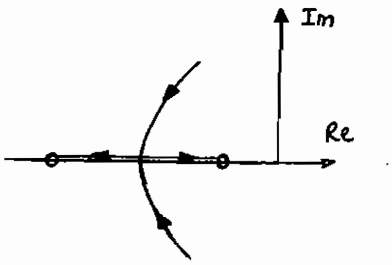
۹) محل تلاقی نمودار مکان هندسی با محور موهومی از روش جدول راث یا روش مستقیم $(s=j\omega)$ به‌دست می‌آید. $1+G(s)H(s)=0$.

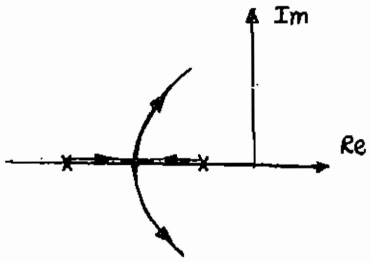
۱۰) نقاط تلاقی اجزاء نمودار مکان (نقاط شکست):

نقاطی از نمودار مکان هندسی ریشه‌ها (برای تمام مقادیر k) که ریشه‌های تکراری معادله مشخصه (ریشه‌های از درجه یک به بالا) در آن نقاط قرار می‌گیرند نقاط شکست مکان ریشه‌ها نامیده می‌شود. بر روی محور حقیقی، K حداکثر مقدار خود را در نقطه شکست اختیار می‌کند. و بعد از آن دیگر ریشه‌ها مختلط‌اند و از حالت حقیقی خارج می‌شوند.

نکته : مرکز ثقل قطب‌های مدار بسته عبارت است از: $(n-m\geq 2)$ $\quad c.g=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}p_j$

نکته : اگر سیستمی دارای تعداد m صفر باشد، از تعداد n شاخه، (n ـ m) شاخه به بی‌نهایت و m شاخه وقتی K به سمت ∞ میل می‌کند به سمت صفرها می‌رود.



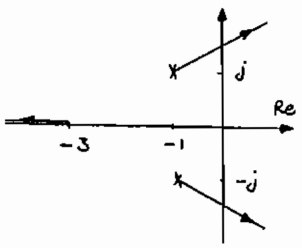


در حالت عمومی مکان هندسی ریشه‌ها، می‌تواند بیش از یک نقطه شکست داشته باشد و این نقاط لازم نیست روی محور حقیقی واقع شده باشند، بلکه به واسطه تقارن نمودار مکان هندسی ریشه‌ها نسبت به محور حقیقی، محل نقاط شکست یا روی محور حقیقی است، یا به صورت دو نقطه مختلط و مزدوج در صفحه s قرار می‌گیرند.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۵

شکل مقابل مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه سیستم بسته را نشان می‌دهد مقدار k بحرانی کدام است؟

۱) 17
۲) 17.5
۳) 34
۴) 34.5



با توجه به مکان هندسی نشان داده شده، یک قطب در $s=-3$ و دو قطب مختلط در $S_{1,2}=-1\pm j$ داریم. معادله مشخصه سیستم را به‌دست می‌آوریم:

$$GH=\frac{k}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}=\frac{k}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

$$1+GH=0\longrightarrow s^3+5s^2+8s+(6+k)=0$$

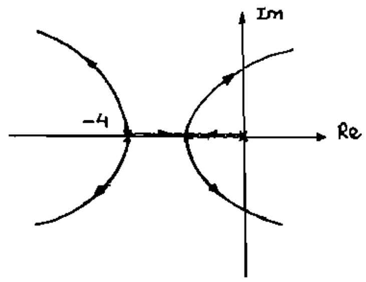
با استفاده از جدول راث مقدار k بحرانی به‌دست می‌آید.

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 8 \\ s^2 & 5 & 6+k \\ s^1 & \frac{34-k}{5} & 0 \\ s^0 & 6+k & \end{array} \longrightarrow \frac{34-k}{5}=0 \longrightarrow k=34$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۴

مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه برای یک سیستم کنترل به صورت شکل زیر می‌باشد. معادلهٔ مشخصهٔ مربوطه برابر است با:



۱) $s^2+8s+16+k=0$

۲) $s^3+16s^2+8s+k=0$

۳) $s^4+12s^3+48s^2+645+k=0$

۴) $s^4+16s^3+8s^2+s+k=0$

توجه: خودمان باید تشخیص بدهیم که در هر محل چندتا قطب یا صفر وجود داشته است.

در $s=0$ یک شاخه جدا شده است و در $s=-4$ سه شاخه مکان آغاز شده است پس یک قطب $S=0$ و سه قطب $S=-4$ داریم و معادله مشخصه عبارت است از:

$$\Delta(s)=1+\frac{k}{s(s+4)^3}=0$$

$$\Delta(s)=s\left(s^3+12s+48s^2+64\right)+K=0$$

$$\Delta(s)=s^4+12s^2+48s^3+64s+K=0$$

گزینه ۳ صحیح است.

روش تعیین نقاط شکست

روش اول: شرط لازم جهت نقاط شکست عبارت است از:

$$\frac{d\left[G(s)H(s)\right]}{ds}=0$$

۱ـ تمام ریشه‌های حقیقی معادله بالا نقاط شکست هستند.

۲ـ ریشه‌های مختلط و مزدوج معادله بالا به شرطی نقاط شکست هستند که در معادله مشخصه سیستم صدق کنند.

روش دوم: شرط کافی جهت نقاط شکست عبارت است از:

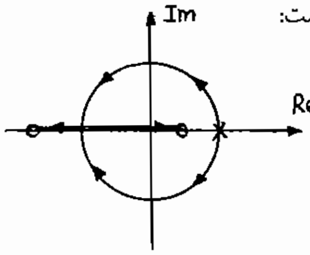
$$f(s)=A(s)+kB(s)=0 \longrightarrow \frac{dk}{ds}=0$$

نکته : در حالتی که سیستم مدار باز دارای قطب‌های مختلط باشد، زاویه‌ای که شاخه مکان هندسی از قطب مدار باز p_i تحت آن زاویه جدا می‌شود از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\theta_i=-180-\phi_j \quad i\neq j$$

که در آن ϕ_j زاویه تشکیل شده توسط سایر قطب‌ها و صفرهای مدار باز در p_i می‌باشد (زاویه قطب‌ها مثبت و زاویه صفرها منفی هستند).

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۶۹



منحنی مکان هندسی ریشه‌های مخرج تابع تبدیل سیستمی برای تغییرات ضریب تقویت به شکل زیر است:

۱) این سیستم فقط برای مقادیر کوچک ضریب تقویت پایدار است.

۲) این سیستم برای مقادیر بزرگ ضریب تقویت پایدار است.

۳) این سیستم همواره پایدار است.

۴) برای بعضی مقادیر ضریب تقویت پایدار است.

هر شاخه مکان هندسی از یک قطب شروع و به یک صفر ختم می‌گردد. مقدار k بر روی این شاخه‌ها از صفر در قطب به بی‌نهایت در صفر می‌رسد. بنابراین این سیستم برای مقادیر میانی k که به ازای آن‌ها مکان ریشه‌ها در سمت چپ محور موهومی قرار می‌گیرد پایدار است. گزینه ۴ صحیح است.

۳ـ تأثیر افزون صفر و قطب روی مکان هندسی ریشه‌ها

افزودن قطب‌ها: اضافه کردن قطب به تابع تبدیل $G(s)H(s)$ در نیمه چپ صفحه s، مکان هندسی ریشه‌ها را به سوی نیمه راست صفحه حرکت می‌دهد در نتیجه سیستم ناپایدارتر و عکس‌العمل آن کندتر می‌گردد.

افزودن صفرها: اضافه کردن صفرها واقع در نیمه چپ صفحه به تابع $G(s)H(s)$ باعث می‌شود که مکان هندسی ریشه‌ها به سوی نیمه چپ صفحه s حرکت کندو در نتیجه سیستم پایدارتر و عکس العمل آن سریع‌تر می‌گردد.

نکته : مکان ریشه‌ها از قطب‌ها شروع و باید به صفرها برسد. و اگر صفر وجود نداشته باشد شاخه به سمت بی‌نهایت می‌رود.

تست: مهندسی مکانیک- سال ۷۷

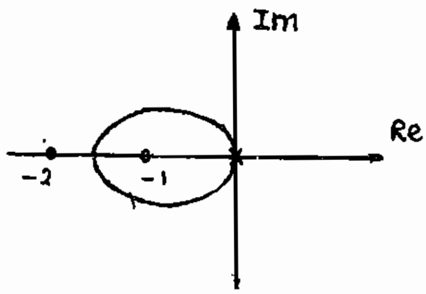
شکل زیر مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم کنترل حلقه بسته را نشان می‌دهد. بهرهٔ k به طوری که سیستم بسته دارای قطب‌هایی با نسبت میرایی $\xi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ گردد و مقدار ω_n به ازای این k کدام یک از پاسخ‌های زیر است؟

۱) $\omega_n=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $k=\frac{5}{4}$

۲) $\omega_n=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $k=\frac{4}{5}$

۳) $\omega_n=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $k=\frac{4}{5}$

۴) $\omega_n=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $k=\frac{5}{4}$



$$\cos\theta=\xi=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

اگر شکل با مقیاس ۱:۱ باشد می‌توان kی هر نقطه را حاصل‌ضرب فاصله قطب‌ها تا آن نقطه تقسیم بر حاصل‌ضرب فاصلهٔ صفرها تا آن نقطه که با خط‌کش اندازه‌گیری می‌شود در نظر گرفت. اما اگر مقیاس درست نباشد باید مسئله را به روش تحلیلی حل کنیم.

از روی شکل مکان هندسی ریشه‌ها می‌توان دریافت سیستم دارای دو قطب در $S=0$ و دو صفر در $S=-1$ و $S=-2$ است:

$$\Delta = 1+k\frac{(s+1)(s+2)}{s^2} \Rightarrow \Delta = s^2 + k\left(s^2+3s+2\right) = (k+1)\,s^2 + 3ks + 2k = 0$$

$$\Delta = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

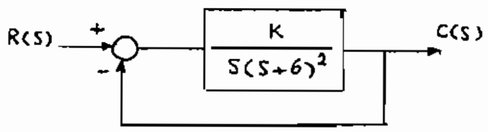
$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = \dfrac{3k}{k+1} \\ \omega_n^2 = \dfrac{2k}{k+1} \end{cases} \xRightarrow{\xi=\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2}\,\omega_n = \frac{3k}{k+1} \quad \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{4}{5} \\ \omega_n = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۹

به ازای کدام مقدار k مکان ریشه‌های سیستم کنترل حلقه بستهٔ زیر از نقطهٔ $-1 \pm j\sqrt{15}$ می‌گذرد؟

۱) 32　　۲) 160　　۳) 240　　۴) 600



ابتدا معادله مشخصه سیستم را به‌دست می‌آوریم:

$$S(S+6)^2 + K = 0$$

$$S^3 + 12S^2 + 36S + K = 0$$

این معادله به ازای kهای حقیقی سه ریشه دارد.که دوتای آن‌ها داده شده‌اند.

$$S_{1,2} = -1 \pm \sqrt{15}\,j$$

$$(S+x)\left(S+1+\sqrt{15}\,j\right)\left(S+1-\sqrt{15}\,j\right) = 0$$

$$(S+x)\left(S^2+2S+16\right) = 0$$

$$S^3 + (x+2)S^2 + (2x+16)S + 16x = 0$$

از مقایسه معادله فوق با معادله مشخصه به‌دست می‌آید:

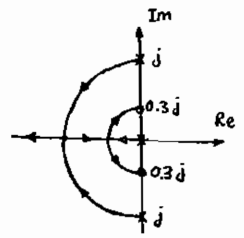
$$x = 10$$

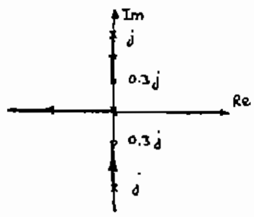
$$K = 160$$

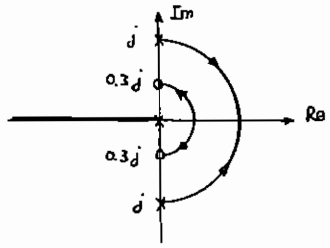
گزینه ۲ صحیح است.

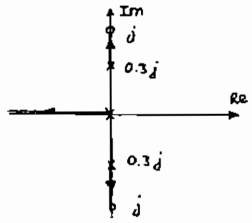
تست: مهندسی برق ـ سال ۷۹

کدام دیاگرام زیر مکان ریشه‌ها را وقتی $GH(s)=k\dfrac{s^2+0.1}{s\left(s^2+1\right)}$ است نشان می‌دهد؟ $(0<k<\infty)$

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

در ۴ آرایش صفرها و قطب‌ها جابه‌جا کشیده شده و نادرست است در ۳ مکان هندسی، دو ریشه در سمت راست محور حقیقی دارد که نادرست است.

در ۱ زاویهٔ خروج از قطب مختلط $180°$ است.

در ۲ زاویهٔ خروج از قطب $-90°$ است.

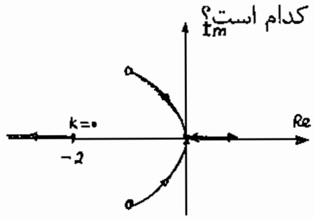
جمع زاویه بردارهای رسم شده از صفرها به آن قطب + جمع زاویه بردارهای رسم شده از بقیهٔ قطب‌ها به آن قطب ـ 180 = زاویهٔ خروج از قطب

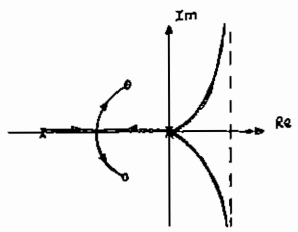
گزینهٔ ۱ صحیح است.

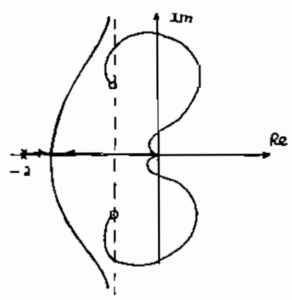
$$\text{زاویه}=180-(90+90)+(90+90)=180$$

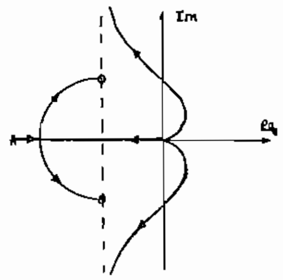
تست: مهندسی برق ـ سال ۷۹

سیستم کنترل با تابع تبدیل حلقه باز $GH(s)=K\dfrac{s^2+s+0.5}{s^3(s+2)}$ را در نظر بگیرید. مکان هندسی ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ سیستم حلقه بسته کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

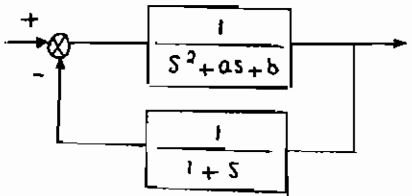
$s^4+2s^3+Ks^2+Ks+0.5K=0$ معادله مشخصه

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & K & 0.5K \\ s^3 & 2 & K & 0 \\ s^2 & \frac{K}{2} & \frac{K}{2} & 0 \\ s^1 & K-2 & \frac{K}{2} & 0 \\ s^0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

اگر چهار تا محل برخورد با محور موهومی وجود داشته باشد باید سطر s^3 صفر شود که امکان ندارد. پس گزینهٔ ۳ غلط است. گزینه ۱ هم غلط است چون محور حقیقی مثبت جزو مکان نیست و در گزینه ۲ هم محل برخورد مجانب عمودی با محور حقیقی نادرست است.

گزینه ۴ صحیح است.

مثال : می‌دانیم مکان ریشه‌های سیستم کنترل حلقه بسته شکل زیر از نقاط $-1\pm j$ می‌گذرد. مقادیر a و b به ترتیب برابر کدام است؟



معادله مشخصه سیستم را به‌دست می‌آوریم :

$$\Delta(s)=1+GH=1+\frac{1}{(s+1)(s^2+as+b)}=0$$

$s^3+(a+1)s^2+(a+b)s+b+1=0$ معادله مشخصه

معادله مشخصه را هم‌ارز با معادلهٔ زیر قرار می‌دهیم:

$$=(s+x)(s+1+j)(s+1-j)=(s+x)\left(s^2+2s+2\right)=s^3+(x+2)s^2+(2x+2)s+2x$$

$$a+1=x+2\Rightarrow a=x+1$$
$$a+b=2x+2\qquad\Rightarrow x+1+2x-1=2x+2\Rightarrow x=2$$
$$b+1=2x\Rightarrow b=2x-1$$

$$\Rightarrow a=3\ ,\ b=3$$

تست: مهندسی هسته‌ای ـ سال ۸۰

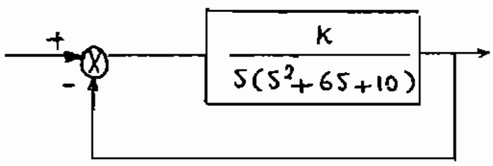
برای آنکه قطب‌های غالب سیستم کنترل حلقه بستهٔ شکل زیر دارای نسبت میرایی $\xi=0.5$ باشد حدود k کدام است؟

۱) 6

۲) 8

۳) 12

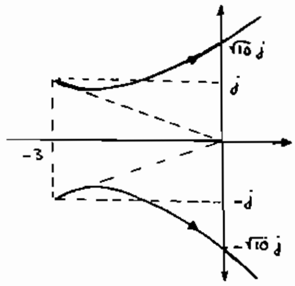
۴) 20



$$\Delta s=1+\frac{k}{s\left(s^2+6s+15\right)}=0\Rightarrow s^3+6s^2+10s+k=0$$

s^3	1	10	0
s^2	6	k	0
s^1	$\frac{60-k}{6}$	0	0
s^0	k	0	0

$0<k<60$



$$\text{زاویهٔ خروج از قطب مختلط} = 180-(90+\beta)+(0)=180-90-161.55=-72.55$$

$$k=60 \Rightarrow \Delta s=6s^2+60=0 \Rightarrow s=\pm j\sqrt{10}$$

$$s^3-6s^2+10s+k=0 \Rightarrow s^3+6s^2+10s+k \equiv (s+x)\left(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2\right)$$

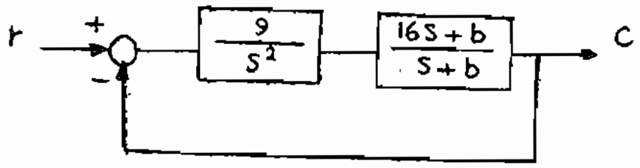
$$\Rightarrow s^3+6s^2+10s+k=s^3+(2\xi\omega_n+x)s^2+\left(\omega_n^2+2\xi\omega_n x\right)s+x\omega_n^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\xi\omega_n+x=6 \Rightarrow \omega_n+x=6 \\ \omega_n^2+2\xi\omega_n x=10 \Rightarrow \omega_n(\omega_n+x)=10 \\ x\omega_n^2=k \end{cases} \rightarrow \omega_n=\frac{10}{6} \Rightarrow x=\frac{26}{6} \Rightarrow k=\left(\frac{10}{6}\right)^2 \times \frac{26}{6} \approx 12$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۷۸

در سیستم زیر



مکان هندسی ریشه‌ها را نسبت به پارامتر b در نظر بگیرید. مقادیر b که به ازای آن‌ها نقاط شکست در مکان داریم کدام است؟

۱) $b=9\ ,\ 144$ ۲) $b=20.8\ ,\ 18.2$

۳) $b=25.7\ ,\ 22.4$ ۴) $b=30.2\ ,\ 27.6$

نقاط شکست از رابطه $\frac{dK}{dS}=0$ به‌دست می‌آیند. در این‌جا، به‌جای حرف K از حرف b استفاده شده است. معادله مشخصه سیستم را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{\frac{9(16S+b)}{S^2(S+b)}}{1+\frac{9(16S+b)}{S^2(S+b)}}=\frac{9(16S+b)}{S^2(S+b)+9(16S+b)}$$

معادله مشخصه: $S^2(S+b)+9(16S+b)=0$

$$S^3+bS^2+144S+9b=0$$

$$b=\frac{-S^3-144S}{S^2+9}$$

$$\frac{db}{dS}=0 \Rightarrow -S^4+117S^2-1296=0$$

$$S^2=104.61 \ , \ S^2=12.38$$

$$S=-10.23 \ , \ S=-3.52$$

$$b=\frac{+(10.23)^3+144(10.23)}{104.61+9}=22.38$$

$$b=\frac{(3.25)^3+144(3.52)}{12.38+9}=25.74$$

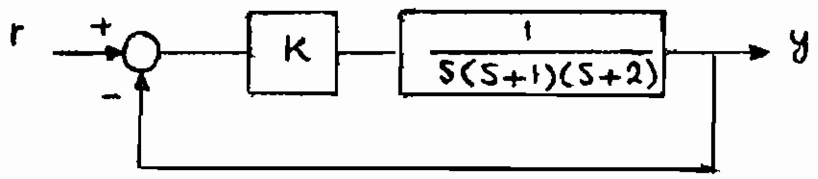
گزینه ۳ صحیح است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۸

سیستم کنترل زیر را در نظر بگیرید :

تعیین کنید که کدام‌یک از نقاط زیر بر روی مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه سیستم بسته قرار دارند؟ $(K>0)$

۱) $S=-1.5$ ۲) $S=1.5$ ۳) $S=j\sqrt{2}$ ۴) $S=j\sqrt{3}$



معادله مشخصه سیستم را تشکیل می‌دهیم.

$$S(S+1)(S+2)+K=0$$

$$S(S^2+3S+2)+K=0$$

$$S^3+3S^2+2S+K=0$$

$$\begin{array}{c|cc} S^3 & 1 & 2 \\ S^2 & 3 & K \\ S^1 & \frac{6-K}{3} & \\ S^0 & K & \end{array} \qquad \frac{6-K}{3}=0 \Rightarrow K=6$$

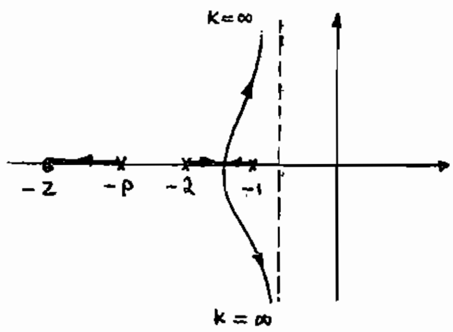
معادله کمکی را تشکیل می‌دهیم. ریشه‌های این معادله معادله جزو مکان هندسی ریشه‌ها هستند.

$$3S^2+K=0 \Rightarrow S^2=\frac{-K}{3}=\frac{-6}{3}=-2 \Rightarrow S_{1,2}=\pm\sqrt{2}\,j$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی برق ـ سال ۷۷

مکان هندسی ریشه‌های سیستمی مطابق شکل است. کدام گزینه در مورد پایداری سیستم صحیح است؟ (Z و P بزرگتر از 2 می‌باشند.)



۱) اگر $0<Z-P<3$ باشد برای تمام K های مثبت سیستم پایدار نیست.

۲) اگر $Z-P>3$ باشد برای تمـام K هـای مثبـت سیسـتم پایدار نیست.

۳) اگر $Z-P<0$ باشد برای تمام K های مثبـت سیسـتم پایدار نیست.

۴) اگر $P=Z$ باشد برای تمام K های مثبت سیستم پایـدار نیست.

مکان هندسی ریشه‌ها در حالت نشان داده شده در شکل پایدار است. اما با تغییر مکان P و Z ممکن است سیستم ناپایدار شود. جابه‌جایی P و Z فقط باعث جابه‌جایی محل تلاقی مجانب‌ها با محور افقی می‌گردد. برای پایداری لازم است که این محل تلاقی در سمت چپ محور موهومی باشد، بنابراین داریم :

$$\delta=\frac{-P-2-1+Z}{3-1}=\frac{-3+z-P}{2}$$

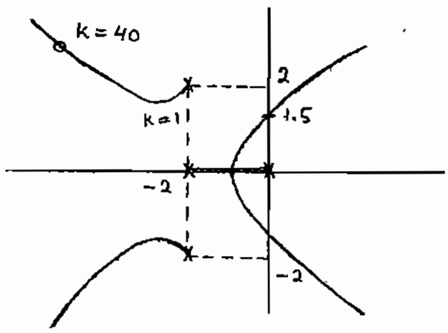
$$-3+Z-P<0 \quad \Rightarrow \quad Z-P<3$$

بنابراین اگر $z-p>3$ باشد برای تمام K های مثبت سیستم ناپایدار است.

گزینه ۲ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۶۷

سیستمی دارای مکان هندسی ریشه‌های زیر است. به ازای $K=40$



۱) سیستم پایدار است.

۲) سیستم ناپایدار است.

۳) سیستم در مرز پایداری است.

۴) پایداری سیستم مشخص نیست و بستگی بـه پارامترهـای دیگـر ندارد.

مکان هندسی ریشه‌ها از قطب‌ها شروع شده و با افزایش K خود را به صفرها می‌رساند. در شکل به ازای $K = 40$ شاخه‌ای مشخص شده که ظاهراً پایدار است اما به ازای این مقدار K باید سایر شاخه‌های مکان نیز پایدار باشند.

چون یک شاخه از مکان به سمت راست محور موهومی کشیده شده است باید در نقطه تلاقی مکان هندسی با محور موهومی مقدار K را بدانیم.

$$K = \frac{\text{حاصل‌ضرب طول بردارهای رسم شده از قطب‌ها به نقطه موردنظر}}{\text{حاصل‌ضرب طول بردارهای رسم شده از صفرها به نقطه موردنظر}}$$

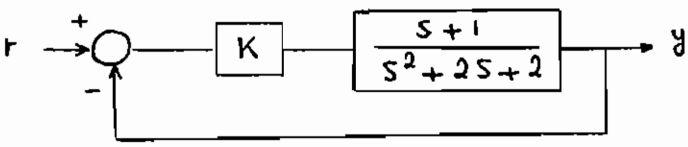
$$K=\sqrt{0.5^2+2^2}\times\sqrt{1.5^2+2^2}\times\sqrt{2^2+3.5^2}\times 1.5 \quad 31$$

بنابراین حد K برای پایداری سیستم $K=31$ است و به ازای $K = 40$ سیستم ناپایدار است.

گزینه ۲ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۶

سیتسم فیدبک مقابل را در نظر بگیرید. کدام یک بر روی مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه سیستم بسته قرار دارد؟



۱) $-3+j\sqrt{3}$

۲) $-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) $-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴) $j\sqrt{2}$

تابع تبدیل سیستم و معادله مشخصه سیستم مدار بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{Y(S)}{R(S)}=\frac{K(S+1)}{S^2+(K+2)S+(K+2)}$$

$$S^2+(K+2)S+(K+2)=0$$

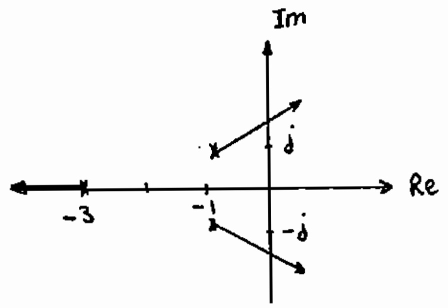
$$S=\frac{-(K+2)\pm\sqrt{K^2-4}}{2} \quad (K=0 \text{ تا } \infty)$$

$$K=1 \quad\Rightarrow\quad S=-\frac{3}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۵

شکل مقابل مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه یک سیستم بسته را نشان می‌دهد. مقدار K بحرانی کدام است؟



۱) 17

۲) 17.5

۳) 34

۴) 34.5

منحنی مکان هندسی ریشه‌ها سه شاخه دارد پس مخرج $GH(S)$ باید درجه سه باشد و قطب‌های آن در -3 , $-1+j$ و $-1-j$ قرار داشته باشد.

$$GH(S)=\frac{K}{(S+3)(S+1-j)(S+1+j)}=\frac{K}{(S+3)\left(S^2+2S+2\right)}$$

$$\frac{Y(S)}{R(S)}=\frac{GH}{1+GH}=\frac{K}{S^3+5S^2+8S+(6+K)}$$

برای تشخیص مقدار K بحرانی باید از روش پایداری راث استفاده کنیم.

برای این‌که سیستم در حالت بحرانی قرار گیرد باید در ستون اول جدول صفر داشته باشیم و نیز تغییر علامتی در این ستون وجود نداشته باشد (در این صورت یک جفت ریشه موهومی خواهیم داشت).

$$\begin{array}{c|cc} S^3 & 1 & 8 \\ S^2 & 5 & 6+K \\ S^1 & \frac{34-K}{5} & 0 \\ S^0 & 6+K & \end{array}$$

$$\frac{34-K}{5}=0 \quad \Rightarrow \quad K=34$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۴

معادله مشخصه سیستمی برابر است با $S^3+6S^2+13S+K=0$ برای آن‌که سیستم دو ریشه روی محور موهومی داشته باشد مقدار K و ریشه‌ها کدام است؟

۱) $K=60$, $S=\pm j\sqrt{6}$

۲) $K=60$, $S=\pm j\sqrt{13}$

۳) $K=78$, $S=\pm j\sqrt{6}$

۴) $K=78$, $S=\pm j\sqrt{13}$

اگر ریشه روی محور موهومی باشد شکل کلی آن به صورت $S=j\omega$ خواهد بود. با جاگذاری در معادله مشخصه خواهیم داشت:

$$(j\omega)^3+6(j\omega)^2+13(j\omega)+K=0$$

$$-j\omega^3-6\omega^2+13j\omega+K=0$$

$$\left(13\omega-\omega^3\right)j+\left(K-6\omega^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} K=6\omega^2 \\ \omega\left(13-\omega^2\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega=0 & \text{غ ق ق} \\ \omega=\pm\sqrt{13} \end{cases}$$

$$K=6\omega^2=6\left(\pm\sqrt{13}\right)^2=78$$

$$S=j\omega=\pm j\sqrt{13}$$

روش دوم:

مطابق معیار پایداری راث اگر عنصری از سطر اول جدول راث صفر شود با استفاده از معادله کمکی (معادله تشکیل شده از سطر قبل از عنصر صفر) نقاط برخورد مکان با محور موهومی به‌دست می‌آید. بنابراین داریم:

معادله مشخصه $S^3+6S^2+13S+K=0$

$$\begin{array}{c|cc} S^3 & 1 & 13 \\ S^2 & 6 & K \\ S^1 & \frac{78-K}{6} & 0 \\ S^0 & K & \end{array}$$

$$\frac{78-K}{6}=0 \Rightarrow K=78$$

$$6S^2+K=0 \Rightarrow 6S^2+78=0 \Rightarrow S=\pm j\sqrt{13}$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک - سال ۷۴

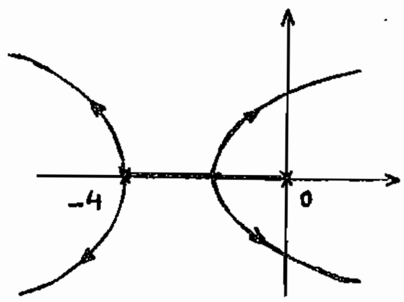
مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه یک سیستم کنترل به صورت شکل زیر است. معادله مشخصه سیستم برابر است با:

۱) $S^2+8S+16+K=0$

۲) $S^3+16S^2+8S+K=0$

۳) $S^4+12S^3+48S^2+64S+K=0$

۴) $S^4+16S^3+8S^2+S+K=0$



نمودار مکان هندسی دارای چهار شاخه است، پس باید معادله مشخصه درجه چهار باشد و تنها گزینه‌های ۳ یا ۴ می‌توانند صحیح باشند. تعداد مجانب‌ها برابر با اختلاف درجه صورت و مخرج تابع تبدیل مدار باز است: بنابراین تابع تبدیل مدار باز سیستم به صورت زیر است:

$$G(S)H(S)=\frac{K}{S(S+4)^3}$$

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{GH}{1+GH}=\frac{\frac{K}{S(S+4)^3}}{1+\frac{K}{S(S+4)^3}}=\frac{K}{S(S+4)^3+K}=\frac{K}{S^4+12S^3+48S^2+64S+K}$$

معادله مشخصه، همان مخرج کسر فوق است. البته یک روش دیگر هم برای به‌دست آوردن معادله مشخصه وجود دارد.

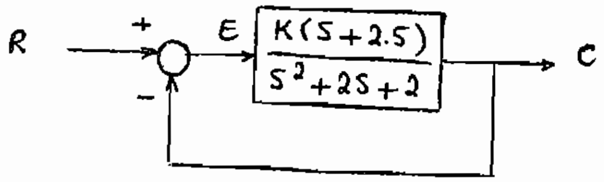
معادله مشخصه: $1+GH(S)=0 \Rightarrow 1+\frac{K}{S(S+4)^3}=0$

$$\Rightarrow S(S+4)^3+K=0 \Rightarrow S^4+12S^3+48S^2+64S+K=0$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی هوافضا ـ سال ۸۳

منحنی مکان هندسی ریشه‌های سیستم کنترلی نشان داده در شکل زیر کجا وارد محور حقیقی می‌شود؟



۱) $S=-3.4$

۲) $S=-3.6$

۳) $S=-3.9$

۴) $S=-4.3$

تابع تبدیل حلقه باز به صورت زیر است:

$$GH(S)=\frac{K(S+2.5)}{S^2+2S+2}$$

نقطه‌ای که مکان هندسی ریشه‌ها با محور حقیقی تلاقی می‌کند نقطه شکست است که از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$1+GH=0 \Rightarrow 1+\frac{K(S+2.5)}{S^2+2S+2}=0$$

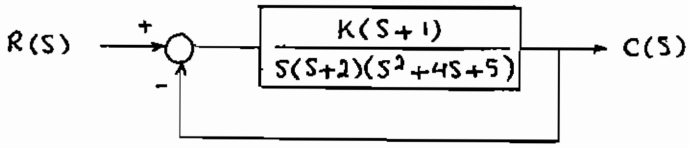
$$\Rightarrow K=-\frac{S^2+2S+2}{S+2.5} \Rightarrow \frac{dK}{dS}=-\frac{S^2+5S+3}{(S+2.5)^2}$$

$$\frac{dK}{dS}=0 \Rightarrow S^2+5S+3=0 \Rightarrow S_1=-4.3 \ , \ S_2=0.697$$

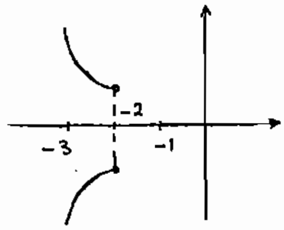
گزینه ۴ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۵

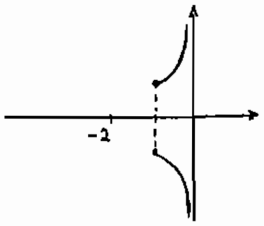
منحنی مکان هندسی ریشه‌های سیستم مقابل کدام است؟



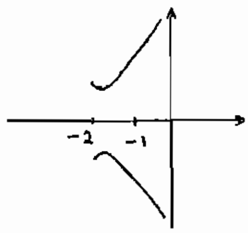
۱)



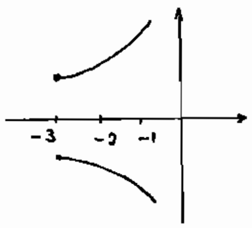
۲)



۳)



۴)



قطب‌های سیستم عبارتند از:

$$S(S+2)\left(S^2+4S+5\right)=0 \quad \Rightarrow \quad S=0 \ , \ S=-2\pm j \quad , \quad S=-2$$

صفر سیستم عبارت‌اند از:

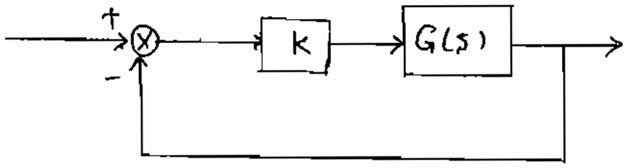
$$S+1=0 \quad \Rightarrow \quad S=-1$$

چون سیستم یک جفت قطب در $S=-2\pm j$ دارد گزینه ۱ یا ۳ درست است.

تعداد قطب‌های مدار باز $n=4$ و تعداد صفرهای مدار باز $m=1$ و بنابراین تعداد مجانب‌های مکان هندسی $n-m=3$ و زاویه مجانب‌ها $\pi \ , \ \frac{\pi}{3} \ , \ -\frac{\pi}{3}$ است و بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

تست:

در سیستم شکل مقابل، $G(S)$ دارای دو قطب در نیم صفحه سمت چپ و یک صفر در نیم صفحه سمت راست است. در مورد پایداری سیستم مدار بسته کدام پاسخ صحیح است؟



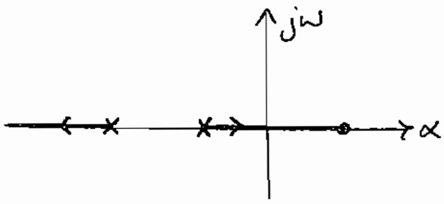
۱) به ازای بعضی مقادیر K سیستم مدار بسته حتماً ناپایدار است.

۲) وقتی K از صفر تا بی‌نهایت تغییر می‌کند، سیستم مدار بسته ممکن است پایدار بماند.

۳) چون مدار باز یک صفر در نیم صفحه سمت راست دارد، مدار بسته همواره ناپایدار است.

۴) چون پایداری تنها به قطب بستگی دارد و قطب‌های $G(S)$ در نیم صفحه سمت چپ است، پس مدار بسته همواره پایدار است.

با توجه به منحنی مکان هندسی ریشه‌ها:



همان‌طور که مشاهده می‌شود، گزینه ۱ صحیح است.

فصل هشتم

پاسخ فرکانسی سیستم‌های کنترل

اگر ورودی سیستم $x(t)$، یک تابع سینوسی باشد، آن‌گاه پاسخ پایدار سیستم نیز سینوسی، با همان فرکانس ولی دامنه متفاوت و دارای اختلاف فاز خواهد بود. چنانچه نسبت دامنه خروجی به ورودی و اختلاف فاز بین تابع ورودی و خروجی به ازای همه مقادیر فرکانس ورودی مشخص باشد آن سیستم به طور کامل شناخته شده است. تابع تبدیل حوزه فرکانس هر سیستم خطی با جایگزینی $j\omega$ به جای S در تابع تبدیل سیستم به‌دست می‌آید.

فرض کنید $G(s)$ تابع تبدیل سیستم مورد نظر باشد.

$$x(t)=a\sin\omega t$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}\Rightarrow Y(s)=G(s)X(s)$$

$$X(s)=\frac{a\omega}{s^2+\omega^2}\Rightarrow Y(s)=G(s)\frac{a\omega}{s^2+\omega^2}$$

با فرض پایدار بودن سیستم (تمامی قطب‌های سیستم در سمت چپ محور موهومی باشند) $y(t)$ عکس تبدیل لاپلاس $Y(s)$ خواهد بود. با فرض $t\to\infty$ پاسخ حالت ماندگار سیستم به صورت زیر به‌دست خواهد آمد.

$$y_{ss}(t)=a\left[\frac{G(j\omega)e^{i\omega t}}{2i}-\frac{G(-j\omega)e^{-i\omega t}}{2i}\right]$$

$G(j\omega)$ خود یک عدد مختلط به صورت زیر است:

$$G(j\omega)=M(\omega)e^{i\phi(\omega)}$$

$$G(-j\omega)=M(\omega)e^{-i\varphi(\omega)}$$

بنابراین:

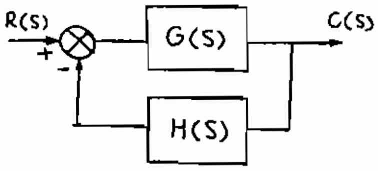
$$y_{ss}(t)=aM(\omega)\left[\frac{e^{i(\omega t+\phi)}-e^{-i(\omega t+\phi)}}{2i}\right]=aM(\omega)\sin(\omega t+\phi)$$

یعنی پاسخ ورودی $a\sin\omega t$ موجی سینوسی با همان فرکانس ω، اختلاف فاز $\phi(\omega)$ و دامنه $aM(\omega)$ خواهد بود.

نکته : اگر تابع تبدیل سینوسی، $G(j\omega)$، یک سیستم دارای زاویه فاز منفی باشد، فاز تأخیری یا پس فاز (Phase lag) نامیده می‌شود و اگر دارای زاویه فاز مثبت باشد، آن را یک تابع تبدیل با زاویه پیش فاز (Phase lead) می‌گویند.

۱ ـ دیاگرام نایکوئیست

دیاگرام نایکوئیست رسم $G(j\omega)H(j\omega)$ در صفحه موهومی برای تمام مقادیر مختلف ω از صفر تا بی‌نهایت می‌باشد. در این نمودار، قسمت موهومی تابع $G(jw)H(jw)$ برحسب قسمت حقیقی تابع $G(jw)H(jw)$ به ازای تغییرات فرکانس از صفر تابی نهایت رسم می‌شود.



با استفاده از دیاگرام نایکوئیست سیستم مدار باز می‌توان پایداری سیستم مدار بسته را تعیین نمود. معادله مشخصه سیستم مدار بسته را در حالت کلی می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$1+G(s)H(s)0=0$

که در آن $G(s)H(s)$ همان تابع تبدیل مدار باز خواهد بود.

$$G(s)H(s)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

فقط در این چند مورد $G(s)$ ها به $G(s)H(s)$ تبدیل شوند.

که در آن z_i صفرهای مدار باز و p_j قطب‌های مدار باز هستند. جهت پایداری سیستم مدار بسته باید تمام ریشه‌های معادله مشخصه سیستم مدار بسته سمت چپ محور موهومی قرار داشته باشد.

اگر N تعداد دوران دیاگرام نایکوئیست در جهت پاد ساعتگرد حول نقطه $-1+0j$ ، Z تعداد صفرهای معادله مشخصه $1+GH=0$ در نیمه راست صفحه S و P تعداد قطب‌های مدار باز در نیمه راست صفحه S باشند.

$N=P-Z$

اگر سیستم مدار بسته‌ای بخواهد پایدار باشد باید تعداد قطب‌های مدار بسته در سمت راست محور موهومی یعنی $Z\le 0$ باشد.

علاوه بر این تعداد قطب‌های مدار باز در سمت راست محور موهومی یعنی P تعیین کننده تعداد قطب‌های ناپایدار سیستم مدار باز است. در اکثر موارد $P=0$ است یعنی خود سیستم مدار باز نیز پایدار است. در این حالت برای پایداری سیستم مدار بسته باید $N=Z=0$ باشد یعنی تعداد گردش دیاگرام نایکوئیست در جهت پادساعتگرد حول نقطه $-1+0j$ باید صفر باشد.

پس برای بررسی پایداری سیستم مدار بسته:

۱ـ با استفاده از تابع تبدیل سیستم مدار باز تعداد قطب‌های ناپایدار سیستم مدار باز یعنی P را به‌دست می‌آوریم.

۲ـ با رسم دیاگرام نایکوئیست سیستم مدار باز مشاهده می‌کنیم که منحنی چند دور حول نقطه $-1+0j$ می‌زند.

۳ـ از رابطهٔ $Z=P-N$ مجهول Z به‌دست می‌آید که:

اگر $Z>0$ باشد سیستم ناپایدار است.

اگر $Z<0$ باشد، سیستم پایدار است.

اگر $Z=0$ باشد، بایستی دو حالت زیر بررسی شود.

۱ـ اگر دیاگرام نایکوئیست از نقطه $-1+j0$ عبور کند، سیستم در مرز پایداری است.

۲ـ اگر دیاگرام نایکوئیست از نقطه $-1+j0$ عبور نکند سیستم پایدار است.

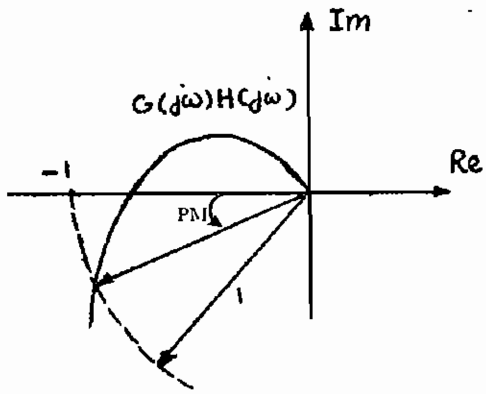
نکته : اگر به جای رسم $G(s)H(s)$ یعنی تابع مشخصه سیستم مدار باز، تابع $1+G(s)H(s)$ یعنی تابع مشخصه سیستم مدار بسته را رسم نماییم، N به جای تعداد دوران حول نقطه $-1+0j$ تعداد دوران حول نقطه صفر خواهد بود.

نکته : منحنی $1+G(s)H(s)$ در صفحه مختلط نسبت به محور حقیقی متقارن است. بنابراین کافی‌است مقادیر مثبت ω یعنی از صفر تا بی‌نهایت را رسم کنیم. اما دوران حاصله از این عمل باید نهایتاً در 2 ضرب شود تا تعداد دوران را به ازای تغییرات ω از $-\infty$ تا $+\infty$ داشته باشیم.

۲ـ حاشیه بهره و حاشیه فاز

هرچه مکان $G(j\omega)H(j\omega)$ به وضعیت دور زدن نقطه $-1+0j$ نزدیکتر شود پاسخ سیستم بیشتر نوسانی است. نزدیک بودن مکان $G(j\omega)H(j\omega)$ به نقطه $-1+0j$ معیاری برای حاشیه پایداری می‌باشد. میزان پایداری سیستمی که مدار باز و بسته‌ای پایدار دارد را با استفاده از حاشیه بهره و حاشیه فاز می‌توان تعیین نمود.

حاشیه (حد) فاز:



حاشیه فاز زاویه‌ای است که در آن $|G(j\omega)\ H(j\omega)|$ یعنی اندازه تابع تبدیل حلقه باز برابر یک می‌شود و سیستم درمرز ناپایداری قرار می‌گیرد. کافی است در دیاگرام نایکوئیست دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز مبدأ مختصات رسم کنیم تا منحنی را در نقطه‌ای با فرکانس ω_g قطع کند. در این نقطه فاز $\phi(\omega_g)$ را تعیین کرده و حاشیه فاز برابر مجموع 180° و زاویه $\phi(\omega_g)$ خواهد بود.

حاشیه فاز $PM=180+\phi(\omega_g)$

حاشیه (حد) بهره:

حاشیه بهره، عکس اندازه $G(j\omega)H(j\omega)$ در فرکانسی است که در آن زاویه فاز برابر 180° باشد.

$$\text{حاشیه بهره}\quad GM=\frac{1}{\left|G(j\omega)H(j\omega)\right|_{\omega=\omega_\pi}}$$

$$GM(db)=20\log GM=-20\log\left|G(j\omega)H(j\omega)\right|_{\omega=\omega_p}$$

ω_p فرکانس قطع فاز یا فرکانسی است که در آن زاویه فاز تابع تبدیل حلقه باز برابر 180 است.

اگر GM بزرگتر از یک باشد حاشیه بهره مثبت و اگر کوچکتر از یک باشد حاشیه بهره منفی است و منفی بودن آن به معنی ناپایدار بودن سیستم است. GM مقداری برحسب d b است که ما مجاز هستیم در مدار افزایش دهیم، قبل از این که سیستم مدار بسته ناپایدار شود. برای تعیین پایداری سیستم حلقه بسته ابتدا مقدار ω_p و ω_g را توسط روابط زیر به‌دست می‌آوریم و از روی آن‌ها حاشیه بهره و حاشیه فاز را محاسبه می‌کنیم.

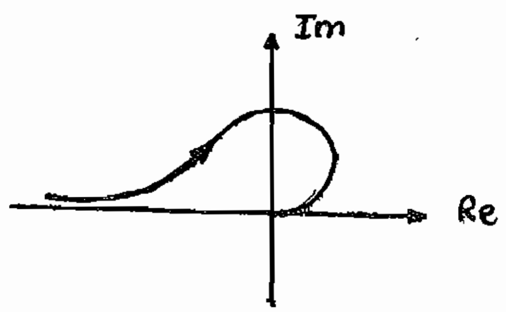
$$\angle\left[G(j\omega)H(j\omega)\right]_{\omega=\omega_p}=-\pi \;\rightarrow\; GM=\frac{1}{\left|G(j\omega)H(j\omega)\right|_{\omega=\omega_p}}$$

$$\left|G(j\omega)H(j\omega)\right|_{\omega=\omega_g}=1 \;\rightarrow\; PM=180+\angle\left[G(j\omega)H(j\omega)\right]_{\omega=\omega_g}$$

برای این که سیستم پایدار باشد باید $GM>1$ و $PM>0$ باشد.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۵

دیاگرام نایکوئیست زیر، پاسخ فرکانسی کدام یک از توابع انتقال داده شده است؟



۱) $\dfrac{1}{S^2(S+2)}$

۲) $\dfrac{1}{S^2(S+1)(S+2)}$

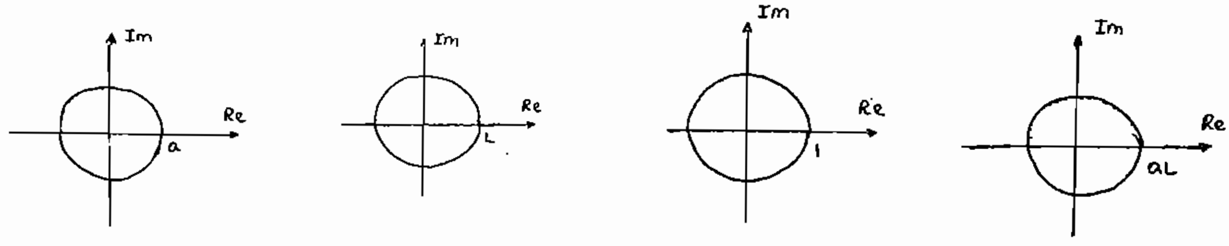
۳) $\dfrac{(S+1)}{S^2(S+2)}$

۴) $\dfrac{(S+1)(S+2)}{S^2}$

در فرکانس‌های بالا $(\omega\to\infty)$ زاویه فاز -360 است. لذا باید تفاضل درجه مخرج از صورت 4 واحد باشد که تنها در گزینه ۲ چنین است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۷

کدام‌یک از شکل‌های نشان داده شده ، نمودار نایکوئیست سیستم با تابع تبدیل $G(S)=ae^{SL}$ را نشان می‌دهد؟



۱)　　　　۲)　　　　۳)　　　　۴)

در فرکانس صفر اندازه سیستم a است.

$$|G(S)|=\left|ae^{SL}\right| \Rightarrow |G(j\omega)|=\left|ae^{j\omega L}\right|_{\omega\to 0}=|a|$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست مهندسی مکانیک ـ سال ۷۸

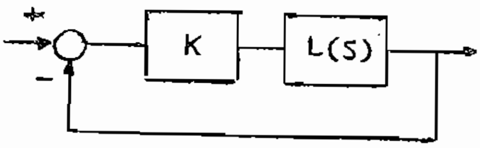
نمودار قطبی (نایکوئیست) مدار باز L (S) سیستم کنترلی زیر در شکل نشان داده شده است. در صورتی‌که(L (S یک تابع تبدیل حداقل فاز باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر در مورد این سیستم صحیح است؟

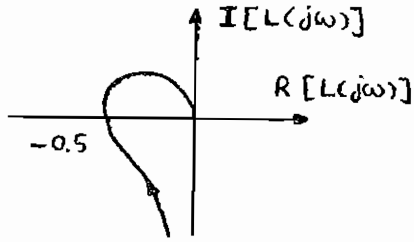
۱) سیستم نوع صفر و پایدار است.

۲) سیستم نوع صفر و پایدار است و محدوده پایداری $0<K<2$ است.

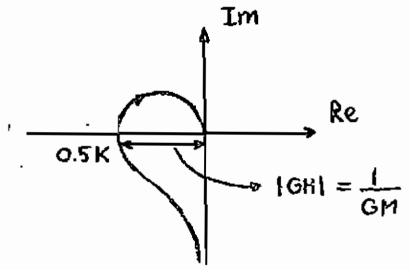
۳) سیستم نوع یک و پایدار و محدوده پایداری $K>2$ است.

۴) سیستم نوع یک و پایدار است و محدوده پایداری $0<K<2$ است.





با توجه به منطقه‌ای که نمودار از آن‌جا شروع شده، سیستم نوع یک است (چون سیستم می‌نیمم فاز است و زاویه شروع نمودار $-\frac{\pi}{2}$ است).



در محل برخورد نمودار نایکوئیست با محور Re داریم:

$$\mathrm{Im}\left[GH(j\omega)\right]=0 \Rightarrow \angle GH(j\omega)=-\pi \Rightarrow \omega=\omega_p$$

$$GM=-20\log\left|GH(j\omega)\right|_{\omega=\omega_p}$$

برای این‌که سیستم پایدار باشد باید $GM>0$ باشد و بنابراین:

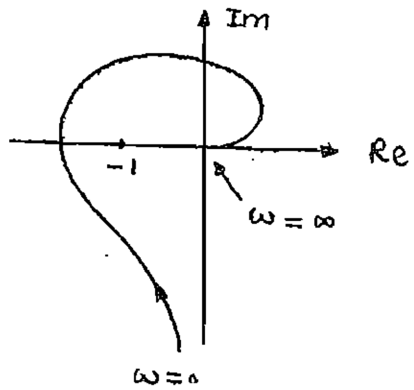
$$\begin{cases} \left|GH(j\omega)\right|<1 \\ \left|GH(j\omega)\right|_{\omega=\omega_p}=0.5K \end{cases}$$

$$0.5K<1 \Rightarrow K<2 \xrightarrow{\text{K باید مثبت باشد}} 0<K<2$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست: مهندسی هسته‌ای ـ سال ۸۰

منحنی نایکوئیست سیستمی در شکل زیر داده شده است. تابع تبدیل این سیستم کدام است؟



۱) $\dfrac{K}{S(S+1)(S+2)(S+3)}$

۲) $\dfrac{K}{S^2(S+1)(S+2)}$

۳) $\dfrac{K(S+2)(S+3)}{S(S+1)}$

۴) $\dfrac{K(S+1)}{S^2(S+2)}$

سیستم نوع یک است لذا یکی از گزینه‌های 1 تا 3 درست است. چون با توجه به گزینه‌ها سیستم می‌نیمم فاز است در $\omega\to\infty$ باید زاویه $-360°$ باشد یعنی باید :

$$-90(m-n)=-360 \Rightarrow m-n=4$$

یعنی تفاضل درجه صورت و مخرج 4 است.

گزینه ۱ صحیح است.

تست : مهندسی هسته‌ای سال ۸۰

منحنی نایکوئیست سیستمی به‌صورت شکل زیر داده شده است. کدام یک از توابع زیر می‌توانند تابع تبدیل این سیستم باشد؟

۱) $\dfrac{K(S+1)^2}{S^3}$

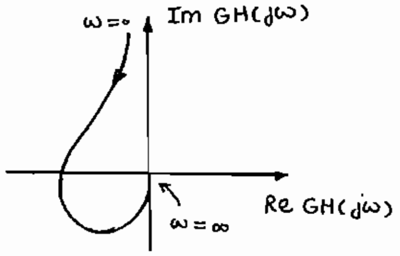
۲) $\dfrac{KS^3}{(S+1)^2}$

۳) $\dfrac{K(S+1)}{S^3}$

۴) $\dfrac{KS^3}{(S+1)}$

سیستم نوع 3 است لذا یکی از گزینه‌های 1 یا 3 درست است. با توجه به گزینه‌ها سیستم می‌نیمم فاز است بنابراین چون زاویه در بی‌نهایت $-90°$ است باید تفاضل درجه صورت و مخرج 1 باشد یعنی :

$$-90(3-2)=-90$$



لذا باید درجه صورت 2 باشد.

گزینه ۱ صحیح است.

تست: مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۸

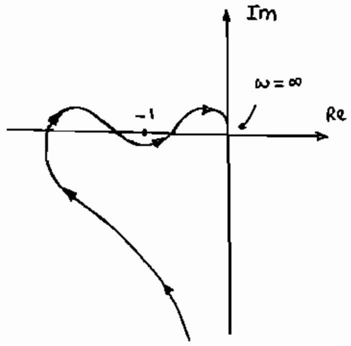
منحنی نایکوئیست یک سیستم می‌نیمم فاز در شکل زیر داده شده است در مورد این سیستم کدام بیان زیر درست است؟

۱) سیستم پایدار است.

۲) با افزایش بهره تقویت مسیر مستقیم سیستم ناپایدار می‌شود.

۳) با کاهش بهره تقویت مسیر مستقیم ناپایدار می‌شود.

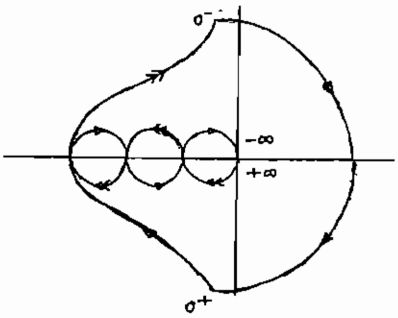
۴) هر سه بیان درست است.



منحنی به ازای ω از 0 تا ∞ رسم شده است. با رسم منحنی به ازای ∞- تا 0 منحنی را کامل می‌کنیم.

سیستم با موقعیت فعلی پایدار است زیرا $N=0$ است و چون می‌نیمم فاز است $P=0$ بنابراین $Z=0$

اگر K زیاد شود شکل بازتر می‌شود و 1- داخل اولین قوس (از سمت مبدا) می‌افتد و $P=0\ ,N=2$ و $Z=2$ و سیستم ناپایدار می‌شود.



گزینه ۲ صحیح است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۵

تابع انتقال یک سیستم مدار باز از قرار $G(S)=\dfrac{1}{S(S+2)^2}$ است. حد بهره (G M) این سیستم برابر کدام مقدار است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) 4 ۴) 16

$$\angle GH(j\omega)=-\pi \quad\Rightarrow\quad \omega=\omega_p$$

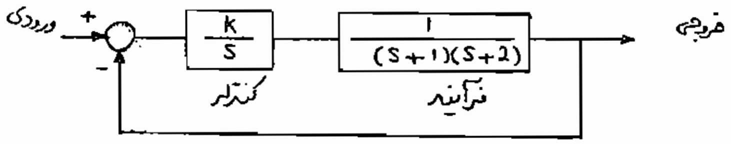
$$\angle\frac{1}{S(S+2)^2}=-90-2\tan^{-1}\frac{\omega}{2}=-180 \quad\Rightarrow\quad \omega_p=2$$

$$GM=\frac{1}{|GH(j\omega)|_{\omega=\omega_p}}=\frac{1}{\dfrac{1}{|\omega|\left(\omega^2+4\right)}}\Bigg|_{\omega_p=2}=|\omega_p|\left(\omega_p^2+4\right)\Big|_{\omega_p=2}=16$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۷

در سیستم زیر، برای صفر کردن خطای حالت ماندگار در مقابل ورودی‌های مبنای پله‌ای از یک کنترلر انتگرال‌گیر استفاده شده است. مقدار بهره K برای این‌که سیستم حلقه بسته دارای حد بهره برابر 2 گردد کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟



۱) K = 2

۲) K = 3

۳) K = 6

۴) K = 12

$$G(S)H(S)=\frac{K}{S(S+1)(S+2)} \Rightarrow GH(j\omega)=\frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

$$\angle GH(j\omega)=0-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\omega-\tan^{-1}\frac{\omega}{2}=-\pi$$

$$\tan^{-1}\omega+\tan^{-1}\frac{\omega}{2}=\frac{\pi}{2}$$

یادآوری $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\tan(\alpha+\beta)$

$$\frac{\omega+\frac{\omega}{2}}{1-\frac{\omega^2}{2}}=\tan\frac{\pi}{2}=\infty \Rightarrow 1-\frac{\omega^2}{2}=0 \Rightarrow \omega=\omega_p=\sqrt{2}$$

$$|GH(j\omega)|=\frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+4}} \quad , \quad \omega_p=\sqrt{2}$$

$$|GH(j\omega)|=\frac{K}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{6}}=\frac{K}{6}$$

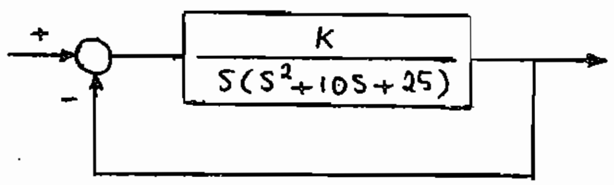
$$GM=\frac{1}{|GH(j\omega)|_{\omega=\omega_p}}$$

$$GM=\frac{6}{K}=2 \Rightarrow K=3$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست: مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۹

در سیستم کنترل شکل زیر به ازای کدام مقدار K حد بهره سیستم برابر 12db می‌شود ؟



۱) 12.5

۲) 25.4

۳) 48.5

۴) 62.8

$$G(S)=\frac{K}{S(S+5)^2}$$

$$\angle G(S)=0-\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}\frac{\omega}{5}=-\pi$$

$$2\tan^{-1}\frac{\omega}{5}=\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \tan^{-1}\frac{\omega}{5}=\frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad \omega=\omega_p=5$$

$$GM=\frac{1}{\left|G(S)\right|_{\omega=\omega_p}}=\frac{1}{\dfrac{K}{\omega_p\left(\omega_p^2+25\right)}}=\frac{5(25+25)}{K}$$

$$GM=\frac{250}{K}$$

$$12=20\log.. \quad\Rightarrow\quad x=3.98$$

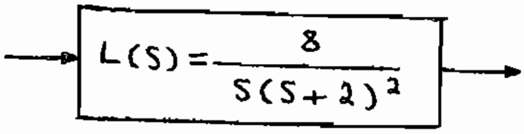
$$=\frac{250}{GM}=\frac{250}{3.98}=62.8$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۷۹

تابع انتقال مدار باز یک سیستم به‌صورت زیر است.سیستم مدار بسته دارای کدام‌یک از حدهای زیر است؟

۱) $GM=0$ ۲) $GM=1$ ۳) $GM=2$ ۴) $GM=\infty$



$$GH(j\omega)=\frac{8}{j\omega(j\omega+2)^2}$$

$$GM=\frac{1}{\left|GH(j\omega)\right|_{\omega=\omega_p}}$$

$$\angle GH(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_p}=-\pi$$

$$\angle\frac{8}{j\omega(j\omega+2)^2}=0-\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}\frac{\omega}{2}=-\pi$$

$$\tan^{-1}\frac{\omega}{2}=\frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad \frac{\omega}{2}=1 \quad\Rightarrow\quad \omega=\omega_p=2$$

$$GM=\frac{1}{\left|GH(j\omega)\right|_{\omega=2}}=\frac{1}{\dfrac{8}{\omega_p\left(\omega_p^2+4\right)}}=\frac{2(4+4)}{8}=2$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست : مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۴

تابع تبدیل یک سیستم مدار باز به‌صورت $G(S)=\dfrac{2\sqrt{3}}{S(S+1)}$ است. حد فاز (PM) این سیستم برابر با کدام است؟

۱) -120 ۲) -30 ۳) 30 ۴) 120

$$\left|G(S)\right|=1 \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{2\sqrt{3}}{S(S+1)}\right|=1$$

$$\left|G(j\omega)\right|=1 \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{2\sqrt{3}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}\right|=1 \quad\Rightarrow\quad \omega^2\left(\omega^2+1\right)=12$$

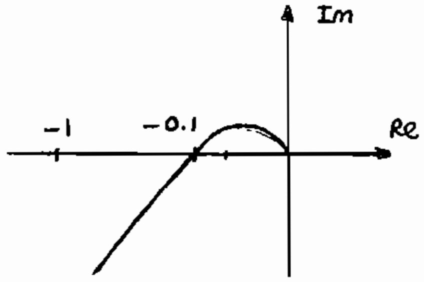
$$\omega^2=3 \quad\Rightarrow\quad \omega=\sqrt{3}$$

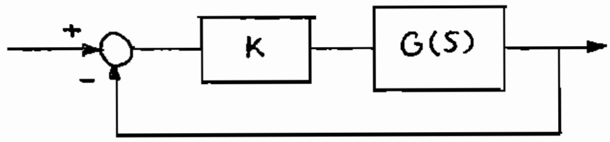
$$\angle G(j\omega)=0-90-\tan^{-1}\frac{\omega}{1}=-\frac{\pi}{1}-\tan^{-1}\sqrt{3}=\frac{-\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=-150$$

$$PM=180-150=30$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال : قسمتی از دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل مدار باز $G(s)$ در شکل الف رسم شده است با قرار دادن $G(s)$ در سیستم مدار بسته شکل ب معین کنید چه مقدار k باعث می‌شود تا حد بزرگ‌نمایی مساوی 8 db گردد؟



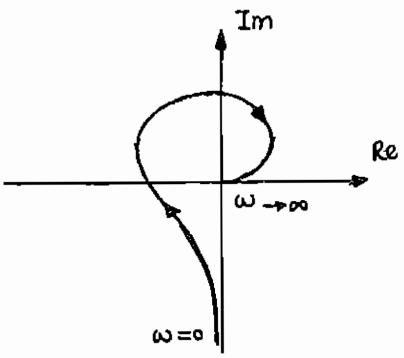


$$GM=20\log\frac{1}{|GH|}=20\log\frac{1}{0.1k}=8$$

$$\log\frac{10}{k}=0.4 \quad\rightarrow\quad 10^{0.4}=\frac{10}{k} \quad\rightarrow\quad k=3.98 \quad 4$$

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۹

دیاگرام نایکوئیست زیر متعلق به کدام تابع انتقال است.



۱) $\dfrac{k}{s(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$

۲) $\dfrac{ks}{s(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$

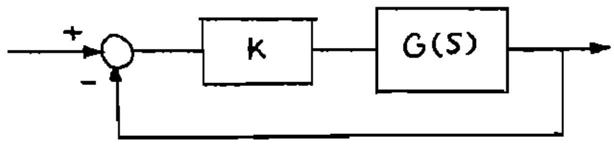
۳) $\dfrac{k(s+\sigma)}{s(s+\beta)(s+\gamma)}$

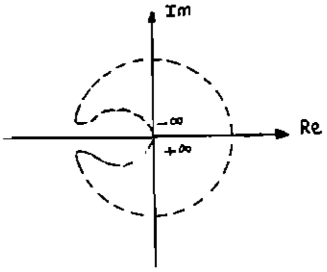
۴) $\dfrac{ks(s+\sigma)}{s(s+\beta)(s+\gamma)}$

چون در فرکانس صفر $(j\omega=0)$ و نتیجتاً در $s=0$ تابع به سمت بی‌نهایت میل کرده است باید در مخرج تابع تبدیل، s آزاد وجود داشته باشد پس یکی از گزینه‌های ۱ یا ۳ صحیح است. از طرفی منحنی در $\omega=\infty$ بر محور حقیقی مماس است یعنی زاویهٔ آن $360°$ یا $90°\times 4$ است. بنابراین تعداد قطب‌های تابع تبدیل باید 4 تا بیشتر از تعداد صفرهای آن باشد و در نتیجه گزینه ۱ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۶۹

سیستم شکل الف که در آن $G(s)$ هیچ صفر و قطبی در سمت راست صفحه s ندارد دارای منحنی نایکوئیست به شکل ب است.





۱) این سیستم همواره پایدار است.

۲) این سیستم همواره ناپایدار است.

۳) این سیستم در مرز ناپایداری است.

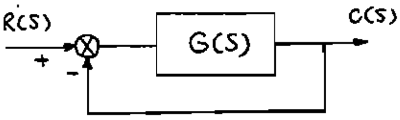
۴) ناپایدار است ولی با افزایش ضریب تقویت پایدار می‌شود.

با توجه به این که هیچ‌گونه صفر و قطبی در سمت راست صفحه وجود ندارد و همچنین منحنی نایکوئیست نقطه $-1 + 0j$ را دور نزده است $Z = N = P = 0$ است و سیستم همواره پایدار است.

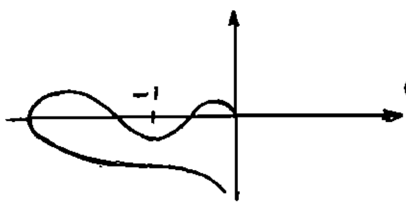
گزینه ۱ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۳

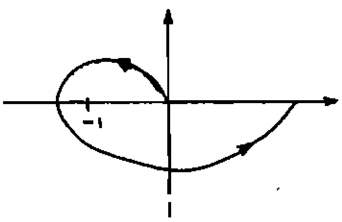
با در نظر گرفتن سیستم فیدبک زیر چنانچه $G(s)$ پایدار باشد. کدام پاسخ فرکانسی برای $G(s)$ منجر به یک سیستم بسته پایدار می‌شود؟



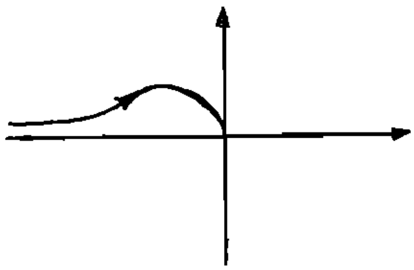
۱)



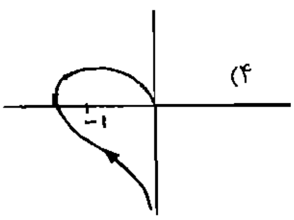
۲)



۳)



۴)

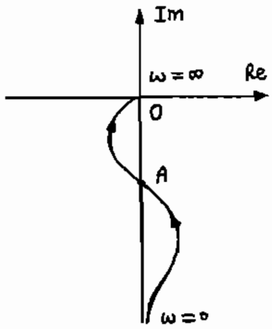


چون تابع مدار باز $G(s)$ در این‌جا پایدار است، طبق قضیه نایکوئیست سیستم مدار بسته در صورتی پایدار ست که نمودار $G(j\omega)$ نقطه $-1 + 0j$ را دربر نگیرد.

گزینه ۱ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۳

نمایش تقریبی دیاگرام نایکوئیست سیستم $\frac{1+5s}{s(1+s)(1+2s)}$ در شکل زیر رسم شده، مقدار ω در نقطه A و طول OA چقدر است؟



۱) $OA=\frac{2}{3}\sqrt{2}$ $\quad \omega_A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲) $OA=2\sqrt{2}$ $\quad \omega_A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $OA=2\sqrt{5}$ $\quad \omega_A=\frac{\sqrt{5}}{5}$

۴) $OA=\frac{5\sqrt{5}}{3}$ $\quad \omega_A=\frac{\sqrt{5}}{5}$

متغیر s را با $j\omega$ جایگذاری می‌کنیم و سپس کسر تابع تبدیل را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{2\omega^2\left(-5\omega^2+1\right)-j\omega\left(13\omega^2+1\right)}{\omega^2\left(1+\omega^2\right)\left(1+4\omega^2\right)}$$

برای به‌دست آوردن ω_A فرکانس مربوط به تلاقی نمودار با محور موهومی را به‌دست می‌آوریم. در این نقطه مقدار حقیقی تابع تبدیل صفر است.

$$2\omega^2\left(-5\omega^2+1\right)=0 \rightarrow \omega_A=0 \quad , \quad \omega_A=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

با جایگذاری ω_A در فرمول فوق طول OA به‌دست می‌آید.

$$OA=\frac{\omega_A\left(13\,\omega_A^2+1\right)}{\omega_A^2\left(1+\omega_A^2\right)\left(1+4\,\omega_A^2\right)}=\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۱

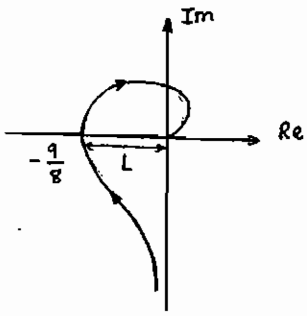
شکل مقابل دیاگرام نایکوئیست سیستمی با تابع تبدیل $G(S)=\frac{K}{S(S+1)^3}$ را نشان می‌دهد (برای ω از صفر تا ∞) در این‌صورت مقدار K چقدر است؟

۱) $K=\frac{8}{9}$

۲) $K=1$

۳) $K=\frac{9}{8}$

۴) $K=8$



$$L=\mathrm{Re}\left|G(j\omega)H(j\omega)\right|=\frac{1}{GM}$$

$$GM=\frac{1}{\left|G(j\omega)H(j\omega)\right|_{\omega=\omega_p}}$$

$$\angle GH\Big|_{\omega=\omega_p}=-\pi \quad\Rightarrow\quad 0-\frac{\pi}{2}-3\tan^{-1}\omega_p=-\pi \quad\Rightarrow\quad \tan^{-1}\omega_p=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\quad \omega_p=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

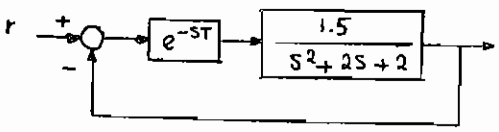
$$\left|G(j\omega)H(j\omega)\right|_{\omega=\omega_p}=\frac{K}{\omega_p\left(\sqrt{\omega_p^2+1}\right)^3}=\frac{K}{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^3}=\frac{9K}{8}$$

$$\frac{9K}{8}=\frac{9}{8}\quad\Rightarrow\quad K=1$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۴

سیستم مدار بسته نشان داده شده به ازای چه مقادیری از T پایدار خواهد بود.



۱) در ازای $T>2$

۲) در ازای $T<1$ سیستم پایدار خواهد بود.

۳) در ازای $T<0.1$ سیستم پایدار خواهد بود.

۴) به ازای کلیه مقادیر T سیستم پایدار خواهد بود.

تابع تبدیل حلقه باز سیستم برابر است با:

$$GH(S)=\frac{1.5e^{-ST}}{S^2+2S+2}$$

$$GH(j\omega)=\frac{1.5e^{-j\omega T}}{(j\omega)^2+2(j\omega)+2}=\frac{1.5e^{-j\omega T}}{\left(2-\omega^2\right)+2j\omega}$$

$$\left|GH\left(j\omega_g\right)\right|=1 \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{1.5e^{-j\omega_g T}}{\left(2-\omega^2\right)+2j\omega}\right|=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1.5}{\sqrt{\left(2-\omega_g^2\right)^2+4\omega_g^2}}=1$$

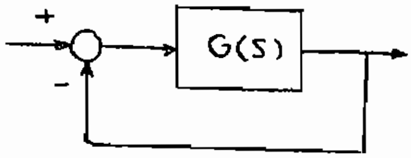
$$\frac{9}{4}=\left(2-\omega_g^2\right)^2+4\omega_g^2 \quad\Rightarrow\quad 4-4\omega^2{}_g+\omega_g^4+4\omega^2{}_g=\frac{9}{4} \quad\Rightarrow\quad \omega_g^4=\frac{9}{4}-4<0 \quad\Rightarrow\quad \omega_g \text{ وجود ندارد } \quad\Rightarrow\quad PM>0$$

$$\Rightarrow\quad 0<\left|GH(j\omega)\right|<1 \quad\Rightarrow\quad -20\log\left|GH\left(j\omega_p\right)\right|>0 \quad\Rightarrow\quad GM>0$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۴

در سیستم شکل زیر سیستم مدار باز دارای یک قطب در نیم صفحه سمت راست (از صفحه مختلط) و 4 قطب در نیم صفحه سمت چپ و دارای سه صفر در نیم صفحه سمت چپ است. سیستم مدار بسته دارای یک قطب در نیم صفحه سمت راست و 4 قطب در نیم صفحه سمت چپ و سه صفر در نیم صفحه سمت چپ است. تعداد دوران دیاگرام نایکوئیست، N، حول نقطه 1- وقتی ω از $\omega=-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند چقدر است؟



۱) $N=-2$: تعداد دوران

۲) $N=-1$: تعداد دوران

۳) $N=0$: تعداد دوران

۴) $N=+2$: تعداد دوران

تابع تبدیل حلقه باز سیستم برابر است با:

$G(S)H(S)=G(S) \quad , \quad H(S)=1$

تعداد قطب‌های حلقه باز سیستم $=1+4=5$

تعداد قطب‌های حلقه باز در سمت راست محور موهومی $=P=1$

تعداد قطب‌های حلقه بسته سیستم $=1+4=5$

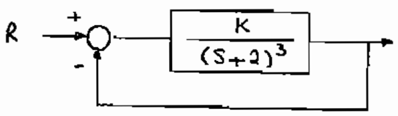
تعداد صفرهای معادله مشخصه در سمت راست محور موهومی = تعداد قطب‌های حلقه بسته سیستم در سمت راست محور موهومی $=Z=1$

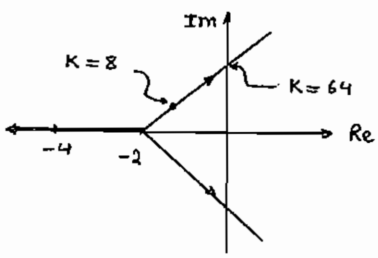
$Z=N+P \quad \Rightarrow \quad 1=N+1 \quad \Rightarrow \quad N=0$

گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۳

مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستم کنترلی نشان داده شده مطابق نمودار زیر است. اگر $K=8$ باشد برای این سیستم حاشیه بهره gain margin برابر است با:





۱) 4

۲) 8

۳) 16

۴) 32

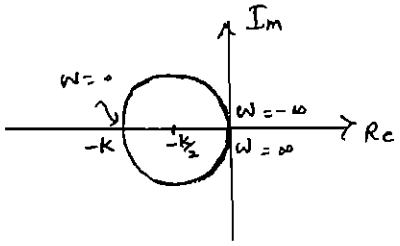
$$\angle GH(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_p}=-\pi \quad \Rightarrow \quad 0-3\tan^{-1}\left(\frac{\omega_p}{2}\right)=-\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_p=2\sqrt{3}$$

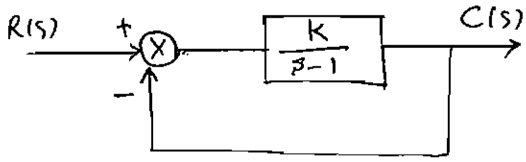
$$GM=\frac{1}{\left|GH(j\omega)\right|_{\omega=\omega_p}}=\frac{1}{\dfrac{K}{\left(\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+4}\right)^3}}=\frac{1}{\dfrac{8}{64}}=8$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست:

منحنی نایکوئیست سیستم کنترل مدار بسته زیر، نشان داده شده است. محدوده پایداری سیستم عبارت است از:





۱) $k \ge \frac{1}{2}$ ۲) $0 < k < 1$ ۳) $k > 1$ ۴) $\frac{1}{2} < k < 1$

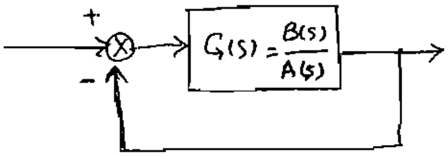
نیازی به استفاده از معیار پایداری نایکوئیست نیست. با استفاده از معیار ???:

$$1+\frac{K}{S-1}=0 \Rightarrow S-1+K=0 \Rightarrow S=1-K$$
$$1-K<0 \Rightarrow K>1$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست:

در سیستم شکل مقابل با، تابع تبدیل $G(S)$ رسته 5، فرض کنید معادله $A(S)=0$ دارای یک ریشه در نیم صفحه سمت راست محور موهومی در صفحه مختلط S و چهار ریشه در نیم صفحه چپ موهومی در صفحه S است. اگر دیاگرام نایکوئیست $G(S)$ وقتی ω از صفر تا ∞ تغییر کند، یک دور منفی حول نقطه -1 بچرخد، در مورد پایداری سیستم کدام پاسخ صحیح است؟



۱) سیستم مدار بسته 1 قطب ناپایدار دارد.

۲) سیستم مدار بسته 2 قطب ناپایدار دارد.

۳) سیستم مدار بسته 3 قطب ناپایدار دارد.

۴) سیستم مدار بسته پایدار است.

با توجه به اطلاعات داده شده:

$$N=P-Z$$
$$\left.\begin{matrix}P=1\\N=-1\end{matrix}\right\} \Rightarrow Z=P-N=1-(-1)=2$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست:

در قضیه پایداری نایکوئیست در رابطه $N=P-Z$ کدام عبارت صحیح است؟

۱) P تعداد قطب‌های ناپایدار مدار بسته و Z تعداد صفرهای ناپایدار مدار بسته است.

۲) P تعداد قطب‌های پایدار مدار بسته و Z تعداد صفرهای پایدار مدار بسته است.

۳) P تعداد قطب‌های ناپایدار مدار باز و Z تعداد قطب‌های ناپایدار در مدار بسته است.

۴) P تعداد قطب‌های پایدار مدار باز و Z تعداد صفرهای ناپایدار مدار بسته است.

گزینه ۳ صحیح است.

فصل نهم

دیاگرام بُد Bode Diagrame

دیاگرام بد از دو نمودار مجزا تشکیل شده است.

۱ـ دیاگرام پاسخ فرکانس اندازه

۲ـ دیاگرام پاسخ فرکانس زاویه (فاز)

نمودار پاسخ فرکانسی اندازه را برحسب دسی‌بل و فاز را برحسب درجه، نسبت به لگاریتم فرکانس سیگنال رسم می‌کنند.

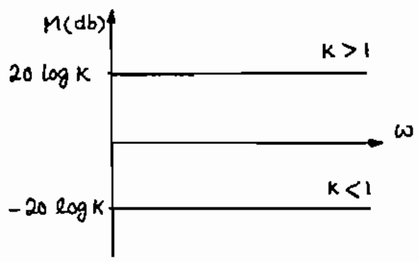
هرگاه فرکانس از ω به 10ω تغییر کند، باند فرکانسی را یک دهه (Decade) می‌گویند.

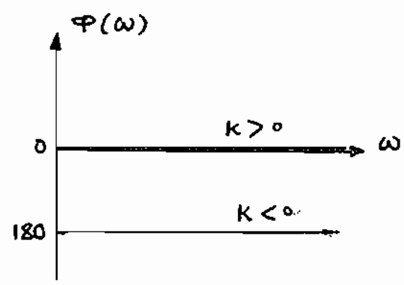
اگر فرکانس از ω به 2ω تغییر کند، باند فرکانسی را یک اکتاو (Octave) می‌نامند.

ترسیم نمودار بد

۱ ـ ضریب بهره یا بهره K

منحنی اندازه برای بهره ثابت K یک خط افقی است که از 20 log K عبور می‌کند. نمودار فاز برای بهره ثابت K صفر است.

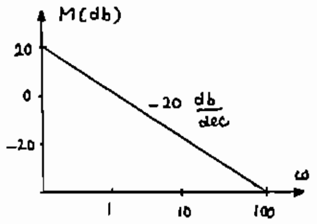


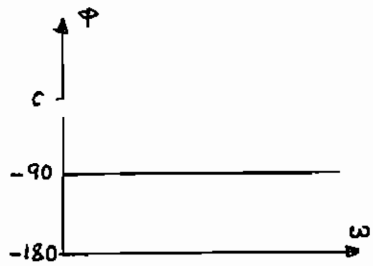


۲ـ قطب در مبدأ $\frac{1}{S}$ یا $\frac{1}{j\omega}$ (عامل انتگرالگیر)

منحنی اندازه در این حالت یک خط مستقیم با شیب ثابت $-20\frac{db}{dec}$ است و نمودار فاز مقدار ثابت -90° است.

$$M_{db} = 20\log\frac{1}{|j\omega|} = -20\log\omega \quad , \quad \phi = -90$$



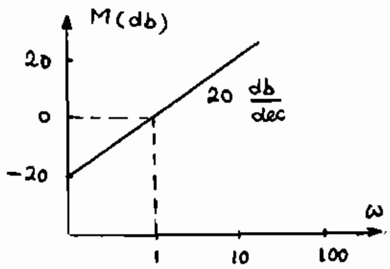


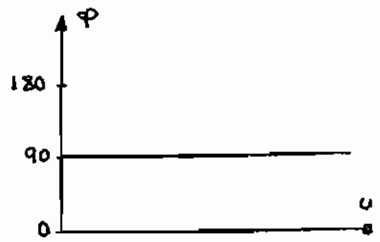
اگر در یک تابع تبدیل قطبی به‌صورت $\frac{1}{S^n}$ داشته باشیم در نمودار اندازه، شیب خط به‌جای $-20\frac{db}{dec}$ برابر $-20n\frac{db}{dec}$ و در نمودار فاز، زاویه فاز برابر $-90n$ خواهد بود.

۳ـ صفر در مبدأ S یا $j\omega$ (عامل مشتق‌گیر)

$$M_{db} = 20\log|j\omega| = 20\log\omega \quad , \quad \phi = 90$$

منحنی اندازه در این حالت یک خط مستقیم با شیب $20\frac{db}{dec}$ است و نمودار فاز مقدار فاز 90° می‌باشد.





اگر در یک تابع تبدیل صفری به‌صورت S^n داشته باشیم، در نمودار اندازه شیب خط به‌جای $20\frac{db}{sec}$ برابر $20n\frac{db}{sec}$ خواهد شد. در نمودار فاز نیز زاویه فاز به‌جای 90° برابر $90\,n$ خواهد شد.

۴ـ عوامل درجه اول $1+j\omega T$ و $\frac{1}{1+j\omega T}$

برای توان مثبت :

نمودار فاز در این حالت از صفر شروع شده و به 90° می‌رسد. نقطهٔ عطف این منحنی در فرکانس گوشه اتفاق می‌افتد.

$$M_{db} = 20\log|1+j\omega T| = 20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} \quad , \quad \phi = \angle(j\omega T+1)$$

$$\omega \quad \frac{1}{T} \;:\; M_{db} = 0$$

$$\omega \quad \frac{1}{T} \; : \; M_{db} = 20 \; \log \omega T$$

برای توان منفی :

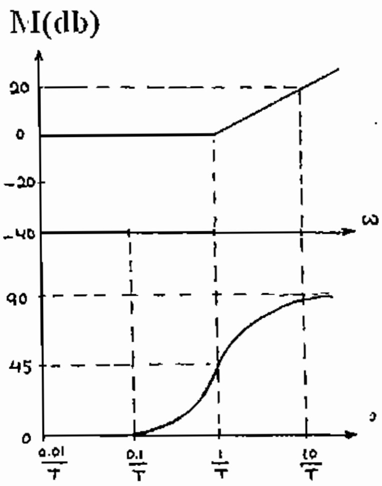
نمودار فاز در این حالت از صفر شروع شده و به -90° می‌رسد. نقطه عطف این منحنی نیز در فرکانس گوشه اتفاق می‌افتد.

$$M_{db} = 20 \; \log \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} \quad , \quad \phi = -\angle (j\omega T + 1)$$

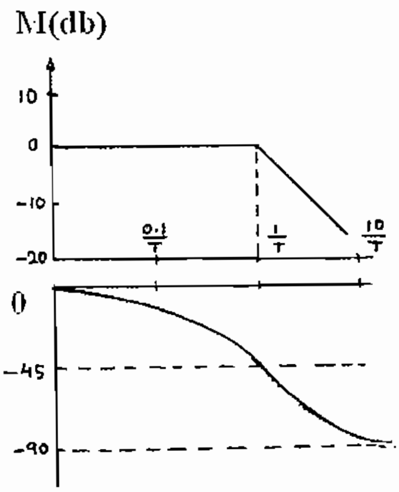
$$\omega \quad \frac{1}{T} \; : \; M_{db} = 0$$

$$\omega \quad \frac{1}{T} \; : \; M_{db} = -20 \; \log \omega T$$

$\omega = \frac{1}{T}$ محل تقاطع دو خط فوق در نمودار نسبت دامنه فرکانس گوشه نام دارد. به‌عبارت دیگر فرکانسی که در آن دو مجانب به هم می‌رسند یا با هم تلاقی می‌کنند، فرکانس گوشه یا فرکانس شکست نامیده می‌شود.



نمودار بد $1+j\omega T$



نمودار بد $\frac{1}{1+j\omega T}$

۵ـ عوامل درجه دوم $\left[1+2\xi\left[j\frac{\omega}{\omega_n}\right]+\left[j\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2\right]^{\pm 1}$ یا $\left[S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^2\right]^{\pm 1}$

برای توان منفی :

$$M_{db} = 20 \; \log \frac{1}{\left\| \left[1+2\xi\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] \right\|} = -20 \; \log \sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\phi = -\angle \tan \frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

نمودار فاز از صفر شروع شده و خود را به 180− می‌رساند. این نمودار دارای یک نقطه عطف در 90− است. بدیهی است که این نقطه عطف در فرکانس گوشه قرار دارد.

$\omega \quad \omega_n \qquad M_{db}=0 \quad , \quad \phi=0$

$\omega \quad \omega_n \qquad M_{db}=-40\log\dfrac{\omega}{\omega_n} \quad , \quad \phi=-180$

$\omega=\omega_n \qquad M_{db}=-20\ \log 2\xi \quad , \quad \phi=-90$

برای توان مثبت:

$$M_{db}=20\log\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}$$

$$\phi=\angle\tan\frac{2\xi\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

نمودار فاز در این حالت از صفر شروع شده و به 180 درجه می‌رسد و دارای یک نقطه عطف در 90 است.

$\omega \quad \omega_n \qquad M_{db}=0 \quad , \quad \phi=0$

$\omega \quad \omega_n \qquad M_{db}=40\ \log\dfrac{\omega}{\omega_n} \quad , \quad \phi=180$

$\omega=\omega_n \qquad M_{db}=20\ \log 2\xi \quad , \quad \phi=90$

نکته : در فرکانس‌های خیلی پایین (خیلی پایین‌تر از ω_n) فقط صفرها و قطب‌های موجود در مبدأ (یعنی s های آزاد) دارای شیب هستند. قدر مطلق این شیب 20 d b است.

بنابراین برای ترسیم نمودار بد ابتدا باید تابع تبدیل را به صورت عوامل اصلی نوشته و فرکانس گوشه هر یک از این عوامل را تعیین کنیم سپس منحنی‌های نسبت اندازه را با شیب مناسب در فرکانس‌های گوشه رسم کنیم. منحنی فاز هم از جمع منحنی‌های فاز هر کدام از عوامل به‌دست می‌آید.

۶ـ محاسبه مقدار اوج تشدید M_r

$$M_r=\left|G(j\omega)\right|_{max}$$

و فرکانس تشدید برابر است با:

$$M_r=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad , \quad 0\le\xi\le\frac{\sqrt{2}}{2}$$

به ازای $\xi>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ داریم: $M_r=1$

با میل کردن نسبت میرایی ξ به سمت صفر، فرکانس تشدید به‌سمت ω_n میل می‌کند.

برای مقادیر $\xi>\frac{\sqrt{2}}{2}$ درنمودار اندازه، هیچ اوج تشدیدی مشاهده نمی‌شود و منحنی اندازه با افزایش فرکانس ω به‌طور یکنواخت کاهش می‌یابد.

نکته : به‌خاطر دارید که فرکانس طبیعی میرا $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ می‌باشد. به ازای $0<\xi\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، فرکانس تشدید یا ω_r کمتر از فرکانس طبیعی میرای ω_d می‌باشد. در حالت کلی :

$$\omega_r<\omega_d<\omega_n$$

۷ـ سیستم‌های می‌نیمم فاز و غیر می‌نیمم فاز

اگر همه قطب‌ها و صفرهای سیستمی در سمت چپ محور موهومی قرار داشته باشد این سیستم می‌نیمم فاز یا کمیته فاز نام دارد. اگر حداقل یکی از قطب‌ها و یا صفرهای سیستمی در سمت راست محور موهومی قرار داشته باشد این سیستم نامی‌نیمم فاز یا ناکمیته فاز نامیده می‌شوند.

در سیستم می‌نیمم فاز زمانی‌که ω به‌سمت ∞ میل می‌کند زاویه فاز برابر $-90(n-m)$ است که در آن n درجه چند جمله‌ای مخرج و m درجه چند جمله‌ای صورت است.

بر خلاف زاویه فاز، شیب منحنی اندازه هنگامی که ω به‌سمت ∞ میل می‌کند برابر $-20(n-m)\frac{db}{dec}$ است و این ربطی به می‌نیمم فاز یا نامی‌نیمم فاز بودن سیستم ندارد.

۸ـ سیستم‌های تاخیری

سیستم تأخیری یک نوع سیستم می‌نیمم فاز است که عموماً دارای عبارتی به فرم $Ke^{-j\omega T}$ است و اندازه آن برابر است با:

$$\left|Ke^{-j\omega T}\right|=|K|\left|e^{-j\omega T}\right|=|K||\cos\omega T-j\sin\omega t|$$
$$=|K|\sqrt{\cos^2\omega T+\sin^2\omega T}=|K|$$

زاویه فاز این عبارت برابر است با:

$$\angle Ke^{-j\omega T}=\angle K+\angle e^{-j\omega T}=0+(-\omega T)=-\omega T$$

یعنی زاویه فاز به‌طور خطی با فرکانس ω در حال افزایش درجهت منفی است.

تست : مهندسی مکانیک ـ سال ۸۲

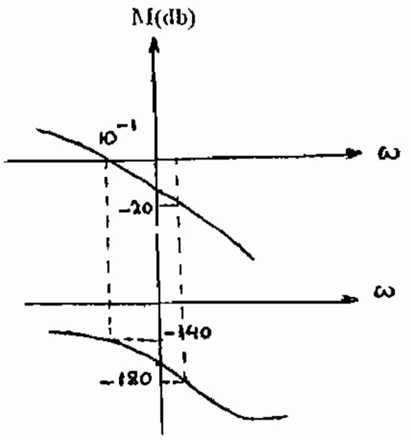
دیاگرام بد یک سیستم کنترل در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقادیر حد فاز (Phase Margin) و حد تقویت (Gain Margin) برای این سیستم کنترل برابر است با:

۱) $-40°$, $-20\,db$

۲) $-40°$, $20\,db$

۳) $-140°$, $-20\,db$

۴) $140°$, $20\,db$



$$GM=-20\log\left|G(j\omega)H(j\omega)\right|_{\omega=\omega_p}=-20\log10^{-1}=20db$$

$$PM=180+\angle G(j\omega)H(j\omega)$$

$$PM=180-140=40°$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۳

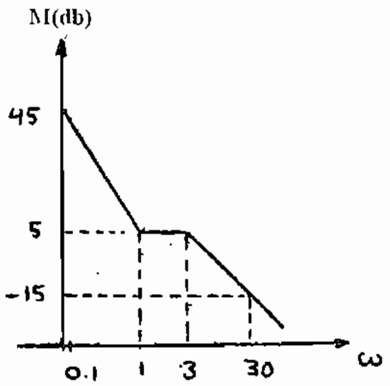
با توجه به شکل روبه‌رو، دیاگرام بد Bode مربوط به کدام تابع تبدیل است؟

۱) $G(S)=\dfrac{K(S+1)}{S(S+3)^2}$

۲) $G(S)=\dfrac{K\left(S^2+2S+1\right)}{S^2(S+3)}$

۳) $G(S)=\dfrac{K\left(S^2+3S+9\right)}{S^2(S+1)}$

۴) $G(S)=\dfrac{K(S+1)}{S^2\left(S^2+S+9\right)}$



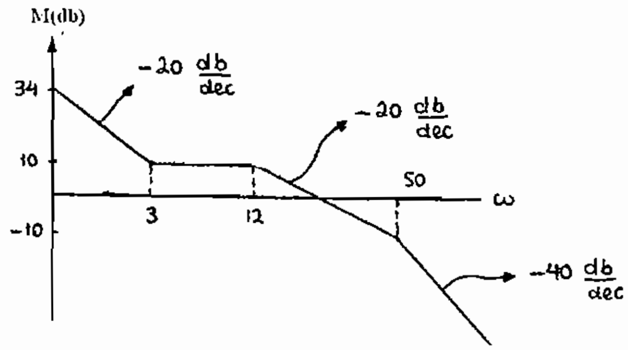
چون شیب دیاگرام بد در ابتدا برابر $-40\dfrac{db}{dec}$ است تابع تبدیل سیستم دارای ضریب S^2 در مخرج است. همچنین چون در $\omega=1\dfrac{rad}{sec}$ این شیب صفر شده پس تابع تبدیل دارای صفر $(S+1)^2$ در صورت است. در فرکانس گوشه $\omega=3\dfrac{rad}{sec}$ شیب دیاگرام $-20=\dfrac{db}{dec}$ شده است و بنابراین یک قطب به‌صورت $(S+3)$ در تابع تبدیل سیستم وجود دارد و نهایتاً تابع تبدیل سیستم به‌صورت زیر در می‌آید:

$$G(S)=\frac{K(S+1)^2}{S^2(S+3)}=\frac{K\left(S^2+2S+1\right)}{S^2(S+3)}$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۷۱

نمودار قدرمطلق Bode سیستمی به‌صورت زیر است. تابع تبدیل آن کدام است؟



۱) $\dfrac{10+(1+3S)}{S(1+2S)(1+0.5S)}$

۲) $\dfrac{10(1+3S)}{S(1+2S)(1+0.5S)}$

۳) $\dfrac{5\left(1+\frac{1}{3}S\right)}{S(1+0.12S)(1+0.5S)}$

۴) $\dfrac{\left(1+\frac{1}{3}S\right)}{S\left(1+\frac{1}{12}S\right)\left(1+\frac{1}{50}S\right)}$

شیب $-20\dfrac{db}{dec}$ در آغاز نمودار نشان دهنده یک قطب در صفر است. پس در مخرج تابع تبدیل یک عامل S خواهیم داشت. در فرکانس‌گوشه $\omega=3\dfrac{rad}{sec}$ شیب صفر شده که نشان‌دهنده وجود یک صفر است در فرکانس گوشه $\omega=12\dfrac{rad}{sec}$ شیب نمودار $-20\dfrac{db}{sec}$ شده که نشان‌دهنده وجود یک قطب دیگر در تابع تبدیل سیستم است. در فرکانس گوشه $\omega=50\dfrac{rad}{sec}$ نیز شیب نمودار $-20\dfrac{db}{dec}$ افزایش یافته که نشان‌دهنده اضافه شدن یک قطب دیگر به تابع تبدیل است. بنابراین:

$$G(S)=\frac{K\left(1+\frac{1}{3}S\right)}{S\left(1+\frac{1}{12}S\right)\left(1+\frac{1}{50}S\right)}$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۷۳

دیاگرام اندازه و فاز یک سیستم در شکل زیر داده شده است تابع انتقال سیستم را تعیین کنید.

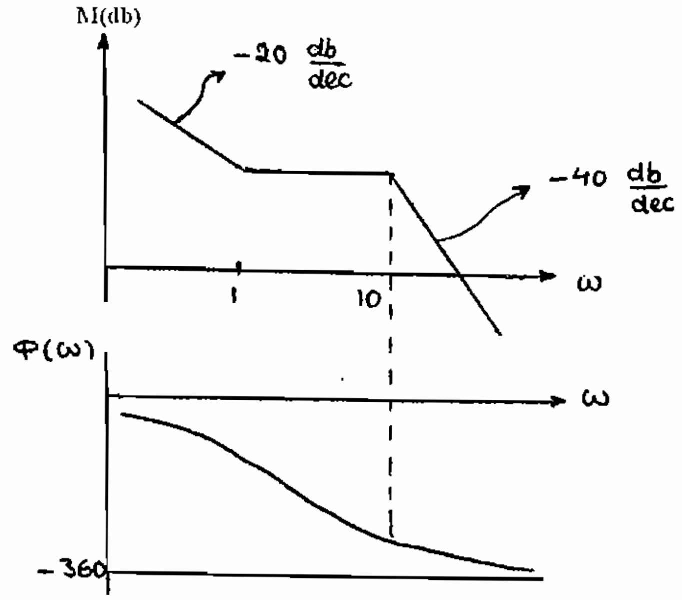
۱) $G(S)=\dfrac{K(S+1)}{S(S+10)^2}$

۲) $G(S)=\dfrac{K(S+1)}{(S+10)^2}$

۳) $G(S)=\dfrac{K(-S+1)}{(S+1)(S+10)}$

۴) $G(S)=\dfrac{K(-S+1)}{S(S+10)^2}$

شیب $-20\frac{db}{dec}$ در ابتدای نمودار نشان دهنده یک قطب در مبدا است. پس از آن شیب نمودار در $\omega=1\frac{rad}{sec}$ صفر شده و در $\omega=10\frac{rad}{sec}$ به $-40\frac{db}{dec}$ کاهش می‌یابد بنابراین یک صفر در فرکانس گوشه 1 و یک قطب مضاعف در فرکانس گوشه 10 باید وجود داشته باشد پس تابع تبدیل عبارت است از:



$$G(S)=\frac{K(S+1)}{S(S+10)^2}$$

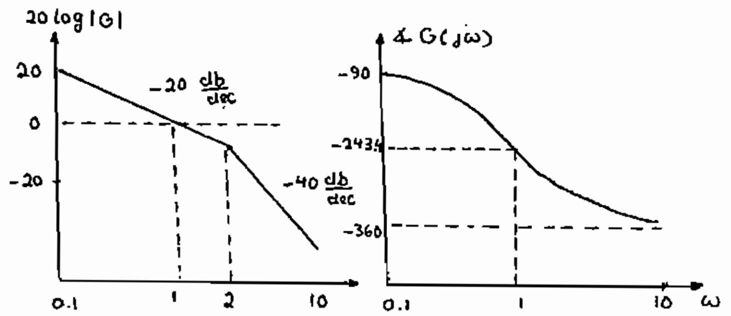
چون دیاگرام فاز داده شده است می‌نیمم فاز بودن سیستم را چک می‌کنیم. چون تفاضل درجه صورت و مخرج تابع تبدیل 2 است با میل کردن ω به سمت ∞ باید زاویه فاز $2(-90)$ گردد در حالی‌که چنین نیست بنابراین سیستم نامی‌نیمم فاز است و تابع تبدیل حلقه باز را به‌صورت زیر تصحیح می‌کنیم:

$$G(S)=\frac{-K(S-1)}{S(S+10)^2}=\frac{K(-S+1)}{S(S+10)^2}$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۷۷

پاسخ فرکانسی یک سیستم غیر می‌نیمم فاز در شکل زیر داده شده است. تابع انتقال سیستم برابر کدام است؟



۱) $G(S)=\frac{(S-0.5)}{S(S+0.5)(S+2)}$

۲) $G(S)=\frac{2(S-0.5)}{S(S+0.5)(S+2)}$

۳) $G(S)=\frac{2}{S(S+2)}$

۴) $G(S)=\frac{1}{S(S+2)}$

گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست هستند. چون غیر می‌نیمم فاز نیستند پس فرم کلی تابع انتقال باید به‌صورت زیر باشد:

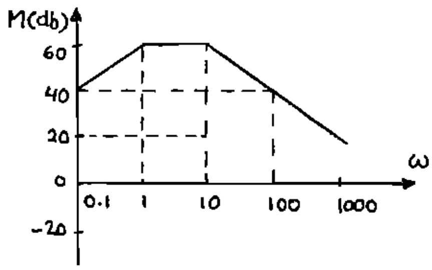
$$G(S)=\frac{K(S-0.5)}{S(S+0.5)(S+2)}$$

با توجه به نمودار اندازه در فرکانس $\omega=1$ اندازه db 0 شده است. که معادل 1 در مقیاس غیر لگاریتمی است.

گزینه ۱ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۷

دیاگرام Bode برای سیستم کنترل در حوزه ω نشان داده شده است. کدام‌یک از روابط زیر تابع تبدیل سیستم $G(s)$ را تعریف می‌کند.؟



۱) $G(s)=\dfrac{1000}{(10+s)(s+100)}$

۲) $G(s)=\dfrac{1000}{s^2(10+s)}$

۳) $G(s)=\dfrac{1000s}{(1+s)(s+10)}$

۴) $G(s)=\dfrac{4000}{s(s+1)(s+10)}$

شروع نمودار از 40db بوده بنابراین k سیستم به روش زیر به‌دست می‌آید:

$$40=20\mathrm{Log}k \longrightarrow \mathrm{Log}k=2 \longrightarrow k=10^2=100$$

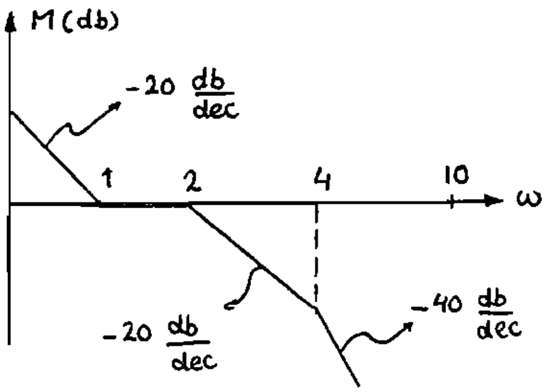
در $\omega=0$ یک شیب مثبت 20 دسی‌بل وجود دارد که بیانگر یک صفر در صورت تابع تبدیل می‌باشد. در $\omega=1$ یک شیب منفی 20 دسی‌بل وجود دارد که نشان دهنده یک قطب درجه اول در مخرج است و در $\omega=10$ یک شیب منفی 20 دسی‌بل وجود دارد که نشان‌دهنده یک قطب درجه اول دیگر در مخرج می‌باشد.

$$G(s)=100\times\frac{s}{1}\times\frac{1}{\left(\frac{s}{1}+1\right)}\times\frac{1}{\left(\frac{s}{10}+1\right)}=\frac{1000s}{(s+1)(s+10)}$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۰

کدام‌یک از پاسخ‌های زیر نمایش تابع تبدیل سیستمی است که مجانب‌های نمودار Bode آن $M(\omega)$ بر حسب دسی‌بل و (ω) در شکل مقابل نمایش داده شده و سیستم هیچ قطب یا صفری در نیم صفحه راست صفحه مختلط ندارد؟



۱) $\dfrac{1+2s}{s(s+1)(1+4s)}$

۲) $\dfrac{1+2s}{s+(1+0.5)(1+s)}$

۳) $\dfrac{1+s}{s(1+0.5s)(1+0.25s)}$

۴) $\dfrac{1+s}{s(1+2s)(1+4s)}$

تابع تبدیل کل، حاصل‌ضرب چهار تابع تبدیل است که هر کدام در نمودار بد یک خط صاف هستند. از سمت چپ نمودار شروع کرده، تابع تبدیل مربوط به شیب اول را نوشته و به ترتیب تا انتهای راست نمودار پیش می‌رویم.

تابع تبدیل	باند فرکانس
$\frac{1}{s}$	$\omega < 1 \left(\text{rad}/\text{s}\right)$
$(s+1)$	$1 < \omega < 2$
$\frac{1}{\left(1+\frac{s}{2}\right)}$	$2 < \omega < 4$
$\frac{1}{\left(1+\frac{s}{4}\right)}$	$\omega > 4$

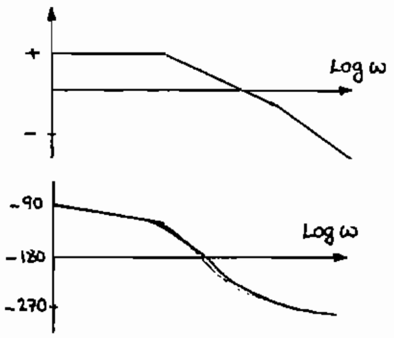
$$\longrightarrow G(s) = \frac{1+s}{s(1+0.5s)(1+0.25s)}$$

از اولین مجانب (یا شیب)سمت چپ مقدار ضریب ثابت تابع تبدیل را به‌دست می‌آوریم که عدد 1 است زیرا که شیب با ضریب زاویه 20- محور افقی را در فرکانس $1 \text{rad}/\text{s}$ تلاقی کرده است.

گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۶

دیاگرام بد (Bode) یک سیستم در شکل زیر نشان داده شده است. کدام‌یک از جملات زیر در مورد پایداری سیستم صادق است؟



۱) سیستم ناپایدار است زیرا حاشیه بهره Gain Margin و حاشیه فاز مثبت هستند.

۲) سیستم پایدار است زیرا حاشیه بهره Gain Margin مثبت است.

۳) سیستم ناپایدار است زیرا حاشیه بهره Gain Margin و حاشیه فاز منفی هستند.

۴) سیستم پایدار است زیرا حاشیه بهره Gain Margin و حاشیه فاز منفی هستند.

حاشیه بهره را در فرکانس ω_p (Phase Crossover) یعنی فرکانسی که در آن فاز $-180°$ است محاسبه می‌کنیم. مقدار دسی‌بل حد بهره مثبت است و در این صورت G.M منفی می‌شود. همچنین فاز را در فرکانس ω_g (Gain Crossover) یعنی فرکانسی که در آن بهره صفر db است محاسبه می‌کنیم که کمتر از $-180°$ است. بنابراین، حاشیه فاز هم منفی است. مطالب فوق، بیانگر فرمول‌های زیر است:

$$G.M = 20\log\frac{1}{\left|G(j\omega_c)H(j\omega_c)\right|} = -20\log\left|G(j\omega_c)H(j\omega_c)\right|$$

$$\left|G(j\omega_c)H(j\omega_c)\right| > 1 \longrightarrow G.M < 0$$

$$P.M = \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) - 180^\circ$$

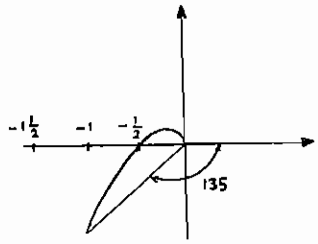
$$\angle G(j\omega_g)H(j\omega_g) < -180^\circ \longrightarrow P.M < 0$$

سیستم ناپایدار است و حاشیه فاز و حاشیه بهره هر دو منفی می‌باشند. (برای ناپایداری کافی است یکی از مقادیر GM یا PM کوچکتر از صفر باشد)، گزینه ۳ صحیح است.

نکته : حاشیه فاز ونسبت میرایی نسبت مستقیم دارند.

تست:

دیاگرام نایکوئیست برای یک سیستم کنترل مطابق شکل می‌باشد. مقدار حاشیه فاز و حاشیه بهره به ترتیب برابر است با:



۱) -45° و 2

۲) -135° و $\frac{2}{2}$

۳) -135° و $\frac{1}{2}$

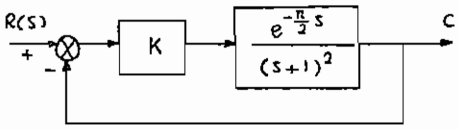
۴) 45° و 2

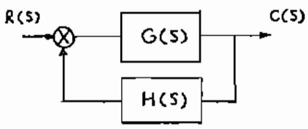
$$\phi = -180^\circ \longrightarrow |G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{1}{2} \longrightarrow GM = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = 1 \longrightarrow \phi = -135^\circ \longrightarrow PM = -135 + 180^\circ = 45^\circ$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست: در سیستم مدار بسته مقابل برای آنکه حاشیه بهره برابر 2 باشد باید:





۱) $k = 1$

۲) $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $k = \sqrt{2}$

۴) $k = 2\sqrt{2}$

$$G(s) = \frac{ke^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s+1)^2}$$

$$\phi = -\tan^{-1}(\omega) - \tan^{-1}(\omega) - \frac{\pi}{2}\omega \Rightarrow \phi = 180^\circ \Rightarrow \omega = 1$$

دقت کنید که حاشیه بهره بر حسب دسی‌بل (dB) نمی‌باشد.

$$|G(s)| = \frac{k}{\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+1}} = \frac{k}{\omega^2+1} = \frac{k}{2}$$

$$GM = \frac{1}{|G(s)|} = \frac{2}{k} = 2 \longrightarrow k = 1$$

گزینه ۱ صحیح است.

تست : مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۵

پاسخ فرکانسی یک تابع تبدیل از قسمت‌های زیر تشکیل شده است.

الف : یک خط با شیب $-20\frac{db}{dec}$ برای فرکانس‌های پایین‌تر از 0.1 رادیان بر ثانیه

ب : یک خط با شیب $-40\frac{db}{dec}$ برای فرکانس‌های بین 0.1 تا 1.5 رادیان بر ثانیه

پ : یک خط با شیب $-20\frac{db}{dec}$ برای فرکانس‌های بین 1.5 تا 18 رادیان بر ثانیه

ت : یک خط با شیب $-60\frac{db}{dec}$ برای فرکانس‌های بالاتر از 18 رادیان بر ثانیه

اگر این تابع را به عنوان تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل حلقه بسته با پس‌خورد منفی واحد در نظر بگیریم، مقدار خطای حالت دائمی سیستم حلقه بسته را برای ورودی $r(t)=(5+3t)u(t)$ به‌دست می‌آوریم.

۱) 1.515 ۲) 0.0155 ۳) 0.155 ۴) 0.00155

ابتدا تابع تبدیل سیستم را می‌نویسیم:

$$G(S)=\frac{K(S+1.5)}{S(S+0.1)(S+18)^2}$$

برای به‌دست آوردن ضریب K از این‌که اندازه تابع تبدیل در $\omega=10$ برابر یک است استفاده می‌کنیم:

$$\frac{K\sqrt{\omega^2+1.5^2}}{\omega\sqrt{\omega^2+0.01}\sqrt{\omega^2+234}\sqrt{\omega^2+324}}=1 \xrightarrow{\omega=10} K=4193.3$$

چون سیستم نوع یک است نسبت به ورودی پله خطای حالت ماندگار آن صفر است، بنابراین فقط باید خطای $r(t)=3tu(t)$ را به‌دست آوریم.

$$R(S)=\frac{3}{S^2}$$

$$e_{ss}=\lim_{S\to 0}\frac{SR(S)}{1+G(S)}=\lim_{S\to 0}\frac{S\frac{3}{S^2}}{1+\frac{4193.3(S+1.5)}{S(S+0.1)(S+18)^2}}$$

$$e_{ss}=\lim_{S\to 0}\frac{3(S+0.1)(S+18)^2}{S(S+0.1)(S+18)^2+4193.3(S+1.5)}=0.0155$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک سال ـ سال ۷۴

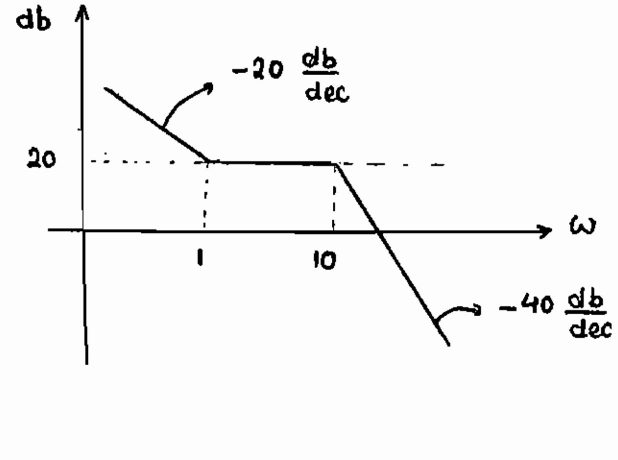
پاسخ فرکانسی زیر مربوط به کدام تابع انتقال داده شده است؟

۱) $\frac{10(S+1)}{S(S+10)}$

۲) $\frac{10(S+1)}{S(S+10)^2}$

۳) $\frac{1000(S+1)}{S(S+10)}$

۴) $\frac{1000(S+1)}{S(S+10)^2}$



با توجه به شیب $-20\frac{db}{dec}$ در شروع نمودار و شیب صفر در فرکانس گوشه $\omega=1$ و شیب $-40\frac{db}{dec}$ در فرکانس گوشه $\omega=10$ می‌دانیم که سیستم دارای یک قطب در مبدأ، یک صفر در $S=1$ و دو قطب مضاعف در $S=10$ می‌باشد. بنابراین تابع تبدیل عبارت است از:

$$G(S)=\frac{K(S+1)}{S(S+10)^2}$$

با در نظر گرفتن این‌که در فرکانس $\omega=0.1$ باید اندازه سیستم 40 db باشد K را به‌دست می‌آوریم.

$$|G(S)|=\frac{K\sqrt{\omega^2+1}}{\omega\left(\sqrt{\omega^2+100}\right)^2}\xrightarrow{\omega=0.1}\frac{K}{10}=10^{\left(\frac{40}{20}\right)}=100\Rightarrow K=1000$$

گزینه ۴ صحیح است.

فصل دهم

جبران‌کننده‌ها و کنترلرها

جبران‌کننده‌ها یا کنترلرها می‌توانند به‌صورت سری یا متوالی، موازی یا فیدبک خروجی و ورودی به سیستم کنترل اصلی اضافه شوند. فیلترها یا مدارهای پیش‌فاز یا تقدم‌فاز (Phase – Lead)، پس فاز یا تأخیر فاز (Phase – Lag) به منظور تغییر شکل دیاگرام «بد» یک سیستم به عنوان جبران کننده به سیستم اضافه می‌شوند.

هدف، رسیدن به یک سیستم کنترلی پایدار، دارای پاسخ مطلوب به ورودی‌های موردنظر و دارای کمترین حساسیت به تغییرات پارامترهای سیستم کنترلی، و در نتیجه دارای خطای حالت ماندگار بسیار کم و حذف اثرات نویز بر سیستم است. جبران‌سازی در واقع اضافه کردن صفر و قطب به یک سیستم کنترلی است.

پاسخ یک سیستم خطی پایدار به یک ورودی سینوسی تابعی سینوسی است با همان فرکانس که دامنه و فاز متفاوت خواهد داشت. اگر فاز خروجی سینوسی نسبت به تابع ورودی جلوتر باشد مدار را پیش‌فاز و اگر فاز خروجی سینوسی نسبت به تابع ورودی عقب‌تر باشد مدار را پس‌فاز گویند.

کنترلرها به انواع زیر تقسیم می‌شوند.

۱ـ کنترلر دو وضعیتی یا روشن ـ خاموش (On – Off)

۲ـ کنترلر تناسبی (کنترلر P) $G(s) = k$

۳ـ کنترلر تناسبی ـ مشتق‌گیر (کنترلرPD) $G(s) = k\left(1+T_d S\right)$

۴ـ کنترلر تناسبی ـ انتگرال‌گیر (کنترلر PI) $G(s) = k\left(1+\frac{T_i}{S}\right)$

۵ـ کنترلر تناسبی + انتگرال‌گیر + مشتق‌گیر (کنترل PID) $G(s) = k\left(1+\frac{T_i}{S}+T_d S\right)$

جبران‌کننده‌های دینامیکی

۱ـ جبران‌کننده‌های پیش فاز (phase lead compensator)

در کنترلرهای پیش‌فاز تابع تبدیل به‌صورت زیر است:

$$G(s) = \alpha\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \quad , \quad 0<\alpha<1$$

اگر $\alpha \to \infty$ میل کند این جبران‌کننده به کنترلر تناسبی مشتق‌گیر (PD کنترلر) تبدیل می‌شود.

این جبران‌کننده فقط به فرکانس‌های بالا اجازه عبورمی‌دهد.

۲ـ جبران‌کننده پس‌فاز (Phase – Lag compensator)

این جبران‌کننده نیز وقتی به صورت سری به سیستم اصلی اضافه شود باعث بهبود رفتار سیستم می‌گردد. تابع تبدیل بین ورودی و خروجی در مدار پس‌فاز عبارت است از:

$$G(s) = \frac{1+Ts}{1+\beta Ts} = \frac{1}{\beta}\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \quad , \quad \beta>1$$

این جبران‌کننده فقط به سیگنال‌های با فرکانس پایین اجازه عبور می‌دهد.

اگر $\beta \to \infty$ میل کند این جبران‌کننده به کنترلر تناسبی انتگرال‌گیر (PI کنترلر) تبدیل می‌شود.

۳ـ جبران‌کنندهٔ پیش فاز ـ پس فاز (Lead – Lag compensetor)

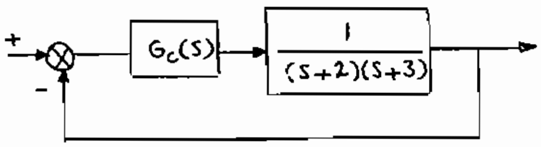
تابع تبدیل بین ورودی و خروجی در مدار این جبران‌کننده ترکیبی، از تابع تبدیل مدار پس‌فاز و مدار پیش‌فاز خواهد بود. این جبران‌کننده به سیگنال‌های با فرکانس متوسط اجازه عبور می‌دهد. در صورتی که $\alpha \to \infty$ و $\beta \to \infty$ ، این جبران‌کننده به کنترلر تناسبی مشتق‌گیر انتگرال‌گیر (PID کنترلر) تبدیل می‌شود. این جبران‌کننده تمام خواص مثبت دو جبران کننده پیش فاز و پس فاز را دارا می‌باشد.

تابع تبدیل بین ورودی و خروجی در این جبران‌کننده به‌صورت زیر است:

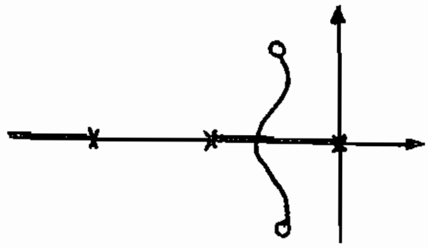
$$G(S) = \underbrace{\left(\frac{1+\alpha T_1 S}{1+T_1 S}\right)}_{\substack{\alpha>1 \\ \text{پیش فاز}}}\underbrace{\left(\frac{1+\beta T_2 S}{1+T_2 S}\right)}_{\substack{\beta<1 \\ \text{پس فاز}}}$$

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۸۱

برای این که مکان هندسی ریشه‌های سیستم کنترل شکل الف مطابق نمودار (ب) گردد باید از چه نوع کنترلری استفاده نمود؟



(الف)



(ب)

۱) PI ۲) PID ۳) Lead ۴) Lead - Lag

تابع تبدیل کنترلر به صورت $G_c(s)$ می‌باشد بنابراین تابع تبدیل مدار باز دیاگرام بلوکی به‌صورت زیر است:

$$(GH)_1 = \frac{G_c(s)}{(s+2)(s+3)}$$

اما بر اساس مکان هندسی ریشه‌ها و با توجه به این‌که قطب‌های مکان هندسی ریشه‌های مخرج و صفرهای مکان هندسی ریشه‌های صورت تابع تبدیل مدار باز هستند. تابع تبدیل مدار باز عبارت است از:

$$(GH)_2 = \frac{(s+a)(s+b)}{s(s+2)(s+3)}$$

$$(GH)_1 = (GH)_2 \quad \rightarrow \quad G_c(s) = \frac{(s+a)(s+b)}{s} = \frac{s^2+(a+b)s+ab}{s}$$

$$G_c(s) = (a+b) + \frac{ab}{s} + s$$

بنابراین کنترلر تناسبی مشتق‌گیر انتگرال‌گیر (PID کنترلر) است.

گزینه ۲ صحیح است.

۴ـ کنترلر تناسبی ـ مشتق‌گیر

۱ ـ خطای حالت ماندگار به‌خوبی تصحیح نمی‌شود ولی پاسخ گذرا سریع‌تر از بین می‌رود و میرایی افزایش می‌یابد.

۲ ـ مرتبه سیستم (نه نوع آن) یک مرتبه بالاتر می‌رود.

۳ـ پهنای باند زیاد می‌شود و در نتیجه پاسخ گذرا سریع‌تر می‌شود.

۴ـ فراجهش سیستم کم می‌شود که خاصیت مهم این نوع کنترلر است.

۵ـ نوسانات پاسخ حلقه بسته کمتر شده و حد فاز هم زیاد می‌شود.

۶ ـ فرکانس طبیعی مدار افزایش می‌یابد.

۷ـ پایداری سیستم افزایش می‌یابد اما افست سیستم همچنان وجود خواهد داشت.

۸ ـ سیگنال‌های اغتشاش (نویز) را تقویت می‌کند که این مورد از معایب این کنترلر به شمار می‌رود.

۹ـ عیب دیگر این کنترلر محدودیت در فرکانس‌های بالا و تاخیر زمانی آن است.

۱۰ـ یک فیلتر بالاگذر است و فاز مثبت به سیستم می‌دهد.

۵ـ کنترلر تناسبی ـ انتگرال‌گیر

خواص کنترلر تناسبی ـ انتگرال‌گیر عبارت‌اند از:

۱ ـ میزان خطا یا افست را کاهش می‌دهد یا از بین می‌برد ولی چون خاصیت انتگرال‌گیری دارد پایداری سیستم را ضعیف می‌کند.

۲ـ پهنای باند کاهش می‌یابد و در نتیجه پاسخ حالت گذرای سیستم کندتر می‌شود.

۳ ـ خطای ماندگار کاهش می‌یابد ولی پاسخ گذرا دیرتر از بین می‌رود.

۴ـ نوع سیستم به اندازه یک واحد افزایش می‌یابد، که مشروط به حفظ پایداری، اگر خطای حالت ماندگار عدد ثابتی باشد آن را صفر می‌کند.

۵ ـ میرایی افزایش می‌یابد اما زمان برخاست و استقرار زیاد می‌شود.

۶ ـ حد فاز را کاهش می‌دهد و فاز منفی وارد سیستم می‌شود که این مورد از معایب این کنترلر می‌باشد.

۷ ـ ماکزیمم فراجهش را افزایش می‌دهد که این مورد نیز عیب محسوب می‌شود.

۸ ـ از دیگر معایب این کنترلر این است که پاسخ حلقه بسته را تا حدودی نوسانی می‌کند.

۶ ـ کنترلر تناسبی

خواص کنترلر تناسبی عبارت‌اند از:

۱ ـ افزایش پهنای باند که نتیجه‌اش افزایش سرعت پاسخ سیستم است.

۲ ـ کاهش خطای حالت ماندگار که مستقیماً مربوط به افزایش K (بهره سیستم) است.

۳ـ کاهش حد فاز که از معایبِ این کنترلر به‌شمار می‌رود.

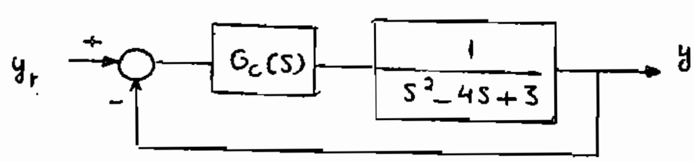
۴ ـ نوسانی کردن پاسخ حلقه بسته که پایداری را کم می‌کند از دیگر معایب این کنترلر محسوب می‌شود.

۷ـ کنترلر تناسبی ـ مشتق گیر ـ انتگرال‌گیر

در این نوع کنترلر به دلیل وجود کنترلر انتگرالگیر میزان خطا کاهش می‌یابد ضمن این‌که به دلیل وجود کنترلر مشتق‌گیر پایداری سیستم بهبود می‌یابد لذا این نوع کنترلر یکی از بهترین انواع کنترلرهاست. با افزودن این کنترلر به سیستم مرتبه سیستم، به شرطی که صفر یا قطبی

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۶

سیستم مدار بسته مقابل را توسط کدام کنترلر می‌توان پایدار کرد؟



۱) تناسبی

۲) تناسبی مشتق‌گیر

۳) تناسبی انتگرال‌گیر

۴) هیچ کنترلری نمی‌تواند.

برای بررسی پایداری سیستم تابع تبدیل مدار بسته سیستم را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{y}{y_r}=\frac{G_c(s)}{s^2-4s+3+G_c(s)}$$

کنترلر تناسبی $G_c(s)=k$

کنترلر تناسبی مشتق‌گیر $G_c(s)=as+k$

کنترلر تناسبی انتگرال‌گیر $G_c(s)=\frac{a}{s}+k$

با جایگذاری $G_c(s)$ در تابع تبدیل مدار بسته و با استفاده از معیار راث هرویتس مشخص می‌شود که برای افزایش پایداری باید از کنترلر تناسبی مشتق‌گیر استفاده شود. معادله مشخصه سیستم در این صورت عبارت خواهد بود از:

$$S^2+(a-4)S+K+3$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست: مهندسی برق ـ سال ۶۸

کدام‌یک از مطالب زیر در موردجبران‌کننده‌های Lead و Lag اشتباه است؟

۱) جبران کننده Lag بهره سیستم را افزایش می دهد و در نتیجه خطاهای ماندگار را کم می‌کند.

۲) جبران کننده Lead بهره سیستم را افزایش می دهد و در نتیجه خطاهای ماندگار را کم می‌کند.

۳) جبران کننده Lead فرکانس طبیعی سیستم را به مقدار زیاد افزایش می‌دهد در نتیجه زمان استقرار کاهش می‌یابد.

۴) جبران کننده Lag فرکانس طبیعی سیستم را افزایش می‌دهد و در نتیجه زمان استقرار کاهش می‌یابد.

در جبران‌کننده Lead هرگاه $\alpha \to \infty$ میل کند، این جبران‌کننده به کنترلر تناسبی مشتق‌گیر (PD) تبدیل می‌شود. بنابراین این کنترلر خطای ماندگار، پایداری و سرعت پاسخ سیستم را افزایش می‌دهد. همچنین کنترلر PI باعث کاهش خطا می‌شود.
گزینه ۲ صحیح است.

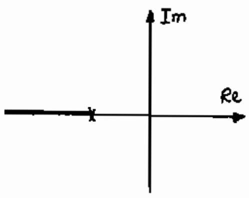
۸ ـ اثر افزودن قطب

اضافه کردن یک قطب به تابع تبدیل حلقه باز باعث:

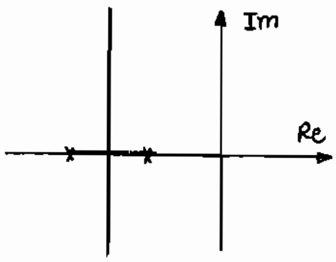
۱ـ حرکت مکان هندسی ریشه‌ها به سمت راست

۲ـ کاهش پایداری سیستم و نیز کاهش پهنای باند

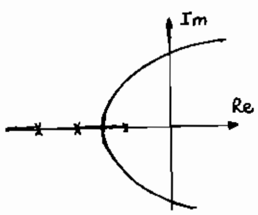
۳ـ کند کردن زمان استقرار پاسخ سیستم می‌شود.



تابع اولیه



اثر اضافه کردن یک قطب



اثر اضافه کردن دو قطب

اضافه کردن کنترلر انتگرال‌گیر باعث افزودن یک قطب در مبدأ شده و پایداری سیستم را کاهش می‌دهد.

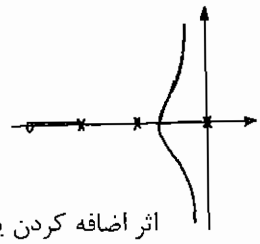
۹ ـ اثر افزودن صفر

اضافه کردن یک صفر به تابع تبدیل حلقه باز باعث:

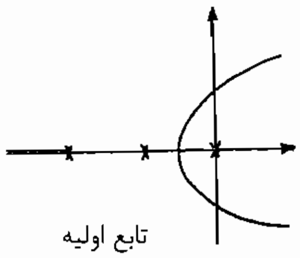
۱ـ حرکت مکان هندسی ریشه‌ها به ست چپ

۲ـ سرعت بخشیدن به زمان استقرار پاسخ سیستم

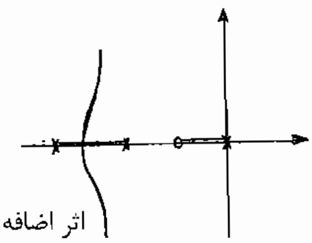
۳ـ افزایش پایداری سیستم می‌شود.



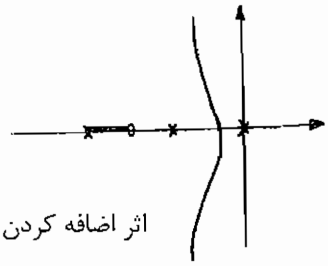
اثر اضافه کردن یک صفر



تابع اولیه



اثر اضافه کردن یک صفر

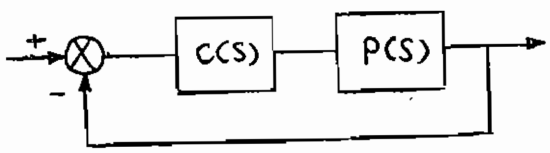


اثر اضافه کردن یک صفر

اضافه کردن کنترلر مشتق‌گیر باعث اضافه کردن یک صفر به تابع تبدیل اولیه شده و در نتیجه پایداری سیستم را افزایش می‌دهد.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۹

تابع تبدیل یک فرآیند به صورت $P(s)=\dfrac{2}{s(s-1)}$ است. کدام‌یک از کنترلرهای زیر می‌تواند سیستم مدار بسته را (با فیدبک واحد) پایدار سازد؟



۱ـ تناسبی

۲ـ انتگرال‌گیر

۳ـ تناسبی + انتگرال‌گیر

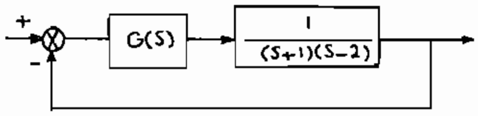
۴ ـ تناسبی + مشتق‌گیر

سیستم فوق به دلیل داشتن قطب در سمت راست صفحهٔ ($S=1$) ناپایدار است. کنترلر تناسبی مشتق‌گیر $k + T s$ می‌تواند باعث پایدار شدن تابع تبدیل حلقه بسته گردد. چون استفاده از کنترلر تناسبی مشتق‌گیر مشابه افزودن صفر به مکان هندسی ریشه‌هاست که مکان را به سمت چپ حرکت می‌دهد.

گزینه ۴ صحیح است.

تست: مهندسی مکانیک ـ سال ۷۴

با در نظر گرفتن سیستم فیدبک مقابل کدام کنترلر می‌تواند سیستم بسته را پایدار نماید؟



۱) $G(s)=ks$ ۲) $G(s)=\frac{k}{s}$

۳) $G(s)=k(1+Ts)$ ۴) $G(s)=k\left(1+\frac{1}{Ts}\right)$

گزینه‌های ۲ و ۴ نمی‌توانند درست باشند چون افزودن قطب، سبب افزایش ناپایداری سیستم می‌شود. گزینه ۳ را چک می‌کنیم.

$$(s+1)(s-2)+k(1+Ts)=0$$

$$s^2+s(kT-1)+(k-2)=0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & k-2 \\ s^1 & kT-1 & 0 \\ s^0 & k-2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} kT-1>0 \rightarrow kT>1 \\ k-2>0 \rightarrow k>2 \end{array}$$

T را می‌توان طوری در نظر گرفت که سیستم پایدار باشد.

در مورد گزینه ۱

$$(s+1)(s-2)+ks=0$$

$$s^2+s(k-1)-2=0$$

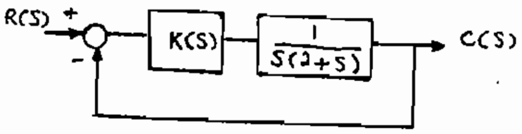
$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & -2 \\ s^1 & k-1 & 0 \\ s^0 & -2 & \end{array}$$

سیستم ناپایدار است وچون به ازای تمام مقادیر k حداقل یک تغییر علامت در ستون اول جدول راث وجود دارد. گزینه ۳ صحیح است.

تست : مهندسی برق ـ سال ۷۱

در سیستم زیر ساده‌ترین جبران‌کننده $K(S)$ برای این‌که خطای ماندگار در پاسخ به ورودی $r(t)=0.5t^2$ مساوی 0.1 باشد،کدام گزینه است؟

۱) $\frac{0.1}{S}$ ۲) $\frac{20}{S}$ ۳) $\frac{S+0.2}{S}$ ۴) $\frac{S+1}{S(S+10)}$



$$e_{ss}=\lim_{S\to 0} SE(S)=\lim_{S\to 0}\frac{SR(S)}{1+G(S)H(S)}=\lim_{S\to 0}\frac{S(0.5)\frac{2}{S^3}}{1+\frac{K(S)}{S(S+2)}}$$

$$=\lim_{S\to 0}\frac{\frac{1}{S^2}}{\frac{S(S+2)+K(S)}{S(S+2)}}=\lim_{S\to 0}\frac{S+2}{S^2(S+2)+SK(S)}=\frac{2}{SK(S)}$$

$$e_{ss}=0.1 \Rightarrow \frac{2}{SK(S)}=0.1 \Rightarrow K(S)=\frac{2}{0.1S}=\frac{20}{S}$$

گزینه ۲ صحیح است.

تست: مهندسی برق ـ سال ۷۴

تابع تبدیل مسیر پیش رو یک سیستم کنترلی $G(S)=\frac{1}{S(S+2)}$ می‌باشد. اگر بخواهیم با جبران‌کننده PD در مسیر فیدبک، خطای حالت ماندگار به ورودی شیب واحد 0.125 شود و درصدحداکثر جهش در حوزه زمان 16.3 باشد، معادله جبران‌کننده کدام است؟

(راهنمایی: $M_p=e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$)

۱) $16+8S$ ۲) $16+3S$

۳) $16+2S$ ۴) $10+45$

جبران‌کننده PD را به فرم زیر در نظر می‌گیریم :

$$\alpha+\beta S$$

حال تابع تبدیل حلقه بسته مجموعه سیستم و جبران‌کننده را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\frac{\alpha+\beta S}{S(S+2)}}{1+\frac{(\alpha+\beta S)}{S(S+2)}}=\frac{\alpha+\beta S}{S(S+2)+\alpha+\beta S}=\frac{\alpha+\beta S}{S^2+(2+\beta)S+\alpha}$$

اما فرم استاندارد تابع تبدیل حلقه بسته سیستم مرتبه دو عبارت است از:

$$\frac{\omega_n^2}{S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^2}$$

$$2\xi\omega_n=2+\beta$$

$$\omega_n^2=\alpha$$

$$M_p=0.163=e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\quad\Rightarrow\quad\xi=0.5$$

$$e_{ss}=\lim_{S\to 0}\frac{S\,R(S)}{1+G(S)}=\lim_{S\to 0}\frac{S\frac{1}{S^2}}{1+\frac{\alpha+\beta S}{S(S+2)}}$$

$$=\lim_{S\to 0}\frac{(S+2)}{S(S+2)+\alpha+\beta S}=\frac{2}{\alpha}=0.125\quad\Rightarrow\quad\alpha=16$$

$$\omega_n=\sqrt{\alpha}=4\quad\Rightarrow\quad\alpha=16$$

$$\beta=2\xi\omega_n-2=2(0.5)4-2=2$$

$$\alpha+\beta S=16+2S$$

گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی برق ـ سال ۷۹

تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم با پس‌خورد منفی واحد برابر $G(S)=\dfrac{1}{S+2}$ است. یک کنترل‌کننده PI با تابع تبدیل $G_c(S)$ طوری طراحی کنید که.

الف) به ازای ورودی پله، خطای ماندگار صفر شود.

ب) به ازای ورودی شیب واحد، خطا برابر یک درصد شود.

ج) نسبت میرایی قطب‌های حلقه بسته سیستم $\xi=0.7$ شود.

۱) $G_c(S)=200+\dfrac{18}{S}$ ۲) $G_c(S)=100+\dfrac{18}{S}$

۳) $G_c(S)=100+\dfrac{25}{S}$ ۴) $G_c(S)=18+\dfrac{200}{S}$

با توجه به گزینه‌ها کنترلر باید به فرم $a+\dfrac{b}{S}$ باشد.

$$G(S)G_c(S)=\left(a+\frac{b}{S}\right)\left(\frac{1}{S+2}\right)=\frac{(aS+b)}{S(S+2)}$$

ورودی $R(S)=\dfrac{1}{S^2}$

$$e_{ss}=\lim_{S\to 0}\frac{SR(S)}{1+G(S)G_c(S)}=\lim_{S\to 0}\frac{S\frac{1}{S^2}}{1+\frac{(aS+b)}{S(S+2)}}=\frac{2}{b}=\frac{1}{100}\quad\Rightarrow\quad b=200$$

معادله مشخصه سیستم را به‌دست می‌آوریم و با فرم استاندارد سیستم مرتبه دو مقایسه می‌کنیم:

$$S(S+2)+(aS+b)=0$$

$$S^2+(2+a)S+b=0$$

$$b=\omega_n^2=200\quad\Rightarrow\quad\omega_n=\sqrt{200}$$

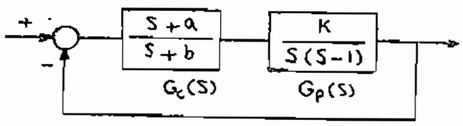
$$2+a=2\xi\omega_n=2(0.7)\sqrt{200}=2\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{200}=20\quad\Rightarrow\quad a=18$$

از شرط الف استفاده نکردیم و چون خطای حالت ماندگار سیستم نوع اول به ورودی پله صفر است، این شرط خود به خود برآورده شد.

گزینه ۴ صحیح است.

تست: مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۸

کنترل کننده $G_c(S)=\dfrac{S+a}{S+b}$ برای پایدار کردن سیستم $G_p(S)=\dfrac{K}{S(S-1)}$ به‌کار گرفته شده است، مقادیر مناسب K , b , a کدام است؟



۱) $K=25$, $b=2$, $a=1$

۲) $K=23$, $b=1$, $a=2$

۳) $K=22$, $b=5$, $a=3$

۴) $K=24$, $b=3$, $a=4$

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته سیستم را تشکیل می‌دهیم.

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{\frac{K(S+a)}{S(S+b)(S-1)}}{1+\frac{K(S+a)}{S(S+b)(S-1)}}=\frac{K(S+a)}{S(S+b)(S-1)+K(S+a)}$$

معادله مشخصه $S^3+(b-1)S^2+(K-b)S+Ka=0$

برای چک کردن پایداری باید جدول راث را تشکیل دهیم:

$$\begin{array}{c|cc} S^3 & 1 & K-b \\ S^2 & b-1 & Ka \\ S^1 & \frac{(K-b)(b-1)-Ka}{b-1} & 0 \\ S^0 & Ka & \end{array} \qquad \begin{array}{l} b-1>0 \\ \frac{(K-b)(b-1)-Ka}{b-1}>0 \\ Ka>0 \end{array}$$

مقادیر K , b , a گزینه‌ها را در سه نامعادله فوق جایگذاری می‌کنیم تا گزینه صحیح مشخص شود. گزینه ۳ صحیح است.

تست: مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۹

تابع انتقال زیر یک فیلتر Lead – Lag را نشان می‌دهد.

$$\frac{1}{\beta}\,\frac{S+\frac{1}{T_1}}{S\,\frac{1}{\beta T_1}}\cdot\frac{S+\frac{1}{T_2}}{S+\frac{\beta}{T_2}}\quad,\quad \beta>1$$

هنگامی که $\beta\to\infty$ این فیلتر به چه نوع کنترلری تبدیل می‌شود؟

۱) P ۲) PD ۳) PI ۴) PID

مطابق مطالب ارائه شده درهمین فصل با میل کردن β به سمت ∞ فیلتر Lead – Lag به یک کنترلر PID تبدیل می‌شود.

$$\frac{S+\frac{1}{T_1}}{S+\frac{1}{\beta T_1}}\to\frac{S+\frac{1}{T_1}}{S+\varepsilon}$$

اگر T_1 مقدار مناسبی داشته باشد این عبارت به‌صورت یک کنترلر تناسبی انتگرالگیر (PI) عمل می‌کند.

$$\frac{S+\frac{1}{T_2}}{S+\frac{\beta}{T_2}}\to\frac{S+\frac{1}{T_2}}{S+\infty}$$

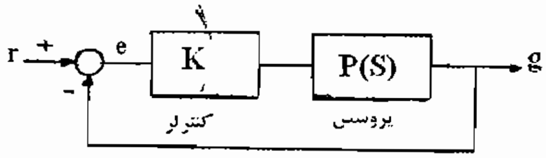
اگر T_2 مقدار مناسبی داشته باشد این عبارت فقط اثر صفر را به‌صورت یک کنترلر تناسبی مشتق‌گیر PD خواهد داشت.

لذا حاصل‌ضرب این عبارات یک کنترلر تناسبی مشتق‌گیر انتگرال‌گیر (PID) خواهد بود.

گزینه ۴ صحیح است.

تست: مهندسی هسته‌ای ـ سال ۷۴

در سیستم مدار بسته زیر اضافه کردن یک انتگرال‌گیر به کنترلر باعث می‌شود که به‌طور کلی:



۱) پاسخ زمانی سیستم بسته نوسانی‌تر شود.

۲) پایداری سیستم بسته افزایش یابد.

۳) خطای حالت ماندگار برای ورودی پله‌ای r افزایش یابد.

۴) نوع سیستم مدار باز کاهش یابد.

گزینه ۴ نادرست است زیرا با افزایش کنترل انتگرال‌گیر نوع سیستم مدار باز می‌یابد.

گزینه ۲ و ۳ نیز نادرست است.

گزینه ۱ صحیح است.