بسمه تعالی

جزوه

دینامیک ماشین

دانشگاه

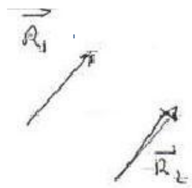
صنعتی امیر کبیر

استاد

دکتر اسلامی

تعریف بردار ها و خواص آن ها:

۱- در بردار مساوی: $\vec{R}_1 = \vec{R}_2$



۲- جمع دو بردار: $\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{R}_3$

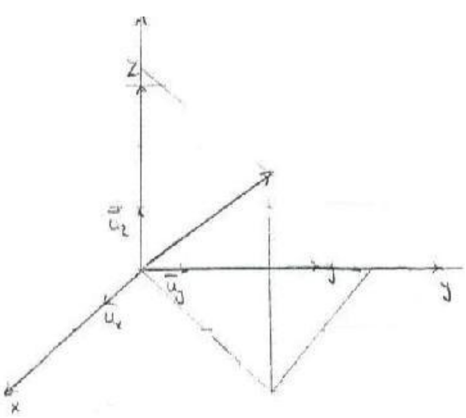
۳- بردار بر حسب مولفه ها:

$$\bar{R} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z$$

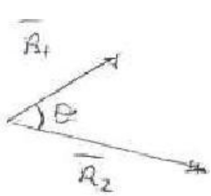
$$\bar{R} = r\bar{u}$$

$$\bar{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\bar{U} = \frac{x}{r}\bar{u}_x + \frac{y}{r}\bar{u}_y + \frac{z}{r}\bar{u}_z$$



۴- حاصل ضرب داخلی: $R_1.R_2 = R_1 R_2 \cos\theta$



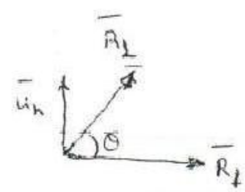
۵- حاصل ضرب خارجی:

$$\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = \vec{R}_3$$

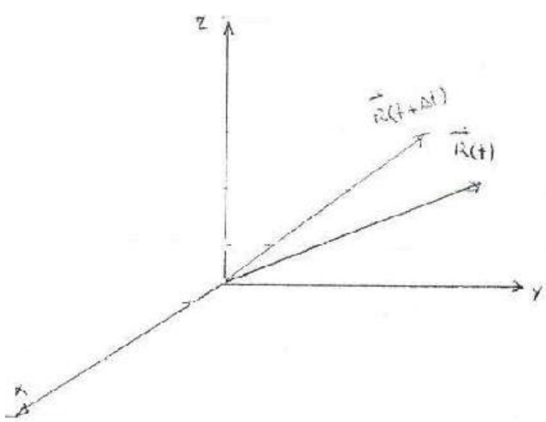
$$\bar{R}_1 - x_1\bar{u}_x + y_1\bar{u}_y + z_1\bar{u}_z$$
$$\bar{R}_2 - x_2\bar{u}_x - y_2\bar{u}_y + z_2\bar{u}_z$$

$$\bar{R}_1 \times \bar{R}_2 = \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{R}_1 \times \bar{R}_2 - R_1 R_2 \sin\theta \bar{u}_n$$



۶- مشتق یک بردار نسبت به زمان: $\vec{R} - \vec{R}(t) \Rightarrow \frac{d\vec{R}}{dt} - \lim \frac{\vec{R}(t \quad \Delta t) \quad \vec{R}(t)}{\Delta t}$

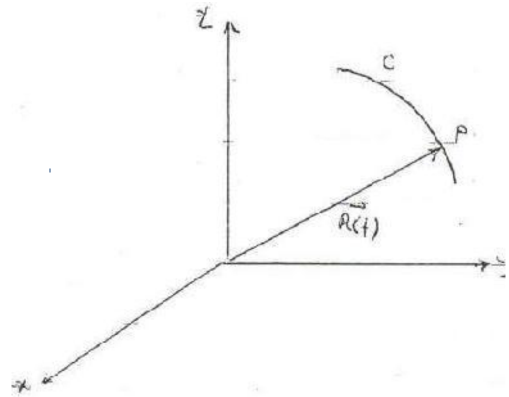


تعیین سرعت یک ذره نسبت به متغیرهای مسیر:

مشتق بردار مکان نسبت به زمان سرعت یا (veloeity) است.

بنا به تعریف veloeity یک ذره متحرک در فضا عبارت است از مشتق position vector نسبت به زمان

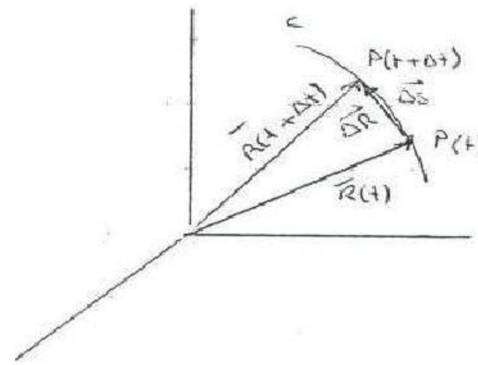
$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{xyz}$$



از سیستم محورهای مختصات بر حسب متغیرهای مسیر (cordinal systems in term of path variable) زمانی استفاده می کنیم که در یک ذره متحرک روی مسیری به معادله مسیر نسبت به محور مختصات xyz معلوم باشد در حال حرکت است.

بنا به تعریف سرعت ذره ی P برابر است با $v = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{xyz}$ یا برابر است با:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{xyz} = \lim \frac{\bar{R}(t-\Delta t)-R(t)}{\Delta t}$$



$$= \lim \frac{\Delta\bar{R}}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta R}{\Delta s}.\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

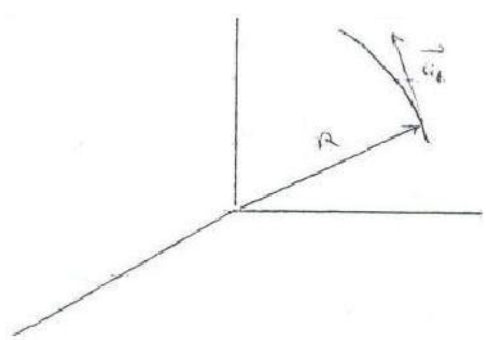
$\Delta t \to 0$

Δt

$\to 0$

Δs

$$= \frac{ds}{dt}.$$ بردار واحد:



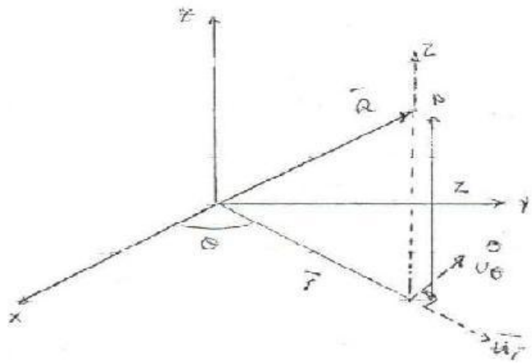
$\bar{u}_t$: بردار واحد مماس بر مسیر در جهت حرکت است.

$$\bar{v} = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{U}_t$$

محور مختصات استوانه ای:

از این محور مختصات زمانی استفاده می کنم که ذره به نوعی روی مسیر دایروی حرکت نمایدو دارای حرکت دورانی باشد.

$$\bar{R} = \bar{r}\bar{u}_r + z\bar{u}_z$$



بنابر تعریفvelocity ذره P برابر است با:

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r}\vec{u}_r + z\vec{u}_z) = \frac{d\bar{r}}{dt}\vec{u}_r + \bar{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z + z\frac{d\bar{u}_z}{dt}$$

از دینامیک:

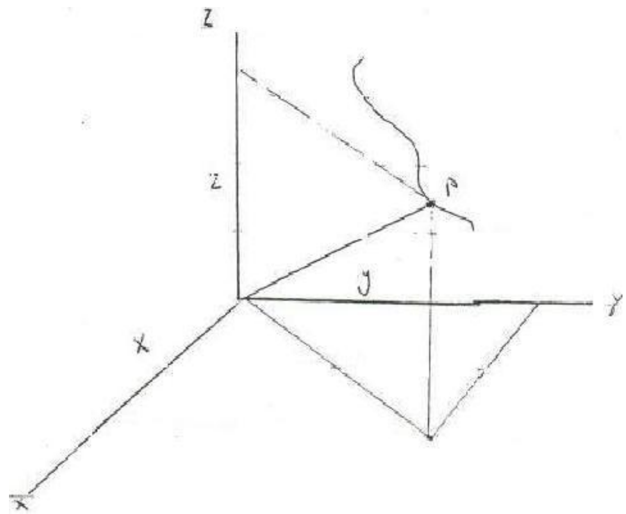
$$\frac{d\overline{ur}}{dt} = \dot{\theta} d\theta$$

$$\frac{duz}{dt} = 0$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}u_r + \bar{r}\dot{\theta}u_\theta + \dot{z}u_z$$

Part سرعت در مختصات xyz

سیستم در مختصات xyz مفروض است:



$$\bar{R} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z \Rightarrow v = \frac{dR}{dt} = \dot{x}\bar{u}_x + \dot{Y}\bar{u}_y + \dot{z}\bar{u}_z$$

کاربرد اعداد مختلط:

یک عدد مختلط را به شکل زیر نمایش داده می شود:

$$R = re^{j\theta}$$
$$r = magnitute$$
$$\theta = \arg ument$$
$$J = \sqrt{-1}$$
$$R = r(\cos\theta + J\sin\theta)$$

برای عدد مختلط زیر:

$$R = a + Jb$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

جمع اعداد مختلط:

$$R_1 = r_1 e^{J\theta_1}$$
$$R_2 = r_2 e^{J\theta_2}$$

$$R_1 + R_2 = r_1 e^{J\theta_1} + r_2 e^{J\theta_2} = r_1 \cos\theta_1 + J r_1 \sin\theta_1 + r_2 \cos\theta_2 + J r_2 \sin\theta_2$$
$$= \underbrace{(r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2)}_{\text{Real}} + J \underbrace{(r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2)}_{imaginary}$$

منطبق بر جمع بردارها است.

تفریق اعداد مختلط:

$$R_1 - R_2 = (r_1 \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_2) + J(r_1 \sin\theta_1 - r_2 \sin\theta_2)$$

منطبق بر تفریق بردارها است.

حاصلضرب اعداد مختلط:

$$R_1 . R_2 = (r_1 e^{J\theta_1} . r_2 \, e^{J\theta_2} = r_1 r_2 e^{J(\theta_1+\theta_2)}$$

منطبق بر هیچ نوع ضرب برداری (داخلی و خارجی) نمی باشد.

تقسیم اعداد مختلط:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1 e^{J\theta_1}}{r_2 e^{J\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{J(\theta_1-\theta_2)}$$

مشتق اعداد مختلط:

$$R = re^{J\theta} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{J\theta} + Jr\dot{\theta}e^{J\theta}$$

منطبق بر مشتق بردار ها است.

در بردار ها $\bar{R} = r\bar{u}_r$, $v = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\theta}\bar{u}_\theta$ با مقایسه با مشتق اعداد مختلط:

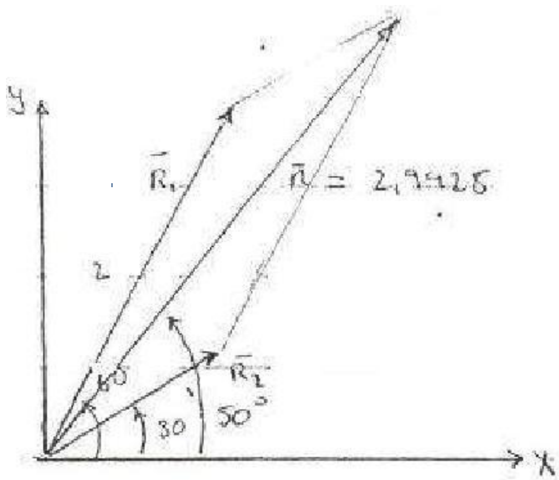
$$\frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{J\theta} + Jr\dot{\theta}e^{J\theta}$$

$$\bar{u}_r = e^{J\theta}$$
$$\bar{u}_\theta = Je^{J\theta}$$

مثال: حالت مختلط و برداری را چک کنید:

$r_1 = 2$ $\qquad r_2 = 1$

$\theta_1 = 60^\circ$ $\qquad \theta_2 = 30^\circ$



اگر بردار بودند

اگر مختلط باشند:

$R_1 - le^{j60}$ $\qquad\qquad$ $R_2 - le^{j30}$

$R_1 + R_2 = 2\cos 60 + J\sin 60 \quad 1\cos 30 + J\sin 30$

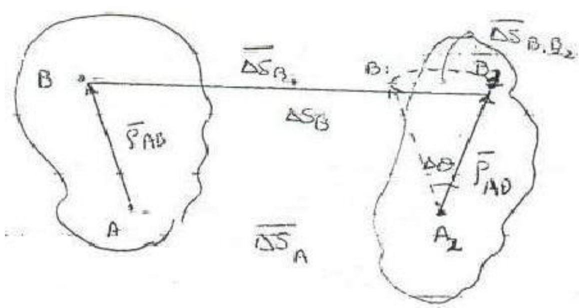
$-(2\cos 60+\cos 30) - J(2\sin 60+\sin 30) -$

$l_1 866 - J\,2.232 = R_3$

$r_3 = \sqrt{1/866^2 + 2/132^2} = 2/9928$

$\bar{O}_3 = lan^{1}\dfrac{2/232}{1/866} = 50^{\circ}$

تعیین رابطه بین سرعت دو نقطه از یک جسم صلب



Pure translat حالتی است که سرعت همه ی نقاط یکسان باشد.

طبق قضیه chaslev هر حرکت کلی یک جسم صلب برابر است با یک pure translation به علاوه یک pure rotation .

از روی شکل: $\bar{\Delta}\bar{S}_B = \bar{\Delta}\bar{S}_{B1} + \bar{\Delta}\bar{S}B_1B_2$

$$\bar{\Delta}\bar{S}_B = \bar{\Delta}\bar{S}_A + \bar{\Delta}\bar{S}B_1B_2 \rightarrow \underbrace{\lim \frac{\bar{\Delta}\bar{S}_B}{\Delta t}}_{\Delta t \rightarrow 0} = \underbrace{\lim \frac{\bar{\Delta}\bar{S}_A}{\Delta t}}_{\Delta t \rightarrow 0} + \underbrace{\lim \frac{\bar{\Delta}\bar{S}_{B_1B_2}}{\Delta t}}_{\Delta t \rightarrow 0}$$

a. $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{W} \times \bar{P}_{AB}$ $\qquad w = \underbrace{\frac{\Delta O}{\Delta t}}_{\Delta t \rightarrow 0}$

b. $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{B/A}$

c. $\bar{V}_{B/A} = \bar{W} \times \bar{P}_{AB}$

رابطه ی b یک مثلث برداری است.

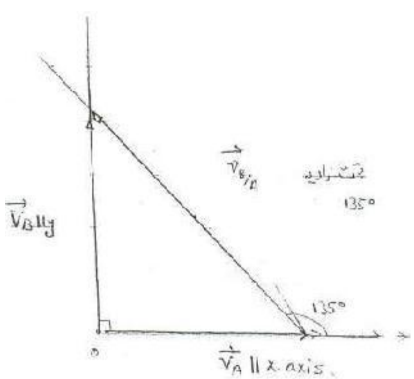
مثال: از یک جسم صلب اطلاعات زیر معلوم است:

۱- $\bar{V}_A$ برابر $20 m/s$ موازی محور x

۲- $\bar{V}_B$ موازی محور y حرکت می کند.

۳- $\bar{V}_{B/A}$ تحت زاویه $135°$ با محور x حرکت می کند.

مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت و تعیین مقادیر $\bar{V}_B$ و $\bar{V}_{B/A}$



۱- مبدا O_v و مقیاس مناسبی انتخاب می کنیم. $\overleftrightarrow{1in = 10 \, in/\sec}$

۲- سرعت $\overline{V}_A$ را از مبدا O_v رسم می کنیم.

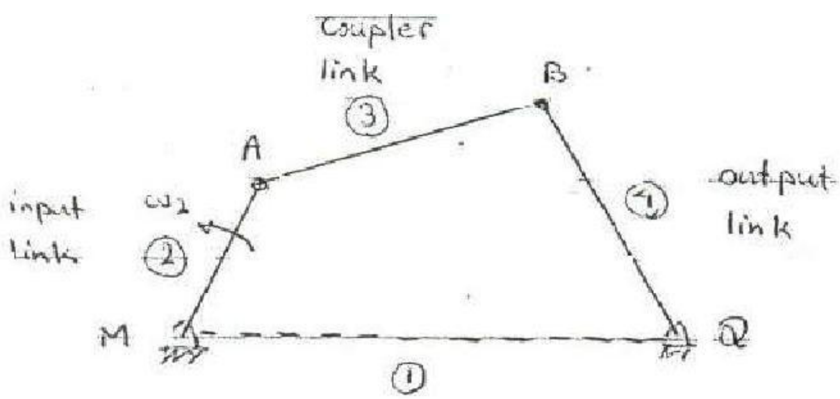
۳- سرعت نقطه B: $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{B/A}$

چون از مثلث برداری بالا $\overline{V}_A$ معلوم و $y 1 \overline{V}_B$ و $\overline{V}_{B/A}$ تعداد زاویه ی 135° نسبت به X_{axis} باشد لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

۴- با استفاده از مقیاس
$$\begin{cases} V_B = 20 \, in/\sec \\ V_{B/A} = 20\sqrt{2} \, in/\sec \end{cases}$$

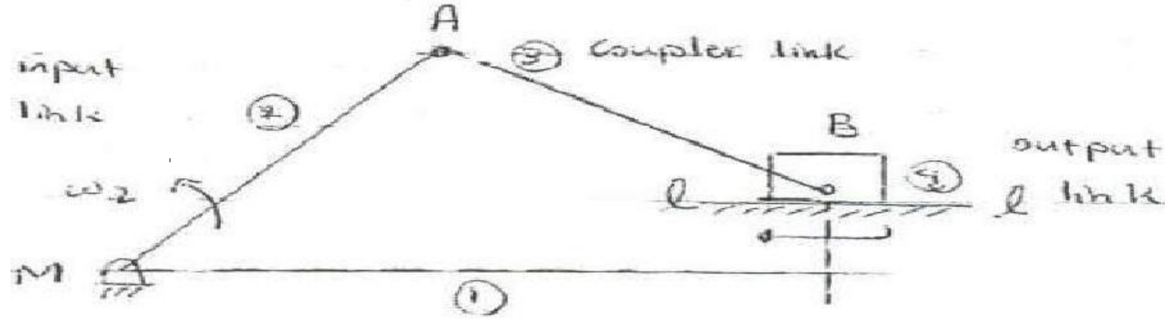
مکانیزم های چهار میله ای بسته:

هدف: سرعت دورانی ساده را با انتخاب ابعاد مناسب یک حرکت دلخواه را به دست آوریم.

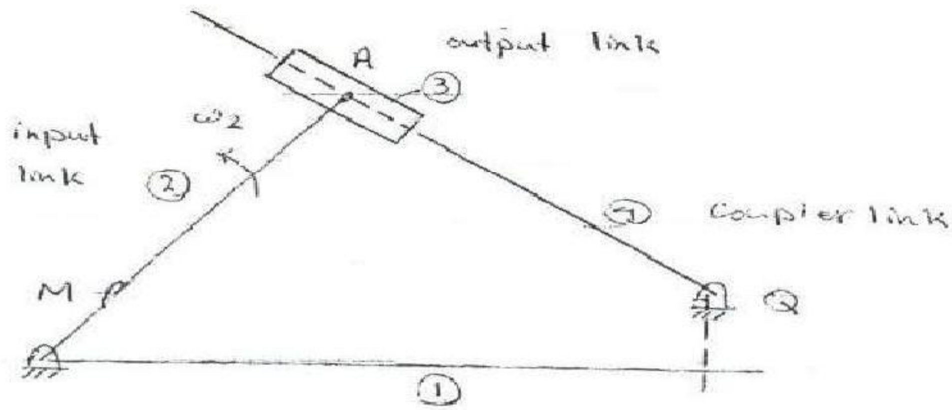


Four_bar linkage system

هدف: با سرعت دورانی ساده و با انتخاب ابعاد مناسب حرکت خطی دلخواه را بدست می آوریم.



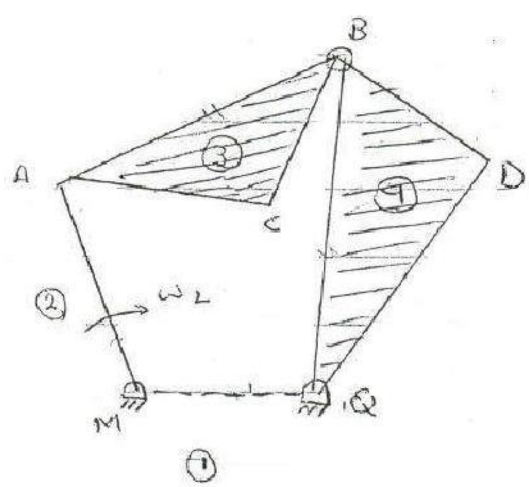
Slider crank Mechanism



Inverted-slider crank Mechanism

مثال: مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت مکانیزم

چهار میله ای زیر



$MA - 4''$

$AB - 8''$

$QB = 5/5''$

$MQ - 5''$

$W_2 = 99/2\ ^{rad}/_{sec}$

ترمیم:

۱- مبدا Q_v و مقیاس مناسب انتخاب می کنیم. $1m \xleftrightarrow{10 ft/sec}$

۲- سرعت نقطه ی A $\quad \vec{v}_A \quad \vec{v}_M + \vec{v}_{A/M}$

$$v_A = MA \omega_2 = 94.2 \times 4 = 376/8 \frac{1}{12} = 31/4 \, Ft/sec \, \perp MA$$

۳- سرعت نقطه ی B $\quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$

چون $\vec{v}_{B/A}$ عمود بر AB و V_B عمود بر Q_B می باشد.

لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

۴- با استفاده از مقیاس

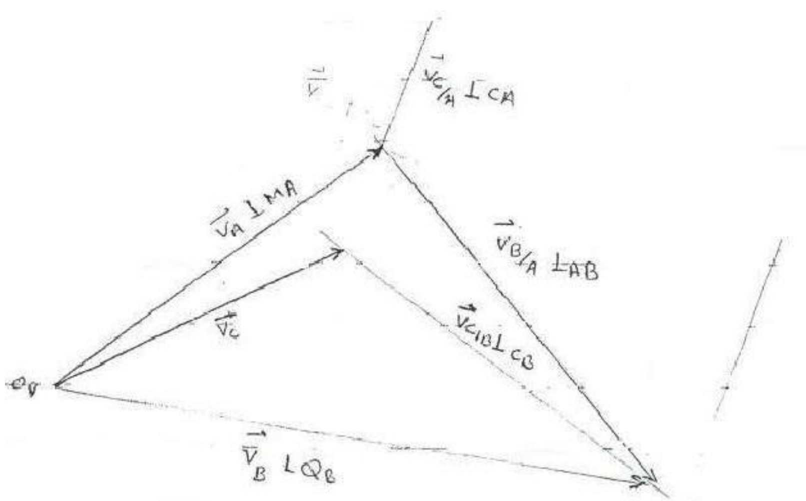
$$V_{B/A} - 20 \, ft/sec$$

$$V_B - 34 \, ft/sec$$

۵- سرعت دورانی میله های ۳ و ۴

$$v_3 = \frac{v_{B/A}}{AB} = \frac{20}{8} \times 12 = 30 \, rad/sec$$ ساعت

$$v_4 - \frac{v_B}{QB} - \frac{34}{5/5} \times 12 - 74/2 \, rad/sec$$ ساعت



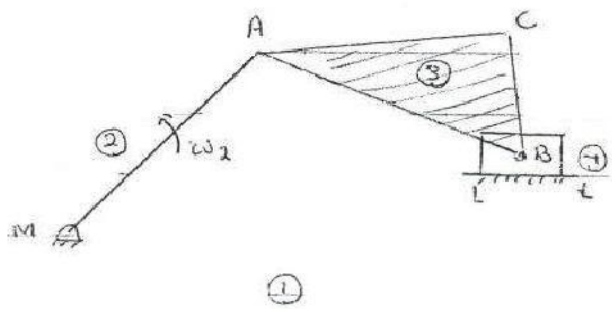
۶- سرعت نقطه ی C

$$\vec{v}_c - \vec{v}_A + \vec{v}_{c/A}$$

$$\vec{v}_c - v_B + \vec{v}_{c/B}$$

چون $\bar{v}_{C/A}$ عمود بر CA و $\bar{v}_{C/B}$ عمود بر BC می باشد لذا از تلاقی دو معادله ی برداری بالا $\bar{V}_c$ پیدا می شود.

مثال: مطلوب است دیاگرام سرعت یک: siider cranck mechanism



$MA = 2''$
$AB = 3''$
$AC = 1/5''$
$n_2 - 600 rpm$

۱- مبدا O_v و مقیاس مناسب انتخاب می کنیم $lin < 5/23 ft/_{sec} >$

۲- سرعت نقطه ی A: $W_2 - \frac{2\pi n_2}{60} - \frac{2\pi \times 600}{60} - 62/8 \, {}^{rad}/_{sec}$

$$\bar{V}_A = \bar{v}_m + \bar{v}_{A/M} \rightarrow v_{A/M} = w_2 \times AM = 62/8 \times \frac{2}{12} = 10/46 \, {}^{ft}/_{sec} 1MA12$$

۳- سرعت نقطه ی B: $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{B/A}$

چون $\bar{V}_{B/A}$ عمود بر $\bar{AB}$ و $\bar{V}_B$ موازی LL است. لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

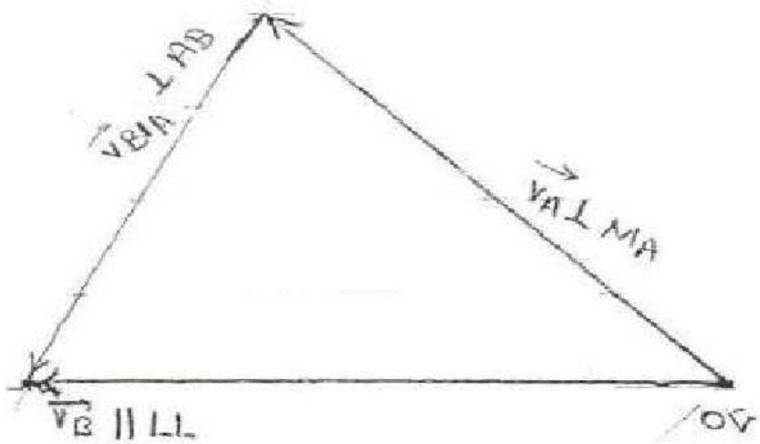
۴- با استفاده از مقیاس

$\bar{V}_B = 10/46 \, {}^{ft}/_{sec}$

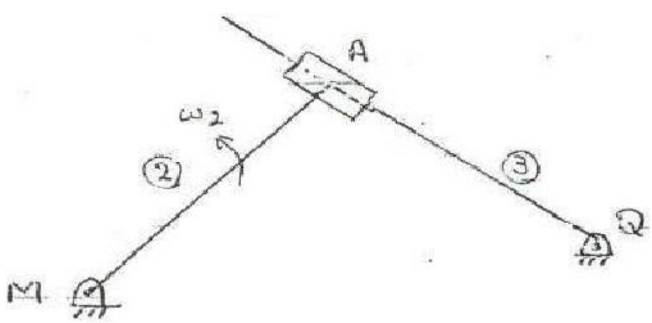
$V_{B/A} - 6/54 \, {}^{ft}/_{sec}$

۵- سرعت دورانی میله (۳)

$W_3 - \frac{V_{B/A}}{AB} - \frac{6/54}{3} \times 12 - 26/16 \, {}^{rad}/_{sec}$ سرعت



مثال: مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت مکانیزم inverted slider crank



$MA = 2''$
$MQ = 4/1''$
$n_2 = 600rpm$
$Q_A = 3''$

ترمیم:

۱- مبدا O_v و مقیاس مناسب انتخاب می کنیم $\langle 1in = 5.23 \, ft/s \rangle$

۲- سرعت نقطه A روی میله (۲) (A_2) $\bar{V}_{A_2} = \bar{V}_M + \bar{V}_{A/M}$

$$VA_{2/M} = AM\,W_2 = \frac{2}{12} \times \frac{2\pi 600}{60} = 10/46 \, ft/\sec \perp AM$$

۳- سرعت نقطه A_3 (نقطه ی A روی میله ۳)

$$\bar{V}_{A3} = \bar{V}_{A2} + \bar{V}_{A3/A2}$$

چون $\bar{V}_{A3} \perp QA$ و $V_{A3/A2} \parallel AQ$ می باشد لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

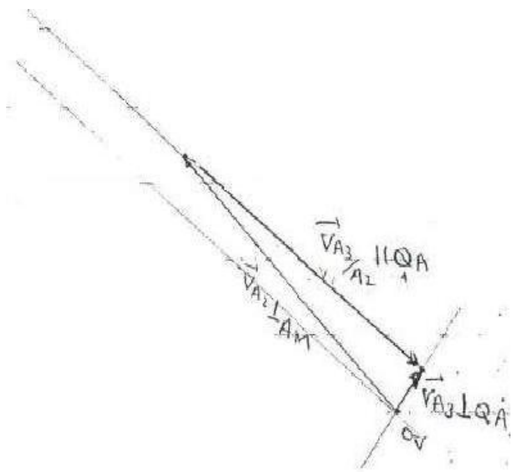
۴- پس مقیاس:

$\bar{V}_{A3/A2} = 0/600$

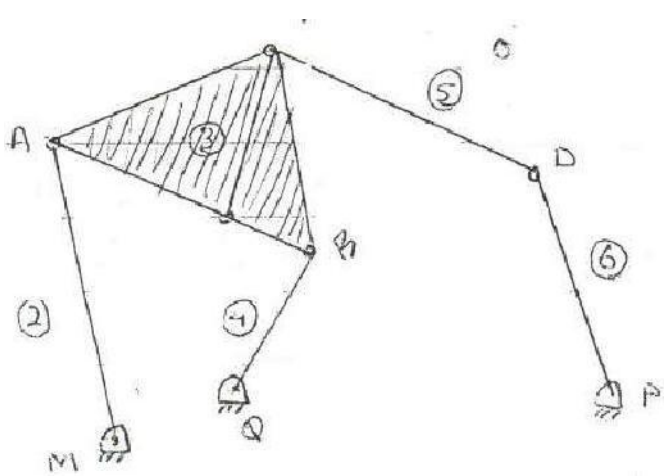
$V_{A3} = 0/6 \times 5/23$

۵- سرعت دورانی میله ۳:

$$w_3 - \frac{VA_3}{QA} - \frac{7 \times 5/23 \times 12}{3} - 12.55 \, {}^{rad}\!/_{sec}$$ سرعت



مثال: مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت مکانیزم ۶میله ای:



$MA - 2''$

$PP = 2''$

$n_2 - 900rpm$

ترسیم:

۱- مبدای O_v و مقیاس مناسب انتخاب می کنیم ‹ $im - 5/23 \, {}^{in}\!/_{sec}$ ›

۲- سرعت نقطه ی

$$w_2 - \frac{2\pi n_2}{60} - \frac{2\pi 900}{60} - 94/2 \frac{rad}{sec} A$$

$$\vec{V}_{A2} = \vec{V}_M + \vec{V}A_{3M}$$

$$\vec{V}_{A/M} - AM\, W_2 - 2 \times \frac{99/2}{12} - 15/7 \, {}^{Ft}\!/_{sec} \, 1AM$$

۳- سرعت نقطه ی B:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

چون $\vec{V}_{B/A} \perp BA$ و $\vec{V}_B \perp QB$ می باشد لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

۴- سرعت نقطه ی c:

$$\vec{V}_c = \vec{V}_A - \vec{V}_{C/A}$$
$$\vec{V}_c = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B}$$

چون $\vec{V}_{C/A} \perp AC$ و $\vec{V}_{C/B} \perp BC$ و $\vec{V}_A , \vec{V}_B$ معلوم می باشند لذا از تلاقی دو معادله ی بالا $\vec{V}_C$ بدست می آید.

۵- سرعت نقطه ی D:

$$\vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{D/C}$$

چون $\vec{V}_D \perp eD$ و $\vec{V}_{D/C} \perp DC$ لذا مثلث برداری قابل رسم است.

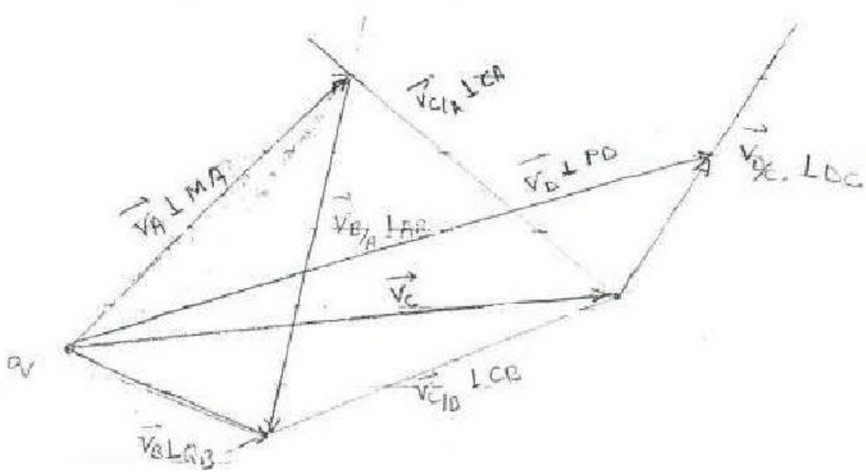
۶- از مقیاس:

$$W_3 - \frac{V_{B/A}}{AB} - 5/23 \times \frac{1/9}{1/9 \times 12} - 62/8 \, {rad}/{\sec}$$ ساعت

$$W_4 - \frac{VB}{QB} - 5/23 \times \frac{2/6 \times 12}{1/75} - 93/6 \, {rad}/{\sec}$$ ساعت

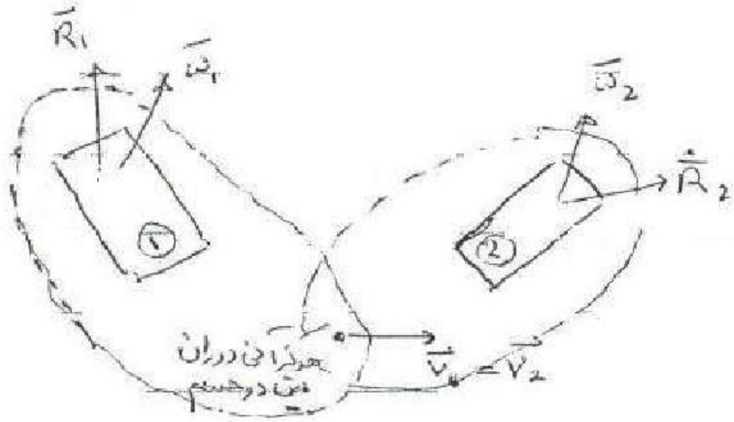
$$W_5 = \frac{V_{D/C}}{DC} = 5/23 \times \frac{0/6 \times 12}{2/1} = 17/9 \frac{rad}{\sec}$$ مثلثاتی

$$W_6 = \frac{VD}{PC} = 5/23 \times \frac{3/3 \times 12}{2} = 103/55$$ ساعت



تعیین مرکز آنی دوران:

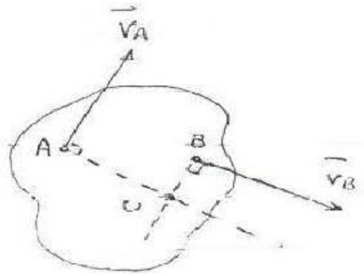
مرکز آنی دوران بین دو جسم صلب عبارت است از نقطه ای که روی دو جسم و یا امتداد فرضی دو جسم قرار گرفته و velocity آن بین دو جسم در آن نقطه یکسان باشد.



حالت خاص: مرکز آنی دوران یک جسم و زمین:

چون velocity زمین صفر فرض می شود مرکز آنی دوران جسم و زمین عبارت است از نقطه ای که روی جسم و یا امتداد فرضی آن قرار گرفته و velocity آن صفر می باشد.

O: مرکز آنی دوران بین جسم و زمین



اگر جسمی تنها انتقال داشته باشد مرکز آنی دوران ، آن در بی نهایت قرار دارد.

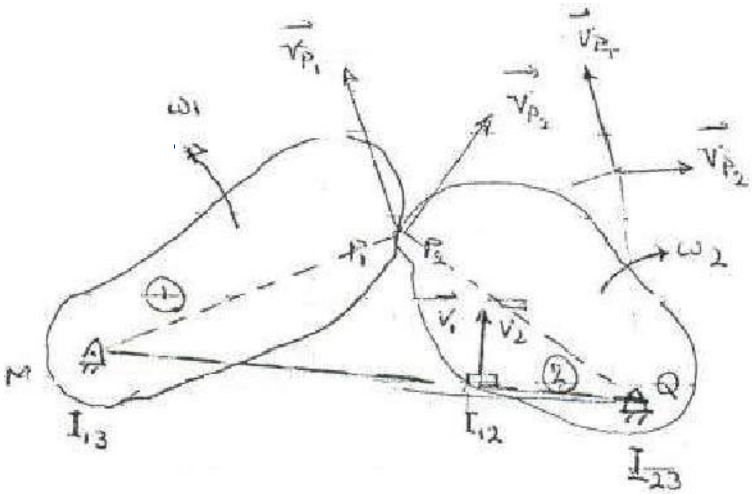
تعداد مرکز آنی دوران بین n جسم برابر است با:

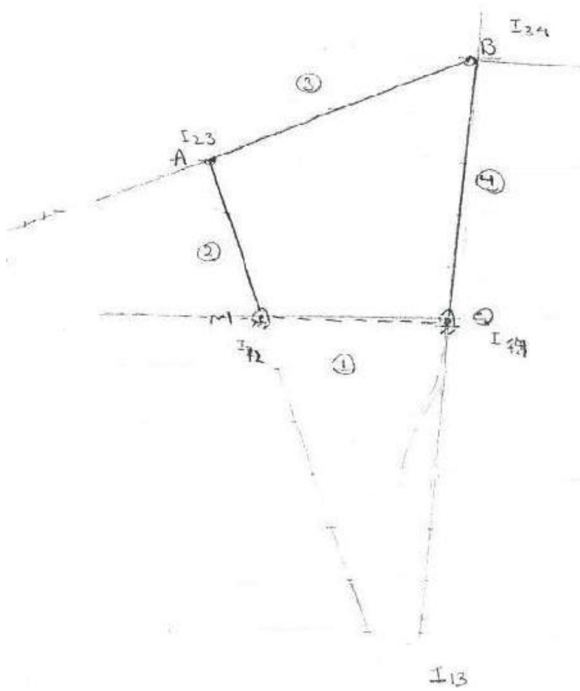
$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

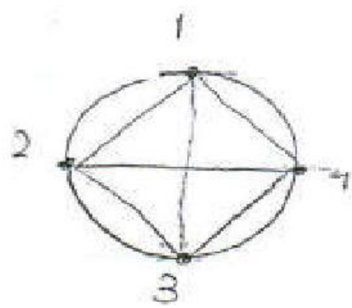
هر سه جسم صلب نسبت به هم مجموعا دارای سه مرکز آنی دوران می باشند که روی یک خط مستقیم قرار دارند

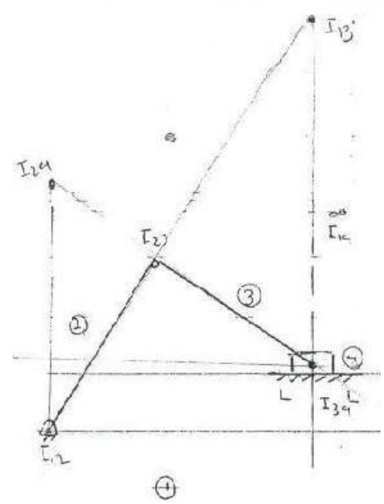
اثبات:

$$I_{13}I_{12} \times W_1 - I_{12}I_{23} \times W_2$$







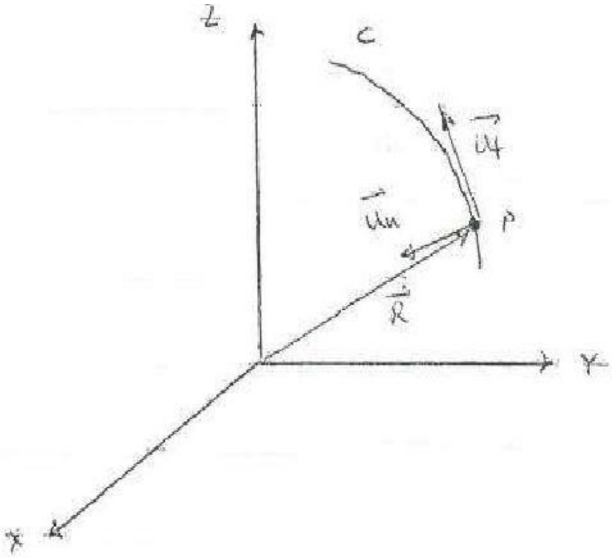


تعریف شتاب در محور های مختصات مختلف:

بنا به تعریف Velocity: $\bar{V} = \frac{d\bar{R}}{dt})_{xyz}$

و تعریف Acceleration: $A = \frac{d^2\bar{R}}{dt^2})_{xyz}$

Part I: شتاب در محور مختصات بر حسب متغیر های مسیر.



$$\bar{V} = \frac{d\bar{R}}{dt})_{xyz}$$

$$\bar{V} = \frac{ds}{dt}\bar{u}_t$$

$$\bar{A}=\frac{d^2R}{dt^2}=\frac{d^2s}{dt^2}\bar{u}_t+\frac{ds}{dt}\frac{d\vec{ut}}{dt}$$

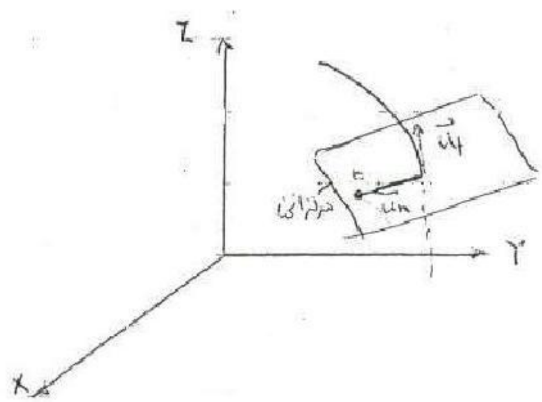
$$\frac{d\vec{ut}}{dt}=\frac{d\vec{ut}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

از دینامیک داریم:

$$\frac{d\bar{u}t}{ds}=\frac{\bar{u}_n}{\rho}$$

لذا داریم:

$$\bar{A}=\frac{d^2s}{dt^2}u_t+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\bar{u}_n}{\rho}$$



ρ شعاع انحنا و $\bar{u}_n$ بردار یک در جهت مرکز انحنا است و همه در osculating planc قرار دارند.

osculating plane

بخش دوم: شتاب در مختصات استوانه ای

$$\bar{A}=\frac{d^2R}{dt^2}=\frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$\bar{V}=\dot{r}\bar{u}_r+\bar{r}\dot{\theta}\bar{u}_\theta+\dot{z}\bar{u}_z$$

$$\vec{A}=\ddot{r}\bar{u}_r+\dot{r}\frac{d\bar{u}_r}{dt}+\dot{r}\dot{\theta}\bar{u}_\theta+\bar{r}\ddot{\theta}u_\theta+\bar{r}\dot{\theta}\frac{du_\theta}{dt}+\ddot{z}\bar{u}_z$$

$$\bar{A}=(\ddot{r}\bar{u}_r+\dot{\bar{r}}\dot{\theta}\bar{u}_\theta+\dot{\bar{r}}\dot{\theta}u_\theta+\bar{r}\ddot{\theta}u_\theta-\bar{r}\dot{\theta}^2\bar{u}_r+\ddot{z}\bar{u}_z)$$

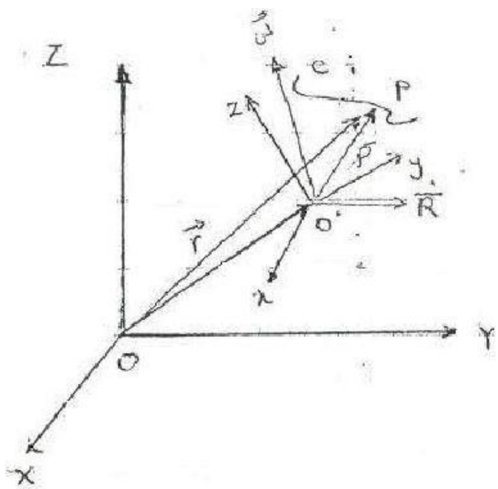
$$\frac{d\bar{u}_r}{dt}=\dot{\theta}\bar{u}_\theta$$

$$\frac{d\bar{u}_\theta}{dt}=-\dot{\theta}\bar{u}_r$$

$$\vec{A}=(\ddot{\bar{r}}-\bar{r}\dot{\theta}^2)\bar{u}_r+(2\dot{\bar{r}}\dot{\theta}+\bar{r}\ddot{\theta})u_\theta+\ddot{z}u_z$$

بخش سوم: شتاب ذره در دو محور مختصات:

فرض کنید ذره ی متحرک p در داخل محور مختصات xyz در حال حرکت است. محور مختصات xyz متحرک دارای حرکت کلی $\vec{w}$ و $\dot{\vec{R}}$ نسبت به محور مختصات اینرسی xyz می باشد.



می خواهیم سرعت و شتاب مطلق ذره ی p را در محور مختصات مطلق xyz تعیین کنیم.

$\vec{R}$= بردار موقعیت مرکز مختصات xyz در XYZ.

$\vec{r}$= بردار موقعیت ذره ی P در xyz.

همواره رابطه ی برداری زیر برقرار است: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{P}$

همواره مشتق رابطه ی بالا نسبت به زمان در مختصات اینرسی xyz برقرار است:

$$\frac{d\vec{r}}{dt})_{XYZ} - \frac{a\vec{R}}{dt})_{XYZ} + \frac{d\vec{P}}{dt})_{XYZ}$$

چون P در مختصات متحرک xyz کوچک تعریف شده ولی مشتق آن در اینرسی XYZ نسبت به زمان گرفته شده لذا داریم:

$$\frac{d\vec{P}}{dt})_{XYZ} - \frac{d\vec{P}}{dt})_{xyz} + \vec{W} \times \vec{P}$$

در معادله a قرار می دهیم:

$$\frac{dr}{dt})_{XYZ} - \frac{d\vec{R}}{dt})_{XYZ} + \frac{d\vec{P}}{dt})_{xyz} + \bar{W} \times \bar{P}$$

و یا داریم:

$$\bar{V}_{XYZ} - \dot{\vec{P}} - \vec{V}_{xyz} + \vec{W} \times \vec{P}$$

برای محاسبه شتاب از سرعت نسبت به زمان مشتق می گیریم:

$$\frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt})_{XYZ}=\frac{d\dot{\vec{R}}}{dt})_{XYZ}+\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt})_{XYZ}+\frac{d\vec{w}}{dt})_{XYZ}\,x\vec{P}+\vec{w}x\,\frac{d\vec{P}}{dt})_{XYZ}$$

چون $\vec{P}$ و $\vec{V}_{xyz}$ در مختصات متحرک xyz تعریف می شوند ولی مشتق آن ها نسبت به زمان در محتصات اینرسی گرفته شده و لذا:

$$\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt})_{XYZ}=\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt})_{xyz}+\vec{W}x\vec{V}_{xyz}$$

$$\frac{d\rho}{dt})_{XYZ}=\frac{d\rho}{dt})_{xyz}+\vec{W}x\,\vec{\rho}$$

در رابطه ی c قرار می دهیم:

$$\frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt})_{XYZ}=\frac{d\dot{\vec{R}}}{dt})_{XYZ}+\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt})_{xyz}+Wx\vec{V}_{xyz}+\frac{dw}{dt})_{XYZ}X\vec{P}$$

$$+\vec{W}x\,\frac{d\vec{P}}{dt})_{xyz}+\vec{W}x\,(\vec{W}x\vec{P})$$

بنابراین:

$$\vec{A}_{XYZ}=\ddot{\vec{R}}+A)_{xyz}+2\vec{W}x\vec{V}_{xyz}+\dot{\vec{W}}x\vec{P}+\vec{W}x\,(\vec{W}x\vec{P})$$

در معادلات فوق:

$\vec{V}_{XYZ}$: سرعت ذره در مختصات مطلق XYZ

$\vec{A}_{XYZ}$: شتاب ذره در مختصات مطلق XYZ

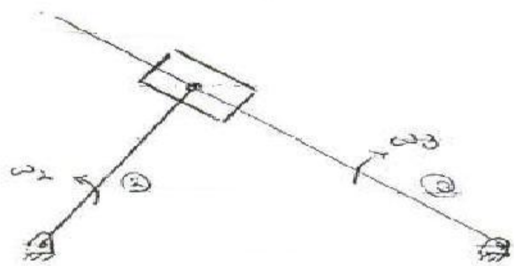
$\dot{\vec{R}}$: سرعت مرکز مختصات متحرک xyz در مختصات مطلق XYZ

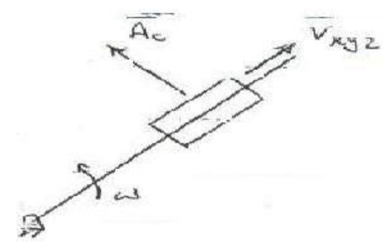
$\ddot{\vec{R}}$: شتاب مرکز مختصات متحرک xyz در مختصات مطلق XYZ

$\vec{V}_{xyz}$: سرعت ذره P در مختصات متحرک xyz

$\vec{a}_{xyz}$: شتاب ذره P در مختصات متحرک xyz coriolis acceleration : $2w x v_{xyz}$

و زمانی به وجود می آید که جسم دارای دوران باشد و همزمان سرعت خطی هم داشته باشد.





جهت شتاب کریولیس از قانون دست راست بدست می آید.

کاربرد اعداد مختلط:

$$R = re^{j\theta} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta} \Rightarrow \bar{u}_r = e^{j\theta}$$
$$\bar{u}_\theta = je^{j\theta}$$
$$v = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\theta}\bar{u}_\theta$$

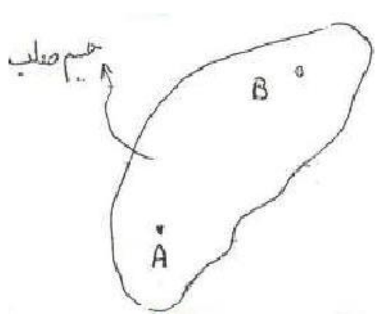
حال برای بدست آوردن شتاب دوباره از رابطه ی بالا مشتق می گیریم:

مشتق دوم اعداد مختلط:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \ddot{r}e^{j\theta} + j\dot{r}\dot{\theta}e^{j\theta} + j\dot{r}\dot{\theta}e^{j\theta} + jr\ddot{\theta}e^{j\theta} - r\dot{\theta}^2e^{j\theta}$$
$$\frac{d^2R}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e^{j\theta} + j(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e^{j\theta}$$

شتاب بین دو نقطه از یک جسم صلب:

اثبات شد: $V_B = V_A + \bar{W} x \bar{P}_{AB}$



از رابطه ی سرعت نسبت به زمان مشتق می گیریم:

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt})_{XYZ} = \frac{d\bar{V_A}}{dt})_{XYZ} + \dot{\bar{W}} \times \bar{P}_{AB} + \bar{W} x (\bar{W} x \bar{P}_{AB})$$

و یا: $\vec{A}_B = \vec{A}_A + \underbrace{\dot{\vec{W}} x \vec{\rho}_{AB} + \vec{W} x (\vec{W} x (\vec{W} x \vec{\rho}_{AB})}_{A_{B/A}}$

لذا داریم:

$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A}$

که:

$\vec{A}_{B/A} = \underbrace{\dot{\vec{W}} x \vec{\rho}_{AB}}_{At_{B/A}} + \underbrace{\vec{W} x (\vec{W} x (\vec{W} x \vec{\rho}_{AB})}_{A^r_{B/A}}$

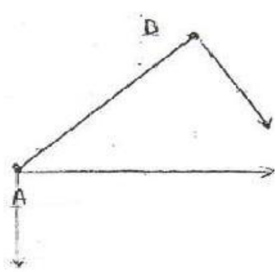
لذا:

$\vec{A}^t_{B/A} = \dot{\vec{W}} x \vec{\rho}_{AB} \perp AB$

$\vec{A}^r_{B/A} = \vec{W} x (\vec{W} x \vec{\rho}_{AB}) \parallel AB$

همواره مقدار $A^r_{B/A}$ مشخص است اما بعد از رسم دیاگرام سرعت.

مثال: از جسم صلب AB شتاب نقاط A و B در شکل نشان داده شده اند دیاگرام شتاب را رسم کنید.



$\vec{A}B = 100 in/\sec^2$

$\vec{A}^t_A = 219 in/\sec^2$

$AB = lin$

$A^r_A = 72 in/\sec^2$

ترسیم:

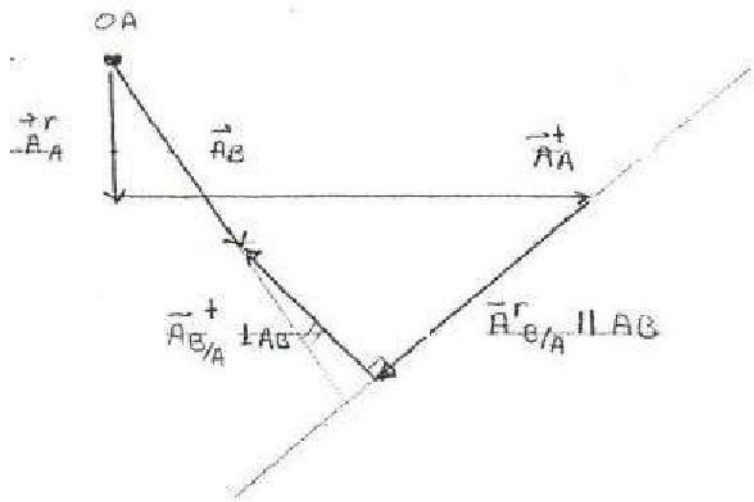
۱- مبدا O_A و مقیاس مناسب را رسم می کنیم: $\left(lin = 50^{in}/_{\sec^2} \right)$

۲- شتاب نقطه ی B: $A_B = A_A + A_{B/A}$

بر حسبه مولفه ها:

$\vec{A}_B = \vec{A}_A^r + \vec{A}_A^t + \vec{A}^r_{B/A} + \vec{A}^t_{B/A}$

چون $\vec{A}^r_{B/A}$ موازی AB و $\vec{A}^t_{B/A}$ عمود بر AB می باشند لذا چند ضلعی برداری قابل ترسیم است:

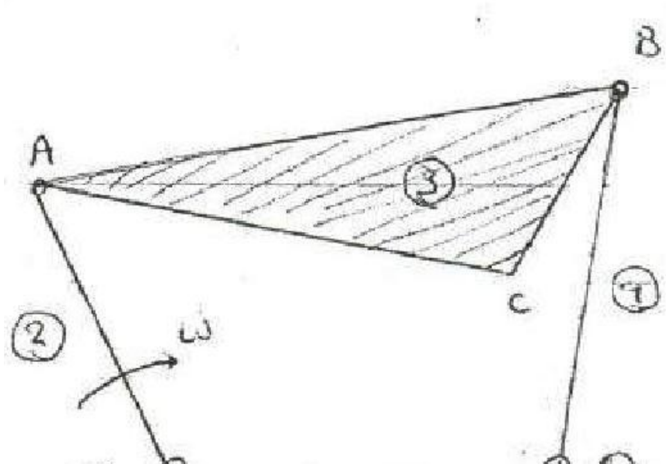


۳- شتاب دورانی میله ی AB (مثلثاتی

$$\alpha_{AD} = \frac{A^t_{B/A}}{AB} = \frac{96}{1} = 96\, rad/s^2$$

روش ترسیم دیاگرام شتاب مکانیزم ها

مثال: مکانیزم چهار میله ای زیر مفروض است: مطلوب است ترسیم دیاگرام شتاب



$MA = 4''$

$AB = 8''$

$QB = 5/5''$

$MQ = 5''$

$w_2 = 94.2 \, {}^{rad}/_{sec}$

$\alpha_2 = 0$

$w_3 = 30 \, {}^{rad}/_{s}$

$w_4 = 74/2 \, {}^{rad}/_{s}$

ترسیم:

۱- مبدا O_A و مقیاس مناسب انتخاب می کنیم. $\overset{1in=1000 \, ft/sec^2}{\longleftrightarrow}$

۲- شتاب نقطه ی A:

$$\bar{A}_A = \bar{A}_M + \bar{A}_{A/M} = \bar{A}^r_{A/M}$$

$$A^r_{A/M} = MA \times W_2^2 = \frac{4}{12} \times (94.2)^2 = 2960 \, {}^{ft}/_{sec^2} \parallel AM$$

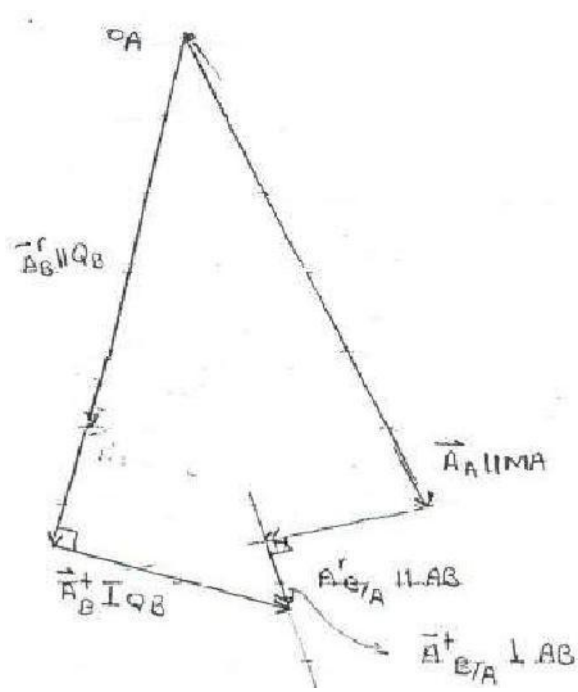
۳- شتاب نقطه ی B:

$$\bar{A}_B = \bar{A}_A + \bar{A}_{B/A} \rightarrow \bar{A}^t_B + \bar{A}^r_B = \bar{A}_A + \bar{A}^t_{B/A} + \bar{A}^r_{B/A}$$

$$A^r_B = MQ \times W_4^2 = \frac{5/5}{12} \times (74.2)^2 = 2520 \, {}^{ft}/_{sec^2} \parallel QB$$

$$A^r_{B/A} = AB \times W_3^2 = \frac{8}{12} \times 30^2 = 600 \, {}^{ft}/_{sec^2} \parallel AB$$

چون $\bar{A}^t_B$ عمود بر QB و چون $\bar{A}^t_{B/A}$ عمود بر AB می باشد لذا چند ضلعی برداری قابل ترسیم است:

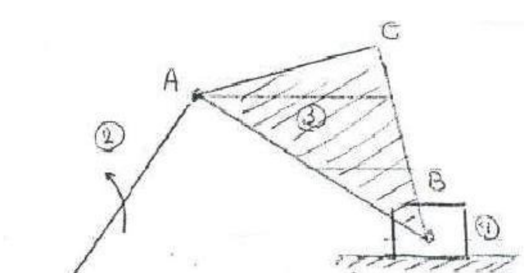


۴- با توجه به مقیاس داریم: جواب $\vec{A}^t_B$ و $\vec{A}^t_{B/A}$ با توجه به معادله ی (a) معلوم رسم می شود و جواب آن ها با توجه به مقیاس معلوم می شود.

۵- شتاب دورانی: $\alpha_3 - \dfrac{A^t_{B/A}}{AB} - \dfrac{120}{8/12} - 180\, {rad}/{\sec^2}$ ساعت

$\alpha_4 = \dfrac{A^t_B}{QB} = \dfrac{1150}{5/5/12} = 2510\, {rad}/{\sec^2}$ ساعت

مثال: مطلوب است رسم دیاگرام شتاب مکانیزم Slider crank:



$MA - 2''$

$AB - 3''$

$AC = 1/5''$

$W_L = 51/8 rps$

$W_3 - 26/16 rps$

$\alpha_2 = 0$

ترسیم:

۱- مبدا O_A و مقیاس مناسب انتخاب می کنیم: ‹ $1in=200 Ft/_{sec^2}$ ›

۲- شتاب نقطه ی A:

$$A_A - A_M + A_{A/M} - A^r_{A/M} - A^t_{A/M}$$

$$A^r_{A/m} - AM\,W_2^2 - \frac{2}{12}\times 62/8^2 - 657/6\frac{Ft}{\sec^2}11AM$$

۳- شتاب نقطه B:

$$\bar{A}_B = \bar{A}_A + \bar{A}_{B/A} = \bar{A}_A + \bar{A}^t_{B/A} + \bar{A}^r_{B/A}$$

چون A_B موازی LL و $A^t_{B/A}$ عمود بر AB می باشد لذا چند ضلعی برداری قابل ترسیم است.

$$A^r_{B/A} = AB\times W_3^2 = \frac{3}{12}\times(26/16)^2 = \pi 1 Ft/_{\sec^2} 11AB$$

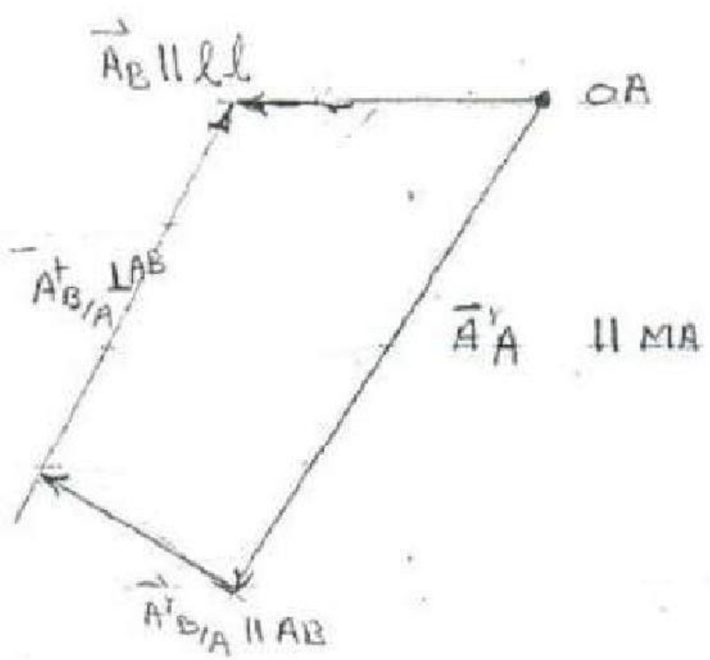
از مقیاس:

$$A_B = 397 Ft/_{\sec^2}$$

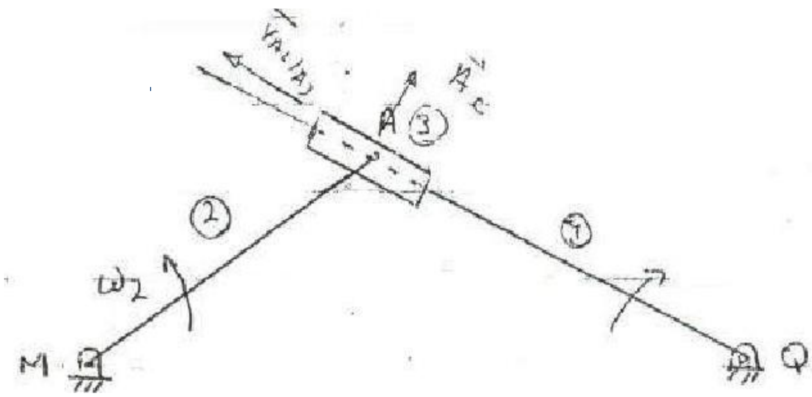
$$A^t_{B/A} - 496 Ft/_{\sec^2}$$

جهات $\bar{A}_B$ و $A^t_{B/A}$ از معادله ی (a) معلوم می شود.

$$\propto_3 = \frac{A^t_{B/A}}{AB} = \frac{496}{3/12} = 1985\, rad/_{\sec^2}$$ مثلثاتی



مثال : مطلوب است ترسیم دیاگرام شتاب مکانیزم زیر.



$MA = 2''$

$MQ = 4.1''$

$W_2 = 62.8 rps$

$V_A = 10/46 \, ft/sec$

$V_{A2/A3} = 9.93 \, fps$

$QA = 3''$

$\alpha_2 = 0$

ترسیم:

۱- مبدا O_A و مقیاس مناسب انتخاب می کنیم. $k = 150 \, FPS$

$$\dot{W}XY + WWXY + \ddot{P} + 2\dot{P}$$

۲- شتاب نقطه A:

$$\vec{A}_{A_2} = \vec{A}_M + \vec{A}_{A^2/M} = \vec{A}^r_{A^2/M} = MA\,W_2^2$$

$$= \frac{2}{12}\times(62/8)^2 = 657 \, Fps^2 \parallel MA$$

۳- شتاب

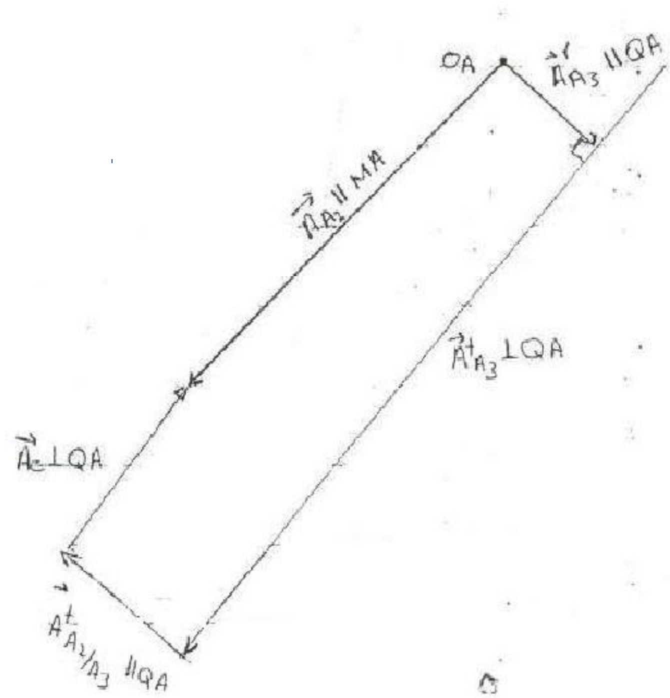
$$\vec{A}_{A2} = \vec{A}_{A3} + \vec{A}_{A2/A3} \quad \vec{A}_C = \vec{A}^r_{A3} + A^t_{A3} + A^r_{A2/A3} + A^t_{A2/A3} + \vec{A}_C \; 2\vec{W}_3 \times \vec{V}_{A2/A3}$$

$\vec{A}^t_{A2/A3}$ را برابر صفر در نظر گرفته و A^t آن را برابر شتاب نسبی

چون $\vec{A}^t_{A3}$ عمود بر QA و $\vec{A}^t_{A2/A3}$ موازی با QA می باشد لذا چند ضلعی برداری قابل ترسم است.

$$A_{A3}^r = QA\,W_3^2 = \frac{3}{12}\times(12/55)^2 = 39/4 \, f/sec^2 \parallel QA$$

$$A_C = 2W_3 \times VA_{2/A3} = 2\times 12/55 \times 9/93 = 249 \, ft/sec^2 \perp QA$$



۴- از مقیاس:

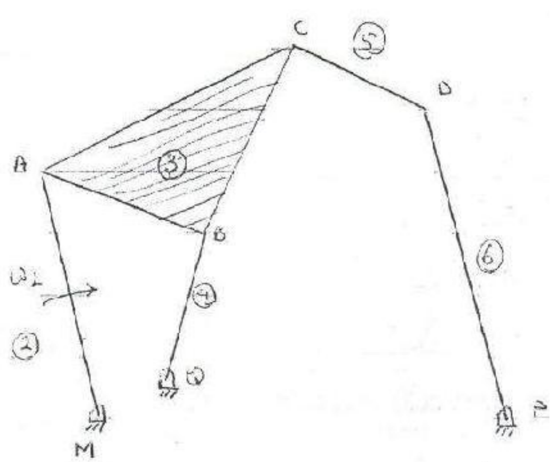
$$A^{t}_{A3} - 857\,{}^{Ft}/_{\sec^2}$$

$$A^{t}_{A2/A3}$$

۵- شتاب دورانی میله ۳:   مثلثاتی

$$\alpha_3 = \frac{A^{T}_{3}}{QA} = \frac{857}{3/12} = 3428\,{}^{rad}/_{\sec^2}$$

مثال:



$W_2 = 14.2 rps$

$V_A - 15/7 Fps$

$W_3 - 62.8 rps$

$W_4 = 93.6 rps$

$W_5 = 17.9 rps$

$W_6 - 103.55$

ترسیم:

۱- مبدا O_A و مقیاس مناسب انتخاب می کنیم: $1in = 500 \, {}^{Ft}/_{\sec^2}$

۲- شتاب A

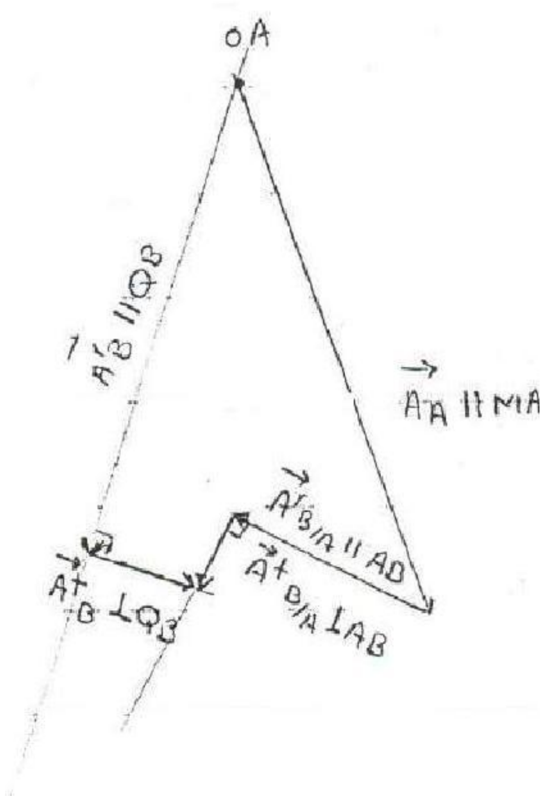
$$\vec{A}_A = \vec{A}_M + \vec{A}_{A/M} = \vec{A}^t_{A/M} = A^r_{A/M} = MA \times W_2^2 = \frac{2}{12}\times(94.2)^2 = 1479 \, {}^{Ft}/_{\sec^2} \parallel MA$$

۳- شتاب نقطه B:

$$\vec{A}^t_B = \vec{A}^r_B = \vec{A}_A + \vec{A}^r_{B/A} + \vec{A}^t_{B/A}$$

$$A^r_B = QB\,(W_4)^2 = \frac{1/75}{12}\times(93/6)^2 = 1278 \, {}^{Ft}/_{\sec^2} \parallel QB$$

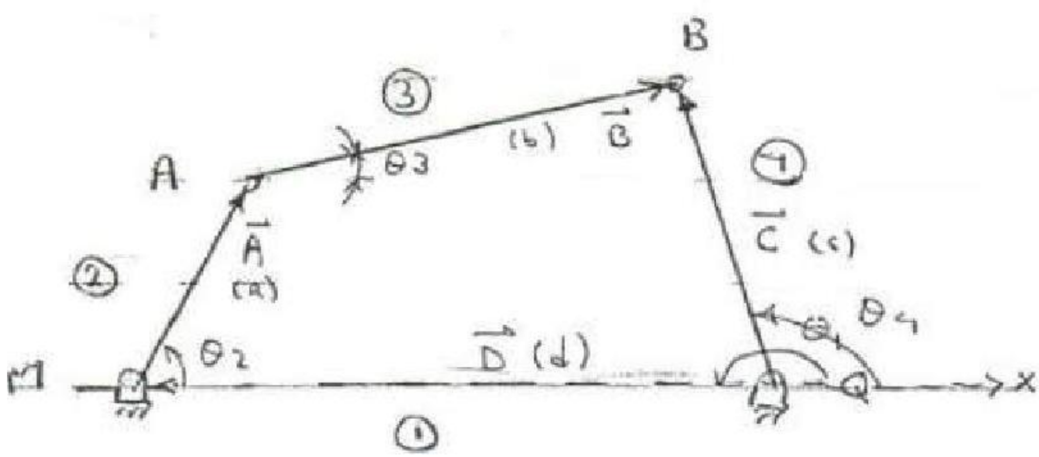
$$A^r_{B/A} = AB\,(W_3)^2 = \frac{1/88}{12}\times(92/8)^2 = 618 \, {}^{Ft}/_{\sec^2} \parallel AB$$



Unit3;

Displacement velocity and Acceleration Analysis of Linkage Using Analytical Methods

تحلیل مکانیزم چهار میله ای:



همواره در طی حرکت مکانیزم بالا رابطه ی برداری زیر برقرار است:

$$\bar{D} + \vec{A} + \bar{B} - \bar{C} = 0$$

در مقایسه با اعداد مختلط:

$$D - de^{J\theta_1}$$
$$A = ae^{J\theta 2}$$
$$B = be^{J\theta 3}$$
$$C = ce^{J\theta 4}$$

لذا داریم:

$$de^{J\theta 1} + ae^{J\theta 2} + be^{J\theta 3} - ce^{J\theta 4} = 0$$

با تفکیک معادله ی بالا به قسمت حقیقی و موهومی:

$$d\cos\theta_1 + a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 = 0$$

$$d\sin\theta_1 + a\sin\theta_2 + b\sin\theta_3 - c\sin\theta_4 = 0$$

چون θ_1 مساوی با 180°:

$$\begin{cases} d + a\cos\theta_1 + b\cos\theta_2 - c\cos\theta_4 = 0 \\ a\sin\theta_2 + b\sin\theta_3 - c\sin\theta_4 = 0 \end{cases}$$

10

$$[a\sin\theta_2 + c\sin\theta_4]^2 = (-b\cos\theta_3)^2$$

$$d^2 + a^2 \cancel{\cos}^2\theta_2 + c^2 \cancel{\cos}^2\theta_6 - 2da\cos\theta_2 + 2dc\cos\theta_4 - 2ac\cos\theta_2\cos\theta_4 - b^2\cos^2\theta_3$$

$$a^2 \cancel{\sin}^2\theta_2 - c^2\sin^2\cancel{\theta_6} - 2ac\sin\theta_2\sin\theta_4 = b^2 ws^2\theta_3$$

$$d^2 + a^2 - b^2 + c^2 - 2ad\cos\theta_2 + 2dc\cos\theta_4 - 2ac[\cos\theta_2\cos\theta_4 + \sin\theta_2\sin\theta_4] = 0$$

$$k_1\cos\theta_4 - k_2\cos\theta_2 + k_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4)$$

$$k_1 = d/a$$

$$k_2 = d/c$$

$$k_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

بر حسب $\tan\theta/2$: $\cos\theta_4 = \dfrac{1 - \tan^2\theta_{4/2}}{1 + \tan^2\theta_{4/2}}$ $\qquad \sin_{\theta/2} = \dfrac{2\tan\theta 4/2}{1 - \tan^2\theta^4/2}$

$$A\tan^2\frac{\theta_4}{2} - B\tan\frac{\theta 4}{2} + c = 0$$

$$A = \cos\theta_2 + k_3 - k_2 - k_2\cos\theta_3$$

$$B = 2\sin\theta_2$$

$$c = k_1 + k_3 - (1 + k_2)\cos\theta_2$$

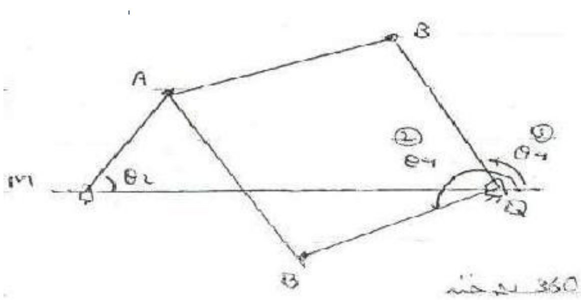
$$k_1 = \frac{d}{a}$$

$$k_2 = \frac{d}{c}$$

$$k_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2ac}$$

$$\tan\frac{\theta 4}{2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4ac}}{2A}$$

working space $:B^2-4ac\geq 0$



به دلیل این که دو شکل مخالف برای شروع حرکت داریم به همین دلیل $\pm$ داریم.

working space برای θ_2 است.

هر دو MA link و BQ می توانند 360 بچرخند

در صورتی که طول این دو میله با هم و AB و MQ با هم برابر باشد.

محاسبه رابطه ی سرعت:

از معادله تغییر مکان نسبت به زمان مشتق می گیریم:

$$de^{j\theta_1}+ae^{j\theta_2}+be^{j\theta_3}-ce^{j\theta_4}=0$$

مشتق رابطه ی بالا نسبت به زمان:

$$ajw_2e^{j\theta_2}+bjw_3e^{j\theta_3}-cjw_4e^{j\theta_4}=0$$

با تفکیک داریم:

$$\begin{cases} aw_2\sin\theta_2 \quad bw_3\sin\theta_3+cw_4\sin\theta_4=0 \\ aw_2\cos\theta_2 \quad bw_3\cos\theta_3 \quad cw_4\cos\theta_4=0 \end{cases}$$

دو معادله و دو مجهول w_3 و w_4:

$$w_3=\frac{aw_2}{b}.\frac{\sin(\theta_4-\theta_2)}{\sin(\theta_3 \quad \theta_4)}$$
$$w_4=\frac{aw_2}{c}.\frac{\sin(\theta_2 \quad \theta_3)}{\sin(\theta_4 \quad \theta_3)}$$

محاسبه ی رابطه شتاب:

از رابطه ی سرعت نسبت به زمان مشتق می گیریم:

$$aj\,\alpha_2 e^{j\theta_2} - aw_2^2 e^{j\theta_2} + bj\,\alpha_3 e^{j\theta_3} - bw_3^2 e^{j\theta_3} - cj\,\alpha_4 e^{j\theta_4} + cw_4^2 e^{j\theta_4} = 0$$

با تفکیک داریم:

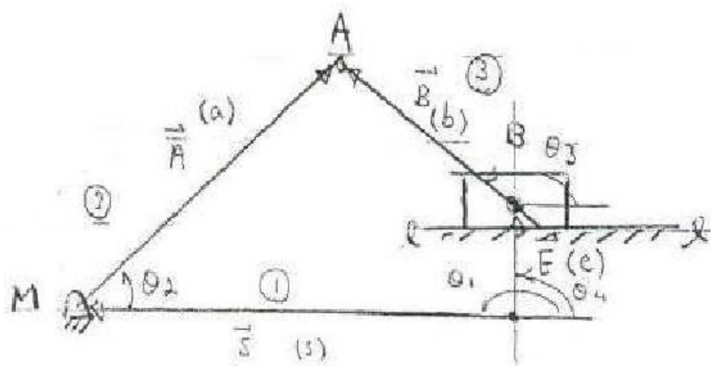
$$-a\alpha_2 \sin\theta_2 - aw_2^2 \cos\theta_2 - b\,\alpha_3 \sin\theta_3 - bw_3^2 \cos\theta_3 + c\,\alpha_4 \sin\theta_4 + bcw_4^2 \cos\theta_4 = 0$$

$$a\,\alpha_2 \cos\theta_2 - aw_2^2 \sin\theta_2 + b\,\alpha_3 \cos\theta_3 - bw_3^2 \sin\theta_3 - c\,\alpha_4 \cos\theta_4 + cw_4^2 \sin\theta_4 = 0$$

حال برای معادله داریم:

$$\alpha_3 = \frac{CD - AF}{AF - BD}$$
$$\alpha_4 = \frac{CE - BF}{AE - BD}$$

آنالیز تغییر مکان مکانیزم Slider crank:



بر حسب اعداد مختلط:

$$\vec{S} + \vec{A} - \vec{B} - \vec{E} = 0 \Rightarrow se^{j\theta_1} + ae^{j\theta_2} - be^{j\theta_3} - ee^{j\theta_4} = 0$$

با تفکیک داریم:

$$\theta_1 = 0, \theta_4 = 90$$
$$s\cos\theta_1 + a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 - e\cos\theta_4 = 0$$
$$S\sin\theta_1 + a\sin\theta_2 - b\sin\theta_3 - e\sin\theta_4 = 0$$