$$\begin{cases} -s + a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 = 0 \\ a\sin\theta_2 - b\sin\theta_3 - e = 0 \end{cases}$$

$$(-s - a\cos\theta_2)^2 = (b\cos\theta_3)^2 \rightarrow s^2 + a^2\cos^2\theta_2 - 2sb\cos\theta_2 = b^2\cos^2\theta_3$$

$$(-e - a\sin\theta_2)^2 = (b\sin\theta_3)^2 \rightarrow e^2 + a^2\sin^2\theta_2 - 2ea\sin\theta_2 = b^2\sin^2\theta_3$$

$$Ls^2 + MS + N = 0$$

$$L = 1$$

$$M = -2a\cos\theta_2$$

$$N = a^2 - e^2 - b^2 - 2ae\sin\theta_2$$

$$s_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 \quad 4LN}}{2L}$$

$$\sin\theta_3 = \tfrac{1}{b}\left[a\sin\theta_2 \quad e\right] \rightarrow \theta_3 = \sin^{-1}\tfrac{1}{b}\left[a\sin\theta_2 \quad e\right]$$

محاسبه ی سرعت:

$$\dot{S}Je^{j\theta_1} + aw_2Je^{j\theta_2} - bJwJe^{j\theta_3} = 0$$

$$\dot{S}\cos\theta_1 - aw_2\sin\theta_2 + bw_3\sin\theta_3 = 0$$

$$\theta_1 = 180$$

$$\dot{S}\sin\theta_1 + aw_2\cos\theta_2 - bw_3\cos\theta_3 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{S} - aw_2\sin\theta_2 + bw_3\sin\theta_3 = 0 \\ aw_2\cos\theta_2 - bw_3\cos\theta_3 = 0 \end{cases}$$

$$w_3 = \frac{aw_2}{b}\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_3}$$

$$\dot{S} = aw_2\frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{\cos\theta_3}$$

محاسبه شتاب:

$$\ddot{S}e^{j\theta_1} + aJ\alpha_2e^{j\theta_2} \quad aw_2^2e^{j\theta_2} \quad bJ\alpha_3e^{j\theta_3} + bw_3^2e^{j\theta_3} = 0$$

با تفکیک داریم:

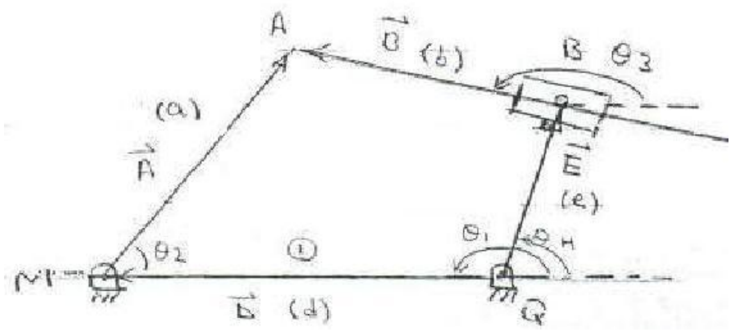
$$\begin{cases} \ddot{S}\cos^{-\ddot{S}}\theta_1 - a\alpha_2\sin\theta_2 - aw^2\cos\theta_2 + b\alpha_3\sin\theta_3 - bw_3^2\cos\theta_3 = 0 \\ \ddot{S}\sin^{0}\theta_1 - a\alpha_2\cos\theta_2 - aw^2\sin\theta_2 - b\alpha_3\cos\theta_3 + bw_3^2\sin\theta_3 - 0 \end{cases}$$

$$\alpha_3 = \frac{a\alpha_2\cos\theta_2 \quad aw_2^2\sin\theta_2 \quad bw_3^2\sin\theta_3}{b\cos\theta_3}$$

$$\ddot{S} = \left[-a\alpha_2\sin\theta_2 - aw_2^2\cos\theta_2 + b\alpha_3\sin\theta_3 + bw_3^2\cos\theta_3\right]$$

آنالیز تغییر مکان مکانیزم Inaverted-slider crank:

$$\vec{D} + \vec{A} - \vec{B} - \vec{E} = 0$$



بر حسب اعداد مختلط:

$$de^{j\theta_1} + ae^{j\theta_2} - be^{j\theta_3} - ee^{j\theta_4} - 0$$

$$d\cos^{-d}\theta_1 \quad a\cos\theta_2 \quad b\cos\theta_3 \quad e\cos\theta_4 = 0$$

$$d\sin^{0}\theta_1 \quad a\sin\theta_2 \quad b\sin\theta_3 \quad e\sin\theta_4 = 0$$

$$d + a\cos\theta_2 \quad b\cos\theta_3 \quad e\cos\theta_4 = 0$$

$$a\sin\theta_2 - b\sin\theta_3 - e\sin\theta_4 - 0$$

$$\theta_1 - 180$$

$$\theta_3 + 90 - 180 - \theta_4 = 360$$

$$\theta_3 - \theta_4 90^\circ$$

$$\theta_3 = 90 + \theta_4 \Rightarrow w_3 = w_4$$

$$\alpha_3 - \alpha_4$$

$$\begin{cases} -d + a\cos\theta_2 - e\cos\theta_4 + b\sin_4 - 0 \\ a\sin\theta_2 \quad e\sin\theta_4 \quad b\cos\theta_4 = 0 \end{cases}$$

$$b = \frac{a\sin\theta_2 - e\sin\theta_4}{\cos\theta_4}$$

$$\sin\theta = \frac{2\tan^{\theta/2}}{1+\tan^{2}_{\theta/2}}$$

$$\cos\theta - \frac{1-\tan^{2}_{\theta/2}}{1+\tan^{2}_{\theta/2}}$$

$$k_1 \tan\frac{\theta_4}{2} + k_2 \tan\frac{\theta_4}{2} + k_3 = 0$$

$$\tan\theta_{4/2} = \frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 4k_1 k_3}}{2k_1}$$

$$k_1 d - e - a\cos\theta_2$$

$$k_2 2a\sin\theta_2$$

$$k_3 - a\cos\theta_2 - d - e$$

رابطه ی سرعت:

$$ajw_2 e^{j\theta_2} \quad \dot{b}e^{j\theta_3} - bjw_3 e^{j\theta_3} \quad ejw_4 e^{j\theta_4} = 0$$

$$\begin{cases} -aw_2\sin\theta_2 - \dot{b}\cos\theta_3 + bw_3\sin\theta_3 + ew_4\sin\theta_4 = 0 \\ aw_2\cos\theta_2 - \dot{b}\sin\theta_3 - bw_3\cos\theta_3 - ew_4\cos\theta_4 - 0 \end{cases}$$

$$w_3 = w_4$$

$$\theta_3 - 90 + \theta_4$$

$$w_4 - w_3 - \frac{aw_2}{b}\sin(\theta_2 - \theta_4)$$

$$\dot{b} = \frac{aw_2}{b}\left[b\cos(\theta_4 - \theta_2) - e\sin(\theta_4 - \theta_2)\right]$$

رابطه ی شتاب:

$$aj \propto_2 e^{j\theta_2} - aw_2^2 e^{j\theta_2} - \ddot{b}e^{j\theta_3} \quad \dot{b}jw_3 e^{j\theta_3} + \dot{b}jw_3 e^{j\theta_3} \quad bj \propto_3 e^{j\theta_3}$$
$$+bw_3^2 e^{j\theta_3} - ej \propto_4 e^{j\theta_4} + ew_4^2 e^{j\theta_4} - 0$$

$$\theta_3 = 90 + \theta_4$$

$$-a\propto_2 \sin\theta_2 - aw_2^2\cos\theta_2 - \ddot{b}\cos\theta_3 + 2\dot{b}w_3\sin\theta_3 + b\propto_3\sin\theta_3 - bw_3^2\cos\theta_3$$
$$+B \propto_4 \sin\theta_4 - ew_4^2\cos\theta_4 - 0$$

$$a\propto_2\cos\theta_2 - aw_2^2\sin\theta_2 - \ddot{b}\sin\theta_3 + 2\dot{b}w_3\cos\theta_3 - b\propto_3\cos\theta_3 + bw_3^2\sin\theta_3$$
$$-e \propto_4 \cos\theta_4 + ew_4^2\sin\theta_4 = 0$$

$$\propto_1 - \frac{AF - CD}{AE - BD}$$

$$\ddot{b} - \frac{CE - BF}{AE - BD}$$

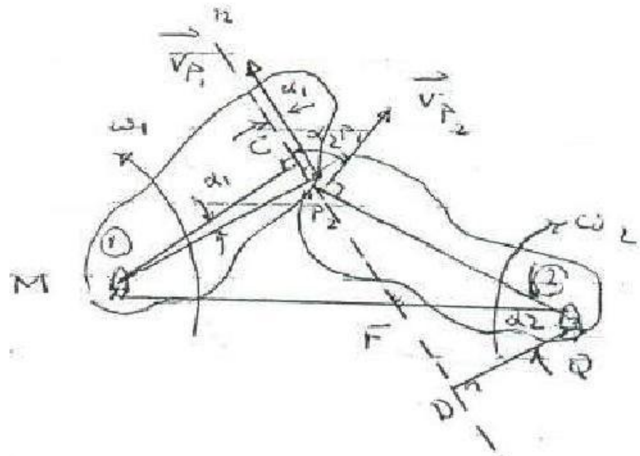
Unit:۷

Fundamental of uniform Rotary Transmission

بنا به تعریف نسبت سرعت بین دو جسم:

$$SR = \frac{w_2}{w_1} =$$

از روی شکل داریم:



$$V_{P_1} - MP_1 W_1 \Rightarrow W_1 - \frac{VP_1}{MP_1}$$

$$V_{P_2} = QP_2 W_2 \rightarrow W_2 = \frac{VP_2}{QP_2}$$

لذا داریم:

$$speed\ ratio : SR - \frac{w_2}{w_1} - \frac{VP_2 MP_1}{VP\, QP_2}$$

می خواهیم که حرکت ما به صورت uniform منتقل شود:

باید در جهت نرمال سرعت های مایکی باشد در جهت t می تواند یکی نباشد که در این صورت لغزش داریم.

برای تماس در جسم در حین انتقال سرعت دورانی شرط مماس:

$$V_{P_1}^{n} - V_{P_2}^{n}$$

خطوط QD و MC را بر خط نرمال مشترک nn عمود می کنیم.

شرط تماس

$$V_{P_1}^{n} - V_{P_1}.\cos\alpha_1 - V_{P_2}^{n} - V_{P_2}.\cos\alpha_2$$

از روی شکل:

$$QP_2 = \frac{QD}{\cos\alpha_2}$$

$$MP_1 = \frac{MC}{\cos\alpha_1}$$

لذا:

$$SR - \frac{w_2}{w_1} - \frac{V_{P_2} MP_1}{V_{P_1} QP} - \frac{V_{P_2}\cos\alpha_2\, Mc}{V_{P_1}\cos\alpha_1\, QD}$$

با رعایت شرط سرعت:

$$SR - \frac{w_2}{w_1} - \frac{MC}{QD}$$

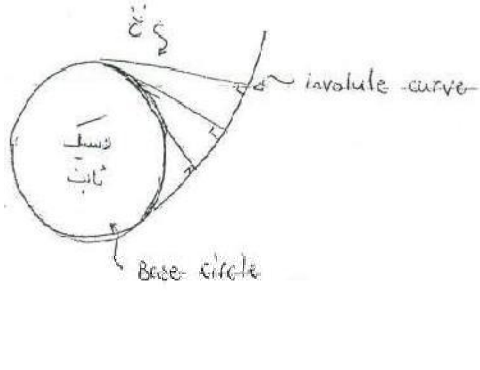
دو مثلث QDF و MCF بنابر دو زاویه ی مساوی متشابه اند لذا:

$$SR = \frac{w_2}{w_1} = \frac{MC}{QD} = \frac{MF}{QF} = \frac{FC}{FD}$$

اگر نقطه ی F کوچکترین ارتعاشی در آن باشد SR دارای ارتعاش استو اگر مطلق باشد SR به صورت uniform انتقال می یابد.

ما ثابت کردیم که اگر نرمال مشترک خط المرکزین را در یک نقطه قطع کند آن نقطه باید مطلق ثابت باشد.

محنی اینولوت: (involute carve)



عبارت است از مکان هندسی انتهای یک نخ که از روی یک دیسک ثابت باز می شود.

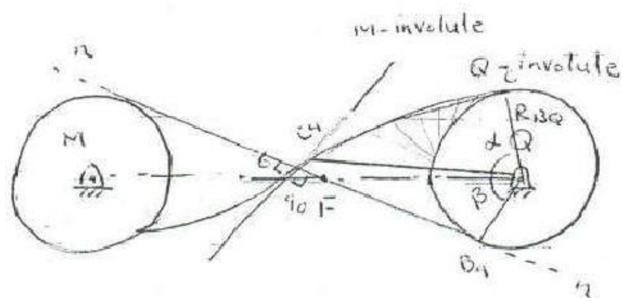
محنی اینولوت دارای خواص زیر است:

۱- در هر نقطه از منحنی شعاع انحناد طول نخ باز شده است.

۲- مرکز انحناد هر نقطه از منحنی کل تماس نخ باز شده با دیسک است.

۳- همواره امتداد نخ باز شده در نقطه ی مورد نظر عمود بر پرونیل منحنی invelute است.

اثبات ثابت بودن نقطه ی F:



تنها جائی که می توان از آن دو عمود بر مماس مشترک دو سختی رسم کرد نقطه ی F روی خط مرکز مشترک دو دیسک است.

اثبات منحنی involute:

از روی شکل طول قوس دایره Q از نقطه ی C تا B_4:

$$C\hat{B}_4 = R_{BQ}(\alpha + B)$$

با توجه به خاصیت منحنی اینولوت:

$$C\hat{B}_4 - C_4B_4$$

از روی شکل:

$$\tan\beta - \frac{C_4B_4}{RBQ} - \frac{R_{BQ}(\propto + B)}{R_{BQ}}$$

$$\tan\beta - \propto + B \Rightarrow \propto - \tan\beta - \beta - \mathrm{Inv}(B)$$

Unit8:

Gear Tooth Technology:

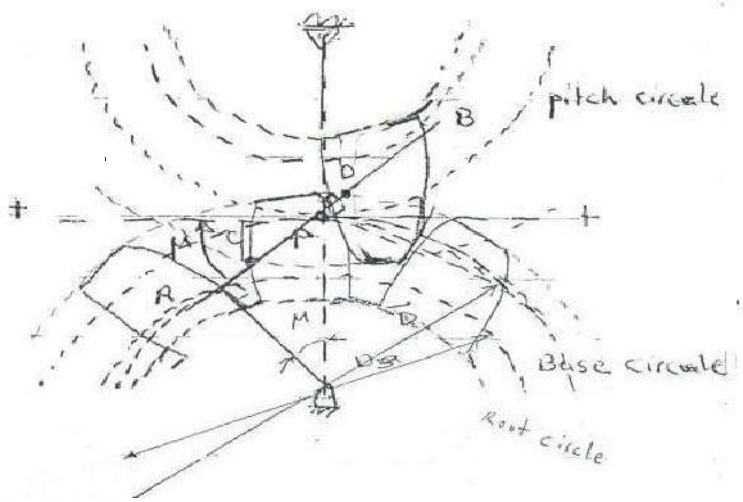
Objective:1

1. Base circle: (دایره مبنا)

عبارت است از دایره نامرئی روی چرخ دنده که منحنی involute دندانه ها از روی آن ساخته شده است.

2. Pitch circle

عبارت است از دایره ی معادل یک دیسک به طوری که در چرخدنده ی درگیر دایره ی گامشان با یکدیگر مماس باشد این دایره روی چرخدنده نامرئی می باشد.



3. Root circle

عبارت است از دایره ی مرئی روی چرخدنده از انتهای ریشه های گذرد.

4. Addendum circle

عبارت است از دایره ی مرئی روی چرخدنده که از ابتدای ریشه گذرد.

5. Pitch point

عبارت است از نقطه ی تماس دوایر Pitch point

6. Addendum(یا سر دنده)

عبارت است از سردنده و یا منطقه بین دوایر Addendum و Pitch از یک دندانه

7. Deddendum

عبارت است از نه دنده و یا منطقه بین دوایر Pitch و root از دندانه

8. clearance

عبارت است از فاصله ی شعاعی بین دوایر Addendum یک چرخدنده تا دایره root چرخدنده درگیر.

9. working Depth

عبارت است از عمق عمل یا فاصله ی شعاعی بین دوایر Addendum دو چرخدنده درگیر و یا برابر است با Addendum Deddendum منهای clearance.

10. Tooth Face

عبارت است از قسمتی از سطح دندانه که دارای منحنی involute می باشد. این قسمت محصور است بین دوایر Base و Addendum.

11. Tooth thickness

عبارت است از ضخامت طول قوس روی دایره Pitch از یک سطح دندانه تا نقطه ی مقابل دندانه یا طول قوس بین دو Pitch point را گویند.

12. Tooth flank

عبارت است از قسمتی از دندانه که دارای منحنی involute نمی باشد که این قسمت محصور بین دایره Base و root یک چرخدنده است.

13. line of action

۱- مماس مشترک دوایر Base است
۲- مکان هندسی نقاط تماس بین دو چرخدنده ی درگیر روی این خط قرار دارد.
۳- در نقطه تماس بین دو دندانه عمود بر profile منحنی های involute است.
۴- امتداد نیروی انتقالی بین دو چرخدنه ی درگیر روی این خط قرار می گیرد
۵- از Pitch point می گذردو

14. Pressure angle

عبارت است از زاویه بین خط عمل و مماس مشترک بین دوایر Pitch. توجه می شود که امتداد نیروی انتقالی بین دو چرخ دنده درگیر روی خط عمل می باشد.

15. Circular pitch

عبارت است از طول قوس روی دایره ی گام از یک نقطه روی یک دندانه تا نقطه نظیر روی دندانه دیگر.

N: تعداد دندانه ها

$$P_c - \frac{\pi D}{N}$$

16. Base pitch

عبارت است از طول قوس روی دایره Base از یک نقطه روی یک دندانه تا نقطه نظیر روی دندانه دیگر.

$$P_b - \frac{\pi D_B}{N}$$

D_B: قطره دایره Base

از روی شکل داریم:

$$R_B = R_P \cos \mu$$

$$R_B = \frac{\pi D_B}{N} = \frac{\pi D \cos \mu}{N} \rightarrow P_B = P_C \cos \mu$$

17. Diametral pitch

بنا بر تعریف عبارت است از عددی که برای استاندارد کردن چرخ دنده ها از آن استفاده می شود و برابر است.

یا:

$$P_D - \frac{N}{D}$$

$$P_D = \frac{1}{mo}$$

که مدول عبارت است از استاندارد چرخدنده ها در استاندارد اروپایی با امریکائی

قانون مهم: دو چرخ دنده درگیر باید دارای Diametral pitch یکسان باشند.

اگر از چرخ دنده بالایی یک دنده رد شود از پایینی هم باید یک دنده رد شود پس باید P_c های آن ها مساوی باشد.

بنابراین:

$$P_{C_1} = P_{C_2} \rightarrow \frac{\pi D_1}{N_1} = \frac{\pi D_2}{N_2} \rightarrow \frac{P_1}{N_1} = \frac{D_2}{N_2}$$

قانون درگیری چرخ دنده

$$\rightarrow \frac{1}{P_{D_1}} = \frac{1}{P_{D_2}} \rightarrow P_{D_1} = P_{D_2}$$

از تعریف Circular pitch داریم:

$$P_C = \frac{\pi D}{N} = \frac{\pi}{N/D} = \frac{\pi}{P_D} \rightarrow P_C P_D = \pi$$

18. Angle of action

عبارت است از زاویه ی مرکز روی چرخ دنده بین نقطه ی شروع و نقطه ی خاتمه درگیری بین دو چرخدنده درگیر.

اگر شعاع دوایر گام دو چرخ دنده درگیر مساوی نباشد زاویه درگیری بین دو چرخ دنده درگیر با هم متفاوت است.

19. Pitch angle

عبارت است از زاویه ی مرکزی Circular pitch در صورتی که Pitch angle زیاد شود نیروی بیشتری را منتقل می کند.

20. Interfrence

عبارت است از شرایطی که یک سطح اینولوت با یک سطح غیر اینولوت بین دو چرخ دنده درگیر تماس حاصل کند.

این شرایط در جعبه دنده های نور کارکرده به صورت زیر اتفاق می افتد:

۱- جعبه دنده های نو: چنانچه در جعبه دنده های نو در حین کارکرد روغن جعبه دنده گرم شود، سر و صدا در حین کارکردن به وجود می آید، جعبه دنده ارتعاش نماید و در نهایت جعبه دنده قفل می کند عامل آن تداخل بین چرخ دنده ها می باشد. اگر از دقت تراش چرخ دنده اطمینان وجود دارد باید استحکام خمشی محور چرخ دنده ها را چک نمود چون ممکن است در حین انتقال قدرت زیاد تماس در قسمت Flank بر قرار شده باشد.

۲- جعبه دنده های کارکردهک این نوع جعبه دنده ها که مدت زمانی بدون هیچ یک از مشکلات فوق کار کرده اند تداخل به صورت گرم شدن روغن جعبه دنده خود را نشان می دهد.

21. Undercut

چنانچه بنا بر نصب غلط چرخ دنده ها در داخل جعبه دنده، تماس در قسمت Flank برقرار شود می توان سطح دندانه را بین دایره Base و دایره root تراش داد به طوری که تماس از بین می رود این عمل را Undercut می گویند که باعث تضعیف استحکام خمشی دنده ها می گردد.

22. Contact Ratio

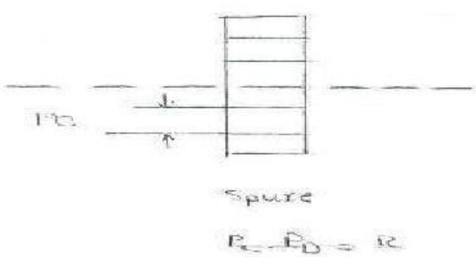
بنابر تعریف نسبت تماس عبارت است از تعداد دندانه درگیر بین چرخ دنده ی درگیر

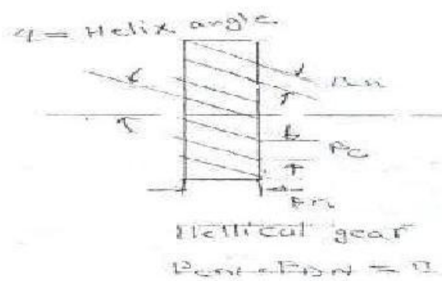
اثبات در امتحان:

$$GR = \frac{Angle\ \ of\ \ action}{Pitch\ angle} = \frac{CD}{P_C \cos \mu}$$

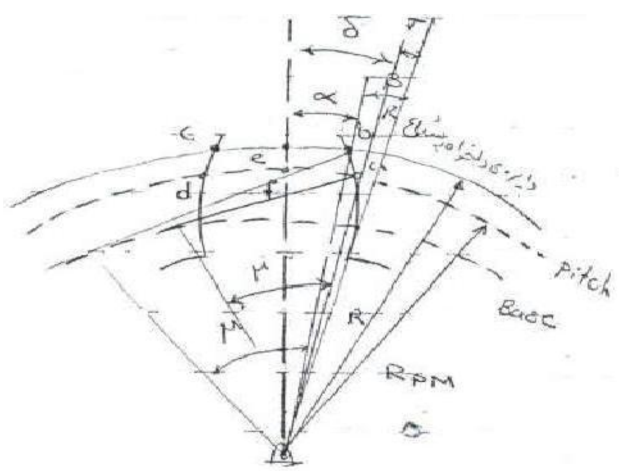
23. path of contact = CDH

عبارت است از بخشی از خط عمل که مکان هندسی واقعی نقاط تماس بین دو چرخ دنده درگیر می باشد. این قسمت بخشی از خط عمل محور بین دوایر Addendum در چرخ دنده ی درگیر است.





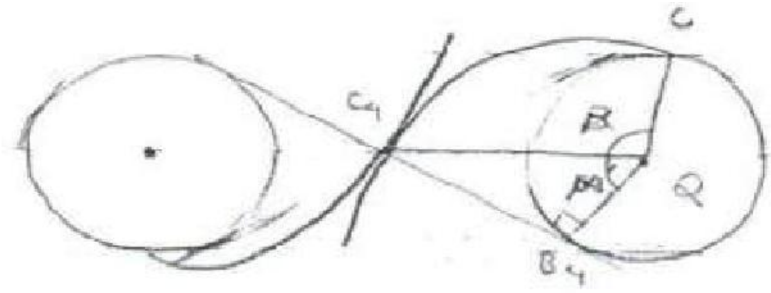
محاسبه ی ضخامت دندانه در شعاع دلخواه R:



$$\alpha = e\hat{M}b = \frac{t_{bc}}{2R}$$

$$S = F\hat{M}a = \frac{t_{ad}}{2R_{PM}}$$

حال از تعریف منحنی involute استفاده می کنیم:



$\beta = Inv \mu'$

$\beta - Inv\ \mu' - \tan \mu' - \mu'$
$v = Inv\ \mu = \tan \mu - \mu$

حال از روی شکل داریم:

$$\propto - \beta - \delta + V \Rightarrow \frac{t_{bc}}{2R} - Inv\ \mu' - \frac{t_{ad}}{2R_{pm}} + Inv\ \mu$$

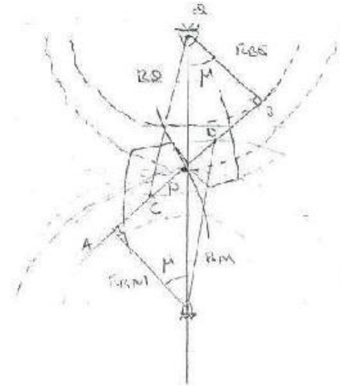
$$t_{bc} - 2R\,(\frac{t_{ad}}{2R_{pm}} + Inv\ \mu - Inv\ \mu')$$

ضخامت دندانه در شعاع R:

Part ۱: محاسبه نسبت تماس:

بنا به تعریف تماس برابر است با:

$$CR - \frac{Angle\ of\ action}{Pitch\ angle}$$



$$O = \frac{CD}{P_c \cos \mu}$$
$$CD = Cp - PD$$
$$Cp = BC \quad BP$$

$$BC^2 = R_Q^2 - R_{BQ}^2$$
$$BP = R_{PQ}\sin\mu$$
$$PD = AD - Ap$$
$$AD^2 = R_M^2 - R_{BM}^2$$
$$AP = R_{PM}\sin\mu$$
$$path\ of\ \ contact = CD = (BC - Bp) + (AD - Ap)$$
$$CD = \sqrt{R_Q^2 - R_{BQ}^2} - \sqrt{R_M^2 - R_{BM}^2} - (R_{PQ} - R_{PM})\sin\mu$$

$$CR = \frac{\sqrt{R_Q^2 - R_{BQ}^2} + \sqrt{R_M^2 - R_{BM}^2} - (R_{PQ} + R_{PM})\sin\mu}{P_C\cos\mu}$$

با استفاده از استاندارد R_Q و R_M بدست می آید به عنوان مثال برای چرخ دنده ی 20° Full داریم:

$$R_M = R_{PM} + \frac{1}{P_D}$$

Depth

$$R_Q = R_{PQ} + \frac{1}{P_D}$$

Objective 3: تعیین شرایط تداخل

قبل از ساخت یک جفت چرخ دنده ی درگیر می توان چک نمود که آیا در چرخ دنده بعد از ساخت تداخل خواهند داشت و یا خیر اطلاعات مورد نیاز عبارتند از:

N_1
N_2
M
$$P_D = \frac{N}{D}$$

با داشتن مقادیر فوق:

$$P_D = \frac{N_1}{D_1} = \frac{N_2}{D_2}$$

$$D_2 - \frac{N_2}{P_D} - R_{PQ} \times 2$$ لذا

$$2 \times R_{PM} - D_1 - \frac{N_1}{P_D}$$

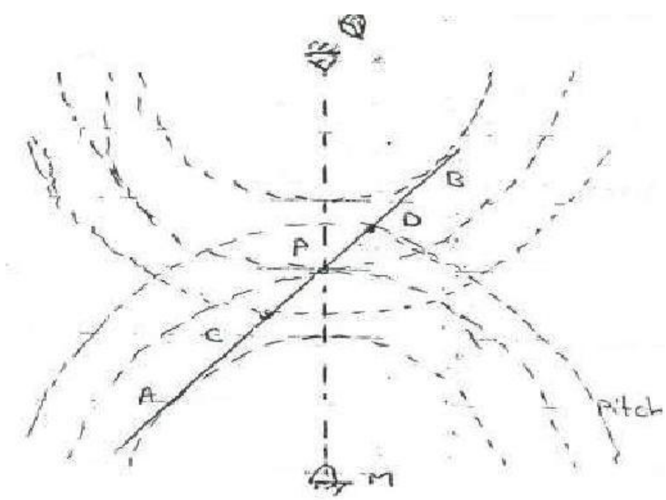
و فاصله ی بین دو مرکز

$$C - R_{Pm} + R_{PQ} - MQ$$

شعاع دوایر Base

$$R_{BM} - R_{PM} \cos \mu$$

$$R_{BQ} - R_{PQ} \cos \mu$$



با رسم دوایر Base و مماس های آن ها، خط عمل AB رسم می شود.

با رسم شعاع دوایرAddendum

$$R_M - R_{PM} + \frac{1}{P_D}$$

$$R_Q - R_{PQ} + \frac{1}{P_D}$$

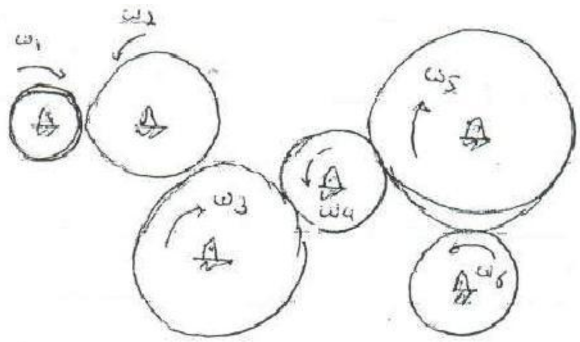
موقعیت Path of contact (CD) بدست می آید.

اگر چنان چه نقاط C و D بین نقاط A و B قرار گیرند تداخل نخواهیم داشت.

Unit ۹:

Design of Gear Train

1. simple Gear Train



بنابر تعریف نسبت سرعت در جعبه دنده برابر است با:

$$SR - \frac{w_6}{w_1}$$

$$\frac{w_6}{w_1} - \frac{w_6}{w_5} . \frac{w_5}{w_4} . \frac{w_4}{w_3} . \frac{w_3}{w_2} . \frac{w_2}{w_1}$$

چون سرعت خطی بین چرخ دنده ها یکسان است لذا:

$$R_1 W_1 - R_2 W_2 - \ldots$$

$$\frac{W_2}{W_1} - \frac{R_2}{R_1}$$

لذا از روابط بالا داریم:

$$SR = \frac{R_5}{R_6} \times \frac{R_4}{R_5} \times \frac{R_3}{R_4} \times \frac{R_2}{R_3} \times \frac{R_3}{R_2} \rightarrow SR = \frac{W_6}{W_1} = \frac{R_1}{R_6}$$

چون طبق قانون درگیری بین دو چرخ دنده باید Diametral pitch یکسان باشد:

$$P_D = \frac{N}{D} = \frac{N}{2R} = \frac{N_1}{2R_1} = \frac{N_2}{2R_2} = \frac{N_3}{2R_3} = \ldots = \frac{N_6}{2R_6}$$

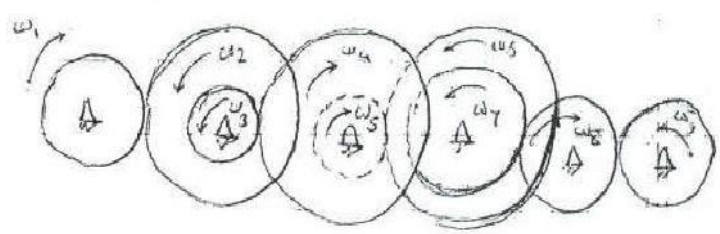
حال داریم:

$$\frac{R_1}{R_6}=\frac{N_1}{N_6}$$

لذا:

$$SR=\frac{W_6}{W_1}=\frac{R_1}{R_6}=\frac{N_1}{N_6}$$

2. Compound Gear Train



بنابر تعریف نسبت جعبه دنده برابر است با:

$$SR=\frac{W_9}{W_1}$$

$$SR=\frac{W_9}{W_8}\cdot\frac{W_8}{W_7}\cdot\frac{W_7}{W_6}\cdot\frac{W_6}{W_5}\cdot\frac{W_5}{W_4}\cdot\frac{W_4}{W_3}\cdot\frac{W_3}{W_2}\cdot\frac{W_2}{W_1}$$

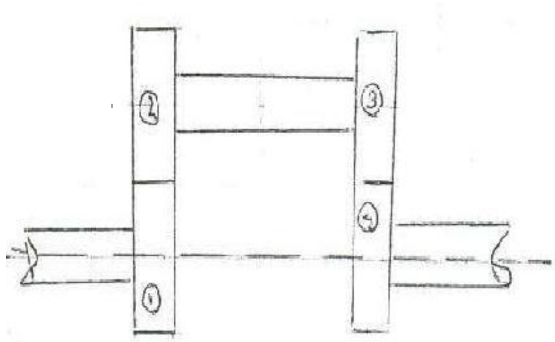
$$SR=\frac{W_9}{W_1}\cdot\frac{W_9}{W_7}\cdot\frac{W_6}{W_5}\cdot\frac{W_4}{W_3}\cdot\frac{W_2}{W_1}$$

$$SR=\frac{W_9}{W_1}\cdot\frac{R_7}{R_9}\cdot\frac{R_5}{R_6}\cdot\frac{R_3}{R_4}\cdot\frac{R_1}{R_2}$$

حال داریم:

$$SR=\frac{W_9}{W_1}=\frac{\text{حاصلضرب شعاع دوایرگم چرخنده ها}\,Driver}{\text{حاصلضرب شعع دوایرگام چرخنده ها}\,Driven}$$

3. Inverted Compound Gear Train



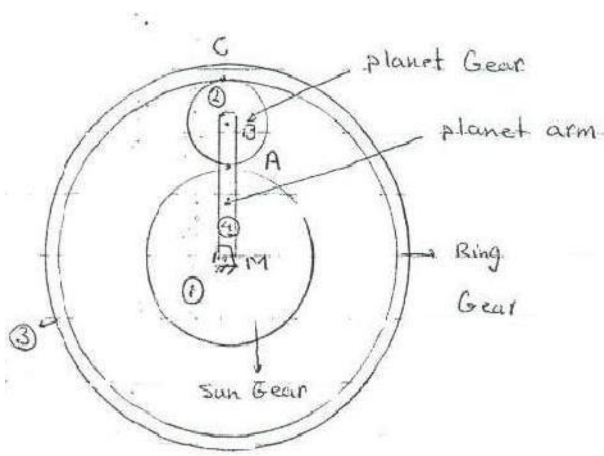
بنابه تعریف نسبت سرعت ها برابر است با:

$$SR = \frac{W_4}{W_1}$$

$$SR = \frac{W_4}{W_3} \cdot \frac{W_3}{W_2} \cdot \frac{W_2}{W_1} \rightarrow SR = \frac{W_4}{W_1} = \frac{W_4 W_2}{W_3 W_1}$$

$$SR = \frac{W_4}{W_1} = \frac{R_3 R_1}{R_4 R_2}$$

4. Planetary Gear Train



از روی شکل Planet:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + V_{A/B}$$

از روی شکل روی Planet:

$\vec{V}_C = \vec{V}_B - V_{C/B}$

$V_{C/B} = V_{A/B}$

لذا:

$\vec{V}_{C/B} = \vec{V}_C - \vec{V}_B$

$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A \quad \vec{V}_B$

$\vec{V}_C \quad \vec{V}_B = \vec{V}_B = \vec{V}_A$

قدر مطلق:

$\vec{V}_C = R_3 W_3$ Ring روی

$\vec{V}_B = (R_1 + R_2)W_4$ Planet arm روی

$\vec{V}_A = R_1 \, W_1$

$$R_3W_3 - (R_1+R_2)W_4 - -R_1W_1 - (R_1+R_2)W_4$$
$$\Rightarrow R_1W_1 - R_3W_3 = 2(R_1+R_2)W_4$$

سه حالت در نظر می گیریم:

۱. Sun gear is fixed : W_1=۰

In put: planet arm

Out put: Ring

$$SR - \frac{w_3}{w_4} - \frac{2(R_1 \quad R_2)}{R_3}$$

۲. Planet arm is fixed: w_4=۰

In put: sun

Out put: Ring

$SR = \frac{w_3}{w_1} = \frac{R_1}{R_3}$ Reverse gear

۳. Ring is fixed: W_3=۰

In put: sun

Out put: planet arm

$SR = \frac{w_4}{w_1} = \frac{R_1}{2(R_1+R_2)}$

Unit ۱۰: Cams and Followers

دارای سه سیستم است:

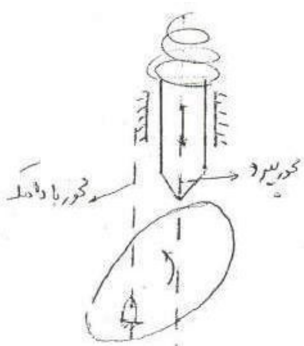
۱- Cams

۲- Followers

۳- Motion programs

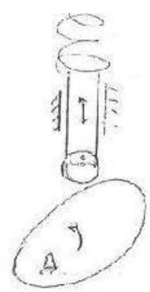
انواع پیرو (Followers):

اگر سرعت بالا باشد پدیده ی jam اتفاق می افتد و بادامک ها از کار می افتند.



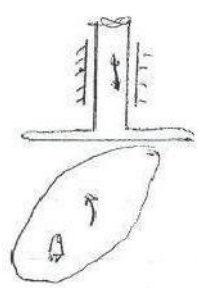
Knifel edge

Followers



Roller

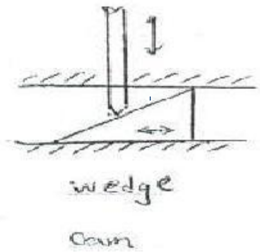
Follower

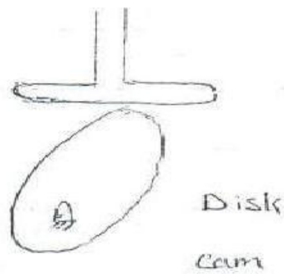


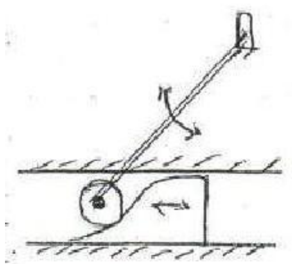
Flat Face

Follower

انواع با دامک ها:



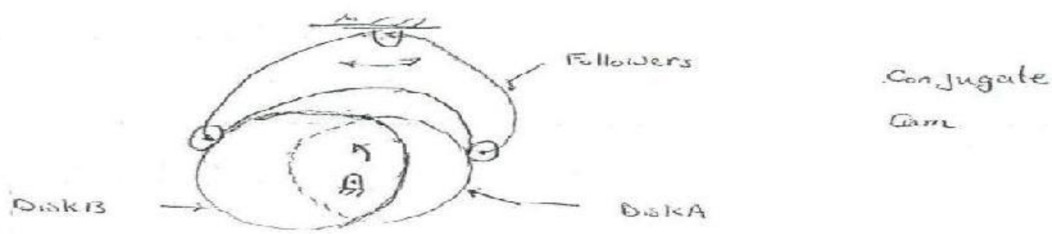


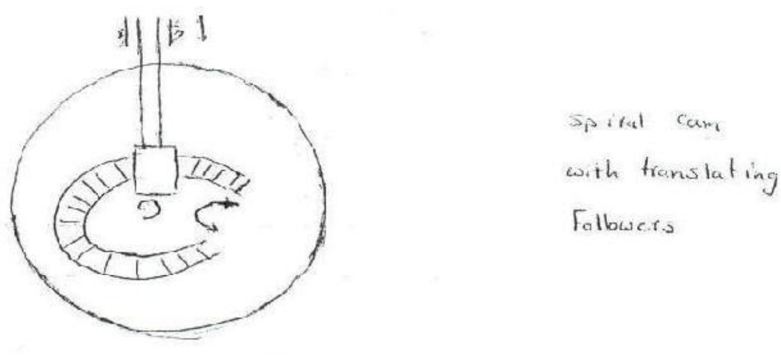


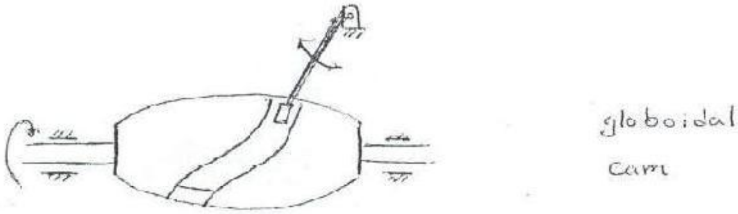
Wedge

Cam with oscillating followers

اگر سرعت دورانی بادامک بسیار زیاد باشد از این نوع بادامک اشتفاده می شود.

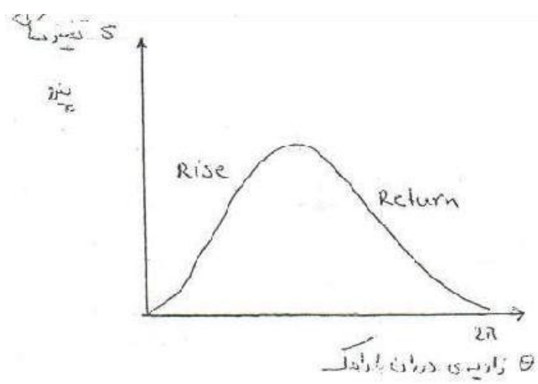




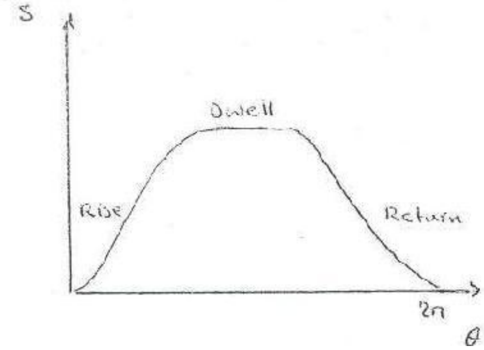


انواع :

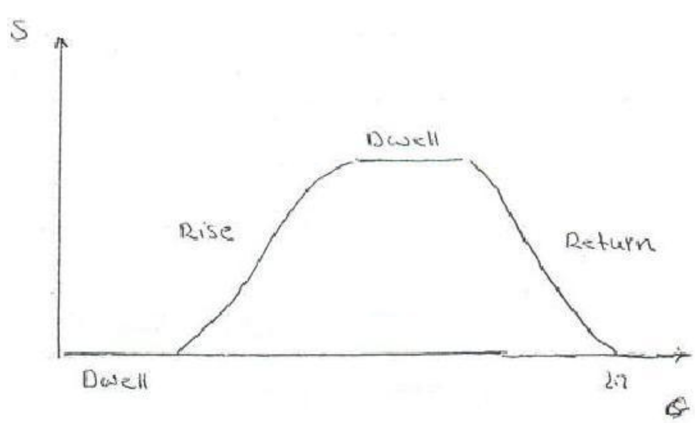
برنامه ای که باید بادامک حرکت را به پیرو منتقل کند.



R R Motion program



R - D - R Motion program



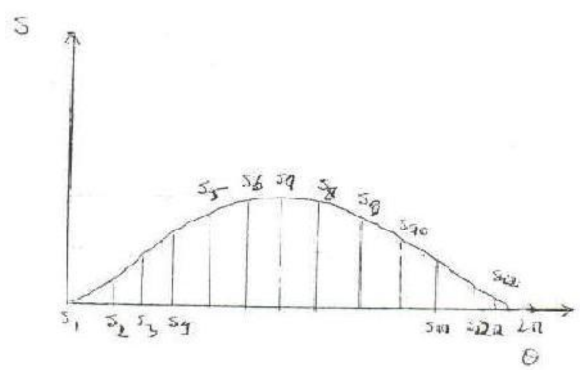
D - R - D - R Motion program

نحوه ساخت کانتور بادامک با داشتن Motion program و سیستم پیرو

فرض کنید بادامک و پیرو معلوم است. با داشتن Motion program می توان کانتور بادامک را رسم و آن را در کارگاه ساخت:

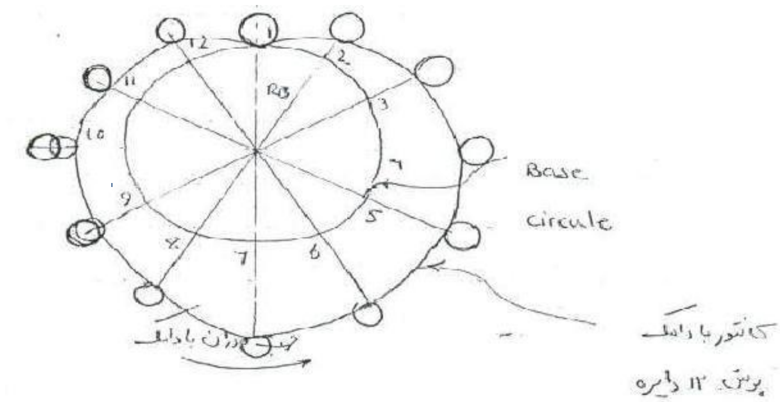
مثال: فرض کنید بادامک از انواع دیسک و پیرو از نوع Roller follower و Translating و هم مرکز با مرکز بادامک می باشند.

Motion program مطابق شکل زیر داده شده است.



۱- ابتدا دایره Base بادامک را تعیین می کنیم و شعاع آن را R_B می نامیم.

۲- Motion program را به تعداد تقسیمات مساوی تقسیم می کنیم (۱۲ قسمت) و ارتفاع هر قسمت را S_i می نامیم.



۳- دایره ی Base را به همان تعداد تقسیم می کنیم و در خلاف جهت حرکت بادامک شماره گذاری می کنیم.

۴- موقعیت Roller پیرو را در ۱۲ قسمت روی دایره ی Base از فرمول زیر مشخص نمود و دایره ی پیرو را مشخص می کنیم.

$$Y_i - R_B + S_i + r_F$$

r_F برابر با شعاع پیرو یعنی شعاع Roller آن است برای این منظور ابتدا باید min شعاع انحناء M_P را محاسبه نمود و r_f را طوری انتخاب نمود که کوچکتر از Min شعاع انحناء باشد.

۵- پوش ۱۲ دایره Roller کانتور بادامک است.

Unit ۱۲: Motion Programs

اگر S تغییر مکان پیرو و θ زاویه ی دوران بادامک داریم:

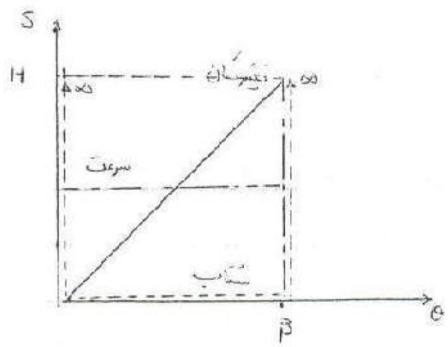
$$V = \frac{ds}{dt} = \quad \text{سرعت پیرو}$$

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \quad \text{شتاب پیرو}$$

$$j = \frac{d^3 s}{dt^3} = (\text{تکان}$$

هرگاه jerk یک سیستم را Min کنیم ان سیستم Comfort تر می باشد.

۱- Constant velocity Motion programs



در ابتدا و انتها شتاب بی نهایت است.

$S = c\theta$ معادله تغییر مکان

$\theta - \beta$

$S - H$

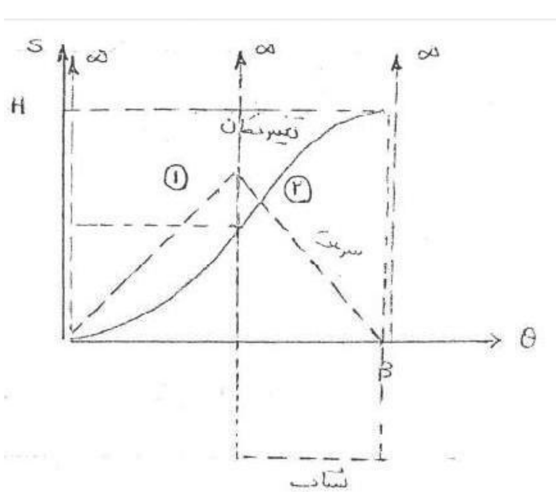
$\Rightarrow H - c\beta \Rightarrow c - \dfrac{H}{\beta} \Rightarrow S - H\dfrac{\theta}{\beta}$ تغییر مکان

$V = \dfrac{ds}{dt} = H\dfrac{w}{\beta}$ **سرعت**

$a = 0$

این سیستم به علت این که در ابتدا و انتهای Rise شتاب بی نهایت است با توجه به جرم پیرو نیروی بی نهایت به پیرو منتقل شده که غیر قابل قبول است برای سرعت های بالا.

۲- Constant acceleration Motion program.



در سه نقطه حرکت بی نهایت داریم

$$S = c\theta^2 \qquad 0 \le \theta \le \beta/2$$

$$\theta = \beta/2$$
$$S = H/2$$
$$\Rightarrow \frac{H}{2} = C\,\beta^2 \Rightarrow C = \frac{2H}{2\beta^2} \Rightarrow S = 2H\,(\frac{\theta}{\beta})^2$$

$$V = \frac{4H}{\beta^2} W\,\theta$$ سرعت

$$a = \frac{4H}{\beta^2} W^2$$

$$S = c_1\theta^2 + c_2\theta + c_3 \qquad \beta/2 \le \theta \le \beta$$

$$\theta = \beta \qquad \theta = \beta \qquad \theta = \beta/2$$
$$S = H \qquad V = 0 \qquad V_2 = V_1$$

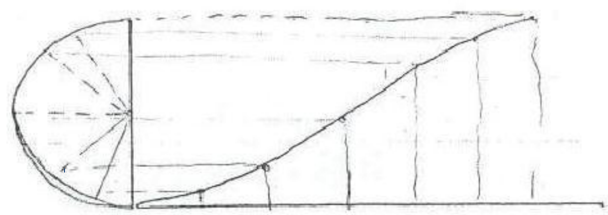
$$C_1 = \frac{-2H}{\beta^2} \qquad C_2 = \frac{4H}{\beta} \qquad C_3 = H$$

$$S = H\left[1 - 2(1 - \frac{\theta}{\beta})^2\right]$$

$$V = \frac{ds}{dt} = 4H\,w/\beta\left[1 - \frac{\theta}{\beta}\right]$$
$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{-4Hw^2}{\beta^2}$$

این سیستم نیز برای شتاب های کم قابل استفاده است.

۳- Simple Harmonic Motion program.



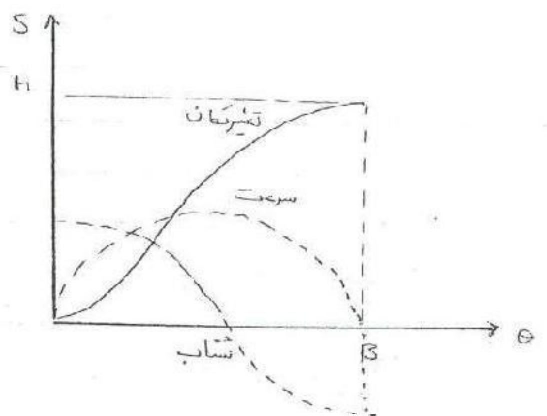
معادله منحنی هارمونیک ساده

$$S=C\,(1-\cos\varphi)$$

$$\varphi=\frac{\pi\theta}{\beta}\qquad\qquad C-\frac{H}{2}$$

برای حرکت بادامک و پیرو

$$S-\frac{H}{2}(1-\cos\frac{\pi\theta}{\beta})$$ تغییر مکان



$$V=\frac{ds}{dt}=\frac{H\,\pi w}{2\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$$

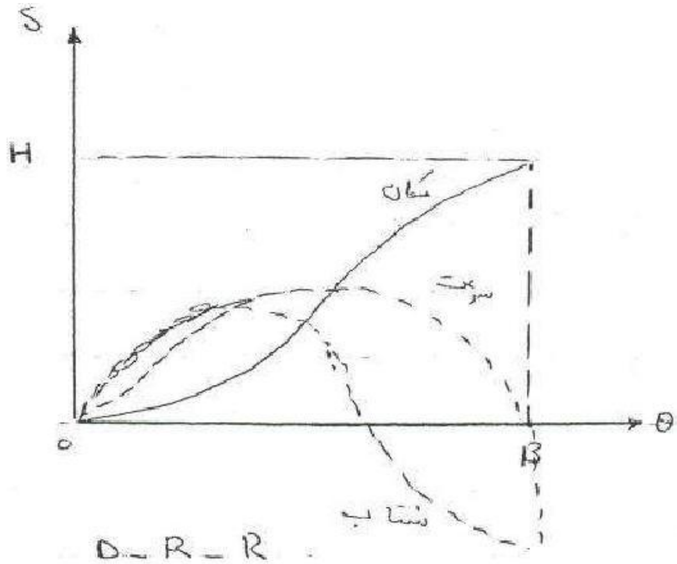
$$a-\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{H}{2}(\frac{\pi w}{\beta})^2\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$$

۴- Modified harmonic Motion pograms

$$S=\frac{H}{2}\left[(1\quad\cos\frac{\pi\theta}{\beta})\quad\frac{1}{4}(1\quad\cos\frac{2\pi\theta}{\beta})\right]$$

$$V-\frac{ds}{dt}-\frac{H\,\pi w}{2\beta}(\sin\frac{\pi\theta}{\beta}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta})$$

$$a=\frac{H}{2}(\frac{\pi\theta}{\beta})^2(\cos\frac{\pi\theta}{\beta}-\cos\frac{2\pi\theta}{\beta})$$



در این جا نه سرعت نه شتاب و نه جرک هیچکدام بی نهایت نیست.

۵- Polynomical Motion programs

شرایط مورد نیاز

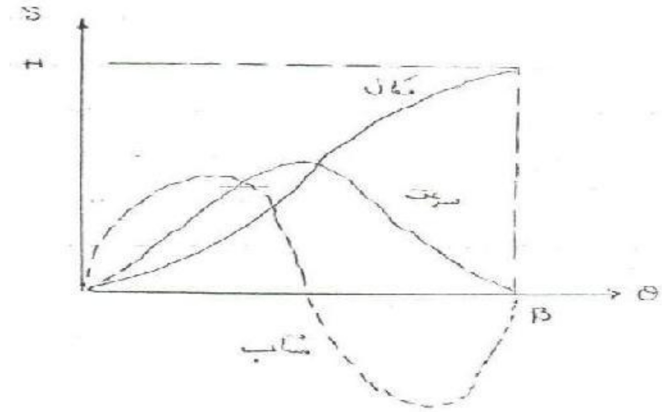
$$
\begin{array}{lll}
\theta = 0 & \theta = 0 & \theta = 0 \\
S = 0 & V = 0 & a = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\theta = \beta & \theta = \beta & \theta = \beta \\
S = H & V = 0 & a = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &= D_0 + D_1\theta + D_2\theta^2 + D_3\theta^3 + D_4\theta^4 + D_5\theta^5 \\
V &= D_1W + 2D_2W\theta + 3D_3\theta^2W + 4D_4\theta^3W - 5D_5\theta^4W \\
a &= O_i + 2D_2W^2 - 6D_3W^2\theta + 12D_4W^2\theta^2 + 20D_5W^2\theta^3
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{array}{l}\theta = 0 \\ S = 0\end{array}\right\} \Rightarrow D_0 = 0 \qquad \left.\begin{array}{l}\theta = 0 \\ V = 0\end{array}\right\} \Rightarrow D_1 = 0 \qquad \left.\begin{array}{l}\theta = 0 \\ a = 0\end{array}\right\} \Rightarrow D_2 = 0
$$

$$
D_3 = \frac{10H}{\beta^3} \qquad D_4 = 15\frac{H}{\beta^4} \qquad D_5 = \frac{6H}{\beta^5}
$$



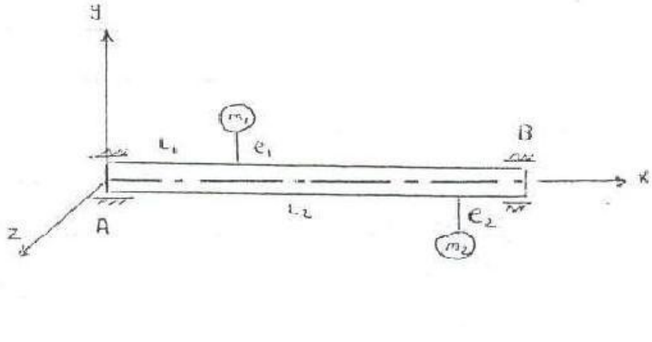
Balancing of Rotating Shafts

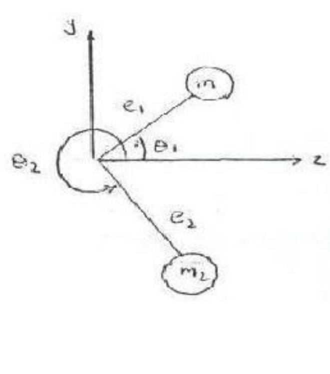
تعادل استاتیکی و دینامیکی در محور ها:

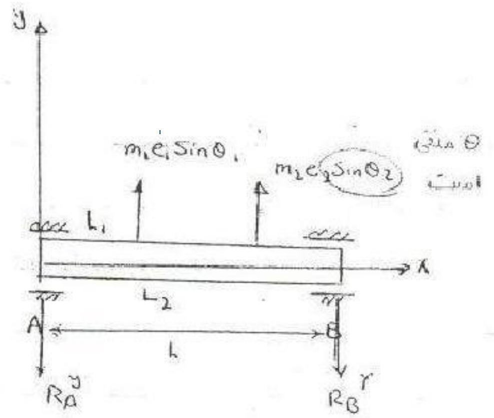
تعادل استاتیکی حول محور ساکن زمانی اتفاق می افتد که نیروهای گریز از مرکز همان حاصل از خود را خنثی می کنند.

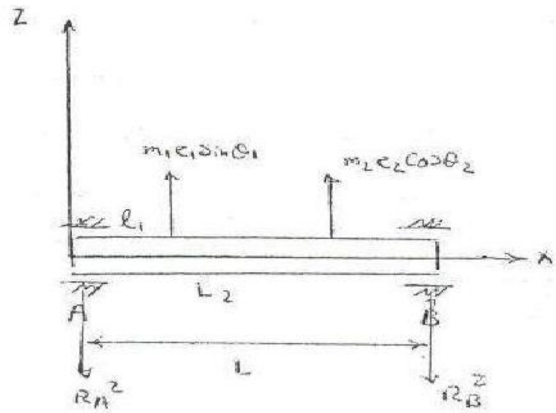
فرض کنید محور دوران AB که روی دو یا تاقان A و B قرار دارد، دارای تعدادی جرم خارج از مرکز در فواصل مختلف می باشد. به عنوان مثال فرض کنید محور دارای دو جرم خارج از مرکز $(m_1, e_1, \ell_1, \theta_1)$ و $(m_2, e_2, \ell_2, \theta_1)$ می باشد. در اثر دوران محور عکس العمل گریز از مرکز جرم های خارج از مرکز روی یاتاقان های A و B ایجاد ممان خنثی نموده و دو یاتاقان را چنانچه متعادل نمائیم از بین می برد.

هدف: بالانس محور دوار فوق روی یاتاقان های A و B می باشد.









در صفحه $x-y$:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_A^y + m_1e_1\sin\theta_1 - m_2e_2\sin\theta_2 - R_B^y = 0$$
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow m_1e_1\sin\theta_1\ell_1 + m_2e_2\sin\theta_2\ell_2 - R_B^y\ell = 0$$

از معادله ی بالا R_B^y و R_A^y محاسبه می شود.

در صفحه ی $x-z$:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \quad R_A^z \quad m_1e_1\cos\theta_1 + m_2e_2\cos\theta_2 \quad R_B^z = 0$$
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -m_1e_1\cos\theta_1\ell_1 - m_2e_2\cos\theta_2\ell_2 + R_B^z\ell = 0$$

از دو معادله قبل هم R_A^z و R_B^z محاسبه می شود.

$$R_A = \sqrt{{R_A^y}^2 + {R_A^z}^2} = m_Ae_A$$
$$\tan\theta_A = \frac{R_A^y}{R_A^z} \Rightarrow \theta_A = \tan^{-1}\frac{R_A^y}{R_A^z}$$

بنابراین: با اعمال جرم در محل یاتاقان A جرم و با زاویه ی مناسب در شعاع مناسب قرار می دهیم.

$$R_B = \sqrt{{R_B^y}^2 + {R_B^z}^2} = m_Be_B$$
$$\tan\theta_B = \frac{R_B^y}{R_B^z} \Rightarrow \theta_B = \tan^{-1}\frac{R_B^y}{R_B^z}$$