دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

مدرس : دکتر فصیحی

جزوه مبانی مهندسی برق I (*)

مقدمه : عناصر از نظر هدایت الکتریکی به سه گروه ، زیر تقسیم می‌شوند که بطور بسیار خلاصه تشریح می‌شوند .

۱ - هادی‌ها (Conductors) : انواع فلزات ، که بهترین و ارزانترین آنها مس است که آرایش الکترونهای اتم آن بصورت زیر است .

Cu^{29} : 2 , 8 , 18 , 1

الکترونهای آزاد $\approx 8.4 \times 10^{22}\ cm^{-3}$

۲ - نیمه هادی‌ها (Semiconductors) : پرکاربردترین آنها : Si^{14} و Ge^{32} (عناصر گروه چهار از جدول تناوبی) هستند .

Ge^{32} : 2 , 8 , 18 , 4

الکترونهای آزاد $\approx 2.5 \times 10^{13}\ cm^{-3}$ at $27^\circ c$

Si^{14} : 2 , 8 , 4

الکترونهای آزاد $\approx 1.5 \times 10^{10}\ cm^{-3}$ at $27^\circ c$

۳ - عایق‌ها (Insulators) : نظیر کربن C ، الماس ، و انواع نایلون و پلاستیک و ... وغیره

C^{6} : 2 , 4 ، الکترونهای آزاد $\leq 10^{8}\ cm^{-3}$ at $27^\circ c$

(*) فرض براین است که دانشجویان مهندسی از مفاهیم اولیه مدارهای الکتریکی آگاهی کافی دارند .

References

1 – Electric Circuits TK 595 B589.

by: T. F. BOGART, McGraw Hill 1992

2 – Principles of Electric Circuits

by: T. L. FLOYD, TK454. F56 1985

3. Theory & Problems of

Electric Circuits

(Schaum's Outline Series)

by: M. Nahvi

; . Edminister

جریان و بار الکتریکی : بطور خلاصه، جابجایی الکترونهای آزاد در یک هادی در واحد زمان، جریان الکتریکی نام دارد و طبق تعریف عبارت است از :

$$\text{جریان الکتریکی} = \frac{\text{جابجایی بار}}{\text{زمان}} \rightarrow I = \frac{Q}{t}$$

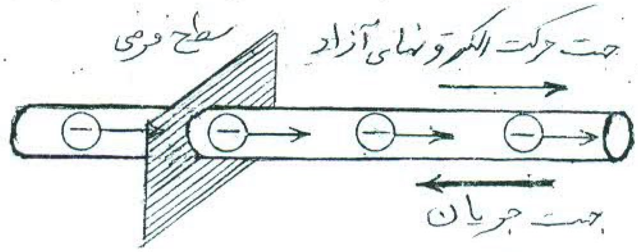
$$I(A) = \frac{Q(\text{Coulomb})}{t(\text{sec})}$$

Q : برحسب کولن

t : برحسب ثانیه

I : برحسب آمپر

جهت جریان الکتریکی، عکس جهت حرکت بارهای منفی (یا هم جهت با حرکت بارهای مثبت) در داخل هادی است.



مثال ۱-۱ : جریان الکتریکی در یک هادی 40 mA است؛

الف - میزان کل بارهای الکتریکی که در مدت 1.5 sec از یک سطح فرضی میگذرد چیست؟

ب - تعداد کل الکترونهایی که در این مدت (N) جابجا میشوند چند است؟

$(q = 1.6\times10^{-19}\ C)$

(الف) $Q = I t =$

$= (40\ mA)(1.5\ sec) = 60\ mC$

(ب) $N = (60\ mC)/1.6\times10^{-19}\ C = 3.75\times10^{17}$

نیروی محرکه، یا ولتاژ الکتریکی V : انرژی مورد نیاز برای جابجایی بار الکتریکی از یک نقطه به نقطه دیگر، عبارت است از:

$$Joules = (Volt)(Coulomb)$$

$$J = V \cdot Q \quad \rightarrow \quad V = \frac{J}{Q}$$

مثال 1-2 : در یک مدار الکتریکی، برای جابجا نمودن بار $0.5\ \mu C$ بین دو نقطه، به انرژی $9.25\ \mu J$ نیاز است. اختلاف پتانسیل بین این دو نقطه چقدر است؟

$$1\ Volt = \frac{1\ Joule}{1\ Coulomb} \quad \rightarrow \quad V = \frac{9.25 \times 10^{-6}\ J}{0.5 \times 10^{-6}\ C} = 18.5\,V$$

مثال 1-3 : از یک جزء الکتریکی، جریانی بصورت $i(t) = 2.5 \sin \omega t$ برحسب mA می‌گذرد و ولتاژ دو سر آن بصورت $v(t) = 45 \sin \omega t$ برحسب ولت است. توان متوسط (P_{ave})، و انرژی W_T، که در مدت یک پریود، به جزء الکتریکی داده می‌شود، چیست؟

حل: انرژی W_T برابر با انتگرال زمانی توان لحظه‌ای $P(t)$ می‌باشد.

$$W_T = \int_0^{T=\frac{2\pi}{\omega}} P(t)\, dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} v(t) \cdot i(t) \cdot dt = 112.5 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t\, dt$$

$$= \frac{112.5\,\pi}{\omega}\ mJ$$

و توان متوسط، برابر است با:

$$P_{ave.} = \frac{W_T}{2\pi/\omega} = 56.25\ mW$$

∴ توجه داریم که توان متوسط (P_{ave})، مستقل از ω است.

(KWH)

کیلووات ساعت : انرژی الکتریکی که در مدت یک ساعت که بوسیله مولد ایجاد و یا توسط مصرف کننده، مصرف می‌شود.

کد رنگی برای نشان دادن مقاومت‌ها.

مقادیر استاندارد

output خروجی
input ورودی

Efficiency راندمان (بازده) توان

$$\eta = \frac{W_{out}}{W_{in}} \quad \text{or} \quad \frac{P_{out}}{P_{in}}$$

Horsepower (hp) اغلب برای موتورهای الکتریکی واحد توان مصرف (hp) قدرت اسب بخار

$$1\ hp = 746\ \text{Watts}$$

مثال ۳: یک موتور الکتریکی با توان خروجی 0.5 hp ، جریان 3.5 A را از یک منبع ولتاژ 120 ولتی می‌کشد، راندمان آن چقدر است؟

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \qquad P_{out} = (0.5\ hp)\left(\frac{746\ W}{1\ hp}\right) = 373\ W$$

$$P_{in} = VI = (120V)(3.5A) = 420\ W$$

$$\eta = \frac{373\ W}{420\ W} = 0.888 = 88.8\%$$

ویا از طریق دیگر:

$$P_{out} = 0.5\ hp$$

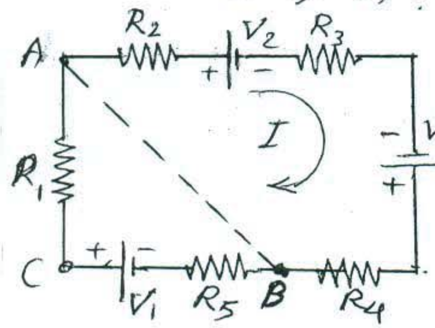
$$P_{in} = \frac{420}{746}\ hp$$

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{0.5}{420/746} = 88.8\%$$

مدارهای مقاومتی DC Resistive Circuits

قانون ولتاژ کیرشهف (KVL) Kirchhoff's Voltage Law

در یک مدار بسته، (closed loop) مجموع جبری ولتاژها برابر با صفر است.



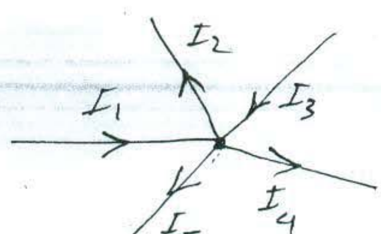
هرگاه فرض کنیم از نقطه دلخواهی (مثلاً نقطه A)، در جهت جریان I (مثلاً جهت عقربه‌های ساعت) حرکت کنیم:

$$R_2 I + V_2 + R_3 I - V_3 + R_4 I + R_5 I - V_1 + R_1 I = 0$$

همچنین می‌توان معادلهٔ مسیر بسته (closed path) BCAB را نوشت (از نقطه B حرکت می‌کنیم و فرض می‌کنیم ولتاژ نقطه B کمتر از A است)

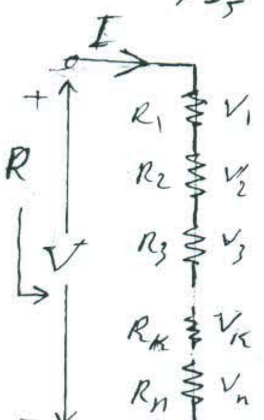
$$R_5 I - V_1 + R_1 I + V_{AB} = 0$$

قانون جریان کیرشهف (KCL) Kirchhoff's Current Law



در یک گره (Node)، مجموع جبری جریان‌های وارده و خارج شده از یک نقطه صفر است.

$$+I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

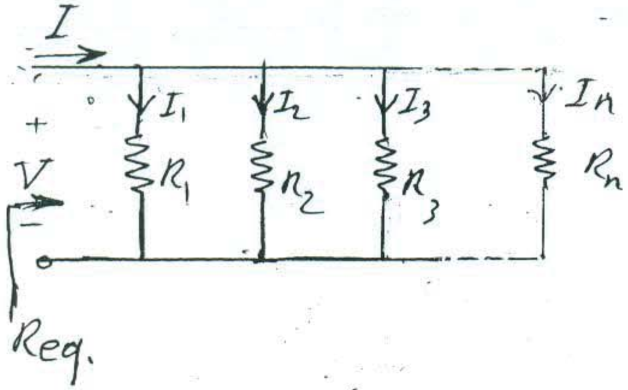


مدار تقسیم ولتاژ (Voltage division)

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

$$V_K = \frac{R_K}{\sum_{i=1}^{n} R_i} V = \frac{R_K}{R} V$$

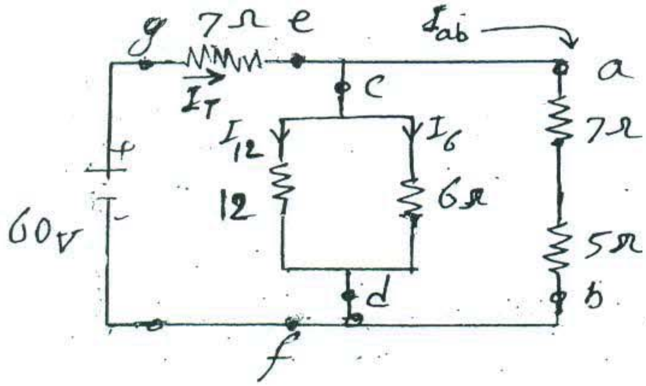
مدار تقسیم جریان (Current division)



$$R_{eq.} = R_1 \| R_2 \| R_3 \| \cdots \| R_n$$

$$I_1 = \frac{R_2 \| R_3 \| \cdots \| R_n}{R_1 + R_2 \| R_3 \| \cdots \| R_n} I$$

مثال ۴- توان کلی که بوسیله منبع 60V در شکل زیر ایجاد می‌شود و همچنین توانی که بوسیله هر یک از مقاومتها صرف می‌شود را محاسبه کنید.



$$R_{ab} = 7+5 = 12\,\Omega$$

$$R_{cd} = 12 \| 6 = \frac{12(6)}{12+6} = 4\,\Omega$$

$$R_{ef} = 4 \| 12 = 3\,\Omega$$

$$R_{eq.} = 7+3 = 10\,\Omega$$

$$P_{Total} = \frac{V^2}{R_{eq.}} = \frac{60^2}{10} = 360\,W$$

$$P_{ge} = P_{7\Omega} = \frac{7}{7+3}(360) = 252\,W$$

$$I_T = \frac{60\,V}{10\,\Omega} = 6\,A \equiv I_{ge} \ , \quad I_{ab} = \frac{6 \| 12}{6 \| 12 + (7+5)}(6A) = 1.5\,A$$

$$P_{ge} = R_{ge} \cdot I_T^2 = 7(6)^2 = 252\,W$$

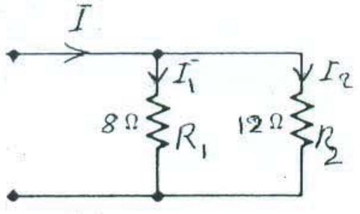
$$I_{12} = I_{cd} - I_6 = 4.5 - 3 = 1.5\,A$$

$$P_{12} = 12(1.5)^2 = 27\,W \ , \quad P_6 = 6(3)^2 = 54\,W$$

$$P_7 = 7(1.5)^2 = 15.75\,W \ , \quad P_5 = 5(1.5)^2 = 11.25\,W$$

$$P_{ge} + P_{12} + P_6 + P_7 + P_5 = 360\,W$$

بطوریکه دیده می‌شود، مجموع توانهای مصرفی دقیقاً برابر با توان کلی ایجاد شده است.



(a)

یادآوری: فرض کن اگر $R_2 = nR_1$ آنگاه (n عدد مثبت)

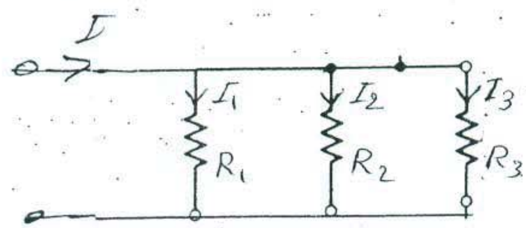
$$R_1 \| R_2 = R_1 \| nR_1 = \frac{n}{n+1} R_1$$

فرض $R_1 = 8\,\Omega$ ، $R_2 = 12\,\Omega$

$$R_1 \| R_2 = \frac{1.5}{2.5}(8) = (0.6)(8) = 4.8\,\Omega$$

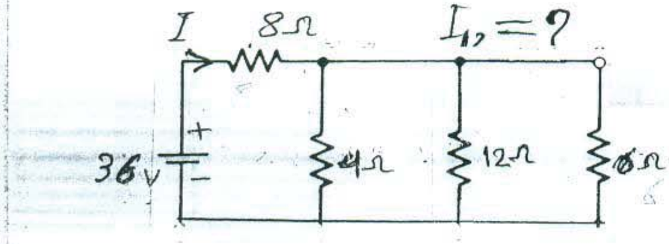
وقتیکه دو شاخه R_1 و R_2 موازی هستند:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} I \\ I_2 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I \end{cases}$$



$$I_3 = \frac{\text{شاخه‌های موازی } R_3}{\text{مقاومت خودش} + \text{شاخه‌های موازی } R_3} I = \frac{R_1 \| R_2}{R_1 \| R_2 + R_3} I$$

$$I_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} I$$



$$I_{12} = \frac{4 \| 6}{4 \| 6 + 12} \cdot I$$

$$= \frac{4 \times 6}{4 \times 6 + 6 \times 12 + 12 \times 4} \cdot \frac{36\,V}{R_{eq}}$$

$$= \frac{24}{144} \cdot \frac{36\,V}{10\,\Omega} = 0.6\,A$$

$$R_{eq} = 8 + 4 \| 12 \| 6 = 8 + 2 = 10\,\Omega$$

مسئله ۵: یک میلی‌آمپرمتر با مقاومت داخلی $50\,\Omega$ ، می‌تواند حداکثر $1\,mA$ را اندازه‌گیری کند. برای اینکه بتوان با این میلی‌آمپرمتر تا $100\,mA$ را اندازه‌گیری نمود؛

$R_{sh}(100-1) = 1mA(50^{\Omega})$

$R_{sh} = \dfrac{50\,mA(\Omega)}{99\,mA} \approx 0{,}5\,\Omega$

$P_{R_{sh}} \approx 0{,}5(99^{mA}) \approx 50\,mW$

$R_1 + R_2 + R_3 = 1{,}5\,K$

$Sw \to 1$

$10\,mA = \dfrac{E}{1{,}5\,K} \longrightarrow E = 15\,V$

$Sw \to 2$

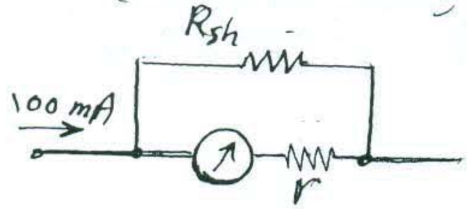
$30\,mA = \dfrac{15\,V}{R_1 + R_2} \rightarrow R_1 + R_2 = 0{,}5\,K \Rightarrow R_3 = 1K$

$\Rightarrow R_2 = 0{,}4\,K$

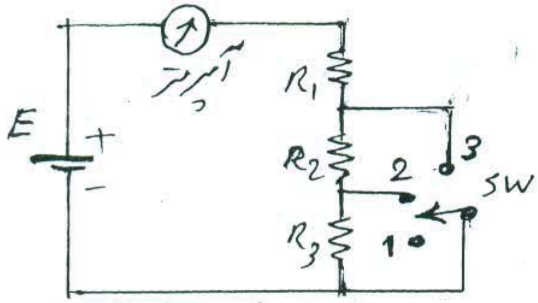
$Sw \to 3$

$150\,mA = \dfrac{15\,V}{R_1} \longrightarrow R_1 = 0{,}1\,K$

از مدار زیر استفاده می‌کنند. مقدار R_{sh} از نظر اندازه (میزان مقاومت و توان مصرفی) بایستی چقدر باشد تا این اندازه‌گیری انجام بگیرد.



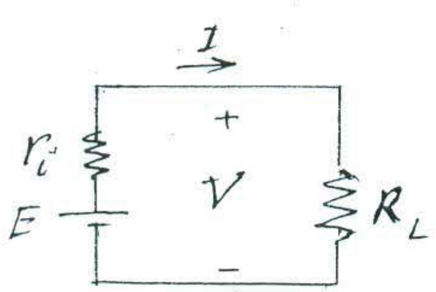
(r مقاومت داخلی آمپرمتر) $r = 50\,\Omega$



مسئله ۶- مدار زیر برای تعیین ولتاژ منبع ولتاژ E بکار میرود. مجموع مقاومتهای R_1 و R_2 و R_3، برابر با $1.5\,k\Omega$ میباشد. هنگامیکه سوئیچ در وضعیت 1 و 2 و 3 قرار میگیرد، جریانیکه آمپرمتر نشان میدهد، به ترتیب برابر با $10\,mA$ $(SW \to 1)$، $30\,mA$ $(SW \to 2)$، و $150\,mA$ $(SW \to 3)$. مقدار E چقدر است؟

منابع ولتاژ و منابع جریان ایده‌آل

بطور کلی منابع ولتاژ و جریان دارای مقاومت داخلی هستند و هنگامیکه در یک مدار بکار میروند مقداری از انرژی آنها بصورت حرارت بوسیله مقاومت داخلی آنها تلف میشود. در منبع ولتاژ، مقاومت داخلی با منبع سری بوده و بصورت مدار زیر مدل میشود؛ بدیهی است در حالیکه مدار بسته‌ای در کار نیست ولتاژ V، با ولتاژ E برابر است، لکن وقتیکه منبع ولتاژ در مدار بسته‌ای قرار میگیرد، ولتاژ V برابر است با:

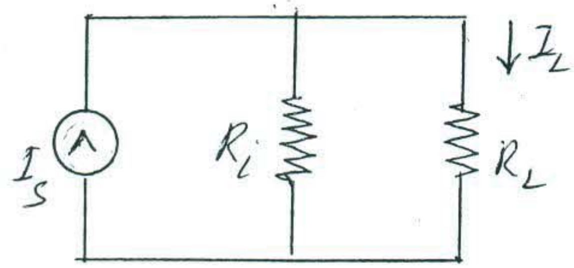


$$V = R_L I = \frac{R_L}{r_i + R_L} E$$

واضح است که $V < E$ است. حال چنانچه مقاومت داخلی منبع ولتاژ، r_i بسیار کوچک بوده و بسمت صفر میل کند، دراینصورت $V = E$ بوده و این منبع را یک منبع

ایده آل ما گویند. و منبع ولتاژ انرژی را در داخل خود بصورت حرارتی تلف نمی کند.

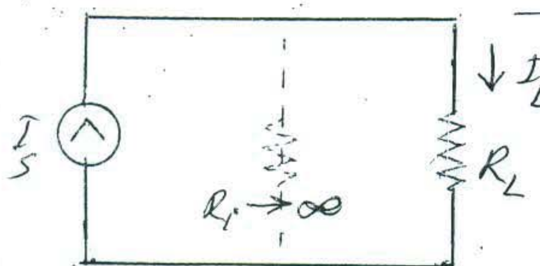
برعکس، یک منبع جریان دارای مقاومت داخلی بسیار بزرگ است و در حالت ایده آل، این مقاومت برابر ∞ (بینهایت) است.



$$I_L = \frac{R_i}{R_i + R_L} I_s$$

$$I_L < I_s$$

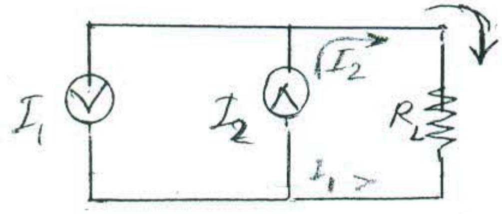
بدیهی است که بعلت وجود مقاومت داخلی منبع جریان (R_i) و عبور کردن جریان I_r از آن، مقداری از انرژی بصورت حرارتی تلف می شود. در منبع جریان ایده آل، $R_i \to \infty$ است.



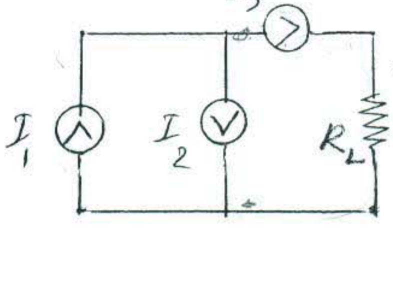
تحت این شرایط:

$I_L = I_s$ خواهد بود.

** لازم به ذکر است که عموماً منابع جریان را بصورت سری بهم متصل نمی کنند. در غیر اینصورت جریان کل I_L برابر با جریان کوچکتر منبع است. شکلهای زیر این مطلب را نشان میدهند.

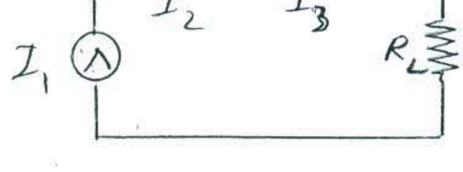


$I_L = I_2 - I_1$



$I_L = I_3$

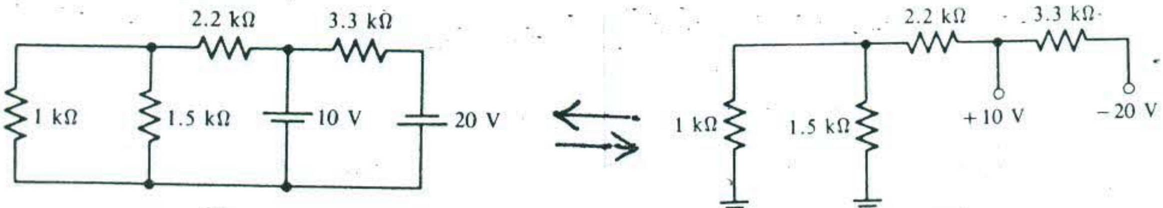
If: $I_3 < |I_1 - I_2|$



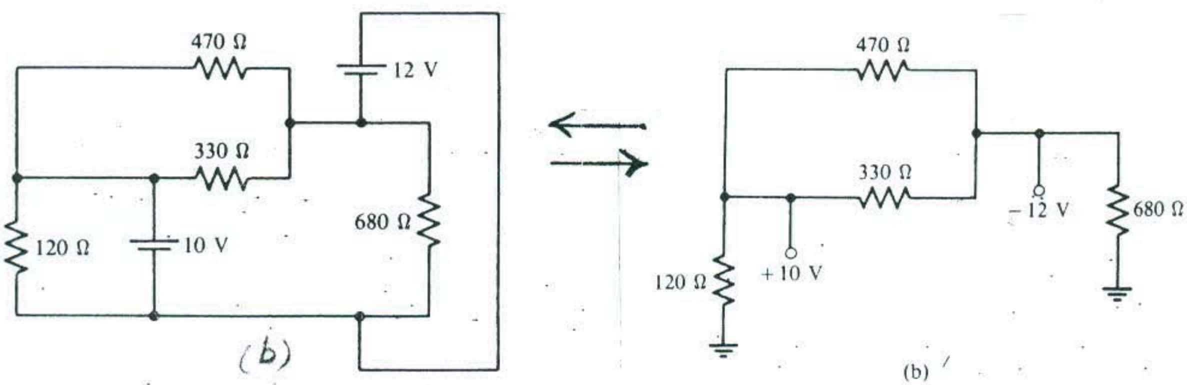
$I_L = I_1$

If: $I_1 < I_2 < I_3$

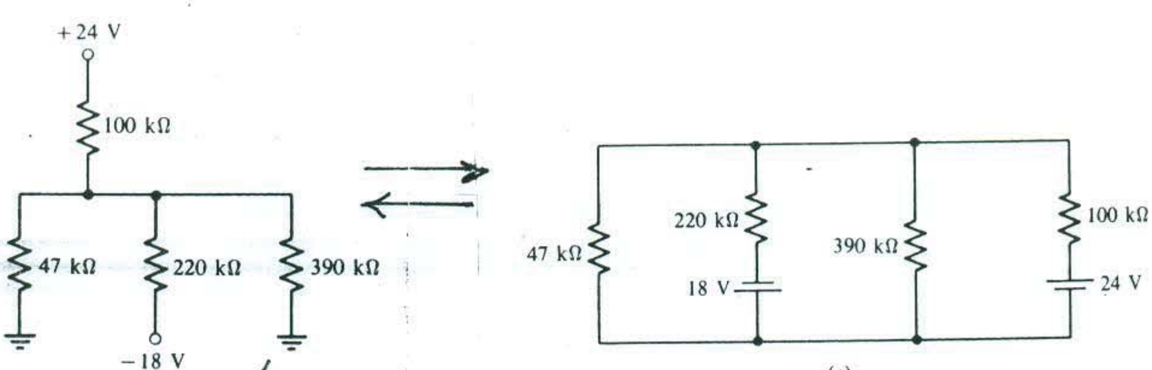
مدارها با نقطه زمین (یا نقطه عمومی) : در شبکه ها و مدارها ، گره هائی که دارای یک سطح پتانسیل هستند ، میتوان آنها را بیکدیگر وصل نمود و همه آنها را بعنوان نقطه زمین در نظر گرفت. (مثلا در خودروها این نقطه عمومی ، شاسی خودرو است !)



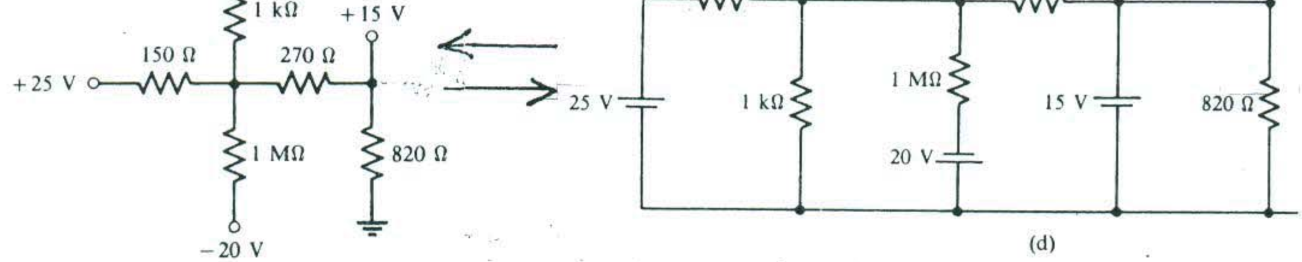
(a) (a)'



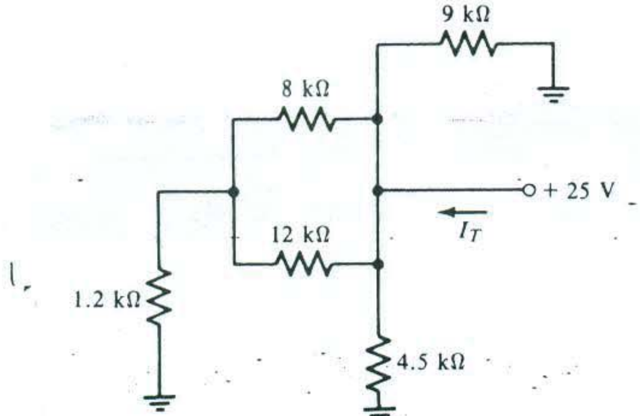
(b) (b)'



(c)' (c)



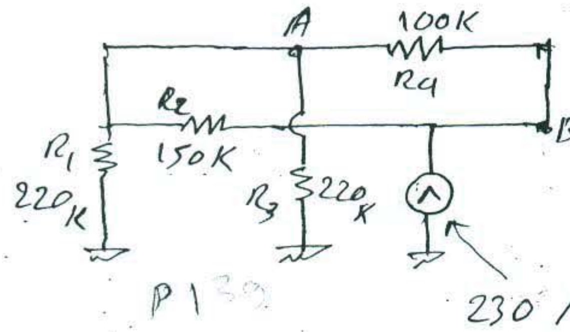
(d) (d)'

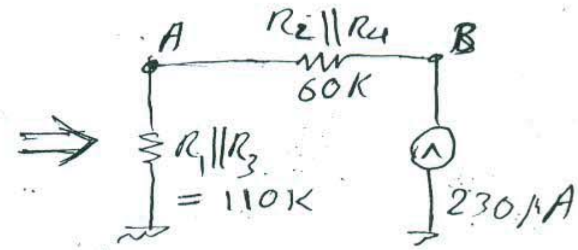


مثال ۷ مقاومت معادلی که از دو سر منبع ولتاژ دیده می‌شود چقدر بوده و جریان I_T چیست؟

$$R_{eq} = 9 \| 4.5 \| (12 \| 8 + 1.2) = 2\ K\Omega \quad \text{و} \quad I_T = \frac{25^{V}}{2K} = 12.5^{mA}$$

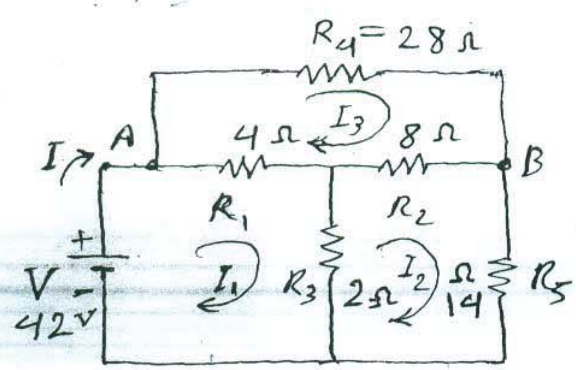
مثال ۸ : ولتاژ V_{AB} در شکل زیر چقدر است؟





$$V_{AB} = \overset{K}{60}(\overset{\mu A}{-230}) = -13.8\ V$$

تعیین مقاومت معادل یک شبکه پیچیده

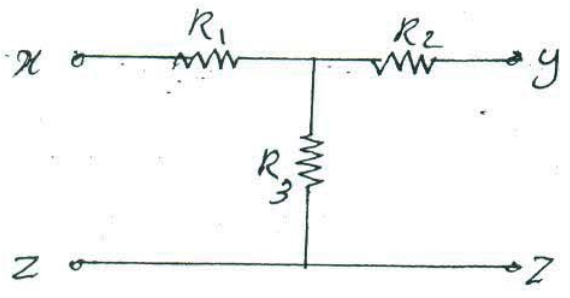


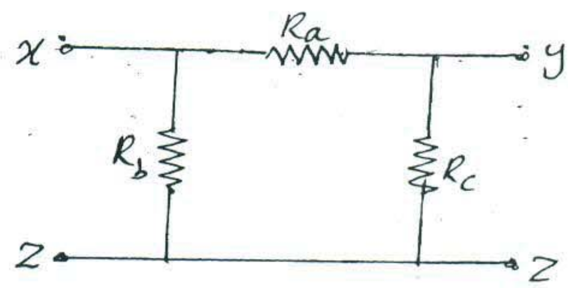
مثال ۹ - مقاومت معادلی که از دو سر منبع ولتاژ در شکل مقابل دیده می‌شود چیست؟

∴ بطوریکه دیده می‌شود، محاسبه مقاومت معادل که بصورت $R_{eq.} = \frac{V}{I}$ تعریف می‌شود، در مدار فوق براحتی ممکن نیست. در این تعیین $R_{eq.}$ تنها راه ممکن نوشتن معادلات KVL در سه حلقه بسته مدار و نهایتاً تعیین I_1 ، I_2 ، I_3 و لذا تعیین I است. این امر به عنوان تمرین به دانشجویان واگذار می‌شود که منجر به $I_1 = 8\ A$ ، $I_3 = I_2 = 1\ A$ و $\boxed{R_{eq} = 5.25\ \Omega}$ می‌شود.

این روش بسیار وقت‌گیر بوده لکن راه بسیار ساده‌تری برای تعیین $R_{eq.}$ وجود دارد که همانا تبدیل مدارهای T به یکدیگر می‌باشد.

تبدیل مدار ستاره Y به ∇ و بالعکس (یا تبدیل مدار T به مدار π)





دو مدار فوق، هنگامی با هم معادل هستند که مقاومت معادل دیده شده از دو سر متناظر در دو مدار، با هم یکی باشند. هنگامی که مقاومت معادل از دو نقطه از یک مدار دیده می‌شود دو نقطه دیگر مدار به هیچ مدار خارجی دیگر متصل نیستند.

مدار مثلث ∇	مدار ستاره Y
$R_{xy} = R_a \parallel (R_b + R_c)$	$R_{xy} = R_1 + R_2$
$R_{yz} = R_c \parallel (R_a + R_b)$	$R_{yz} = R_2 + R_3$
$R_{zx} = R_b \parallel (R_a + R_c)$	$R_{zx} = R_3 + R_1$

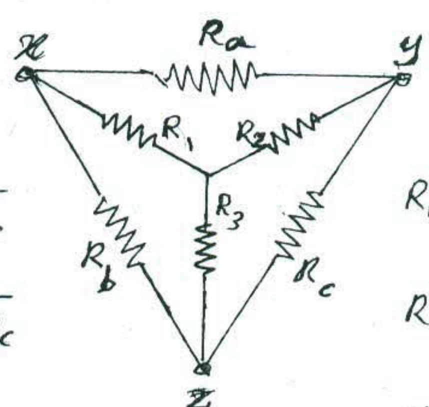
از برابر گذاشتن مقاومت‌های معادل در دو مدار فوق با یکدیگر خواهیم داشت:

$\nabla \Rightarrow Y$

$$R_1 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$



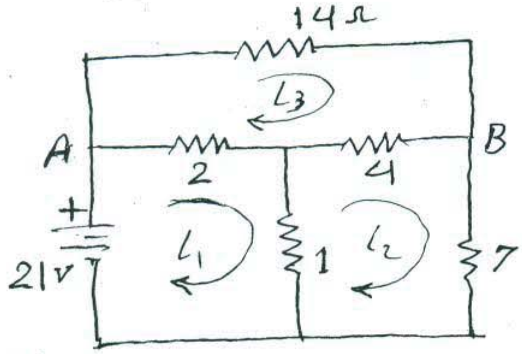
$Y \Rightarrow \nabla$

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

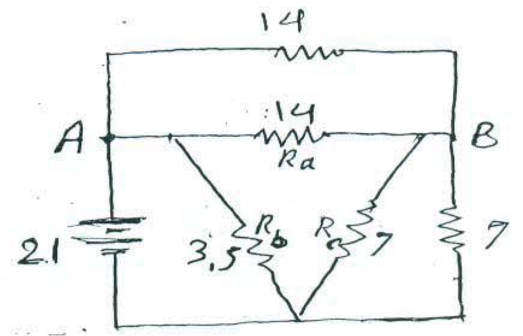
$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

مثال ۱۰ - مقاومت معادل از نقطه A را، یکبار از طریق نوشتن معادلات حلقه ها، و بار دیگر از تبدیل مدار، می یابیم. توجه! نتایج حاصله از دو طریق را با یکدیگر بخصوص از نظر صرف وقت و نیز این نتیجه را، با آنچه که در مثال ۹ (صفحه ۱۱) که بعنوان تمرین حل کرده ایم مطابقت نمائید و نتیجه مطلوب را بگیرید.



$\Rightarrow$



166

$$\begin{cases} 21 = 2(l_1 - l_3) + 1(l_1 - l_2) \\ 0 = 1(l_2 - l_1) + 4(l_2 - l_3) + 7l_2 \\ 0 = 2(l_3 - l_1) + 14l_3 + 4(l_3 - l_2) \end{cases}$$

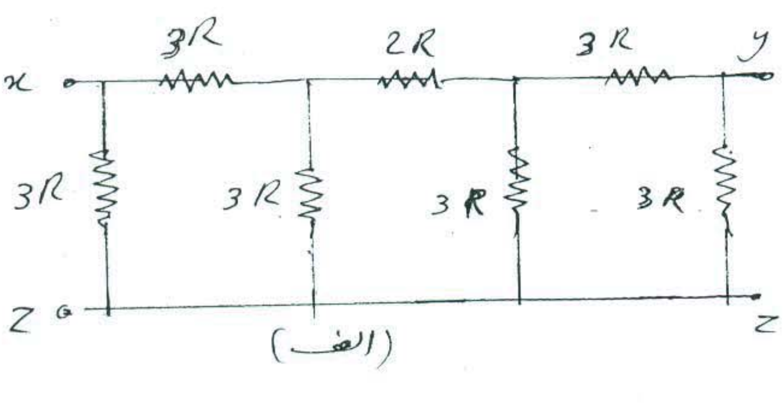
$$R_{eq} = R_b \| (R_c \| 7 + R_a \| 14)$$
$$= 3.5 \| (3.5 + 7)$$
$$= 2.625\ \Omega$$

$l_1 = 8\ A,$

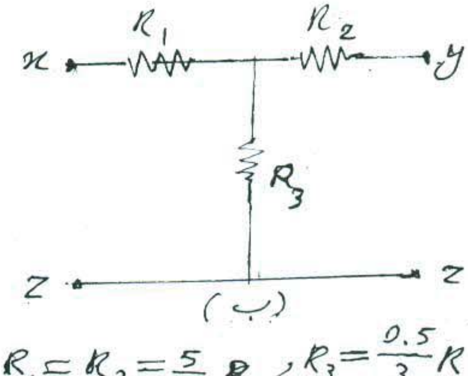
$l_2 = 1\ A \qquad R_{eq} = \dfrac{21V}{8A}$

$l_3 = 1\ A \qquad = 2.625\ \Omega$

مسئله - نشان دهید که مدار شکل (الف) را میتوان بصورت شکل (ب) درآورد که در آن:

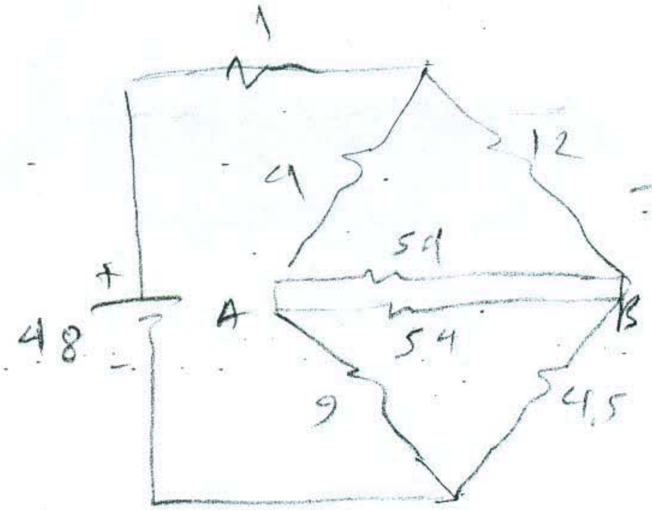


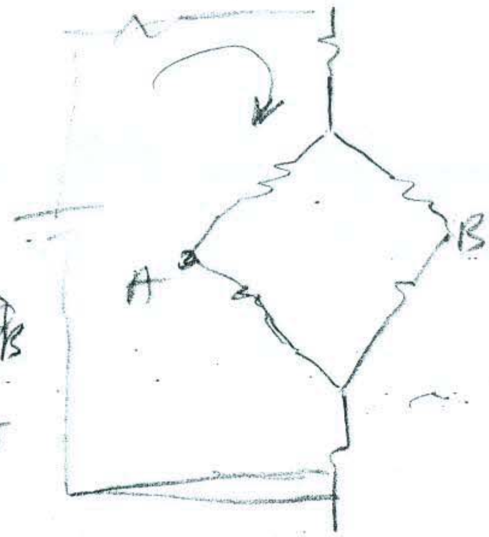
(الف)

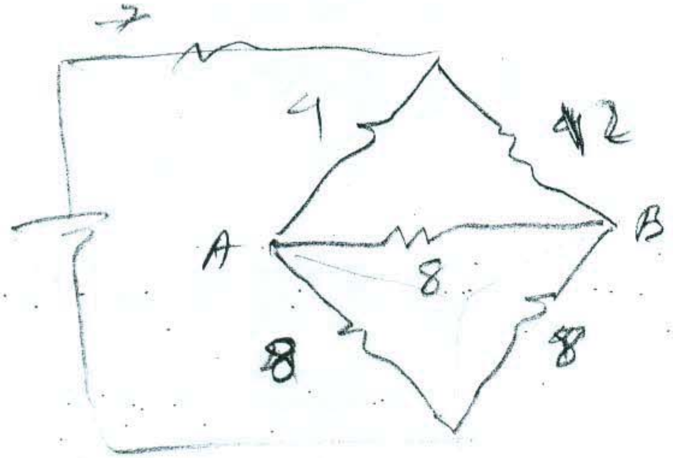


(ب)

$R_1 = R_2 = \frac{5}{3} R \;,\; R_3 = \frac{0.5}{3} R$







$R_T = 10 \quad 6\Omega$

$P'_{9\Omega} = 7(6) = \ldots$

$I'_{9\Omega} = 6A$

$I_{ab} = \frac{6\|12}{6\|12+(7+\ldots)}(6A) = \frac{4}{4+12}(6) = \ldots$

$\frac{24}{16} = \frac{3}{2} = 1.5$

4.5

مثال ۱۱: جریان I_T و ولتاژ دو سر مقاومت 40Ω را حساب کنید. (مقاومتها بر حسب اهم هستند)

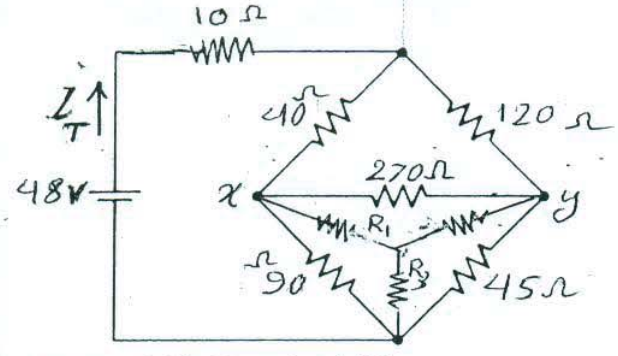


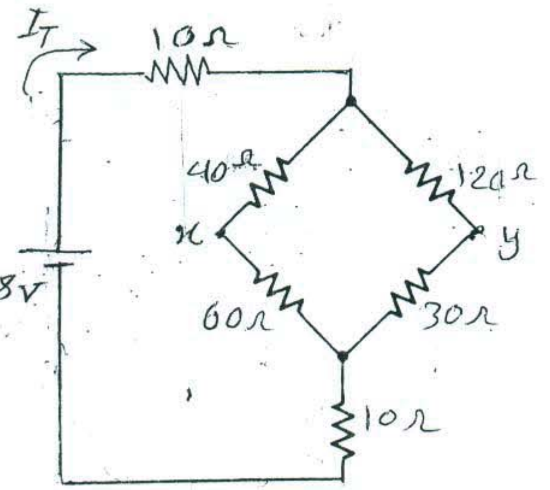
FIGURE 6.64 (Exercise 6.3T)

حل: چون جریان و ولتاژ دو سر 40 اهمی را می‌خواهیم، لذا تبدیل ستاره به مثلث به نیابتی مقاومت 40 اهمی را حل می‌شود.

$$R_1 = \frac{270(90)}{270+90+45} = 60\,\Omega$$

$$R_2 = \frac{270(45)}{} = 30\,\Omega$$

$$R_3 = \frac{90(45)}{} = 10\,\Omega$$

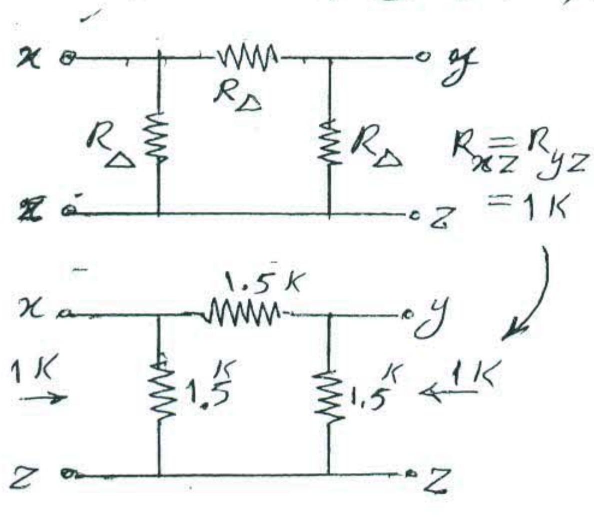


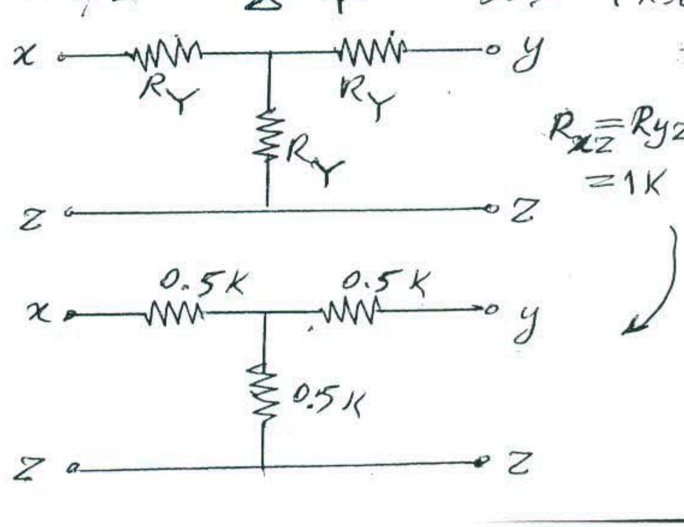
$$I_T = \frac{48\,V}{10+\underbrace{(100\,||\,150)}_{60\Omega}+10} = \frac{48}{80} = 0.6\,A$$

$$I_{40} = \frac{150}{150+100}(I_T) = 0.36\,A = I_1$$

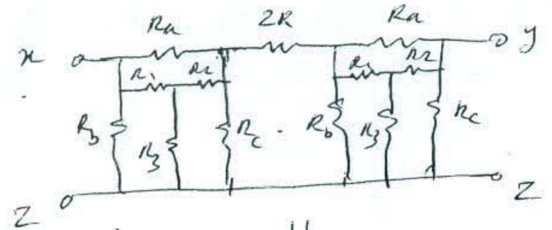
$$V_{40} = (40\Omega)(0.36A) = 14.4\,V$$

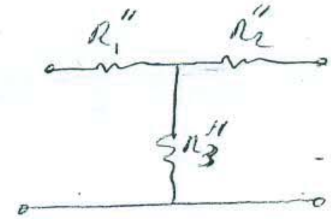
مثال ۱۲: لازم است که یک شبکه مثلث به ستاره با اجزای مساوی تبدیل شود، به طوری که مقاومت دیده شده از دو سر x-z یعنی R_{xz} برابر با مقاومت دیده شده از دو سر y-z یعنی R_{yz} گردد. اگر این مقاومت برابر $1K\Omega$ باشد، مقادیر R_Y و R_Δ را که باید در مدار ستاره و مثلث قرار داد مشخص کنید.

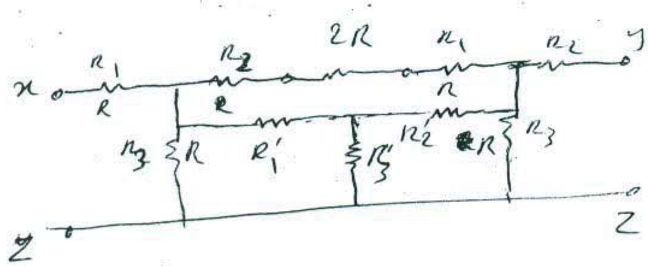




$R_a=R_b=R_c=3R$







$$R_1=\frac{R_aR_b}{R_a+R_b+R_c}=\frac{9R^2}{9R}=R$$

$$R_2=R$$

$$R_3=R$$

$$R'_1=\frac{(R+2R+R)R}{6R}=\frac{4}{6}R$$

$$R'_2=\frac{\qquad}{}=\frac{4}{6}R$$

$$R'_3=\frac{R\cdot R}{6R}=\frac{1}{6}R$$

$$R''_1=R_1+R'_1=R+\frac{2}{3}R=\frac{5}{3}R$$

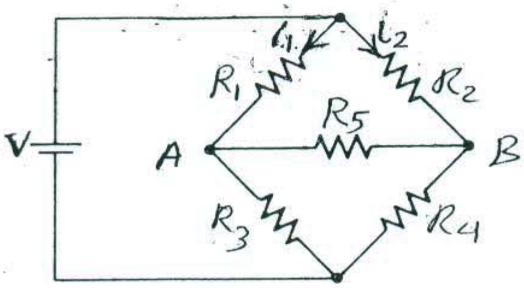
$$R''_2=R_2+R'_2=R+\frac{2}{3}R=\frac{5}{3}R$$

$$R''_3=\frac{1}{6}R=\frac{0.5}{3}R$$

P.166

پل های متعادل : در شکل زیر اگر $V_A = V_B$ باشد ، این پل را یک پل متعادل می گویند . در این صورت میتوان نشان داد :

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$$



زیرا ، در صورت متعادل بودن پل ، هیچ جریانی از مقاومت R_5 نمی گذرد و می توان نوشت :

$$V_A = V - R_1 i_1 \quad V_B = V - R_2 i_2 \quad \xRightarrow{V_A = V_B} \quad R_1 i_1 = R_2 i_2 \quad (1)$$

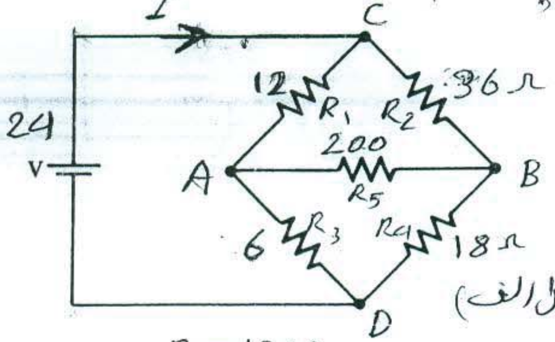
$$V_A = R_3 i_1 \quad V_B = R_4 i_2 \quad \xRightarrow{V_A = V_B} \quad R_3 i_1 = R_4 i_2 \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$$

توجه !!

بدیهی است که اگر پل در حال تعادل باشد ، میتوان R_5 را با یک سیم اتصال کوتاه (و یا باز) جایگزین نمود !!

مثال ۱۳: جریان I که از منبع ولتاژ $V = 24V$ (در شکل الف) می گذرد چقدر است ؟



(شکل الف)

حل : چون داریم :

$$\frac{12}{6} = \frac{36}{18} = 2$$

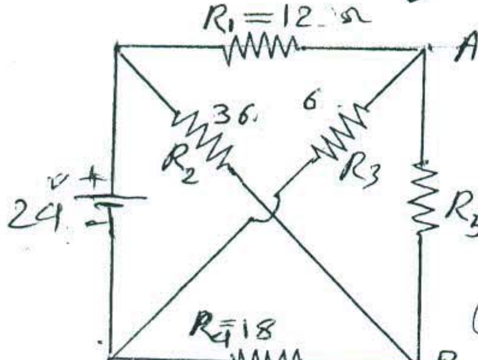
لذا پل در حال تعادل است لذا :

$$R_T = (R_1+R_3)\|(R_2+R_4) = 18\|54 = 13.5\ \Omega$$

$$I = V/R_T = 24/13.5 = 8/4.5\ A$$

مثال ۱۴ : جریانی که از مقاومت R_1 در شکل (ب) می گذرد چقدر است .

P166



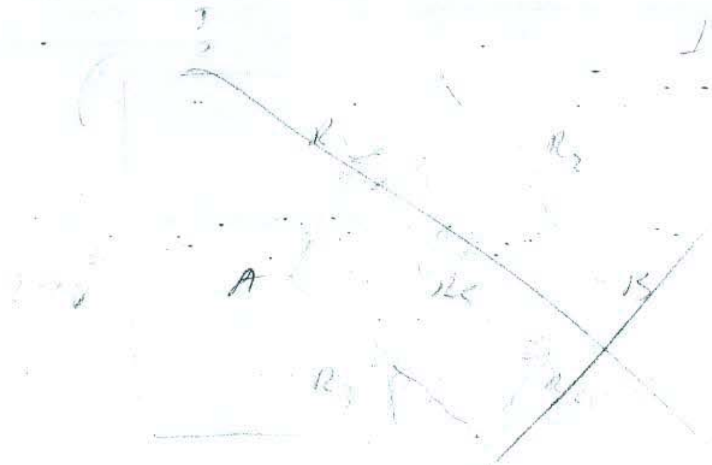
(شکل ب)

حل : چون پل در حالت متعادل است (چرا ؟)

خواهیم داشت :

$$I_1 = \frac{24}{R_1+R_3} = \frac{4}{3}\ A$$

(راهنمائی : ابتدا شکل (ب) را بصورت (الف) در آورید و سپس حل کنید)



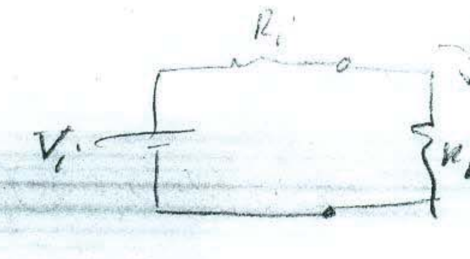
$I = \frac{2V}{R_T}$

$R_T = (R_1+R_3) \| (R_2+R_4) = \frac{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}{(R_1+R_3)+(R_2+R_4)}$

$$I_1 = \frac{R_2+R_4}{(R_2+R_4)+(R_1+R_3)} \cdot \frac{2V}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)/(R_1+R_3+R_2+R_4)}$$

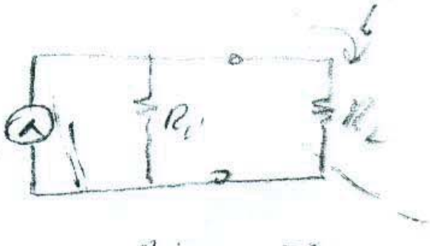
$$= \frac{2V}{R_1+R_3}$$

([illegible])



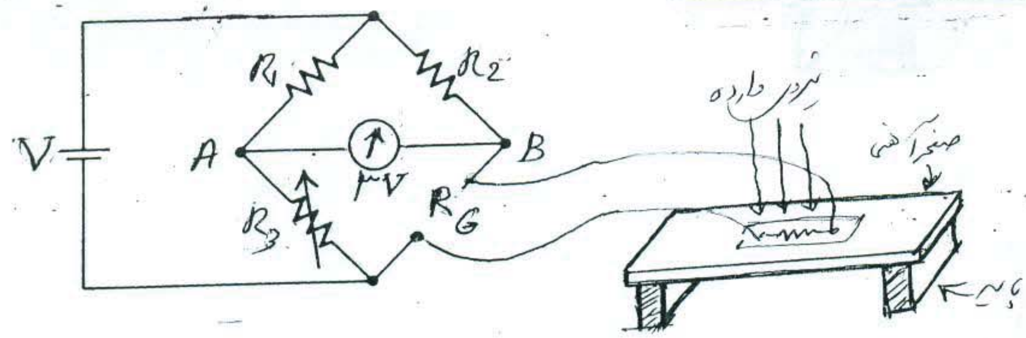
$i_L = \frac{V_i}{R_i+R_L}$

$\frac{V_i}{R_i} = I_i$



$i = \frac{R_i}{R_i+R_L} \cdot \frac{V_i}{R_i} = i_L$

کاربرد پل متعادل (وتستون) Strain Gauge



$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_G}$$

بدون واحد

$$\text{Gauge Factor}: \; GF = \frac{\Delta R_G / R_G}{\Delta L / L} \equiv \frac{\Delta R_G / R_G}{\varepsilon} \qquad \varepsilon = 2 \to 25$$

تغییر طول نسبی

$$V_{AB} \equiv V_{Out} \approx \left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_G}{R_G + R_2} \right) V$$

(درصورتیکه جریان دستگاه بسیار ناچیز باشد)

مثال ۱۵: در شکل فوق، چنانچه $R_1 = R_2 = 150\Omega$ و مقاومت Gauge، بدون تحمیل نیرو بر آن برابر با $R_G = 120\Omega$ باشد، مقدار R_3 چقدر است تا پل در حال تعادل باشد:

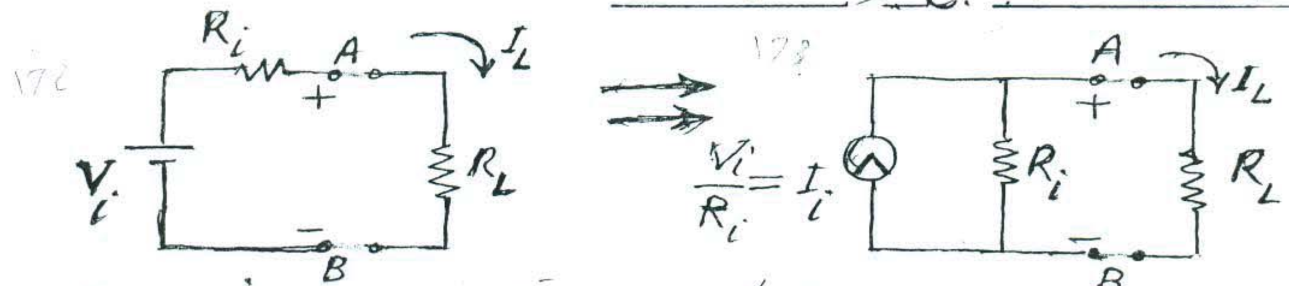
چنانچه $V = 10v$ باشد و با وارد کردن نیرویی برابر $\underline{100\,N}$، مقاومت Gauge به 120.001 تغییر یابد، ولتاژ خروجی (V_{AB}) چقدر است.

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_G}{R_2} \qquad R_3 = \frac{150}{150}(120) = 120\,\Omega$$

$$V_{AB} \approx \left(\frac{120}{120+150} - \frac{120.001}{120.001+150} \right) \times 10V \;\rightarrow\; V_{AB} \approx -2.0576 \times 10^{-5}\ V$$

$V_A - V_B$

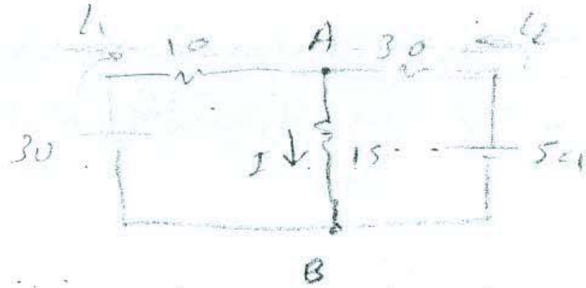
تبدیل منبع ولتاژ به منبع جریان و بالعکس



برای تبدیل منبع ولتاژ به منبع جریان کافیست که V را به R_i تقسیم نموده و بعنوان منبع جریان I_i در نظر گرفته و مقاومت R_i را موازی با آن قرار دهیم. بدیهی است که برای تبدیل منبع جریان به منبع ولتاژ، عکس عمل فوق صورت میگیرد. این مطلب برای منابع وابسته نیز عمل میباشد.

$I = ?$

$V_{AB} = ?$



$30 = 10 i_1 + 15(i_1 + i_2)$

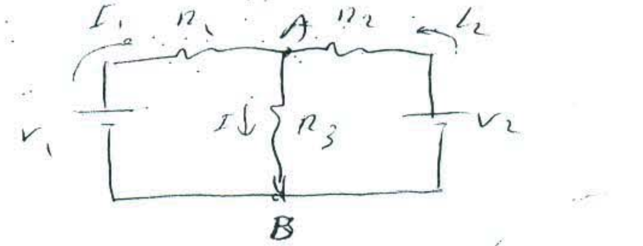
$54 = 30 i_2 + 15(i_1 + i_2)$

$\rightarrow \begin{cases} 30 = 25 i_1 + 15 i_2 \\ 54 = 15 i_1 + 45 i_2 \end{cases}$

$-90 + 54 = (-75 + 15) i_1 \rightarrow i_1 = \frac{-36}{-60} = 0.6\ A$

$i_2 = 1\ A$

$I = i_1 + i_2 = 1.6\ A$



$I = I_1'\big|_{V_2=0} + I_2'\big|_{V_1=0}$

$I = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot \frac{V_1}{R_1 + R_3 \| R_2}$

$R_1 \qquad V_2$

$\frac{10}{25} \cdot \frac{54}{36} \quad 15 = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

$\frac{15}{15+10} \cdot \frac{54}{30 + 10 \| 15} = \frac{15}{25} \cdot \frac{54}{36} = \ldots = 0.9$

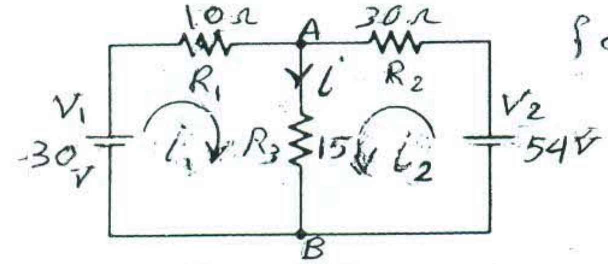
$\frac{30}{10 + 15 \| 30} \quad 1.5 \quad 1.5 - 0.9$

$\tan 30^\circ = \frac{20}{\omega L - 1/\omega C}$, $L = 23.1\ mH$, $C = 86.5\ \mu F$

قضایای مدار

۱- قضیه جمع آثار superposition theorem (کلیه منابع مدار، منابع مستقل هستند)

هر مدار خطی که شامل چند منبع ولتاژ (یا جریان) مستقل است را میتوان معادل مجموع چند مدار مجزا دانست. که هر یک دارای فقط یک منبع مستقل بوده و سایر منابع صفر باشند.



شکل (الف)

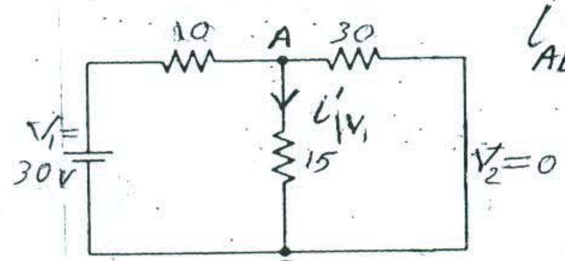
مثال ۱۴: جریان i در مدار روبرو چقدر است؟

حل: الف - از طریق نوشتن معادله دو حلقه

$$\begin{cases} 30 = 25 i_1 + 15 i_2 \\ 54 = 15 i_1 + 45 i_2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} i_1 &= 0.6\ A \\ i_2 &= 1\ A \end{aligned}$$

بنابراین

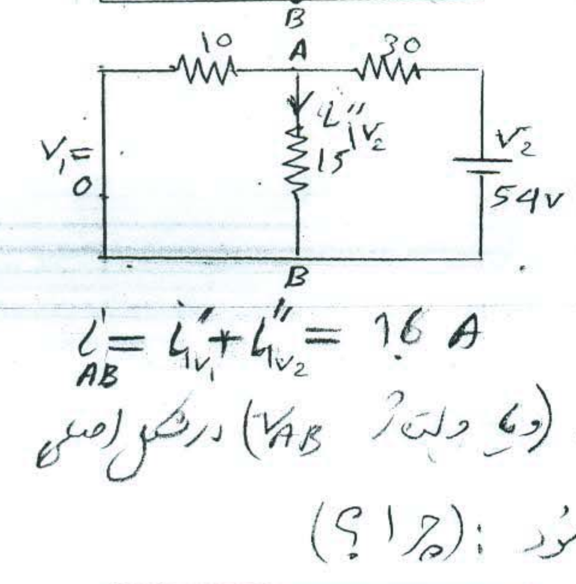
$$i_{AB} = i_1 + i_2 = 1.6 A$$



ب - حل از طریق جمع آثار

$$i = i'_{|V_1} + i''_{|V_2}$$

$$i'_{|V_1} = \frac{30\Omega}{30+15} \cdot \frac{30V}{10+15\|30} = 1A$$



$$i''_{|V_2} = \frac{10}{10+15} \cdot \frac{54}{30+15\|10} = 0.6A$$

بنابراین i در مدار اصلی برابر است با:

$$i_{AB} = i'_{|V_1} + i''_{|V_2} = 1.6\ A$$

یادآوری: به این ترتیب میتوان جریان i (و یا ولتاژ V_{AB}) در شکل اصلی (شکل الف) را به سرعت و با فرمول زیر محاسبه نمود: (چرا؟)

$$\boxed{i_{AB} = \frac{R_2V_1 + R_1V_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}} = \frac{30(30V) + 10(54V)}{10\times30 + 30\times15 + 15\times10} = 1.6\ A$$

$$V_{AB} = R_3 \cdot i = R_3 \frac{R_2V_1 + R_1V_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} = 15(1.6A) = 24.\ V$$

P 215 Example 7.4

$$\begin{cases} V_1 = (R_1+R_3)i_1 + R_3 i_2 & (1) \\ V_2 = R_3 i_1 + (R_2+R_3) i_2 & (2) \end{cases}$$

from (1) $\rightarrow$ $$i_1 = \frac{V_1 - R_3 i_2}{R_1 + R_3} \quad (3)$$

(3), (2) $\rightarrow$ $$V_2 = R_3 \frac{V_1 - R_3 i_2}{R_1 + R_3} + (R_2+R_3) i_2$$

$$\rightarrow \boxed{i_2 = \frac{(R_1+R_3)V_2 - R_3 V_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}} \quad (4)$$

from (2) $$i_1 = \frac{V_2 - (R_2+R_3) i_2}{R_3} \quad (5)$$

(4), (5) $$i_1 = \frac{1}{R_3}\left[V_2 - (R_2+R_3)\frac{(R_1+R_3)V_2 - R_3V_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}\right]$$

$$i_1 = \frac{1}{R_3}\left[\frac{V_2(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1) - (R_2+R_3)(R_1+R_3)V_2 - R_3V_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}\right]$$

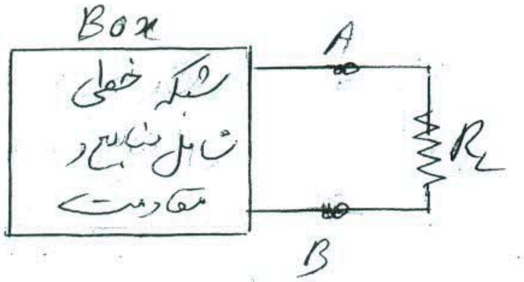
$$\boxed{i_1 = \frac{(R_2+R_3)V_1 - R_3V_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}}$$

$$i = i_1 + i_2 = \frac{R_1V_2 + R_2V_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} = \frac{1(5) + 2(3)}{2 + 6 + 3}$$

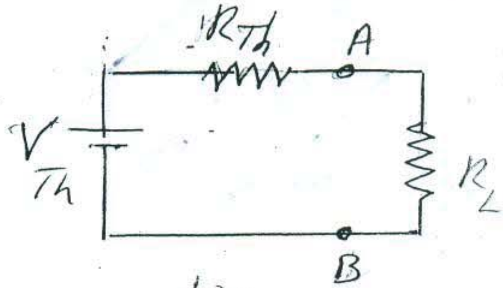
$$= \frac{11}{11} = 1\,A$$

۳- قضیه تونن Thevenin's theorem (مدار شامل منابع مستقل)

شکل زیر و، شامل یک شبکه خطی در داخل Box و یک مصرف کننده R_L است.
شبکه داخل Box دارای چندین مقاومت، منابع ولتاژ یا جریان مستقل است.
طبق قضیه تونن می‌توان این شبکه پیچیده را بصورت شکل مقابل نشان داد که شامل
یک منبع ولتاژ تونن V_{Th} بطور سری با مقاومت معادل تونن R_{Th} باشد.



(الف)

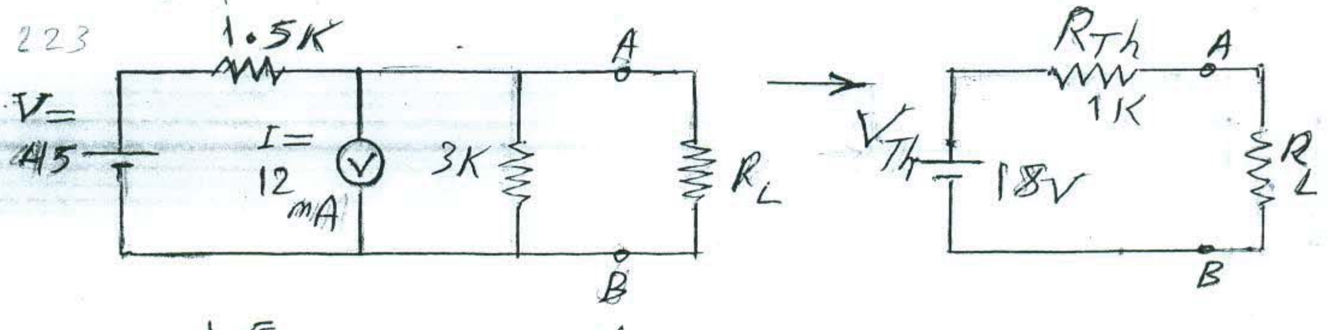


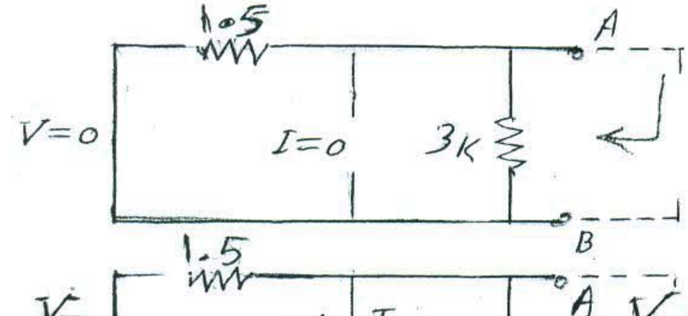
(ب)

در این شکل R_{Th}، مقاومت معادلی است که از دو سر AB، و V_{Th} ولتاژ دو نقطه AB، وقتیکه R_L باز است ($R_L \to \infty$) دیده می‌شود.

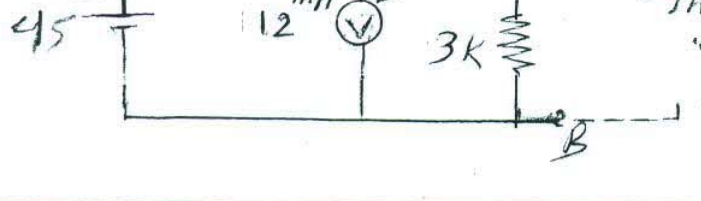
مثال ۱۷: مدار معادل تونن شکل زیر را از دو نقطه AB، محاسبه و رسم کنید.

223





$$R_{Th} = R_{AB}\big|_{R_L \to \infty} = 3 \parallel 1.5 = 1\,K$$

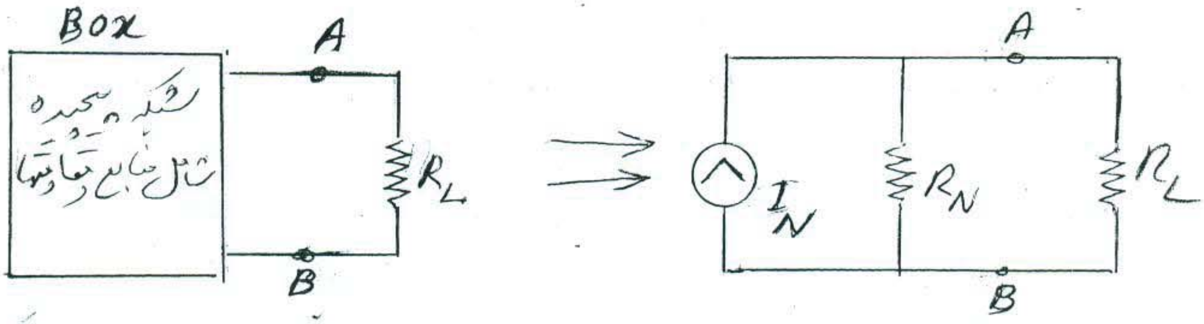


$$V_{Th} = V_{AB}\big|_{R_L \to \infty} = V_{AB}\big|_{V} + V_{AB}\big|_{I}$$

$$= \frac{3}{3+1.5}(45^{v}) - (1.5 \parallel 3)(12\,mA) = 18\,v$$

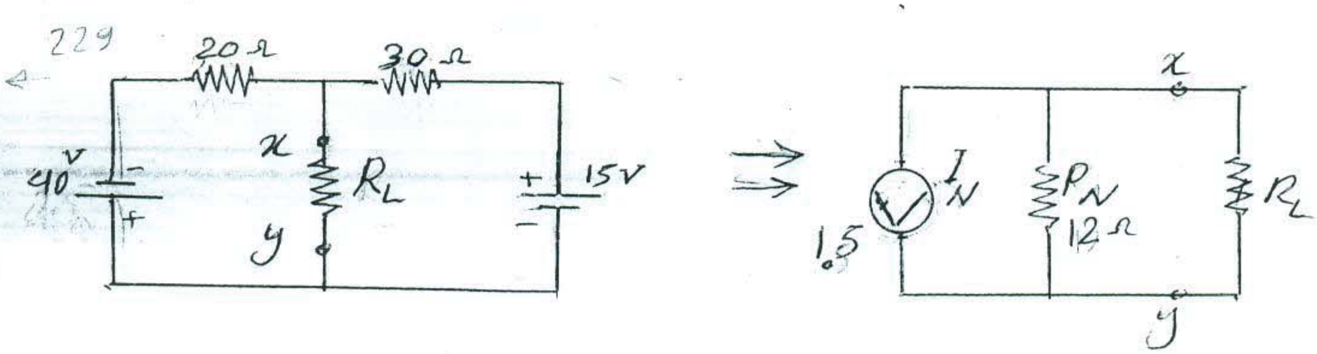
۳- قضیه نورتن : Norton Theorem (مدارهای شامل منابع مستقل)

نظیر قضیه تونن، هر شبکه خطی را می‌توان بصورت یک منبع جریان I_N موازی با یک مقاومت معادل نورتن R_N نشان داد.



در این شکل، R_N، نظیر R_{Th}، مقاومت معادلی است که از دو سر AB، وقتیکه $R_L \to \infty$ است دیده می‌شود و I_N، جریان اتصال کوتاه بین دو نقطه A و B است.

مثال ۱۸: مدار معادل نورتن شکل زیر را از دو نقطه xy را محاسبه و رسم کنید.



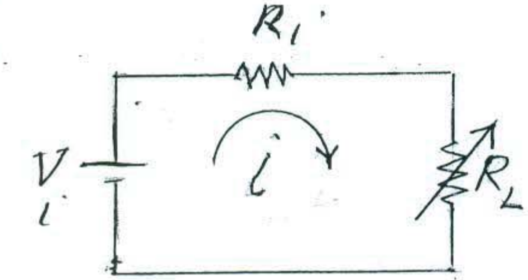
$$R_N = R_{xy}\Big|_{R_L \to \infty} = 20 \| 30 = 12\ \Omega$$

$$I_N = I_{xy}\Big|_{R_L \to 0} = \frac{-40}{20} + \frac{15}{30} = -1.5\,A$$

نکته: هنگامیکه مدار دارای منابع مستقل و وابسته باشد، تعیین مدار معادل نورتن، شبیه کاری که در مدار معادل تونن گفته شد، صورت می‌گیرد. ۳۰

ماگزیمم توان انتقال یافته

در شکل زیر مقاومت R_L متغیر بوده نشان داده می‌شود که در چه R_L برابر با R_i می‌شود، ماگزیمم توان در آن ظاهر خواهد شد.



$$P_L = R_L \cdot i^2 = R_L\left(\frac{V_i}{R_i+R_L}\right)^2$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{V_i^2(R_i+R_L)^2 - 2(R_i+R_L)R_L V_i^2}{(R_i+R_L)^4}$$

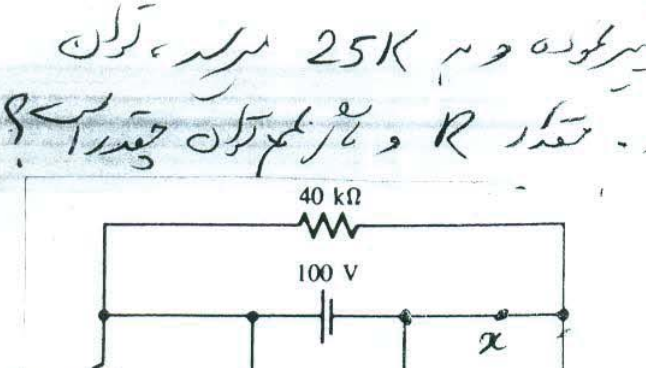
برای اینکه توان ظاهر شده در بار R_L ماگزیمم شود، بایستی:

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0 \rightarrow (R_i+R_L)(R_i+R_L-2R_L) = 0 \Rightarrow R_L = R_i$$

بنابراین اندازه ماگزیمم توان برابر است با:

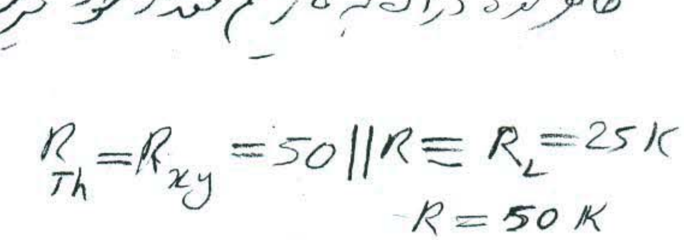
$$\max P_L = R_L\left(\frac{V_i}{R_i+R_L}\right)^2\Bigg|_{R_i=R_L} = \frac{1}{4}\frac{V_i^2}{R_L}$$

مثال ۱۹: در شکل زیر، هنگامیکه R_L تغییر نموده و به $25K$ می‌رسد، توان ظاهر شده در آن به ماگزیمم مقدار خود می‌رسد. مقدار R و ماگزیمم توان چقدر است؟



$$R_{Th} = R_{xy} = 50 \| R \equiv R_L = 25K$$

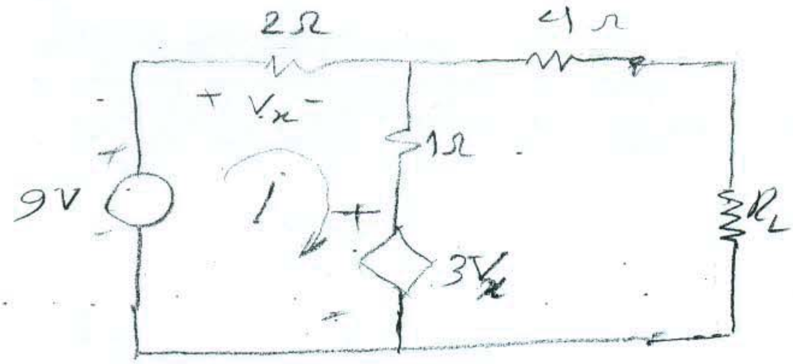
$$R = 50K$$



$$V_{Th} = V_1\Big|_{I=0} + V_2\Big|_{V=0} = \frac{R}{R+50}(+100) + (4mA)(R) = 150^V$$

$$\max P_L = \frac{1}{4}\frac{V_{Th}^2}{R_L} = 25\ mW$$

(۲-۱)



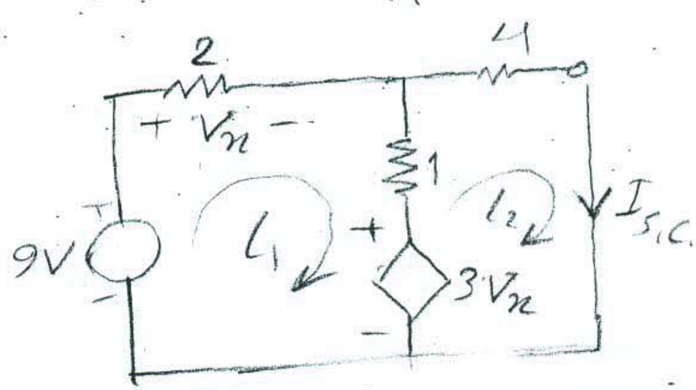
$$\begin{cases} R_L = ? \\ P_L = \max P_L \end{cases}$$

$$R_{Th} = \frac{V_{o.c.}}{I_{s.c.}}$$

$$V_{o.c.} = 9 - 2i \longrightarrow \begin{cases} i = \dfrac{9 - 3V_x}{2+1} \\ V_x = 2i \end{cases} \Rightarrow i = 1A$$

$$V_{o.c.} = 7\,V$$

۰۰ توجه تعیین جریان $I_{s.c.}$ از طریق جمع آثار عملی نیست !!



$$\begin{cases} V_x = 2i_1 \\ 9 - 3V_x = 3i_1 - i_2 \\ 3V_x = 1(i_2 - i_1) + 4i_2 \end{cases}$$

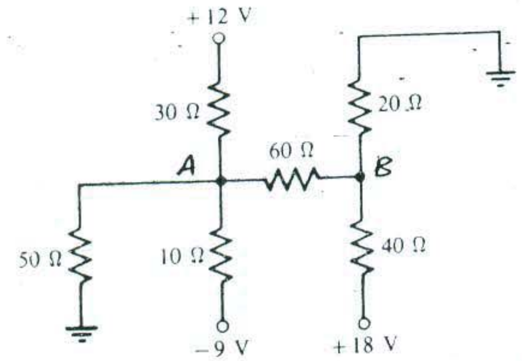
$$\begin{cases} 9i_1 - i_2 = 9 \\ 7i_1 - 5i_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow i_2 = I_{s.c.} = \frac{63}{38}\,A$$

$$R_{Th} = \frac{V_{o.c.}}{I_{s.c.}} = \frac{7}{63/38} = 4.22\,\Omega$$

$$\max P_L = \frac{1}{4} \cdot \frac{V_{Th}^2}{R_{Th}} = \frac{1}{4}\frac{(V_{o.c})^2}{V_{oc}/I_{sc.}} = \frac{1}{4} V_{o.c} I_{s.c.} = 2.9\,W$$

مثال ۲۰ جریانی که از مقاومت 60 اهم می‌گذرد چقدر است؟ (شکل 7-29)

حل: ابتدا مقاومت 60 را برداشته و از طریق تونن مسئله را حل می‌کنیم.



(7-29)
P245

$$R_{Th} = R_{AB} = (20 \| 40) + (10 \| 30 \| 50)$$

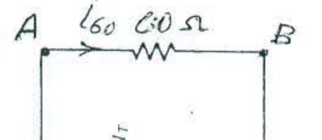
$$= 19.8550\ \Omega$$

$$V_A = V_A\Big|_{12} + V_A\Big|_{-9} = \frac{(50\|10)(12V)}{50\|10 + 30} + \frac{(30\|50)(-9V)}{30\|50 + 10}$$

$$V_A = -3.26$$

$$V_B = \frac{20}{20+40}(18V) = 6\ V$$

$$V_{AB} = V_{Th} = V_A - V_B = -3.26 - 6 = -9.26^V$$



$$\rightarrow i_{60} = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + 60} = \frac{-9.26}{19.85 + 60} =$$

$$i_{60} = 0.1159\ A$$

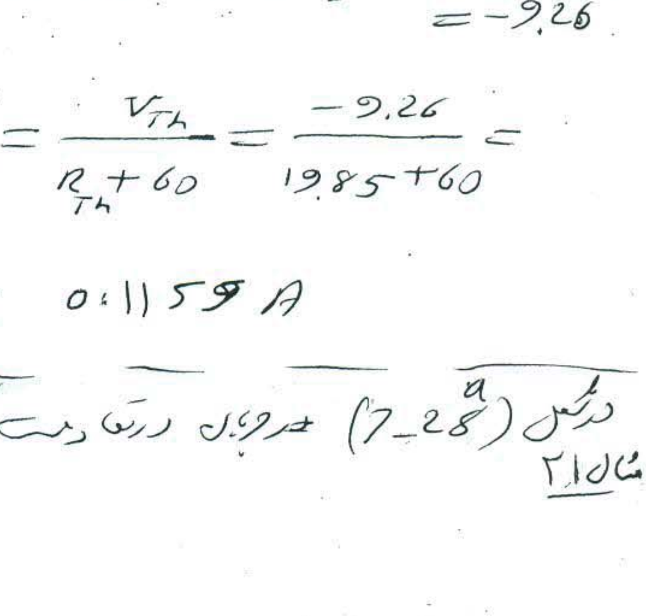
مثال ۲۱ در شکل (7-28a) جریان در مقاومت R_1 چیست؟

$$i_{R_1} = i_{R_1}\Big|_{18} + i_{R_1}\Big|_{9} + i_{R_1}\Big|_{12}$$

$$= \frac{2(18)}{2+1.5+1} + \frac{(1.5+2)(9)}{1.5+2+1} + \frac{1.5\ (-12)}{1.5+1.5+2}$$

$$= 8 + 7 - 3.6 = 11.4\ mA$$

چون از سمت چپ به راست است.



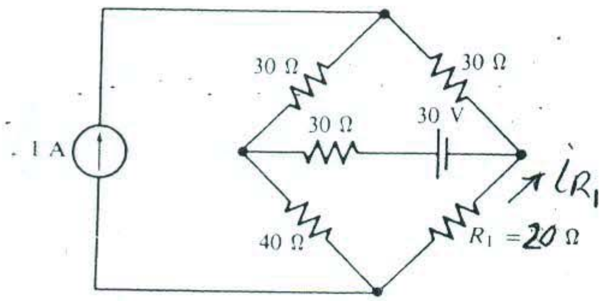
(7 − 28) (a)

مثال ۳۲ : در شکل (a) ، جریان در شاخه $R_1 = 20\,\Omega$ چقدر است؟

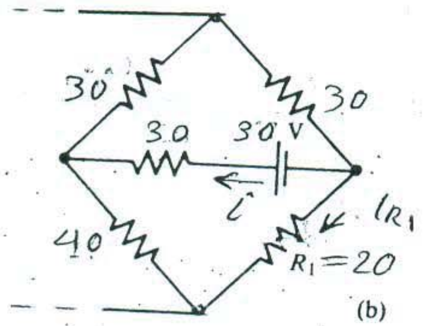
جواب: جریان i_{R_1} شامل دو جزء زیر است:

$$i_{R_1} = i_{R_1}\big|_{30V} + i_{R_1}\big|_{1A}$$

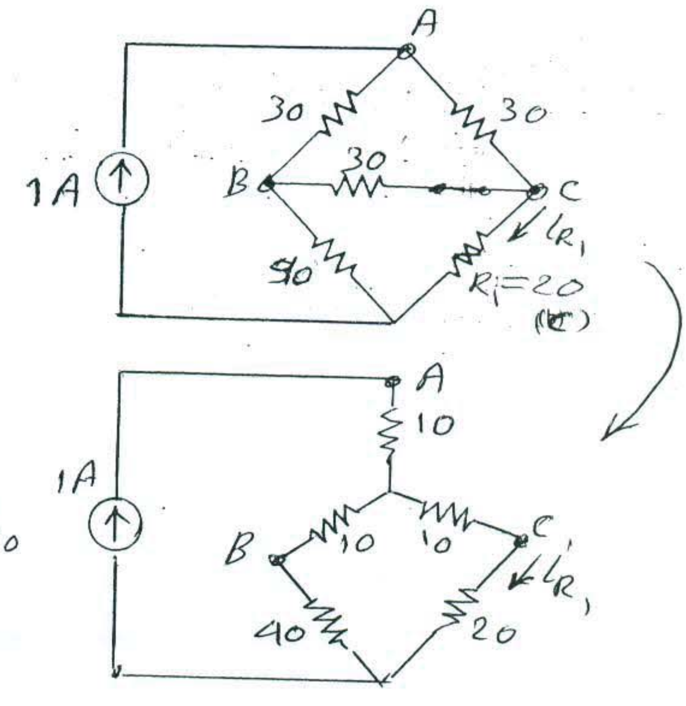
شکلهای (b) ، (c) و (d) نحوه محاسبه جزءهای فوق را بیان میکنند.



(7-28) (a)



(b)



(d)

$$i_{R_1}\big|_{30} = \frac{(30+30)\,i}{30+30+40+20} = \frac{60}{120}\cdot\frac{30V}{30+60\|60} = \frac{1}{4}\,A$$

$$i_{R_1}\big|_{1A} = \frac{10+40}{10+40+10+20}(1A) = \frac{50}{80} = \frac{5}{8}\,A$$

$$i_{R_1} = i_{R_1}\big|_{30} + i_{R_1}\big|_{1A} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{8} \rightarrow i_{R_1} = \frac{3}{8}\,A$$

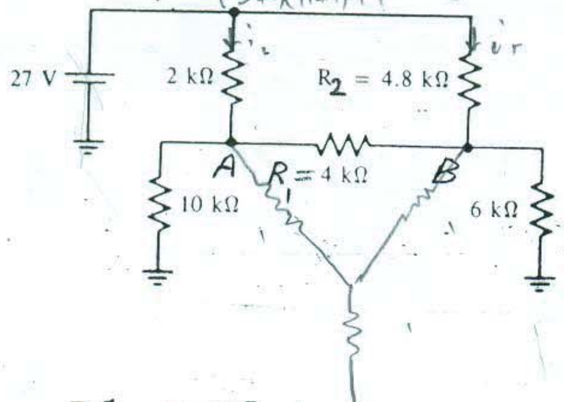
[illegible] ← $i_1 = \frac{11+1}{11+1+(5+1)} i_T$

$i_T = \frac{V}{(5+1)\|(11+1)+1} = \frac{10}{5} = 2A$

$i_1 = \frac{12}{18}(3) = \frac{4}{3}A$

$i_2 = i_T - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}A$

مثال ۴۲ - جریان در شاخه R_1 چیست؟



P198

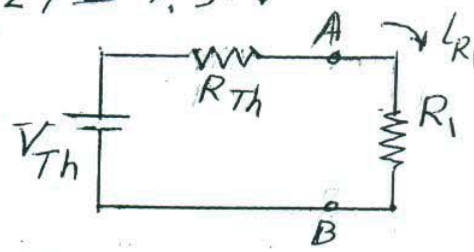
حل: از طریق تونن :

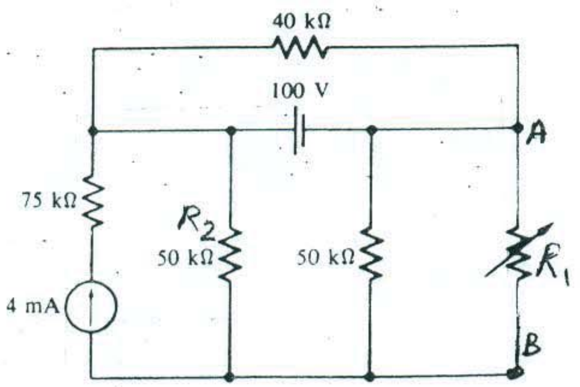
$$R_{Th} = R_{AB}\Big|_{R_1 \to \infty} = 10\|2 + 6\|4.8$$

$$= \frac{26}{6}\ K\Omega$$

$$V_{Th} = V_{AB}\Big|_{R_1 \to \infty} = V_A - V_B = \left(\frac{10}{12} - \frac{6}{10.8}\right) 27 = 7.5\ V$$

$$i_{R_1} = \frac{V_{Th}}{R_1 + R_{Th}} = \frac{7.5}{4 + \frac{26}{6}} = 0.9\ mA$$





مثال ۴۳ - مدار معادل نورتن از دو سر R_1 را محاسبه و رسم کنید.

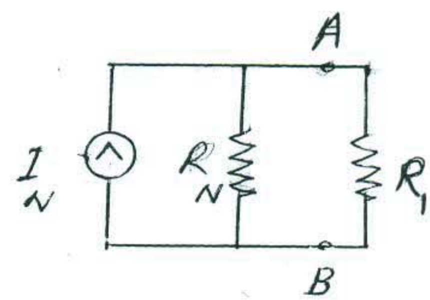
$$R_N = R_{AB}\Big|_{R_1 \to \infty} = 50\|50 = 25K$$

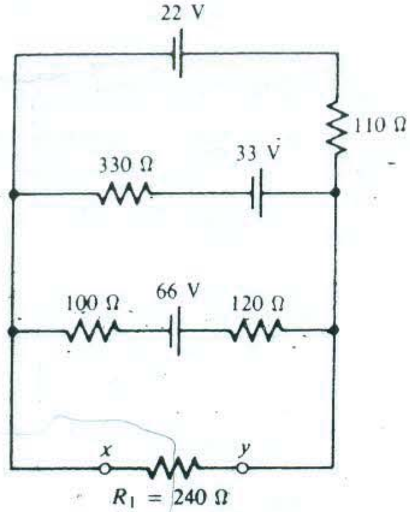
$$I_N\Big|_{R_1 \to 0} = I_{SC}\Big|_{4mA} + I_{SC}\Big|_{100V}$$

$I_{SC}\Big|_{4mA} = 4\ mA \downarrow$ ← جهت جریان

$$I_{SC}\Big|_{100V} = \frac{100V}{R_2 = 50K} = 2\ mA \uparrow$$

$$I_N = 4mA + (-2\ mA) \rightarrow I_N = 2\ mA$$





مثال -

جریان در شاخه R_1 چیست؟

حل

$$i_{R_1} = i_{R_1}\Big|_{66V} + i_{R_1}\Big|_{33V} + i_{R_1}\Big|_{22V}$$

$$i_R\Big|_{66V} = \frac{110\|330}{110\|330 + R_1}\,\frac{66V}{220 + 110\|330\|R_1} = 0.275\ A$$

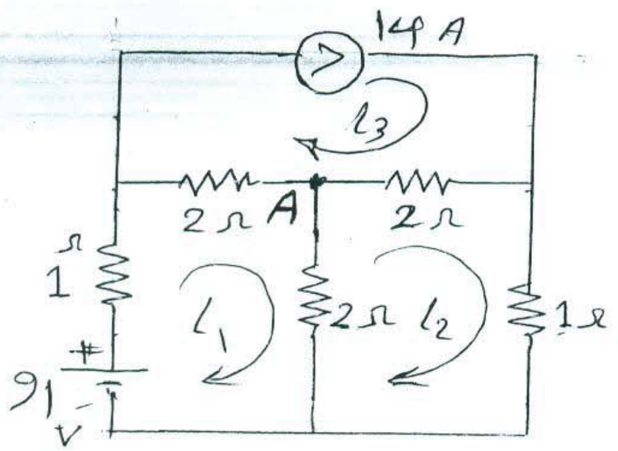
$$i_{R_1}\Big|_{33V} = \frac{110\|220}{110\|220 + R}\,\frac{33V}{330 + 110\|220\|R_1} \simeq 0.019\ A$$

$$i_{R_1}\Big|_{22V} = \frac{220\|330}{220\|330 + R_1}\,\frac{22V}{110 + 330\|220\|R_1} = 0.04\ A$$

$$i_{R_1} = 0.275 + 0.019 + 0.04 = 0.334\ A$$

مثال

ولتاژ V_A را با روش حلقه (loop) محاسبه کنید.



$$91 = 5i_1 - 2i_2 - 2i_3$$

$$0 = -2i_1 + 5i_2 - 2i_3$$

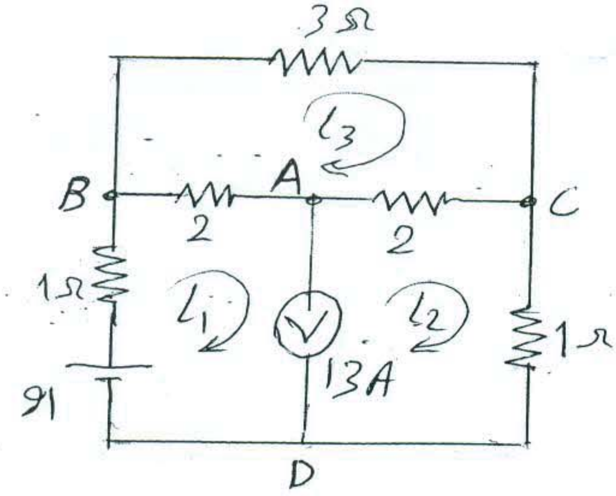
$$i_3 = 14\ A$$

∴ برای این ترتیب عملاً دو حلقه بیشتر نداریم

$$i_1 = 31\ A$$

$$i_2 = 18\ A \quad , \quad V_A = 2(i_1 - i_2) = 26\ V$$

مثال : V_B را با روش حلقه حساب کنید



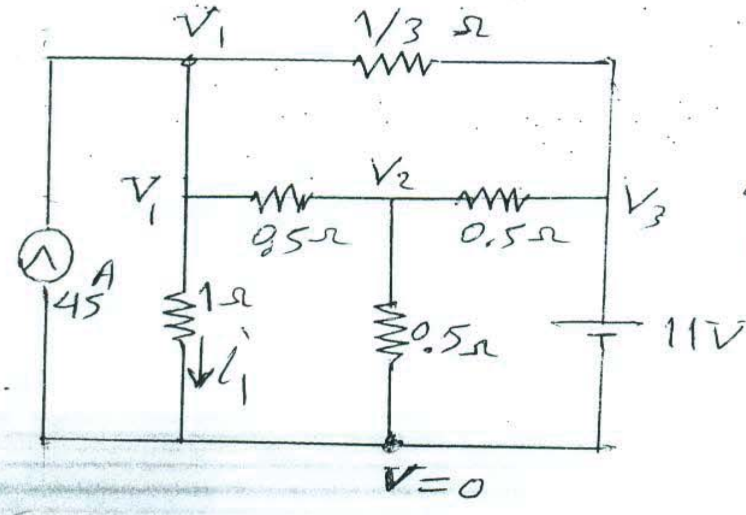
چون دو حلقه بیشتر نداریم :

$$\begin{cases} 91 = 3i_1 + 3i_2 - 4i_3 \\ 0 = -2i_1 - 2i_2 + 7i_3 \\ i_1 - i_2 = 13\ A \end{cases}$$

$i_1 = 31\ A,\quad i_2 = 18\ A,\quad i_3 = 14\ A \quad , \quad V_B = 60\ V$

$V_A = 26\ V$

مثال : جریان i_1 را با روش گره (Node) محاسبه کنید. تصور می‌کنیم جریان از گره‌ها خارج می‌شود



$$\begin{cases} \dfrac{V_1}{1} + \dfrac{V_1 - V_2}{0.5} + \dfrac{V_1 - V_3}{1/3} = 45^{A} \\ \dfrac{V_2 - V_1}{0.5} + \dfrac{V_2}{0.5} + \dfrac{V_2 - V_3}{0.5} = 0 \end{cases}$$

$V_3 = 11\ V$

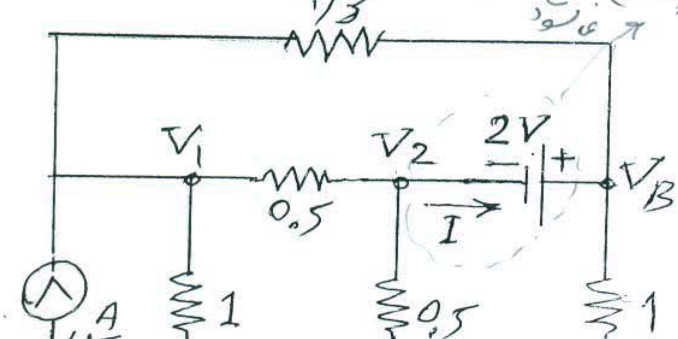
$V_1 = 16V,\quad V_2 = 9V$

$i_1 = \dfrac{16}{1\Omega} = 16\ A$

جریان از منبع ولتاژ رد می‌شود ولی از منبع جریان، خود جریان تولید می‌کند

جریان از منبع ولتاژ رد می‌شود

مثال 15 - V_B را با روش گره یا هر روش دیگر محاسبه کنید.

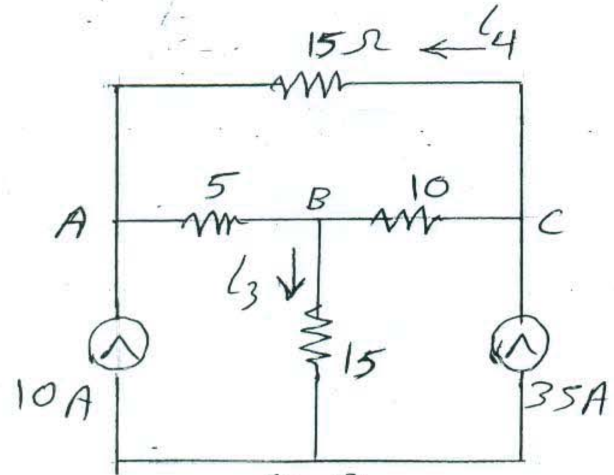


$$\begin{cases} \dfrac{V_1}{1} + \dfrac{V_1 - V_2}{0.5} + \dfrac{V_1 - V_B}{1/3} = 45 \\ \dfrac{V_2}{0.5} + \dfrac{V_2 - V_1}{0.5} + I = 0 \\ \dfrac{V_B}{1} + \dfrac{V_B - V_1}{1/3} - I = 0 \end{cases}$$

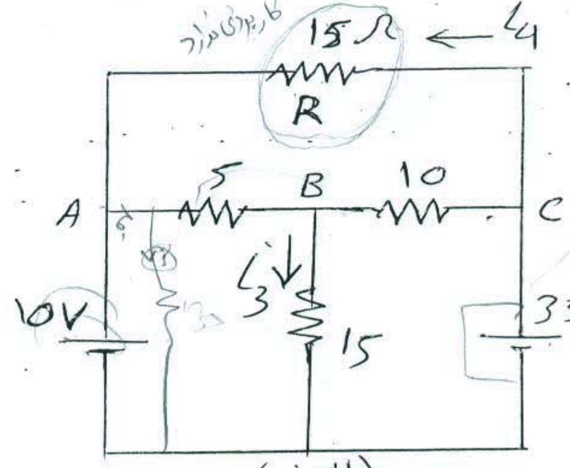
$V_1 = 16V,\quad V_2 = 9V, \quad , \quad V_B = V_2 + 2 = 11\ V$

i_4 و

تمرین: در مدارهای زیر، i_3 را با مناسب‌ترین (کوتاه‌ترین روش) حساب کنید.



(ب)



(الف)

جواب: $i_3 = 1A$ اول i_3 را بدست می‌آوریم

$i_4 = \frac{5}{3} A$

جواب: $i_4 = +10A$

$i_3 = 45A$

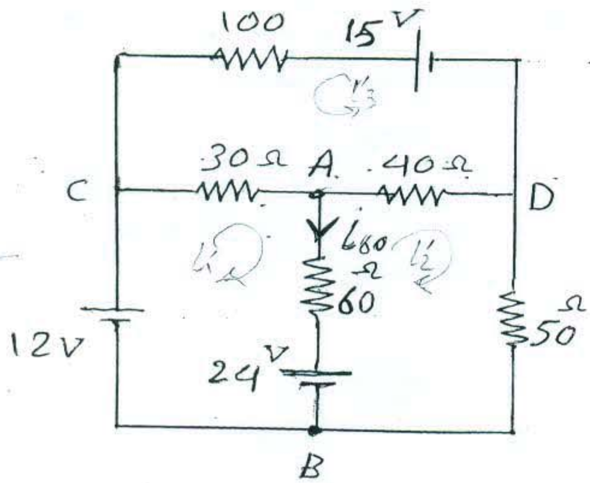
این صفحه

تمرین: در شکل (الف)، جریان i_3 را با استفاده از قضیه جمع آثار محاسبه کنید و کوتاهی این روش را با روشی که قبلاً برای محاسبه i_3 بکار برده‌اید مقایسه کنید.

تمرین: در شکل (ب)، دیدیم که $i_4 = 10^A$ است. جریان i_3 را بدون اینکه محاسبه طولانی انجام دهید، در زمان بسیار کوتاه تعیین نمائید. ($i_3 = 45A$)

تمرین: در شکل (الف)، یک منبع ولتاژ V_{dc} بصورت سری با مقاومت R بکار برده می‌شود. مقدار این ولتاژ V_{dc} بایستی چقدر باشد تا جریان i_4 برابر با صفر شود. $V_{dc} = -25V$

مثال — با استفاده از قضیه تونن ، جریان در شاخه AB را محاسبه کنید.

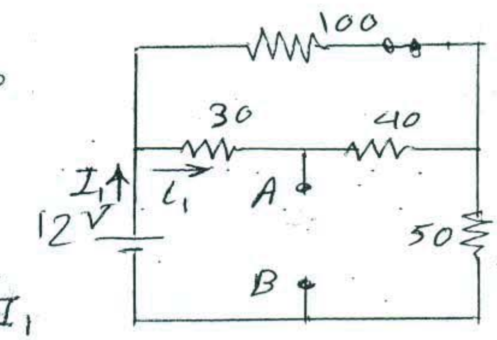


حل: ابتدا شاخه AB را برمی‌داریم

$$R_{Th}=R_{AB}=30\|(40+100\|50)$$

$$R_{Th}=21.29\ \Omega$$

$$V_{Th}=V_{AB}=V_{AB}\Big|_{12V}+V_{AB}\Big|_{15V}$$

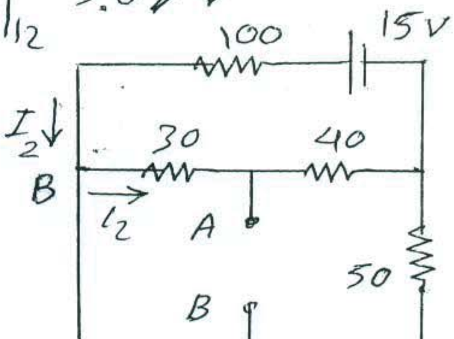


$$V_{AB}\Big|_{12}=V_A\Big|_{12}-V_B\Big|_{12}\quad,\ V_B\Big|_{12}=0$$

$$V_A\Big|_{12}=12-30\,i_1$$

$$=12-30\,\frac{100}{100+30+40}\cdot I_1$$

$$I_1=\frac{12V}{100\|(30+40)+50}\Longrightarrow V_A\Big|_{12}=9.67\ V$$



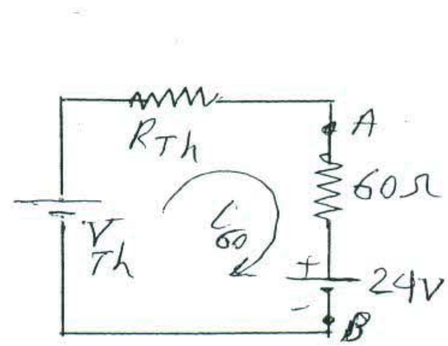
$$V_{AB}\Big|_{15}=V_A\Big|_{15}-V_B\Big|_{15}$$

$$V_A=V_B-30\,i_2'=V_B-30\,\frac{50}{50+70}\,I_2$$

$$V_A-V_B\Big|_{15V}=-\frac{1500}{120}\cdot\frac{15V}{100+70\|50}=-1.45\ V$$

$$V_{Th}=V_{AB}\Big|_{12}+V_{AB}\Big|_{15}=9.67+(-1.45)$$

$$V_{Th}=8.22\ V$$



$$i_{60}=\frac{V_{Th}-24}{R_{Th}+60}=\frac{8.22-24}{21.29+60}=-0.194\ A$$

(پشت صفحه)

$i'_1 = -0.09261904\ A$

چگونه این سوال را از روش حلقه‌ها حل کرد؟

$i'_2 = 0.10142857\ A \qquad i_{60} = -0.19404761\ A$

$\equiv i'_1 - i'_2$

$i'_3 = 0.080714285\ A$

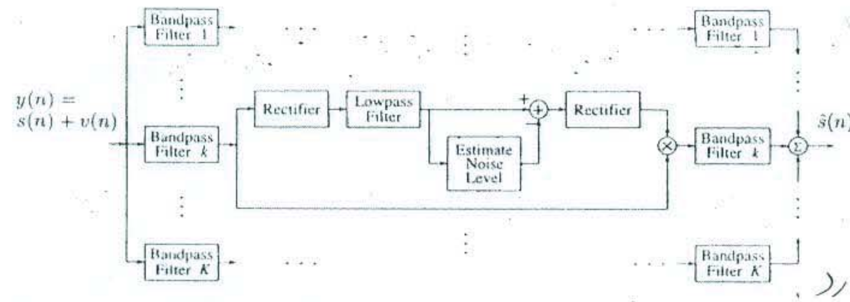


Figure 4.2 Schroeder's noise reduction system. After M. R. Schroeder [1, 2].

working for AT&T Bell Laboratories. A block diagram of Schroeder's noise reduction system is shown in Fig. 4.2. This diagram is modified from its original form for this discussion, and incorporates elements presented by Schroeder in a related 1968 patent [2] and also by Schroeder's colleagues in a subsequent published work [4].

Schroeder's system was a purely analog implementation of spectral magnitude subtraction. As shown in the figure, a bank of bandpass filters separates the noisy signal into K different frequency bands. The bandwidth of each filter is about 300 Hz. Ten individual filters therefore cover the 300 to 3300 Hz range necessary for telephony grade speech applications. The noise-reduction processing performed in each band is identical. First, the output of each filter bank is rectified and averaged using a low-pass filter to produce a short-time estimate of the noisy speech envelope for the band. The lowpass filter has a cutoff of between 0 and 10 Hz. The noisy speech envelope is then subtracted from an estimate of the noise-only envelope. To estimate the noise, the noise level estimator uses a series of resistors, capacitors and diodes to produce a running estimate of the minima of the noisy speech envelope. The decay time of this noise estimator is instantaneous while the rise time is very large, on the order of seconds. Between speech utterances the noisy speech envelope contains only noise, and the noise level estimator quickly decays to meet the level of the noise. During utterances the noise level estimate changes very little. Thus, the output of the subtraction block is an estimate of the noise-free signal envelope for the band, or $|\hat{S}(k, m)|$ in the current notation. A second rectification is performed on the output to accommodate negative results from the difference node (negative estimates are simply set to zero). Finally, the noise-free signal envelope is used as a multiplier with the unmodified output of the bandpass filter for the band, and the result is summed with the results from all bands to form the reconstructed full-band time series $\hat{s}(n)$.

It is interesting to note that Schroeder's implementation was a purely analog one, employing bandpass filters and rectification and averaging circuitry. Other

$C = 20\ \mu F$

$\frac{5}{400} = 0.0125[\ ]_0^t$

$q = CV = 20(50) = 1000\ \mu C$

$12.5\,(e^{400t} - 1)$

$i = C\frac{dv}{dt}$

خازن‌ها Capacitors

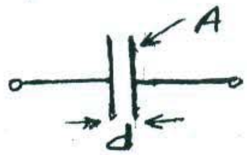
- خازن وسیله‌ای است که بار الکتریکی را (بصورت انرژی الکتریکی) ذخیره می‌کند.

- میزان قابلیت ذخیره بار الکتریکی را در خازن، ظرفیت (Capacitance) نامیده و با C نشان می‌دهند.

- واحد ظرفیت فاراد (Farad, F) و بصورت $\overset{\text{فاراد}}{C} = \frac{Q_{\text{کولمب}}}{V_{\text{ولت}}}$ است.

- ظرفیت خازن با سطح صفحات آن نسبت مستقیم و با فاصله آنها از یکدیگر نسبت معکوس دارد.

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$



که در آن:

C، برحسب فاراد، F

ε_0، ضریب دی‌الکتریک بین صفحات خازن، برحسب $\frac{\text{فاراد}}{\text{متر}}$، $\frac{F}{m}$

A، سطح صفحات برحسب مترمربع، m^2

d، فاصله بین صفحات برحسب متر، m

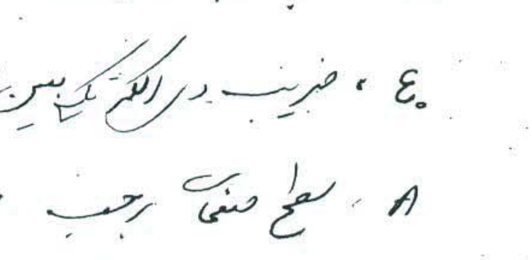
مثال: ولتاژ دو سر یک خازن با ظرفیت $C = 20\ \mu F$، در بازه زمانی $0 \leq t \leq 5\pi\ ms$ بصورت $v_c = 50 \sin 200t,\ V$ است. مطلوبست تعیین بار الکتریکی، جریان، توان، و انرژی مدار را. ضمناً $W(t)$ را رسم کنید. $W(0)=0$.

$$q = C v_c = 1000 \sin 200t,\ \mu C$$

$$i = C\frac{dv_c}{dt} = 0.2 \cos 200t,\ A$$

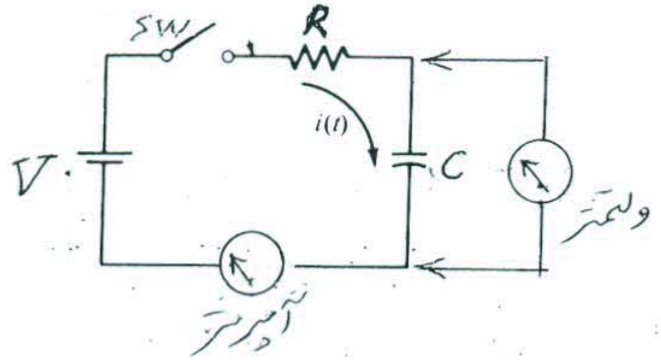
$$P = v_c i = 5 \sin 400t,\ W$$

$$W = \int_0^t P\, dt = 12.5(1 - \cos 400t),\ mJ$$



پدیده گذرا در مدار RC، (Transient effect)

در شکل مقابل سوئیچ در لحظه $t=0$ بسته می‌گردد. آمپرمتر بلافاصله ماکزیمم جریان $\frac{V}{R}$، و ولتمتر بلافاصله ولتاژ $0\ V$ را نشان میدهد. پس از گذشت زمان، جریان آمپرمتر به تدریج به صفر و ولتاژ ولتمتر به تدریج به V میرسد. لذا می‌گوییم که در لحظه $t=0$ (بلافاصله پس از بستن سوئیچ) مدار خازن اتصال کوتاه، و در $t\to\infty$، خازن مدار باز خواهد بود.



تغییرات ولتاژ (یا جریان) خازن را میتوان بصورت زیر بدست آورد. بلافاصله پس از بسته شدن سوئیچ، داریم:

$$V = v_R + v_C$$
$$= R\,i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt \quad \rightarrow \quad 0 = R\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C}$$

یا:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\,i(t) = 0$$

تنها جواب این معادله خطی مرتبه اول (با ضرایب ثابت) بصورت زیر است:

$$i(t) = A_1 e^{-t/RC} + A_2$$

که در آن A_1 و A_2 ضرایبی ثابت و بستگی به شرایط اولیه مدار دارند:

$$i(t)\big|_{t=0^+} = A_1 + A_2 \equiv \frac{V}{R}$$

$$i(t)\big|_{t\to\infty} = 0 + A_2 \equiv 0$$

بنابراین:
$$i(t) = \frac{V}{R}\,e^{-t/RC}$$

ضریب RC که از جنس زمان است (چرا؟) به ثابت زمانی (time constant) مدار موسوم است و به τ نشان میدهند.

ثابت زمانی (time onstant)

بطور کلی حاصلضرب مقاومت معادل در خازن معادل در یک حلقه را ثابت زمانی آن حلقه گفته و با $\tau = RC$ نشان می‌دهند و واحد آن برحسب زمان است:

$$\tau = R_{eq} C_{eq} \equiv (\Omega . F) \equiv sec$$

توجه! بطور کلی معادله جریان و ولتاژ خازن را به هنگام پر شدن یا خالی شدن (در مدار تک حلقه‌ای) می‌توان با روش بررسی (Inspection Method) بصورت زیر بدست آورد:

$$V_c(t) = V_f + (V_i - V_f)\, e^{-t/\tau}$$

$$I_c(t) = I_f + (I_i - I_f)\, e^{-t/\tau}$$

که در آن f به عنوان مقدار نهائی (final) و i به عنوان مقدار اولیه (initial) و τ ثابت زمانی آن حلقه بوده است.

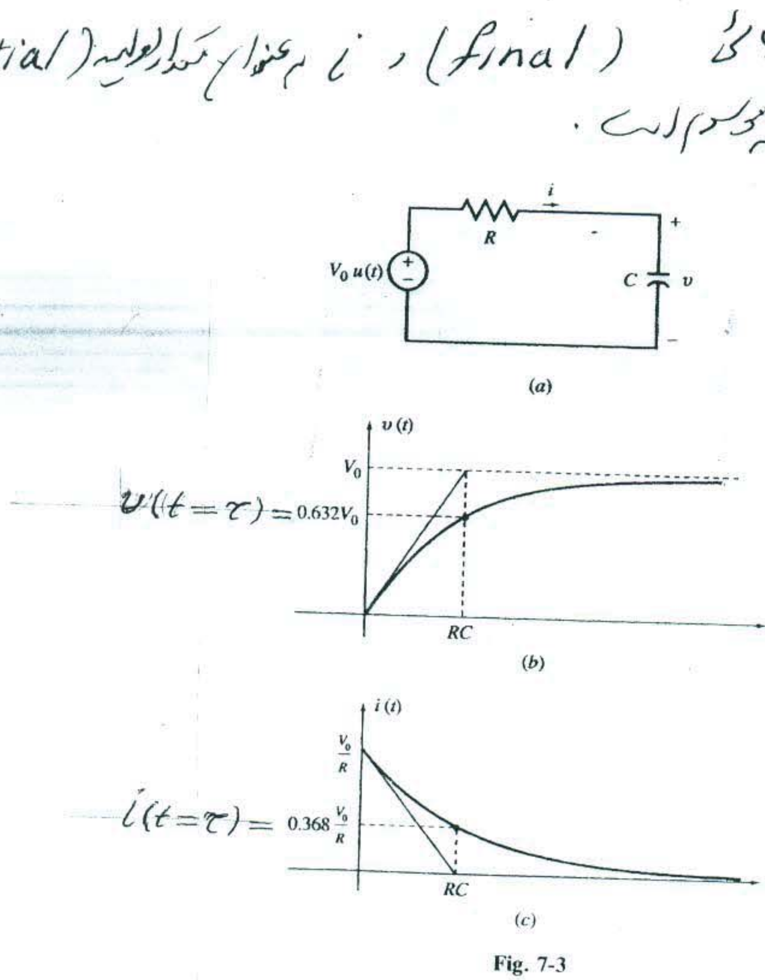


Fig. 7-3

مفهوم ثابت زمانی در شکل مقابل دیده می‌شود.

$$v(t) = V_0 (1 - e^{-t/RC})$$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{V_0}{RC} e^{-t/RC}\right|_{t=0} = \frac{V_0}{RC}$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{V_0}{R} \cdot \frac{-1}{RC} e^{-t/RC}\right|_{t=0} = \frac{V_0}{R} \cdot \frac{-1}{RC}$$

کاربردهای مدار RC یا RL

مدارهای تاخیر Delay Circuits

که مقاومت آن بینهایت است ،

- شکل زیر یک مدار RC را نشان میدهد که یک لامپ نئون موازی با خازن قرار دارد.

با بسته شدن سوئیچ ، خازن با ثابت زمانی $(R_1+R_2)C$ ، به تدریج شارژ شده

و ولتاژ آن به سمت 110V پیش میرود . لکن وقتیکه ولتاژ خازن به

ولتاژ مورد نیاز لامپ (یعنی 70V برسد) ، لامپ روشن شده و مقاومت لامپ

ناگهان و بسرعت کم شده و از بینهایت (حالت خاموش) به حدود چند اهم

(حالت روشن) میرسد و لامپ روشن شده و خازن بسرعت دشارژ میشود

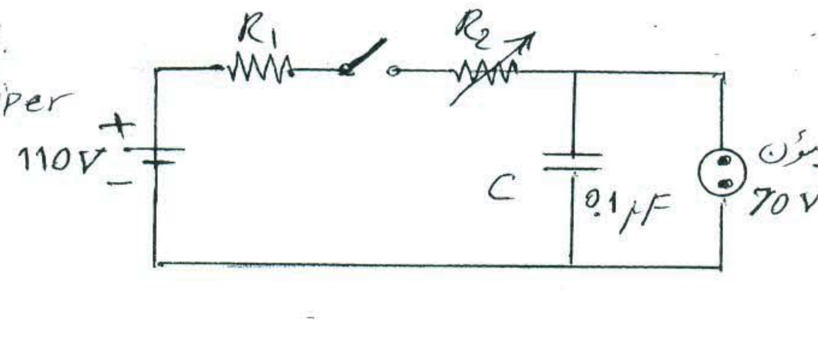
و لامپ خاموش میشود و بصورت مداوم بدین ترتیب مدارهایی که خازن را

C شارژ شده داشته بدین ترتیب تکرار میشود.

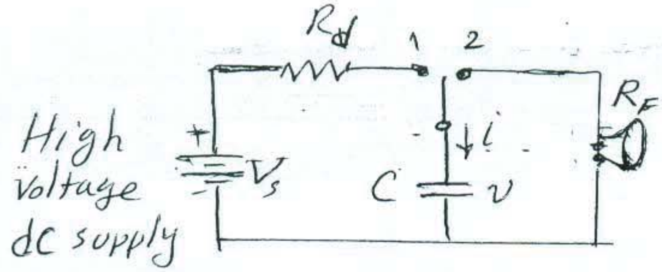
مدت زمان تاخیر : با تنظیم R_2 ، میتوان تاخیر زمانی طولانی یا کوتاهی بدست آورد و لامپ را با فواصل زمانی $\tau=(R_1+R_2)C$ ، مکرراً روشن نگهداشت.

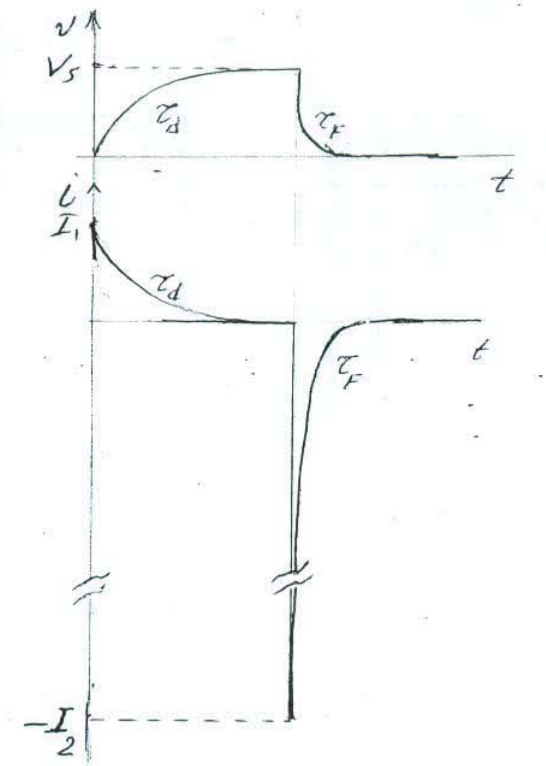
٭ سیگنالهای نورانی هشدار دهنده ، مخصوصاً تابلوهای تعمیر جاده که از این سیستم بهره میبرند

- Neon lamp
- Photoflash Unit.
- Windshield Wiper
- Spot welding



Photoflash Unit ج۰''





R_d : dropping resistance

R_F : Flash lamp's resistance

$$R_d \ggg R_F \quad \begin{cases} R_d \geq 6\ K\Omega \\ R_F \leq 12\ \Omega \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau_d = R_d C \\ \tau_F = R_F C \end{array}\right. \rightarrow \tau_d \ggg \tau_F$$

مثال :

فرض $V_{dc} = 240\ V$ ، $C = 2000\ \mu F$ ، $R_d = 6\ K\Omega$ ، $R_F = 12\ \Omega$ مطلوب است تعیین :

(a) I_1

(a) ماکزیمم جریان شارژ چقدر است؟

(b) مدت لازم برای اینکه خازن کاملاً شارژ شود

(c) ماکزیمم جریان دشارژ خازن

(d) انرژی کلی که در خازن ذخیره می‌شود.

(e) توان متوسطی که بوسیله لامپ فلاش مصرف می‌شود.

(a) $I_1 = \frac{V_s}{R} = \frac{240}{6\ K\Omega} = 40\ mA$

(b) $t_{charge} = 5\tau_d = 5 R_d C = 5(6K)(2000\ \mu F) = 60\ s = 1$ دقیقه

(c) $I_2 = \frac{V_s}{R_F} = \frac{240\ V}{12\ \Omega} = 20\ A$!

(d) $W_c = \frac{1}{2} C V_s^2 = \frac{1}{2}(2000\ \mu F)(240)^2 = 57.6\ J$

(e) انرژی ذخیره شده در خازن، درخلال دشارژ شدن خازن در لامپ فلاش مصرف می‌شود.

$t_{discharg} = 5\tau_F = 5 R_F C = 0.12\ s$, $P_{ave.} = \frac{W_c}{t_{dis..}} = \frac{57.6}{0.12} = 480\ W$

111

Neon lamp delay circuit (or Relaxation oscillator)

مثال : در شکل زیر بفرض $R_1 = 1.5\ M\Omega$, $0 < R_2 < 2.5\ M$

(a) - محدوده ثابت زمانی چیست ؟

(b) - چه مدت طول می‌کشد تا لامپ روشن شود ؟ ($R_2 = 2.5\ M$) (منحنی ها را رسم کنید)

(c) - آیا برابر هر نصف ثابت زمانی لامپ بطور متوالیاً روشن و خاموش شود ؟

$$\tau = (R_1 + R_2)C \qquad \begin{cases} \tau_{min} = (1.5+0)10^{6} \times 0.1 \times 10^{-6} = 0.15\ sec \\ \tau_{max} = (1.5+2.5)10^{6} \times 0.1 \times 10^{-6} = 0.4\ sec \end{cases} \quad (a)$$

$$0.4 \geqslant \tau \geqslant 0.15\ sec$$

(b) $$v_c(t) = V_f + (V_{in} - V_f)e^{-t/\tau} = 110\,(1 - e^{-t/\tau})$$

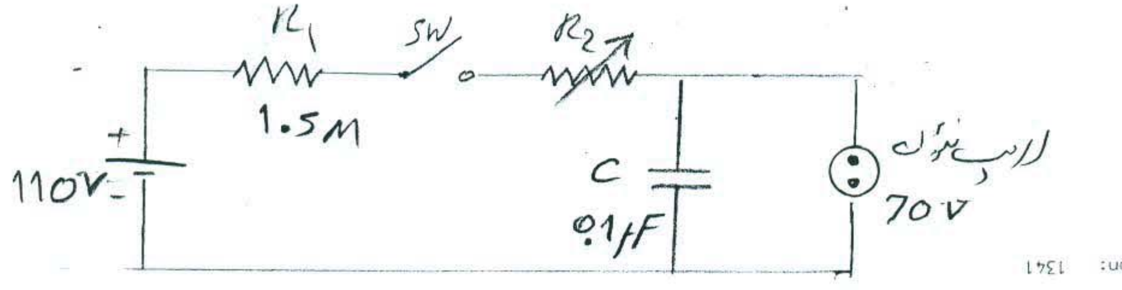
$$\tau = 0.4\ sec$$

لامپ وقتی روشن می‌شود که $v_c = 75\,V$ باشد :

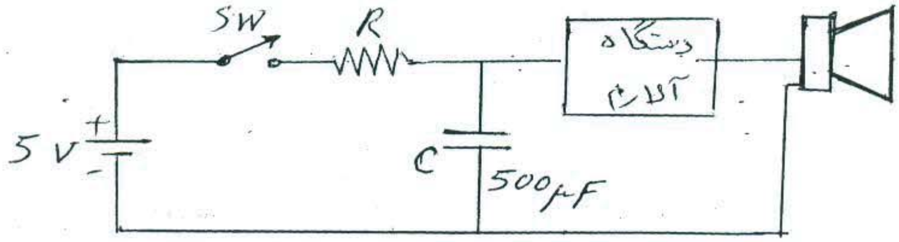
$$75^{v} = 110(1 - e^{-t_0/0.4}) \longrightarrow t_0 = 0.4046\ sec$$

بنابراین برابر هر $t_0 = 0.404\ sec$ لامپ مجدداً روشن می‌گردد.

(c) بدیهی است که برابر هر $\frac{\tau}{2}$ امکان تکرار روشن و خاموش وجود ندارد ؟!



مثال ۲۰- در شکل زیر، دستگاه آلارم با ولتاژ 3.5 V کار میکند. چنانچه پس از بسته شدن سوئیچ پس از 1 ثانیه دستگاه آلارم شروع به کار کند، مقدار R چقدر است؟



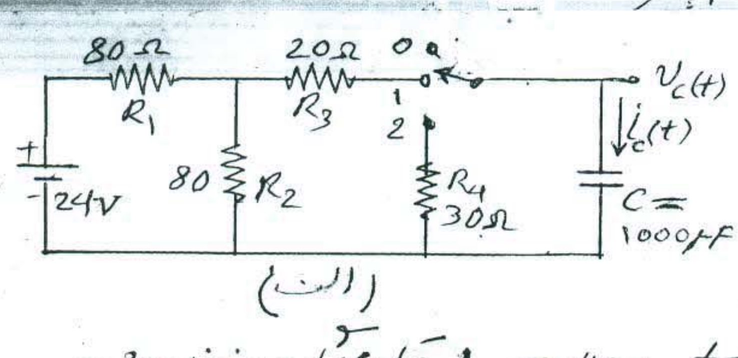
حل:
مطابق آنچه که قبلا بیان گشت، میتوان نوشت:

$$v_c(t) = 5\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

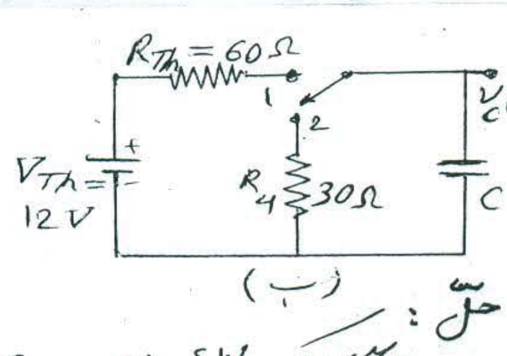
$$3.5 = 5\left(1 - e^{-1/\tau}\right) \rightarrow \tau = 0.831 \text{ sec.}$$

$$\tau = RC \rightarrow R = \frac{0.831}{500\mu F} = 1.66 \text{ K}\Omega$$

مثال ۲۱- در شکل زیر، سوئیچ ابتدا در حالت 0 قرار دارد. و در لحظه $t=0$ به حالت 1 میرود و پس از 0.3 ثانیه به حالت 2 رفته و در آنجا نیز به مدت 0.3 ثانیه توقف کرده و به حالت 1 بر میگردد و این عمل بطور تناوبی تکرار میشود. شکل منحنی خروجی $v_c(t)$ و نیز جریان $i_c(t)$ را رسم کنید.



(الف)



(ب)

حل:
هنگامیکه SW در $t=0$ در حالت 1 قرار میگیرد، خازن شروع به شارژ شدن میکند و معادله ولتاژ و جریان خازن بصورت زیر است (شکل ب)

$$v_c(t) = V_{Th}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad i_c(t) = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} e^{-t/\tau}$$

$$\tau_1 = R_{Th} \cdot C = [(80 \| 80) + 20]\, 10^{-3} = 60\ ms = 0.06\ sec$$ ث

$$v_c(t) = 12\left(1 - e^{-t/0.06}\right),\ V \qquad 0.3 > t > 0$$ ثانیه

$$i_c(t) = \frac{12}{60} e^{-t/\tau_1} = 0.2\, e^{-t/0.06},\ A$$

$$(0.3 = 5\tau_1)$$

حال پس از 0.3 ثانیه، کلید سوئیچ در حالت 1 قرار داشته، به حالت 2 می‌رود

خازن از طریق مقاومت $R_4 = 30\Omega$ دشارژ می‌گردد.

ابتدا باید تعیین کرد که ولتاژ $v_c(t)$ و جریان $i_c(t)$ پس از 0.3 ثانیه، چه مقداری دارند.

$$v_c(t=0.3) = 12\left(1 - e^{-5\tau/\tau_1}\right) = 12\left(1 - e^{-5}\right) \simeq 12(0.993) \approx 12V$$

$$i_c(t=0.3) = 0.2\, e^{-5\tau/\tau_1} = 0.2\, e^{-5} \simeq 0.2 \times 0.0067 \simeq 0.0013 \simeq 0\ A$$

همانطوری که دیده می‌شود، پس از $5\tau_1$، خازن کاملاً شارژ شده است و ولتاژ دو سر آن برابر ولتاژ $V_{Th} = 12\ V$ و جریان آن پس از این زمان به صفر رسیده.

بنابراین در بازه $0.6 > t > 0.3\ sec$، ولتاژ و جریان دشارژ خازن عبارت است از:

$$v_c(t) = 12\, e^{-t/\tau_2}, \quad \tau_2 = R_4 \cdot C = 30 \times 10^{-3} = 30\ ms = 0.03\ sec$$

$$v_c(0.3) = 12\, e^{-t/0.03} = 12\, e^{-0.3/0.03} \approx 0\ V$$

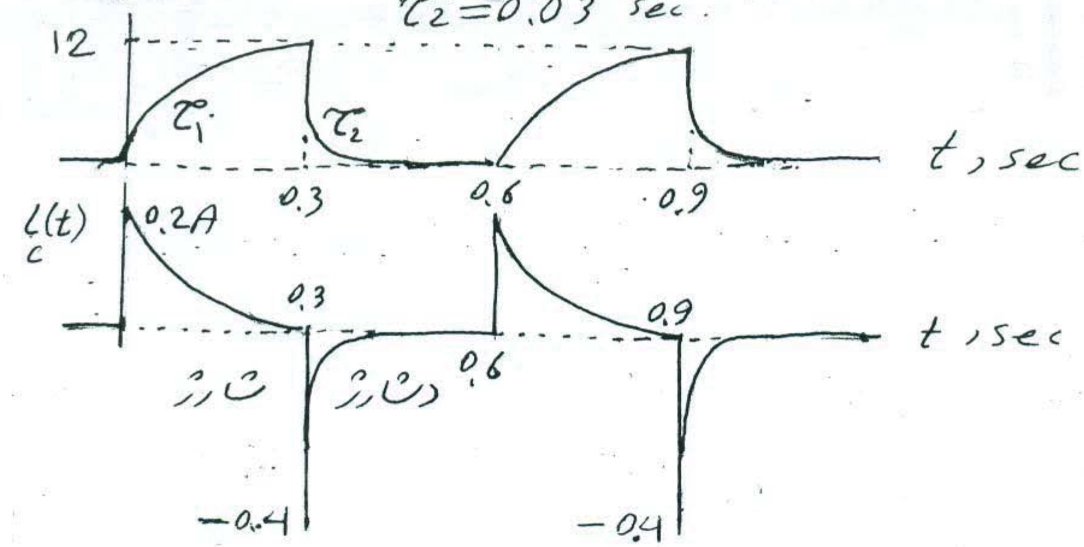
$$i_c(0.3) = \frac{12}{30} e^{-t/0.03} = 0.4\, e^{-0.3/.03} \simeq 1.8 \times 10^{-5} \simeq 0$$

شکل موج مربوط به $v_c(t)$ و $i_c(t)$ بصورت زیر خواهد بود. به ثابت زمانی شارژ (τ_1) و دشارژ (τ_2) دقت کنید.

۲۲

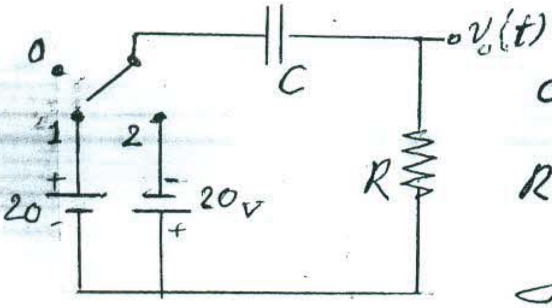
$\tau_1 = 0.06$ sec

$\tau_2 = 0.03$ sec.



تمرین : در مثال قبل اگر توقف سوئیچ در مراحل 1 و 2 ، بعد 0.075 ثانیه باشد ، شکل موج $v_c(t)$ و $i_c(t)$ را محاسبه و رسم کنید .

مثال ۲۲ : در شکل زیر ، سوئیچ در حالت 0 قرار دارد و در لحظه $t=0$ از 0 به 1 می‌رود و پس از 0.5 ثانیه به حالت 2 می‌رود و بعد از 0.5 ثانیه به حالت 1 باز می‌گردد و سیکل این عمل تکرار می‌شود . شکل موج ولتاژ $v_o(t)$ را محاسبه و رسم کنید .



$C = 10\ \mu F \qquad \tau = 100\ ms$

$R = 10\ K\Omega \qquad = 0.1\ sec.$

حل :

نظیر مثال قبل ، وقتیکه در لحظه $t=0$ ، سوئیچ از حالت 0 به حالت 1 می‌رود و 0.5 ثانیه در آنجا می‌ماند ، $0.5 = 5\tau$ ، خازن به اندازه 20 ولت شارژ می‌شود و ولتاژ v_o در این فاصله بصورت زیر است .

$0.5 \geq t > 0$ ثانیه

$$v_o(t) = V_{fin} + (V_{in} - V_{fin}) e^{-t/\tau} = 0 + (20-0) e^{-t/0.1}$$

$$= 20 e^{-t/0.1} \quad V$$

$\tau = 500 \times 0.5 \times 10^{-6} = 250 \mu s$

<u>شکل ۲۳</u>

$SW \to 1$

$i(t) = \frac{20\,V}{500\,\Omega} e^{-t/\tau} \to i(t) = 40\, e^{-t/\tau}\ mA$

$i(t=\tau) = 40(e^{-1}) = 40(0.3678\cdots) \simeq 14.72\ mA$

$v_c(t=\tau) = 20(1 - e^{-t/\tau}) = 20(1 - 0.3678) \simeq 12.64\ V$

$SW \to 1 \to 2$

$i(t) = 0 + \left(\frac{12.64 - (-40)}{500} - 0\right) e^{-(t-\tau)/\tau}$

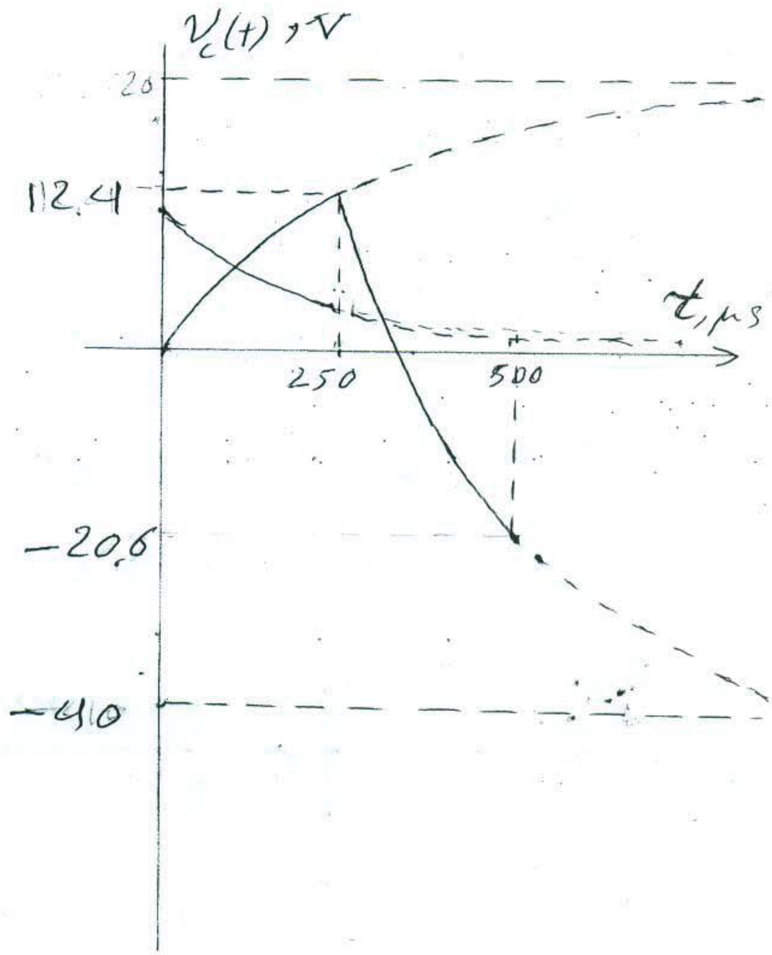
$t \geqslant \tau$

$i(t) = 105.28\, e^{-(t-\tau)/\tau}\ mA$

$t \geqslant \tau$

$SW \to 2 - 1$

$\Delta t = 2\tau$



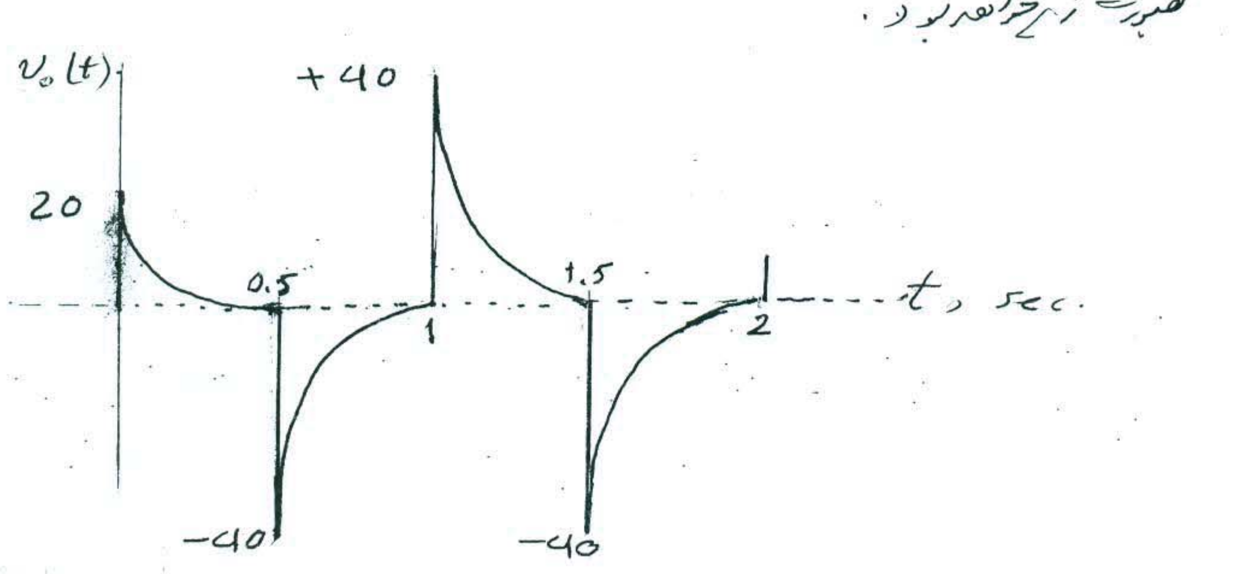
حال وقتیکه سوئیچ در لحظه ثانیه $t>0.5$ به حالت 2 می رود ، ولتاژ v_0 بصورت زیر خواهد بود

$$1 \geq t > 0.5$$

$$v_0(t) = V_{f_{i2}} + (V_{i2} - V_{f_{i2}}) e^{-t/\tau} = 0 + (-20-20-0)\, e^{-t/\tau}$$

$$v_0(t) = -40\, e^{-t/0.1} \; v$$

درحالیکه سوئیچ مرتباً بین حالات 1 و 2 ، به طرزی که گفته شد تغییر کند ، شکل موج $v_0(t)$ بصورت زیر خواهد بود .



مثال ۲۲ در شکل زیر سوئیچ در لحظه $t=0$ ، در حالت 1 قرار میگیرد و پس از یک ثابت زمانی یعنی $t=\tau=250\,\mu s$ در حالت 2 قرار میگیرد ، جریان $i(t)$ را بدست آورده و رسم کنید .

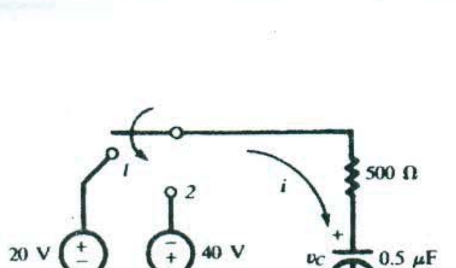


Fig. 7-26

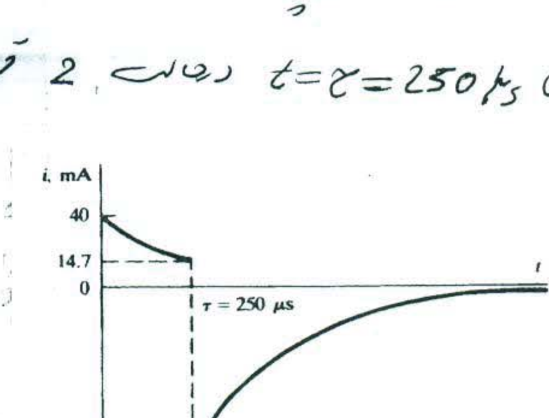


Fig. 7-27

شماره ۲۴

— در شکل زیر خازن $6\mu F$ دارای بار اولیه $Q_0 = 300\mu C$ است. چنانچه سوئیچ در لحظه $t = 0$ بسته شود، رابطه ولتاژ v_R را برحسب زمان بنویسید.

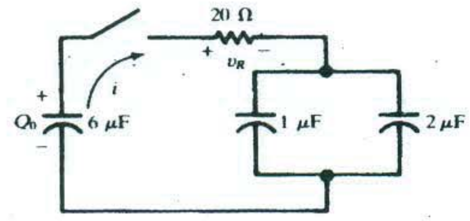


Fig. 7-29

حل: در $t = 0^+$ رابطه KVL برابر است با:

$$V_0 - v_R - v_{1,2\mu F} = 0$$

$$\frac{Q_0}{6\mu F} - v_R - 0 = 0 \rightarrow v_R = \frac{300}{6} = 50\ V$$

و چون در $t \rightarrow \infty$ ، $v_R = 0$ است و

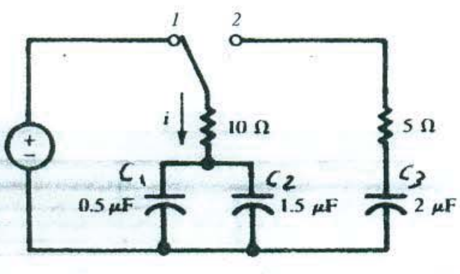
$$\tau = \underbrace{(6\|3)20}_{\mu F . \Omega} = 40\mu s$$

لذا:

$$v_R = 50 e^{-t/40\mu s}$$

شماره ۲۵

— در شکل زیر، سوئیچ در $t = 0$ در حالت 1 قرار میگیرد و پس از $t = 3\tau$ در حالت 2 قرار میگیرد. جریان $i(t)$ را برای $0 < t \leq 3\tau$ و نیز برای $t > 3\tau$ محاسبه کنید.



حل - در حالتی که سوئیچ در وضعیت 1 قرار میگیرد

$$\tau_1 = 10(\overset{C_1}{0.5} + \overset{C_2}{1.5}) = 20\mu s$$

و معادله ولتاژ و جریان خواهد شد.

$$i(t) = 2.5 e^{-t/20\mu s} \quad A$$

$$v_{C_1C_2}(t) = 25(1 - e^{-t/20\mu s}) \quad V \qquad 3\tau \geq t > 0$$

و پس از $t = 3\tau_1$ ، ولتاژ دو سر خازنهای موازی C_1 و C_2 برابر است:

$$v_{C_1C_2}(t = 3\tau_1) = 25(1 - e^{-3}) = 23.755 \quad V$$

و در نتیجه

و وقتیکه سوئیچ در حالت 2 قرار گیرد، خازن C_1+C_2 در C_3 تخلیه شده و جریان حاصل برابر است با:

$$i = I_f + (I_1 - I_{fin})\, e^{-(t-3\tau_1)/\tau_2}$$

$$= 0 + \left(\frac{23.755}{(10+5)\Omega} - 0\right) e^{-(t-3\tau_1)/\tau_2}$$

$$\tau_2 = [(C_1+C_2)\|C_3]15 = [\cancel{(C_1+C_2)}\|2]15 = 15\,\mu s$$

$$i = 1.58\, e^{-(t-0.00006)/15\times10^{-6}}$$

$$i = 1.58\, e^{-66666(t-0.00006)} \quad A$$

توان و انرژی خازن

هر خازن که به اندازه بار q شارژ شده دارای انرژی است که بصورت الکتریکی در آن ذخیره شده است. تا زمانیکه این خازن در مدار بسته قرار نگیرد، انرژی خود را هیچگاه از دست نمی‌دهد، (مخصوصاً خازن ایده‌آل یا به عبارت دیگر دارای جریان نشتی leakage current نباشد). تغییرات توان و انرژی خازن، بهنگام شارژ و دشارژ بصورت زیر است:

$$P = v_c\, i_c = v_c \cdot C\frac{dv_c}{dt}$$

$$W_c = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt = \int_{t_1}^{t_2} C\, v_c \frac{dv_c}{dt}\, dt$$

$$W_c = \frac{1}{2} C\left[V_2^2 - V_1^2\right]$$

انرژی خازن به ولتاژ معین V برابر است با:

$$W_c = \frac{1}{2} C V^2 \quad \text{(ژول)}$$

مثال ۲۶

- در شکل زیر، خازن دارای ولتاژ اولیه ۱۷V است، چنانچه سوئیچ در لحظه $t=0$ بسته شود، ولتاژهای v_A ، v_B ، v_C و i_{AC} و i_{BC} را برای $t>0$ پیدا کنید.

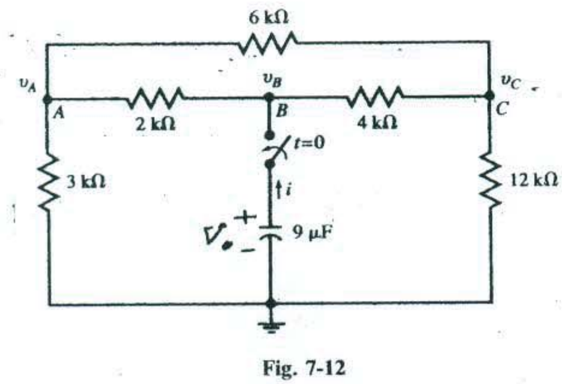


Fig. 7-12

$$
\begin{cases}
\text{A گره} & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)v_A-\frac{1}{2}v_B-\frac{1}{6}v_C=0\\
\text{B گره} & -\frac{1}{2}v_A+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)v_B-10^{-3}i-\frac{1}{4}v_C=0\\
\text{C گره} & -\frac{1}{6}v_A-\frac{1}{4}v_B+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)v_C=0
\end{cases}
$$

از حل معادلات فوق خواهیم داشت :

$$v_A=\frac{7}{3}(10^3)i$$

$$v_B=\frac{34}{9}(10^3)i$$

$$v_C=\frac{8}{3}(10^3)i$$

مقاومت معادلی که بوسیله خازن دیده می‌شود برابر است با :

$$R=\frac{v_B}{i}=\frac{34}{9}\ K\Omega$$

ثابت زمانی مدار برابر است با :

$$\tau=RC=\frac{34}{9}(10^3)(9\times10^{-6})=0.034\ \text{sec.}$$

ولتاژها و جریان‌ها بصورت زیر خواهند بود .

$$v_B=V_0e^{-t/\tau}=17e^{-1000t/34},\ V$$

$$i=-C\frac{dv_B}{dt}=\left(+C\frac{V_0}{\tau}e^{-t/\tau}\right)=4.5\times10^{-3}e^{-1000t/34},(A)$$

$$v_A=\frac{7}{3}(10^3)i=10.5e^{-1000t/34},\ V$$

$$v_C=\frac{8}{3}(10^3)i=12e^{-1000t/34},\ V$$

$$i_{AC}=-0.25e^{-1000t/34}\ (mA)\qquad i_{BC}=1.25e^{-1000t/34}\ (mA)$$

- راه دیگر برای حل مسئله قبل (محاسبه v_B و غیره)

شکل اصلی را به تدریج به شکلهای (b) و (c) تبدیل می‌کنیم. در شکل (c)، مقاومتهای R_a، R_b و R_c بصورت زیر از تبدیل $Y \to \Delta$ محاسبه شده‌اند.

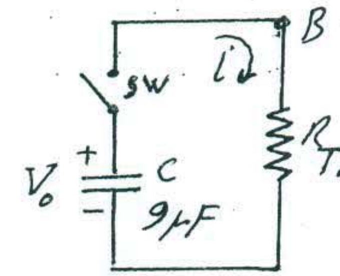
$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} = \frac{36}{3} = 12\ K$$

$$R_b = \frac{36}{R_2} = 18\ K \quad , \quad R_c = \frac{36}{R_1} = 6\ K$$

و در شکل (c)، مقاومت معادل R_{Th} برابر است با:

$$R_{Th} = 6 \,\|\, (4\|12 + 18\|12) = \frac{34}{9}\ K\Omega$$

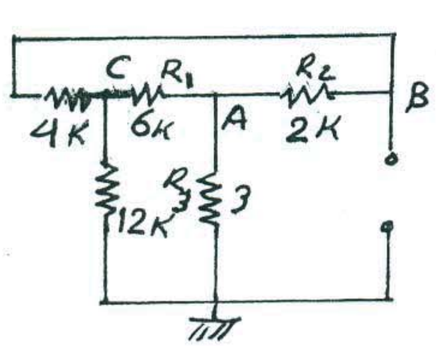
و ولتاژ نقطه B عبارتست از (با بسته شدن سوئیچ)



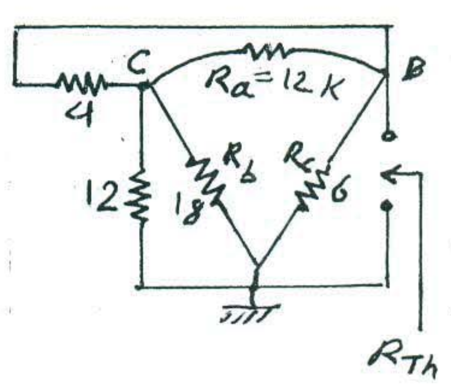
$$i(t) = \frac{17\,v}{34/9\ K\Omega}\, e^{-t/R_{Th}\cdot C}$$

$$i(t) = 4.5\, e^{-t/34} \quad (mA)$$

$$v_B(t) = R_{Th}\cdot i(t) = 17\, e^{-t/34} \quad (v)$$



(b)



(C)

خودالقا یا سلف یا پیچک (اندو)

- خودالقا یا سلف وسیله‌ای است که انرژی بصورت مغناطیسی در آن ذخیره می‌شود.
- وقتیکه جریان متغیری از سلف می‌گذرد، امکان ذخیره انرژی در سلف وجود دارد و وقتیکه سلف از منبع مربوطه قطع شود، انرژی ذخیره شده هم، برخلاف خازن، از دست می‌رود.

ولتاژ دو سر سلف، وقتیکه جریان متغیری از آن میگذرد بصورت زیر است:

$$v_L(t) = L\frac{di}{dt} \quad , \quad i = \frac{1}{L}\int v(t)\,dt$$

که در آن L ضریب سلف و دارای واحد:

$$L = \frac{\text{ولت} \times \text{ثانیه}}{\text{آمپر}} \equiv \text{هانری}$$

رابطه توان و انرژی در سلف بصورت زیر خلاصه می‌شود.

$$\text{توان}\ p = v_L i = L\frac{di}{dt}\cdot i = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}L i^2\right] \quad , \quad \text{وات}\ (W)$$

$$\text{انرژی}\ W_L = \int_{t_1}^{t_2} p\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L\,i\,di = \frac{1}{2}L\left[i_2^2 - i_1^2\right] \quad , \quad \text{ژول}\ (J)$$

و انرژی ذخیره شده در سلف در حالت کلی بصورت:

$$W_L = \frac{1}{2}L i^2 \quad \text{ژول}\ (J)$$

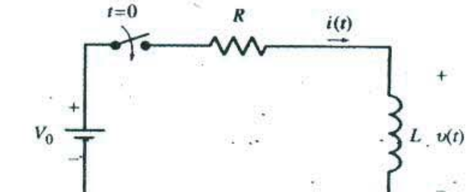
بدیهی است که انرژی W_L، تا زمانیکه $i \neq 0$ است، در سلف ذخیره می‌شود.

تمرین 2.2: از یک سلف به مقدار $L = 30\,mH$، جریانی با مقدار $i = 10 \sin 50t\ A$ در بازه زمانی $0 \leq t \leq \frac{\pi}{50}\ s$ می‌گذرد و در سایر زمانها $i = 0$ است. ولتاژ، توان، و انرژی سلف را تعیین کنید.

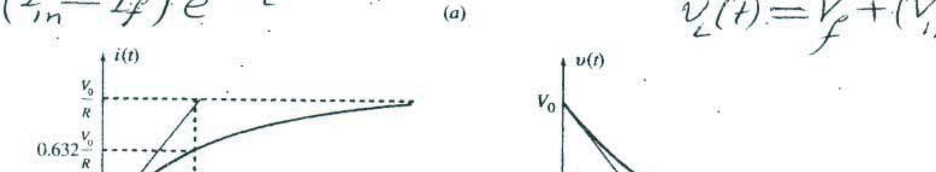
(back)

پدیده گذرا در مدار RL
(Transient effect)

چنانچه به یک مدار RL مطابق شکل زیر یک ولتاژ dc اعمال گردد جریان سلف ابتدا صفر بوده و سپس به تدریج با یک تابع نمائی بالا رفته و با ثابت زمانی L/R به مقدار $\frac{V}{R}$ میرسد. در اینجا نیز نظیر آنچه که در مورد مدار RC دیدیم KVL را در این مدار می‌نویسیم :



$i_L(t)=I_f+(I_{in}-I_f)e^{-t/\tau}$ (a) $v_L(t)=V_f+(V_{in}-V_f)e^{-t/\tau}$



$V=v_R+v_L$ $\quad v_R=Ri$, $\quad v_L=L\frac{di}{dt}$, $\quad i=\frac{1}{L}\int v_L\,dt$

$V=R\frac{1}{L}\int v_L\,dt+v_L$

$0=\frac{R}{L}v_L+\frac{dv_L}{dt} \rightarrow v_L(t)=A_1 e^{-t/\tau}+A_2$

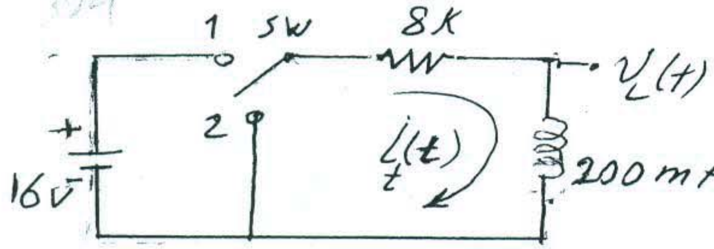
که با توجه به شرایط اولیه مدار ، A_1 و A_2 بصورت $\begin{cases}A_1=0\\A_2=V\end{cases}$

$v_L(t)=Ve^{-t/\tau}$, $\quad i(t)=\frac{V}{R}(1-e^{-t/\tau})$

نیز می‌توان $v_L(t)$ و $i(t)$ را از طریق فرمول عمومی که قبلاً دیدیم بدست آورد.

مثال ۲۷- در شکل زیر سوئیچ، در لحظه $t=0$ در حالت 1 قرار می‌گیرد و بعد از زمان $250\mu s$، به حالت 2 می‌رود و مجدداً بعد از $250\mu s$ به حالت 1 برمی‌گردد و این حالات متوالیاً تکرار می‌شود. شکل موج جریان و ولتاژ سلف را محاسبه و رسم کنید.

394



حل: چون ثابت زمانی:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{200mH}{8K} = 25\mu s$$

در هر دو حالت که حاکی از زمان توقف سوئیچ در حالات 1 و 2، جریان و ولتاژ سلف بصورت زیر خواهد بود: $0 < t \leq 250\mu s$

$$v_L(t) = 16e^{-t/25\times10^{-6}} \quad , \; V$$

$$i_L(t) = 2(1-e^{-t/25\times10^{-6}}) \quad mA$$

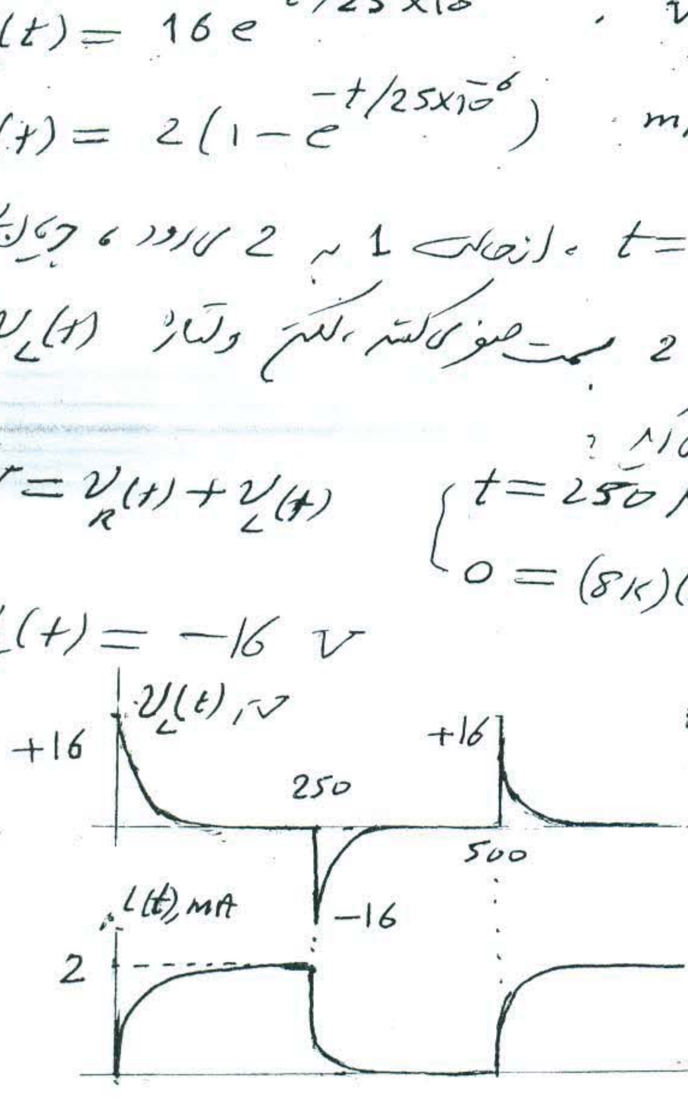
هنگامیکه سوئیچ در لحظه $t=10\tau=250\mu s$، از حالت 1 به 2 می‌رود، جریان سلف در همان جهت قبلی، از 2 mA بسمت صفر کاهش می‌یابد. لکن ولتاژ $v_L(t)$ از رابطه KVL زیر بدست می‌آید:

$$V = v_R(t) + v_L(t) \qquad \begin{cases} t=250\mu s \Rightarrow V=0 \\ 0=(8K)(2mA)+v_L(t) \end{cases}$$

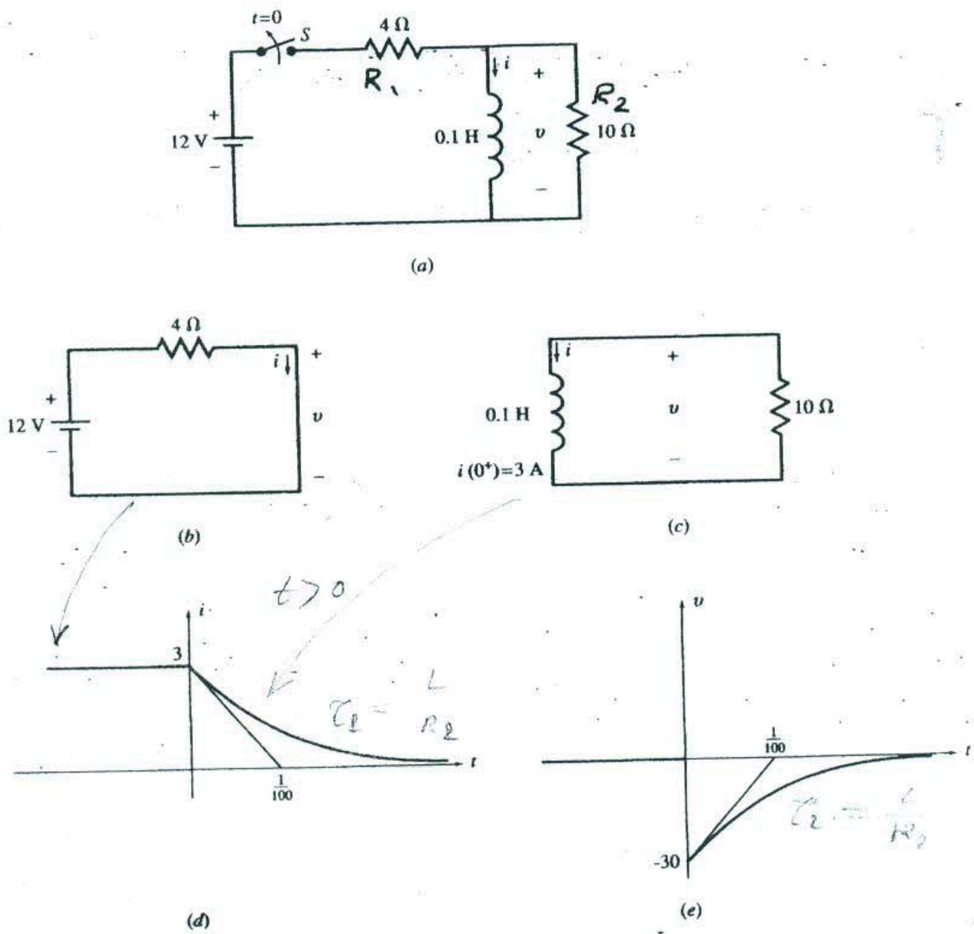
$$v_L(t) = -16 \; V$$

شکل موج بصورت زیر است:

395



مثال ۲۸ - در شکل (a)، سوئیچ S مدت طولانی بسته است و در لحظه $t = 0$ باز می‌شود، جریان و ولتاژ سلف را بیابید، و شکل آنها را برحسب زمان رسم نمائید.



حل: وقتیکه سوئیچ بسته است، داریم، (شکل b):

$$i(0^-) = \frac{12V}{4\Omega} = 3A$$

وقتیکه سوئیچ باز می‌شود $t = 0^+$، جریان از $3A$، در حال حاضر نشان داده شده به صفر می‌رسد. ثابت زمانی مدار برابر است با، شکل (c):

$$\tau = \frac{L}{R_2} = \frac{0.1H}{10\Omega} = 0.01 \text{ sec.}$$

در این ترتیب جریان و ولتاژ برابر است با:

$$i(t) = 3e^{-100t} \quad , A \quad \text{شکل (d)}$$

$$v(t) = L\, di/dt = -30e^{-100t} \quad V \quad \text{شکل (e)}$$

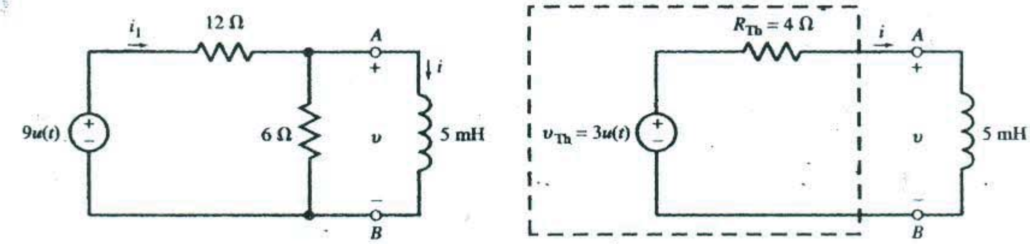
مثال ۲۹: در شکل زیر، i ، v و i_1 را محاسبه کنید.

حل: با توجه به شکل (b) تونن داریم: $R_{Th}=4\,\Omega$ و $v_{Th}=3\,V$ ،

$$I_{fin}=\frac{v_{Th}}{R_{Th}}=\frac{3}{4}=0.75\,A \quad , \quad \tau=\frac{L}{R_{Th}}=1.25\,ms$$

$$I_{in}=0 \quad , \quad i(t)=I_f+(I_i-I_f)\,e^{-t/\tau}$$

$$i=0.75(1-e^{-800t})\,(A) \quad , \quad v(t)=3e^{-800t}\,(V) \quad , \quad i_1=\frac{1}{4}(3-e^{-800t})\,(A)$$



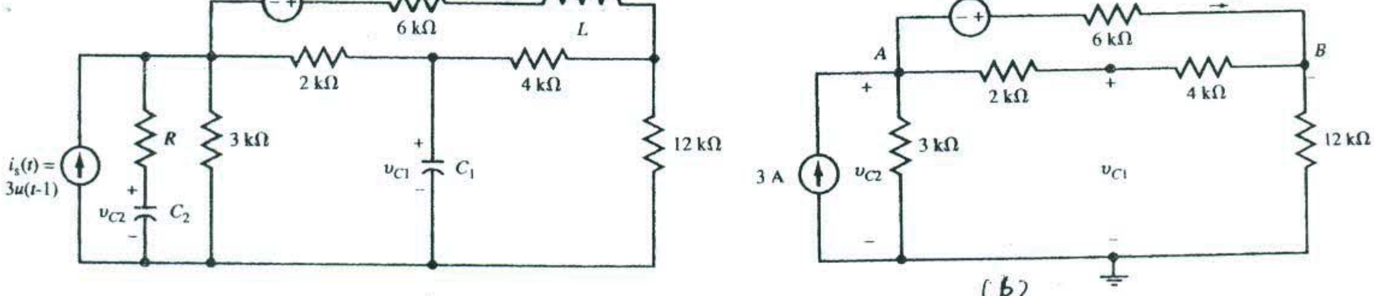
(a) (b)

مثال ۳۰: مقادیر حالت پایدار (steady-state)، i_L ، v_{C1} و v_{C2} در شکل زیر را محاسبه کنید.

حل: ابتدا مدار مربوط به حالت پایدار (مدار در $t=\infty$) را مطابق شکل b رسم می‌کنیم.
در این شکل برای گره‌های A و B، رابطه KCL را می‌نویسیم

گره A $\quad \dfrac{v_A}{3}+\dfrac{v_A-v_B}{6}+\dfrac{v_A+18-v_B}{6}=3 \rightarrow 2v_A-v_B=0$

گره B $\quad \dfrac{v_B}{12}+\dfrac{v_B-v_A}{6}+\dfrac{v_B-18-v_A}{6}=0 \rightarrow -4v_A+5v_B=36$



(a) (b)

و به این ترتیب : $v_{C_2}=6V$ ، $v_{C_1}=8V$ ، $i_L=2\,mA$ ، $V_B=12V$ ، $V_A=6V$

مثال ۳۱ - در شکل زیر، جریان i خازن و ولتاژ دو سر آن چقدر است؟

حل: با ترسیم شکل:

$i(0^-)=0$ ، $v(t=\infty)=-2V$

و ثابت زمانی با توجه به اینکه نظیر این مسئله را قبلاً حل کرده ام (ص ۳۷ و ۳۸) خواهد شد، برابر با:

$\tau=0.034\ s$

$$v=-2\left(1-e^{-1000t/34}\right)\ V$$

$$i=C\frac{dv}{dt}=-\frac{(9\times10^{-6})(2\times10^{3})}{34}\,e^{-1000t/34}$$

$$i=-0.53\,e^{-1000t/34}\quad(mA)$$

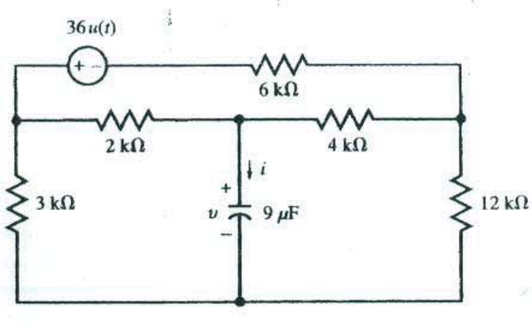


Fig. 7-14

مثال ۲۴ - در شکل زیر، جریان i و ولتاژ v را اگر سوئیچ در $t=0$ بسته شود محاسبه کنید. و شکل موج آنها را رسم کنید.

حل: با روش تقسیم جریان نوشت:

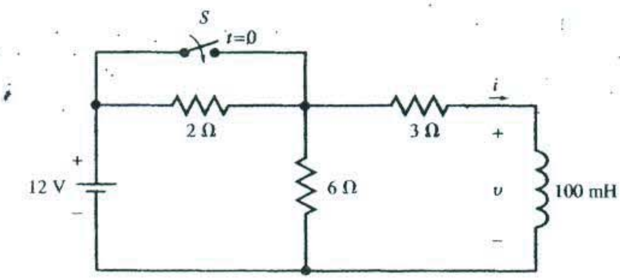
$$\overset{\text{سوئیچ باز}}{i(0^-)} = \frac{6}{6+3} \cdot \frac{12\,V}{2+6\parallel 3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{4} = 2\,A \equiv i(0^+)$$

و وقتیکه SW بسته باشد در $t \geq 0^+$، را می‌توان نوشت:

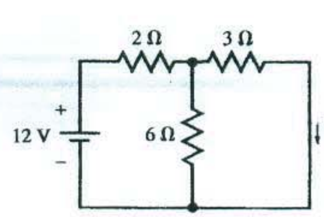
$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{30}\,s \quad , \quad i(\infty) = \frac{12}{3} = 4\,A$$

برای $t<0,\ i = 2A,\ v = 0$

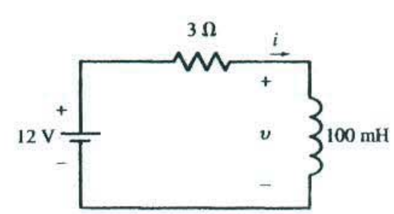
$t>0 \quad i = 4 - 2e^{-30t}\ (A) \quad , \quad v = L\frac{di}{dt} = 6e^{-30t}\ (V)$



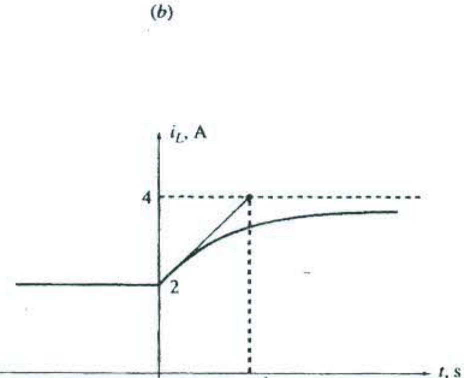
(a)



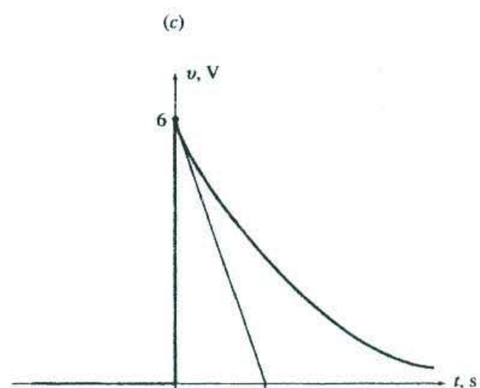
(b)



(c)

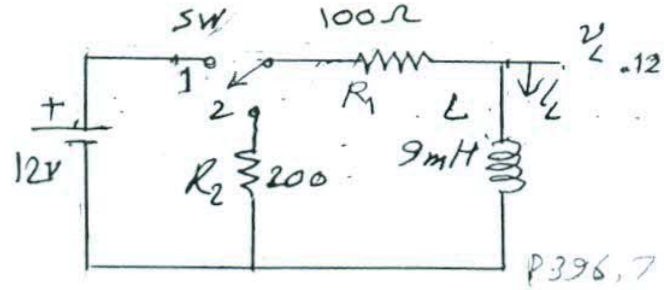


(d)

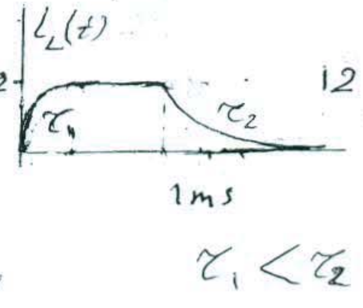


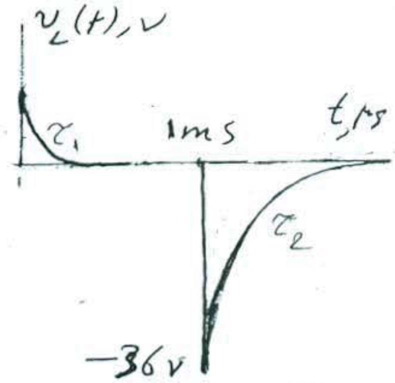
(e)

مثال ۳۴: در شکل زیر، در $t=0$، سوئیچ ابتدا در حالت 1 قرار گرفته و بعد از 1ms توقف دارد و پس به حالت 2 رفته و پس از 1ms به حالت 1 برمی‌گردد. $i_L(t)$ و $v_L(t)$ را محاسبه و رسم کنید.



P396,7





حل:

$$t=0^+ \quad SW \to 1 \,,\quad \tau_1 = \frac{L}{R_1} = \frac{9mH}{100\Omega} = 90\,\mu s \ll 1\,ms$$

$$i_L(t) = I_f + (I_{in} - I_f)e^{-t/\tau_1} = \frac{12}{R_1} + \left(0 - \frac{12}{R_1}\right)e^{-t/\tau_1}$$

$$i_L(t) = 0.12\left(1 - e^{-t/90\mu s}\right) \quad A$$

$$v_L(t) = L\frac{di}{dt} = 12\,e^{-t/90\mu s} \quad v$$

حال بعد از 1ms سوئیچ به حالت 2 را داریم:

$$t \geq 1\,ms \quad SW \to 2 \qquad \tau_2 = \frac{L}{R_1+R_2} = \frac{9mH}{300\Omega} = 30\,\mu s$$

$$i_L(t) = I_f + (I_i - I_f)e^{-(t-10^{-3})/\tau_2} = 0 + (0.12 - 0)e^{-(t-10^{-3})/\tau_2}$$

$$i_L(t) = 0.12\,e^{-(t-10^{-3})/3\times10^{-5}} \quad A$$

برای تعیین $v_L(t)$، با نوشتن KVL در حلقه مشتمل بر R_2، R_1 و L داریم:

$$\begin{cases} 0 = (R_1+R_2)i_L(t) + v_L(t) \,, \\ t \geq 1ms \,,\quad i_L(1ms) = i_{R_1} = \frac{12v}{100\Omega} = 0.12\,A \end{cases}$$

$$0 = 300\times0.12 + v_L(t) \longrightarrow \underset{t \geq 1ms}{v_L(t)} = -36\,v$$

$$v_L(t) = -36\,e^{-(t-10^{-3})/3\times10^{-3}}$$

در بازه برای $t > 1ms$

مثال ۴۴ - در شکل زیر، جریان i_1 و i_2 را وقتیکه سوئیچ بسته می‌گردد محاسبه کنید.

حل: راه اول: KVL ها را در دو حلقه می‌نویسیم.

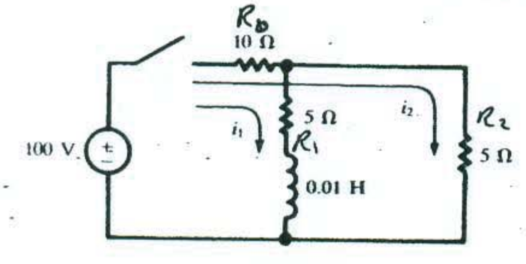


Fig. 7-32

$$100 = 10(i_1+i_2) + 5i_1 + 0.01\frac{di_1}{dt}$$

$$100 = 10(i_1+i_2) + 5i_2$$

با حذف i_2 در دو معادله فوق:

$$\frac{di_1}{dt} + 833\, i_1 = 3333 \quad , \quad i_1(t) = A_1 e^{-t/\tau} + A_2$$

$$\begin{cases} i_1(t) = A_2 \, , \; A_2 = \dfrac{5}{5+5} \cdot \dfrac{100}{10+5\|5} & \rightarrow \quad A_2 = 4\ A \\ t = \infty & \rightarrow \quad A_1 = -4\ A \end{cases}$$

$$i_1(0^+) = A_1 + A_2 = 0$$

$$i_1(t) = 4(1 - e^{-833t})\ (A) \, , \quad i_2(t) = 4 + 2.67 e^{-833t}\ (A)$$

راه دوم: وقتیکه SW بسته می‌شود، مقاومت معادل را از دو سر سلف بدست می‌آوریم!

$$R_{eq} = 5 + \frac{5(10)}{15} = 8.33\ \Omega \quad , \quad \tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{0.01}{8.33}\ \text{sec.}$$

$$\frac{1}{\tau} = 833\ s^{-1}$$

بقیه راه حل ساده و به دانشجویان واگذار می‌گردد.

شبیه سازی یک سیستم مکانیکی (Simulation)

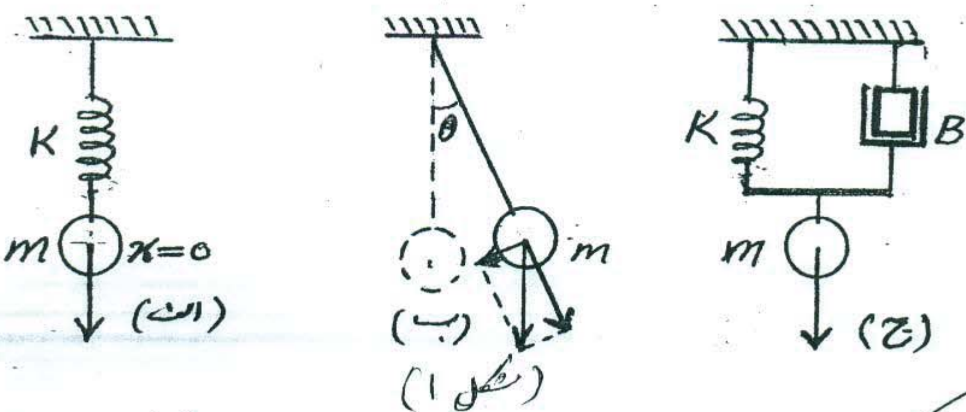
بطور کلی امروزه برای حل مسائل مختلف در رشته های علوم و مهندسی (نظیر مکانیک، هوا فضا، کشتی سازی، شیمی، ترمودینامیک، و غیره)، استفاده از کامپیوتر امری عادی می باشد تا در کمترین زمان ممکن، و با بیشترین دقت به پاسخ مطلوب برسیم. از آنجا که کلیه محاسبات کامپیوتری براساس داده های (Data) صورت می گیرد که برحسب ولتاژ، جریان، یا توابعی از این دو، بیان شده باشند، لذا برای حل مسئله در هر سیستم علوم و مهندسی، ابتدا بایستی این سیستم ها، بصورت یک سیستم «الکتریکی یا الکترونیکی» «شبیه سازی» شوند تا کلیه داده های آن سیستم ها (نظیر سرعت، شتاب، جرم، دما، و غیره)، بصورت داده هائی در سیستم الکتریکی یا الکترونیکی، **معادل سازی** شوند.

در این بخش، تنها بعضی از سیستم های ساده مکانیکی را که رفتار آنها براساس معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم (2-nd order linear differential equa.) بیان می شوند، بطور بسیار خلاصه، شبیه سازی می گردند. لکن از حل کامپیوتری آنها، که از بحث ما خارج است، صرفنظر می کنیم.

سیستم های مکانیکی ساده

شکلهای زیر تعدادی از سیستم های مکانیکی ساده را نشان میدهد که با آنها کاملاً آشنا هستیم.

شکل (الف) را در نظر بگیریم و فرض کنیم که هیچ نوع اصطکاک و یا مقاومت هوا وجود نداشته باشد. حال چنانچه جرم m را به اندازه x از حالت تعادل خود پائین کشیده و رها کنیم، جرم m شروع به نوسان نموده و چون هیچ نوع نیروی بازدارنده ای وجود ندارد، وزنه m به حرکت نوسانی خود بدون وقفه ادامه خواهد داد (اصل ماند). با آنچه که در فیزیک دیده ایم، معادله حرکت نوسانی جرم m بصورت زیر بدست می آید:



(شکل ۱)

با فرض اینکه K ضریب ثابت فنر، و F نیروی بازدارنده فنر (که جهت آن همواره مخالف جهت جابجائی وزنه است) داریم:

$$F = -Kx \quad (۳۹)$$

و بنابه قانون دوم نیوتن:

$$F = ma \quad (۴۰)$$

$$(۳۹),(۴۰) \rightarrow \quad a = \frac{-K}{m} x \quad (۴۱)$$

و لکن چون می‌دانیم شتاب برابر است با: $\frac{d^2x}{dt^2}$ لذا:

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{K}{m}x \qquad (۴۲)$$

بنابراین تابع x که تابعی از زمان است، $x=f(t)$، بایستی طوری باشد که مشتق دوم آن نسبت به زمان، متناسب با x با علامت منفی باشد. با آنچه که در درس ریاضی آموخته‌ایم، تابع سینوسی چنین ویژگی را دارا است. بنابراین می‌توان x را در ساده‌ترین صورت خود بصورت زیر نشان داد.

$$x=A\sin(\omega t+\varphi_0) \qquad (۴۳)$$

که در آن A نیز هم دامنه، ω فرکانس زاویه‌ای و φ_0 فاز اولیه حرکت در لحظه $t=0$ است. (مشخص برای سادگی اگر $\varphi_0=0$ فرض) از طرفی مشتق اول و دوم داریم:

$$\frac{dx}{dt}=\omega A\cos(\omega t+\varphi_0) \qquad (۴۴)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2A\sin(\omega t+\varphi_0)=-\omega^2x \qquad (۴۵)$$

با مقایسه این رابطه با (۴۲) داریم:

$$\omega^2=\frac{K}{m}\rightarrow\omega=\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad (۴۶)$$

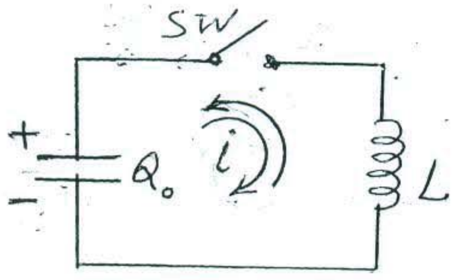
این رابطه نشان می‌دهد که جرم m، با فرکانس زاویه‌ای ω نوسان خواهد کرد که اندازه ω^2 بستگی به جرم وزنه و نوع فنر دارد.

حال برگردیم به مدار بسیار ساده LC که در شکل (۲) نشان داده شده است.

$\omega^2=\frac{1}{LC}=\frac{1}{L}\times\frac{1}{C}$

$\frac{1}{m}\times K$

فرض کنید هیچ نوع اتلاف انرژی در مدار وجود نداشته باشد و خازن C دارای بار اولیه $Q_0 = CV_0$ باشد، با بسته شدن سوئیچ SW در لحظه $t=0$ ، خواهیم داشت :



شکل (۳)

$$v_C + v_L = 0$$

$$\frac{1}{C}\int i\,dt + L\frac{di}{dt} = 0$$

با گرفتن مشتق از طرفین داریم :

$$\frac{1}{C} i + L\frac{d^2 i}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{-1}{LC}\, i \qquad (۴۷)$$

این رابطه دقیقاً شبیه رابطه (۴۵) است، لذا:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \quad , \quad i = I_m \sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (۴۸)$$

به این ترتیب مشخص شد که می‌توان سیستم فنر-وزنه را با مدار الکتریکی LC «شبیه سازی» نمود. با توجه به مقایسه روابط (۴۶) و (۴۸)، نتیجه می‌گردد ضریب سلف L، و ظرفیت C در سیستم الکتریکی به ترتیب «معادل» جرم m، و ثابت $\frac{1}{K}$ در سیستم مکانیکی است.

بدیهی است که عملاً سیستمی که بدون اتلاف انرژی باشد، وجود ندارد از این رو شکل (ج) صفحه ۴۹ را در نظر بگیریم. این سیستم شامل یک فنر با ثابت K، موازی با یک وسیله میراکننده با ضریب ثابت B (عنصر تلف کننده انرژی) قرار داده شده و وزنه m به آن آویزان است.

چنانچه جرم m را به اندازه x از حالت تعادل خود به پائین کشیده و رها کنیم، وزنه به حالت اولیه خود برمی‌گردد که نحوه برگشت از سه حالت زیر خارج نیست: (شکل ۳)

(الف) وزنه به کندی به حالت اولیه برمی‌گردد که به حالت overdamped موسوم است. (منحنی ۱)

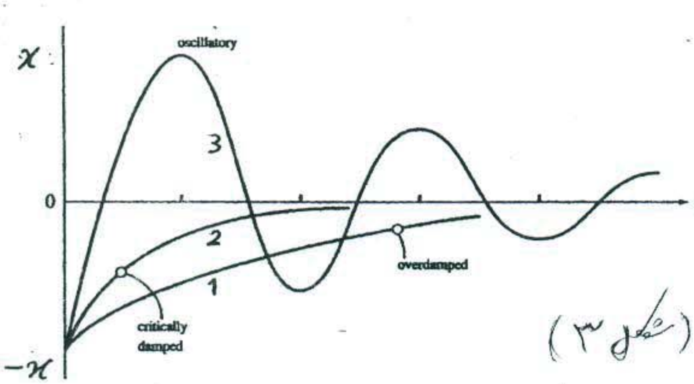
(ب) وزنه با سرعت بیشتر به وضع اول برمی‌گردد که به حالت Critically damped موسوم است (منحنی 2)

(ج) وزنه پس از نوساناتی به وضع اول برمی‌گردد که به حالت Oscillatory damped موسوم است (منحنی 3)

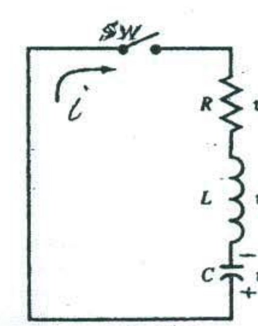
به سادگی میتوان نشان داد که واکنش سیستم مکانیکی مذکور، شبیه واکنش یک مدار RLC است که در شکل زیر نشان داده شده است.

با فرض اینکه خازن C قبلاً شارژ شده باشد، با بسته شدن سوئیچ در لحظه $t=0$ داریم:

$$v_R + v_L + v_C = 0$$
$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0 \qquad (۴۹)$$



(شکل ۳)



(شکل ۸)

با گرفتن مشتق از رابطه (۴۹) و تقسیم نمودن بر L خواهیم داشت:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\,i = 0 \qquad (۵۰)$$

جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت فوق را میتوان بصورت زیر درنظر گرفت.

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \qquad (۵۱)$$

با گرفتن مشتق اول و دوم از رابطه (۵۱) و گذاشتن آنها در معادله (۵۰) خواهیم داشت:

$$A_1 e^{s_1 t}\left(s_1^2 + \frac{R}{L}s_1 + \frac{1}{LC}\right) + A_2 e^{s_2 t}\left(s_2^2 + \frac{R}{L}s_2 + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

بنابراین میتوان s_1 و s_2 را دو ریشه معادله زیر دانست که به «معادله مشخصه» موسوم است

$$s^2 + (R/L)s + (1/LC) = 0, \qquad (۵۲)$$

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \equiv -\alpha + \beta \qquad s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \equiv -\alpha - \beta$$

که در آن:

$$\alpha \equiv R/2L,\ \beta \equiv \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},\ \text{and}\ \omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}.$$

برحسب اینکه $\alpha > \omega_0$ ، $\alpha = \omega_0$ و $\alpha < \omega_0$ باشد، سه حالت خواهیم داشت:

۱- **Overdamped Case** ($\alpha > \omega_0$)

دراینصورت α و β دو عدد حقیقی مثبت بوده و s_1 و s_2 دو ریشه حقیقی خواهند بود و جواب معادله دیفرانسیل (۵۰) بصورت زیر خواهد بود

$$i = A_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + A_2 e^{(-\alpha-\beta)t} = e^{-\alpha t}(A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}) \qquad (۵۳)$$

مثال 1

در مدار RLC شکل (۳A)، $R = 200\,\Omega$, $L = 0.10$ H, and $C = 13.33\,\mu$F, و خازن دارای بار اولیه $Q_0 = 2.67 \times 10^{-3}$ C. میباشد. چنانچه سوئیچ در $t = 0$ بسته شود، جریان $i(t)$ چیست؟

حل: برای این مدار داریم:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 10^3\,\mathrm{s}^{-1}, \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 7.5 \times 10^5\,\mathrm{s}^{-2}, \qquad \text{and} \qquad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 500\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$i = e^{-1000t}(A_1 e^{500t} + A_2 e^{-500t})$$

$$-\alpha+\beta = S_1 = -1000+500 = -500$$

$$-\alpha-\beta = S_2 = -1000-500 = 1500$$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$$

$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = Q_0/C = \frac{2.66\times10^{-3}}{13.33\,\mu F} = \pm 200V$$

$$i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \to i(0) = 0 = A_1 + A_2$$

$$\frac{di}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \qquad \frac{di}{dt}\Big|_{0^+} = A_1 s_1 + A_2 s_2$$

$$R(0^+) + L\frac{di}{dt}\Big|_{0^+} + v_c(0^+) = 0$$

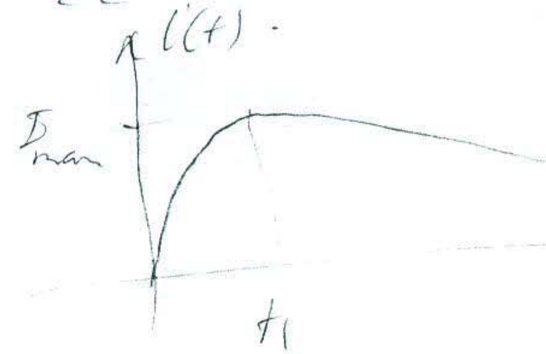
$$\frac{di}{dt}\Big|_{0^+} = \frac{-v_c(0^+)}{L} = \frac{\pm 200V}{0.1H} = \pm 2000\ \frac{A}{s}$$

$$\to \pm 2000 = -500A_1 - 1500A_2$$

$$\begin{cases} 500A_1 + 1500A_2 = \mp 2000 \\ A_1 + A_2 = 0 \end{cases} \to \begin{matrix} A_1 = 2 \\ A_2 = -2 \end{matrix}$$

از ترمش

$$i(t) = 2e^{-500t} - 2e^{-1500t}$$



Overdamped

ثابت‌های A_1 و A_2 از روابط اولیه تعیین می‌شوند. می‌دانیم جریان اولیه سلف برابر صفر و ولتاژ اولیه خازن بصورت زیر هستند:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$$

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = Q_0/C = 2.67\times10^{-3}C/13.33\mu F = \pm 200V$$

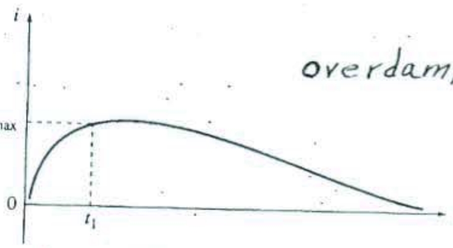
(علامت + یا − بستگی به ولتاژ خازن دارد، در اینجا با توجه به جهت جریان در شکل A، ولتاژ خازن را $+200V$ در نظر گرفته‌ایم). با بکارگیری این شرایط اولیه و با اندکی عملیات از رابطه (۴۹) داریم:

$$R i(0^+) + L\frac{di}{dt}\Big|_{0^+} + v_C(0^+) = 0 \rightarrow \frac{di}{dt}\Big|_{0^+} = +2000 \text{ A/se}$$

$$i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \qquad 0 = A_1 + A_2 \quad \text{and} \quad \pm 2000 = -500A_1 - 1500A_2 \Rightarrow A_1 = 2A,\ A_2 = -2A$$

و معادله جریان بصورت زیر خواهد بود. شکل (۴) منحنی جریان را نشان می‌دهد.

$$i = 2e^{-500t} - 2e^{-1500t} \quad \text{(A)}$$



overdamped

شکل (۴)

∴ بدیهی است که ریشه‌های معادله مشخصه (۵۲) برابرند با: $s_1 = -1500\ s_e^{-1}$ و $s_2 = -500\ s_e^{-1}$.

Critically Damped Case ($\alpha = \omega_0$) − ۲

در اینصورت معادله دیفرانسیل (۵۰) بصورت:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \alpha^2 i = 0$$

درآمده و حل آن بصورت زیر خواهد بود.

$$i = e^{-\alpha t}(A_1 + A_2 t).$$

مثال ۲

مثال ۱ را وقتیکه $C = 10\mu F$ باشد، تکرار کنید (در اینصورت $\alpha = \omega_0 = 10^3\ s^{-1}$)

حل: نظیر مثال ۱، شرایط اولیه برای تعیین مقادیر ثابت‌ها بکار می‌رود، چون $i(0^-) = i(0^+)$، $0 = [A_1 + A_2(0)]$ and $A_1 = 0$. بنابراین:

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(A_2 t e^{-\alpha t}) = A_2(-\alpha t e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t})$$

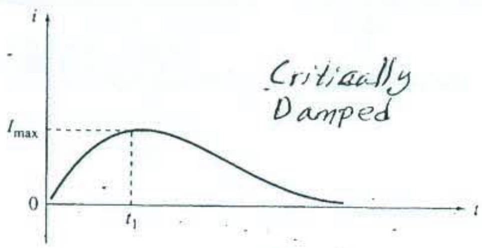
که از آن:

و در نتیجه:

$$i = \pm 2000 t e^{-10^3 t} \quad \text{(A)}$$

[شکل (۵) را ببینید]

شکلهای (۴) و (۵) نشان میدهند که پاسخ مدار در حالت Overdamped و Critically damped



شکل (۵)

گرچه بسیار شبیه هم هستند، لکن به دانشجویان توصیه میشود که این دو پاسخ را برای t در مختلف با یکدیگر مقایسه کنند. برای مثال، میتوان زمانی را که در آن جریان i در هریک از دو حالت به 1 mA و 1 μA میرسد، محاسبه و با یکدیگر مقایسه نمود.

Underdamped or Oscillatory Case ($\alpha < \omega_0$) - ۳

هنگامیکه $\omega_0 > \alpha$ است، ریشه‌های معادله مشخصه (۵۲) اعداد مختلط و بصورت: $s_1 = \alpha + j\beta$ and $s_2 = \alpha - j\beta$, هستند که $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

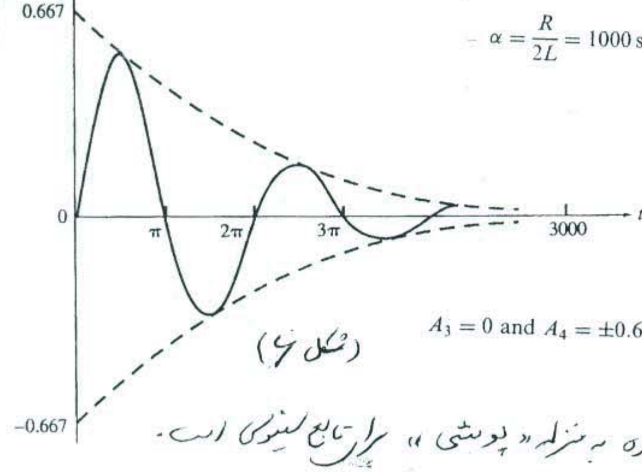
حل معادله را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$i = e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\beta t} + A_2 e^{-j\beta t}) \quad \rightarrow \quad i = e^{-\alpha t}(A_3 \cos \beta t + A_4 \sin \beta t)$$

مثال ۳ -

مثال ۱ را برای $C = 1\ \mu F$ تکرار کنید.

حل - نظیر قبل:



(شکل ۶)

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 1000\ s^{-1} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 10^7\ s^{-2} \qquad \beta = \sqrt{10^7 - 10^6} = 3000\ \text{rad/s}$$

$$i = e^{-1000t}(A_3 \cos 3000t + A_4 \sin 3000t)$$

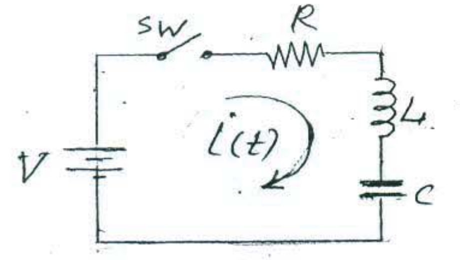
ثابت‌های A_3 و A_4 نظیر قبل، از شرایط اولیه بدست می‌آیند: $i(0^+) = 0$ and $v_c(0^+) = 200$ V.

$A_3 = 0$ and $A_4 = \pm 0.667$.

$$i = \pm 0.667 e^{-1000t}(\sin 3000t) \quad \text{(A)}$$

تابع $\pm 0.667 e^{-1000t}$ که بصورت خط‌چین در شکل نشان داده شده به منزله «پوشش» برای تابع سینوسی است.

۳۶
مثال - در مدار RLC ، در شکل زیر، خازن بی‌شارژ در $t=0$ سوئیچ بسته می‌شود، جریان $i(t)$ را محاسبه کنید و شکل آنرا رسم نمائید. در چه زمانی این جریان به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد؟



$V = 50\,V$
$R = 3\,K\Omega$
$C = 200\,\mu F$
$L = 10\,H$

حل: داریم:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 150\ s^{-1}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 500\ s^{-2}$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 148.3\ s^{-1}$$

و چون $\omega_0 < \alpha$ است، مدار در حالت Overdamped بوده، و ریشه‌های معادله مشخصه (که قبلاً مطالعه شد) بصورت زیر است:

$$S_1 = -\alpha + \beta = -1.7\ s^{-1}$$

$$S_2 = -\alpha - \beta = -298.3\ s^{-1}$$

و جواب $i(t)$

$$i(t) = e^{-\alpha t}\left(A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}\right) = A_1 e^{-1.7t} + A_2 e^{-298.3t}$$

که A_1 و A_2 از شرایط اولیه مدار بدست می‌آیند

$$i(0^+) = i(0^-) = 0 \quad , \quad v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0$$

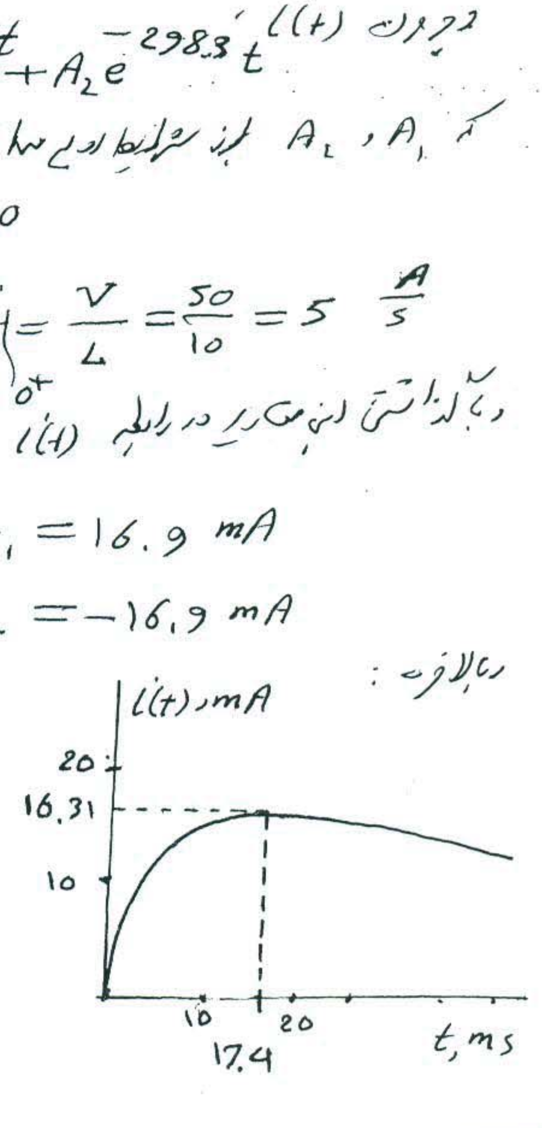
$$\underline{KVL} \quad V = Ri\big|_{0^+} + L\frac{di}{dt}\Big|_{0^+} + v_c\big|_{0^+} \Rightarrow \frac{di}{dt}\Big|_{0^+} = \frac{V}{L} = \frac{50}{10} = 5\ \frac{A}{s}$$

و با گذاشتن این مقادیر در رابطه $i(t)$ داریم:

$$\begin{cases} 0 = A_1(1) + A_2(1) \\ 5 = -1.7A_1(1) - 298.3A_2(1) \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} A_1 = 16.9\ mA \\ A_2 = -16.9\ mA \end{array}$$

و بالاخره:

$$i(t) = 16.9\left(e^{-1.7t} - e^{-298.3t}\right)$$



$$\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow -28.73e^{-1.7t} + 5041e^{-298.3t}$$

$$\frac{e^{-1.7t}}{e^{-298.3t}} = \frac{5041}{28.73} \rightarrow t = 17.4\ ms$$

مثال ۴۷ - در مدار قبلی (مثال ۴۶)، چنانچه $V=100\,v$ ، $R=50\,\Omega$ ،
$L=0.1\,H$ و $C=50\,\mu F$ بوده و کلید در $t=0$ بسته شود، جریان $i(t)$
را محاسبه و رسم کنید و اولین ماکزیمم آنرا محاسبه کنید:

حل:
$$\alpha=\frac{R}{2L}=250\ s^{-1}\ ,\ \omega_0^2=\frac{1}{LC}=2\times10^{5}\ s^{-2}$$

$$\beta=\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=\ j370.8\ (rad/s)$$

چون $\omega_0>\alpha$ است، مدار در حالت oscillatory damped قرار دارد
طبق آنچه که قبلاً دیده ایم، جواب مدار $i(t)$ بصورت زیر است:

$$i(t)=e^{-\alpha t}\left(A_1\cos|\beta|t+A_2\sin|\beta|t\right)$$

$$i(t)=e^{-250t}\left(A_1\cos 370.8t+A_2\sin 370.8t\right)$$

نظیر مثال قبل، شرایط اولیه داریم:

$$i(0^+)=0\ ,\ \frac{di}{dt}\Big|_{0^+}=1000\ (A/s)$$

در این ترتیب با گذاشتن این مقادیر در رابطه $i(t)$:

$$A_1=0\ ,\ A_2=2.7\ (A)$$

$$i(t)=e^{-250t}\left(2.7\sin 370.8\,t\right)\quad (A)$$

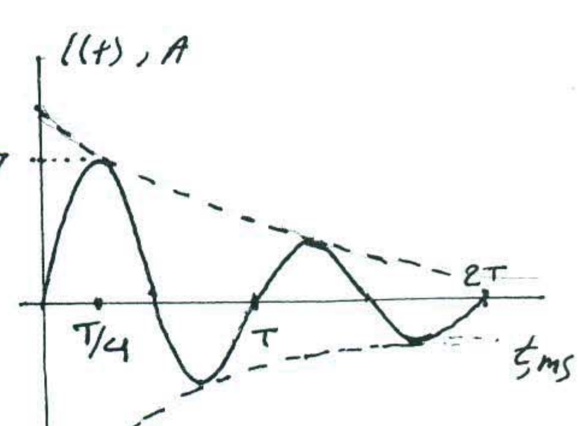
و اولین ماکزیمم برابر است با:

$$\sin|\beta|t=1=\sin\frac{\pi}{2}$$

$$|\beta|t=\frac{\pi}{2}$$

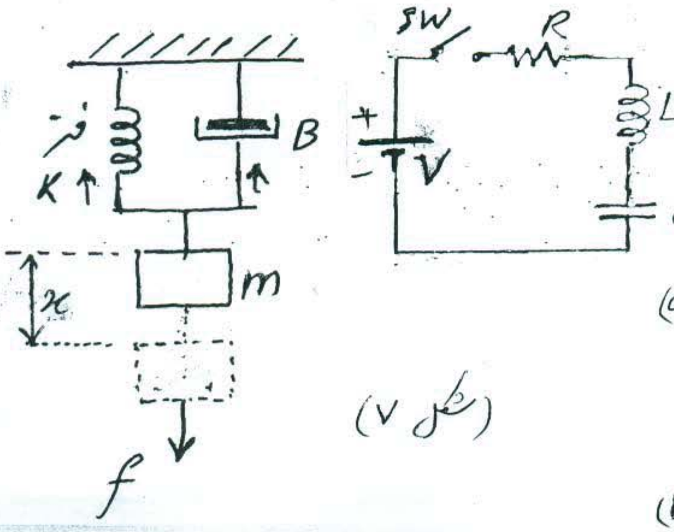
$$t=\frac{\pi}{2|\beta|}=\frac{3.14}{2\times370.8}$$

$$t=4.236\ ms\equiv\frac{T}{4}$$



معادل سازی اجزای الکتریکی و اجزای مکانیکی

حال برگردیم به سیستم مکانیکی مرتبه دوم ساده شکل (ج) . (صفحه ۳۰۹) ، که در شکل زیر نشان داده شده و معادل الکتریکی آن نیز رسم شده است . سیستم مکانیکی شامل یک فنر با ضریب K ، بصورت موازی با دستگاه میراکننده (که اصطلاحاً کمک فنر می‌نامند) با ضریب ثابت B قرار داشته و وزنه‌ای به جرم m آویزان شده است . جرم m را به اندازه x پائین آورده و رها می‌کنیم . داریم :



(شکل ۷)

$$\Sigma F = ma$$

$$f - Kx - B\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$(a)\quad f = m\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Kx$$

از روابط در مدار RLC مشابه است :

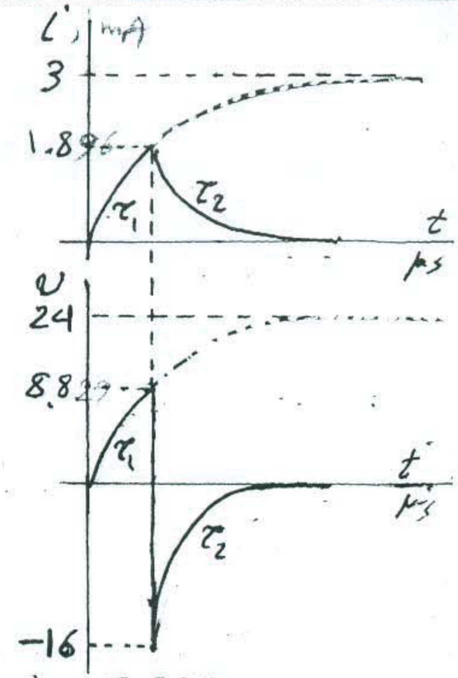
$$(b)\quad V = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q$$

معادلات دیفرانسیل (a) و (b) ، کاملاً مشابه و هم ارز یکدیگر هستند و فرایند آنها با توجه به جدول زیر با یکدیگر مشابه هستند.

	نیرو	جرم	ضریب میرائی	ضریب فنر	فاصله	سرعت
سیستم مکانیکی	f	m	B	K	x	v
سیستم الکتریکی	V	L	R	$\frac{1}{C}$	q	i
	ولتاژ	ضریب سلف	مقاومت	عکس ظرفیت	بار	جریان

(جدول ۳)

بدین ترتیب براحتی می‌توان هر سیستم مکانیکی را ، با سیستم الکتریکی شبیه سازی نمود.



Exercise (11.20)

(a)

$$i_1(t) = I_{f_1} + (I_{i_1} - I_{f_1}) e^{-t/\tau_1}$$

$$I_{f_1} = \frac{24V}{8K} = 3 \ mA$$

$$I_{i_1} = 0 \quad , \quad \tau_1 = \frac{L}{R_1} = \frac{16\ mH}{8K} = 2\ \mu s$$

$$i_1(t) = 3(1 - e^{-t/2\mu s}) \ , mA$$

$$v_{L_1}(t) = 24 e^{-t/2\mu s} \quad V \quad , \quad v_{L_1}(t = 2\mu s) = 8.829 \ , V$$

(b) $i_2(t) = I_{f_2} + (I_{in_2} - I_{f_2}) e^{-(t-t')\tau_2}$ sw at 2, after $\Delta t = 2\mu s$

$I_{f_2} = 0 \quad , \quad t' = 2\ \mu s \equiv 1\tau_1$ $e^{-1} = 0.3678$

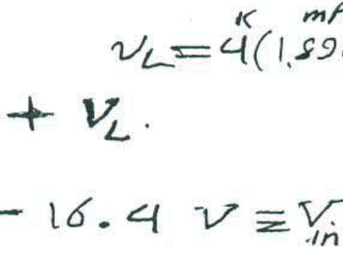
$1 - e^{-1} = 0.632$

$I_{in_2} = ? \quad , \quad \tau_2 = \frac{L}{R_2} = \frac{16mH}{4K} = 4\ \mu s$

$$I_{in_2} = i_1(t = t' = 2\mu s) = 3(1 - e^{-2/2}) = 1.896\ mA$$

$$i_2(t) = 0 + (1.896 - 0) e^{-(t-t')/\tau_2} \quad t > t' = 2\mu s$$

$$i_2(t) = 1.896\ e^{-(t-t')/4\mu s} \ , mA$$



$$v_{L_2}(t) = V_{f_2} + (V_{in_2} - V_{f_2}) e^{-(t-t')/\tau_2}$$

$V_{f_2} = 0 \ , \ V_{in_2} = ?$

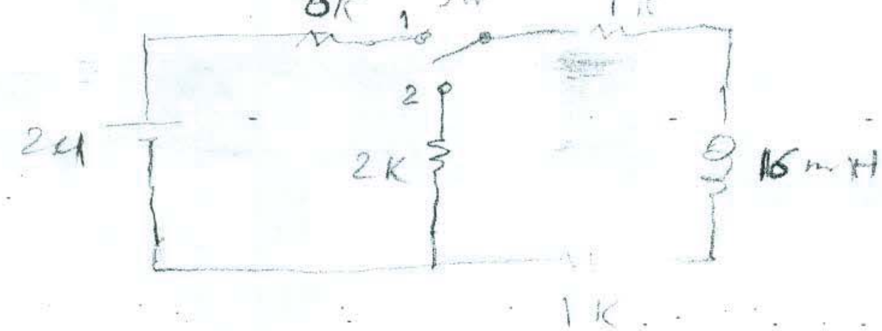
$v_L = \overset{K}{4}(\overset{mA}{1.896}) + v_L$

$$KVL \rightarrow 0 = (4K)(I_{in_2}) + v_{L_1}(t = t') + v_L$$

$$0 = \overset{K}{4} \times \overset{mA}{1.896} + \overset{v}{8.829} + v_L \rightarrow v_L = -16.4\ V \equiv V_{in_2}$$

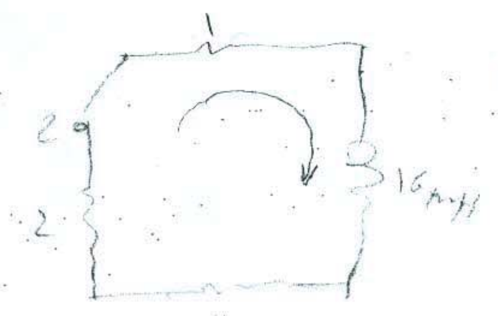
$$v_{L_2}(t) = -16.4\ e^{-(t-t')/4\mu s} \quad t' \geq 4\ \mu s$$

, V



a) $t = \emptyset$ Sw at 1 $\rightarrow$ $v_L(t) =$ 0
$i_L(t) =$

After
b) $\Delta t = 2.$ sw at 1 $\rightarrow$ at 2 $v_L(t) = 0$
$i_L(t) = 0$



$i(2\mu s) = 1.896$ mA

$V_L(t) = -4(1.896)$
$V_L(t\ 2\mu) = -7.584$

$$0.12 \times \frac{10^6}{90} \times 9 \times 10^{-3} = 12$$

$$0.12 \times \frac{1}{90 \times 10^{-6}} \times 9 =$$

$$9 \times 10^{-3} \times \frac{1.2}{90 \times 10^{-6}} = 120$$

Exercise (9.40)

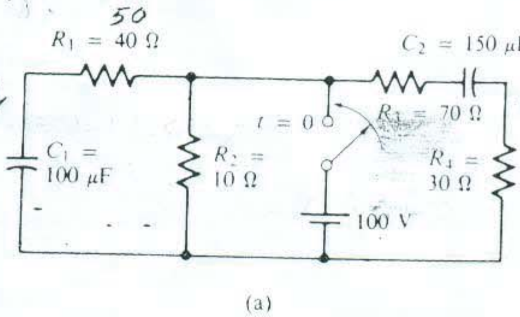


FIGURE 9.62 (Exercise 9.40)

- در شکل فوق SW در لحظه $t = 0$ بسته می‌گردد، i_1 و i_2 را محاسبه کنید.

$$\tau_1 = R_1 C_1 = \overset{50\Omega}{\cancel{(40)}}(100\mu F)$$

$$= 4\ ms \rightarrow 5\ ms$$

$$\tau_2 = (R_3 + R_4)\,C_2 = \overset{\Omega}{(100)}\overset{\mu F}{(150)}$$

$$= 15\ ms$$

$$i_1 = \frac{100}{\underset{50}{\cancel{40}}} e^{-t/\tau_1} = \overset{2}{\cancel{2.5}}\, e^{-t/\overset{5}{\cancel{4}}ms}\ , A$$

$$i_2 = \frac{100}{R_3 + R_4} e^{-t/\tau_2} = 1\, e^{-t/15ms}\ , A$$

به نظر شما چه جریانی از منبع ولتاژ ۱۰۰ ولتی، پس از $\underbrace{\tau_1 + \tau_2}^{=20ms}$ می‌گذرد؟

$$i_1(20ms) + i_2(20ms) = 0.0134 + 0.363 = 0.3764\ A$$

مسئله 7-14 : در شکل زیر، S_1 در لحظه $t = 0$ بسته می‌گردد و S_2، 4 ms بعد باز می‌گردد. جریان i را برای $t > 0$ محاسبه و رسم کنید.

$$4 > t \geq 0\ ,\quad \begin{cases} I_f = 100/50 = 2A \\ I_{in} = 0\ , \tau = \dfrac{0.1}{50} = 2ms \end{cases}$$

$$i = 2(1 - e^{-t/2})$$

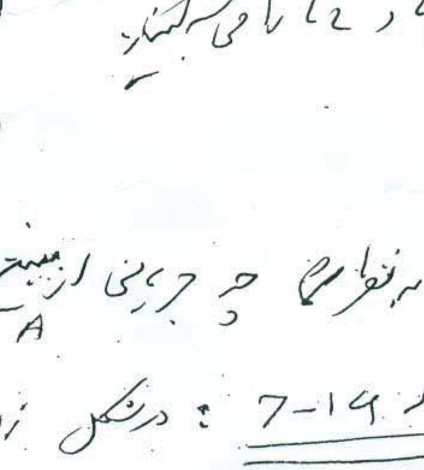
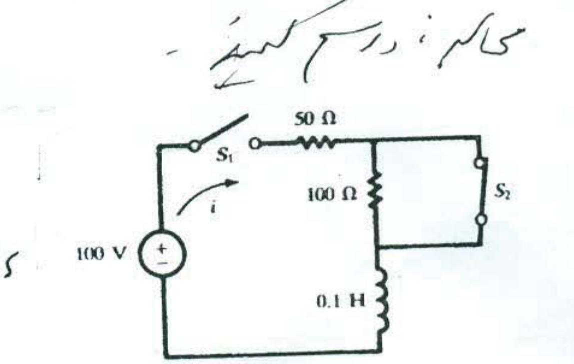


Fig. 7-28

$$i(4ms) = 2(1 - e^{-2}) = 1.729\ A$$

$$t \geq 4ms\ ,\quad I_f = \frac{100}{150} = 0.667\ A$$

$$, I_{in} = 1.729\ ,$$



$$\tau = \frac{100}{150} = \frac{2}{3}\ ms$$

$t \geq 4$

$$i = (1.729 - 0.667)\, e^{-(t-4)/(\frac{2}{3})} + 0.667 = 428.4\, e^{-3t/2} + 0.667$$