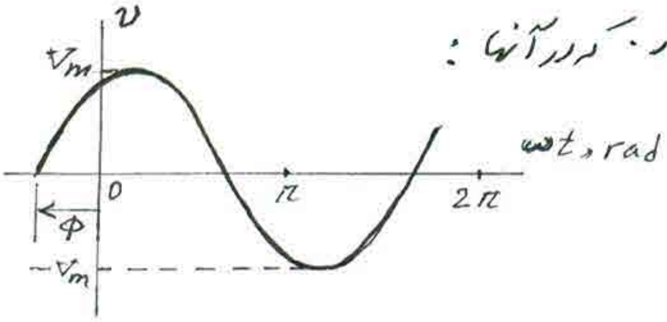
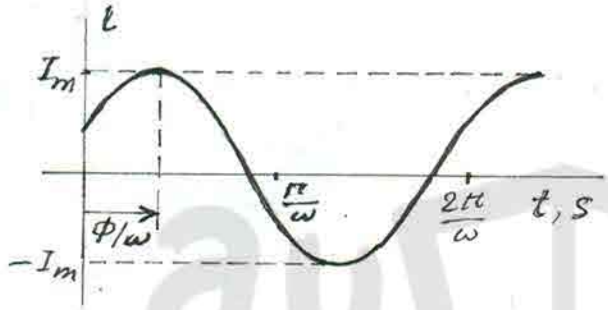
تحلیل مدارها برای منابع سینوسی - پاسخ پایدار steady-state response

در این فصل، پاسخ پایدار مدارها را که بوسیله یک مرجع (ولتاژ یا جریان) تحریک می‌شوند، مطالعه می‌کنیم.

شکل مقابل چنین موج‌هایی را نشان می‌دهند. که در آنها:



$$v = V_m \sin(\omega t + \phi)$$
یا
$$v = V_m \cos(\omega t + \phi - 90^\circ)$$

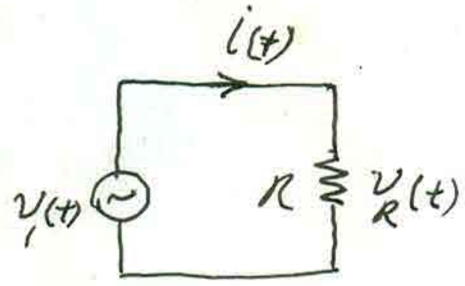


$$i = I_m \cos(\omega t - \phi)$$
$$i = I_m \sin(\omega t - \phi + 90^\circ)$$

که در آن ωt برحسب $\frac{rad}{s}$ و ϕ برحسب درجه می‌باشد. دیگر فرکانس سیگنال سینوسی بصورت $f = \frac{1}{T}$ (Hz) خواهد بود.

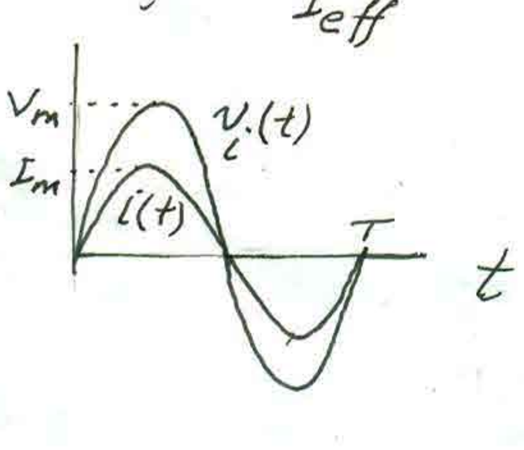
پاسخ اجزاء مختلف مدار

۱- پاسخ مقاومت



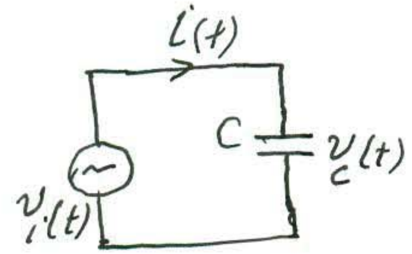
$$v_i(t) = V_m \sin\omega t$$
$$i(t) = \frac{v_i(t)}{R} = \frac{V_m}{R}\sin\omega t = I_m \sin\omega t$$

که در آن مقاومت: $R = \frac{V_m}{I_m}$ را می‌توان بصورت $R = \frac{V_{eff}}{I_{eff}}$ نیز نوشت.



همانطوریکه دیده می‌شود، جریان حاصله $i(t)$، (پاسخ مقاومت) با ولتاژ ورودی $v_i(t)$، هم فاز می‌باشند.

۲- پاسخ خازن C



$$v_i(t) = V_m \sin \omega t \equiv v_c(t)$$

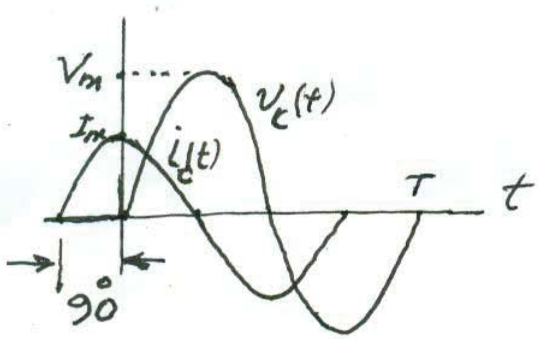
$$i(t) = C\frac{dv}{dt} = \omega C V_m \cos \omega t$$

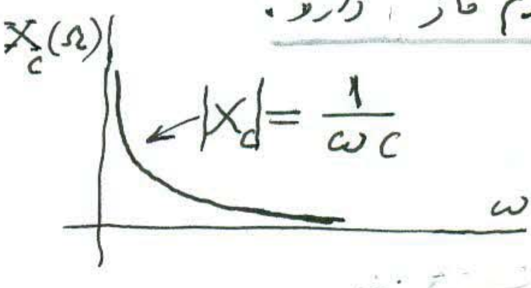
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

که در آن $I_m = \omega C V_m$ بوده و $|X_c| = \frac{1}{\omega C} = \frac{V_m}{I_m}$ را راکتانس خازنی (Capacitive Reatance) می‌نامند. $|X_c|$ که بصورت نسبت ولتاژ به جریان ($\frac{ولتاژ}{جریان}$) است، دارای یکای مقاومت (Ω) است و بصورت زیر نیز نوشته می‌شود.

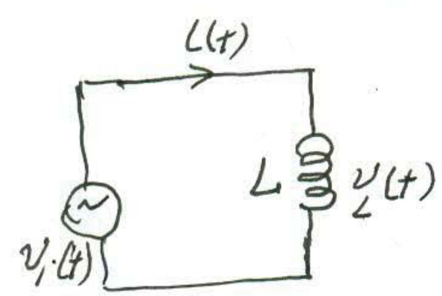
$$|X_c| = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_{eff}}{I_{eff}} \quad (\Omega)$$

∴ بطوریکه دیده شد، پاسخ خازن (جریان حاصله) با ولتاژ ورودی $v_i(t)$، اختلاف فاز $+90$ دارد. به عبارت دیگر جریان خازن به اندازه 90° نسبت به ولتاژ دو سر آن تقدم فاز دارد.





۳- پاسخ سلف L



$$v_i(t) = V_m \sin \omega t \equiv v_L(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int v_i(t)\, dt = \frac{-V_m}{\omega L}\cos \omega t$$

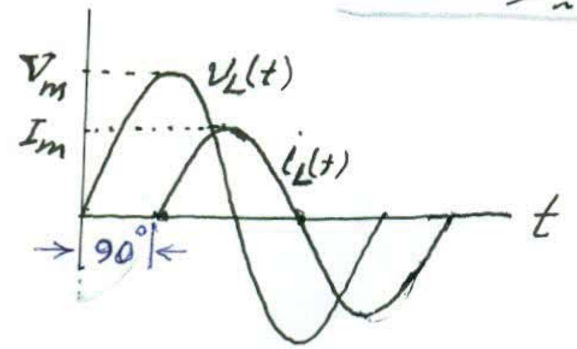
$$i(t) = I_m \sin(\omega t - 90^\circ)$$

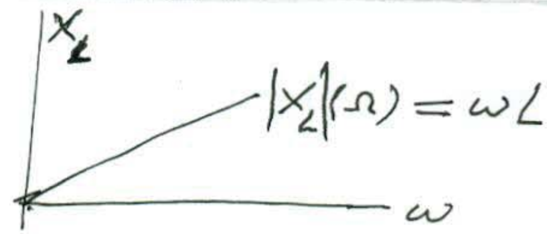
که در آن $I_m = \frac{V_m}{\omega L}$ بوده و $\omega L = \frac{V_m}{I_m}$ را $|X_L|$ نام

داده و به راکتانس سلفی (Inductive Reactance) موسوم است. $|X_L|$ دارای یکای مقاومت (Ω) بوده و مقدار آن را بصورت زیر نوشت:

$$|X_L| = \omega L = \frac{V_m}{I_m} \equiv \frac{V_{eff}}{I_{eff}} \quad (\Omega)$$

بطوریکه دیده می‌شود، پاسخ سلف (جریان حاصله $i_L(t)$) با ولتاژ ورودی دو سر آن یعنی $v_L(t)$، به اندازه 90° تاخیر فاز دارد.

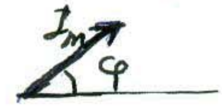
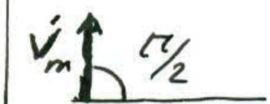




یادآوری بسیار مهم: با توجه به شکل موج‌ها، چه در خازن و چه در سلف، ولتاژ ماکزیمم V_m و جریان ماکزیمم I_m با هم اتفاق نمی‌افتند!

فازور Phasors: فازور عبارت از بیان یک کمیت سینوسی (یا کسینوسی) به فرم برداری (یا به فرم قطبی) است. اندازه بردار برابر با ماکزیمم دامنه کمیت سینوسی و زاویه این بردار با محور افقی مبین فاز کمیت سینوسی است. در فرم فازور فرکانس موج سینوسی لحاظ نمی‌شود. وقتیکه برای حل یک مسئله مدار، از فرم فازوری استفاده می‌شود فرض بر آنستکه فرکانس کمیت سینوسی تغییر نکرده و دارای یک فرکانس است.

با توجه به آنچه که قبلاً در ریاضیات (بخصوص اعداد مختلط) دیده‌ایم، بدیهی است که تعداد سینوسی را میتوان با استفاده از فرمول Euler، بصورت مختلط نیز نشان داد. از اینرو این مطلب از دانسته‌های قبلی ما محسوب شده و بحث پیرامون اعداد مختلط ضروری نیست.

کمیت (تابع) سینوسی	فرم فازور (قطبی)	بردار مربوطه
$v(t) = V_m \sin \omega t$	$V_m \angle 0°$	
$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$	$I_m \angle \varphi$	
$v'(t) = V'_m \cos \omega t$ $= V'_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$	$V'_m \angle \frac{\pi}{2}$	

مثال ۳۶- مجموع ولتاژهای v_1 و v_2 را بصورت قطبی و سپس بصورت سینوسی بنویسید.

$$\begin{cases} v_1 = 10 \sin \omega t = 10\angle 0 = 10(\cos 0 + j \sin 0) = 10(1+j0) \\ v_2 = 20 \cos(\omega t + 60°) = 20 \sin(\omega t + 150°) = 20 \angle 150° \end{cases}$$

$$v_1 + v_2 = 10\angle \qquad = 20(\cos 150 + j \sin 150)$$

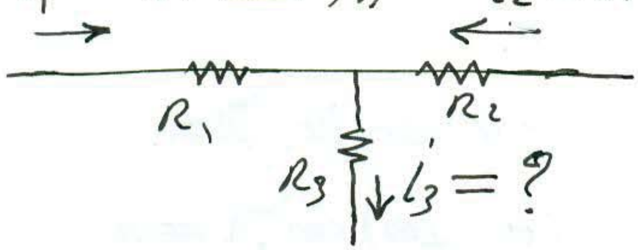
$$= 20\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)$$

$$v_1 + v_2 = 10(1 + j0) + 20\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = -7.3 + j10$$

$$v_1 + v_2 = 12.39 \angle 126.2 \equiv 12.39 \sin(\omega t + 126.2°)$$

مثال ۳۷- در شکل زیر جریان i_3 را بصورت قطبی و سپس بصورت سینوسی بنویسید.

$i_1 = 1.5\angle 30°, A \qquad i_2 = 0.4 \sin(300t - 45°), A$



$$i_1 = 1.5(\cos 30° + j \sin 30°) = 1.5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)$$

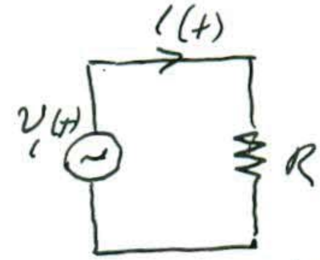
$$i_2 = 0.4\angle -45° = 0.4(\cos(-45) + j \sin(-45)) = 0.4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$i_3 = i_1 + i_2 = 1.58 + j0.467 = 1.649 \angle 16.45° \quad A$$

$$= 1.649 \sin(300t + 16.45°) \quad A$$

فرم فازوری اجزای مدار

الف - فرم فازوری مقاومت



$$v_i(t) = V_m \sin(\omega t+\theta)$$
$$i(t) = I_m \sin(\omega t+\theta)$$

$$R = \frac{V_m\angle\theta}{I_m\angle\theta} = \frac{V_m}{I_m}\angle 0\ \Omega = R\angle 0\ \Omega$$

محور موهومی j

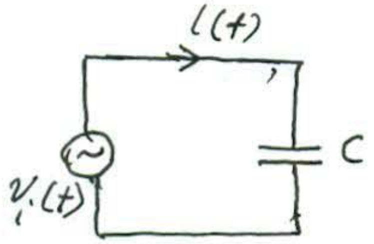
محور حقیقی R

مثال ۳۸: چنانچه $v_i(t)=3.9\sin(10t+50^\circ)$ باشد، جریان $i(t)$، در شکل بالا تعیین کنید (مقاومت مدار $2.2k\Omega$ است)

$v_i(t) = 3.9\angle 50^\circ$, V

$R = 2.2\times10^3\angle 0$, Ω ، $i(t) = \frac{3.9\angle 50}{2.2\times10^3\angle 0} = 1.77\angle 50^\circ$ mA

ب - فرم فازوری راکتانس خازنی

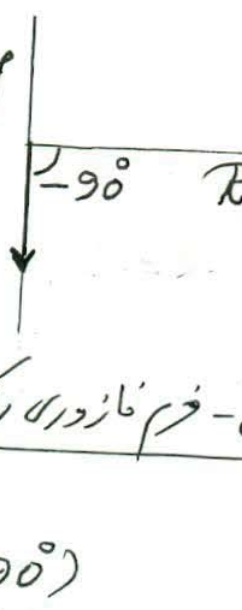


$$v_i(t) = V_m \sin(\omega t+\theta)$$
$$i(t) = I_m \sin(\omega t+\theta+90^\circ)$$

$$\frac{v_i(t)}{i(t)} = X_c = \frac{V_m\angle\theta}{I_m\angle\theta+90^\circ} = \frac{V_m}{I_m}\angle -90^\circ$$

$$X_c = |X_c|\angle -90^\circ = -j|X_c|\ (\Omega)$$

بطوریکه قبلاً دیده‌ایم : $|X_c| = \frac{1}{\omega C}$ است.

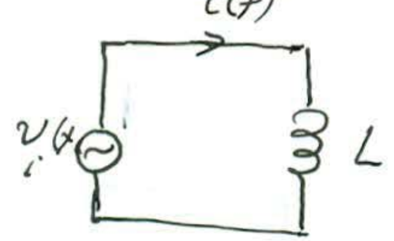


j

-90° محور حقیقی R

$-j|X_c|$

ج - فرم فازوری راکتانس سلفی

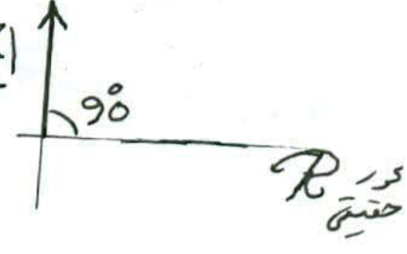


$$v(t) = V_m \sin(\omega t+\theta)$$
$$i(t) = I_m \sin(\omega t+\theta-90^\circ)$$

$$\frac{v(t)}{i(t)} = X_L = \frac{V_m\angle\theta}{I_m\angle\theta-90} = \frac{V_m}{I_m}\angle +90$$

$$X_L = |X_L|\angle +90 = j|X_L|\ (\Omega)$$

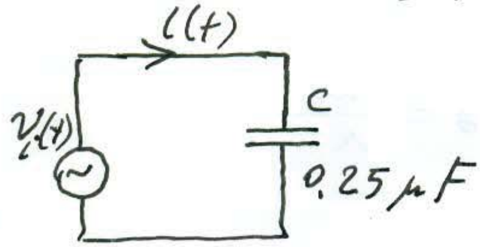
$j|X_L|$



90°

محور حقیقی R

مثال ۴۹) در شکل زیر، خازن دارای راکتانس $|X_c| = 200\,\Omega$ است. چنانچه ولتاژ ورودی بصورت $v(t) = 8\angle -70^\circ$ V باشد، جریان خازن و فرکانس آن را محاسبه و دیاگرام فازور جریان و ولتاژ را رسم کنید و آنها را بصورت سینوسی نیز بنویسید.

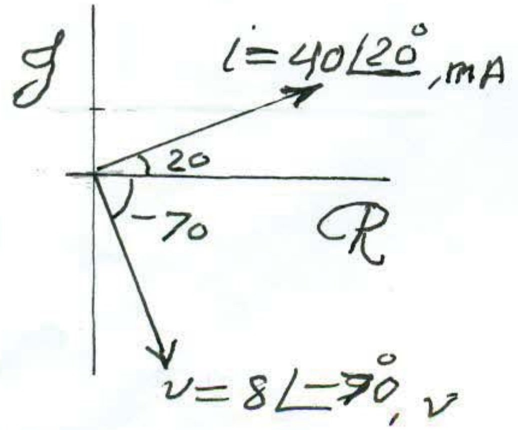


$$X_c = -j|X_c| = -j200 = 200\angle -90^\circ$$

$$X_c = \frac{v(t)}{i(t)}$$

$$i(t) = \frac{v(t)}{X_c} = \frac{8\angle -70^\circ}{200\angle -90^\circ} = 40\angle 20^\circ \ \text{mA}$$

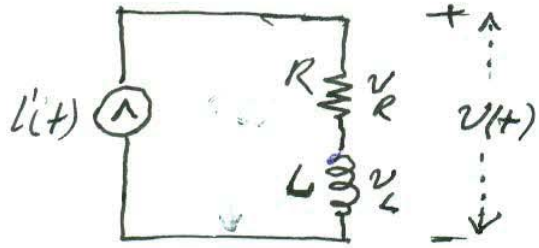
$$|X_c| = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega = \frac{1}{C|X_c|} = 2\times 10^4 \frac{\text{rad}}{s}$$



$$v(t) = 8\sin(2\times 10^4 t - 70), \ V$$

$$i(t) = 40\sin(2\times 10^4 t + 20), \ mA$$

مثال ۴۰- در شکل زیر، جریان $i(t)=I_m \sin \omega t$ به مدار RL اعمال می‌شود، ولتاژ دو سر مدار $v(t)$ را بر حسب زمان در نیز تا نیم داشته و فاز آنرا بر حسب فرکانس ω و اجزای مدار بنویسید:



حل:

$$v(t)=v_R+v_L$$

$$v_R=Ri=RI_m \sin \omega t$$

$$v_L=L\frac{di}{dt}=\omega L I_m \sin(\omega t+90^\circ)$$

$$(1)\quad v(t)=RI_m \sin \omega t+\omega L I_m \cos \omega t$$

رابطه اخیر را میتوان بصورت sine یا cosine نوشت؛ چون جریان بصورت sine است به نوعی

$$(2)\quad v(t)=V_m \sin(\omega t+\theta)=V_m \sin \omega t \cos\theta+V_m \cos \omega t \sin\theta$$

از مقایسه روابط (2) و (1) داریم:

$$V_m \cos\theta = R I_m$$

$$V_m \sin\theta = \omega L I_m$$

$$tg\,\theta=\omega L/R$$

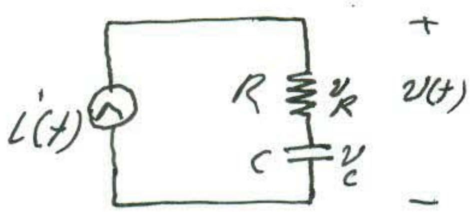
در این ترتیب، پاسخ مسئله عبارتست از:

$$\begin{cases} v(t)=V_m \sin(\omega t+\theta) \\ V_m=I_m\sqrt{R^2+(\omega L)^2} \\ \theta=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \end{cases}$$

∴ با توجه به اینکه جریان در مدار بصورت $i(t)=I_m \sin \omega t$ و ولتاژ دو سر آن بصورت $v(t)=V_m \sin(\omega t+\theta)$ است، لذا در مدار RL، جریان نسبت به ولتاژ به اندازه θ تأخیر فاز دارد.

مثال ۴۱

در مدار RC، چنانچه $i(t)=I_m \sin \omega t$ باشد، مثال قبلی را تکرار کنید.



حل: نظیر مثال قبل به راحتی میتوان نشان داد که:

$$v(t)=V_m \sin(\omega t-\theta)$$

$$V_m=I_m\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

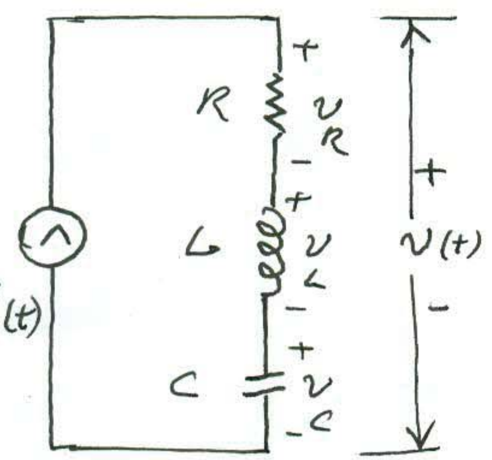
$$\theta=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\omega C R}\right)$$

مثال ۴۲- یک مدار سری دارای ولتاژ کلی $v(t)=50\cos(5000t+30^\circ)$ و جریان $i(t)=10\cos(5000t-23.13^\circ)$ A می‌باشد. اجزای مدار را تعیین کنید.

حل: چون جریان نسبت به ولتاژ تاخیر فاز دارد، لذا اجزای مدار عبارتند از R و L. داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{V_m}{I_m}=\sqrt{R^2+(\omega L)^2} \quad , \quad \dfrac{50}{10}=\sqrt{R^2+(5000L)^2} \\ \theta=\arctan\dfrac{\omega L}{R} \quad , \quad \tan 53.13^\circ=\dfrac{5000L}{R} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} R=3\,\Omega \\ L=0.8\ \text{mH} \end{array}$$

مثال ۴۳- مدار سری RLC:



در شکل مقابل سیگنال ورودی سینوسی بصورت $i(t)=I_m\sin\omega t$ است. ولتاژ $v(t)$ چقدر است؟

حل-

$$v_R=Ri(t)=RI_m\sin\omega t$$

$$v_L=L\frac{di}{dt}=\omega LI_m\cos\omega t$$

$$v_C=\frac{1}{C}\int i\,dt=\frac{-I_m}{\omega C}\cos\omega t$$

$$v(t)=v_R+v_L+v_C=RI_m\sin\omega t+\left(\omega LI_m-\frac{I_m}{\omega C}\right)\cos\omega t$$

با روشی که در مثال ۴۱ (صفحه ۷۰) دیده‌ایم، ولتاژ $v(t)$ را می‌توان بصورت یک تابع سینوسی کلی $v(t)=V_m\sin(\omega t+\theta)$ نوشت که با اندکی بررسی خواهیم داشت که داریم:

$$V_m=I_m\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad , \quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

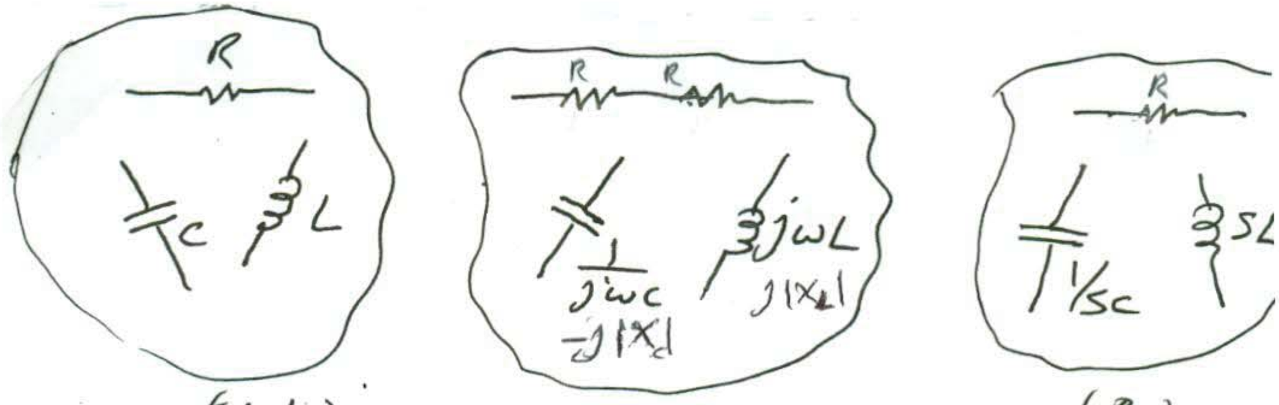
∴ اگر $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ باشد، چنانچه $\omega>\omega_0$ زاویه فاز مثبت و جریان نسبت به ولتاژ تاخیر فاز دارد. اگر $\omega<\omega_0$ باشد جریان نسبت به ولتاژ تقدم فاز دارد و اگر $\omega_0=\omega$ باشد، جریان و ولتاژ هم فاز هستند (چرا؟)

امپدانس Impedance

بطور کلی مدارهای عملی شامل ترکیبی از: مقاومت، خازن، سلف، وغیره هستند و دارای ولتاژ و جریان در حوزه زمان (time-domain) و یا دارای ولتاژ و جریان در حوزه فرکانس (frequency-domain) می‌باشند.

امپدانس عبارت است از نسبت فازور ولتاژ **V** به فازور جریان **I** و با **Z** نشان میدهند. این نسبت یعنی **Z** یک عدد مختلط بوده و برحسب Ω بیان می‌شود.

شکل (الف) مدار زیر مداری را در حوزه زمان و شکل (ب) همین مدار را در حوزه فرکانس ω و شکل (ج) همین مدار را در حوزه پارامتر $s=j\omega$ (s-plan) نشان میدهد.

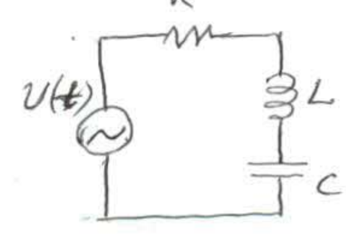


(الف) (ب) (ج)

نمایش امپدانس سری

مثال ۳-۳ — شکل زیر یک مدار سری RLC را نشان میدهد که با ولتاژ $v(t)=V_m \sin \omega t$ تحریک می‌شود. امپدانس مدار را در حوزه فرکانس نوشته و اندازه و زاویه آنرا برحسب اجزای R، L، و C مشخص نمایید.

$$\mathbf{Z}=|Z|\angle\varphi$$



(مدار در حوزه زمان)

داریم:

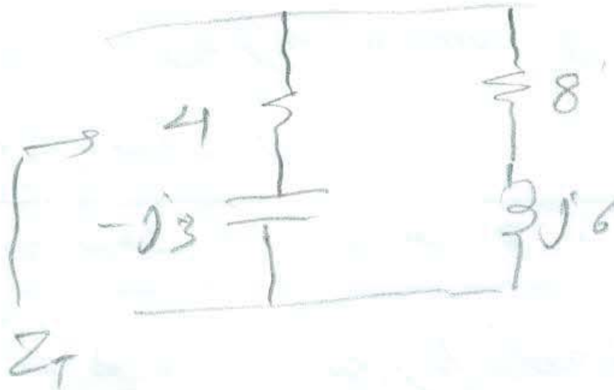
$$\mathbf{X}_L=j|X_L| \quad , \quad \mathbf{X}_C=-j|X_C|$$

$$\mathbf{Z}=R+j(|X_L|-|X_C|)=R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$$

$$|Z|=\sqrt{R^2+(|X_L|-|X_C|)^2}=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\angle\varphi=tg^{-1}\left(\frac{\omega L-1/\omega C}{R}\right)$$

س ٤٥ حل



$$Z_1 = 4 - j3 = 5 \angle \tan^{-1}\frac{3}{4} = 5 \angle 36.86$$

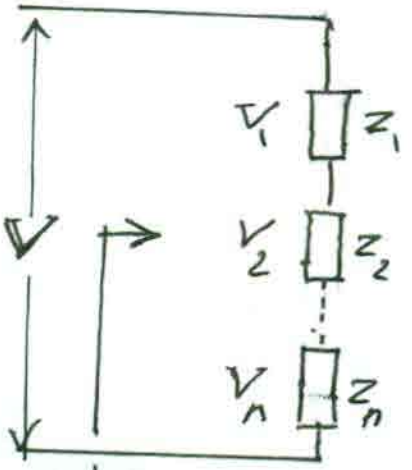
$$Z_2 = 8 + j6 = 10 \angle \tan^{-1}\frac{3}{4} = 10 \angle 36.5$$

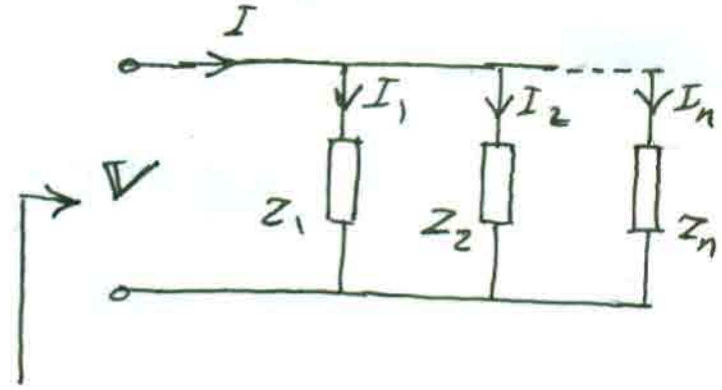
$$Z_T = Z_1 \parallel Z_2 = \frac{(\quad)(\quad)}{4 - j3 + 8 + j6}$$

$$= \frac{50 \angle 0}{12 + j3} = \frac{50 \angle 0}{12.36 \angle 14.03624}$$

$$Z_T = 4.045 \angle -14.03$$

مدارهای تقسیم ولتاژ و جریان





$$Z_T = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

$$V_k = \frac{Z_k}{Z_T} \cdot V$$

$$Z_T = Z_1 \| Z_2 \| \cdots \| Z_n$$

$$I = \frac{Z_2 \| Z_3 \| \cdots \| Z_n}{Z_1 + Z_2 \| Z_3 \| \cdots \| Z_n} \cdot I$$

$$Z = R + jX \ (\Omega) \qquad Y_T = \frac{1}{Z_T} = G + jB \ (\mho)$$

Impedance = Resistance + j reatance

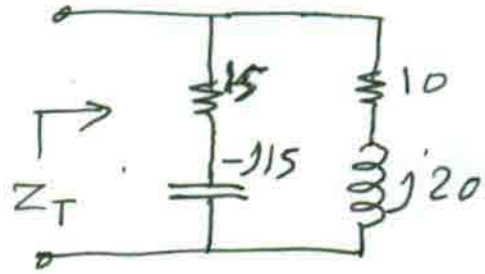
Admittance = Conductance + j susceptance

$$Z_T = |Z_T| \angle \theta$$

$$Y_T = |Y_T| \angle \varphi$$

$$Y_T = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

مثال ۴۵ امپدانس معادل و ادمیتانس معادل در شکل زیر را محاسبه کنید.



$$Z_1 = 15 - j15 = 21.2 \angle -45^\circ \ \Omega$$

$$Z_2 = 10 + j20 = 22.4 \angle 63.4^\circ \ \Omega$$

$$Z_T = Z_1 \| Z_2 = \frac{(21.2 \angle -45^\circ)(22.4 \angle 63.4^\circ)}{(15 - j15) + (10 + j20)}$$

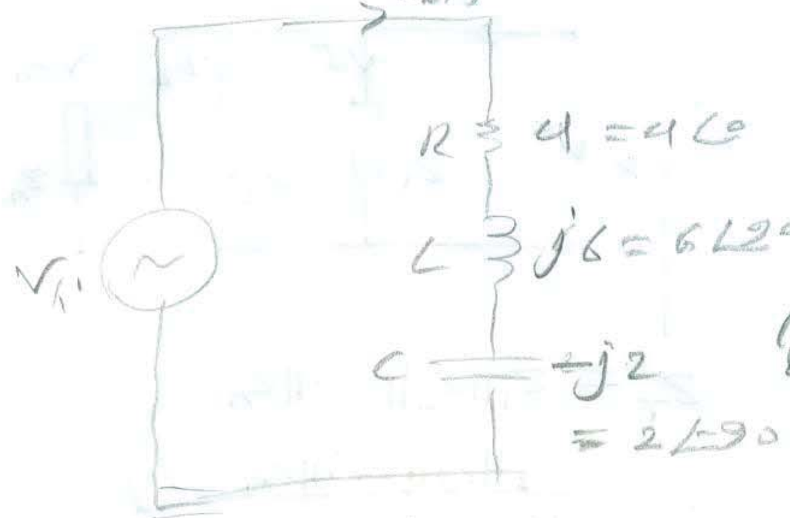
$$Z_T = 18.6 \angle 7.12^\circ \ (\Omega)$$

$$Y_T = \frac{1}{Z_T} = 0.054 \angle -7.12^\circ \ (\mho)$$

1.41

$v_i = 40\sqrt{2}\ \sin \omega t \rightleftharpoons 56$

$= 40\sqrt{2}\ (1+j)$



$Z_T = 4 + j(6-2)$

$= 4 + j4$

$= 4\sqrt{2}\ \angle 45^\circ$

$i(t) = \dfrac{v(t)}{Z_T} = \dfrac{40\sqrt{2}\angle 0}{4\sqrt{2}\angle 45}$

$I_m = 10\angle -45^\circ\ A$

$v_R = (4)(10\angle -45) = 40\angle -45^\circ = 40\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$v_L = X_L \cdot i = (6\angle 90)(10\angle -45) = 60\angle 45\ v$
$= 60\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$v_C = X_C\, i = (2\angle -90)(10\angle -45) = 20\angle -135^\circ\ v$
$= 20\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

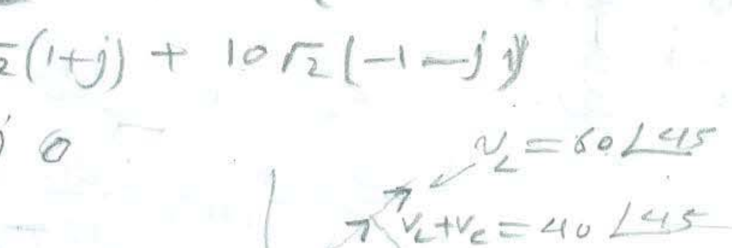
∴ ملاحظه میشود اندازه ولتاژ دو سر سلف بیشتر از ولتاژ منبع است

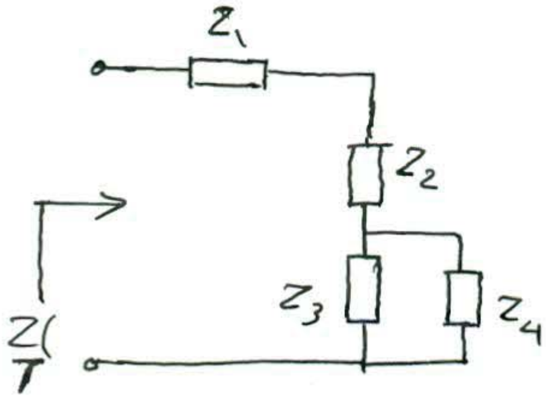
$\overset{v_L}{60V} > \overset{v_i}{40\sqrt{2}}$

$\quad v_R \quad + \quad v_L \quad + \quad v_C$

$20\sqrt{2}(1-j) + 30\sqrt{2}(1+j) + 10\sqrt{2}(-1-j)$

$40\sqrt{2} + j0$





نمایش فازوری امپدانس معادل

در شکل مقابل، امپدانس‌ها بصورت زیر هستند.

$$Z_1 = R_1\angle 0 = R_1 + j0$$

$$Z_2 = R_2 + jX_L$$

$$Z_3 = Z_4 = R_3 - jX_C$$

امپدانس معادل را محاسبه و بصورت قطبی (فازوری) نشان دهید.

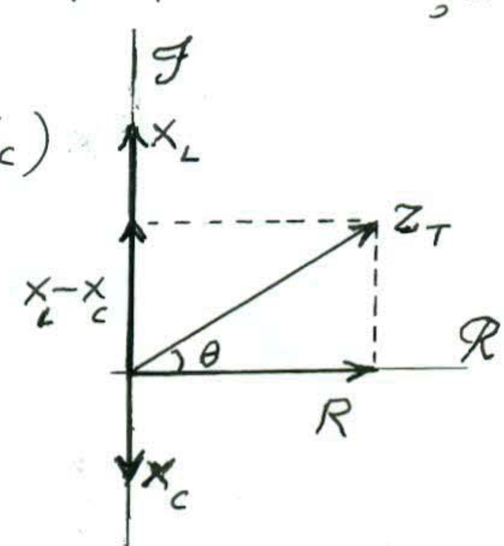
$$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3 \| Z_4$$

$$= (R_1 + j0) + (R_2 + jX_L) + \frac{1}{2}(R_3 - jX_C)$$

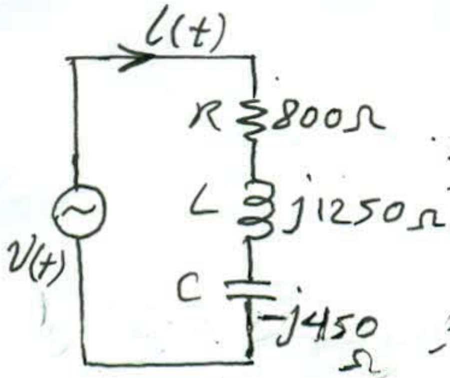
$$= \overbrace{\left(R_1 + R_2 + \frac{1}{2}R_3\right)}^{R} + j(X_L - X_C)$$

$$Z_T = |Z|\angle\theta \quad , \quad |Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$



مثال ۲۶ . در شکل زیر، ولتاژ ورودی بصورت $v(t) = 100 \sin \omega t$, v است.



الف – جریان کلی $i(t)$ را محاسبه و بصورت فازوری رسم کنید.

ب – ولتاژهای v_R ، v_L ، و v_C را محاسبه و رسم کنید.

ج – درستی قانون KVL را تحقیق کنید.

(به فرض آنکه اندازه ولتاژ دو سر سلف از اندازه ولتاژ منبع بیشتر باشد، این امر را چگونه توجیه می‌کنید)

حل: (الف)

$$Z_T = 800 + j(1250 - 450) \quad (\Omega)$$

$$= 800 + j800 \quad (\Omega)$$

$$= 1131.4 \angle 45^\circ \quad (\Omega)$$

$$i(t) = \frac{v(t)}{z} \quad , \quad I = \frac{100\angle 0^\circ}{1131.4\angle 45} = 88.4 \angle -45^\circ \ (mA)$$

(ب) $v_R = R\,i(t) \ , \ V_R = (88.4\angle -45^\circ)(800\angle 0) = 70.7\angle -45 \ (v)$

$v_L = i\,X_L \ , \ V_L = (88.4\angle -45)(1250\angle 90^\circ) = 110.5\angle 45^\circ \ (v)$

$v_c = i\,X_c \ , \ V_c = (88.4\angle -45)(450\angle -90) = 39.7\angle -135^\circ$

توجه! همانطور که دیده می‌شود، اندازه ولتاژ دو سر سلف ($110.5\ v$)، بیشتر از اندازه ولتاژ منبع ($100v$) است. همانطور که خواهیم دید، این امر قانون KVL را نقض نمی‌کند زیرا v_L و v_c به اندازه 180° اختلاف فاز دارند و در نتیجه مجموع ولتاژها در مدار بسته طوری است که مقداری از ولتاژ دو سر سلف، بوسیله ولتاژ دو سر خازن، حذف می‌شود.

ج - تحقیق درستی KVL : ولتاژها را بصورت کارتزین می‌نویسیم:

$V = 100\angle 0 = 100 + j0 \quad (v)$

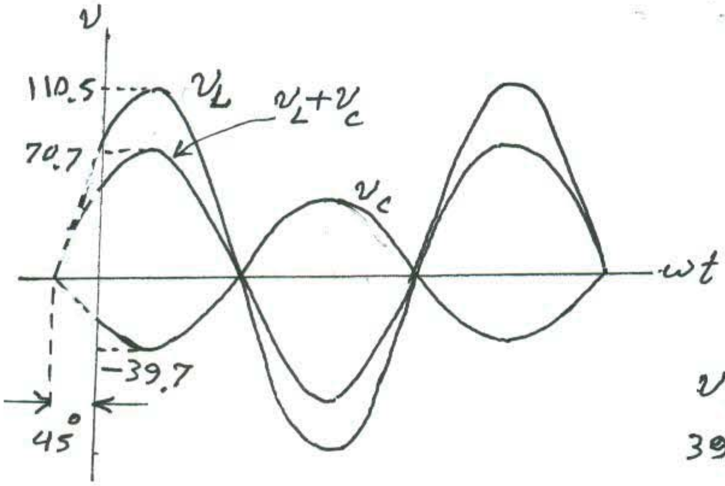
$V_R = 70.7\left(\cos(-45) + j(\sin -45)\right) = 50 - j50 \quad (v)$

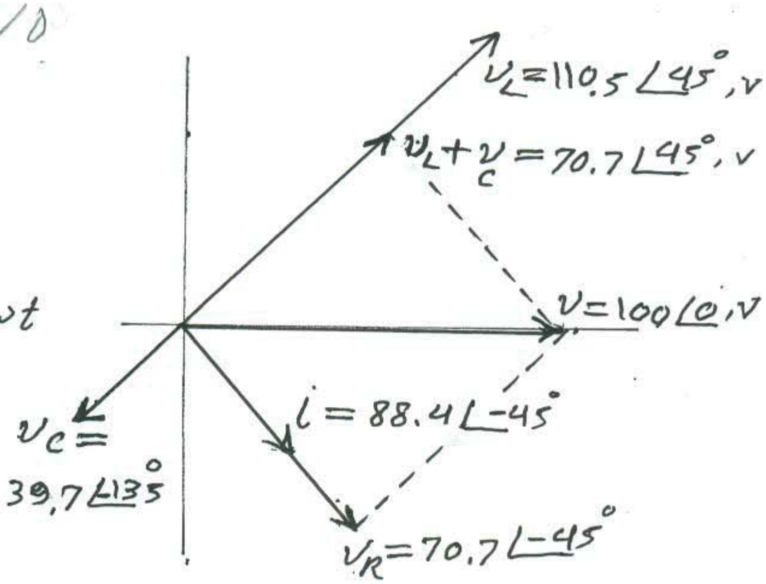
$V_L = 110.5(\cos 45 + j\sin 45) = 78.12 + j\,78.12 \quad (v)$

$V_C = 39.7\left(\cos(-135) + j\sin(-135)\right) = -28.12 - j\,28.12 \quad (v)$

$$V_R + V_L + V_C = (50 + 78.12 - 28.12) + j(-50 + 78.12 - 28.12)$$
$$= 100 + j0$$

که برابر با ولتاژ منبع است.





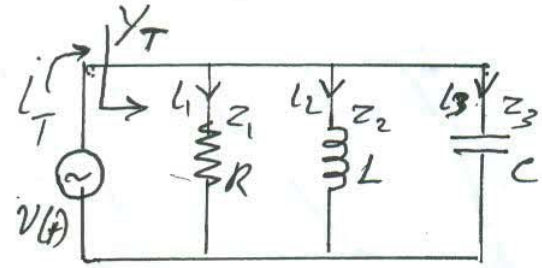
مثال ۴۷- در یک مدار RLC سری $v(t)=24\sin(1000t+20^\circ)$ است. فرض کنید $R=15\Omega$ ، $L=0.1\,H$ باشد، مقدار C باید چقدر باشد تا $v(t)$ با جریان حاصله کل $i(t)$، اختلاف فازی نداشته باشد؟

حل- $Z=\frac{V}{I}=R+j(X_L-X_c)$ ، اگر V و I هم‌فاز باشند، قسمت موهومی Z باید برابر صفر باشد (چرا؟)

$$X_L-X_c=0$$

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=0 \qquad C=\frac{1}{\omega^2 L}=\frac{1}{(1000)^2(0.1)}=10\,\mu F$$

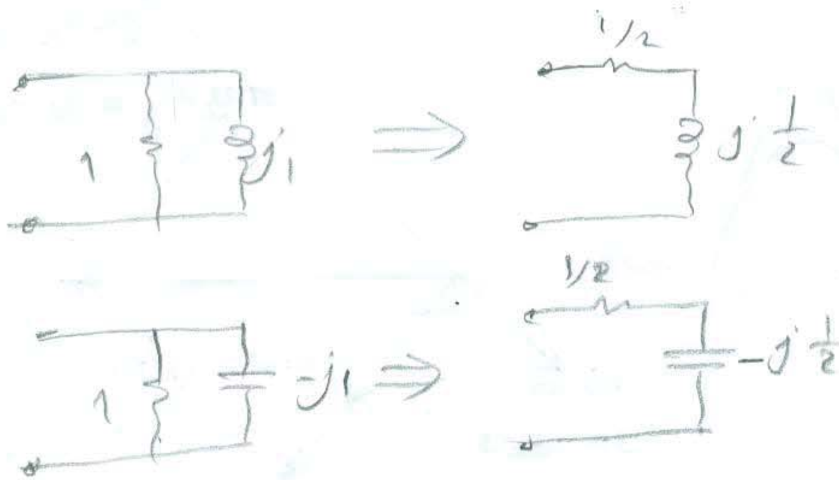
مثال ۴۸- در مدار موازی RLC، در شکل، ادمیتانس $Y_T=G+jB$ را حساب و بصورت فازور رسم کنید.



$$v(t)=15\sin(25000t)\ (V)$$
$$R=1\,k\Omega,\ L=0.02\,H,\ C=0.16\,\mu F$$

حل -

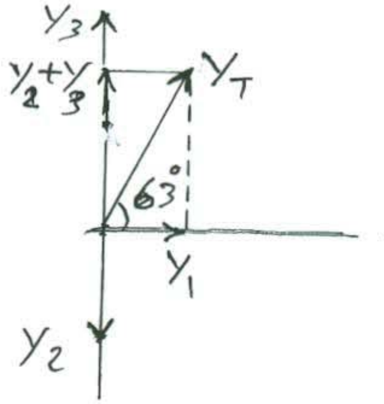
$$Y_1=\frac{1}{Z_1}=\frac{1}{1K}=0.001=0.001+j0\ (\mho)$$
$$Y_2=\frac{1}{Z_2}=\frac{1}{j\omega L}=0-j0.002\ (\mho)$$
$$Y_3=\frac{1}{Z_3}=\frac{1}{-j/\omega C}=0+j0.004\ (\mho)$$



$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s}$$

$X_p =$

$$Y_T = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0.001 + j\,0.002$$
$$= 0.00224 \angle 63.43^\circ \ (\mho)$$



مثال ۴۹ - در مثال قبل جریان‌های i_1 ، i_2 ، i_3 و i_T را محاسبه و فازور مربوطه را رسم کنید. با توجه به فازور i_T و فازور $v(t)$ ، آیا می‌توان مدار RLC موازی مذکور را معادل با یک مدار سری RL یا RC دانست؟ در این صورت اندازه عناصر این مدار معادل را محاسبه کنید.

حل:

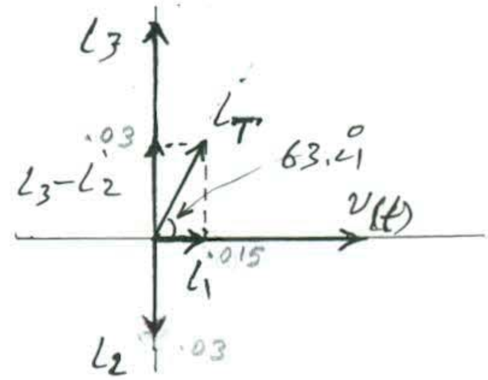
$$i_1 = Y_1 \cdot v = (0.001)(15\angle 0^\circ) = 0.015\angle 0^\circ \quad (A)$$

$$i_2 = Y_2\, v = (-j\,0.002)(15\angle 0) = 0.03(0 - j\,1) \quad (A)$$

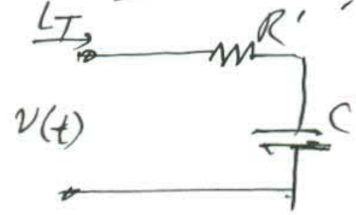
$$i_3 = Y_3\, v = (j\,0.004)(15\angle 0) = 0.06(0 + j\,1) \quad (A)$$

$$i_T \equiv Y_T \cdot v \equiv i_1 + i_2 + i_3$$

$$i_T = 0.015 + j\,0.03$$
$$= 0.0335 \angle 63.4^\circ$$



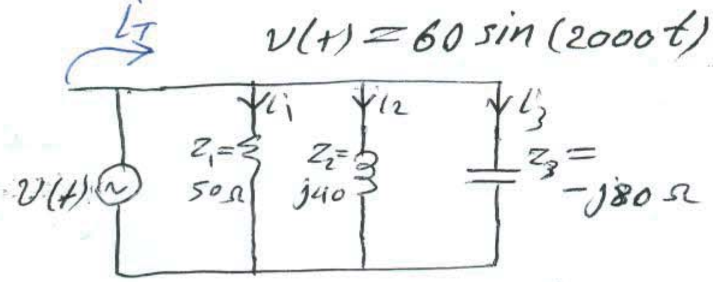
با توجه به فازور فوق، i_T به اندازه 63.4° درجه نسبت به v تقدم فاز دارد. به عبارت دیگر راکتانس خازنی مدار بر راکتانس سلفی غلبه دارد و لذا می‌توان این مدار را معادل یک مدار RC سری دانست:



$$Z_T = R' - jX' = \frac{1}{Y_T} = \frac{1}{0.001 + j\,0.002} \rightarrow \frac{1}{.00224\angle 63.4}$$

$$\begin{cases} \sqrt{R'^2 + X'^2} = \dfrac{1}{.00224} & R' = 199.68\ \Omega \\ tg^{-1}\left(\dfrac{-X'}{R'}\right) = -63.4 & \rightarrow X' = 399.27 \rightarrow C' \approx 1\ \mu F \end{cases}$$

$v(t) = 60 \sin(2000t) \quad (V)$



مثال ۵۰: در شکل زیر مطلوبست :

الف - جریان ها در هر امپدانس.

ب - نشان دهید که $i_T = vY_T$

ج - دیاگرام فازور را برای i_1 ، i_2 ، i_3 ، i_T و v رسم کنید و نظر خود را بیان کنید

حل :

الف

$$i_1 = \frac{v}{z_1} = \frac{60\angle 0^\circ, V}{50\angle 0^\circ, \Omega} = 1.2\angle 0^\circ, A = 1.2 + j0, A$$

$$i_2 = \frac{v}{z_2} = \frac{60\angle 0}{40\angle 90^\circ} = 1.5\angle -90^\circ, A = 0 - j1.5, A$$

$$i_3 = \frac{v}{z_3} = \frac{60\angle 0^\circ}{80\angle -90^\circ} = 0.75\angle +90^\circ, A = 0 + j0.75, A$$

ب

$$Y_T = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{1}{50\angle 0} + \frac{1}{40\angle 90} + \frac{1}{80\angle -90}$$

$$= 0.02\angle 0^\circ + 0.025\angle -90^\circ + 0.0125\angle 90^\circ$$

$$= (0.02 + j0) + (0 - j0.025) + (0 + j0.0125)$$

$$= 0.02 - j0.0125 \text{ siemence}$$

$$= \sqrt{0.02^2 + 0.0125^2}\ \angle tg^{-1}\left(\frac{-0.0125}{0.02}\right) = 0.0236\angle -32^\circ, \text{ siemence}$$ یا $1/\Omega$

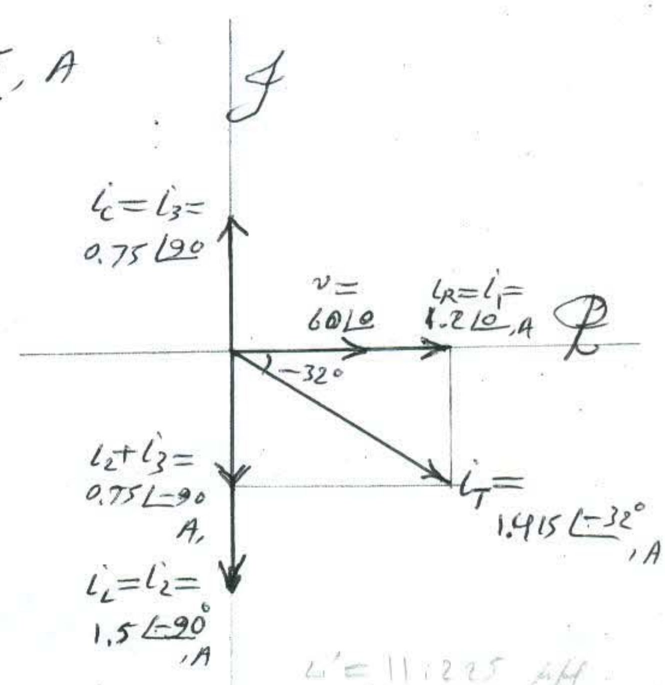
KCL $\quad i_T = i_1 + i_2 + i_3 = 1.2 - j0.75, A$

$$= \sqrt{1.2^2 + 0.75^2}\ \angle tg^{-1}\frac{-0.75}{1.2}$$

$$= 1.415\angle -32^\circ. A$$

$$vY_T = (60\angle 0^\circ)(0.0236\angle -32^\circ)$$

$$= 1.416\angle -32^\circ \approx i_T$$



ج : با توجه به دیاگرام ، جریان i_T به اندازه 32° نسبت به $v(t)$ تاخیر فاز دارد لذا راکتانس سلفی مدار بر راکتانس خازنی غالب بوده و میتوان این مدار را معادل یک مدار $R'L'$ سری دانست . چرا؟

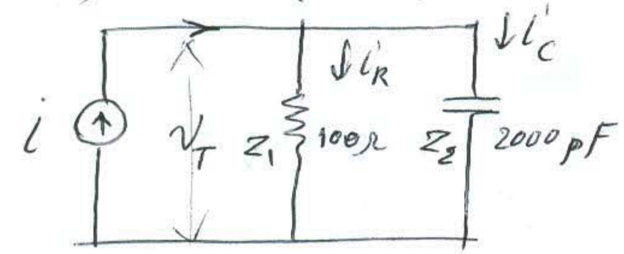
$L' = 11.225$ mH

$R' = 35.93$, $X'_L = 22.95$

$i(t) = 0.24 \sin(5\times10^6\, t), A$

P 523

مثال ۵۱: در شکل زیر مطلوبست:



الف - ولتاژ v_T در دو سر منبع جریان $i(t)$.

ب - جریانهای i_R و i'_C

ج - رسم دیاگرام فازور مربوط به i، i_1، i_2، v_T

د - رسم شکل موج i، i_1، i_2 در حوزه زمان

حل:

(الف) $|X_C| = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{5\times10^6 \times 2000\times10^{-12}} = 100\,\Omega$

$$X_C = 100\angle{-90^\circ} = 0 - j100 = 100\angle{-90^\circ}$$

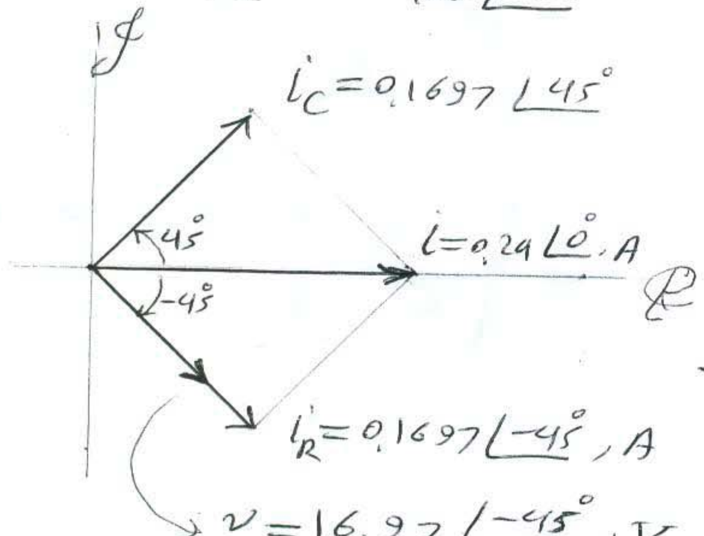
$$Z_T = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{10^4\angle{-90^\circ}}{(100+j0)+(0-j100)} = \frac{10^4\angle{-90^\circ}}{141.4\angle{-45^\circ}} = 70.7\angle{-45^\circ}, \Omega$$

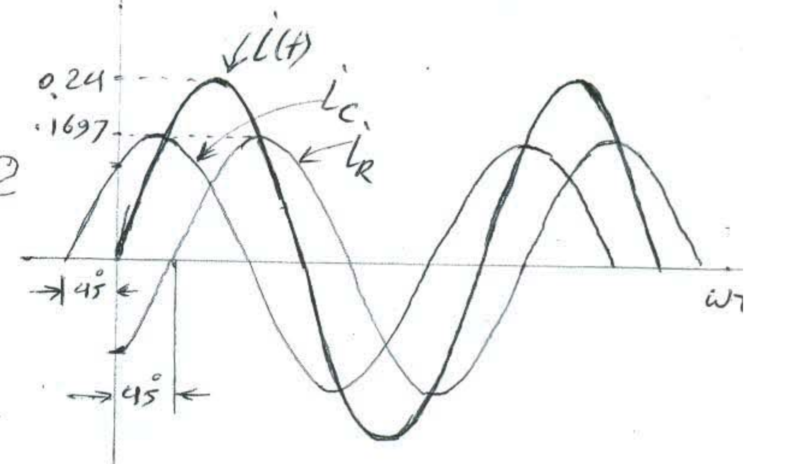
$$v_T = i\,Z_T = (0.24\angle{0^\circ})(70.7\angle{-45^\circ}) = 16.97\angle{-45^\circ}, V$$

(ب) $i_R = \dfrac{v_T}{R} = \dfrac{16.97\angle{-45^\circ}}{100\angle{0}} = 0.1697\angle{-45^\circ}\ A$

$$= 0.12 - j0.12,\ A$$

$$i'_C = \frac{v_T}{X_C} = \frac{16.97\angle{-45}}{100\angle{-90}} = 0.1697\angle{+45^\circ}, A$$

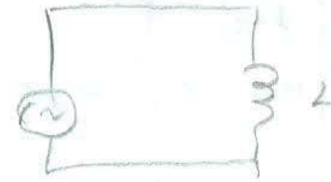




(د) $i_R = 0.1697 \sin(\omega t - 45^\circ), A$

$i'_C = 0.1697 \sin(\omega t + 45^\circ), A$

$P(t) = v(t) \cdot i(t)$

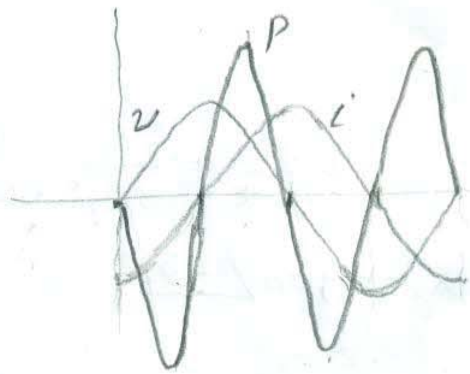


$v(t) = V_m \sin \omega t$

$i(t) = I_m \sin(\omega t - 90°) \equiv -I_m \cos \omega t$

$P(t) = -V_m I_m \sin \omega t \cos \omega t$

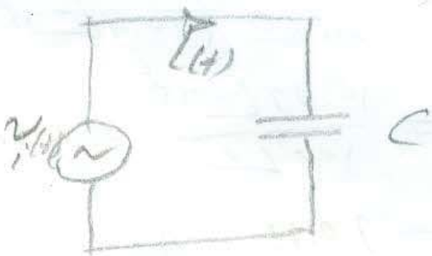
$P(t) = \frac{-1}{2} V_m I_m \sin 2\omega t$



$i_c(t) = C \frac{dv}{dt} = \overbrace{C\omega V_m}^{I_m} \cos \omega t = I_m \sin(\omega t + 90°)$

$v_i(t) = V_m \sin \omega t$

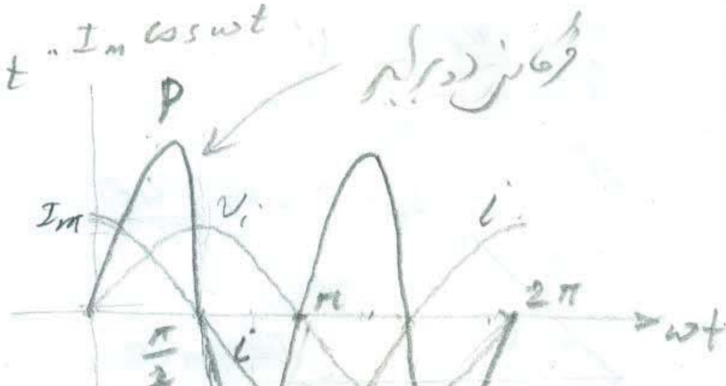
$i(t) = I_m \sin(\omega t + 90°)$



$i(t) = I_m \cos \omega t$

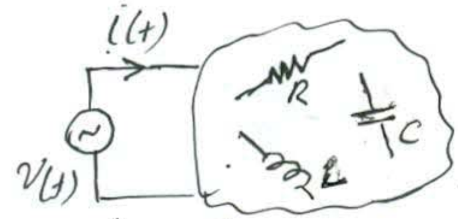
$P(t) = v_i(t) \cdot i(t) = V_m \sin \omega t \cdot I_m \cos \omega t$

$P(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \sin 2\omega t$



$v = L \frac{di}{dt}$

$i = \frac{1}{L} \int v_L \, dt = \frac{1}{L} \int V_m \cos \omega t \, dt$



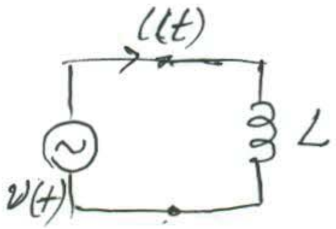
توان در مدارهای AC

توان لحظه‌ای (Instantaneous power)

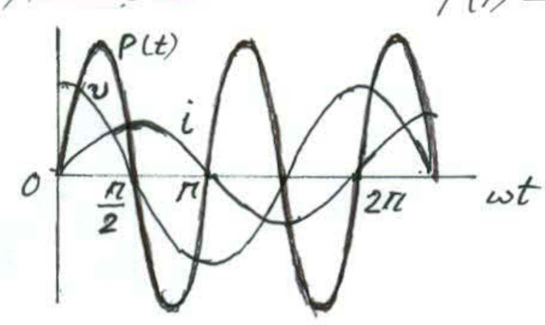
شکل فوق، یک شبکه عمومی شامل مقاومت، خازن، و سلف را نشان میدهد که توسط یک منبع ولتاژ $v(t)$ تحریک شده و جریان $i(t)$ حاصل شده است. توان لحظه‌ای که از منبع ولتاژ به این شبکه داده میشود عبارت است از :

$$P(t) = v(t)\cdot i(t) \qquad (W)$$

<u>توان حاصله از منبع سینوسی</u> چنانچه ولتاژ ورودی بصورت $v(t)=V_m\cos\omega t$ به یک شبکه شامل اجزاء سلفی اعمال شود، بصورتیکه میدانیم جریان حاصله عبارت از $i(t)=I_m\cos(\omega t-90^\circ)$ خواهد بود و توان لحظه‌ای حاصله برابر است با :



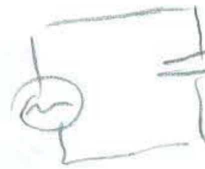
$$P(t)=V_mI_m\cos\omega t\,\cos(\omega t-90^\circ)=\frac{1}{2}V_mI_m\sin 2\omega t$$



در شکل مقابل شکل موج مربوط به ولتاژ، جریان، و توان دیده میشود. توجه داریم که فرکانس توان لحظه‌ای دو برابر فرکانس ولتاژ یا جریان است.

در بازه $0<\omega t<\frac{\pi}{2}$ که v و i هم علامت هستند، $P(t)$ مثبت بوده و این امر به این معنی است که در این بازه زمانی انرژی از منبع ولتاژ به اجزاء سلفی منتقل میشود. در بازه زمانی دیگر $\frac{\pi}{2}<\omega t<\pi$ $P(t)$ منفی بوده (چون در این بازه v و i هم علامت نیستند) و این بدان معنی است که انرژی از مدار به منبع ولتاژ برمیگردد. در یک پریود $P(t)=0$ است.

یک حالت کلی دیگر وقتی است که اختلاف فاز بین ولتاژ $v(t)$ و جریان $i(t)$



$$\cancel{v(t) = V_m \sin \omega t}$$

$$\cancel{i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta)}$$

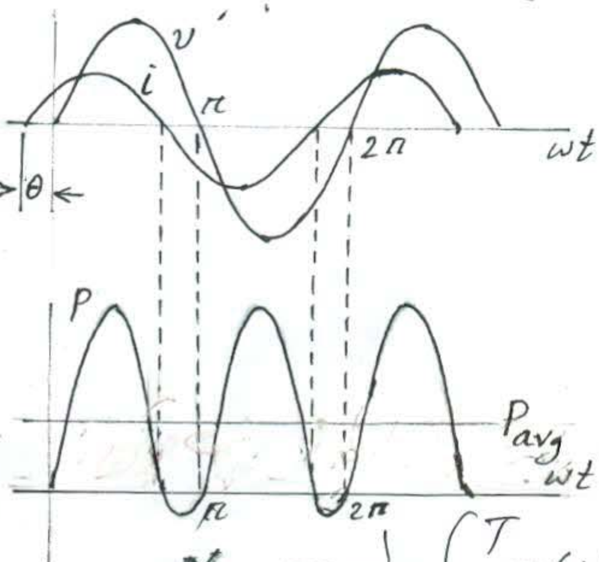
$$P_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{2} V_m I_m \left[\cos\theta + \cos(2\omega t - \theta)\right]\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \cos\theta$$

برابر زاویه θ باشد که درانیصورت چنانکه $v(t)=V_m\cos\omega t$ ، $i(t)=I_m\cos(\omega t-\theta)$
است که در آن θ مثبت یا منفی است برحسب اینکه مدار سلفی یا خازنی باشد. درانیصورت

$$P(t)=V_m I_m\cos\omega t\cos(\omega t-\theta)$$
$$=\frac{1}{2}V_m I_m\left[\cos\theta+\cos(2\omega t-\theta)\right]$$

جمله $\cos(2\omega t-\theta)$ دارای مقدار متوسط (Average) صفر است. بنابراین مقدار متوسط
توان (Average Power) برابر است با:



$$P_{avg}=\frac{1}{2}V_m I_m\cos\theta$$

مقدار متوسط یک تابع (Average value)

تابع پریودیک $x(t)$ با پریود T دارای
مقدار متوسط زیر است:

$$X_{avg}=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

بدین ترتیب مقدار متوسط $v(t)=V_m\sin^2\omega t$ ، برابر است با:

$$V_{avg}=\frac{1}{T}\int_0^T V_m\left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right)dt=\frac{1}{2}V_m$$

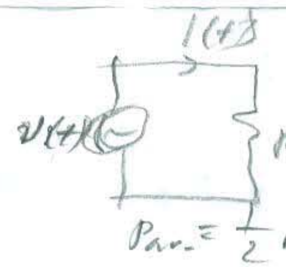
مقدار موثر effective یا مقدار (RMS)
مقدار جذر میانگین مربعات (Root Mean-Square)

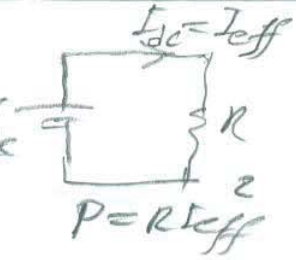
توان لحظه‌ای در یک مقاومت R بوسیله جریان سینوسی $i(t)=I_m\sin\omega t$ ، بصورت
$P(t)=R\left[I_m\sin\omega t\right]^2$ است. مقدار میانگین (یا متوسط) این توان عبارت است از:

$$\text{mean } P(t)=\frac{1}{T}\int_0^T R\left[i(t)\right]^2dt=\frac{1}{2}RI_m^2$$

حال اگر جریان ثابتی مثل I_{eff} درنظر بگیریم که همین میانگین توان را در مقاومت R

$$i(t) = I_m \sin\omega t$$





$$\frac{1}{2} R I_m^2 = R I_{eff}^2$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T [i(t)]^2 \, dt = \frac{1}{2} I_m^2 = I_{eff}^2$$

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t) \, dt$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t) \, dt}$$

[illegible] :

$$I_{eff}^2=\frac{1}{T}\int_0^T (I_m \sin\omega t)^2\, dt$$

این را که در اینصورت میتوان نوشت :

$$\frac{1}{2} R I_m^2 = R I_{eff}^2 \rightarrow I_{eff}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

بدیهی است که I_{eff} را بصورت زیر نیز میتوان نوشت :

$$I_{eff}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [i(t)]^2\, dt}$$

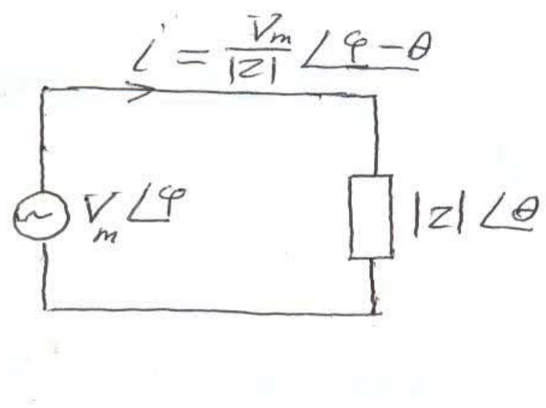
واضح است که مقدار موثر ولتاژ سینوسی $v(t)=V_m \sin\omega t$ عبارت است از :

$$V_{eff}=\frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

به این ترتیب مقدار توان متوسط که قبلاً دیده ایم بصورت زیر نیز نوشته میشود.

$$P_{avg}=\frac{1}{2}V_m I_m \cos\theta = V_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\cos\theta \quad , \ (W)$$

شکل زیر یک مدار AC را که شامل یک امپدانس عمومی $|Z|\angle\theta$ است نشان میدهد



داریم :

$$i=\frac{V_m\angle\varphi}{|Z|\angle\theta}=\frac{V_m}{|Z|}\angle\varphi-\theta$$

در زاویه بین ولتاژ اعمال شده و جریان حاصله برابر است با :

$$\varphi-(\varphi-\theta)=\theta$$

بنابراین نتیجه میگیریم که زاویه بین ولتاژ اعمالی و جریان حاصله برابر است با زاویه امپدانس شبکه یعنی θ .

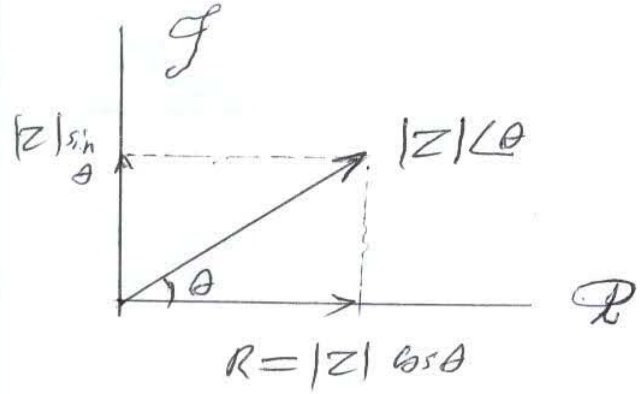
در شکل فوق، قسمت مقاومتی امپدانس شبکه را میتوان بصورت شکل امپدانس نشان داد.

توان = انرژی / زمان $\quad P = \frac{E}{t} \quad Watts = \frac{Jouls}{sec.}$

$$P = VI = \left(\frac{E}{Q}\right)\left(\frac{Q}{t}\right) = \frac{E}{t}$$ ژول / ثانیه

$$= (RI)I = RI^2 \longrightarrow P = \frac{V^2}{R}$$

$$P_{ave.} = \frac{1}{2} Z I_m^2$$



$$R = |Z| \cos \theta$$

چون فقط مقاومت است که توان را مصرف (تلف) می‌کند، لذا توان متوسط برابر است با:

$$P_{avg} = \frac{1}{2} R I_m^2 = \frac{1}{2} |Z| I_m^2 \cos\theta = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\theta$$

$$= V_{eff} I_{eff} \cos\theta = \frac{V_{eff}^2}{R} \cos\theta$$

به عبارت دیگر: توان تلف شده در هر شبکه عبارتست از نصف حاصلضرب ولتاژ ماکزیمم کلی در جریان ماکزیمم کلی که از آن شبکه میگذرد ضربدر کسینوس زاویه بین آنها.
(این توان به توان متوسط، یا توان اکتیو موسوم است که بعداً می‌بینیم)

ضریب توان Power Factor: جمله $\cos\theta$ در روابط فوق به عنوان ضریب توان موسوم است. چون $\cos\theta = \cos(-\theta)$ است، لذا مهم نیست که جریان و ولتاژ از نظر فاز از یکدیگر جلو یا عقب باشند.

$$pf = \cos\theta$$
$$1 \geq pf \geq 0$$

حالات خاص

۱- اگر شبکه بطور خالص مقاومتی باشد، زاویه بین ولتاژ و جریان صفر و $\cos\theta = 1$ و شرایط توان همان مقدار قبلی $P_{avg} = \frac{1}{2} V_m I_m$ است.

۲- اگر شبکه بطور خالص راکتیو باشد، $\theta = \pm 90^\circ$ و $\cos\theta = 0$ و $P_{ave} = 0$ است که نشان دهنده این مطلب است که توانی در عنصر راکتیو (سلف یا خازن) (در یک پریود) تلف نمی‌شود.

Reactive ، Active ، Apparent

توان ظاهری ، توان اکتیو ، توان راکتیو

∴ توان ظاهری (اندازه) عبارتست از حاصلضرب ولتاژ موثر در جریان موثر مدار، بدون در نظر گرفتن زاویه بین آنها. این مقدار را با S و با واحد V.A. نشان میدهند (VoltAmper):

ظاهری $S = V_{eff} \cdot I_{eff} = \frac{1}{2} V_m I_m$ (V.A.)

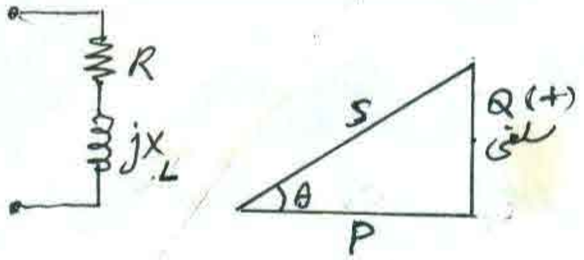
∴ توان اکتیو با رابطه کلی بصورت زیر و با واحد وات (W) نشان داده میشود:

یا توان متوسط (W)

اکتیو یا متوسط $P_{avg} = V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\theta = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\theta \equiv S\cos\theta$

∴ توان راکتیو با رابطه زیر و با واحد وار (V.A.R) (VoltAmper Reative) نشان میدهند:

راکتیو $Q = V_{eff} \cdot I_{eff} \sin\theta = \frac{1}{2} V_m I_m \sin\theta \equiv S\sin\theta$ (V.A.R)

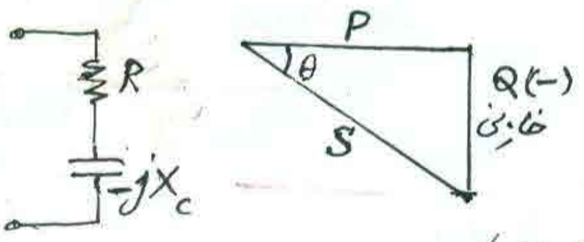


∴ مثلث توان (Power Triangle)

$P = S\cos\theta$ (W)

$Q = S\sin\theta$ (V.A.R)

$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ (V.A.)



∴ بدیهی است که همواره

$$S_{(V.A.)} \geq \begin{cases} P\ (W) \\ Q\ (V.A.R) \end{cases}$$ است.

∴ S یک مقدار مختلط نیز میتواند باشد و بصورت زیر نشان داده میشود.

مختلط $\mathbb{S} = S\angle\theta = P + jQ$

۴۲ ۲

۲۹ ۶

۴ ۲ ۴ ۲

۲۲ × ۲۹

۱۷

$Z_T = 20 - j20$

$Z_T = 20\sqrt{2}\,\angle -45$ leading

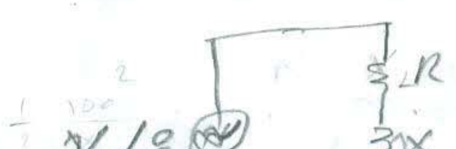
$i = \dfrac{v}{z} = \dfrac{100\angle 0}{20\sqrt{2}\,\angle -45} = \dfrac{50}{\sqrt{2}}\,\angle 45^\circ$

زاویه جریان از زاویه ولتاژ جلوتر است.

$Z_T = \dfrac{V_i}{I_T} = \dfrac{100\angle 0}{5.51\angle -5.1^\circ} \approx 18.1\,\angle +5.1^\circ \ \Omega$

$= 18.1\,(\mathrm{Cos}\,5.1 + j\,\mathrm{Sin}\,5.1)$

$= 18.1\,(0.996 + j0.089)$



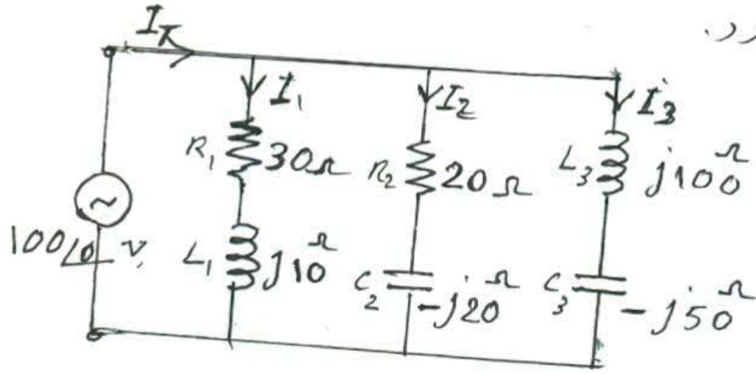
$Z_T = R + jX_L$ lagging

یعنی جریان نسبت به ولتاژ عقب است

$Z_T = R - jX_c$: leading

$P = \frac{1}{2}|X| I_m^2 = |X| I_{eff}^2 = \dfrac{V_{eff}^2}{|X|}$

مثال - ۵۲ در شکل مقابل، مشخصات کلی توان مدار (توان ظاهری، توان متوسط یا توان اکتیو، توان راکتیو، ضریب توان) را محاسبه کنید. همچنین نشان دهید که مجموع توان های ذکر شده در قسمت قبل را میتوان از روابط $P_{Total}=\frac{1}{2}V_m I_m\cos\theta$ ، $Q_{Total}=\frac{1}{2}V_m I_m \sin\theta$ بدست آورد.



حل:

$\angle -18.43494882$

$$I_1=\frac{100\angle 0}{30+j10}=3.16\angle -18.4^\circ$$

3.16227766

$$I_2=\frac{100\angle 0}{20-j20}=3.53\angle +45^\circ$$

$$I_3=\frac{100\angle 0}{j(100-50)}=2\angle -90^\circ$$

$$I_T=I_1+I_2+I_3=$$

$$=(2.99-j0.99)+(2.5+j2.5)+2(0-j)$$

$$=5.49-j0.49=5.51\angle -5.1^\circ \quad A \;,\; \theta=-5.1^\circ$$

$P_{R_1}=\frac{1}{2}R_1 I_{1m}^2=\frac{1}{2}(30)(3.16)^2=149.78 \simeq 150$ W دقیقا توان اکتیو

$P_{R_2}=\frac{1}{2}R_2 I_{2m}^2=\frac{1}{2}(20)(3.53)^2=124.61$ W توان اکتیو

$Q_{L_1}=\frac{1}{2}X_{L_1}I_{1m}^2=\frac{1}{2}(10)(3.16)^2=49.92 = 50$ دقیقا var (سلفی) توان راکتیو

$Q_{C_2}=\frac{1}{2}X_{C_2}I_{2m}^2=\frac{1}{2}(20)(3.53)^2=124.61$ var (خازنی) توان راکتیو

$Q_{L_3}=\frac{1}{2}X_{L_3}I_{3m}^2=\frac{1}{2}(100)(2)^2=200$ var (سلفی) توان راکتیو

$Q_{C_3}=\frac{1}{2}X_{C_3}I_{3m}^2=\frac{1}{2}(50)(2)^2=100$ var (خازنی) توان راکتیو

$pf=\cos\theta=\cos(-5.1)=0.996$ lagging

توان ظاهری $S=\frac{1}{2}V_m I_m=\frac{1}{2}(100)(5.51)=275.5$ V.A.

$P_{avg}=P_{R_1}+P_{R_2}=274.39$ W , $Q=Q_L-Q_C=25.3$ var سلفی

P_T

$$P_{Tot.} = 400 + 800 + 0 = 1200 \; W$$

$$Q_{Tot.} = \frac{V_{eff}^{2}}{|X_L|} + (-200) + (-100)$$

$$= \frac{(120/\sqrt{2})^2}{18} - 300$$

$$= +400 - 300$$

$$Q_{Tot.} = 100 \quad \text{سلفی} \; (VAR)$$

$$P_{Tot} = S_{Tot.} \cos\theta$$

$$Q_{Tot.} = S_{Tot.} \sin\theta$$

$$\rightarrow tg\,\theta = \frac{Q_{Tot.}}{P_{Tot.}} = \frac{100}{1200}$$

$$\theta = 4.763641691^\circ \quad (K_1)$$

$$\sin\theta = 0.083045479 \quad (K_2)$$

$$S_{Tot.} = \frac{P_{Tot.}}{\cos\theta} = \frac{Q_{Tot.}}{\sin\theta} = \underbrace{1204.159458}_{} \quad (V.A) \quad (K_3)$$

ب: شکل دیگر از راه دیگر :

$$(K_3) \quad (V.A.)$$

$$S_{Tot.} = \sqrt{P_{Tot.}^2 + Q_{Tot.}^2} = \sqrt{1200^2 + 100^2} = 1204.159458$$

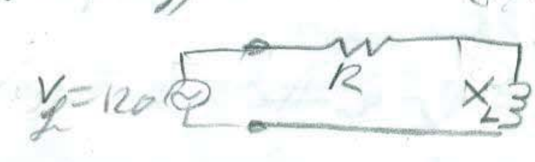
*: به عنوان تمرین شکل جزئی I_{eff} را تعیین و مدل کلی مدار را تعیین نمود.

(Kin 4)

$$P = V_{eff} \cdot I_{eff} \cos\theta \quad I_{eff} = 1200 / (\tfrac{120}{\sqrt{2}} \cos\theta) = 14.191 \; A$$

$$(5) \quad P = R I_{eff}^2 \rightarrow R = \frac{1200}{I_{eff}^2} = 5.958 \; \Omega$$

$$Q = X I_{eff}^2 \rightarrow X = \frac{100}{(10.0\ldots)^2} = 0.496 \quad (K6)$$



اجزاء مدار	توان اکتیو $P(W)$	توان راکتیو $Q(var)$
R_1	$P_1=149.78$	0
R_2	$P_2=124.61$	0
L_1	0	49.92 سلفی
C_2	0	124.61 خازنی
L_3	0	200 سلفی
C_3	0	100 خازنی

سلفی
$$Q = 49.93+200 = 249.93 \text{ var}$$

خازنی
$$Q = 124.6 + 100 = 224.61 \text{ var}$$

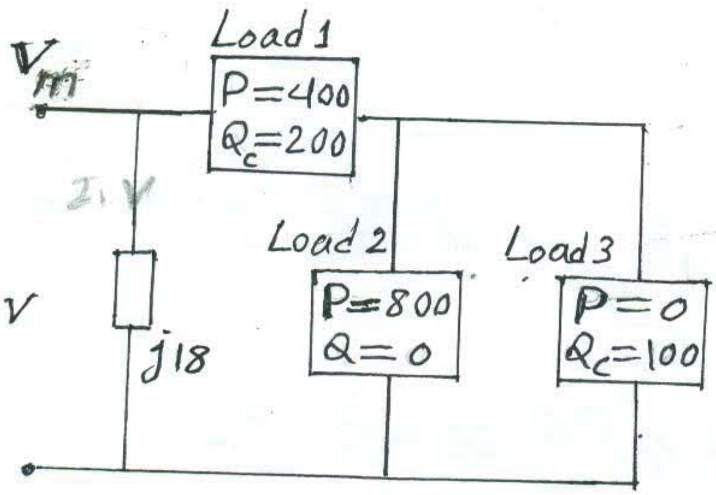
توان کلی
$$P_T = P_1 + P_2 = 274.39 \qquad Q_T = (Q_{L_1} + Q_{L_3}) - (Q_{C_2} + Q_{C_3}) = 25.3 \text{ var}$$ سلفی

قسمت دوم :

$$P_{Total} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\theta = \frac{1}{2}(100)(5.51)(0.996) = 274.398 \text{ W}$$

$$Q_{Total} = \frac{1}{2} V_m I_m \sin\theta = \frac{1}{2}(100)(5.51)(0.089) = 24.52 \text{ var}$$

بطوریکه دیده می‌شود ، P_{Total} و Q_{Total} تقریباً با آنچه که از جدول بدست آمده برابر می‌باشند
واختلاف جزئی ناشی از تقریباتی است که از تبدیل عددها در قطبی به کارتزین و بالعکس رخ میدهد.



$V_m = 120\angle 0$ (V)

P, W , Q, var

تمرین مثال قبل را در شکل مقابل تکرار کنید و همچنین نشان دهید که توان ظاهری کلی، S_{Total} برابر با مقدار زیر نیز هست.

$$S_{Total} = \sqrt{P_{Tot.}^2 + Q_{Tot.}^2}$$

$$\mathbb{S} = \mathbb{V}_{eff} \cdot \mathbb{I}_{eff}^{*} \quad , \quad \mathbb{S} = S \angle \theta$$
$$= S(\cos\theta + j \sin\theta)$$

$$\mathbb{S} = P + jQ =$$

اگر ولتاژ اعمال شده به یک بار به صورت $\mathbb{V}_{eff} = V_{eff} \angle \alpha$ بوده و جریان حاصل به صورت $\mathbb{I}_{eff} = I_{eff} \angle \beta$ باشد، توان ظاهری عبارت است از:

اندازه

$$|\mathbb{S}| = |\mathbb{V}_{eff}| \cdot |\mathbb{I}_{eff}| \Rightarrow S = V_{eff} \cdot I_{eff} \quad (V.A.)$$

توان ظاهری به صورت کمپلکس برابر است با حاصلضرب V_{eff} در I_{eff} در کسینوس زاویه بین آنها:

$$\mathbb{S} = V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\underbrace{\alpha - \beta}_{\theta}) = V_{eff} \angle \alpha \cdot I_{eff} \angle(-\beta)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\mathbb{S} = \mathbb{V}_{eff} \cdot \mathbb{I}_{eff}^{*}$$

$$= (V_{eff} \angle \alpha)(I_{eff} \angle -\beta)$$

نکته: فازور $\mathbb{V}_m$ و فازور $\mathbb{V}_{eff}$ مربوط به هم هستند

$$\mathbb{V}_{eff} = V_{eff} \angle \theta \qquad V_{eff} \angle \theta = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle \theta$$

$$\mathbb{V}_m = V_m \angle \alpha$$

مثال ۵۳ - یک شبکه دارای امپدانس معادل $Z_T = 3 + j4 \ (\Omega)$ با ولتاژ ورودی $v(t) = 42.5 \cos(1000t + 30^\circ), V$ تحریک می‌گردد. مطلوبست شبکه از نظر توان (P، Q، S، و pf) را تعیین کنید.

حل:

$$V_{eff} = \frac{42.5}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ \quad (V)$$

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z_T} = \frac{(42.5/\sqrt{2}) \angle 30^\circ}{\sqrt{3^2 + 4^2} \angle tg^{-1}(4/3)} = \frac{8.5}{\sqrt{2}} \angle -23.13^\circ \quad (A)$$

$$\rightarrow \theta = 53.13^\circ$$

$$S = V_{eff} \cdot I_{eff} = 180.6 \quad (V.A)$$

$$P_{avg} = S \cos\theta = 108.36 \ , (W) \qquad Q = S \sin\theta = 144.5 \quad (VAR)$$

$\cos\theta = \cos 53.13^\circ = 0.6$ (lagging (جریان نسبت به ولتاژ تاخیر فاز دارد)

یادآوری بسیار مهم: بطور کلی S که یک مقدار مختلط است را بصورت های زیر میتوان نوشت:

$$\overset{\text{مختلط}}{S} = S\angle\theta = \mathbf{V}_{eff} \cdot \mathbf{I}^*_{eff} = \overset{\text{مختلط}}{\mathbf{Z}} I^2_{eff} \quad , P_{avg} = R I^2_{eff}$$

که در آن $\mathbf{V}_{eff}$ عبارت از «فازور ولتاژ موثر « Phasor effective voltage » و

$\mathbf{I}^*_{eff}$ عبارت از «مزدوج فازور جریان موثر « complex conjugate of phasor effective current »

مثال ۵۴ - اطلاعات کامل توان برای شبکه‌ای که با ولتاژ $v(t) = 150 \cos(\omega t + 10^\circ), V$ تحریک شده و جریان $i(t) = 5 \cos(\omega t - 50^\circ), A$ در آن جاری می‌شود، تعیین کنید.

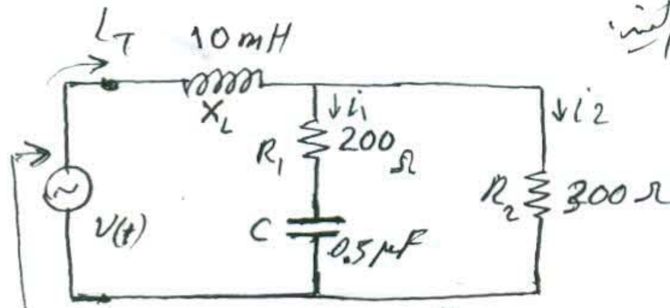
حل: با استفاده از توان مختلط $\mathbf{S}$، داریم:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff} \cdot \mathbf{I}^*_{eff} =$$

$$= \left(\frac{150}{\sqrt{2}} \angle 10^\circ\right) \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \angle 50^\circ\right) = 375 \angle 60^\circ = 187.5 + j\,324.8 \ (V.A)$$

$$\mathbf{S} = P + jQ \rightarrow \begin{cases} P = 187.5 \ (W) & S = 375 \quad (VA) \\ Q = 324.8 \ (VAR) & pf = \cos 60^\circ = 0.5 \ \text{lagging} \end{cases}$$

مسئله ۸۸ - در شکل زیر توان کلی مدار را، با جمع نمودن توان در قسمتهای مختلف مدار و یا از طریق دیگر محاسبه و ضریب توان مدار را تعیین، و مثلث توان را رسم کنید.



$v(t) = 60 \sin 10^4 t$, V

Z_T

حل: ساده‌تر این است که محاسبه را با توان مختلط $\tilde{S}$ دنبال کنیم:

$$Z_T = jX_L + \underbrace{(R_1 - jX_C) \| R_2}_{Z_P}$$

$$Z_P = \frac{(200 - j200)\,300}{200 - j200 + 300} = 144.8\left(1 - j\frac{3}{7}\right)$$

$$Z_T = j \times 10^4 \times 10 \times 10^{-3} + 144.8\left(1 - j\frac{3}{7}\right)$$

$$Z_T = 144.8 - j37.93 \quad (\Omega) = \underset{|Z|}{149.7} \underset{\theta}{\angle -14.67^\circ}$$

$$I_T = \frac{V}{Z_T} = \frac{60\angle 0}{149.7\angle -14.67} = 0.4\angle +14.67^\circ = 0.386 + j0.1$$

$$I_1 = \frac{R_2}{R_2 + R_1 - jX_C} I_T = \left(\frac{3}{\underbrace{5 - j2}_{\rightarrow 5.385\angle -21.8^\circ}}\right)(0.4\angle 14.67) = 0.223\angle 36.47 = 0.179 + j0.132$$

$$I_2 = I_T - I_1 = (0.386 + j0.1) - (0.179 + j0.132)$$

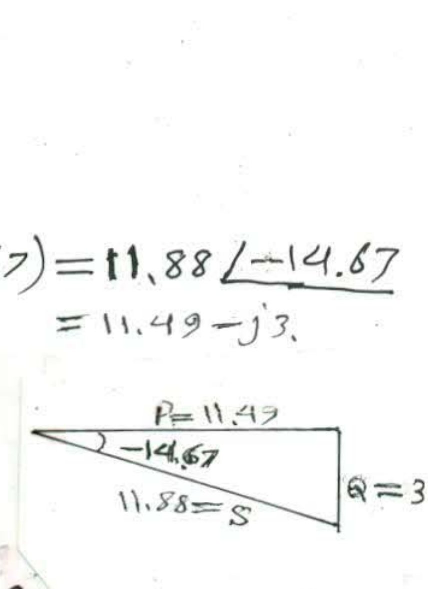
$$= 0.207 - j0.032 = 0.209\angle -8.78 \quad A$$

$$V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{60}{\sqrt{2}} = 42.43\angle 0 \ V,$$

$$I_{eff} = \frac{I_T}{\sqrt{2}} = \frac{0.4\angle 14.67}{\sqrt{2}} = 0.28\angle 14.67$$

$$\tilde{S} = V_{eff} I^*_{eff} = (42.43\angle 0)(0.28\angle -14.67) = 11.88\angle -14.67 = 11.49 - j3.$$

$$\tilde{S} = 11.49 - j3.0 \quad , \quad S = 11.88 \ VA$$



$P = 11.49$ W , $Q = 3$ var (خازنی)

$pf = \cos\theta = \cos(-14.67) \equiv \frac{P}{S} = 0.967$ leading

lagging

$i(t) = 4.24\cos(500t + 45^\circ)$

$v(t) = ?$

$v(t) = V_m \angle 45 + 36.87$

$V_m = |Z| I_m = \sqrt{R^2 + X_L^2} \cdot I_m$

$= \sqrt{20^2 + 15^2} \times 4.24 = 87.41 \ V$

$v(t) = 87.41 \angle 81.87^\circ \ V$

مثال ۵۶ - یک مدار سری شامل دو جزء ، وقتیکه با ولتاژ $v(t)=99\cos(6000t+30^\circ)$, v
تحریک می شود دارای توان متوسط 940 W و ضریب توان 0.707 leading است.
اجزاء مدار را تعیین کنید و مثلث توان را رسم کنید.

حل :

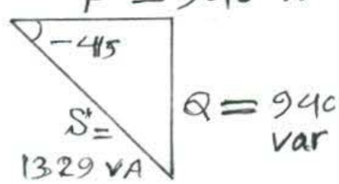
$$V_{eff}=\frac{V_m}{\sqrt{2}}=\frac{99}{\sqrt{2}}=70.0\ (V)$$

$$P_{avg.}=V_{eff}\,I_{eff}\cos\theta \rightarrow I_{eff}=\frac{940\,W}{70\times 0.707}=19.0\ (A)$$

$$P_{avg.}=R\cdot I_{eff}^2 \rightarrow R=\frac{940}{(19)^2}= \rightarrow R=2.6\ (\Omega)$$ (جزء اول)

برای ضریب توان با تقدم فاز (راکتانس خازنی)

$$\text{leading pf},\quad \theta=\cos^{-1}0.707=-45^\circ$$



$$\mathbf{Z}=R-jX_c \quad tg(-45^\circ)=tg\left(\frac{-X_c}{R}\right)\rightarrow X_c=R$$

$$\frac{1}{\omega C}=R \rightarrow \frac{1}{6000\,C}=2.6\ \Omega \rightarrow \mathbf{C}=64.1\ \mu F$$ (جزء دوم)

مثال ۵۷ - اجزاء یک مدار سری را تعیین کنید . این مدار با جریان $i(t)=4.24\cos(5000t+45^\circ)$ (A)
تحریک می شود و توان 180 W را مصرف دارد، ضریب توان 0.80 lagging است.

حل :

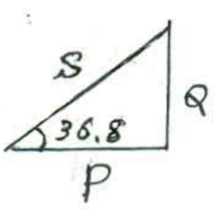
$$I_{eff}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=\frac{4.24}{\sqrt{2}}=3.\ (A)$$

$$P_{avg.}=R\,I_{eff}^2 \rightarrow R=\frac{180\,W}{9}=20.\ (\Omega)$$ (جزء اول)

زاویه امپدانس برابر است با :

$$\theta=\cos^{-1}0.80=+36.87^\circ$$

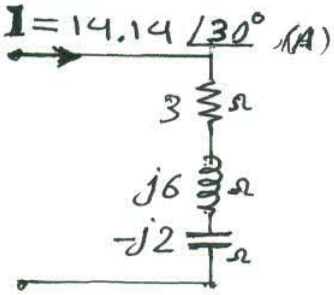
بنابراین جزء دوم بصورت سلف بایستی باشد . با توجه به مثلث توان :

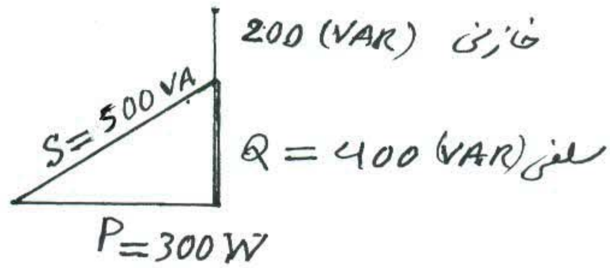


$$tg\,\theta=\frac{Q}{P}=\frac{X_L\cdot I_{eff}^2}{180}=tg\,36.87^\circ \rightarrow X_L=15\ (\Omega)$$

$$\omega L=15 \rightarrow L=\frac{15}{5000} \qquad L=3\ mH$$ (جزء دوم)

مثال ۵۸ - در شکل مقابل مشخصات کامل مدار از نظر توان را تعیین و مثلث توان را رسم کنید.





حل - جریان موثر لازم است:

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{14.14}{\sqrt{2}} = 10 \ (A)$$

$$P_{avg} = R I_{eff}^2 = 300 W \ , \ Q_{j6} = X_L I_{eff}^2 = 600 \ (VAR)$$ سلفی

$$Q_{-j2} = X_c I_{eff}^2 = 200 \ (VAR)$$ خازنی

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 500 \ (VA) \ , \ pf = \frac{P_{avg}}{S} = \frac{300}{500} = 0.6 \text{ lagging}$$

$S\cos\theta$

مثال ۵۹ - جریان موثر $I_{eff} = 5$ (A) از دو امپدانس سری: $Z_1 =$ $Z_1 = 5.83 \angle -59^\circ$ Ω , $Z_2 = 8.94 \angle 63.43$ Ω می‌گذرد. مشخصات کامل توان را تعیین کنید.

حل:

$$Z_T = Z_1 + Z_2 = (3 - j4.99) + (3.998 + j7.99)$$

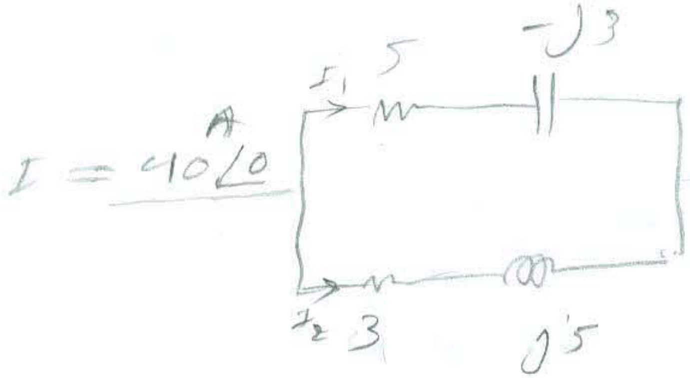
$$= 6.998 + j3 \simeq 7 + j3 \ \Omega$$

$$P_T = R I_{eff}^2 = 7(5)^2 = 175 \ W$$

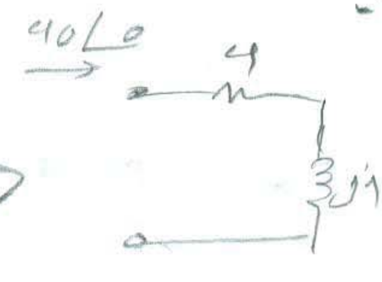
$$Q_T = X I_{eff}^2 = 3(5)^2 = 75 \ VAR$$ سلفی

$$S_T = \sqrt{(175)^2 + (75)^2} = 190.4 \ VA$$

$$pf = \frac{P_T}{S_T} = \frac{175}{190.4} = 0.919 \text{ lagging}$$



$\Rightarrow$



$$I_1 = \frac{3+j5}{3+j5+5-j3}(40\angle 0) = \frac{3+j5}{8+j2}(40\angle 0)$$

$$= (0.707\angle 45)(40\angle 0) = 28.28\angle 45^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = I - I_1 = (40\angle 0) - \underbrace{(28.28\angle 45)}_{(20+j20)}$$

$$= 20 - j20 = \underbrace{28.28}_{\sqrt{800}}\angle -45^\circ \text{ A}$$

$\cancel{=18}$

$$P_T = \frac{1}{2}R_1 I_1^2 + \frac{1}{2}R_2 I_2^2 = \frac{1}{2}(5)(800) + \frac{1}{2}(3)(800)$$

$$P_T = 3200 \text{ W}$$

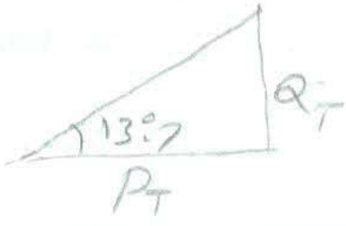
$$Q_T = -Q_c + Q_L = -\frac{1}{2}|X_c| I_1^2 + \frac{1}{2}|X_L| I_2^2$$

$$= -\frac{1}{2}(3)800 + \frac{1}{2}(5)800 = 800 \text{ VAR}$$

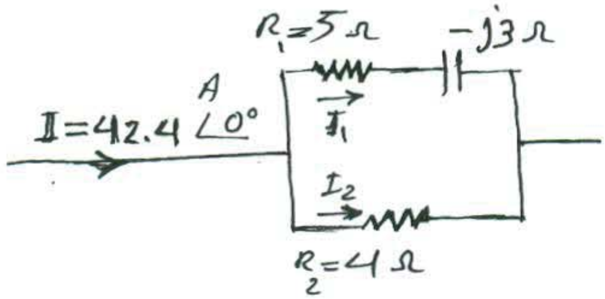
$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{(3200)^2 + (800)^2} = 3298.484 \text{ V.A.}$$

$$pf = \frac{P_T}{S_T} = \frac{3200}{3298.48} = 0.97 \text{ lagging}$$

$$\theta \simeq 14.036^\circ$$



مثال ۹۰ - در شکل مقابل، ضریب توان چیست؟

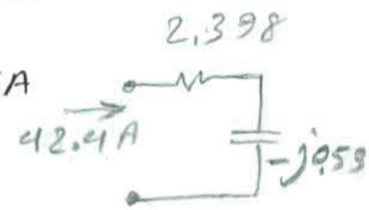


$$I_1=\frac{4}{4+(5+j3)}(42.4\angle 0^\circ)$$
$$=17.88\angle 18.43^\circ \ \text{A}$$
$$I_2=I-I_1=26.05\angle -12.53^\circ \ \text{A}$$

$$P_T=\frac{1}{2}R_1I_1^2+\frac{1}{2}R_2I_2^2=\frac{1}{2}\left(5\times 17.88^2+4\times 26.05^2\right)=2156 \ \text{W}$$

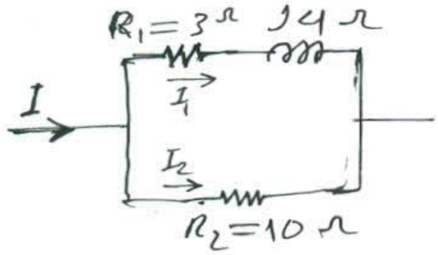
$$Q_T=\frac{1}{2}X_cI_1^2=\frac{1}{2}(3\times 17.88^2)=480 \ \text{Var}$$ خازنی

$$S_T=\sqrt{P_T^2+Q_T^2}=\sqrt{2156^2+480^2}=2209 \ \text{VA}$$



$$pf=\frac{P_T}{S_T}=\frac{2156}{2209}=0.976 \quad (\text{leading})$$

مثال ۹۱ - توان کلی در مدار زیر 1100 W است. مقدار توان در R_1 و R_2 چیست؟



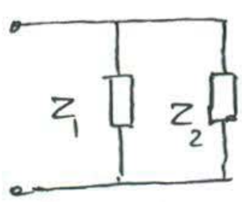
$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{Z_2}{Z_1}=\frac{10}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$$\frac{P_{R_1}}{P_{R_2}}=\frac{\frac{1}{2}R_1I_1^2}{\frac{1}{2}R_2I_2^2}=\frac{\frac{1}{2}(3)I_1^2}{\frac{1}{2}(10)I_2^2}=\frac{6}{5}$$

وچون $P_{R_1}+P_{R_2}=1100 \ \text{W}$ است، داریم:

$$P_{R_1}=600 \ \text{W}$$
$$P_{R_2}=500 \ \text{W}$$

مثال ۹۲ - امپدانس های موازی $Z_1=\overset{R_1}{2}+j4 \ (\Omega)$ و $Z_2=\overset{R_2}{6}+j0\,\Omega$ مفروض است. ضریب توان مدار چیست؟ مقاومت $6\,\Omega$ در Z_2 چقدر باید تغییر کند تا $pf=0.9$ lagging شود.



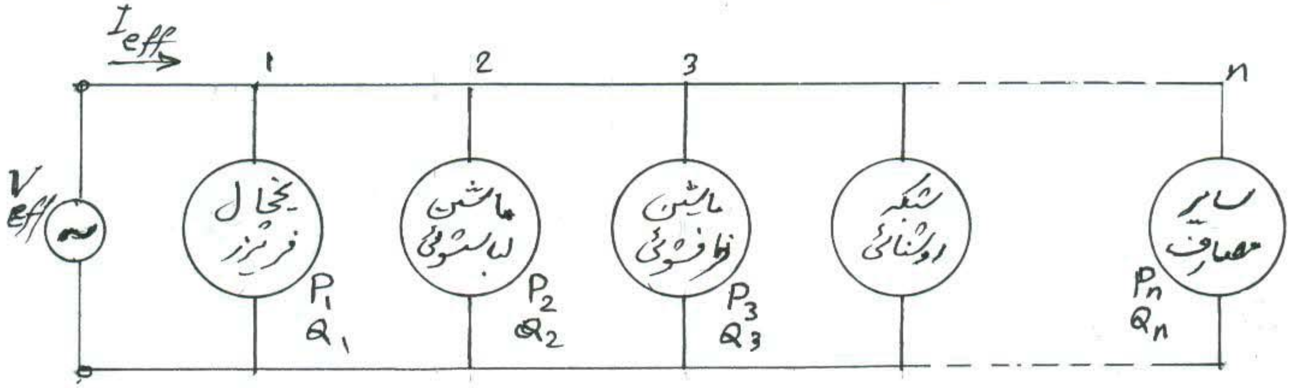
$$Z_T=Z_1\|Z_2=(2+j4)\|(6+j0)=2.99\angle 36.84 \ \Omega$$
$$pf=\cos 36.84=0.80 \ \text{lagging}$$

برای اینکه pf به 0.9 تغییر کند، زاویه امپدانس باید $\cos^{-1}0.90=25.84^\circ$ شود.

$$Z'_T=Z_1\|R'=\frac{R'(2+j4)}{R'+(2+j4)} \qquad \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{4}{2+R'}\right)=25.84 \rightarrow R'=3.2\,\Omega$$

تعیین توان یک شبکه کلی بطور کلی شبکه های کلی را می توان بصورت سری یا موازی بیان نمود. نحوه تعیین توان در شبکه های سری را در مثالهای گذشته دیده ایم. اصولاً مصارف صنعتی و یا مصارف خانگی را می توان بصورت شبکه موازی زیر نشان داد.

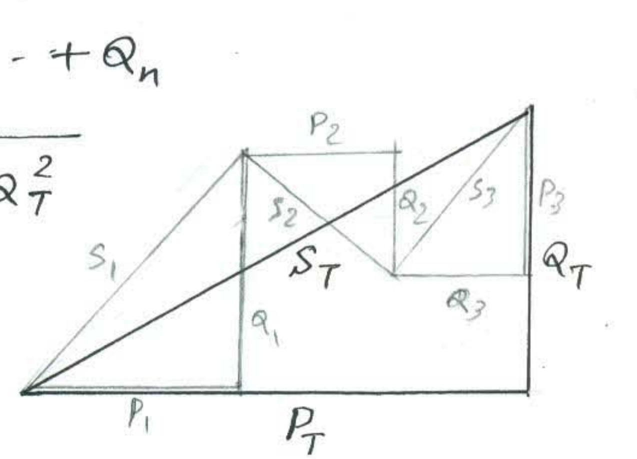
استفاده از توان مختلط $\mathbb{S}$ برای تحلیل شبکه های مصرف، کاربرد بسیاری دارد. برای تعیین مشخصات کامل توان مصرفی این نوع شبکه ها، نظیر S_T ، P_T ، Q_T ، pf_T وغیره، بصورت زیر عمل می شود.



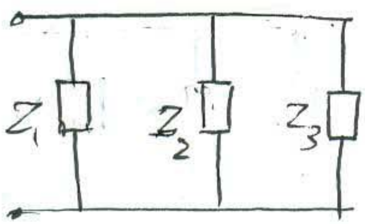
$$\mathbb{S}_T = \mathbf{V}_{eff}\,\mathbf{I}^*_{eff} = \mathbf{V}_{eff}\left(\mathbf{I}^*_{1eff} + \mathbf{I}^*_{2eff} + \cdots + \mathbf{I}^*_{neff}\right)$$
$$= \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 + \cdots + \mathbb{S}_n$$

که از آن:

$$P_T = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$
$$Q_T = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$$
$$S_T = |\mathbb{S}_T| = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$$
$$pf_T = \frac{P_T}{S_T}$$



مثال ۶۳ - مشخصات کامل کل امپدانس های موازی در شکل را تعیین کنید.



$Z_1 \begin{cases} 250\ VA \\ pf = 0.5\ lag. \end{cases}$ $Z_2 \begin{cases} 180\ W \\ pf = 0.8\ lead \end{cases}$ $Z_3 \begin{cases} 300\ VA \\ 100\ var \end{cases}$ سلفی

حل :

Load

Z_1: $S_1 = 250\ VA$, $\cos\theta = 0.5$

$P_1 = S\cos\theta = 250 \times 0.5 = 125\ W$

$Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} = \sqrt{250^2 - 125^2} = 216.5\ var$ سلفی

Load

Z_2: $P_2 = 180\ W$, $\cos\theta = 0.8$ leading , $\theta = \cos^{-1} 0.8 = -36.87^\circ$

$tg\,\theta = \frac{Q_2}{P_2}$ $\quad Q_2 = 180\, tg(-36.87^\circ) = 135\ var$ خازنی

Load

Z_3 $\quad S_3 = 300\ VA$, $Q_3 = 100\ var$ (سلفی)

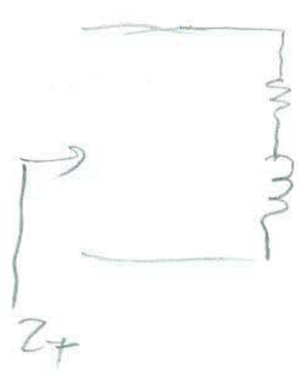
$P_3 = \sqrt{S_3^2 - Q_3^2} = \sqrt{300^2 - 100^2} = 282.8\ W$

$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 125 + 180 + 282.8 = 587.8\ W$

$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 216.5 - 135 + 100 = 181.5\ var$ (سلفی)

$S_T = P_T + j\,Q_T = 587.8 + j\,181.5 = 615.2 \angle 17.16^\circ$

$S_T = 615.2$, $pf = \cos 17.16^\circ = 0.955$ lagging



$P_T = \frac{1}{2} R_T I_m^2 = 587.8\ w$

$Q_T = \frac{1}{2} X I_m^2 = 181.5\ w$

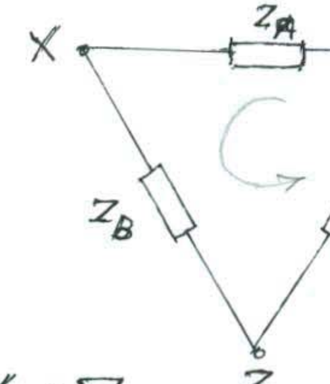
$Z_T = R_T + jX_T$

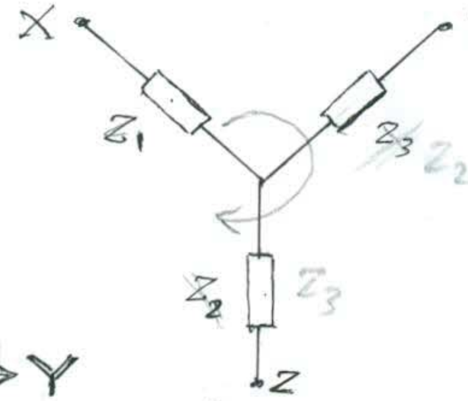
$\frac{X}{R} = \frac{181.5}{587.8}$ $\quad tg\,\theta = tg\,17.16$

$\theta = tg^{-1} \frac{X_T}{R_T} = 17.16$

تبدیل مدار امپدانسی ستاره به مثلث و بالعکس

نظیر آنچه که در مدارهای DC دیده ایم براحتی میتوان برای این تبدیل همان روابط قبلی را بکار برد، منتها با این تفاوت که بجای مقاومت R از امپدانس Z استفاده.





$Y \to \nabla$

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3}$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}$$

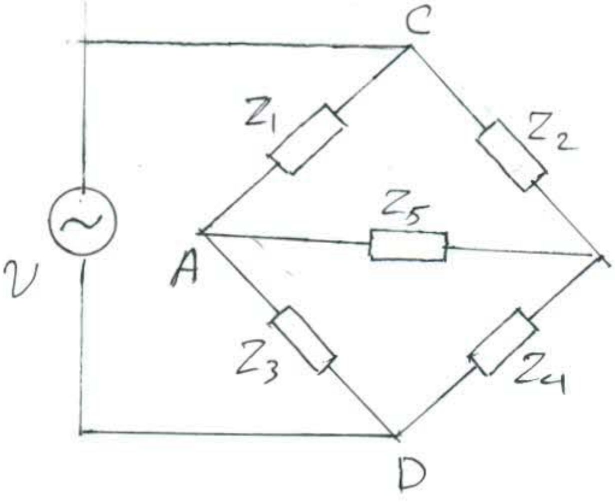
$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1}$$

$\nabla \to Y$

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_2 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_3 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$



پل‌های AC متعادل

براحتی میتوان نشان داد که پل مقابل در حال تعادل است که اگر:

مختلط $V_A = |V_A| \angle \theta$

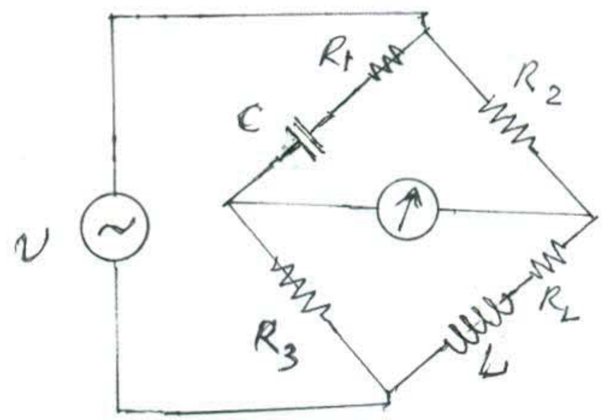
مختلط $V_B = |V_B| \angle \alpha \equiv V_A$

باشد، در اینصورت:

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4}$$

∴ باید توجه داشت که رابطه فوق، باید هم از نظر اندازه و هم از نظر زاویه باهم برابر باشند.

مثال ۶۴ - برای اندازه‌گیری ضریب سلف L و مقاومت داخلی آن R_L ، از مدار پل استفاده می‌شود. مقدار R_L و L را برحسب پارامترهای مدار محاسبه نمائید.



$v = V_m \sin \omega t$

$$\frac{R_1 - jX_C}{R_3} = \frac{R_2}{R_L + jX_L}$$

$$(R_1 - jX_C)(R_L + jX_L) = R_2 R_3$$

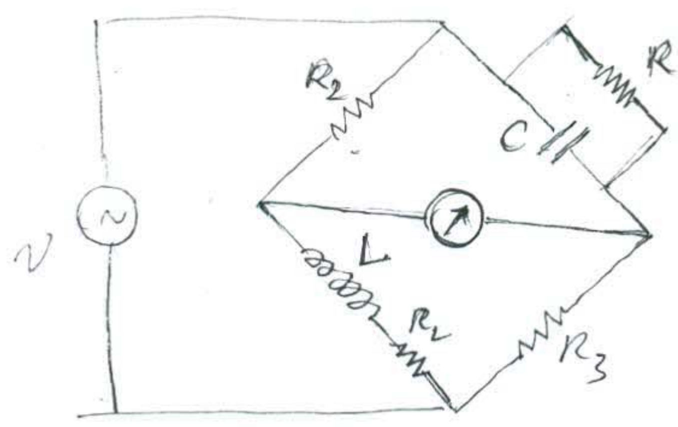
$$(R_1 R_L + X_C X_L) + j(R_1 X_L - R_L X_C) = R_2 R_3$$

برقراری رابطه فوق مشروط به این است که قسمتهای حقیقی و موهومی در دو طرف علامت مساوی بایستی برابر باشند.

$$\begin{cases} R_1 R_L + X_C X_L = R_2 R_3 \\ R_1 X_L - R_L X_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad R_L = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1^2 + X_C^2}, \quad X_L = \frac{R_2 R_3}{R_1^2 + X_C^2} \cdot X_C$$

با توجه به اینکه $X_L = \omega L$ و $X_C = \frac{1}{\omega C}$ است خواهیم داشت:

$$R_L = \frac{R_1 R_2 R_3 (\omega C)^2}{1 + (R_1 \omega C)^2} \quad , \quad L = \frac{R_2 R_3 C}{1 + (R_1 \omega C)^2}$$



مسئله - مقدار R_L و L را برحسب پارامترهای مدار محاسبه کنید.

$v = V_m \sin(10^3 t + 30^\circ)$

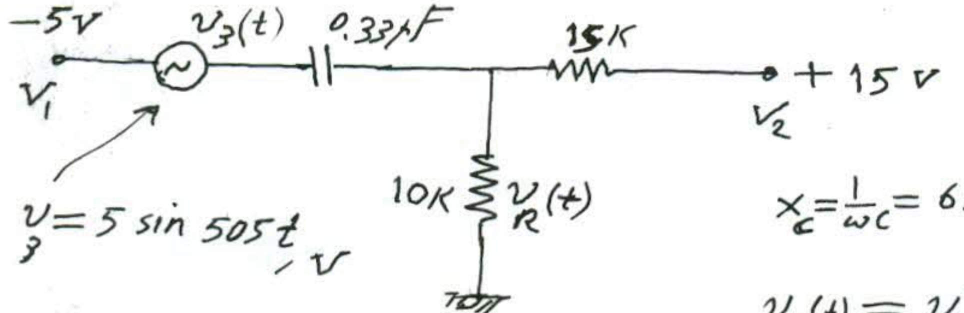
قضایای مدار AC

۱- قضیه جمع آثار Superposition Theorem

مثال - $\frac{\text{الف}}{98}$ با استفاده از جمع آثار، ولتاژ کلی $v_R(t)$، در دو سر مقاومت $10K\Omega$ را در حالت ماندگار، محاسبه کنید.

ب - شکل موج $v_R(t)$ را نسبت به زاویه θ رسم نموده و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آنرا تعیین نمائید.

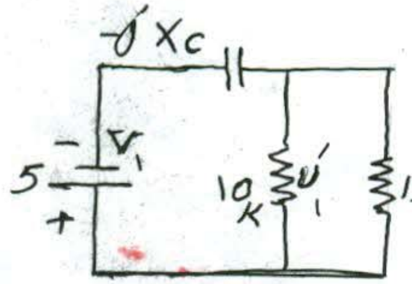
حل :



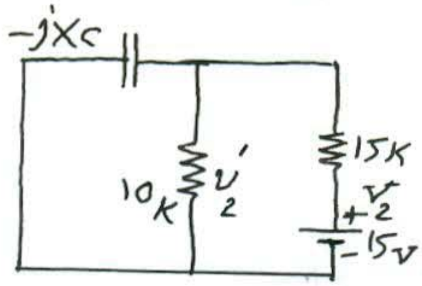
$v_3 = 5 \sin 505t$, V

$X_c = \frac{1}{\omega C} = 6K$

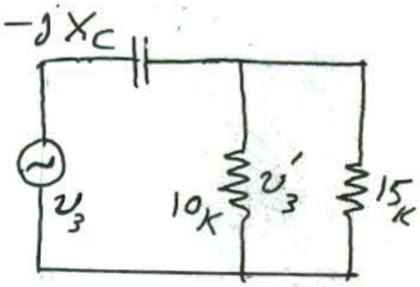
$$v_R(t) = v_1'\Big|_{\substack{v_2=0\\ v_3=0}} + v_2'\Big|_{\substack{v_1=0\\ v_3=0}} + v_3'\Big|_{\substack{v_1=0\\ v_2=0}}$$



$v_1' = 0$



$v_2' = \frac{10(15V)}{10+15} = 6V$



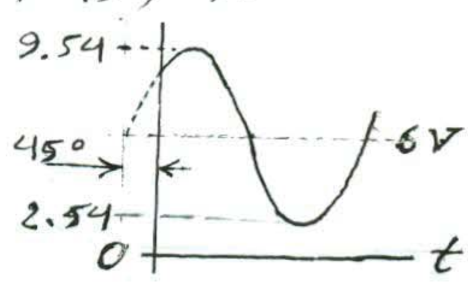
$v_3' = \frac{(10\|15)}{(10\|15) - jX_c} v_3(t)$

$$-jX_c = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{(505)(0.33\times10^{-6})} = -j6\ K\Omega$$

$$v_3' = \frac{6K}{6-j6} v_3(t) = \frac{1}{1-j}(5\angle 0) = \frac{1}{\sqrt{2}\angle -45^\circ}(5\angle 0)$$

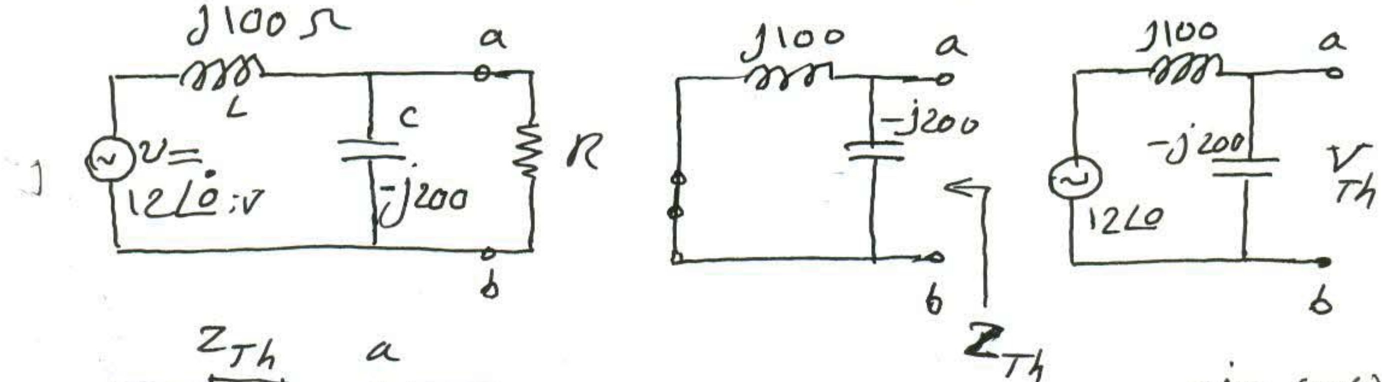
$$v_3' = 3.53\angle 45^\circ = 3.53 \sin(505t + 45^\circ)\ ,V$$

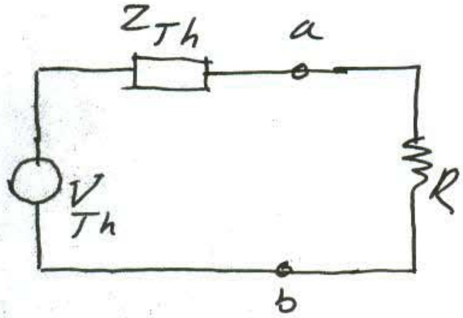
$$v_R(t) = v_1' + v_2' + v_3'$$
$$= 6 + 3.54 \sin(505t + 45^\circ)$$



قضیه تونن Thevenin's Theorem

نظیر آنچه که در مدارهای DC دیده‌ایم، عمل میکنیم. در مثال زیر مدار معادل تونن از دو سر مقاومت R، نشان داده شده است.

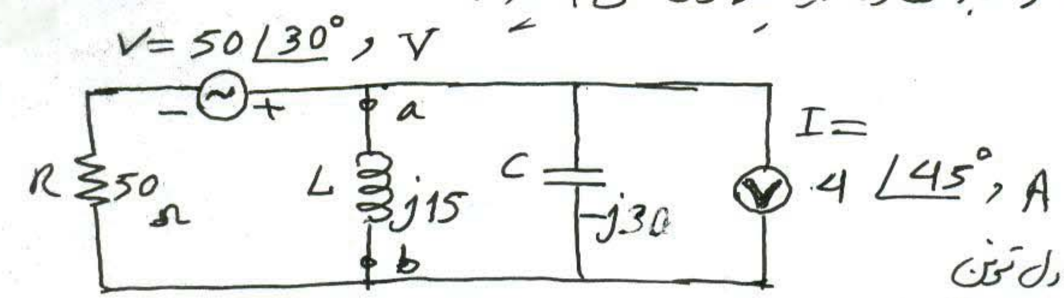




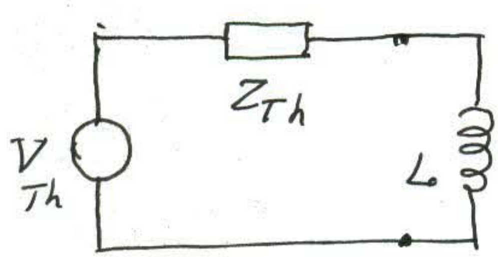
$$Z_{Th} = -j200 \parallel j100 = j200\,\Omega$$

$$V_{Th} = \frac{-j200(12\angle 0)}{-j200 + j100} = 24\angle 0°\,\text{V}$$

مثال ۴۶
توان راکتیو Q_L را با استفاده از قضیه تونن محاسبه کنید.



حل - مدار معادل تونن را از دو سر سلف L تعیین میکنیم.



$$Z_{Th} = 50 \parallel (-j30) = 25.72\angle -59.0°\,\Omega = 13.24 - j22$$

$$V_{Th} = V_{Th}\Big|_{I=0} + V_{Th}\Big|_{V=0}$$

$$V_{Th} = \frac{(-j30)(50\angle 30)}{-j30 + 50} + (50 \parallel -j30)(-4\angle 45)$$

$$V_{Th} = 25.72\angle -59 + 102.88\angle -14°$$

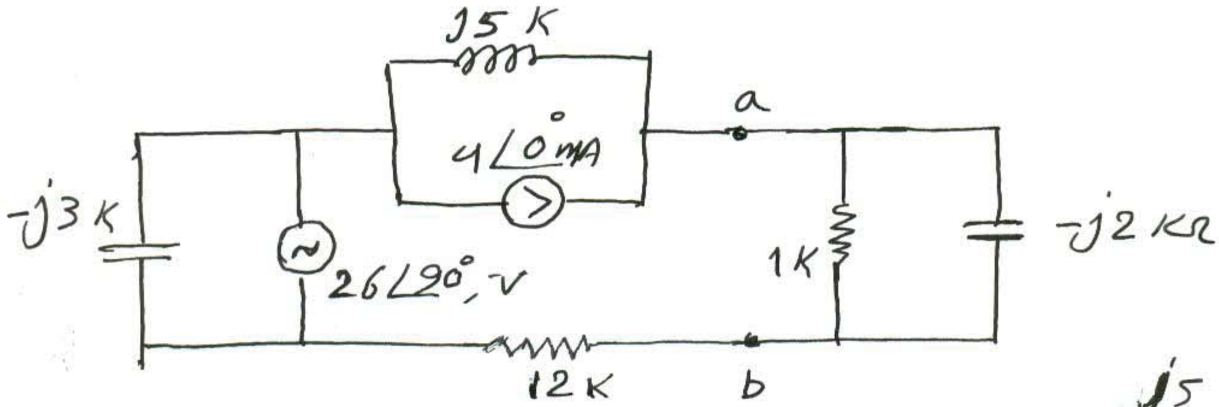
$$V_{Th} = 122.46\angle -22.5°\,\text{V}$$

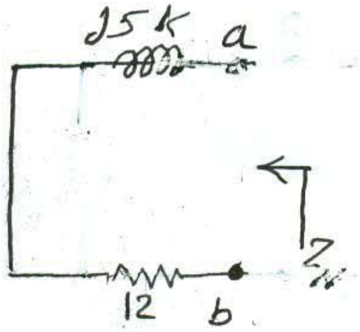
$$Q_L = \frac{1}{2} X_L \left(\frac{V_{Th}}{\underbrace{Z_{Th} + j15}_{13.24 - j15}}\right)^2 = 561.5\,\text{VAR}$$

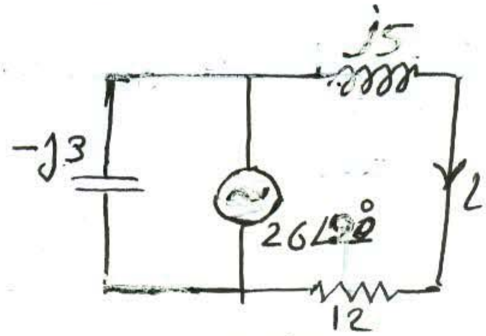
Norton's Theorem قضیه نورتن

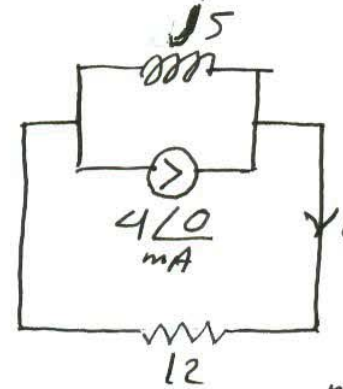
مدار معادل نورتن که از دو نقطه ab به سمت چپ دیده می‌شود، محاسبه و رسم کنید.

مثال ۹۷-









$Z_N = j5 + 12$

$= 13 \angle 22.62^\circ$

$= 11.99 + j5$ mA

$i_1 = \dfrac{26\angle 90^\circ}{12 + j5} =$

$= 2 \angle 67.38^\circ$ mA

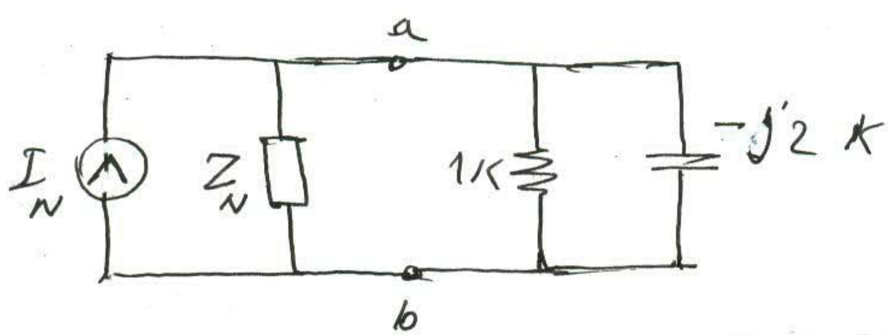
$= 0.77 + j1.85$ mA

$i_2 = \dfrac{5\angle 90}{j5 + 12}(4\angle 0)$ mA

$= 1.54 \angle 67.38^\circ$ mA

$0.29 + j1.42$ mA

$I_N = i_1 + i_2 = 1.06 + j3.27$ mA



$I_N = 1.06 + j3.27$

$= 3.44 \angle 72.04^\circ$

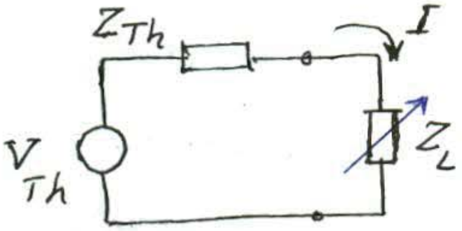
, $Z_N = 12 + j5$

$= 13.0 \angle 22.62^\circ$

Maximum Average Power Transfer Theorem

قضیه انتقال ماگزیمم توان متوسط

قبلاً در مدارهای DC دیده‌ایم که چنانچه مقاومت بار مصرف (R_L) با مقاومت تونن شبکه مولد (R_{Th}) برابر باشد، ماگزیمم توان از شبکه مولد به بار مصرف انتقال می‌یابد. همین مطلب در مدارهای AC مطرح است منتهی برای انتقال ماگزیمم توان متوسط، بایستی امپدانس بار مصرف (Z_L)، با مزدوج امپدانس تونن شبکه مولد، (Z_{Th}^*) برابر باشد. شکل زیر یک شبکه کلی مولد-مصرف را نشان می‌دهد،



که در آن:

$$Z_{Th}=R_{Th}+jX_{Th}$$

$$Z_L=R_L+jX_L$$

$$I=\frac{V_{Th}}{(R_{Th}+jX_{Th})+(R_L+jX_L)} \qquad (1)$$

$$P_{avg}=\frac{1}{2}R_L|I|^2=\frac{1}{2}R_L\frac{|V_{Th}|^2}{(R_{Th}+R_L)^2+(X_{Th}+X_L)^2} \qquad (2)$$

هدف این است که با تغییر R_L و X_L، توان P_{avg}، ماگزیمم شود. لذا:

$$\frac{\partial P}{\partial X_L}=\frac{|V_{Th}|^2R_L(X_{Th}+X_L)}{[(R_{Th}+R_L)^2+(X_{Th}+X_L)^2]^2}\equiv 0 \rightarrow X_L=-X_{Th} \qquad (3)$$

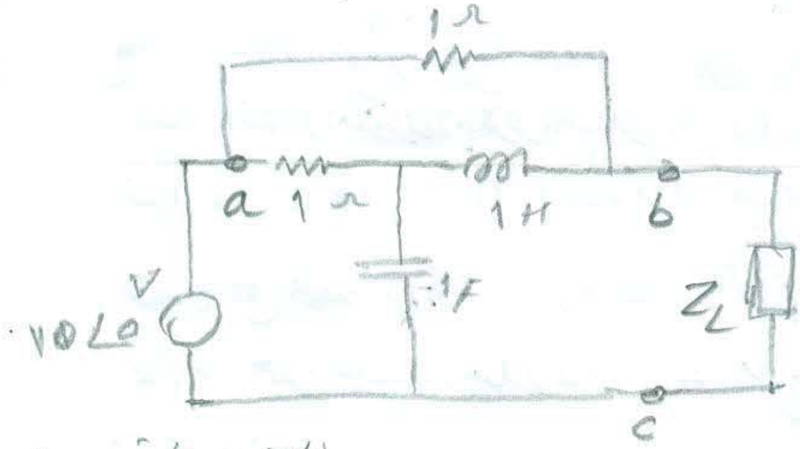
$$\frac{\partial P}{\partial R_L}=\frac{|V_{Th}|^2[(R_{Th}+R_L)^2+(R_{Th}+R_L)^2-2R_L(R_{Th}+R_L)]}{2[(R_{Th}+R_L)^2+(X_{Th}+X_L)^2]^2}\equiv 0 \rightarrow \qquad (4)$$

$$R_L=\sqrt{R_{Th}^2+(X_{Th}+X_L)^2}$$

با مقایسه روابط (4) و (3)، به این نتیجه می‌رسیم که برای انتقال ماگزیمم توان متوسط بایستی: $X_L=-X_{Th}$ و $R_L=R_{Th}$ باشد. و یا:

$$Z_L=Z_{Th}^* \qquad R_L+jX_L=R_{Th}-jX_{Th}$$

2π



– Z_L چقدر باشد تا ماکزیمم توان به آن منتقل شود.

– مقدار این توان چیست؟

– توان راکتیو هر یک از عناصر راکتیو و نیز توان راکتیو کل چقدر است.

$10 \sin(2000\pi t)$

$\omega = 2000\pi \quad \cancel{f = \frac{T}{2\pi}} \quad f = \frac{1}{T}$

Z_{Th}

$\omega = 2\pi f = 2000\pi \longrightarrow f = 1\,KHz$

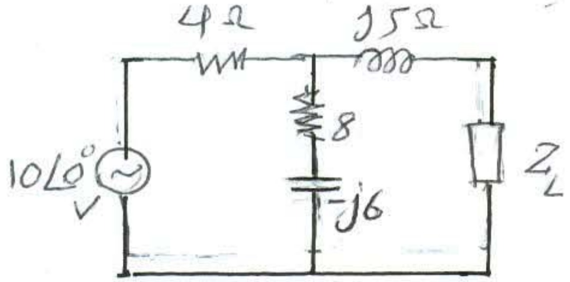
و با گذاشتن $R_L=R_{Th}$ و $X_L=-X_{Th}$ در رابطه (2)، مقدار ماکزیمم توان برابر است با:

$$\max P_{avg} = \frac{|V_{Th}|^2}{8R_{Th}}$$

و هنگامیکه بار مصرف بصورت خالص مقاومتی باشد برای انتقال ماکزیمم توان داریم:

(یعنی $X_L=0$ باشد) برای انتقال ماکزیمم توان: $R_L=\sqrt{R_{Th}^2+X_{Th}^2}=|Z_{Th}|$

مثال ۶۸ در شکل زیر مقدار Z_L چقدر باشد تا ماکزیمم توان به آن منتقل شود. در این صورت مقدار توان اکتیو را محاسبه و نیز توان راکتیوی که در دو سر یکی از عناصر راکتیو ظاهر می‌شود را بدست آورید.



$$Z_{Th}=j5+4\parallel(8-j6)$$
$$=2.933+j4.467\ \Omega$$
$$V_{Th}=\frac{(8-j6)10\angle 0}{8-j6+4}=7.454\angle -10.3^\circ$$

ماکزیمم توان هنگامی به Z_L منتقل می‌شود که:

$$Z_L=Z_{Th}^*=2.933-j4.467$$
$$\max P=\frac{|V_{Th}|^2}{8R_{Th}}=\frac{(7.454)^2}{8(2.933)}=2.368\ W$$
$$Q=\frac{1}{2}X_c|I|^2=\frac{1}{2}(4.467)\frac{|V_{Th}|^2}{(2R_L)^2}=3.606\ VAR$$ خازنی

یادآوری: باید توجه داشت که هنگامیکه ماکزیمم توان به بار منتقل می‌شود ضریب توان شبکه ($\cos\theta = pf$) برابر با 1 است. چرا؟

بنظر شما با توجه به $\theta=0$، آیا نباید توان راکتیوی که بدست آمده برابر با صفر شود؟

$Q=3.606$ VAR

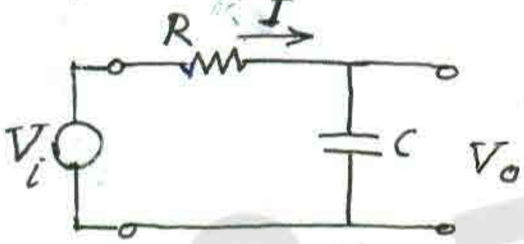
پاسخ فرکانسی و تشدید

Frequency Response and Resonance

در مدارهای شامل اجزای راکتیو، هنگامیکه فرکانس منبع سیگنال ورودی (ولتاژ یا جریان) تغییر می‌کند، پاسخ مدار چه از نظر دامنه و چه از نظر زاویه ثابت نمی‌ماند و این پاسخ وابسته به تغییرات فرکانس سیگنال ورودی است.

$v_i = V_m \sin \omega t$ ، ω متغیر

پاسخ فرکانسی فیلتر پائین گذر low-pass filter



شکل مقابل یک مدار RC را نشان می‌دهد. که در آن v_i ولتاژ ورودی و V_o ولتاژ خروجی است. وقتیکه فرکانس ولتاژ ورودی V_i تغییر می‌کند، می‌خواهیم تغییرات ولتاژ خروجی را از نظر دامنه (اندازه) و فاز (زاویه) تعیین کنیم.

نسبت $\frac{V_o}{V_i}$ را با $H(\omega)$ نشان داده و به تابع انتقال (Transfer Function) موسوم است.

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{-jX_c \cdot I}{(R - jX_c)I} \Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

یا :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_l)} \qquad \omega_l = \frac{1}{RC}$$

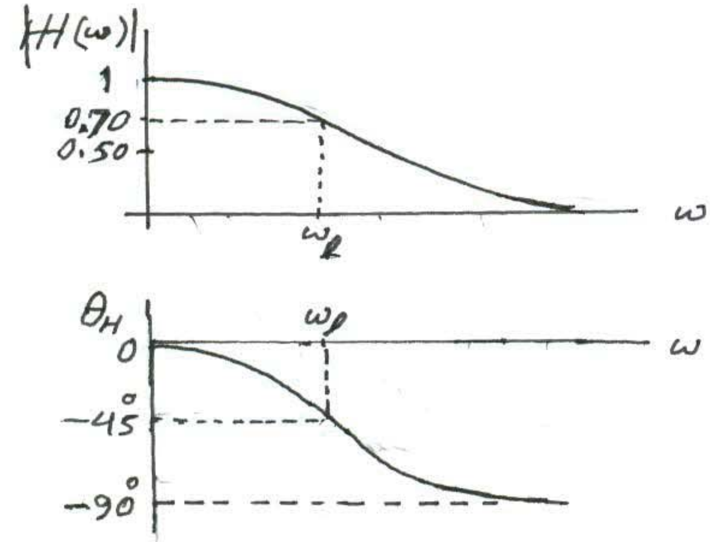
تابع انتقال $H(\omega)$ دارای اندازه و فاز می‌باشد لذا میتوان نوشت :

$$H(\omega) = |H(\omega)| \angle \theta_H$$

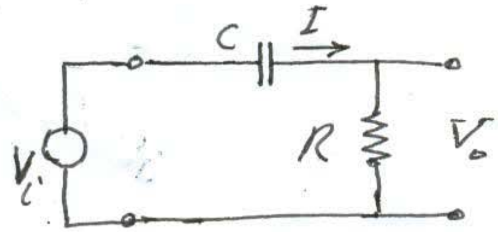
که در آن :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_l)^2}} \quad , \quad \theta_H = tg^{-1}\left(\frac{-\omega}{\omega_l}\right)$$

$|H(\omega)|$ و θ_H برحسب فرکانس رسم شده‌اند.



همانطوریکه از این شکل‌ها دیده می‌شود، اندازه تابع انتقال $|H(\omega)|$، در فرکانس‌های پایین $\omega \ll \omega_\ell$ برابر واحد بوده و برای فرکانس‌های $\omega \to \infty$ برابر صفر می‌گردد. بعبارت دیگر این مدار، فرکانس‌های پایین را براحتی عبور داده است (پایین گذر). همچنین زاویه تابع انتقال، θ_H نیز در فرکانس‌های پایین $\omega \ll \omega_\ell$، صفر بوده و بتدریج به -90° در فرکانس‌های بالا می‌رسد.



<u>فیلتر بالاگذر (High-pass filter)</u>

در شکل مدار بالاگذر (مدار CR) نشان داده شده است. تابع انتقال این مدار عبارتست از:

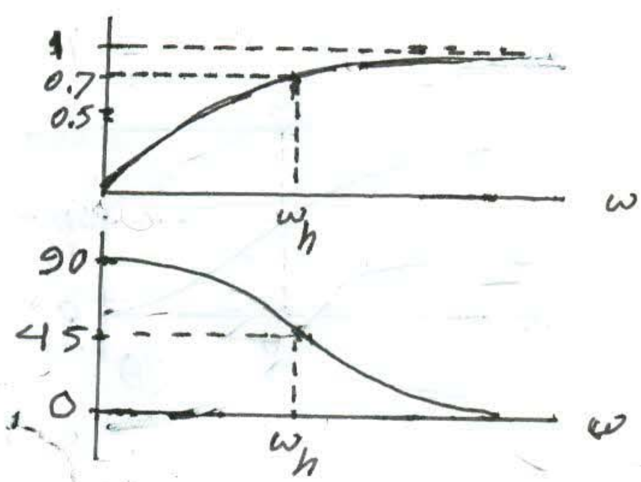
$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{RI}{\left(\frac{1}{j\omega C} + R\right) I}$$

$$= \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

$$H(\omega) = \frac{j(\omega/\omega_h)}{1 + j(\omega/\omega_h)} \qquad \omega_h = \frac{1}{RC}$$

$$|H(\omega)| = \frac{\omega/\omega_h}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_h)^2}}$$

$$\theta_H = 90 - tg^{-1}(\omega/\omega_h)$$



فرکانس قطع (cutoff frequency)

چنانچه برای فرکانس معین مانند ω_c ، اندازه تابع انتقال $|H(\omega)|$ به $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر مقدار ماکزیمم خود برسد، این فرکانس را فرکانس قطع (یا فرکانس نصف قدرت) می‌گویند.

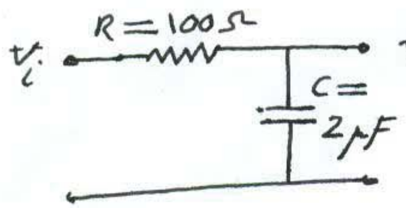
مثلا برای مدار RC پایین گذر داریم:

$$|H(\omega)|_{\omega=\omega_c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \max|H(\omega)|$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_L)^2}}\right|_{\omega=\omega_c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1) \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC} \Rightarrow \frac{1}{\omega_c C} = R$$

مثال ۶۹- برای مدار پایین گذر RC ، برای چه فرکانسی $|H(\omega)| = 0.5$ می‌باشد.

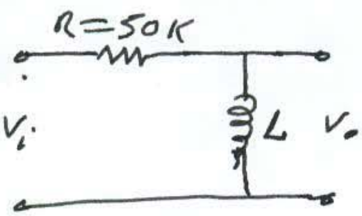
حل: داریم:



$$H(\omega) = \frac{1}{1+j(\omega/\omega_\ell)} \quad , \quad \omega_\ell = \frac{1}{RC}$$

$$(0.5)^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_\ell)^2} \rightarrow \frac{\omega}{\omega_\ell} = \sqrt{3}$$

$$\omega = \sqrt{3}\left(\frac{1}{RC}\right) = 8660 \text{ rad/s} \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 1378 \text{ Hz}$$



مثال ۷۰ - در شکل مقابل، که به فیلتر بالا-گذر موسوم است.

الف - مقدار L را هنگامی که در فرکانس $50\,MHz$ ، $|H(\omega)| = 0.5$ است، محاسبه کنید.

ب - فرکانس قطع مدار را برحسب L و R و سپس برحسب Hz محاسبه کنید.

حل:
$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j\omega L}{R+j\omega L} = \frac{1}{1-j(\omega_x/\omega)} \quad \omega_x = \frac{R}{L}$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_x/\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(f_x/f)^2}}$$

$$|H(\omega)| = 0.5 \quad , \quad f = 50\,MHz \rightarrow 0.5 = \frac{1}{\sqrt{1+(f_x/50)^2}} \rightarrow f_x = 50\sqrt{3}\ MHz$$

$$f_x = \frac{\omega_x}{2\pi} \quad . \quad f_x = \frac{R/L}{2\pi} = \frac{50K/L}{2\pi} = 50\sqrt{3} \rightarrow L = 91.9\ mH$$

ب - فرکانس قطع مدار، فرکانسی است که در آن اندازه $|H(\omega)|$ به $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر $\max|H(\omega)|$ برسد. چنانچه این فرکانس را با f_h نشان دهیم، مقدار آن برابر است با:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(f_x/f_h)^2}} \equiv \max|H(\omega)| \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

چون $\max|H(\omega)|$ برابر با 1 است، لذا:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(f_x/f_h)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow f_h = f_x = \frac{R/L}{2\pi} = 50\sqrt{3}\ MH_z$$

مثال ۷۱ - در شکل زیر، که یک فیلتر پایین گذر (low - pass) را نشان می‌دهد.
مقدار $|v_o/e_{in}|$ را در فرکانس‌های $5\times10^3 \frac{rad}{s}$، $1.25\times10^4 \frac{rad}{s}$، و $3.6\times10^4 \frac{rad}{s}$ را محاسبه کنید.

ب - زاویه ولتاژ خروجی، $\angle v_o$ را در فرکانس‌های ذکر شده را نیز تعیین کنید.

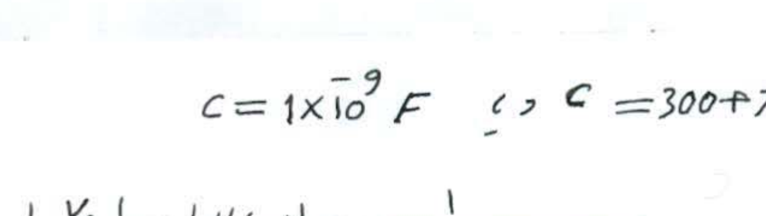


FIGURE 18.41 (Exercise 18.7)

حل - داریم:

$$\frac{v_o}{e_{in}} = H(\omega) = \frac{1}{1 - j(\omega/\omega_\ell)}$$

که در آن:

$$\omega_\ell = \frac{1}{RC}$$

$$C = 1\times10^{-9} F \quad \text{در} \quad C = 300+700 = 1000pF, \ R = 33+47 = 80K\Omega$$

$$\left|\frac{V_o}{e_{in}}\right| = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_\ell)^2}} \quad , \quad \angle V_o = \angle H(\omega) + \angle e_{in}$$

$$\angle V_o = -tg^{-1}(\omega/\omega_\ell) + 45°$$

چون:

$\omega = 5\times10^3$, 1.25×10^4 , 3.6×10^4 داریم، خواهیم داشت: $\omega_\ell = \frac{1}{(80K)(1nF)} = 12500\ rad/s$

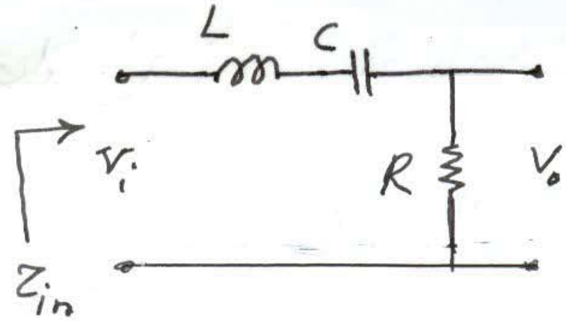
$|H(\omega)| = 0.928$, 0.707 , 0.328

$\angle V_o = 23.20°$, $0°$, $-25.85°$

23.20

مدار RLC سری - مدار Resonance

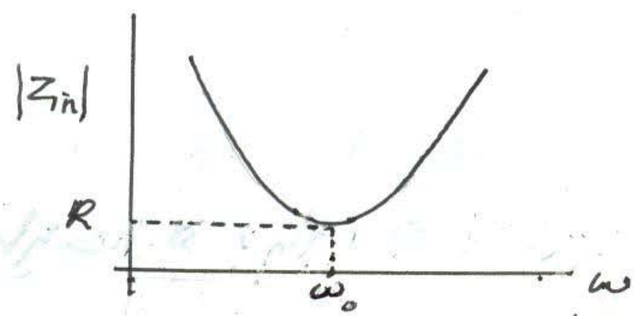
یا فیلتر میان گذر Band-pass filter



شکل مقابل یک مدار RLC سری را نشان میدهد. امپدانس ورودی Z_{in} برابر است با:

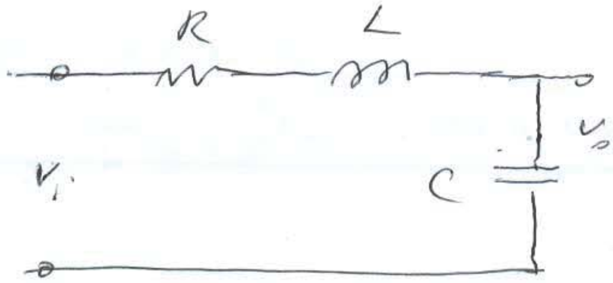
$$Z_{in} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$|Z_{in}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$



هنگامیکه فرکانس ولتاژ ورودی $V_i = V \sin \omega t$، تغییر میکند اندازه $|Z_{in}|$ در فرکانس ω_0 به کمترین مقدار خود که برابر R، که مقدار حقیقی است، میرسد.

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$



$L = 10\ mH$

$R = 1K$

$C = 10\mu F$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{S^2LC + SRC + 1}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$(1)\quad \frac{V_o}{V_i} = H(\omega) = \frac{1}{(S/\omega_o)^2 + (\frac{1}{Q})(S/\omega_o) + 1}$$

$$K = \frac{1}{2Q} = \frac{R}{2\omega_o L} \qquad = \frac{1}{(S/\omega_o)^2 + 2K(S/\omega_o) + 1}$$

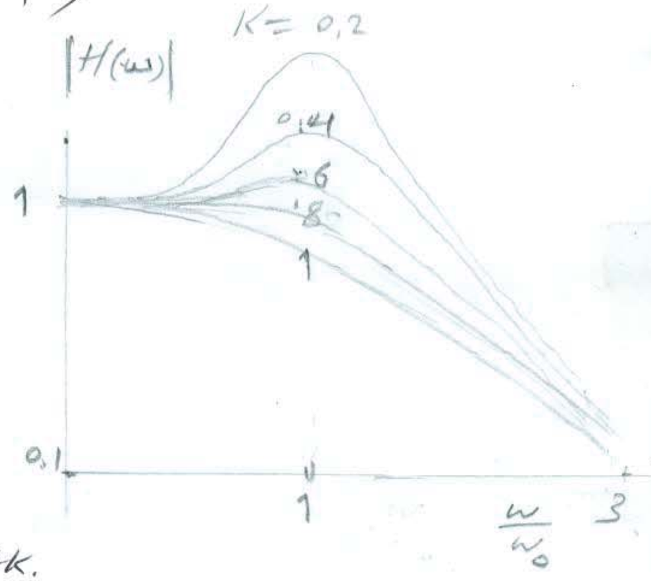
$$S_1, S_2 = \omega_o\left(-K \pm \sqrt{K^2 - 1}\right)$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - (\frac{\omega}{\omega_o})^2\right]^2 + 4K^2(\frac{\omega}{\omega_o})^2}}$$

$$\frac{dV}{d\omega} = 0 \rightarrow \omega = \omega_o\sqrt{1 - 2K^2}$$

$$|H(\omega)|_{peak} = \frac{1}{2K\sqrt{1 - K^2}}$$

If $2K^2 > 1 \rightarrow K > \frac{\sqrt{2}}{2}$, No peak.



$R = \quad 5K \quad 2K \quad 1K$

- تابع انتقال مدار را بیابید بصورت رابطه (1) بنویسید.

- اندازه $|H(\omega)|$ را برای مقادیر مختلف پارامتر K مقایسه و رسم کنید

فرکانسی که در آن قسمت موهومی Z_{in} برابر صفر می‌شود، فرکانس تشدید نامیده می‌شود و مقدار آن برابر است با:

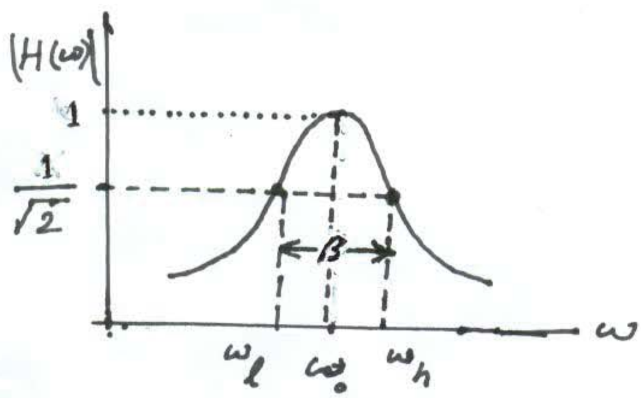
$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

تابع انتقال و منحنی رزنانس مدار RLC

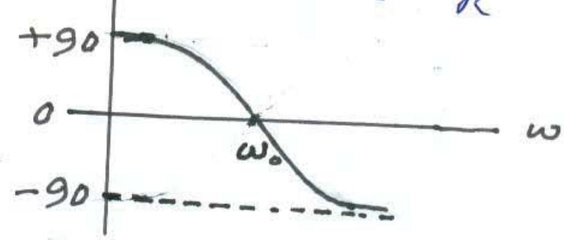
$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = |H(\omega)| \angle\theta$$

$$|H(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

در زیر تغییرات دامنه و فاز برحسب ω رسم شده‌اند.



$$\theta = -tg^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$



در شکل فوق ω_l و ω_h به فرکانس‌های نصف قدرت پایین و بالا موسوم بوده و مقدار آنها بصورت زیر محاسبه می‌شوند. همانطوریکه قبلاً گفته شد، ω_l و ω_h فرکانس‌هایی هستند که در آنها اندازه تابع انتقال $|H(\omega)|$ به $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر مقدار ماکزیمم خود $max|H(\omega)|$ می‌رسد.

$$max|H(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}_{0}}} = 1 \qquad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\ max|H(\omega)|$$

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 \rightarrow \omega^2 \mp \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0$$

که از معادله فوق حاصل می‌شود:

$$Q_0^2 = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{L}{C} = \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{RC}$$

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L^2}{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{\sqrt{LC}}{CR} = \sqrt{\frac{LC}{C^2R^2}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\ \frac{1}{R}$$

$$\frac{1}{RC} \propto \frac{4L^2}{R^2} = \frac{4L}{CR^2}$$

$$\omega_L = \frac{-\omega_0}{2Q_0}$$

$$\omega_c = \frac{-R}{2L} + \frac{R}{2L}\sqrt{1 + \frac{1}{LC}\cdot\left(\frac{2L}{R}\right)^2}$$

$$\sqrt{1 + 4\,\frac{L}{R}\cdot\frac{1}{RC}}$$

$$\sqrt{1 + 4\,\frac{Q_0}{\omega_0}\cdot Q_0\omega_0} \equiv \sqrt{1 + 4Q_0^2}$$

$$\omega_l = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_h = \frac{+R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$ فرکانس های نصف قدرت در شکل صفحه قبل دیده می شوند.

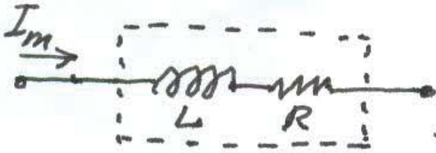
تفاضل $\omega_h - \omega_l$ به عرض باند (Band width) موسوم است و به β نشان داده می شود.

$$BW = \beta = \omega_h - \omega_l \rightarrow \beta = \frac{R}{L}$$

ضریب کیفیت <u>Quality Factor</u> : طبق تعریف، ضریب کیفیت در یک مدار کلی عبارت از نسبت زیر است :

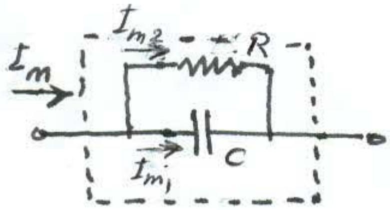
$$Q = \frac{2\pi\,(\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده})}{(\text{انرژی تلف شده در یک پریود})}$$

مثلاً در مورد یک سلف واقعی و یک خازن واقعی داریم :



سلف واقعی

$$Q_{\text{سلف}} = \frac{\frac{1}{2} X_L I_m^2}{\frac{1}{2} R I_m^2} = \frac{\omega L}{R}$$



خازن واقعی

$$Q_{\text{خازن}} = \frac{\frac{1}{2} X I_{m_1}^2}{\frac{1}{2} R I_{m_2}^2} = \omega RC$$

و ضریب کیفیت برای یک مدار RLC سری، بخصوص در حالت تشدید (Resonance) عبارتست از :

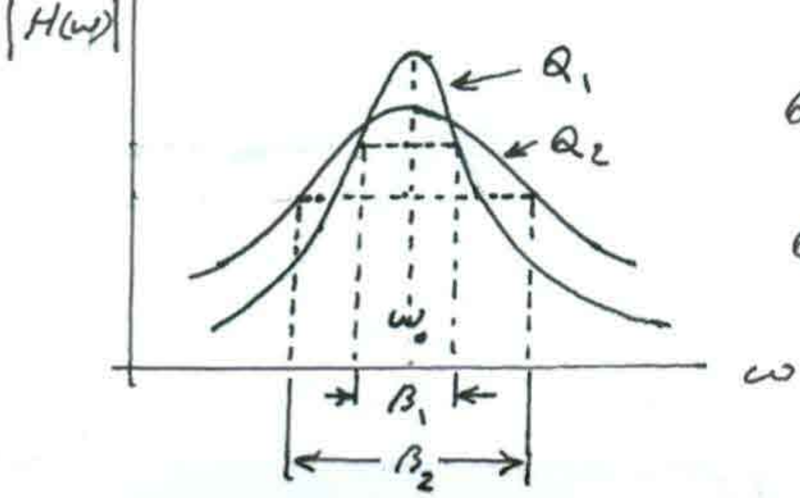
$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

و نیز رابطه بین عرض باند (BW) و ضریب کیفیت Q_0، و نیز ω_l و ω_h را میتوان نوشت :

$$\beta = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q_0} \quad , \quad \omega_l = \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{Q_0}\left(\sqrt{1+4Q_0^2} - 1\right)$$

$$\omega_h = \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{Q_0}\left(\sqrt{1+4Q_0^2} + 1\right)$$

بطور کلی رابطه $B=\frac{R}{L}=\frac{\omega_0}{Q_0}$ در مورد مدار RLC نوشته شده. نشان میدهد که هر چه «ضریب کیفیت» مدار بیشتر باشد، «عرض باند» کوچکتر خواهد بود. این مطلب در شکل زیر نشان داده شده است.



$$Q_1=\frac{\omega_0}{B_1} \qquad Q_1 > Q_2$$

$$Q_2=\frac{\omega_0}{B_2} \qquad B_1 < B_2$$

مثال ۷۲ - ضریب کیفیت یک سلف $50\,mH$ در فرکانس $f=\frac{10}{\pi}\,KHz$ برابر با 25 است. اگر این سلف در یک مدار با یک خازن $0.02\,\mu F$ بصورت سری بکار رود، ضریب کیفیت مدار در فرکانس رزنانس چقدر خواهد شد؟

حل: ابتدا مقاومت معادل سلف را تعیین میکنیم

$$Q=\frac{\omega L}{R}$$

$$R=\frac{\omega L}{Q}=\frac{2\pi\times\frac{10\,KHz}{\pi}\times 50\times10^{-3}}{25}=40\ \Omega$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{50\times0.02\times10^{-9}}}=31622.77\ rad/s$$

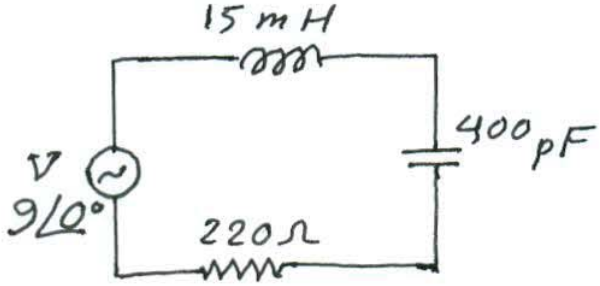
$$Q_0=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{\omega_0 CR}$$

$$=\frac{31622.77\times50\times10^{-3}}{40}$$

$$Q_0=39.52$$

مدارهای RLC سری

مثال ۷۳ – در شکل مقابل:



الف – فرکانس رزنانس را محاسبه کنید

ب – راکتانس های سلفی و خازنی و امپدانس مدار را در فرکانس رزنانس تعیین کنید.

همچنین دیاگرام فازور را که مقادیر بدست آمده را نشان دهد، رسم نمائید.

حل –

$$Z_{in} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

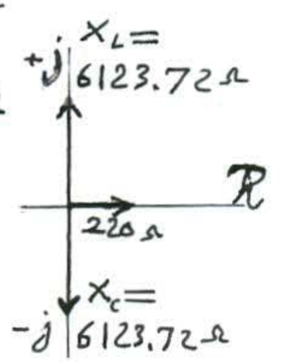
$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{15\times10^{-3}\times 400\times10^{-12}}}$$

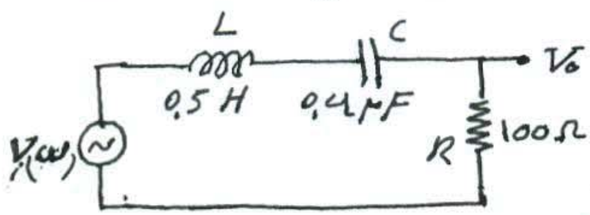
$$\omega_0 = 408248 \ \frac{rad}{s} = 64974.7 \ Hz$$

$$X_L = \omega L = 408248\times15\times10^{-3} = 6123.72 \ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{408248\times400\times10^{-12}} = 6123.72 \ \Omega$$

$$Z_{in} = 220 + j(0) = 220 \ \Omega$$





مثال ۷۴ – در شکل مقابل:

الف – فرکانس مرکزی و فرکانس های نصف قدرت را محاسبه کنید.

ب – عرض باند B و ضریب کیفیت Q را تعیین کنید و نشان دهید که رابطه $\omega_0 \approx \frac{\omega_l+\omega_h}{2}$ برقرار است یا خیر.

الف

$$Z_{in}(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \xrightarrow{\text{در فرکانس مرکزی}} Z_{in}(\omega_0) = R \ , \ \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0.5(0.4\times10^{-6})}} = 2236.1 \ rad/s \qquad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 355.9 \ Hz$$

فرکانس های نصف قدرت ω_l و ω_h که قبلاً بدست آمده (درس تئوری) بصورت زیر محاسبه می شوند.

$$\omega_l = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + 1/LC} = 2138.3\ \frac{rad}{s},\ f_l = 340.3\ Hz$$

$$\omega_h = \frac{+R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + 1/LC} = 2338.3\ \frac{rad}{s},\ f_h = 372.1\ Hz$$

(ب) $BW = \beta = \omega_h - \omega_l = 2338.3 - 2138.3 = 200\ rad/s$

$$\beta = \frac{\omega_0}{Q_0} \rightarrow Q_0 = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{2236.1}{200} = 11.18$$

$$\frac{\omega_l + \omega_h}{2} = \frac{2138.3 + 2338.3}{2} = 2238.3\ \frac{rad}{s}$$

با توجه به اینکه $\omega_0 = 2236.1$ rad/s است، این مقدار بسیار نزدیک به 2238.3 می‌باشد

لذا می‌توان گفت که $\omega_0 \approx (\omega_l + \omega_h)/2$ است.

یادآوری: علت اینکه $\omega_0 \simeq \frac{\omega_l + \omega_h}{2}$ این است که $Q_0 \geq 10$ می‌باشد و همانطور که (ص ۱۰۶)

دیده‌ایم، می‌توان ω_l و ω_h را بصورت زیر نوشت (در متن درس دیده‌ایم)

$$\omega_l = \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{Q_0}\left(\sqrt{1+4Q_0^2} - 1\right) \qquad Q > 10$$

$$\omega_h = \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{Q_0}\left(\sqrt{1+4Q^2} + 1\right) \qquad \Rightarrow \frac{\omega_l + \omega_h}{2} = \omega_0$$

مثال ۷۵ - نشان دهید که $\omega_0 = \sqrt{\omega_l \omega_h}$

حل: داریم:

$$\omega_l \cdot \omega_h = \left(\frac{-R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}\right)\left(\frac{+R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}\right)$$

$$= -\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} \rightarrow \omega_l \cdot \omega_h = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

مثال ۷۶ - در مدار سری RLC؛ $R = 20\Omega$، $L = 50mH$ و $C = 1\mu F$

ضریب کیفیت Q را با استفاده از $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$، $Q = \frac{1}{\omega_0 RC}$ و $Q = \frac{\omega_0}{\beta}$ محاسبه کنید.

حل:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.05 \times 10^{-6}}} = 4472 \ rad/s$$

$$\omega_l = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 4276.6 \ rad/s$$

$$\omega_h = \frac{+R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 4676.6 \ rad/s \ ,$$

$$\beta = \omega_h - \omega_l = 400 \ rad/s$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{4472(0.05)}{20} = 11.2$$

$$Q = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{4472(20)(10^{-6})} = 11.2$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{4472}{400} = 11.2$$

(قبلا صفحه ۱۱۴ #۱۴ را ببینید)

مثال ۷۷ - یک سیم پیچ (سلف) (coil) دارای $L = 50 \ mH$ و مقاومت داخلی $R = 15 \ \Omega$ است.

الف - ضریب کیفیت این سلف را در فرکانس‌های $10 \ KHz$ و $50 \ KHz$ محاسبه کنید.

ب - مدار معادل موازی همین سلف را در فرکانس $10 \ KHz$ و $250 \ Hz$ بدست آورید.

(الف)

$$Q_{coil} = \frac{\omega L}{R} = \frac{2\pi(10 \times 10^{3})(50 \times 10^{-3})}{15} = 209$$

$$Q_{coil} = \frac{\omega L}{R} = \frac{2\pi(50 \times 10^{3})(50 \times 10^{-3})}{15} = 1047$$

(ب)

$$R_p = \left[R_s + \left(\frac{\omega L_s}{R_s}\right)^2\right] R_s = R_s\left[1 + Q_s^2\right] = 15(1 + 209^2) = 655^{K\Omega}$$

(رجوع کنید به صفحه ۱۱۴)

چون $Q_s \gg 10$ است، لذا $R_p \approx R_s Q_s^2 = 655^{K\Omega}$

$$L_p = L_s(1 + 1/Q_s^2) \approx L_s = 50 mH$$

و در فرکانس $250 \ Hz$،

$$Q_s = \frac{2\pi(250)(50 \times 10^{-3})}{15} = 5.24$$

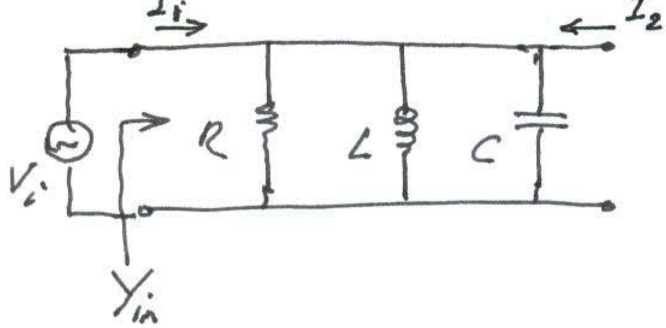
$$R_p = R_s\left[1 + Q_s^2\right] = 15(1 + 5.24^2) = 426.9 \ \Omega$$

$$L_p = L_s(1 + 1/Q_s^2) = 50 \times 10^{-3}\left[1 + 1/(5.24)^2\right] = 51.8 \ mH$$

۱۰۷

مدار RLC موازی Band-stop filter

شکل مقابل یک مدار رزنانس موازی را نشان میدهد. نظیر آنچه که در مدار رزنانس سری دیده ایم، در اینجا نیز برای تعیین فرکانس رزنانس، قسمت موهومی ادمیتانس (امپدانس) مدار را برابر با صفر قرار میدهیم.

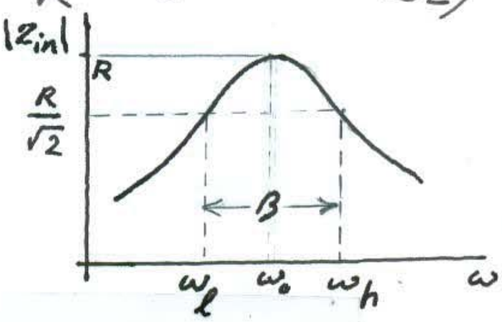


$$Y_{in} = \frac{1}{Z_{in}} = \frac{1}{R \| jX_L \| \frac{1}{jX_C}}$$

$$Y_{in} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$

$$= \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



$$Z_{in} = \frac{\frac{1}{R} - j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

در اینجا نیز فرکانسهای نصف قدرت ω_l و ω_h که در شکل فوق نشان داده شده بصورت زیر هستند:

$$\omega_l = \frac{-1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_h = \frac{+1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

همچنین ضریب کیفیت شبکه موازی RLC، Q_0، پهنای باند β و فرکانسهای نصف قدرت روابط زیر را با یکدیگر دارند:

$$Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 C R = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\beta = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{1}{RC} \equiv \omega_h - \omega_l \ , \quad \omega_l, \omega_h = \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{Q_0}\left(\sqrt{1+4Q_0^2} \mp 1\right)$$

$$\left[(R_1R_2 - x_1x_2) + j(R_1x_2 + R_2x_1)\right]\left[(R_1+R_2) - j(x_1+x_2)\right]$$

$$(R_1R_2 - x_1x_2)(R_1+R_2) + (R_1x_2 + R_2x_1)(x_1+x_2)$$

$$+\, j\left[(R_1x_2 + R_2x_1)(R_1+R_2) - (R_1R_2 - x_1x_2)(x_1+x_2)\right]$$

$$R_1x_2(R_1+R_2) + R_2x_1(R_1+R_2) - (R_1R_2x_1 + R_1R_2x_2 - x_1^2x_2 - x_1x_2^2)$$

$$R_1^2x_2 + \cancel{R_1R_2x_2} + \cancel{R_1R_2x_1} + R_2^2x_1 - \cancel{R_1R_2x_1} - \cancel{R_1R_2x_2} + x_1^2x_2 + x_1x_2^2$$

$$R_1^2x_2 + R_2^2x_1 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = 0 \qquad x_1 = \frac{-1}{\omega C}$$

$$R_1^2\omega L + R_2^2\frac{-1}{\omega C} + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\omega L - \frac{1}{\omega C}(\omega L)^2 = 0 \qquad x_2 = \omega L$$

$$R_1^2\omega L - \frac{R_2^2}{\omega C} + \frac{\omega L}{(\omega C)^2} - \frac{(\omega L)^2}{\omega C} = 0$$

$$R_1^2\omega L(\omega C)^2 - R_2^2(\omega C) + \omega L - (\omega L)^2(\omega C) = 0$$

$$\omega^2C^2LR_1^2 - CR_2^2 + L - \omega^2L^2C = 0$$

$$\omega^2(C^2LR_1^2 - L^2C) = CR_2^2 - L \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{CR_2^2 - L}{C^2R_1^2L - L^2C}}$$

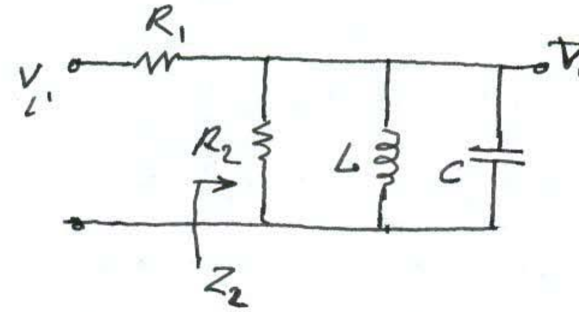
$$= \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{CR_2^2 - L}{R_1^2C^2 - LC}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_2^2 - L/C}{R_1^2 - \frac{L}{C}}}$$

$$R_1 = 0 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_2^2C - L}{R_1^2C - L}}$$

$$\Big/\ \frac{1}{LC} -$$

$$= \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{L - R_2^2C}{L}}$$



مثال ۷۸ - در شکل مقابل، که بردار تانک نیز مرسوم است؛ تابع انتقال $H(\omega)=V_2/V_1$ و فرکانسی که در آن $H(\omega)$ مقداری حقیقی است، بدست آورید.

حل: (الف)

(الف)

$$H(\omega)=\frac{V_o}{V_i}=\frac{Z_2}{Z_2+R_1}=\frac{1}{1+R_1Y_2}$$

$$=\frac{1}{1+R_1\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L}+j\omega C\right)}=\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+jR_1\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)}$$

(ب) مقدار $H(\omega)$ هنگامی حقیقی است که Y_2 مقداری حقیقی باشد (به عبارت دیگر مقدار موهومی آن برابر صفر گردد):

$$\omega C-\frac{1}{\omega L}=0 \qquad \omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\omega_0$$

توجه! در فرکانس ω_0، نه تنها $|Z_2|$ و $|H(\omega)|$ مقادیری ماکزیمم هستند، بلکه $|Z_{in}|=|R_1+Z_2|$ نیز ماکزیمم است! چرا؟

مثال ۷۹ - در مثال قبل، فرکانس‌های نصف قدرت و عرض باند β را محاسبه و آنها را برحسب پارامتر $R_x=R_1\|R_2$ رسم کنید.

حل: فرکانس نصف قدرت فرکانسی است که در آن، $|H(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{2}}\times|H(\omega)|_{max}$ است.

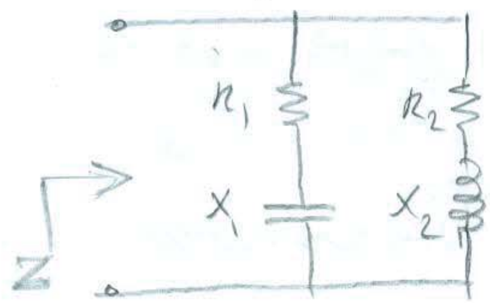
$$|H(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1+R_1/R_2)^2+R_1^2(\omega C-1/\omega L)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}}$$

$$R_1\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)=\pm\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)$$

طرفین را بر $\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)$ تقسیم می‌کنیم:

$$R_x\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)=\pm 1$$

$R_1 \neq R_2$



∴ بدون اینکه کسری را در مزدوج مخرج ضرب کنیم.

$$Z = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)}$$

$$= \frac{(R_1R_2 - X_1X_2) + j(R_1X_2 + R_2X_1)}{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)}$$

$$Z = \frac{R_1R_2 - X_1X_2}{R_1 + R_2}\left(\frac{1 + j\dfrac{R_1X_2 + R_2X_1}{R_1R_2 - X_1X_2}}{1 + j\dfrac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2}}\right)$$

Possibility 1
$$\begin{cases} \dfrac{R_1X_2 + R_2X_1}{R_1R_2 - X_1X_2} = 0 \\ \dfrac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad R_1 = R_2, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Possibility 2
$$\left\{ \frac{R_1X_2 + R_2X_1}{R_1R_2 - X_1X_2} = \frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2} \right.$$

$$R_1^2X_2 + R_2^2X_1 = -X_1X_2^2 - X_1^2X_2$$

$$X_1 = \frac{-1}{\omega C}, \quad X_2 = \omega L$$

$$\omega L\left(R_1^2 - \frac{L}{C}\right) - \frac{1}{\omega C}\left(R_2^2 - \frac{L}{C}\right) = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_2^2 - L/C}{R_1^2 - L/C}} \qquad Q_P = \frac{Q_1Q_2}{Q_1 + Q_2}$$

در فرکانس رزونانس
$$Z_0 = \frac{R_1R_2 + L/C}{R_1 + R_2}\angle 0^\circ \ \Omega \qquad R_1 > \sqrt{L/C}, \quad R_2 > \sqrt{L/C}$$

که از رابطه اخیر داریم :

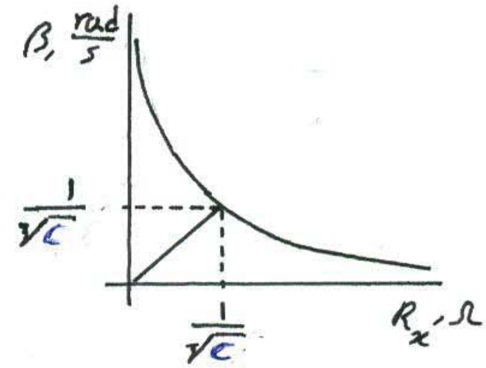
$$\omega^2 \pm \omega\left(\frac{1}{R_x C}\right) - \frac{1}{LC} = 0$$

$$\omega_l , \omega_h = \mp \frac{1}{2R_x C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2R_x C}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

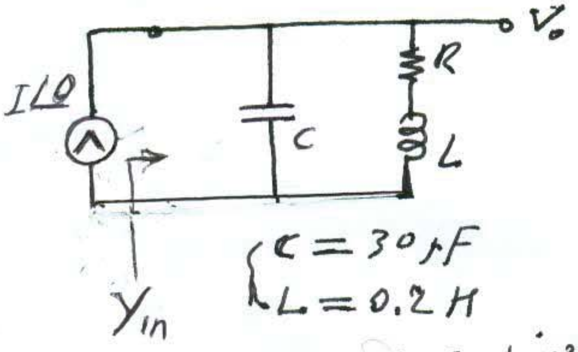
$$\beta = \omega_h - \omega_l = \frac{1}{R_x C}$$

$$= \frac{\omega_0}{Q_0}$$

$$\frac{d\beta}{dR_x} = \frac{1}{C}\,\frac{-1}{R_x^2}$$



مثال ۸۰ - در شکل مقابل، فرکانس رزنانس مدار را وقتی $R=0$ و $R=50\,\Omega$ محاسبه کنید و با یکدیگر مقایسه کنید.



$$\begin{cases} C = 30\,\mu F \\ L = 0.2\,H \end{cases}$$

$$Y_{in} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$

$$= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right]$$

برای فرکانس رزنانس، قسمت موهومی Y_{in} برابر با صفر است.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}$$

$$R = 0 , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.2)(30\times10^{-6})}} = 408.2 \ \text{rad/s}$$

$$R = 50, \quad \omega_0 = 408.2\sqrt{1 - \frac{(50)^2(30\times10^{-6})}{0.2}} = 322.9 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

بدیهی است که اگر $R=0$ باشد (سلف ایده‌آل)، مدار به یک مدار تانک خالص تبدیل می‌شود.

$$(R_p - jX_p)$$

$$Z_p = R_p \parallel jX_p = \frac{jR_p X_p}{R_p + jX_p} = \frac{R_p X_p^2 + jR_p^2 X_p}{R_p^2 + X_p^2}$$

$$R_s = \frac{R_p X_p^2}{R_p^2 + X_p^2}$$

$$R_s(R_p^2 + X_p^2) = R_p X_p^2$$

$$X_p^2 (R_s - R_p) + R_s R_p^2 = 0$$

$$X_s = \frac{R_p^2 X_p}{R_p^2 + X_p^2}$$

$$X_p^2 = \frac{R_s R_p^2}{R_p - R_s}$$

$$X_s = \frac{R_p^2 \sqrt{\frac{R_s R_p^2}{R_p - R_s}}}{R_p^2 + \frac{R_s R_p^2}{R_p - R_s}}$$

$$\frac{R_s}{X_s} = \frac{X_p}{R_p}$$

$$R_p = \frac{X_s X_p}{R_s}$$

$$R_s = \frac{(X_s X_p / R_s) X_p^2}{\left(\frac{X_s X_p}{R_s}\right)^2 + X_p^2} = \frac{\frac{X_s}{R_s X_p} \times R_s^2}{(X_s X_p)^2 + X_p^2 R_s^2}$$

$$R_s = \frac{\frac{X_s R_s}{X_p}}{(X_s X_p)^2 + (X_p R_s)^2} = \frac{R_s X_s}{X_p\left[(X_s X_p)^2 + (R_s X_p)^2\right]}$$

0912 218 4766

تبدیل مدارهای سری و موازی به یکدیگر Series-parallel conversions

برای تبدیل مدار سری به موازی و بالعکس کافیست امپدانس معادل آنها را با یکدیگر برابر بگذاریم.

تبدیل سری به موازی

$$Z_s = R_s + jX_s \quad \Rightarrow \quad R_p = R_s\left[1+\left(\frac{\omega L_s}{R_s}\right)^2\right] = R_s(1+Q_s^2)$$

$$Z_p = R_p \| jX_p \qquad L_p = L_s\left[1+\left(\frac{R_s}{\omega L_s}\right)^2\right] = L_s\left(1+\frac{1}{Q_s^2}\right)$$

اگر $Q_s \gg 10$ باشد، در اینصورت: $R_p \approx R_s Q_s^2$ و $L_p \approx L_s$

و در مورد تبدیل مدار موازی خازنی به مدار سری به طور مشابه میتوان نوشت:

تبدیل موازی به سری

$$R_s = \frac{R_p}{1+(\omega C_p R_p)^2} = \frac{R_p}{1+Q_p^2}$$

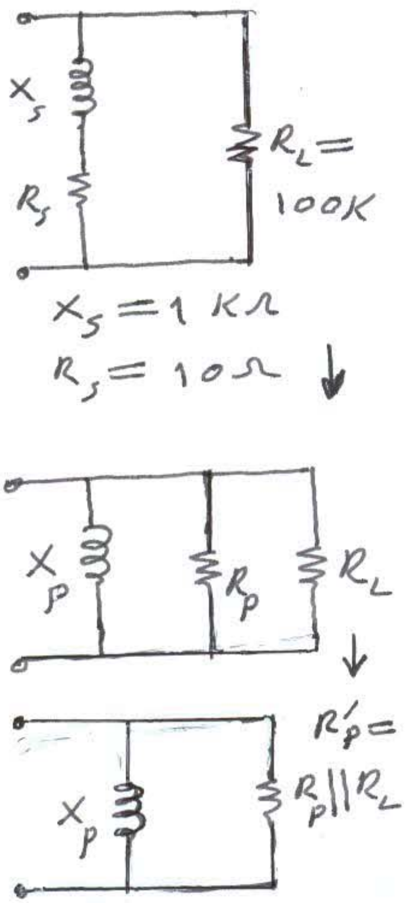
$$C_s = C_p\left[1+\frac{1}{(\omega C_p R_p)^2}\right] = C_p\left(1+\frac{1}{Q_p^2}\right)$$

و نیز برای تبدیل مدار سری خازنی به مدار موازی:

$$R_p = R_s\left[1+\frac{1}{(\omega C_s R_s)^2}\right] = R_s(1+Q_s^2)$$

$$C_p = \frac{C_s}{1+(\omega C_s R_s)^2} = \frac{C_s}{1+(1/Q_s)^2}$$

مثال ۸۱ - ضریب کیفیت شکل مقابل چقدر است؟



حل: با آنچه که در تبدیل مدار سری به موازی و بالعکس دیده‌ایم.
مدار فوق به ترتیب به شکل زیر تبدیل می‌شود.

چون ضریب کیفیت سلف به تنهایی به صورت زیر است:

$$Q_s = \frac{X_s}{R_s} = \frac{1000\Omega}{10} = 100 > 10$$

لذا

$$R_p = R_s(1+Q_s^2) \simeq R_s Q_s^2 = 100K\Omega$$

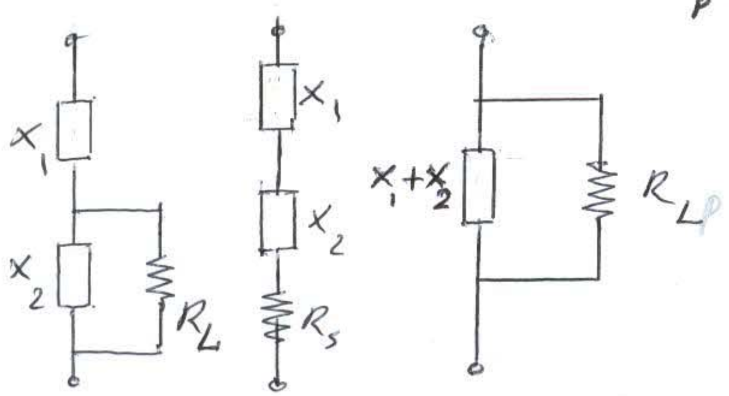
$$X_p = X_s\left(1+\frac{1}{Q_s^2}\right) \simeq X_s = 1K\Omega$$

$$R'_p = R_p \| R_L = R_s Q_s^2 \| R_L = 100^K \| 100^K = 50K\Omega$$

و ضریب کیفیت کل شبکه برابر است با:

$$Q = \frac{R'_p}{X_p} = \frac{50K}{1K} = 50$$

مثال ۸۲ - در شکل زیر، ضریب کیفیت $Q_1 = \frac{R_L}{X_2}$ بزرگتر از ۱۰ است. و نیز فرض می‌شود که فرکانس Q برای هر ترکیب دیگر مورد استفاده بزرگتر از ۱۰ باشد.
~~مقدار~~ نشان دهید که $R_p = R_L\left(1+\frac{X_1}{X_2}\right)^2$



حل -

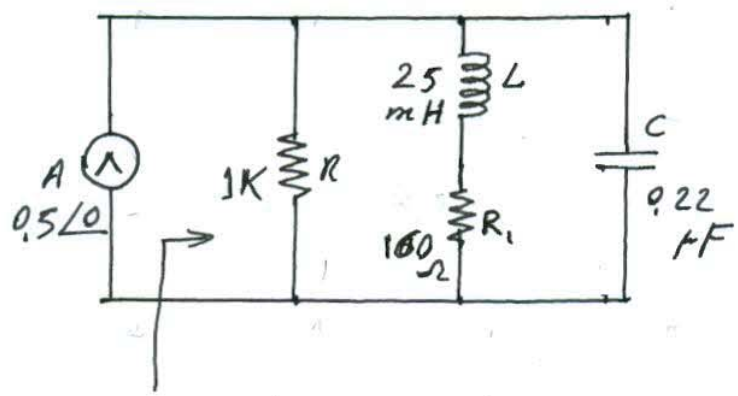
$$R_L \simeq R_s Q_1^2 \quad (1)$$

$$R_s = \frac{R_L}{(R_L/X_2)^2} = \frac{X_2^2}{R_L}$$

اگر Q_2 ضریب کیفیت X_1+X_2 و R_s باشد:

$$R_p \simeq Q_2^2 R_s = \frac{(X_1+X_2)^2}{R_s} \quad (2)$$

با ترکیب (1) و (2)، $R_p = R_L\left(1+\frac{X_1}{X_2}\right)^2$



مثال ۸۳ - در شکل مقابل مطلوبست :

الف - فرکانس رزنانس و ضریب کیفیت .

ب - درصد اختلاف بین فرکانس رزنانس وقتیکه $R_1=0$ است .

$$Y_{in}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1+j\omega L}+j\omega C$$

$$=\frac{1}{R}+\frac{(R_1-j\omega L)}{R_1^2+(\omega L)^2}+j\omega C$$

$$Y_{in}=\frac{1}{R}+\frac{R_1}{R_1^2+(\omega L)^2}+j\left(\omega C-\frac{\omega L}{R_1^2+(\omega L)^2}\right)$$

قسمت موهومی $Y_{in}=0 \rightarrow \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{R_1^2 C}{L}}$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{25\times10^{-3}\times0.22\times10^{-6}}}\sqrt{1-\frac{(160)^2\times0.22\times10^{-6}}{25\times10^{-3}}}$$

$$\omega_0=11868.36 \quad rad/s$$

ضریب کیفیت شبکه از رابطه $Q_0=\frac{R'}{\omega_0 L_p}=\frac{1}{R'C\omega_0}$ بدست میآید که در آن R' ترکیب موازی

$R'=R\|R_{1p}$ است که R_{1p} برابر است با :

$$R_{1p}=R_1\left[1+\left(\frac{\omega_0 L_0}{R_1}\right)^2\right]=160\left[1+\left(\frac{11868.36\times0.025}{160}\right)^2\right]=710\,\Omega$$

$$L_p=L\left[1+(R_1/\omega_0 L)^2\right]=0.025\left[1+(160/11868\times0.025)^2\right]=32.2\ mH$$

$$Q_0=\frac{1000\|710}{11868.36\times0.032}=1.1$$

ب - اگر $R_1=0$ باشد؟

$$\omega_0\Big|_{R_1=0}=1/\sqrt{LC}=13484\ rad/s$$

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}=\frac{13484-11868}{11868}=13.6\%$$