بسمه تعالی

جزوه

مکانیک سیالات پیشرفته

دانشگاه

تهران

استاد

دکتر صادقی

فهرست

۱- معادلات حاکم بر جریان ---- ۱
۲- شرط‌های مرزی مناسب ۱۷
۳- جریان کوئت ۲۰
۴- جریان کوئت چرخشی ۲۱
۵- مسئله شماره ۱ استوکس ۲۷
۶- مسئله شماره ۲ استوکس ۳۰
۷- جریان پوازی ۳۱
۸- جریان در کانال بیضی ۳۴
۹- " در کانال مستطیلی ۳۶
۱۰- جریان ضربانی ۳۹
۱۱- جریان در کانالهای همگرا و واگرا ۴۳
۱۲- دینامیک حباب گازی ۴۶
۱۳- جریان با نقطه سکون ۵۱
۱۴- جریان ثقلی ۵۴
۱۵- جریان در بالای صفحه متخلخل ۵۷
۱۶- حل های تقریبی ۶۰
۱۷- جریان خزشی اطراف کره ۶۲
۱۸- جریان خزشی اطراف کره ۶۹
۱۹- جریان خزشی حول استوانه ۷۴
۲۰- جریان خزشی اطراف قطره ۷۶
۲۱- تقریب روغن کاری ۷۹
۲۲- تقریب لایه های مرزی ۸۳
۲۳- لایه مرزی - صفحه تخت ۸۷
۲۴- حل بلازیوس به کمک سری ها ۹۱
۲۵- Wedge flow ۹۳
۲۶- روش فون کارمن ۹۹
۲۷- فون-کارمن با گرادیان فشار ۱۰۳
۲۸- روش انتگرالی برای محاسبه تنش برشی ---- ۱۰۵
۲۹- حل Holstein - Bohlem ۱۰۸
۳۰- حل Walz ۱۱۰
۳۱- روش Thwaites ۱۱۲

۳۲- حل مسئله جریان حول استوانه ۱۱٤

۳۳- پدیده جدایش ۱۱۶

۳٤- روش اختلالات جزئی ۱۲۰

۳۵- جریان کوئت با مکش ۱۲۲

۳۶- حباب گازی ۱۲۵

۳۷- singular pertur ۱۲۷

۳۸- تئوری ناپایداری ۱۳٤

HW #1: 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.10

سیالات پیشرفته

سه‌شنبه ۲۰/۱۱/۸۸

تمرین های زوج فصل ۹

فصل ۷ — Papa ۳،۴،۵

■ بخش اول: معادلات حاکم بر جریان

سیال ساختار ذره‌ای دارد ولی ما فرض می‌کنیم سیال یک محیط پیوسته است.

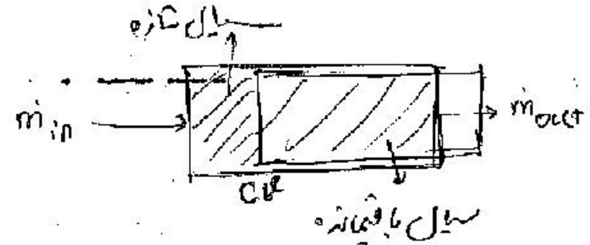
1μm □ → $10^{15} - 10^{18}$ تعداد مولکول ها

* انتقال حرارت ← بررسی نمی‌شود.
* اثرات تراکم پذیری ← بررسی نمی‌شود.

■ فرم دیفرانسیلی معادلات پیوستگی ← پیشرفته (لیسانس) / پیشرفته (فوق لیسانس)

■ " " " مومنتوم

Reynolds Transport Theorem: قضیه انتقال رینولدز:



t = 0 →

t = δt

اگر B یک خاصیت مادی باشد

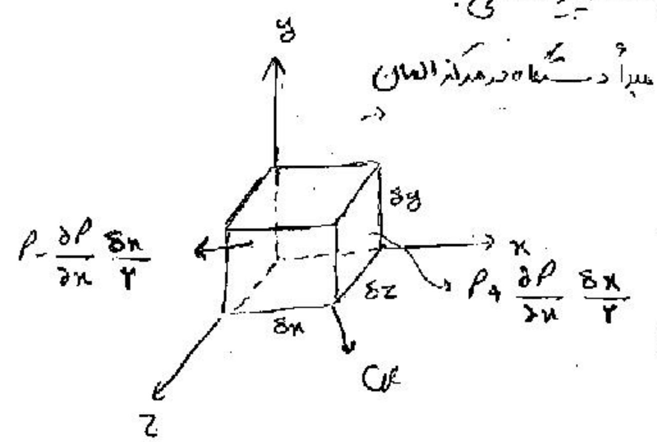
$$\frac{\partial}{\partial t}(B)_{cv} = ? = \dot{B}_{in} + \dot{B}_{\text{سیال باقی مانده}}$$

$$= \frac{d}{dt}(B)_{sys} - \dot{B}_{out}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{D}{Dt}}_{\text{مشتق مادی}}(B)_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}(B)_{cv} + \sum \dot{B}_{out} - \sum \dot{B}_{in}$$

قوانین طبیعت ماهیت لاگرانژی دارند.

■ بدست آوردن فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی:



$$\begin{cases} \rho = \rho(x, y, z, t) \\ u = u(\quad) \\ v = v(\quad) \\ w = w(\quad) \end{cases}$$

در مرکز المان

در قضیه انتقال رینولدز به جای B ، m قرار می‌دهیم:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(m)_{cv} + \sum \dot{m}_{out} - \sum \dot{m}_{in} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} \times \delta x \, \delta y \, \delta z +$$

$$(\dot m_{in})_x = \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y\,\delta z$$

$$(\dot m_{out})_x = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y\,\delta z$$

$$\Rightarrow (\dot m_{out})_x - (\dot m_{in})_x =$$

$$\text{①} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \vec V) = 0$$ → فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی

(هم تراکم پذیر - هم تراکم ناپذیر)

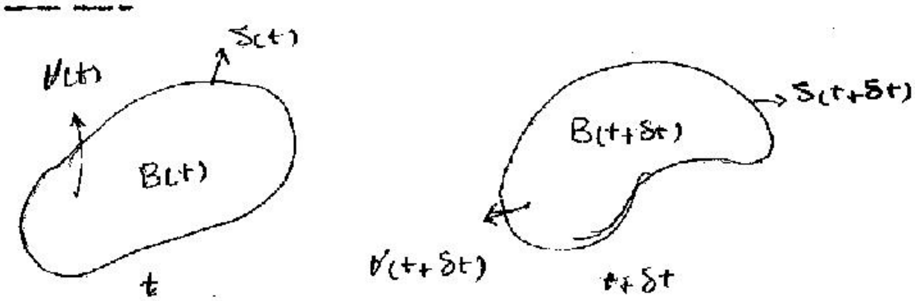
steady state $\rightarrow \nabla\cdot(\rho \vec V) = 0$

غیرقابل تراکم $\rightarrow \nabla\cdot V = 0$

$\rho = Const$

بدست آوردن معادله پیوستگی ← فرم فوق للیاسی

حجم کنترل ← شکل متغیر، متحرک، همواره از ذرات یکسان پر شده است.



B ← خاصیت انتگرالی ← هر ذره یک B دارد.

$$\frac{D}{Dt}\left(\int_{\forall} B\, d\forall\right) = ? \qquad = \int_{\forall}\left[\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla\cdot(B\vec{V})\right] d\forall$$

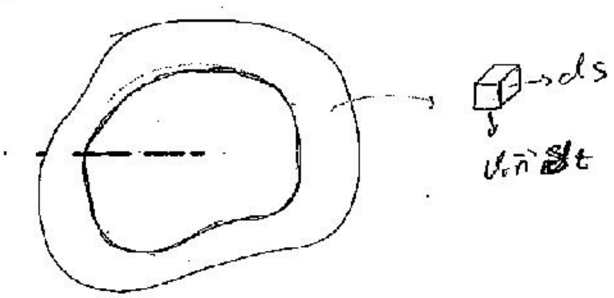
$$\frac{D}{Dt}\left(\int B\, d\forall\right) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t}\left\{\int_{\forall(t+\delta t)} B(t+\delta t)\, d\forall - \int_{\forall(t)} B(t)\, d\forall\right\}$$

$$+ \int_{\forall(t)} B(t+\delta t)\, d\forall - \int_{\forall(t)} B(t+\delta t)\, d\forall$$

$$\overset{①}{=} \int_{\forall(t)} \frac{\partial B}{\partial t}\, d\forall + \int_{S(t)} B(t)\, \vec{V}\cdot\vec{n}\, ds$$

$$② = \lim \frac{1}{\delta t}\left\{\int_{\forall(t+\delta t) - \forall(t)} B(t+\delta t)\, d\forall\right\} \rightarrow ③$$

$$d\forall = \vec{V}\cdot\vec{n}\, ds\,.\,\delta t$$



۲/۱۱/۷۷

$$\Rightarrow \int_{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) \right] d\forall = 0$$

چون حجم کنترل دلخواه بود پس داخل انتگرال صفر است:

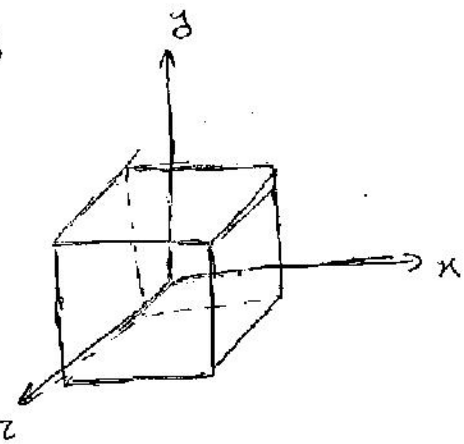
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

■ بدست آوردن معادلات مومنتوم:

یک ذره سیال را در نظر می‌گیریم و در مرکز آن فرض می‌کنیم مقادیر زیر را داریم:

$$\begin{cases} \tau_{xx} , \tau_{yy} , \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \quad \tau_{yx} \\ \tau_{xz} \quad \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \quad \tau_{yz} \end{cases}$$

P فشار



$$\sum dF_x = \delta m \cdot a_x$$

قضیه مشتق مادی:

$$B = B(x, y, z, t)$$

$$dB = \frac{\partial B}{\partial t}dt + \frac{\partial B}{\partial x}dx + \frac{\partial B}{\partial y}dy + \frac{\partial B}{\partial z}dz$$

زیبایی قضیه مشتق مادی ← بدون دنبال کردن ذره شتاب آن را می‌توان بدست آورد.

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

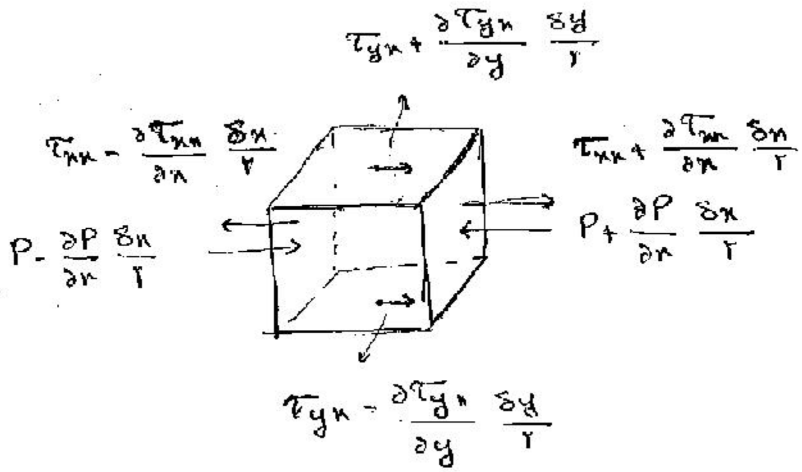
$$\sum dF_x = \underbrace{\left(\sum dF_x\right)_b}_{\text{body force}} + \underbrace{\left(\sum dF_x\right)_s}_{\text{surface force}}$$

Body force ← مربوط به دانسیته ماده ← $\vec{f}$ نیروی جرمی به ازای واحد جرم

ثقلی ← $\vec{f} = \rho g / \delta V$ → ?

$$(dF_x)_b = \rho f_x \, \delta x \, \delta y \, \delta z$$

$(dF_x)_s$ ←
- تنش برشی
- تنش قائم (فشار فشاری)



$$-P + \tau_{xx} = \sigma_{xx}$$

$$\Rightarrow \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

$$\Rightarrow \underline{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \nabla \cdot \overline{\overline{\tau}} + \rho \vec{f}} \Big\}$$ معادلات حرکت کوشی

$$\left\{ \begin{array}{lll} \rho, & u, v, w & \\ \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{array} \right.$$ مجهولات.

P

سه‌شنبه ۸۸/۱۱/۲۷

■ فرم دیفرانسیلی معادلات بقاء:

1) Continuity: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$

$$\rho = Const \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

۲) Momentom:

$$\rho a_x = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

↓

Cauchy

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho a_x \longrightarrow$$ ترم‌های اینرسی

$$= \rho\Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\substack{\text{زمانی} \\ \text{Temporal}}} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}}_{\substack{\text{جابجایی} \\ \text{Convectiv}}}\Big)$$

P: (فشار ترمودینامیکی (فشار استاتیکی)) ← چون می‌توانیم به دما ربط دهیم

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \longrightarrow$$ ترم‌های ویسکوز، تنش‌های اضافی

Deviatoric

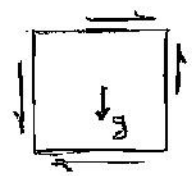
چرا اسم فشار ترمودینامیکی مناسب نیست؟ حالت تعادل ترمودینامیکی برقرار نیست به خاطر Viscous heating

۳)

۳) فرم دیفرانسیلی قانون بقای ممنتوم زاویه‌ای:

به تقارن تانسور تنش را نتیجه خواهد داد.

سیالات Polar تقارن تانسور تنش ندارند:



۴)

۴) فرم دیفرانسیلی قانون بقای انرژی:

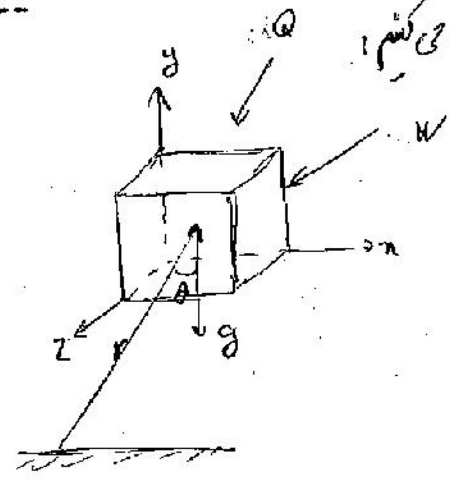
دیدگاه ← حجم کنترلی (اویلری)

دیدگاه ← ذره‌ای (لاگرانژی)

$$\frac{DE}{Dt}\bigg|_{system} = \frac{\partial}{\partial t}(\dot{E})_{CV} + \sum \dot{E}_{out} - \sum \dot{E}_{in}$$

$B \rightarrow E = m\hat{u} + \frac{1}{2} m|V|^2 + mgz$

ما در اینجا از دیدگاه لاگرانژی استفاده می‌کنیم:



$dm = \rho dV$

$= \rho dx dy dz$

$$dE_t = dQ + dW$$

$$d\forall$$

$$dE_t = dm\,\hat{u} + \tfrac{1}{2}\, dm|V|^2 + dm\, g z \rightarrow \vec{g}\cdot\vec{r}$$

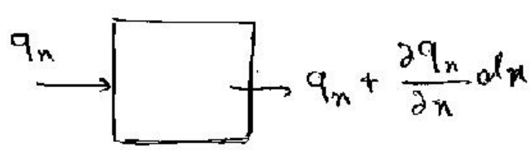
$$E = \frac{dE_t}{d\forall} = \rho\left(\hat{u} + \tfrac{1}{2}V^2 + \vec{g}\cdot\vec{r}\right)$$

$$= \rho\left(e + \tfrac{1}{2}V^2 + \vec{g}\cdot\vec{r}\right) = Q + W$$

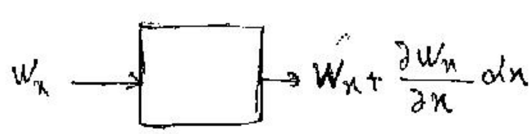
$$\Rightarrow \frac{DE}{Dt} = \rho\left(\frac{De}{Dt} + V\frac{DV}{Dt} + \vec{g}\cdot\vec{V}\right) = \frac{DQ}{Dt} + \frac{DW}{Dt} \quad (1)$$

فرض می‌کنیم Q از نوع حرارت باشد:

heat flux / t $\qquad$ $\vec{q} \leftarrow$ بردار



$$\cancel{\frac{dQ}{dt}} \quad \frac{DQ}{Dt} = -\nabla\cdot\vec{q} = -\nabla\cdot\left(K\vec{\nabla T}\right) \quad (۲)$$



$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

$$\sigma_{xx} = -P + \tau_{xx}$$

$$\dot{W}_x = \sigma_{xx} u + \sigma_{yx} v + \sigma_{zx} w$$

$$\frac{\partial \dot{W}_x}{\partial x} = (-Pu + \tau_{xx} u + \tau_{yx} v + \tau_{zx} w) \qquad (۳)$$

$$\text{Cauchy} \Rightarrow \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \tau_{ij} + \rho \vec{g}$$
$$= \nabla \cdot \sigma_{ij} + \rho \vec{f} \qquad (۴)$$

$(۱), (۲), (۳), (۴) \Rightarrow$

?

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (K \vec{\nabla} T) + \nabla \cdot (\vec{V} \cdot \sigma_{ij}) - \vec{V} (\nabla \cdot \sigma_{ij})$$

$$\sigma : \nabla \vec{V} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

۷ معادله، ۱۷ مجهول.

$$\rho = \rho(P, T)$$

$$e = e(P, T)$$

مجهولات : $u, v, w, P, T \rightarrow ۵$

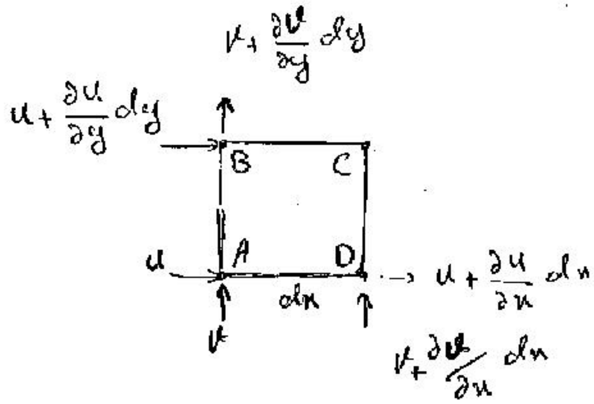
$q_x \; q_y \; q_z \rightarrow ۳$

$\sigma_{ij} \rightarrow ۹$

در سیالات غیر نیوتنی واقعاً ممکن است با ۹ مجهول برخورد کنیم.

$$\tau_{ij} \longrightarrow \text{میدان سرعت} \longrightarrow L_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$L_{ij} \Rightarrow \underset{\approx}{L} = \begin{bmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{bmatrix}$$



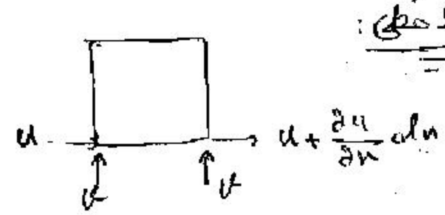
$\tau_{xx}\ \tau_{yy}\ \tau_{zz} \leftarrow$  خطی ← تغییر شکل

$\tau_{xy}\ \tau_{xz}\ \tau_{yz} \leftarrow$  زاویه‌ای

هر دو : ترکیبی از این دو

نقط خطی :

$$dx' = dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dt$$

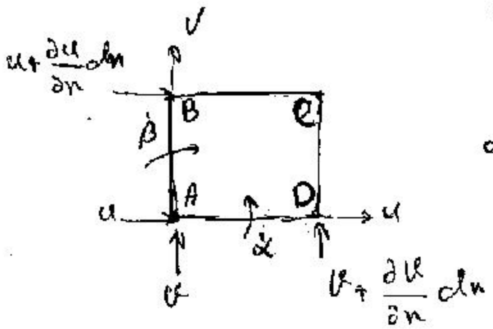


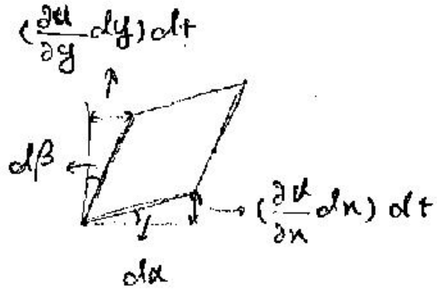
$$V_1 = dx\,dy\,dz$$

$$V' = dx'\,dy'\,dz'$$

$$\frac{V'-V}{V\,dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla\cdot\vec{V}$$

نقط زاویه‌ای :





$$tg(d\alpha) = d\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}dt \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \dot\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$tg(d\beta) = d\beta = \frac{\partial u}{\partial y}dt \Rightarrow \frac{d\beta}{dt} = \dot\beta = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$\dot\alpha$ ← سرعت زاویه‌ای چرخش ضلع AD ← مثبت

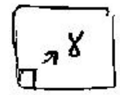
$\dot\beta$ ← سرعت زاویه‌ای ″ ″ AB ← منفی

$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ سرعت زاویه‌ای المان در جهت مثبت

مثلثاتی ← $\frac{1}{2}$ به طبق تعریف (قرارداد)

$$\vec{\omega} = \tfrac{1}{2}(\nabla \times \vec{V})$$

$$\gamma_1 = \pi/2$$



$$\gamma_2 = \gamma_1 - (d\alpha + d\beta)$$

$$\Rightarrow \gamma_1 - \gamma_2 = d\gamma = d\alpha + d\beta$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \dot{\gamma}_{xy}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(\dot{\gamma}_{xy}) \rightarrow$$ تابعی

$$\tau_{ij} \longrightarrow L_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} D_{ij} + \tfrac{1}{2} W_{ij}$$

$\underset{\approx}{W} \rightarrow$ چرخش $\leftarrow$ vorticity

$\underset{\approx}{D} \leftarrow$ تانسور گرادیان نرخ تغییر شکل

رابطه $F = Kx$ یک رابطه اساسی و نباید با چرخش ناظر یا دستگاه مختصات عوض شود.

۳/

$D_{ij} \rightarrow$ Rate-of-deformation Tensor

$$\tau_{ij} \rightarrow d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

ساده‌ترین رابطه بین τ و d یک خطی است:

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij}$$

$$\Rightarrow \tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

سیال نیوتنی.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

سیالات نیوتنی ← هوا و آب

$$\begin{cases} \tau_{xx} = 2\mu \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{xy} = \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \tau_{xz} = \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \tau_{yz} = \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \end{cases}$$

یکشنبه ۱۳۸۸/۱۲/۲

■ سیالات نیوتنی

■ سیالات استوکسی

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Phenomenological $\rightarrow$ دارای اثبات دقیق ریاضی نیستند.

$$\text{Cauchy: } \rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \rho g_z$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$\downarrow$$

$$\mu = \mu(x,y,z)$$

در بعضی سیالات (گازها) رابطه فوق برای τ_{ij} صادق نیست و بصورت زیر است:

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda(\underbrace{\nabla\cdot\vec{V}}_{\frac{\partial u_k}{\partial x_k}})$$

$\lambda \rightarrow$ second viscosity coefficient

= Volumetric viscosity

= Dilatational

ترم ← $\lambda(\nabla\cdot V)$ ← قبلاً در شوک و انفجار

λ و μ پارامترهای مستقل از هم هستند.

مشاهده استوکس برای برخی گازها (تک اتمی) ← $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$

$\mu = \mu(P, T, t)$

موقتی ← $\mu = \mu(P, T)$

فشار مکانیکی: $\bar{P} = \frac{1}{3}(\sigma_{ii})$

$\sigma_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda(\nabla\cdot u)$

$\sigma_{xy} = -P + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$

$\bar{P} = P - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla\cdot V)$ → فشار مکانیکی

■ اگر سیال تراکم ناپذیر باشد و یا گاز تک اتمی باشد $\bar{P} = P$

■ شرط‌های مرزی مناسب:

① در دیواره صلب ← عدم لغزش $u = u_{wall}$ ← اگر ابعاد سطح در مقیاس نانو باشد آنگاه این شرط صادق نیست.

← شرط نفوذ ناپذیری ← $v = 0$

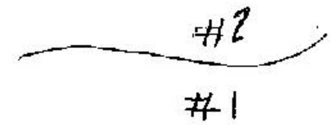
↓

مستقل از μ

② در مرز P و T و V ← اطلاعات را داریم.

نیز در مقاطع ورودی و خروجی.

③ در Interface بین دو سیال



الف) $\tau_1 = \tau_2$ ← حالت خاصی که در آن یک سیال گاز آنگاه

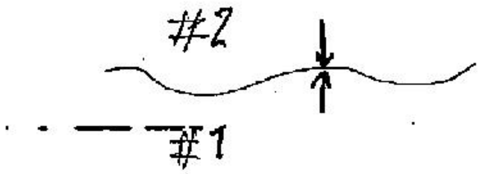
$\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$

شروط دینامیکی

ب) $\sigma_1 \neq \sigma_2 \Rightarrow \Delta\sigma$ وجود دارد

کشش سطحی $\Delta\sigma = \frac{\gamma}{r}$

ج) $V_1 = V_2$ ← سطح مشترک همواره از ذرات یکسانی تشکیل شده است.



معادلات Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} - \rho \vec{g}$$

* غیرقابل تراکم، μ ثابت، T ثابت
* فقط برای سیالات نیوتنی
* این معادلات هم برای جریان laminar و هم Turbulence صادق است.
* در این معادلات μ و ρ می توانند متغیر باشند.

معادلات حاکم $\begin{cases} \text{Navier-Stokes} \\ \text{پیوستگی} \end{cases}$

حل استوکس ← سقوط قطره کوچک و سبک ← حرکت خزشی

$$\rightarrow F_D = 3\pi \mu U_\infty d$$

$$Re \leqslant 0.5$$

■ حل های دقیق N-S:

← از هیچ تقریبی استفاده نمی کنیم ← در هر Re قابل استفاده است.

از هیچ ترمی در مقابل ترم دیگر صرف نظر نمی کنیم.

ولی برای آن حل ← ممکن است حل تحلیلی نداشته ← PDE → ODE
دقیق می‌گویند. باشد.

Couette Flow :

انواع مسایل (براساس مکانیزم حرکت)

۱) از نوع (کوئت) Drag flow ← حرکت سیال به اثر حرکت دیواره
سیال ← به خاطر شرط عدم لغزش ← احتیاج به گرادیان فشار
داخلی ندارد

۲) از نوع Pressure-driven ← (جریان پوازی)

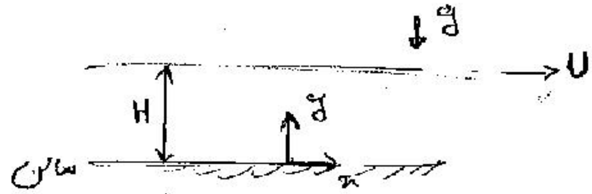
جریان داخل لوله ← یک بعدی،

duct ← دو بعدی.

۳) از نوع gravity driven

جریا

Couette Flow:



صرف‌نظر از حالت گذرا و رسیدن به سرعت حد : ← فرض دما ثابت

$u = u(y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = Cte \rightarrow v = 0$$

چون در دیواره ها $v = 0$

$$\underline{x\ mom:}\quad u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v}\frac{\partial u}{\partial y} = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \Rightarrow \underline{u = A + By}$$

$$\begin{cases} y = 0 \rightarrow u = 0 \Rightarrow A = 0 \\ y = H \Rightarrow u = U \Rightarrow B = \frac{U}{H} \end{cases} \Rightarrow \underline{u = \frac{U}{H}y}$$

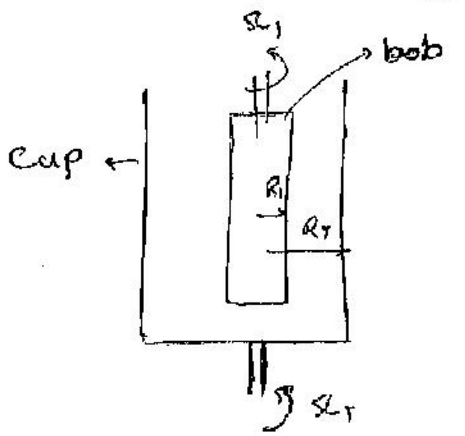
* اگر دما ثابت نباشد ؟

$\mu = \mu(y) \rightarrow$ پروفیل غیر خطی

جریان کوئت چرخشی : circular Teylor-Covette

جریان لزج، تراکم ناپذیر، دائم، بین دو استوانه طویل و هم مرکز

مختصات کروی و استوانه‌ای ← Panton



$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \rightarrow \quad z \gg R_1, R_2$

$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \rightarrow$ تقارن محوری

$$\begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta \neq 0 \\ V_z = 0 \end{cases}$$

tangential $\rightarrow V_\theta = V_\theta(r) \rightarrow$ یک بعدی

$$\begin{cases} r \text{ mom}: -\rho \dfrac{V_\theta^2}{r} = -\dfrac{dP}{dr} \Rightarrow & (1) \\ \theta \text{ mom}: \dfrac{d^2 V_\theta}{dr^2} + \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{V_\theta}{r}\right) = 0 & (2) \\ z \text{ mom}: \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\gamma \Rightarrow \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow P = P(r, z)}$$

$(2) \Rightarrow V_\theta = Ar + B/r$

$r = R_1 \Rightarrow V_\theta = \Omega_1 R_1$

$r = R_2 \Rightarrow V_\theta = \Omega_2 R_2$

$\Rightarrow V_\theta(r) = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2}\Big[$

$$V_\theta(r)=\frac{1}{R_2^2-R_1^2}\left[(\Omega_2R_2^2-\Omega_1R_1^2)r-(\Omega_2-\Omega_1)\frac{R_1^2R_2^2}{r}\right] \quad (3)$$

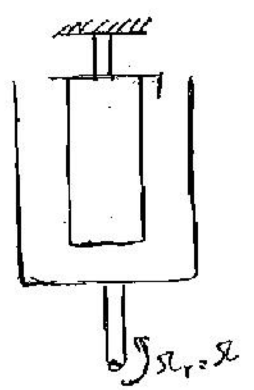
$(1),(3)\Rightarrow$

$$P(r)=\frac{\rho}{(R_2^2-R_1^2)^2}\left\{\frac{(\Omega_2R_2^2-\Omega_1R_1^2)}{2}r^2-2(\Omega_2-\Omega_1)R_1^2R_2^2\times(\Omega_2R_2^2-\Omega_1R_1^2)\ln r-(\Omega_2-\Omega_1)^2\frac{R_1^4R_2^4}{2r^2}\right\}+C$$

از حل معادلات N-S فشار معادله بصورت بالا معین خواهد بود.

این حل در محدوده خاص Re قابل مشاهده است.

ارزش مهندسی : Couette Viscometer



$$\tau_{r\theta}=2\mu d_{r\theta}=2\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \tau_{r\theta}=2\mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)$$

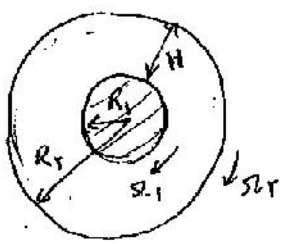
$$\tau_{r\theta}=2\mu\frac{R_1^2R_2^2}{(R_2^2-R_1^2)}\Omega\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

تورک $T=\int \tau_{r\theta}\Big|_{r=R_1}(2\pi R_1^2\,dz)\Rightarrow$

$$T = 4\pi\mu \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega L$$

$$\Rightarrow \mu = K \frac{T}{\Omega}$$

یکشنبه ۱۳۸۸،۱۳،۹



حالت خاص

$\Omega_1 = 0 \qquad \Omega_2 = \Omega$

$$\Rightarrow \tau_{r\theta} = 2\mu \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \Omega \times 1/r^2$$

$$\tau_{r\theta}\Big|_{\substack{r = R_1 \\ r = R_2}} \Rightarrow M = 4\pi\mu \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega L$$

$$\Rightarrow \mu = K \frac{M}{\Omega}$$

بنابر دلایلی فاصله H در مورد ویسکومترهایی که در بازار یافت می‌شوند کم است.

$R_1 \rightarrow 5\,cm \quad H = 1\,mm$

کم شدن H ⇐ $M\uparrow$ ⇐ اندازه‌گیری راحت‌تر ←

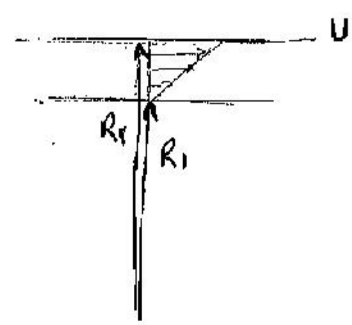
کم شدن حجم سیال ←

$$U_\theta = \frac{R_2^2 \Omega}{R_2^2 - R_1^2}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)$$

$$= \frac{R_2^2 \Omega}{(R_2 - R_1)(R_2 + R_1)} \cancel{\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)} \frac{(r - R_1)(r + R_1)}{r}$$

$$= \frac{R^2 \Omega}{H \times 2R} \times \frac{y \times 2R}{R}$$

$$= \frac{R\Omega}{H} y \Rightarrow U_\theta = \frac{U}{H} y$$



H کم وقتی استفاده می‌شود سیال لزجت کمی دارد.

H زیاد ← برای سیال‌های خیلی لزج.

حالت خاص دوم:

$R_2 \to \infty \quad \Omega_2 = 0$

استوانه خارجی وجود ندارد.

$r \to \infty \Rightarrow U = 0 \Rightarrow$

$U_\theta = Ar + B/r \Rightarrow U_\theta = B/r \Rightarrow U_\theta = \dfrac{R_1^2 \Omega}{r}$

$P(r) = -\frac{1}{2} \rho R_1^4 \Omega_1^2 / r^2 + P_\infty$

$\tau_{r\theta}(r) = 2\mu R_1 \Omega / r^2$

$M = 4\pi\mu R_1^2 \Omega L$

حالت خاص سوم:

$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$

حالت خاص چهارم: استوانه داخلی وجود ندارد.

$R_1 \to 0$

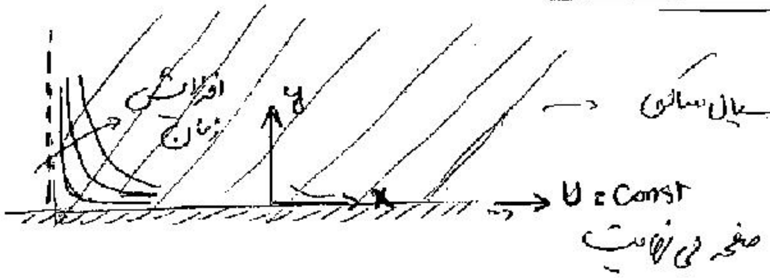
$U_\theta(r) = r\Omega$

$\tau_{r\theta} = 0$

$P(r) = \frac{1}{2} \rho r^2 \Omega^2 + C$

Rigid Body Rotation

مسئله شماره 1 استوکس:



$U = U(y, t)$ سیال نیوتنی و غیر قابل تراکم

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

پیوستگی $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = Cte$

$$\Rightarrow v = 0$$

$* \; y$ mom: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\gamma \Rightarrow P = -\gamma y$

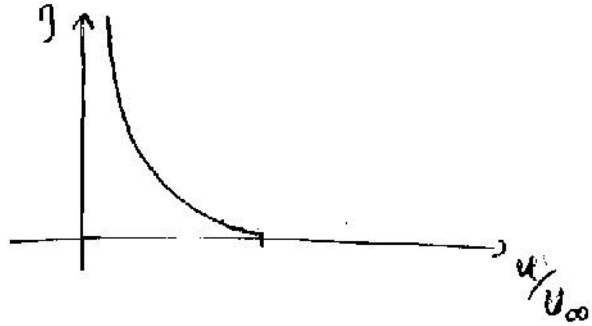
$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

x mom: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (1)

$u \rightarrow y, t, \nu, U$

$\dfrac{u}{U_\infty} = f\left(\dfrac{y}{\sqrt{\nu t}}\right)$ آنالیز ابعادی

$\dfrac{y}{\sqrt{\nu t}} = \eta \rightarrow$ متغیر تشابهی



پروفیل های سرعت در زمان های مختلف با هم فرق نکنند.

روش حل تشابهی

$$\frac{u(y,t)}{U_\infty} = f\left(\underbrace{\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}}_{\text{خود استوکس گذاشته}}\right) \rightarrow$$ حل پیشنهادی

$$\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \checkmark \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \checkmark \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \checkmark$$

$$f'' + 2\eta f' = 0 \qquad \rightarrow f' = \frac{df}{d\eta}$$

$\eta = 0 \rightarrow f = 1$

$\eta = \infty \rightarrow f = 0$

ص ۲۷ ← دو شرط مرزی

۱ شرط اولیه

$$\begin{cases} u(0,t) = U \\ u(y,0) = 0 \\ u(\infty,t) = 0 \end{cases}$$

شرط مرزی

$\rightarrow$ (finite L)

$\rightarrow$ Collapse

f/k $\mathrm{erf}(\eta)$

$$\frac{u}{U_\infty} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\zeta^2}\, d\zeta$$

$$\frac{u}{U_\infty} = 1 - \mathrm{erf}(\eta)$$

$$\eta = \frac{y}{\alpha t^n} \rightarrow$$ پیدا کردن η

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\mu f'(0)\, U}{2\sqrt{\nu t}}$$

@ $t = 0 \longrightarrow \tau_w \rightarrow \infty \Rightarrow$ نیروی زیادی لازم است

@ $t \rightarrow \infty \longrightarrow \tau_w = 0$

سؤال: آیا می‌توان از یک جایی به بالاتر اثر لایه‌های بالاتر را در نظر نگیریم؟

$\frac{u}{U_\infty} \leqslant 0.04$

$1.5 = \frac{\delta}{2\sqrt{\nu t}} \Rightarrow \delta = 3\sqrt{\nu t} \Rightarrow \begin{cases} \delta \sim \sqrt{t} \\ \delta \sim \sqrt{\nu} \end{cases}$

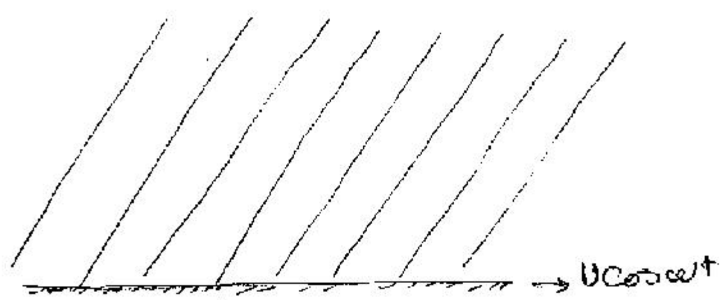
ضریب پخش مومنتوم.

هرچه ν بیشتر ← δ بیشتر.

δ ← به سرعت دیواره بستگی ندارد.

■ مسئله شماره ۲ استوکس:

$U_w = U\cos\omega t$

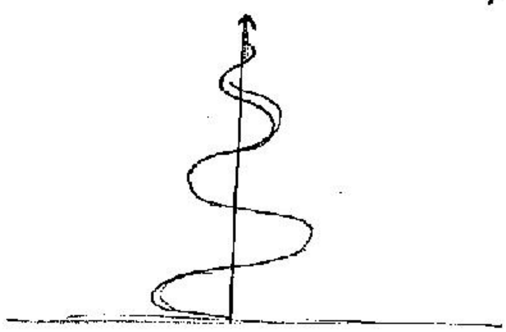


$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$u = u(y,t) = f(y) * e^{i\omega t} \rightarrow$ قسمت $Re\{a\}$ را واقعی می‌دانیم

$$\Rightarrow \frac{d^2 f}{dy^2} - i\frac{\omega}{\nu} f = 0$$

$$\frac{u(y,t)}{U} = \exp\left\{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\,y\right\}\cos\Big[\omega t - \underbrace{\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\,y}_{\text{phase shift}}\Big]$$

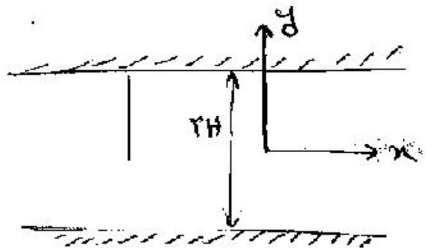


$\delta = 2\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \longrightarrow y, \frac{1}{e^2} \rightarrow$ بعد از این اثرات
لایه های بالاتر کم می شوند

سه شنبه ۱۱/۱۲/۱۳۸۸

■ جریان موازی ← (با اعمال گرادیان فشار خارجی)

■ Plane Poiseuille Flow



فرضیات:

○ جریان دائم، غیرقابل تراکم، توسعه یافته

$\frac{\partial}{\partial x} = 0$

○

پیوستگی: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = Const = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(y)$

y mom: $\Rightarrow P = -\gamma (y-H) + f(x)$

x mom: $\rho(u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}^{=0} + \cancel{v}^{=0}\frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$

$\Rightarrow \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\partial P}{\partial x} = G \rightarrow cte$

سمت چپ تساوی تنها تابعی از y است و سمت ~~...~~ راست تنها تابعی از x است

پس هر دو مساوی یک عدد ثابت G هستند:

پس فشار در جهت x بصورت خطی تغییر می‌کند:

$\Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{G}{\mu}$

$\Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{G}{\mu} y + C_1 \longrightarrow C_1 = 0 \rightarrow$ تقارن

$\Rightarrow u = \frac{G}{2\mu} y^2 + C_2$

$@\ y = \pm H \Rightarrow u = 0 \Rightarrow \quad u = \frac{G}{2\mu}(y^2 - H^2)$

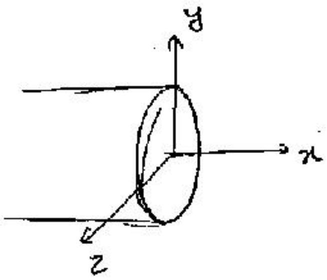
$$\frac{Q}{W} = \int_{-H}^{H} u \times dy \Rightarrow Q = -\frac{2}{3}\frac{GH^3}{\mu} > 0$$

$$\Rightarrow G < 0$$

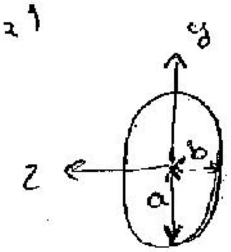
۱) جریان در کانالی با مقطع بیضی

۲) " " " " " مستطیلی

فرضیات ← دائم، غیرقابل تراکم، توسعه یافته



$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$



$u = u(y, z)$

$v = 0 = w$

$$x \text{ mom: } 0 = -\overset{G}{\frac{\partial P}{\partial x}} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \underbrace{\frac{G}{\mu}} \longrightarrow \text{① معادله پواسون}$$

Poisson

با توجه به B.C. می‌توان به دنبال حلی گشت که شرط مرزی روی دیواره را ارضاء می‌کند؛

$$u(y,z) = \alpha\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right) \quad (2)$$

α ← عدد ثابت فرض می‌شود.

$$(1),(2) \Rightarrow \alpha = \frac{G}{2\mu}\left(\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}\right) \quad (3)$$

$$Q = \iint u \, dy \, dz$$

$$Q = \pi a b\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow G<0$$

$$\frac{Q}{A} = u_{av} \Rightarrow u_{av} = -\frac{\alpha}{2}$$

فرض کنید می‌خواهیم Q را max کنیم: ← a, b متغیر اما $\pi a b$ ثابت باشد:

$$Q = u_{av} \times A \rightarrow \text{ثابت}$$

با فرض G و A و μ ثابت $\Rightarrow$

$(4) \Rightarrow a^2+b^2$ ← min شود

$$\Rightarrow a=b$$

پس با G و A و μ ثابت مقطع دایره‌ای شکل دبی بیشتری از خود رد می‌کند.

$$u(y,z) = \frac{G}{2\mu}\left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right)$$

$$a = b = R$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{G}{4\mu}\left(r^2 - R^2\right) \rightarrow$$ برای دایره

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{G}{\mu}$$ حل دوم برای معادله پواسون

$$u(y,z) = u^{(P)} + u^{(H)}$$

می دانیم لازم نیست $u^{(P)}$ شرط مرزی را ارضا کند

و $u^{(H)}$ معادله لاپلاس را ارضا می کند.

$$u^{(P)} = C_1 y^2 + C_2 z^2 \rightarrow$$ با توجه به B.C.

$$\hookrightarrow 2C_1 + 2C_2 = G/\mu \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{G}{2\mu} \quad (1)$$

C_1 و C_2 علاوه بر شرط (1) باید شرط مرزی را نیز ارضا کنند.

$$u(y,z) = u^{(H)} + C_1 y^2 + C_2 z^2$$

$$y^2 + \frac{a^2}{b^2} z^2 = a^2 \longrightarrow u = 0$$

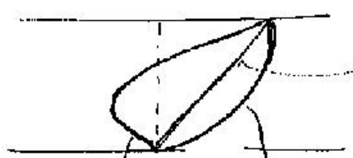
$\Rightarrow$ روی دیواره $\longrightarrow u^{(H)} + C_1\left(y^2 + \frac{C_2}{C_1} z^2\right) \quad (2)$

$$\text{if } \frac{C_2}{C_1} = \frac{a^2}{b^2} \Big\} \quad (3)$$

$$0 = u^{(H)} + C_1 a^2 \Rightarrow u^{(H)} = -C_1 a^2$$

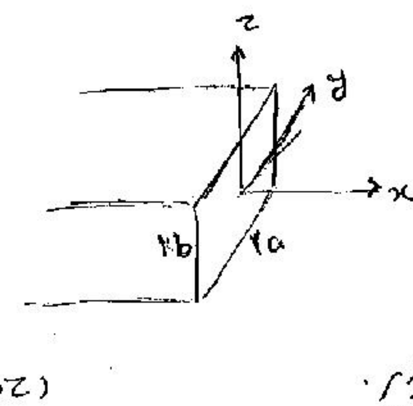
$①, ② \Rightarrow C_1, C_2 \rightarrow$ مطابق حل قبل

برای تشخیص علامت G ~~...~~ لازم است از دلیل برویم. چون اگر صفحات حرکت کننده پروفیل های زیر ممکن هست



پس ~~...~~ ممکن است دبی صفر شود.

جریان درون کانال Duct :



دائم تکوسعه یافته، تراکم ناپذیر.

$u = u(y, z)$

$v = w = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = G/\mu$$

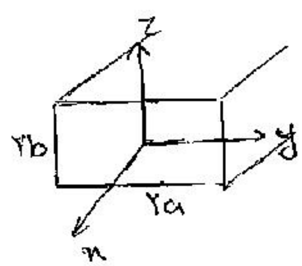
$$u(y,z) = u^{(P)} + u^{(H)}$$

$$u^{(P)} = -\frac{G}{2\mu}(b^2 - z^2)$$

توضیحات پروژه ۱:

<u>یکشنبه ۱۳۸۸/۱۲/۱۶ :</u>

● جریان آرام در یک کانال مستطیلی (Duct):



$$0 = -\overbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}^{G} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$u(y,z) = u^{(P)} + u^{(H)}$$

$$u^{(P)} = -\frac{G}{2\mu}(b^2 - z^2) \longrightarrow y = \pm a$$

شرط مرزی را در
ارضا نمی‌کند

$$u^{(H)} = u^{(H)}(y,z) = u'(y,z)$$

$$\Rightarrow u(y,z) = u^{(P)} + u'$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{G}{\mu} \\ u(y=\pm a, z) = 0 \\ u(y, z=\pm b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 u' = 0 \\ u'(y, z=\pm b) = 0 \quad (1) \\ u'(y=\pm a, z) = \dfrac{G}{2\mu}(b^2 - z^2) \quad (2) \end{cases}$$

Pozrikidis

$$u'(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \cos\left(\alpha_n \frac{z}{b}\right) \quad (3)$$

$\alpha_n = (n - \frac{1}{2})\pi \longrightarrow$ شرط (1) خود به خود ارضا می‌شود.

چرا $\cos$ نوشتیم؟ به علت وجود تقارن در مسئله

$$\nabla^2 u' = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n'' - \frac{\alpha_n^2}{b^2} f_n\right) \cos\left(\alpha_n \frac{z}{b}\right) = 0$$

$$\Rightarrow f_n'' - \frac{\alpha_n^2}{b^2} f_n = 0$$

$$\Rightarrow f_n(y) = A_n \cosh\left(\frac{\alpha_n}{b} y\right) + B_n \sinh\left(\frac{\alpha_n}{b} y\right)$$

تقارن نسبت به y $\Rightarrow$ $B_n = 0$

$$u'(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \cos\left(\alpha_n \frac{z}{b}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh\left(\alpha_n \frac{y}{b}\right) \cos\left(\alpha_n \frac{z}{b}\right)$$

$@\ y = \pm a \Rightarrow u' = \frac{G}{2\mu}(b^2 - z^2)$

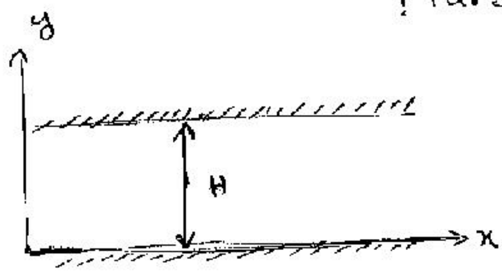
$$\Rightarrow A_n = \frac{G}{2\mu \cosh\left(\alpha_n \frac{a}{b}\right)} \quad \frac{4b^2}{\alpha_n^3}(-1)^n$$

HW #1 → ۷ بخش → $\underbrace{1, 2, 3, 4, 10}$

۸۹،۱،۱۷: ← ۵۰ نمره تشویقی.

● از این مسائل ← یکی در امتحان ● از ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ نیز یکی در امتحان.

■ جریان ضربانی Pulsatile flow:



$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = -G \sin\omega t \quad = iG\, e^{-i\omega t} \\ x \text{ mom: } \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

$$F(y,t) = u(y,t) + i\,v(y,t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{iG}{\rho} e^{-i\omega t} + \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \longrightarrow$$ بخش حقیقی به درد مان می‌خورد.

$$F(y,t) = f(y)\, e^{-i\omega t} \longrightarrow$$ حل $= Re\left\{F(y,t)\right\}$

$$\Rightarrow f'' + \frac{i\omega}{\nu} f = -\frac{iG}{\mu}$$

$$f = f^{(P)} + f^{(H)}$$

$$f^{(P)} = -\frac{G}{\rho\omega}$$

$$f^{(H)} = A \cos\sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}\, y + B \sin\sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}\, y$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow u = 0 \\ y = H \Rightarrow u = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A, B \checkmark$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Rightarrow f(y) = \dfrac{G}{\rho\omega}\left\{ \dfrac{\cos K(y - H/2)}{\cos(K\, H/2)} - 1 \right\} \\ K = (1+i)\alpha \\ \alpha = \sqrt{\dfrac{\omega}{2\nu}} \end{array}\right.$$

۱.

$$u(y,t) = \mathbb{R}e\left\{ f(y)\, e^{-i\omega t} \right\}$$

$$u(y,t) = a(y)\cos\omega t + b(y)\sin\omega t$$

$$a(y) = \frac{G}{\rho\omega}\left\{ \frac{\cosh(\alpha y)\cos\alpha(H-y) + \cos(\alpha y)\cosh(\alpha(H-y))}{\cosh(\alpha H)+\cos(\alpha H)} - 1 \right\}$$

$$b(y) = \frac{G}{\rho\omega}\left\{ \frac{\sinh(\alpha y)\sin\alpha(H-y)}{\cosh(\alpha H)+\cos(\alpha H)} + \frac{\sin(\alpha y)\sinh\alpha(H-y)}{\cosh(\alpha H)+\cos(\alpha H)} \right\}$$

$$u = U\sin(\omega t + \varphi)$$

$$U = \sqrt{a^2+b^2} \qquad tg\,\varphi = \frac{a}{b}$$

مرجع ← کتاب Panton

تمرین ۱

Plot $\leftarrow$ $\omega \to 0$, $\omega \to \infty$

$$Wo = \text{Womersley} = L\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

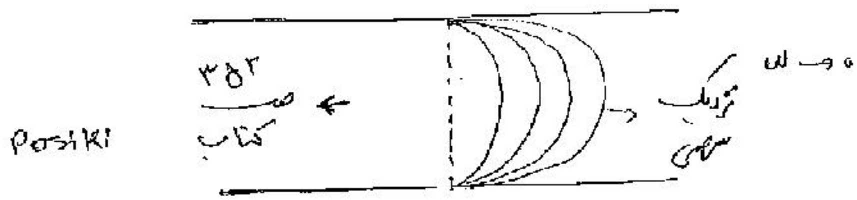
عدد بدون بعد جدید

L ← طول مشخصه و در این مسئله H.

عدد Womersley ←

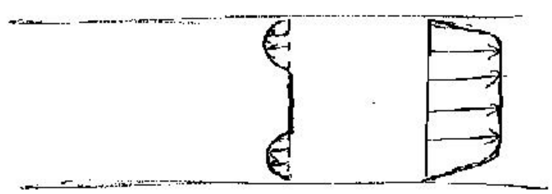
$$Wo = \sqrt{\frac{\rho \, \partial u / \partial t}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}}} = \frac{H}{\sqrt{\nu / \omega}} = \frac{H}{\delta_{diffusion}}$$

$$\begin{cases} \omega \to 0 \Rightarrow Wo \to 0 \\ \omega \to \infty \Rightarrow Wo \to \infty \end{cases}$$



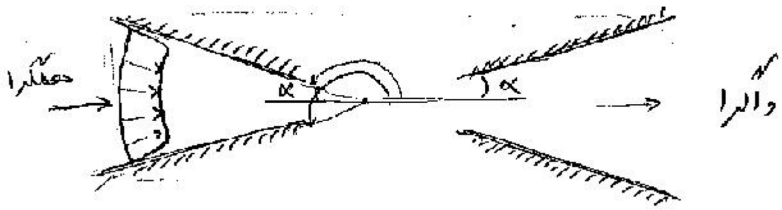
$\omega \to 0$ ترم diffusion مهم خواهد بود

$\omega \to \infty$



$\omega = \sqrt{30}$ در اینجا

Jeffrey + Hamel   ■ جریان درکانال های همگرا و واگرا :



(r, θ)

$v_r\ (r,\theta)$

$v_\theta = 0$

پیوستگی : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = 0 \Rightarrow v_r \propto 1/r$

$$r \text{ mom}: \ v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \right\}$$

$$\theta \text{ mom}: \ 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu\left(\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$$

$v_r = R(r)F(\theta) = \frac{1}{r}F(\theta)$ $\nu \rightarrow m^2/s$ $\mu \rightarrow \frac{kg}{m.s}$

اگر $v_r = \frac{\nu}{r}F(\theta)$ فرض شود ← $F(\theta)$ بدون بعد خواهد شد.

r mom →
θ mom → P حذف → v_r مشتق‌ای (1)

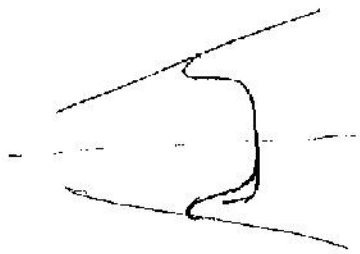
* Page ٤٣ → ① ⇒ $F^{(3)} + 4F' + 2FF' = 0$

شرط مرزی : $F(\pi - \alpha) = 0$

$F(\pi + \alpha) = 0$

$F'(\pi) = 0$

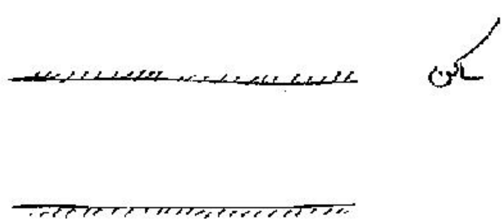
به نظر می رسد شرط مرزی ها کافی نیستند.



سه شنبه ۱۸/۱۲/۱۳۸۸

▪ دینامیک حباب گازی در یک سیال نیوتنی: بحث امروز

▪ جریان ضربانی :



$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -G \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial u}{\partial t} = G \sin \omega t + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (۱)$$

$$u(y, t) = b(y) \sin \omega t + a(y) \cos \omega t \qquad (۲)$$

$$(۲) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t \qquad (۳)$$

$$(۲) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a'' \cos \omega t + b'' \sin \omega t \qquad (۴)$$

$$(۱), (۳), (۴)$$

$$\Rightarrow (-\rho a\omega - G - \mu b'') \sin \omega t + (\rho b\omega - \mu a'') \cos \omega t = 0 \qquad (۵)$$

(۵) باید تمامی زمانها برقرار باشد پس:

$$\begin{cases} -\rho a\omega - G - \mu b'' = 0 & (۶) \\ \rho b\omega - \mu a'' = 0 & (۷) \end{cases}$$

$$f(y) = a(y) + i b(y) = a + ib \qquad (۸)$$

$$\mu f'' + i\rho\omega f = -iG \qquad \Leftarrow (۸), (۷), (۶)$$

$$\Rightarrow f'' + \frac{i\omega}{\nu} f = -\frac{iG}{\mu}$$

$$f(y) = \frac{G}{\rho\omega} \left[\frac{\cos k(y - H/2)}{\cos\left(\frac{kH}{2}\right)} - 1 \right] \qquad \begin{aligned} k &= (1+i)\alpha \\ \alpha &= \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \end{aligned}$$

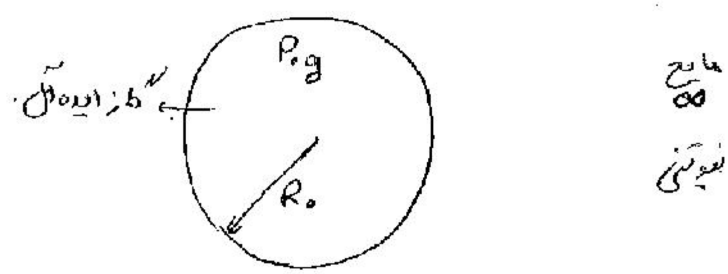
$$f(y)e^{i\omega t} = (a+ib)(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

$$= \underbrace{(a\cos\omega t + b\sin\omega t)}_{u(y,t)} + i\,(b\cos\omega t - a\sin\omega t)$$

$$\mathrm{Re}\left\{f(y)e^{-i\omega t}\right\} = u(y,t)$$

■ دینامیک حباب گازی دریک سیال نیوتنی:

Rayleigh - Plesset $\qquad P_\infty \;\; \nabla$



∞ ← مثلاً ۱۰ برابر شعاع

ابتدا فرض می‌شود ← حباب در حال تعادل

اعمال میدان آکوستیک ← ارتعاش حباب.

Free Oscillation → ← ارتعاش هنگام منبسط شده

مثلاً تغییر ناگهانی P_∞ به P_∞ ۱٫۱

i

Force Oscillation → قلاحت میدان آکوستیک.

فرض اساسی ← حباب همواره کروی است.

$V_\theta = 0 = V_\phi$

$V_r = V_r(r, t)$

پیوستگی : $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) = 0$ برای سیال بیرونی

$$\Rightarrow r^2 V_r = A \Rightarrow V_r = \frac{A(t)}{r^2}$$

$$V_r\Big|_{r=R} = \dot{R} = \frac{A(t)}{R^2} \Rightarrow A(t) = R^2\dot{R}$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{R^2\dot{R}}{r^2}$$

r mom

پیوستگی

$$\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left(\frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2 V_r)}\right) \ldots$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{\partial P}{\partial r} = \rho\{\frac{2\dot{R}^2R^4}{}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} = \rho\left\{\frac{2\dot{R}^2R^4}{r^5} - \frac{R^2\ddot{R}}{r^2} - \frac{2R\dot{R}^2}{r^2}\right\}$$

استدلال می‌کنیم.

$$\frac{P(r)}{\rho} = -\frac{\dot{R}^2}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4 + \frac{\ddot{R}R^2 + 2R\dot{R}^2}{r} + B$$

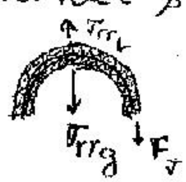
$$B:\ r \to \infty \Rightarrow P = P_\infty \Rightarrow B = \frac{P_\infty}{\rho}$$

$$\Rightarrow P(r) = \rho\left\{-\frac{\dot{R}^2}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4 + \frac{R^2\ddot{R} + 2R\dot{R}^2}{r}\right\} + P_\infty$$

$$r = R \Rightarrow P_L = P(R) = P_\infty + \rho\left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2\right)$$

بدست آورید. بسیار مهم

شرط مرزی در interface:



$$(\sigma_{rr})_g = (\sigma_{rr})_L - \frac{2\sigma}{R}$$

$$-P_g + \underbrace{\cancel{(\tau_{rr})_g}}_{\simeq 0} = -P_L + (\tau_{rr})_L - \frac{2\sigma}{R} \quad @\ r = R$$

$\mu_g \ll \mu_L$ چون $\leftarrow (\tau_{rr})_g \simeq 0$

$$\Rightarrow \tau_{rr}\Big|_{r=R} = 2\mu d_{rr} = 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{4\mu\dot{R}}{R}$$

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & v_r/r & 0 \\ 0 & 0 & v_r/r \end{bmatrix}$$

Panton → اشکال ج

$$\Rightarrow \rho\left(R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2\right)=P_g-P_\infty-\frac{4\mu\dot{R}}{R}-\frac{2\sigma}{R}$$

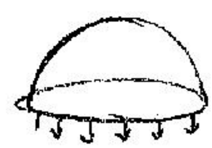
Reyleigh-Plesset Eq.

$$P_{0g}\,V_{0g}^{\,k}=P_g\,V^k \Rightarrow P_g=P_{0g}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3k}$$

R_0 ← شعاع حباب در تعادل استاتیک.

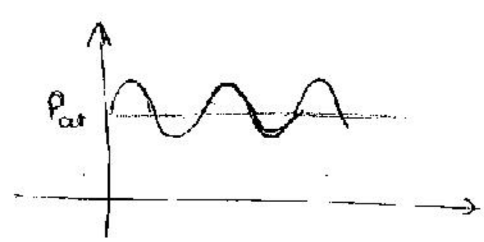
$R=R_0 \quad \dot{R}=0=\ddot{R}$

$$\Rightarrow 0=P_{0g}-P_\infty-\frac{2\sigma}{R_0} \Rightarrow R_0=\frac{2\sigma}{P_{0g}-P_\infty}$$



P_∞ می‌تواند تابعی از زمان باشد.

$P_\infty(t)=P_{at}\left[1-\delta\sin\omega t\right]$



μ هم می‌تواند تابعی از زمان باشد

توضیحات پروژه ۲۰ :

تیوشکل : $V_r = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2}$

$$r \text{ mom} : \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \tau_{rr}\right) - \left(\frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi} - 2\tau_{rr}}{r} \right)$$

$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r}$

$\tau_{\theta\theta} = \tau_{\phi\phi}$

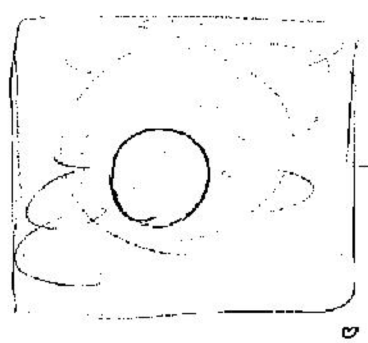
انتگرال از $r = R$ تا $r = \infty$

$$\Rightarrow \rho\left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2\right) = P_g - P_\infty - \frac{2\sigma}{R} - 12 R^2 \dot{R} \int_R^\infty \frac{\mu(r)}{r^4}\, dr$$

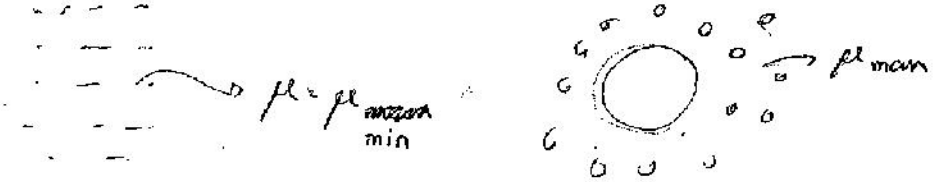
$$P_g = P_{0g}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3K}$$

تیکسوتروپ

Thixotrop



نادنو



حل ← بدون بعد کردن ،

چون interface حرکت می‌کند تغییر متغیر $y = r^3 - R^3(t)$

سه دستگاه مرتبه اول غیرخطی ← Runge-Kutta

Allen → Paper →

یکشنبه ۱۵/۱/۱۳۸۹

▪ حل دقیق :

۱) جریان با نقطه سکون (2D) stagnation flow

۲) جریان ثقلی

۳) جریان در بالای یک صفحه متخلخل

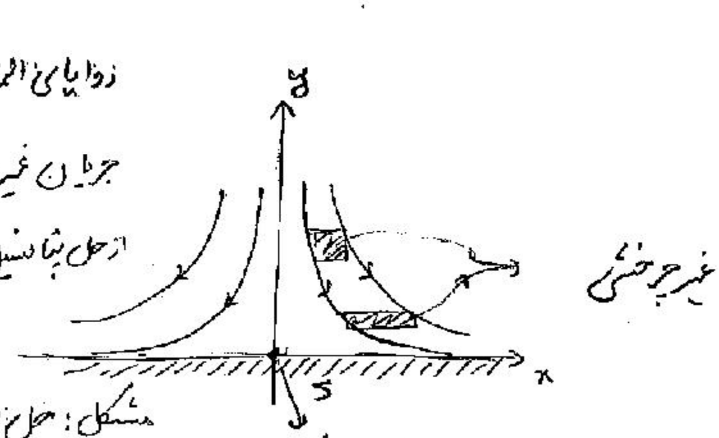
۴)* جریان در بالای دیسک دوار .

▪ جریان با نقطه سکون 2D :

• از حل موجود می‌توان برای جریان غیرلزج (پتانسیل) ← حل لزج

↲ Hiemenz

زوایای المان ها تغییر نمی کنند پس
جریان غیر چرخشی است و می توان
از حل پتانسیل بکار برد.



مشکل: حل پتانسیل شرط مرزی لد
دیواره را ارضاء نمی کند.

$$x:\ u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$y:\ u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

پیوستگی: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \longrightarrow \nabla^2\Phi=0 \rightarrow u=ax$, $v=-ay$ ۲U میدان سرعت تست

مجهولات ← u, v, P

خطوط جریان خمیده ← میدان فشار داریم.

$$\left.\begin{array}{l}\mu=0\\ \rho=\text{Const}\end{array}\right\} \rightarrow \text{سیال ایده آل} \rightarrow \text{جریان ایده آل}$$

→ جریان غیرچرخشی →

$$\Rightarrow \vec{V}=\nabla\Phi$$

پیوستگی $\nabla\cdot\vec{V}=0 \Rightarrow \nabla^2\Phi=0$

آیا Φ بدست آمده در N-S صدق می‌کند؟ بلی:

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \rightarrow \nu \nabla^2 \vec{V} = \nu \nabla^2(\nabla\Phi)$$

$$= \nu \nabla(\nabla^2\Phi) = 0$$

• مشکل ← شرط مرزی ←

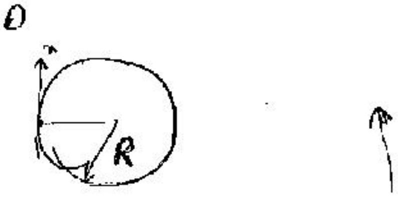
$u = 2K x$

$v = -2K y$

• K ← یک متغیر سینماتیکی

در جریان حول استوانه $K = \frac{U_\infty}{R}$

$U = 2U_\infty \sin\theta$



$\theta \approx 0 \Rightarrow U = 2U_\infty \theta = 2\frac{U_\infty}{R} x$

$$\left. \underline{u = 2Kx f'(y)} \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow -\frac{\partial v}{\partial y} = 2K f'(y) \Rightarrow \left. \underline{v = -2K f(y)} \right\}$$

$$@\ y=0 \rightarrow \left. \begin{array}{ll} u=0 & \Rightarrow f'(0)=0 \\ v=0 & \Rightarrow \underline{f(0)=0} \end{array} \right\}$$

$y \to \infty \Rightarrow f(\infty) = y$

x mom: $4K^2 x f'^2 - 4K^2 x f f'' = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + 2K\nu x f'''$ (1)

y mom: $4K^2 f f' = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} - 2K\nu f''$ (2)

y mom $\longrightarrow$ انتگرال $\Rightarrow P(x,y)$ ✓

$P(x,y) = -2\rho K^2 f^2 - 2\rho K\nu f' + g(x)$ (3)

$\rightarrow$ ثابت انتگرال

جریان پتانسیل: برنولی: $P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_s + \frac{1}{2}\rho \cancel{V_s^2}$

البته چون جریان غیرچرخشی است
پس استفاده از برنولی مجاز است. $\Rightarrow P_s = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$

$U_\infty^2 = u^2 + v^2 = (2Kx)^2 + (-2Ky)^2 = 4K^2(x^2+y^2)$

$y \to \infty \Rightarrow P \to P_\infty = P_s - 2K^2\rho(x^2+y^2)$ (4)

(3), (4) $y \to \infty \Rightarrow P_\infty = -2K^2y^2 - 2\rho K\nu + g(x)$ (5)

(4), (5) $\Rightarrow g(x) = P_s - 2\rho K^2 x^2 + 2\rho K\nu$ (6)

(3), (6) $\Rightarrow P(x,y)$ ✓

$$\Rightarrow x \text{ mom}: \quad \frac{\nu}{2K} f''' + f f'' - (f')^2 + 1 = 0 \qquad ⑦$$

$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = 0$$
$$f''(\infty) = 1$$

⑦ ← تغییر متغیر ← برای رهایی از وجود خواص سیال (ν) و خواص سینماتیکی K

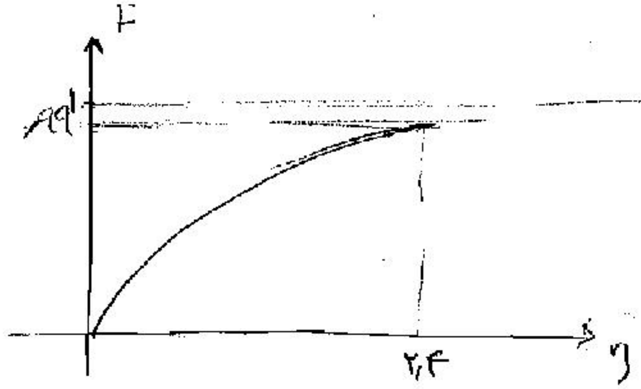
$$\eta = \sqrt{\frac{2K}{\nu}}\, y$$

$$F(\eta) = \sqrt{\frac{2K}{\nu}}\, f(y) \qquad ⑧$$

$$⑦ \Rightarrow F''' + F F'' - (F')^2 + 1 = 0$$

$$F(0) = 0$$
$$F'(0) = 0$$
$$F''(\infty) = 1$$

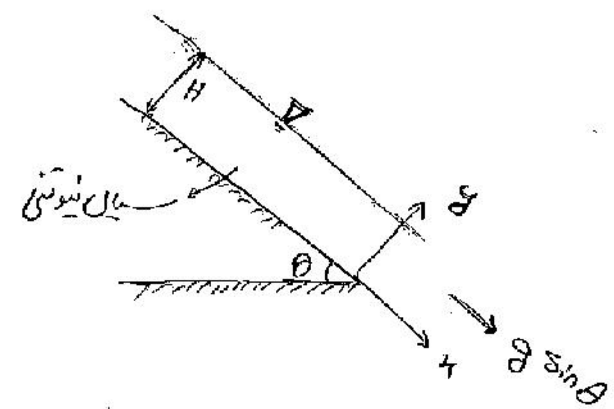
$$F \longrightarrow \psi$$
$$F' \longrightarrow u$$
$$F'' \longrightarrow \tau_w$$



ماهیت لایه مرزی ← اثرات لزجت محدود به یک لایه نازک

$$\delta = 2.4\sqrt{\frac{\nu}{2t}}$$

جریان ثقلی :



$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow v = \text{ثابت} = 0$$

چون روی دیواره صفر است

$$x\text{-mom}: \quad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + g\sin\theta$$

$$\Rightarrow \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g\sin\theta \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g}{\nu}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{g}{\nu}\sin\theta\, y + C_1 \qquad (1)$$

$$y = H \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{g}{\nu}\sin\theta(y - H)$$

$$u = -\frac{g}{\nu}\sin\theta\left(\frac{y^2}{2} - Hy\right) + C_2$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow \underline{u = -\frac{g}{\nu}\sin\theta\left(\frac{y^2}{2} - Hy\right)}$$

(1)

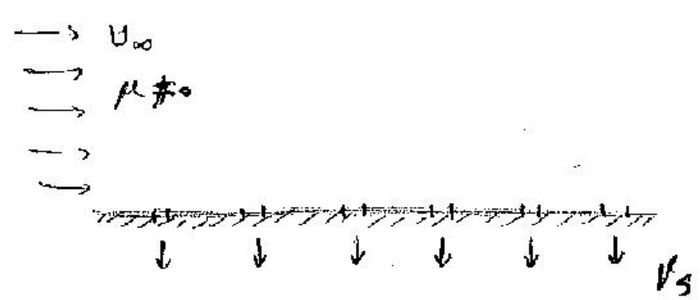
اگر H را دو برابر کنیم ← τ_w تغییر می کند

اگر ρ را تغییر دهیم ← با τ_w نسبت مستقیم دارد،

$$\underline{\tau_w = \gamma H \sin\theta}$$

■ جریان در بالای صفحه متخلخل :

Flow over a prous wall:



$u=u(x,y)$

$v=v(x,y)$

فرض می‌کنیم ← $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ ← جواب: سطح کارتشای

پیوستگی: $\frac{\partial v}{\partial y}=0 \Rightarrow v=$ ثابت

$v=-V_s$ ← مکش کلی

$$x\ mom:\ u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1)$$

$\frac{\partial P}{\partial x}=0$ ← اگر مکش ضعیف باشد خمیدگی خطوط جریان ناچیز بوده و $\frac{\partial P}{\partial x}=0$

$\frac{V_s}{U_\infty}<0.001$ ← فرض خوبی است

$$(1) \Rightarrow -V_s\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(y)=U_\infty\left(1-e^{-\frac{V_s}{\nu}y}\right)$$

B.C: $y=0 \rightarrow u=0$

$y=\infty \rightarrow u=U_\infty$

این جریان هم ماهیت لایه مرزی دارد.

$$\frac{u}{U_\infty} = 1 - e^{-\eta} \longrightarrow y = \delta \Rightarrow \underbrace{\delta = 4\frac{\nu}{v_s}}$$

$$\underbrace{\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \rho U_\infty v_s} \longrightarrow$$

به ویسکوزیته ربطی ندارد.

تأثیر غیرمستقیم دارد ← تعیین پروفیل سرعت

سه‌شنبه ۱۷/۱/۱۳۸۹

سه‌شنبه ۱۳۸۹/۱/۱۷

بخش ۹ : حل‌های تقریبی

■ انواع تقریبات معادلات N-S

۱) تقریب اولر ← از کلیه ترم‌های لزجت در مقابل اینرسی صرف نظر می‌شود

← برای پیش‌بینی F_D خوب نیست $F_D = ?$

← برای محاسبه نیروی لیفت تا وقتی جدایش اتفاق نیافته

خوب است.

۲) تقریب استوکس ← از کلیه نیروهای اینرسی صرف نظر می‌شود (در مقابل لزجت)
ترم شیمی

← ترم‌های convective

~~۳) تقریب~~

۳) تقریب Oseen:

غیرخطی $\leftarrow u\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow U_\circ \frac{\partial u}{\partial x}$ خطی

از تقریب استوکس بهتر است.

Re کم / Re بسیار کم

۴- تقریب پرانتل (فقط از بعضی از ترم‌های اینرسی صرف نظر می‌شود)

تقریب اولر و تقریب پرانتل ← Re بسیار زیاد $Re \gg 1$

تقریب استوکس و Oseen ← Re بسیار کم $Re \ll 1$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla\vec{P} + \mu\nabla^2\vec{V}$$

$$\Rightarrow \rho\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}}_{\text{غیرخطی}}\right] = -\nabla\vec{P} + \mu\nabla^2\vec{V}$$

$Re = \dfrac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی لزجت}} \ll 1 \rightarrow Re < 0.1$ ابزار آزمایش

⇒ می‌توان از نیروی اینرسی صرف نظر کرد.

$\Rightarrow \underline{\nabla\vec{P} = \mu\nabla^2\vec{V}} \} \rightarrow$ معادله تقریب استوکس

نقش ناپایداری → ترم های غیرخطی به معادله استوکس ناپایدار است

Jeffrey-Hamel → جریان در کانال های همگرا و واگرا

$$V_r(r,\theta) = f(R)\,F(\theta) = \frac{\nu}{r}F(\theta)$$

$$F''' + 4F' + 2FF' = 0$$

$2FF'$ → ناشی از ترم های غیرخطی

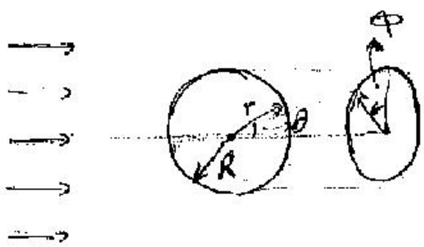
if $Re \ll 1 \Rightarrow FF' = 0$

$\Rightarrow \underline{F''' + 4F' = 0} \} \rightarrow$ حل تحلیلی → { بدست آورید }

$$V_r = \frac{q}{r}\,\frac{\cos 2\theta - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos\alpha} \qquad ?$$

جریان Re کم ← جریان خزشی (Creeping flow) یا جریان Stokes flow

■ جریان خزشی لزج در اطراف یک کره: آزمایشات → $Re < ۰/۱$



$V_r ,\ V_\theta ,\ V_\phi$

$V_\phi = 0$ → فرض می‌کنیم جریان در جهت e_ϕ سرعت ندارد

$\partial / \partial\phi = 0$

تراکم ناپذیر + دائم

$V_r = V_r(r,\theta)$

$V_\theta = V_\theta(r,\theta)$