$$\rho\left[V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}-\frac{V_\theta^2}{r}\right]=-\frac{\partial P}{\partial r}+\mu\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r^2}(r^2V_r)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\right.\qquad \leftarrow : r\ \text{mom}$$

$$\theta\ \text{mom}:\quad \rho\left\{V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{V_rV_\theta}{r}\right\}=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}$$

$$+\mu\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\theta\sin\theta)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right\}$$

Continuity:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2V_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,V_\theta)=0$$

شرایط مرزی : $@\ r=R \Rightarrow V_r=0\quad V_\theta=0$

$@\ r=\infty \Rightarrow V_r=U_\infty\cos\theta$

$V_\theta=U_\infty\sin\theta$

بی بعد سازی: --- - ---

$r^*=S=r/R$

$V_r^*=V_r/U_\infty$

$V_\theta^*=V_\theta/U_\infty$

$$P^*=\frac{P}{\frac{\mu U_\infty}{R}}\qquad \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\ \text{یا}\ \frac{\mu U_\infty}{R}$$

با بی بعد سازی P با $\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$ بی بعد است ← چون ترم های اینرسی V بی تأثیرند.

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{\frac{\rho U_\infty R}{\mu}}}_{Re}$$ [ترم های اینرسی] = (ترم های لزجت + فشار)

$Re \ll 1 \Rightarrow$ سمت چپ = 0

$$\text{r mom: } -\frac{\partial P}{\partial S} + \left\{ \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (S^2 V_r) + \frac{1}{S^2 \sin\theta} \times \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \right\} = 0 \quad ①$$

$$\theta \text{ mom: } -\frac{1}{S} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \left\{ \frac{1}{S^2} \frac{\partial}{\partial S} \left(S^2 \frac{\partial V_\theta}{\partial S} \right) + \frac{1}{S^2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin\theta) \right] + \frac{2}{S^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right\} = 0 \quad ②$$

با همه متغیرها بی بعد شد.

با توجه به شرایط مرزی در ∞ داریم:

$$\begin{cases} V_r = F(S) \cos\theta \\ V_\theta = G(S) \sin\theta \end{cases} \longrightarrow$$ جدایی متغیرها

سازگار است. $\leftarrow$ $\left. F(S)+\frac{۳}{۲}\frac{dF}{dS}+G(S)=0 \right\}$ ⇐ پیوستگی (۳)

ترم فشار را از معادلات r mom و θ mom حذف می‌کنیم : V

$$\left. s^۴F'''' + ۸s^۳F''' + ۸s^۲F'' - ۸sF' = 0 \right\} \quad (۴)$$

⇐ (۳)،(۲)،(۱)

معادله اولر

$\Rightarrow F = s^n$

$@\ s=1 \Rightarrow F(1)=0 \qquad G(1)=0 \overset{(۳)}{\Rightarrow} F'(1)=0$ (۵)

$@\ s=\infty \Rightarrow F(\infty)=1 \qquad G(\infty)=-1 \overset{(۳)}{\Rightarrow} F'(\infty)=0$

$$(۴) \Rightarrow s^n\left\{-۸n+۸n(n-1)+۸n(n-1)(n-۲)+n(n-1)(n-۲)(n-۳)\right\}=0$$

به ازای تمامی s ها ⇐

$$\begin{cases} n=0 \\ n=1 \\ n=۲ \\ n=-۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(s)=as^{-۳}+bs^{-1}+cs^{0}+ds^{۲} \quad \dots \quad (۶)$$

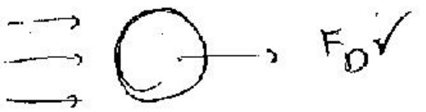
$(۵),(۶) \Rightarrow a=\frac{1}{۲} \qquad c=1$

$b=-\frac{۳}{۲} \qquad d=0$

$$\begin{cases} F(s) = 1 - \frac{۳}{۲s} + \frac{1}{۲s^{۳}} \\ G(s) = -1 + \frac{۳}{۴s} + \frac{1}{۴s^{۳}} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_r(r,\theta)}{U_\infty} &= -\frac{1}{۲}\cos\theta \left\{ \left(\frac{R}{r}\right)^{۳} - ۳\left(\frac{R}{r}\right) + ۲ \right\} \\ \frac{V_\theta(r,\theta)}{U_\infty} &= \frac{1}{۴}\sin\theta \left\{ -\left(\frac{R}{r}\right)^{۳} - ۳\left(\frac{R}{r}\right) + ۴ \right\} \end{aligned}\right\}$$

نحوه verify کردن: بدست آوردن میدان تنش



$$\tau_{r\theta} = ۲\mu d_{r\theta} = \mu \left\{ r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right\} *$$

$$\tau_{r\varphi} = ۲\mu d_{r\varphi} = 0$$

$$\tau_{\theta\varphi} = ۲\mu d_{\theta\varphi} = 0$$

$$\tau_{r\theta}\Big|_{r=R} = -\frac{۳}{۲}\,\frac{\mu U_\infty}{R}\sin\theta$$

$$\tau_{rr} = ۲\mu d_{rr} = ۲\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) = \frac{۳\mu U_\infty}{R}\cos\theta\left\{\left(\frac{R}{r}\right)^۲ - \left(\frac{R}{r}\right)^۴\right\}\Bigg|_{r=R} = 0$$

$\tau_{\theta\theta} = 0 \qquad \tau_{\theta\theta} = -\frac{1}{۲}\tau_{rr}$

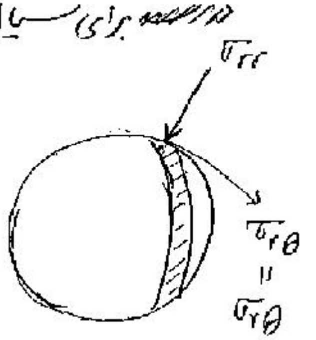
$\tau_{\varphi\varphi} = 0 \qquad \tau_{\theta\varphi} = -\frac{1}{۲}\tau_{\varphi r}$

چون تنش های normal صفر هستند ← سیالات نیوتنی را سیال غیرالاستیک می گویند.

برای سیال غیرنیوتنی تنش های نرمال صفر نمی شوند ← غیرالاستیک.

$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=R} = -P + \cancelto{0}{\tau_{rr}} = -P(r,\theta)\Big|_{r=R}$$



از معادله θ mom فشار را بدست می آوریم:

$$P(r,\theta) = P_\infty - \frac{۳}{۲}\frac{\mu U_\infty}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^۲\cos\theta$$

$$P(R,\theta) = P_\infty - \frac{۳}{۲}\frac{\mu U_\infty}{R}\cos\theta$$

$\min \rightarrow \theta = 0 \Rightarrow P_{\min} = P_\infty - \frac{۳}{۲}\frac{\mu U_\infty}{R} \rightarrow v_r, v_\theta = 0$

$\max \rightarrow \theta = \pi \Rightarrow P_{\max} = P_\infty + \frac{۳}{۲}\frac{\mu U_\infty}{R} \rightarrow v_r, v_\theta = 0$

$$F_D = \int(-\sigma_{rr}\cos\theta + \tau_{r\theta}\sin\theta)\,dA$$

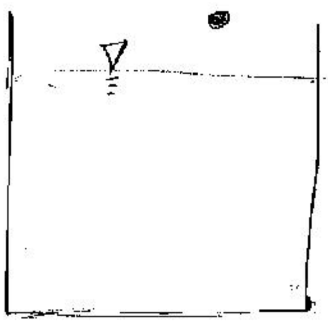
$$dA = ۲\pi R^{۲}\sin\theta\,d\theta \qquad ۰<\theta<\pi$$

$$F_D = ۶\pi\mu U_\infty R$$

$$(F_D)_{p} = \frac{1}{۳}(F_D)_{\nu}$$

$$(F_D)_{p} = ۱/۲\,(F_D)_{total}$$

آزمایش:



$$\mu = \frac{W}{۶\pi U_\infty R}$$

$Re<۱$ ← خیلی خوب

$Re<۲۵$ ← خوب

19

یکشنبه ۸۹,۱,۲۴:

پروژه حباب ←

$$\frac{D\lambda}{Dt} = \underset{\downarrow \atop \text{Buildup}}{A(1-\lambda)} - \underset{\downarrow \atop \text{distraction}}{B\lambda\dot{e}^{1/2}}$$

$\omega = 10$ MHZ

$\delta = 75$

$\sin(2\pi\omega t)$ یا $\sin(\omega t)$

اثر A و B را بررسی کنید

▨ ادامه جریان خزشی:

▨ جریان خزشی در اطراف کره:

$$\vec{\nabla P} = \mu\nabla^2\vec{V}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{\nabla P} = \nabla\times(\mu\nabla^2\vec{V})$$

$$\Rightarrow 0 = \mu\nabla^2(\nabla\times\vec{V}) \Rightarrow \mu\nabla^2\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2\omega = 0}$$

بردار Vorticity → ω

برای مسئله استوکس $\omega_r = 0$, $\omega_\theta = 0$, $\nabla^2\omega_\phi = 0$

$$\nabla^2 \omega_\phi = 0 \Big\}$$

$$\omega_\phi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \qquad ①$$

پیوستگی: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, V_\theta) = 0$ ②

در دو بعد و مختصات کارتزین داریم:

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ P_x = \mu(u_{xx} + u_{yy}) \\ P_y = \mu(v_{xx} + v_{yy}) \end{cases} \longrightarrow u = \psi_y \quad v = -\psi_x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0 \to \nabla^4 \psi = 0$$

$d\psi = 0 \longrightarrow \psi$ ثابت

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi = cte} = \frac{v}{u} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{خط جریان}}$$

$\Rightarrow$ ψ را خط جریان

می‌نامیم.

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

ψ فوق معادله ③ صفحه ۷۴ را ارضا می کند.

$$\omega_\phi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2 \psi = 0 \Rightarrow \nabla^4\psi = 0$$

$\Rightarrow \psi(r,\theta)$ ✓

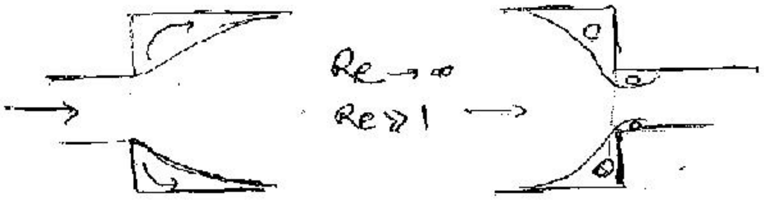
زیباست چون خطی است.

جریان پتانسیل ← $\nabla^2\phi = 0$ ← ← دو بعدی ← $\nabla^2\psi = 0$

استوانه : $\phi(r,\theta) = U_\infty r\cos\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$

یکنواخت دابلت

$$\psi(r,\theta) = U_\infty \underline{r\sin\theta}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$



Expantion

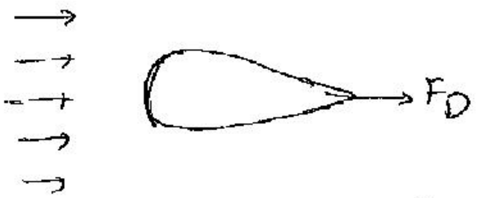
$$\vec{\nabla} P = \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\nabla \cdot \vec{\nabla} P = \mu \nabla \cdot (\nabla^2 \vec{v})$$

$$\Rightarrow \nabla^2 P = \mu \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{v}) \Rightarrow \underline{\nabla^2 P = 0} \;\Big\{$$

پس در جریان خزشی میدان فشار نیز خطی است.

جریان خزشی راحت تر است یا جریان پتانسیل؟

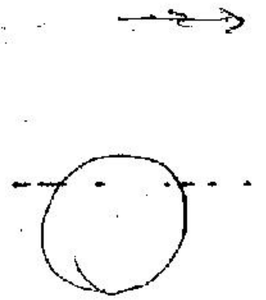


$Re \gg 1 \longrightarrow$

جریان F_D در کدام حالت بیشتر است؟ چرا؟

$\psi(r,\theta)$

$r \to \infty \Rightarrow \psi_\infty = \frac{1}{2} U_\infty r^2 \sin^2\theta$



$v_r = U_\infty \cos\theta$

$v_\theta = U_\infty \sin\theta$

$\nabla^4 \psi = 0$

$r = R \longrightarrow \psi = 0$

$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$

$$\left[\frac{\partial^۲}{\partial r^۲} + \frac{\sin\theta}{r^۲}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^۲\Psi = 0$$

$$\Rightarrow [E^۲]^۲\Psi = 0 \Rightarrow E^۲(E^۲\Psi) = 0$$

$$\Psi(\infty, \theta) = \frac{1}{۲} U_\infty r^۲ \sin^۲\theta$$

$$\Psi(R, \theta) = 0$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r}(R,\theta) = 0 \quad V_\theta = 0 \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}(R,\theta) = 0 \rightarrow V_r = 0$$

$\Psi(r) = f(r)\sin^۲\theta$ با توجه به شرط مرزی $r = \infty \Rightarrow$

$$E^۲\Psi = E^۲(f(r)\sin^۲\theta) = \sin^۲\theta\overbrace{\left(f'' - \frac{۲f}{r^۲}\right)}^{g(r)}$$

$$E^۲(E^۲\Psi) = \sin^۲\theta\left(g'' - \frac{۲g}{r^۲}\right)$$

$$= \sin^۲\theta\left(f'''' - ۴\frac{f''}{r^۲} + ۸\frac{f'}{r^۳} - \frac{۸f}{r^۴}\right) = 0$$

$$\Rightarrow f'''' - ۴\frac{f''}{r^۲} + ۸\frac{f'}{r^۳} - \frac{۸f}{r^۴} = 0 \quad \ldots\ldots$$

$$f = S^n$$

$$f(r) = A/r + Br + Cr^۲ + Dr^۴$$

$$\Rightarrow f(r) = U_\infty r^۲\left[\frac{1}{۲} - \frac{۳R}{۴r} + \frac{R^۳}{۴r^۳}\right]$$

$$\psi(r,\theta) = U_\infty r^2 \sin^2\theta \left[\frac{1}{2} - \frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3}\right] \Bigg\}$$

▨ جریان حول استوانه :

$$E^2(E^2\psi) = 0 \rightarrow \text{byharmonic}$$

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

کتاب: papanastasiou

↳ CH40 → E^2 را برای حالت‌های مختلف نوشته

شرایط مرزی: $\psi(\infty) = U_\infty r \sin\theta \rightarrow \begin{cases} v_r = U_\infty \cos\theta \\ v_\theta = -U_\infty \sin\theta \end{cases}$

$\psi(r=R) = 0$

$\frac{\partial\psi}{\partial r}(r=R) = 0$

$\psi(r,\theta) = f(r)\sin\theta$

$E^2(E^2\psi) = 0$

$$\Rightarrow f(r) = \underset{=0}{\cancel{A}} r^{۲} + \underset{=0}{\cancel{B}} r \ln r + \underset{U_\infty}{\cancel{C}} r + D/r$$

$$\Rightarrow f(r) = U_\infty r + D/r$$

$$V_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \qquad \Psi(r,\theta)\Big|_{r=R} = 0 \longrightarrow D$$

$$\Rightarrow \qquad\qquad \neq \quad \text{تناقض}$$

$$V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial r}(r,\theta)\Big|_{r=R} = 0 \longrightarrow D$$

$$D = -U_\infty R^{۲}$$
$$\longrightarrow \text{Stokes paradox}$$
$$D = +U_\infty R^{۲}$$

- نزدیک دیواره ترم اینرسی ≪ ترم لزجت
- در بی‌نهایت ← ترم اینرسی و ترم لزجت هم‌ارز هستند.

$$\Psi(r,\theta) = \Psi_0 + \underset{\epsilon}{\text{Re}}\,\Psi_1 + \text{Re}^{۲}\,\Psi_{۲} + \cdots$$

البته همین تناقض باید در حل کره نیز اتفاق می‌افتاد اما به طور کاملاً تصادفی چنین نشد. چون معادلات Stokes دارای Singularity در بی‌نهایت هستند.

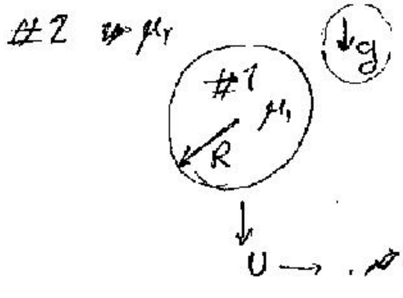
در نزدیکی دیواره ترم اینرسی کم و ترم لزجت زیاد است اما در بی‌نهایت دو ترم لزجت و اینرسی هم‌ارز هستند، یعنی در بی‌نهایت باید از معادلات N-S استفاده شود.

HW # 8.2.

یکشنبه ۱۳۸۹/۸/۲۹ :

جریان خزشی در اطراف یک قطره ← مسئله <u>۸.۳</u>

▣ جریان خزشی در اطراف یک قطره :



$\lambda = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

$U \rightarrow$ سرعت حد.

• فرض ① قطره کروی است و کروی باقی می‌ماند.

$Re_1 = \frac{RU}{\nu_1} \ll 1$

$Re_2 = \frac{RU}{\nu_2} \ll 1$ فرض ②

$$\begin{cases} \vec{\nabla} P = \mu_i \nabla^2 V_i - \rho_i \vec{g} & i = 1,2 \\ \nabla \cdot V_i = 0 \end{cases}$$

فرض ③ ← تقارن محوری را می‌پذیریم

$\psi \Leftarrow$ دو بعدی $\leftarrow \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$, $V_\phi = 0$

$V_r \rightarrow q_r$
$V_\theta \rightarrow q_\theta$ } → [illegible] تنش روسی و انطیسی.

پس جریان دو بعدی است و می‌توان از ψ بهره برد،

$$u_i = (V_r)_i = -\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi_i}{\partial\theta}$$

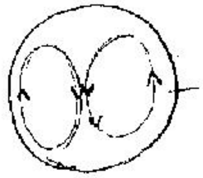
$$i = 1,2$$

$$v_i = (V_\theta)_i = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_i}{\partial r}$$

$$r\ mom:\ \frac{\partial P_i}{\partial r} = -\frac{\mu_i}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(E^2\psi_i) - \rho_i g\cos\theta$$

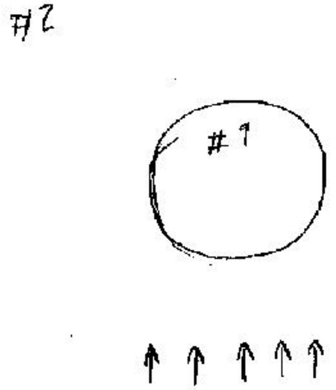
$$\theta\ mom:\ \frac{1}{r}\frac{\partial P_i}{\partial\theta} = \frac{\mu_i}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(E^2\psi_i) + \rho_i g\sin\theta$$

$$E^2 =$$



→ Circulation → چرا؟

☒ مسئله را از دید ناظری که روی قطره نشسته است دنبال می‌کنیم. چرا؟



O'Neal

$r \to \infty$; $|V_2| = U_\infty$

$r \to 0$; $|V_1| = \text{Bounded}$

$r = R$; $(\tau_{r\theta})_1 = (\tau_{r\theta})_2$

$r = R$; $(\tau_{rr})_2 - (\tau_{rr})_1 = \frac{2\Gamma}{R}$ ← کشش سطحی

$$\sigma_{rr} = -P + \tau_{rr}$$

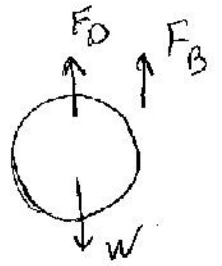
$$r \to \infty \; ; \; |V_2| = U_\infty \longrightarrow \psi_2 \Big|_{r=\infty} = \frac{1}{2} U_\infty r^2 \sin^2\theta$$

$$r = R \; ; \; \begin{cases} (V_r)_1 = (V_r)_2 = 0 \\ (V_\theta)_1 = (V_\theta)_2 \longrightarrow \text{شرط عدم لغزش} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Tritton}} \longrightarrow$ کتاب کاملاً فیزیکی

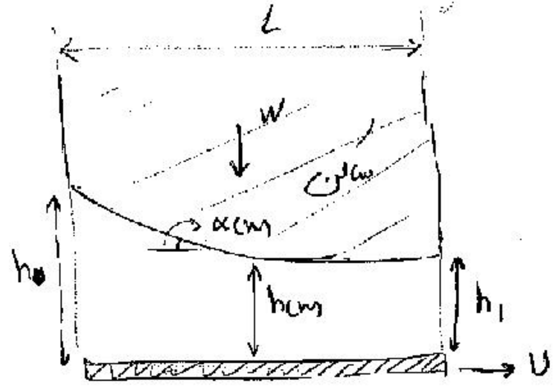
physical fluid dynamic.

$\lambda \to \infty \Rightarrow$ کره.



☒ تقریب روغنکاری : Lubrication Approximation

↲ برنولی:

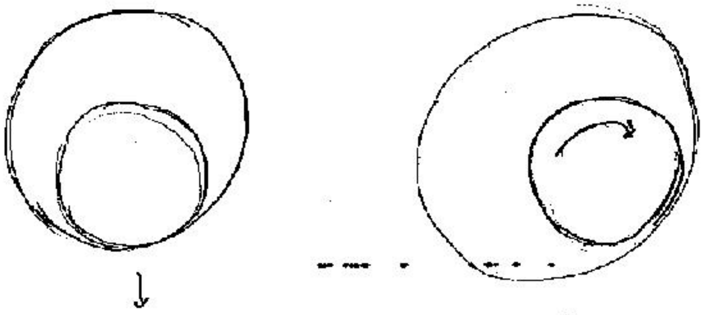


فرض ها ← $h_0 \ll L$

$h_1 \ll L$

$\alpha \ll 1 \rightarrow \alpha < 5^\circ$

● کاربرد ← Journal Bearing



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ x \text{ mom: } u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ y \text{ mom: } u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \end{cases}$$

● ابتدا معادلات را بی‌بعد می‌کنیم :

$$x^* = \frac{x}{L}$$

$$y^* = \frac{y}{\alpha L} \longrightarrow \alpha = \alpha(x)$$

$$u^* = \frac{u}{U}$$

$$v^* = \frac{v}{\alpha U} \longrightarrow \text{پیوستگی} : \frac{U}{L} + \frac{\partial v}{\alpha L} = 0$$

$$P^* = \frac{P}{\mu\left(\frac{U}{\alpha^2 L}\right)} \longrightarrow x \text{ mom با رجوع به}$$

$$x \text{ mom: } \rho\left(\frac{U}{L^2} + \frac{U}{L^2}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{U}{L^2} + \frac{U}{\alpha^2 L^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{P}{L} \sim \frac{\mu U}{\alpha^2 L^2}$$

A)

x mom: $\alpha Re\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)=-\frac{\partial P^*}{\partial x^*}+\alpha^2\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}\right)+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$

y mom: $\alpha^3 Re\left(u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)=-\frac{\partial P^*}{\partial y^*}+\alpha^4\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}\right)+\alpha^2\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right)$

$\alpha \ll 1 \Rightarrow$ x mom: $-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cong 0$

y mom: $-\frac{\partial P}{\partial y}=0 \Rightarrow P=P(x)$

پس فشار فقط تابعی از x است :

پیوستگی : $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$

$$\begin{cases} -\frac{dP}{dx}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$$

مقایسه با جریان پوازی :

$y=0 \rightarrow u=U$

$y=h \rightarrow u=0$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow u=-\frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}(yh-y^2)+U\left(1-\frac{y}{h}\right) \\ &h=h(x) \end{aligned}\right\}$$

$$Q = \int u\,dA = -\frac{1}{۲\mu}\frac{dP}{dx}\frac{h^۳}{۶} + \frac{hU}{۲} \qquad ①$$

$$\left.\frac{dQ}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left(h^۳\frac{dP}{dx}\right) = ۶U\frac{dh}{dx}\right\} \qquad ②$$

$$① \Rightarrow \frac{dP}{dx} = \frac{۶\mu U}{h^۲} - \frac{۱۲\mu Q}{h^۳} \longrightarrow$$ انتگرال گیریم

$$\Rightarrow P(x) = P_0 + ۶\mu U\int_0^x \frac{dx}{h^۲} - ۱۲\mu Q\int_0^x \frac{dx}{h^۳}$$

$$P_0 = P\Big|_{x=0}$$

$$@\ x = L \dashrightarrow P = P_L$$

$$\left.\underbrace{P(L) = P_0 + ۶\mu U\int_0^L \frac{dx}{h^۲} - ۱۲\mu Q\int_0^L \frac{dx}{h^۳}}\right\}$$

$$\Rightarrow Q\ ✓$$

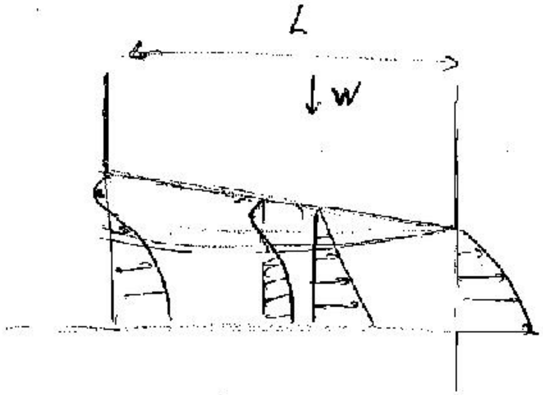
……

اگر $P_L = P_0$ باشد ⇐

$$\left.\underbrace{Q = \frac{U}{۲}\,\frac{\int_0^L dx/h^۲}{\int_0^L dx/h^۳}}\right\}$$

حالت خاص : $h(x) = h_0 - \alpha x$

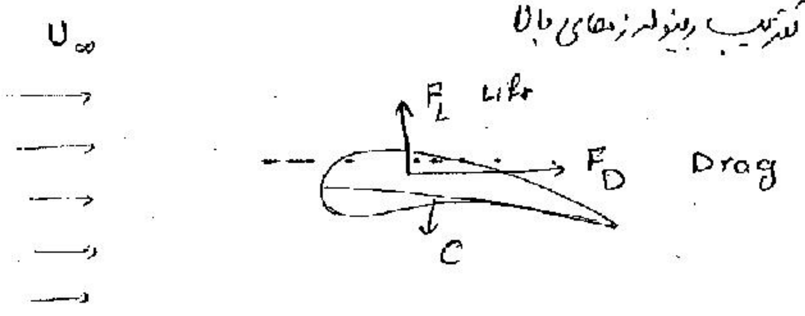
Sliping Pad Bearing



HW ← ① میدان فشار ② اشکال فشار رو ← ۲ هفته

فصل ۹ : تقریب لایه‌های مرزی ≡ تقریب پرانتل.

≡ تقریب رینولدزهای بالا



نیروی درگ ← ناشی از تنش های برشی روی سطح ایرفویل
و ناشی از گرادیان فشار.

$$F_D = (F_D)_\tau + (F_D)_p$$

$$F_L = (F_L)_\tau + (F_L)_p$$

پس باید میدان فشار و میدان تنش را بدست آوریم ← N-S Eq
← ناشی از میدان سرعت.

فرضیات : * دو بعدی
* سیال غیرقابل تراکم ← اگر $M < 0.3$ می توان از اثرات تراکم پذیری صرف نظر کرد.

اگر از لزجت هوا صرف نظر کنیم ← معادلات اولر:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla \vec{P} + \cancel{\mu \nabla^2 \vec{V}}$$

$\Rightarrow \overset{\text{محاسبه}}{P} \Rightarrow F_L \neq 0 \rightarrow$ به واقعیت نزدیک است

$F_D = 0$ ---- تا زمانی که جدایش اتفاق نیفتاده باشد.

← پارادوکس دالامبر

چون در نیروی F_L ، میدان فشار تأثیر گذاری بیشتری دارد

در نیروی F_D ، تنش برشی تأثیرگذارتر است

$\mu = 0$ ← جریان غیرچرخشی ⇐ جریان پتانسیل

$\vec{V} = \nabla \vec{\Phi}$

$\nabla \cdot \vec{V} = 0$

برنولی

$\nabla^2 \Phi = 0 \Rightarrow \Phi \checkmark \Rightarrow u, v \checkmark \Rightarrow |\vec{V}| \checkmark \Rightarrow P$ میدان فشار

$$x \text{ mom}: \overset{U_\infty^2/L}{\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\overset{\frac{U_\infty}{L^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \overset{\frac{U_\infty}{\delta^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\right)$$

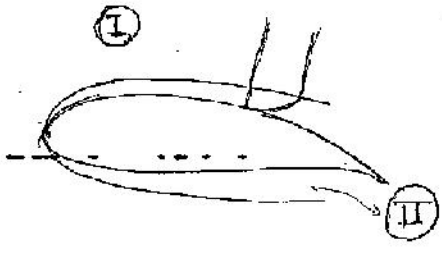
$$y \text{ mom}: \cancel{u\frac{\partial v}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\underset{\frac{U_\infty \delta}{L^2}}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \underset{\frac{U_\infty}{\delta L}}{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}\right)$$

$$\text{continuity}: \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

شرایط مرزی ← $y = 0 \rightarrow u = 0 \;, v = 0$

$y \rightarrow \infty \;;\; u \rightarrow U_\infty$

تقریب پرانتل :



ضخامت δ

فرض اساسی ← δ (نسبت به طول مشخصه‌ای) بسیار کوچک است.

ترم های اینرسی را با هم و ترم های لزجت را با هم مقایسه می کنیم.

$x \sim L \qquad u \sim U_\infty$

$y \sim \delta \qquad v \sim ?$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{U_\infty}{L} + \frac{v}{\delta} = 0 \Rightarrow v \sim U_\infty \frac{\delta}{L}$$

$P \sim \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \rightarrow ? \rightarrow$ برنولی

$* \Rightarrow$ y mom: ← کلاً از بین رفت ؟ فعلاً

~~x mom~~ $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow P \neq P(y)$

$$x \text{ mom}: \quad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

معادلات ← دوتا ← x mom و پیوستگی

مجهولات ← دوتا ← u, v

فرض بر این است که قبلاً از حل معادلات اولر یا لاپلاس P بدست آمده است.

← حل ← توسط بلازیوس Blasius.

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \rightarrow$$

معادلات
بلازیوس

$$x^* = x/L \qquad u^* = \frac{u}{U_\infty} \qquad P^* = \frac{P}{\rho U_\infty^2}$$

$$y^* = y/\delta \qquad v^* = \frac{v}{\frac{\delta U_\infty}{L}}$$

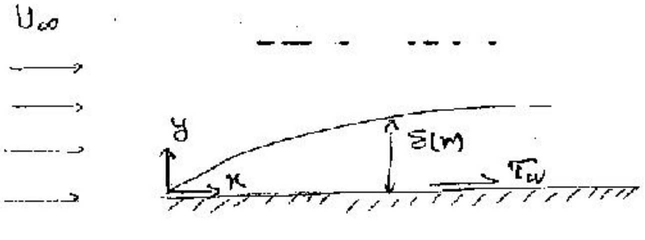
$$x: \; u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$y: \; \frac{1}{Re}\left(u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re^2}\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}$$

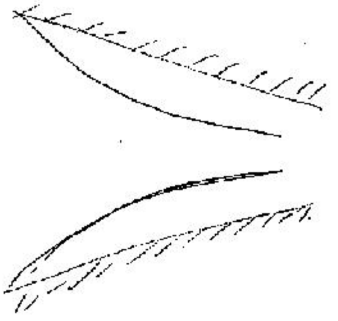
اگر $Re \rightarrow \infty$

δ بسیار کوچک $\equiv Re \rightarrow \infty$

مسئله صفحه تخت :



$$\frac{dP}{dx} * \frac{dP_\infty}{dx} = 0$$



$$\frac{dP}{dx} \neq 0$$

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$y=0 \rightarrow u=v=0$

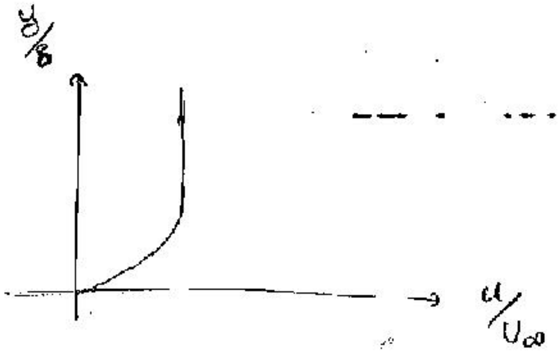
$y=\infty \rightarrow u=U_\infty$

ایده بلازیوس :

$$\frac{u}{U_\infty} = g\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) \leftrightarrow$$ تشابه

تساوی فوق به این معنی است که پروفیل های سرعت با هم متشابهند

کسب حل تشابهی



$$\frac{u}{U_\infty} = f'\left(y/\delta\right)$$ $g \leftarrow f' \leftarrow$ چرا؟

$$\eta = y/\delta \Rightarrow u = U_\infty f'(\eta)$$

پیوستگی : $v =$

$$x \text{ mom} \rightarrow \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \mu \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}$$

$$\Rightarrow \rho U_\infty \frac{U_\infty}{x} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta^۲}$$

$$\Rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

$$\Delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \Rightarrow \delta \sim \Delta(x)$$

$$\frac{u}{U_\infty} = f'\left(\overset{\eta}{\boxed{y/\Delta}}\right)$$ ← گردوها برن

$$v = \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{۴x}}\left(\eta f' - f\right)$$

$$x \text{ mom}: f''' + \frac{1}{۲} f f'' = 0$$

$$f(0) = f'(0) = 0$$

$$f'(\infty) = 1$$

$u(x,y) = u_\infty f'(\eta)$

$v(x,y) = \sqrt{\frac{\nu u_\infty}{4x}}(\eta f' - f)$ ⟸ مهم

$\xrightarrow{N-S} \boxed{f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0}$ $\quad f(0) = f'(0) = 0$, $f'(\infty) = 1.0$ $\quad$ B.C.

$\boxed{89.2.5}$

حل مسئله بلازیوس بکمک سری‌ها

$f(\eta) = A_0 + A_1\eta + \frac{A_2}{2!}\eta^2 + \cdots$

$f'(\eta) = A_1 + A_2\eta + A_3/_{2!}\,\eta^2 + \cdots$

$f''(\eta) = A_2 + A_3\eta + A_4/_{2!}\,\eta^2 + \cdots$

$f(0) = 0 \longrightarrow A_0 = 0 \qquad f'(0) = 0 \longrightarrow A_1 = 0$

$f''' + \frac{f f''}{2} = 0 \Rightarrow f'''(0) = 0 \longrightarrow A_3 = 0$

$2\left[A_4\eta + \frac{A_5}{2!}\eta^2 + \frac{A_6}{3!}\eta^3 + \cdots\right] + \left[\frac{A_2}{2!}\eta^2 + \frac{A_4}{4!}\eta^4 - \right]\left[A_2 + \frac{A_4}{2!}\eta^2 - \cdots\right] = 0$

$A_4 = 0 \quad , \quad 2A_5/_{2!} + A_2^2/_{2!} = 0 \quad , \quad 2A_6/_{3!} = 0$

$2A_7/_{4!} + \frac{A_2A_4}{4!} + \frac{A_2A_4}{2!2!} = 0$

$2A_8/_{8!} + A_2A_5/_{5!} + A_2A_5/_{2!3!} = 0$

$\Rightarrow A_4 = 0, \quad A_6 = 0, \quad A_7 = 0$

$A_8 = \frac{11}{4}A_2^3 \quad , \quad A_5 = -A_2^2/_2$

$\Rightarrow f(\eta) = \frac{A_2}{2!}\eta^2 - \frac{1}{2}\frac{A_2^2}{5!}\eta^5 + \frac{1}{4}\frac{11A_2^3}{8!}\eta^8 - \frac{1}{8}\frac{375}{11!}A_2^4\eta^{11}$ ✓

$\underset{\eta\to\infty}{f'(\eta)} \simeq 1.0 \qquad \eta \simeq 5. \qquad \underline{\underline{A_2 = 0.33206}}$

$$f(\eta) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-\tfrac{1}{2}) \frac{\alpha^{n+1} C_n}{(3n+2)!} \eta^{3n+2} \qquad \alpha = 0.33206 = A_2$$

$C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 11$, $C_3 = 375$, $C_4 = 27,897$

$C_5 = 3,717,137$

$$\boxed{\tau_w = \tau_w(x) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \mu \sqrt{\frac{u_\infty^3}{\nu x}} f''(0)}$$

$$\boxed{C_f = \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad ; Re_x = \frac{u_\infty \cdot x}{\nu}} \quad ☑$$

البته در ابتدای لبه τ خیلی خراب جواب می‌دهد چون δ و x در آن قسمت هم مرتبه هستند. بنابراین:

$(\delta/x \leq 0.1) \Rightarrow$ شرط صحت قبول

ما را verify فعل τ_w :

$$F_D = \int_0^L \tau_w \, dA \Rightarrow F_D ✓ \Rightarrow C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 A} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_{u_\infty L/\nu}}}$$

$$\Rightarrow C_D = \frac{1.328}{\sqrt{Re_x}} \Rightarrow \boxed{F_D = 1.328 \left(\frac{1}{2}\rho u_\infty^2\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{u_\infty L}{\nu}}}} \pm \%1$$

خطا

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad @\, y=0,\ u=0,\ v=0$$

$$@\, y=\infty,\ u \rightarrow u_\infty$$

$@\, x=0 \quad u = u_\infty$ ⇐ در این معادله x ها نقش t در معادله استوکس را دارد

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}} \qquad \begin{array}{|c|}\hline y=\infty \\ \hline x=0 \\ \hline\end{array} \rightarrow \boxed{\eta = \infty}$$

بنابراین حل تشابهی دارد.

$$\eta = A\left(\frac{y}{x^n}\right)$$

دامنه‌ها هم در مرحله با هم collapse می‌شوند!

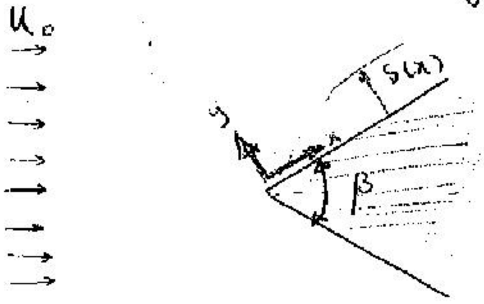
ترسیب currie :

$\frac{u}{U_\infty} = f'(\eta) \qquad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$v \rightarrow$ از پیوستگی $\Rightarrow (\,\cdot\cdot\, F(x)\,) f''' + (\,\cdot\cdot\,)\frac{1}{2} f f'' = 0$

if $n = \frac{1}{2} \Rightarrow$ مستقل از x میشود $;\ A = \sqrt{\nu/U_\infty}$

Falkner – Skan : جریان (wedge Flow)



$\partial P/\partial x \neq 0 \qquad \tau_w(x) = ?$

$\mu = 0 \rightarrow$ جریان غیرچرخشی $\Rightarrow \nabla^2\phi = 0$

$\Rightarrow U_\infty(x) = Cx^m \quad , \ m = \frac{\beta/\pi}{2-\beta/\pi}\ ?$

بامقایسه با U_0 دردور

if $\beta = 0 \rightarrow C = U_0$

$P_\infty(x) + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2(x) = \text{Const.}$

$\frac{dP_\infty}{dx} = -\frac{\rho U_\infty^2(x)\cdot m}{x}$

$$\boxed{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{mU_\infty^2(x)}{x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad \text{O.D.E.}$$

$\eta = y\Big/\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \Rightarrow \frac{u}{U_\infty} = f'(\eta)$

$$f''' + \left(\frac{m+1}{2}\right) f f'' + m\left[1 - f'^2\right] = 0$$

$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1$

$\frac{u(x,y)}{u_\infty} = f'(y/\xi) \Rightarrow \eta = y/\xi$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \underbrace{U_\infty\frac{dU_\infty}{dx}}_{-1/\rho\,\frac{dP_\infty}{dx}} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow f''' + \Big[\underbrace{\frac{\xi}{\nu}\frac{d}{dx}(u_\infty \xi)}_{\alpha}\Big] f f'' + \Big[\underbrace{\frac{\xi^2}{\nu}\frac{du_\infty}{dx}}_{\beta}\Big](1-f'^2) = 0$$

$u_\infty , \xi = f(x)$?

$$f''' + \alpha f f'' + \beta\left[1 - f'^2\right] = 0$$

مراحل :

1) α ، β انتخاب می‌شوند .

2) از معادلات I ، II $\Leftarrow$ $\xi(x)$ ، $u_\infty(x)$

3) از $u_\infty(x)$ مشخص می‌شود مسئله چیست .

4) از $\xi(x) \leftarrow f \leftarrow \tau_w(x)$

$$\begin{cases} \dfrac{\xi}{\nu}\dfrac{d}{dx}(u_\infty \xi) = \alpha \quad (I) \\[2ex] \dfrac{\xi^2}{\nu}\dfrac{du_\infty}{dx} = \beta \quad (II) \end{cases}$$

(جریان $u_\infty = Cx^m$ [illegible]
wedge Flow)

$$\alpha = \frac{1}{2}\ ;\ \beta = 0 \Rightarrow \frac{du_\infty}{dx} = 0 \rightarrow u_\infty = \text{Cnst.} = C$$

$$\Rightarrow \frac{\xi}{\nu}\frac{d}{dx}(\underset{C}{u_\infty}\xi) = \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{\nu x}{C}} \rightarrow \text{Flat plate}$$

$$\alpha = \beta = 1 \Rightarrow \begin{matrix} u_\infty = Cx \\ \xi = \sqrt{\nu / C} \end{matrix} \rightarrow f''' + ff'' + 1 - f'^2 = 0$$

جریان hiemenz

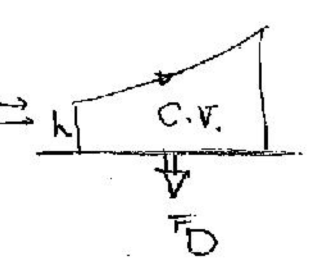
هر α و β جوابی قابل قبول از منظر فیزیکی نمی‌دهد مثلاً u از u_∞ در لایه مرزی جلو می‌زند !

$\boxed{89.2.7}$

$$\text{PDE} \xrightarrow{\text{حل دقیق}} \text{ODE}$$

روش فون کارمن

* معادله انتگرال مومنتم



$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}}^{\,0} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{Flat-Plate}$$

$$\partial u/\partial x + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u^2) - u\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}} - \partial v/\partial y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \underbrace{u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\partial/\partial y(uv)} = \nu\,\partial^2 u/\partial y^2$$

$$\Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y}(uv)\,dy = \nu \int_0^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy$$

$$\Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy + [uv]_0^\delta = \nu \sim = -\tau_w/\rho$$

$$\Rightarrow \quad '' \quad + u_\infty v(x,\delta) = -\tau_w/\rho$$

پیوستگی : $\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + \overbrace{\int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y}\,dy}^{v(x,\delta)} = 0$

$$v(x,\delta) = -\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

$$\Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy - u_\infty \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = -\tau_w/\rho$$

Leibnitz : $\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy + f(x,\beta)\frac{d\beta}{dx} - f(x,\alpha)\frac{d\alpha}{dx}$; $\underline{\delta = \delta(x)}$

$$\Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2\,dy - u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u)\,dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u\,dy - u_\infty \frac{d\delta}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u(u_\infty - u)\,dy = \tau_w/\rho \Rightarrow \frac{d}{dx}\int_0^{\delta(x)} \underbrace{\frac{u}{u_\infty}\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)dy}_{\theta} = \tau_w/\rho u_\infty^2$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} = \tau_w/\rho u_\infty^2}$$

$$\Downarrow$$

$u(x,y)$, $\delta(x)$, τ_w : مجهول

شکل پروفیل سرعت در معادله فون-کارمن حدس زده می‌شود.

در حالت اول : چندجمله‌ای — سینوسی یا کسینوسی انتخاب می‌شود

،، دوم : چندجمله‌ای توانی

$$\frac{u}{u_\infty} = g(y/_\delta) = a_0 + a_1(y/_\delta) + a_2(y/_\delta)^2$$

$\#1$: @ $y=0$: $u=0$

$\#2$: @ $y=\delta$: $u=u_\infty$ $\Rightarrow \boxed{\frac{u}{u_\infty} = 2(y/_\delta) - (y/_\delta)^2}$

$\#3$: @ $y=\delta$: $\partial u/\partial y = 0$

$$\Rightarrow \int_0^\delta u(u_\infty - u)dy = u_\infty^2 \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty}\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)dy = 2/_{15}\,\delta u_\infty^2$$

(mementom integral = MI)

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \underline{2\mu\frac{u_\infty}{\delta}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{15}\delta u_\infty^2\right) = \frac{2\nu u_\infty}{\delta}$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}} \Leftarrow \delta(x) = \sqrt{30}\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \Leftarrow$$ از exact حل ↓

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = \frac{0.730}{\sqrt{Re_x}} \quad \left(\text{Blasius} : \frac{0.664}{\sqrt{Re_{,x}}}\right)$$

$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2u_\infty}{\delta^2} \neq 0\right)$? بهترین حالت، پروفیل درجه 5 در ص 4 دارد.

$\frac{u}{u_\infty} = \sum_{i=0}^{4} a_i (y/_\delta)^i$

$\#4$: $y=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\#4$: $y=\delta$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

مسائل 1_3 : شرایط فرعی هستند

$\#5$: $y=\delta$: $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$

شرایط طبیعی :

جریان با گرادیان فشار ؛

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_\infty \frac{du_\infty}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0 \end{cases}$$

$$I = \int_0^\delta \underbrace{u_\infty \frac{du_\infty}{dx}}\, dy = ?$$

$$I = \frac{du_\infty}{dx}\int_0^\delta u_\infty\, dy .$$

ضمناً u_∞ , $\frac{du_\infty}{dx}$ هردو مستقل از y هستند
می‌توان بیرون آورد است

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u(u_\infty-u)\,dy+\frac{du_\infty}{dx}\int_0^\delta(u_\infty-u)\,dy=\tau_w/\rho$$

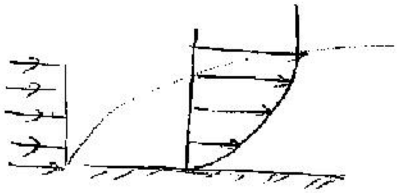
$$\frac{d}{dx}\underbrace{\int\frac{u}{u_\infty}\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)dy}_{\theta}+\frac{du_\infty}{dx}\,\frac{1}{u_\infty}\underbrace{\int_0^\delta\left(1-u/u_\infty\right)dy}_{\delta^*}=\tau_w/\rho u_\infty^2$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{d\theta}{dx}+(2\theta+\delta^*)\frac{1}{u_\infty}\frac{du_\infty}{dx}=\tau_w/\rho u_\infty^2}\quad \text{M. I.}$$

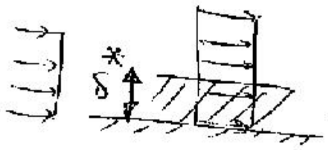
$$\frac{d}{dx}\left[u_\infty^2\int_0^\delta\frac{u}{u_\infty}(1-u/u_\infty)\,dy\right]+\frac{du_\infty}{dx}u_\infty\int_0^\delta(1-u/u_\infty)\,dy=\tau_w/\rho$$

$$\frac{d}{dx}(u_\infty^2\theta)+\frac{du_\infty}{dx}(u_\infty\delta^*)=\tau_w/\rho$$

مفهوم δ*, θ :



$$\dot m=\int_0^\delta\rho u\,dy\cdot B\longrightarrow 1$$



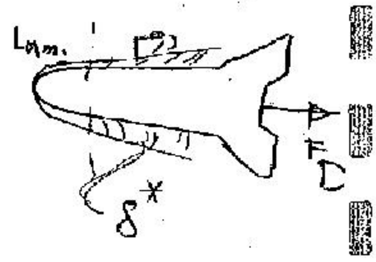
معادل:

$$\dot m=\int\rho u_\infty\,dy-\rho u_\infty\delta^*=\int_0\rho u\,dy$$

$$\Rightarrow\boxed{\delta^*=\int_0^\infty(1-u/u_\infty)\,dy}$$

δ* : به خاطر خصوصیت انتگرالی، خطای بسیار کمتری در محاسبات است تا δ دارد !

$$F_D=(F_D)_p+(F_D)_\tau$$



#1) جریان پتانسیل حل می‌شود ....

#2) با استفاده از فشار P.O مرحله ۱ معادلات لایه مرزی حل می‌شوند

و δ* پیدا می‌شود

#3) حل پتانسیل مجدداً انجام می‌شود

#4) مسئله حل می‌شود ⇒ new δ* ⇒ $\boxed{|\delta^*_{i+1}-\delta^*_i|\le10^{-6}}$

⇒ τ_w ✓

قانون کلی : $\delta > \delta^* > \theta$

بلازیوس $\delta^* = \frac{1.72}{\sqrt{Re_x}}$

سه‌شنبه ۱۳۸۹,۲,۷

■ روش فون کارمن :

که معادله انتگرال ـ مومنتوم ،

$$x\text{ mom: } u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

از این روش برای مسائلی که $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$ نیز می‌توان استفاده کرد.

$$\text{Continuity: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u^2) - u\overset{= -\partial v/\partial y}{\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \underbrace{u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y}(uv)} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

همان فرم بقای معادلات است

معادلات mom

از دو طرف تساوی فوق $\int_0^\delta dy$ می‌گیریم !

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2)dy + [uv]_0^\delta = \frac{-\tau_w}{\rho}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy + U_\infty v(x,\delta) = -\frac{\tau_w}{\rho} \qquad ①$$

Continuity: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + \int_0^{\delta} \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + v(x,\delta) = 0$$

$$\Rightarrow v(x,\delta) = -\int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x}\,dy \qquad ②$$

$$①,② \Rightarrow \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy - U_\infty \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \qquad ③$$

Leibniz: $\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy =$

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy + \overset{f(x,\beta)}{\overset{\uparrow}{f}} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \overset{f(x,\alpha)}{\overset{\uparrow}{f}} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \qquad ④$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2\,dy - U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \qquad ⑤$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} u\,dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u\,dy - U_\infty \frac{d\delta}{dx} \qquad ⑥$$

$$① \Rightarrow \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u(U_\infty - u)\,dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} \frac{u}{U_\infty}\left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^{۲}}} \left.\vphantom{\int_0^\delta}\right\} \overset{(۷)}{\rightarrow} M.I.$$

انتخاب

▪ در روش فون کارمن پروفیل سرعت حدس زده می‌شود.

جریان

در ~~[illegible]~~ آرام ← از چند جمله‌ای و نیز Sin و Cos است.

در جریان مغشوش ← از پروفیل‌های نمایی استفاده می‌شود.

$$\frac{u}{U_\infty} = a_0 + a_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_{۲}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{۲}$$

شرط مرزی ← $y=0 \rightarrow u=0$

$y=\delta \rightarrow u=U_\infty$ $\quad \Rightarrow \boxed{\frac{u}{U_\infty} = ۲\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{۲}}$

$y=\delta \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$$\int_0^{\delta} u(U_\infty - u)\,dy = U_\infty^{۲}\int_0^{\delta}\frac{u}{U_\infty}\left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy = \underline{\frac{۲}{۱۵}\,\delta U_\infty^{۲}}$$

$$\tau_w = \mu\frac{\partial u}{\partial y} = ۲\mu\frac{U_\infty}{\delta}$$

$$(۷) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{۲}{۱۵}\,\delta U_\infty^{۲}\right) = \frac{۲\nu U_\infty}{\delta} \Rightarrow \underline{\delta(x) = \sqrt{۳۰}\,\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{۵٫۴۸}{\sqrt{Re_x}}$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{۲}\rho U_\infty^{۲}} = \frac{۰٫۷۳۰}{\sqrt{Re_x}} \rightarrow$$ درجه دو فون کارمن

$$\frac{۰٫۶۶۴}{\sqrt{Re_x}} \longrightarrow$$ دقیق ، بلازیوس.

⊙ پروفیل درجه ۲ ← $\frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}} = -\frac{۲U_\infty}{\delta^{۲}} \neq ۰$

☐ درجه ۳

$\frac{u}{\;}$

شرط مرزی بیشتر $\xrightarrow{\text{درجه ۳}}$ $y = ۰ \rightarrow \frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}} = ۰ \rightarrow$ چرا؟ → فیزیکی / ریاضی

درجه چهار $y = \delta \rightarrow \frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}} = ۰$

درجه ۵ $y = \delta \rightarrow \frac{\partial^{۳} u}{\partial y^{۳}} = ۰$

⋮ $y = \delta$

تا درجه ۳ ← شرط مرزی فیزیکی ......

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U_\infty\frac{dU_\infty}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\int_0^\delta U_\infty\frac{dU_\infty}{dx}dy=\frac{dU_\infty}{dx}\int_0^\delta U_\infty dy\longrightarrow\ ?$$ برای مجزا شدن فرم

جواب ← تقریب

①

$$x\ \text{mom}:\ \frac{d}{dx}\int_0^\delta u(U_\infty-u)\,dy+\frac{dU_\infty}{dx}\int_0^\delta(U_\infty-u)\,dy=\frac{\tau_w}{\rho}$$

②

$$U^2\ \Rightarrow\frac{d}{dx}\Bigg[\underbrace{\int_0^\delta\frac{u}{U_\infty}\Big(1-\frac{u}{U_\infty}\Big)dy}_{\theta}\Bigg]+\frac{1}{U_\infty}\frac{dU}{dx}\underbrace{\int_0^\delta\Big(1-\frac{u}{U_\infty}\Big)dy}_{\delta^*}=\frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2}$$

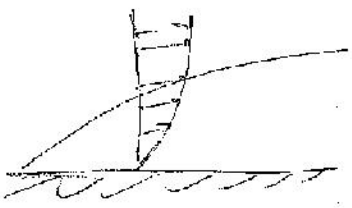
θ ضخامت مومنتوم

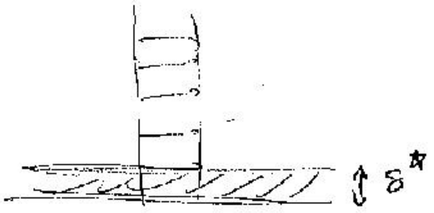
δ* ضخامت جابجایی

$$\frac{d\theta}{dx}+(2\theta+\delta^*)\frac{1}{U_\infty}\frac{dU_\infty}{dx}=\frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2}$$

$$①\Rightarrow\frac{d}{dx}(U_\infty^2\theta)+\frac{dU_\infty}{dx}U_\infty\delta^*=\frac{\tau_w}{\rho}$$

چرا ضخامت جابجایی ؟ چرا ضخامت مومنتوم ؟





$$\dot{m} = \int_0^\infty \rho u\, dy = \int_0^\delta \rho U_\infty dy - \rho U_\infty \delta^*$$

$$\Rightarrow \delta^* = \int_0^\infty (1 - u/U_\infty)\, dy$$

δ ← به خطای آزمایش بسیار حساس است

δ* ← نه

تعبیر فیزیکی δ*

← میزان تاب برداشتن خطوط جریان .

■ حل مسایل سه بعدی

۱) حل جریان پتانسیل ← میدان فشار

۲) با استفاده از میدان فشار مرحله 1 ← معادلات لایه مرزی حل می‌شوند تا δ^* محاسبه شود.

۳) ضخامت δ^* به شکل اضافه می‌شود و دوباره جریان پتانسیل حل می‌شود

۴) دوباره معادلات لایه مرزی حل می‌شوند تا $\delta^{*\,new}$ به دست آید

$$|\delta^*_{i+1} - \delta^*_i| < 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \tau_w \checkmark$$

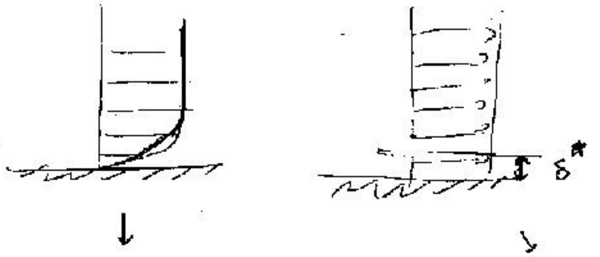
قاعده کلی → $\delta > \delta^{*} > \theta$

بلازیوس → $\delta^{*} = \frac{1}{3}\delta$

یکشنبه ۱۳۸۹/۲/۱۳

روش انتگرالی Karman- Pohlhousen برای محاسبه تنش برشی در جریان های با گرادیان فشار ⇐ حل تشابهی ندارد.

$$\delta^{*} = \int_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy$$



$$\dot{m}_{1} = \int_{0}^{\infty} \rho u^{2} dy \qquad \dot{m}_{2} = \int_{0}^{\infty} \rho U_{\infty}^{2} dy - \rho U_{\infty}^{2} \delta^{*}$$

$$\dot{m}_{2} - \dot{m}_{1} = \int_{0}^{\infty} \rho U_{\infty}^{2} dy - \rho U_{\infty}^{2} \delta^{*} - \int_{0}^{\infty} \rho u^{2} dy = \underline{\underline{\rho U_{\infty}^{2} \theta}}$$

$$U_{\infty}^{2} \delta^{*} = \int_{0}^{\infty} \left(U_{\infty}^{2} - u U_{\infty}\right) dy$$

$\Rightarrow \theta = \int_{0}^{\infty} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy$ → ضخامت مومنتم

$$\rho U_\infty^{۲}\theta=\int \rho u\,dy\,(U_\infty-u)$$

$$\Rightarrow\theta=\int_0^\infty \frac{u}{U_\infty}\left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy$$

$$\frac{d\theta}{dx}+(۲\theta+\delta^*)\frac{1}{U_\infty}\frac{dU_\infty}{dx}=\frac{\tau_w}{\rho U_\infty^{۲}}$$

پروفیل درجه ۴ سرعت می زنیم:

$$u^*=\frac{u}{U_\infty}=a+b\eta+c\eta^{۲}+d\eta^{۳}+e\eta^{۴}$$

$$y^*=\eta=y/\delta$$

$$y=0\rightarrow u=0$$

$$y=\delta\rightarrow u=U_\infty$$

$$y=\delta\rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$y=0\Rightarrow\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=-\frac{U_\infty}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx}$$

$$y=\delta\rightarrow\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=0\quad\cdots$$

$$\eta=0\ ;\ \frac{u}{U_\infty}=0\ ;\ \frac{\partial^{۲}}{\partial\eta^{۲}}\left(\frac{u}{U_\infty}\right)=\overset{\Lambda(x)\ \text{پارامتر فشار}}{\boxed{-\frac{\delta^{۲}}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx}}}$$

$$\eta = ۱ \quad \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{u}{U_\infty}\right) = \frac{\partial^{۲}}{\partial \eta^{۲}}\left(\frac{u}{U_\infty}\right) = ۰$$

$$\frac{u}{U_\infty} = ۱$$

$\Rightarrow a = ۰$

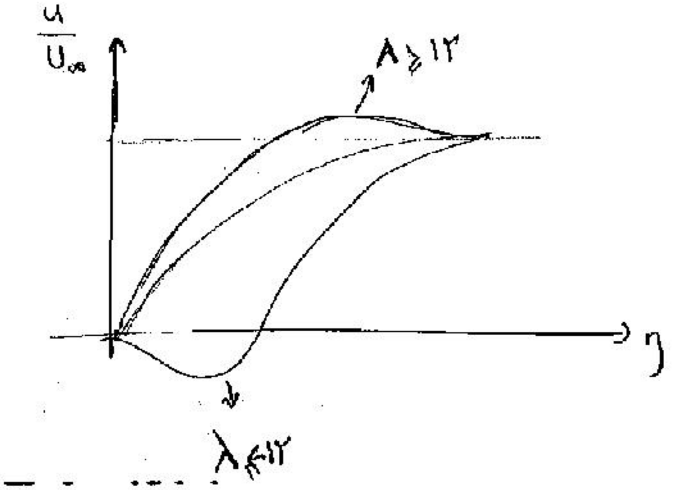
$b = ۲ + \frac{\Lambda}{۶}(x)$

$c = -\frac{\Lambda}{۲}(x)$

$d = -۲ + \frac{\Lambda}{۲}(x)$

$e = ۱ - \frac{\Lambda}{۶}(x)$

$\longrightarrow$ تابعی از x هستند پس حل تشابهی نمی‌باشند ?



پس فقط ۱۲- < Λ < ۱۲ قابل قبول است ← چرا؟

لذا از Λ = -۱۲ به عنوان معیار seperation یاد می‌شود.

امّا این معیار، معیار خوبی نیست.

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \delta \int_0^\infty (1 - u^*)\, d\eta \longrightarrow \eta = \frac{y}{\delta}$$

$$\delta^* = \delta\left(\frac{۳}{۱۰} - \frac{\Lambda}{۱۲۰}\right) \quad ①$$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) = \delta\left(\frac{۳۷}{۳۱۵} - \frac{\Lambda}{۹۴۵} - \frac{\Lambda^۲}{۹۰۷۲}\right) \quad ②$$

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \mu \frac{U_\infty}{\delta}\left(۲ + \frac{\Lambda}{۶}\right) \quad ③$$

$$\frac{d\theta}{dx} + (۲\theta + \delta^*) \frac{1}{U_\infty} \frac{dU_\infty}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^۲} \quad ④$$

①, ②, ③, ④ ⇒ δ برحسب ODE ⇒ $\left\{ \begin{array}{l} \Lambda \\ U_\infty \\ \frac{dU_\infty}{dx} \end{array} \right.$ $\frac{d^۲U_\infty}{dx^۲}$

اگر U_∞ را عددی بدست آوریم آنگاه دقت $\frac{d^۲U_\infty}{dx^۲}$ پایین می‌آید و حل جالب نخواهد بود ?

■ حل Holstein_Bohlen

$Re_\theta = \frac{\theta U_\infty}{\nu}$ ---- . . θ ← ضخامت منتوم

$$④ \Rightarrow \frac{1}{۲} U_\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{\theta^۲}{\nu}\right) + \left(۲ + \frac{\delta^*}{\theta}\right) \underbrace{\boxed{\frac{\theta^۲}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx}}}_{\lambda} = \frac{\tau_w \theta}{\mu U_\infty}$$

$\frac{ج}{ع}$ ؛ ۱=G

این دو پیشنهاد کردند که $\lambda = \frac{\theta^{۲}}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx}$ پارامتر فشار باشد،

$$\lambda = \frac{\theta^{۲}}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx} = \frac{\theta^{۲}}{\delta^{۲}}\Lambda^{*}$$

$$= \left(\frac{۳۷}{۳۱۵} - \frac{\Lambda}{۹۴۵} - \frac{\Lambda^{۲}}{۹۰۷۲}\right)^{۲}\Lambda$$

$$\frac{\delta^{*}}{\lambda} = \frac{\left(۳/۱۰ - \Lambda/۱۲۰\right)}{\left(۳۷/۳۱۵ - \Lambda/۹۴۵ - \Lambda^{۲}/۹۰۷۲\right)} = f(\lambda)$$

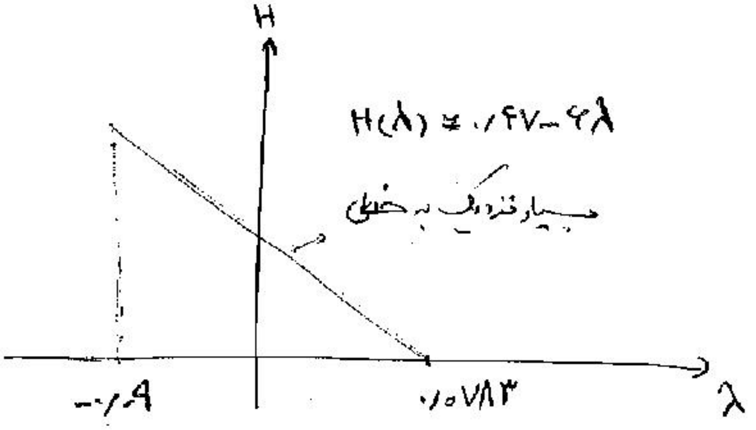
$$\frac{\tau_w}{\rho U_\infty^{۲}} = (۲ + \Lambda/۶)\times\left(۳۷/۳۱۵ - \Lambda/۹۴۵ - \Lambda^{۲}/۹۰۷۲\right) = g(\lambda)$$

$$④ \Rightarrow U_\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{\theta^{۲}}{\nu}\right) = ۲\underbrace{\left\{g(\lambda) - [۲ + f(\lambda)]\lambda\right\}}_{H(\lambda)}$$

$$\theta^{۲}/\nu = Z$$

①

$$\left\{\begin{array}{l} Z\dfrac{dU_\infty}{dx} = \lambda \\[2ex] U_\infty \dfrac{dZ}{dx} = H(\lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow \delta, \delta^{*}, \theta, \tau_w \checkmark\checkmark$$



Walz ●

$\Lambda = -۱۲ \Rightarrow \lambda = -۰/۱۵۶۷$

separation → $\lambda \simeq -۰/۰۹$

از صفحه ۱۱ ، ① ⇐

$$\underbrace{\theta^{۲}(x) = \frac{۰/۴۷\,\nu}{U_\infty(x)} \int_{۰}^{x} U_\infty^{۵}(\xi)\,d\xi}_{\text{منسوب به Walz}}$$

مراحل:

#1) حل پتانسیل ⇐ $U_\infty(x)$

#2) با استفاده از معادله Walz ⇐ $\theta(x)$

#3) λ و از رابطه $\frac{\theta^{۲}}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx}$ بدست می‌آید

#4) δ , δ^* ⇐ پروفیل سرعت ⇐ C_f ⇐ τ_w

جریان بلازیوس ← $U_\infty = Cte$ ⇐

$$\begin{cases} \dfrac{\theta(x)}{x} = \dfrac{۵٫۸۴}{\sqrt{Re_x}} \\ C_f = \dfrac{۰٫۶۸۶}{\sqrt{Re_x}} \end{cases}$$

در حل Walz مجهول داریم: چرا؟ λ

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx} = \left(\frac{۳۷}{۳۱۵} - \frac{\Lambda}{۹۴۵} - \frac{\Lambda}{۹۰۷۲} \right)^2 \Lambda$$

سه شنبه ۱۳۸۹/۲/۱۴

روش فون کارمن وقتی U_∞ عددی بدست می آید ← $\frac{d^2U_\infty}{dx^2}$ دقت کمی دارد

$\text{Bohlen + Holstein} \Rightarrow ODE \Rightarrow \theta(U_\infty , \frac{dU_\infty}{dx})$

$\text{Walz} \Rightarrow \theta($ انتگرال $) \to \tau_w$

ضعف ← $\lambda = \lambda(\Lambda)$

■ روش Thwaites :

← فقط برای روش آرام کاربرد دارد

$$\frac{d\theta}{dx} + (۲\theta + \delta^*)\frac{1}{U_\infty}\frac{dU_\infty}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty} \quad : U_\infty(x) \qquad ①$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} + (۲ + \frac{\delta^*}{\theta})\frac{\theta}{U_\infty}\frac{dU_\infty}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty} \qquad ②$$

$\frac{\delta^*}{\theta} = H \rightarrow$ shape factor

طرفین ② را در $\frac{U_\infty \theta}{\nu}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{U_\infty\theta}{\nu}\frac{d\theta}{dx} + (۲+H)\underbrace{(\frac{\theta^۲}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx})}_{\lambda} = \frac{\tau_w\theta}{\mu U_\infty} = \cancel{T(\lambda)} = T(\lambda) \qquad ③$$

$H = H(\lambda)$

$$③ \Rightarrow U_\infty\frac{d}{dx}(\frac{\theta^۲}{\nu}) = ۲\overbrace{\{T(\lambda) - (۲+H(\lambda))\lambda\}}^{F(\lambda)}$$

• با فرض اینکه $F(\lambda)$ یک تابع Universal باشد

• و با استفاده از حل های Falkner-Skan
+
[illegible]

$\Rightarrow F(\lambda) = ۰/۴۵ - ۶\lambda \rightarrow$ تقریب تجربی

$$T(\lambda) = (\lambda + ۰/۰۸۲)^{۰/۶۲}$$

$$T(\lambda) = (\lambda + ۰/۰۹)^{۰/۶۲} \longrightarrow$$ بعداً ۰/۰۸۲، توسط دیگران اصلاح شد

$$\lambda = \frac{\theta^۲}{\nu}\frac{dU_\infty}{dx}$$

$$\Rightarrow U_\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{\theta^۲}{\nu}\right) + ۶\left(\frac{\theta^۲}{\nu}\right)\frac{dU_\infty}{dx} = ۰/۴۵$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\theta^۲}{\nu} U_\infty^۶\right) = ۰/۴۵ U_\infty^۵ \Rightarrow$$ انتگرال

$$\frac{\theta^۲}{\nu} U_\infty^۶ \Big]_{x_0}^{x} = ۰/۴۵ \int_{x_0}^{x} U_\infty^۵(\zeta)\,d\zeta$$

if at $x = x_0$; $\overset{U_\infty = 0}{\text{[illegible]}} = 0$ — اگر جریانی که با نقطه سکون

لایه مرزی آغاز می‌شود.

$$\Rightarrow \underbrace{\theta^۲(x) = \frac{۰/۴۵\,\nu}{U_\infty^۶}\int_{x_0}^{x} U_\infty^۵(\zeta)\,d\zeta \;\Big\}}$$

ζ

$$\theta \rightarrow \lambda \rightarrow T \rightarrow \tau_w$$

سؤال: آرام بودن جریان کی نقض است؟

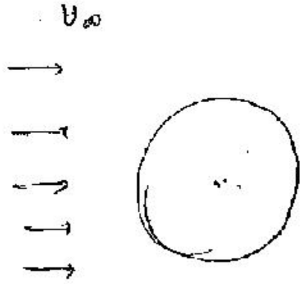
برای جریان بلازیوس:

$$\frac{\theta}{x} = \frac{۰٫۶۷۱}{\sqrt{Re_x}}$$

که اختلاف کمی با حل بلازیوس دارد.

■ حل مسئله جریان سیال حول استوانه:

البته این کار خیلی درست نیست چون در بدست آوردن F(λ) از خود این مسئله استفاده شده است.



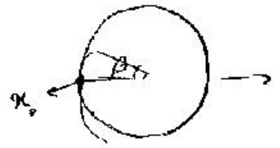
$$\nabla^{۲} \Phi(r,\theta) = 0 \Rightarrow \Phi(r,\theta) = U_\infty r\left(1 + \frac{a^{۲}}{r^{۲}}\right)\cos\theta$$

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = U_\infty\left(1 - \frac{a^{۲}}{r^{۲}}\right)\cos\theta$$

$$V_\theta = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{r} = -U_\infty\left(1 + \frac{a^{۲}}{r^{۲}}\right)\sin\theta$$

$$@\ r = a \Rightarrow V_r = 0$$

$$V_\theta = -۲U_\infty \sin\theta$$



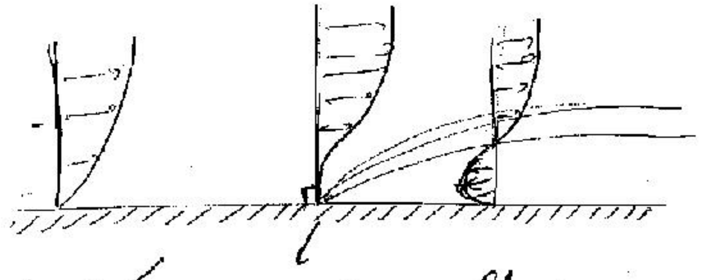
تغییر متغیر $* \beta = \pi - \theta$

$$\theta^{۲}(x) = \frac{۰٫۴۵۷}{U_\infty^{۶}} \int_{۰}^{x} U_\infty^{۵}(\beta)\, d\xi \xrightarrow{} a\,d\beta$$

$$\theta(\beta) = \sqrt{\frac{۰٫۴۵۷a}{۲U_\infty \sin^{۶}\beta}\left\{-\cos\beta + \frac{۲}{۳}\cos^{۳}\beta - \frac{\cos^{۵}\beta}{۵} + \frac{۸}{۱۵}\right\}}$$

▣ آیا تئوری های لایه مرزی همیشه می تواند مورد استفاده قرار بگیرد؟ یعنی آیا همیشه با دقت خوبی جواب می دهد؟

در بعضی مواقع جواب نمی دهد:



جریان برگشتی Reverse flow
back flow
s~~eperated~~ flow

معیار جدایی ← $\lambda_{sep} \simeq -۰٫۰۹$

■ آیا بعد از جدایش می‌توان از تئوری لایه مرزی استفاده کرد؟ چرا؟

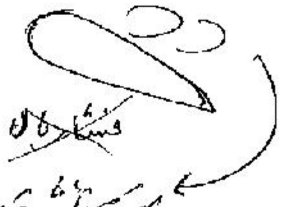
خیر ← δ بزرگ می‌شود ← $\frac{\delta}{x} < 1$

■ آیا قبل از جدایش می‌توان از تئوری لایه مرزی استفاده کرد؟

کمی با اغماض چون معادلات N-S خاصیت بیضوی دارد

و ناحیه قبل از جدایش را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

همین مسئله را در مورد ایرفویل هم داریم:



تحت تأثیر قرار می‌دهد.

زاویه Stall ← حدوداً ۱۲ درجه

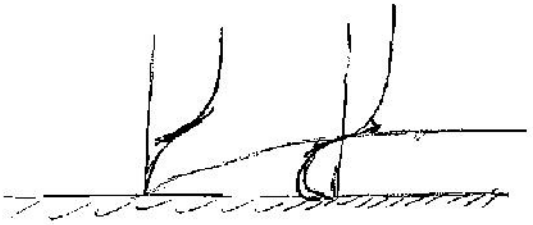
شرط لازم جدایش: $\frac{dP}{dx} > 0$

$$\underline{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

■ در دیواره ← $u = 0$, $v = 0$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dx} = \mu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0}$$

خاصیت پروفیل‌ها بعد از جدایش ← نقطه عطف دارد.



$$y \to \infty \to \frac{\partial u}{\partial y} \to 0 \quad u \to U_\infty \to \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

پس $\frac{dP}{dx} > 0$ شرط لازم برای داشتن نقطه عطف است

اما شرط لازم و کافی برای داشتن reversflow ، $\frac{dP}{dx} > 0$ و قوی

نیز باید باشد.

بخش ۹: سؤالات زوج HW تحویل دهید HW#9

فرد ← حل کنید.

■ Vorticity EQ: ch 3 → book

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \nu\nabla^2\vec{V}$$

if $\rho = \text{Const}$

$\mu = \text{Const}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = -\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \nu\nabla^2\vec{V} \qquad ①$$

از دو طرف معادله ① $\nabla\times$ کرل می‌گیریم:

$\omega = \nabla \times \vec{V}$ ②

$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \nabla(\frac{1}{۲}\vec{V} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})$ ③

①, ②, ③ $\quad \nabla \times \{(V \cdot \nabla)V\} = (V \cdot \nabla)(\nabla \times V) - ((\nabla \times V) \cdot \nabla)V$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} + \nu \nabla^{۲}\vec{\omega}$$ ④

ترم دارای تغییر های زیاد و قوی

رابطه ④ دارای این مزیت است که ترم فشار از آن حذف شده است

$\omega \; 2D \Rightarrow \omega = \omega_z \rightarrow \zeta$

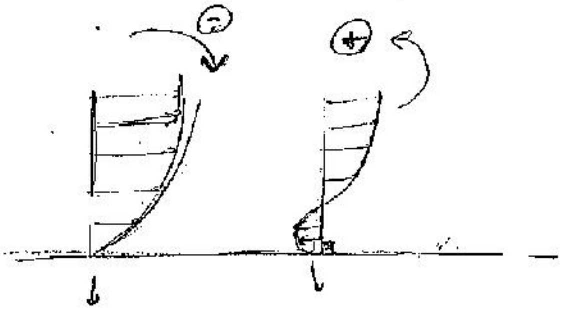
$$\Rightarrow \frac{D\omega_z}{Dt} = \nu \nabla^{۲}\omega_z$$

● تغییر ω در یک جریان به خاطر پدیده دیفیوژن diffusion خواهد بسیار زیاد
بود ـــ فقط در 2D.

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$@ \; y = 0 \; , x = x \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$$\Rightarrow \omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$$



$\frac{\partial u}{\partial y} > 0$ $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$

پس از وقوع جدایی ورتیسیته تغییر علامت می‌دهد.

کتاب Tritton

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$y=0 \longrightarrow u=0$$
$$v=0$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

$$\Rightarrow @\ y=0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\mu\frac{\partial \omega_z}{\partial y} \quad ①$$

② ورتیسیته از دیواره به جریان نفوذ می‌کند ← پس $\left.\frac{d\omega_z}{dy}\right|_{y=0} > 0$

①, ② در جایی که $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ باشد احتمال جدایی وجود دارد.

یکشنبه ۱۳۸۹,۲,۱۹

■ روش اختلالات جزئی   Perturbation

- Regular
- Singular

جریان خزشی ← Re ← خیلی کوچک

لایه مرزی ← Re ← خیلی بزرگ ← $1/Re$ خیلی کوچک.

روغن کاری ← شیب کوچک.

* تبدیل جزئی دایره به بیضی.

● Regular
← جریان کوئت هوا با مکش
← پیدا کردن فرکانس طبیعی حرکت نوسانی یک حباب

$$\begin{cases}(1+\epsilon)\dfrac{du}{dx}+u=\\ u(0)=a\,..\end{cases}\Rightarrow u=a\,e^{-\frac{x}{1+\epsilon}}$$

اگر $\epsilon\approx 0$ یا $\epsilon\ll 1$

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dx}+u=0\\ u(0)=a\end{cases}\Rightarrow u(x)=ae^{-x}\Rightarrow$$ حل مجانبی ≻ Regular

asymptotic solution

1/

همیشه . جـ ϵ صادق نیست .

حل دقیق در دسترس نیست

لذا ایده استفاده از سری اختلالات جزئی بوجود آمد:

$$u(x,\epsilon) = \underbrace{u_0(x)}_{\text{مرتبه صفر}} + \underbrace{u_1(x)\epsilon}_{\text{مرتبه ۱}} + \underbrace{u_2(x)\epsilon^2}_{\text{مرتبه ۲}} + O(\epsilon^3)$$

$$\left(\frac{du_0}{dx} + u_0\right)\epsilon^0 + \left(\frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + u_1\right)\epsilon$$

$$+ \left(\frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + u_2\right)\epsilon^2 + O(\epsilon^3) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dx} + u_0 = 0 \\ u_0(0) = a \end{cases} \Rightarrow u_0(x) = ae^{-x}$$

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + u_1 = 0 \\ u_1(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1(x) = axe^{-x}$$

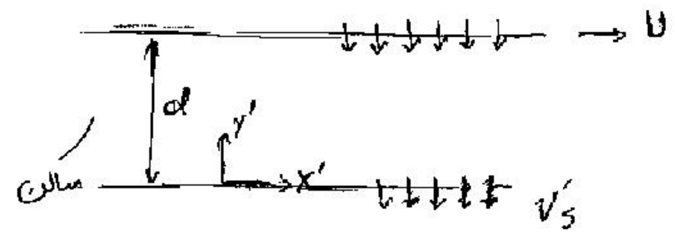
$$\begin{cases} \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + u_2 = 0 \\ u_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow u_2(x) = a\left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{-x}$$

کتاب پاپانسیو

روش اختلالات جزئی برای سیالات نیوتنی معتبر است.

" " غیرنیوتنی " نیست.

• مثال زیر از کتاب Kundu است:



Prim → دستگاه مختصات پریم دار

$$u'(y') = \frac{U}{d} y'$$

بالانس بین فلکس پایین و بالا برقرار است طوری که

$\frac{\partial u'}{\partial x'} = 0$ →

صادق است.

Continuity : $\cancelto{0}{\frac{\partial u'}{\partial x'}} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \Rightarrow v' = cte = -v'_s$

x. mom: $u'\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial u'}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right)$

$$\left.\Rightarrow -v'_s \frac{du'}{dy'} = \nu \frac{d^2 u'}{dy'^2}\right\} \quad ①$$

بی‌بعدسازی:

$$y = y'/d$$

$$u^* = \frac{u'}{U}$$

$$V_s = \frac{V_s'}{U}$$

$$\Rightarrow x \text{ mom}: \underline{\frac{d^2u}{dy^2} + \epsilon \frac{du}{dy} = 0} \Big\} \quad ②$$

$$① \Rightarrow -V_s \frac{du}{dy} = \frac{1}{Re} \frac{d^2u}{dy^2} \longrightarrow Re = \frac{Ud}{\nu}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dy^2} + V_s Re \frac{du}{dy} = 0$$

$$\Rightarrow \epsilon = V_s Re \Rightarrow \epsilon = \frac{V_s' d}{\nu}$$

فرض می‌کنیم ϵ مقدار کوچکی باشه. چرا؟

شرایط مرزی: $u(0) = 0$

$u(1) = 1$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dy^2} + \epsilon \dfrac{du}{dy} = 0 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

Exact solution: $u(y) = \dfrac{1-e^{-\epsilon y}}{1-e^{-\epsilon}}$

Perturbation solution:

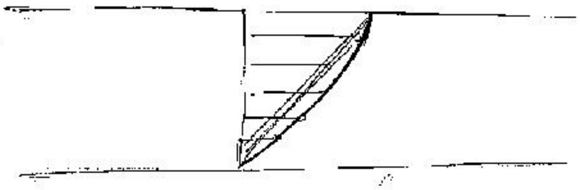
$$u(y) = u_0(y) + u_1(y)\epsilon + u_۲(y)\epsilon^{۲} + O(\epsilon^{۳})$$

{تا مرتبه ۲ خودتان ادامه دهید}

$$\begin{cases} \dfrac{d^{۲}u_0}{dy^{۲}} = ۰ \\ u_0(۰) = ۰ \quad u_0(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow u_0(y) = y$$

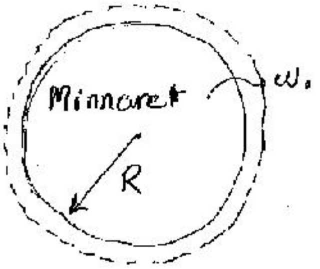
$$\begin{cases} \dfrac{d^{۴}u_0}{dy} + \dfrac{d^{۲}u_1}{dy} = ۰ \\ u_1(۰) = ۰ \quad u_1(1) = ۰ \end{cases} \Rightarrow u_1(y) = \frac{1}{۲}y(1-y)$$

$$\Rightarrow u(y) = y + \frac{1}{۲}y(1-y)\epsilon + O(\epsilon^{۲})$$



~~مثال~~

■ مثال : حباب گازی



کتاب Panton

$$\rho\left(R\ddot{R}+\frac{۳}{۲}\dot{R}^{۲}\right)=P_g-P_\infty$$

کتاب اشتقاق ۳/۲ را

از ترم‌های دارای σ و μ صرف نظر می‌کنیم.

$$P_g = P_g(t)$$

شرایط اولیه : $R(0)=R_0 \quad \dot{R}(0)=0$

اما فرض می‌کنیم در لحظه صفر شعاع حباب به مقدار کمی تغییر کند:

$$R(0)=R_0(1+\epsilon)$$

$$P_0 V_0^{K}=PV^{K}$$

$$R\ddot{R}+\frac{۳}{۲}\dot{R}^{۲}-\frac{P_\infty}{\rho}\left[\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-۳K}-1\right]=0 \qquad ①$$

?

if $R<10^{-۲}\,\mathrm{cm} \Longrightarrow$ می‌توان از σ یا کشش سطحی صرف نظر می‌کنیم:

if $\dot{R}=0,\ \ddot{R}=0 \xrightarrow{①} R=R_0$ تعادل

پس اگر $R \neq R_0$ یعنی سیستم از حالت تعادل خارج شده است.

$$R(t) = R_0 + R_1(t)\,\epsilon + R_۲(t)\,\epsilon^{۲} + O(\epsilon^{۳})$$

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-۳K} \xrightarrow[\text{نیوتن}]{\text{بسط دوجمله‌ای}}$$

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-۳K} \simeq \left(1+\epsilon\frac{R_1}{R_0}+\epsilon^{۲}\frac{R_۲}{R_0}+\cdots\right)^{-۳K}$$

$$\epsilon^{1}: \left\{ R_0\ddot{R}_1 + \frac{۳KP_0}{\rho R_0}R_1 = 0 \Rightarrow R_1(t)\ \checkmark \right.$$

$$\epsilon^{۲} \left\{ R_0\ddot{R}_۲ + \frac{۳KP_0}{\rho R_0}R_۲ = -R_1\ddot{R}_1 - \frac{۳}{۲}\overset{\dot{R}^{۲}}{\boxed{\dot{R}_1^{۲}}} + \frac{۳K(۳K+1)}{۲\rho}\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{۲} \right.$$

$$\Rightarrow R_1(t) = R_0\cos\omega_0 t$$

$$\omega_0 = \frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{۳KP_0}{\rho}}$$ → در محدوده شنوائی انسان قرار دارد.

سه‌شنبه ۱۳۸۹,۲,۲۱

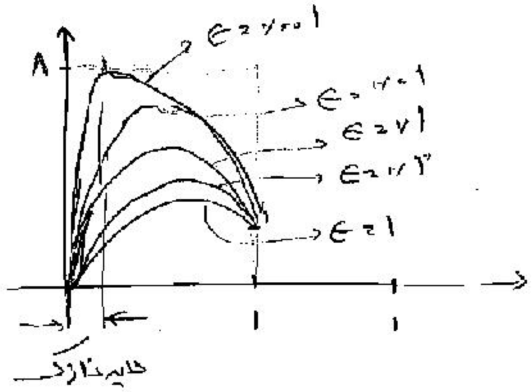
Singular Perturbation

HW # 4 Papa → $\overset{\text{فصل ۷}}{3,4,5}$ → در امتحان تحلیلی است.

مثال:

$$\begin{cases} \epsilon \dfrac{d^{۲}u}{dx^{۲}} + (1+۲\epsilon)\dfrac{du}{dx} + ۲u = 0 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

exact solution: $u(x,\epsilon) = \dfrac{e^{-۲x} - e^{-x/\epsilon}}{e^{-۲} - e^{-۱/\epsilon}}$



تغییرات در لایه نازک اگر شدید باشد، به وضعیت لایه مرزی

حال فرض می‌کنیم $\epsilon \ll 1$ باشد.

$\epsilon = 0$. مرتبه صفر ⇒

$$\Rightarrow \frac{du_0}{dx} + ۲u_0 = 0 \Rightarrow u_0 = C_1 e^{-۲x} \qquad @\, x = 1$$