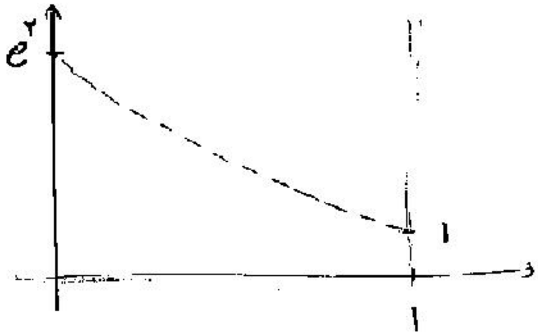
از لحاظ ریاضی هر کدام از شرط مرزی را می‌توان استفاده کرد، در اینجا از شرط مرزی در $x=1$ استفاده می‌کنیم:

$$x=1 \Rightarrow u_0^{(o)} = e^{2(1-x)}$$

ترم مرتبه صفر حل خارجی. ← outer solution



این حل، حل کامل نیست.

$u_0^{(i)}$ ← ترم مرتبه صفر - حل داخلی

$u^{(o)}$ ← مثل حل جریان پتانسیل

$u^{(i)}$ ← مثل حل لایه مرزی

$\xi = \frac{x}{\epsilon}$ ← برای xهای کوچک

طوری که ξ مقدار بزرگی است

Coordinat Stretching

$$\epsilon \frac{d^2u}{dx^2} + (1+2\epsilon)\frac{du}{dx} + 2u = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\zeta^2} + (1+2\epsilon)\frac{du}{d\zeta} + 2u\epsilon = 0 \rightarrow$$

فقط برای نزدیک دیواره معتبر است.

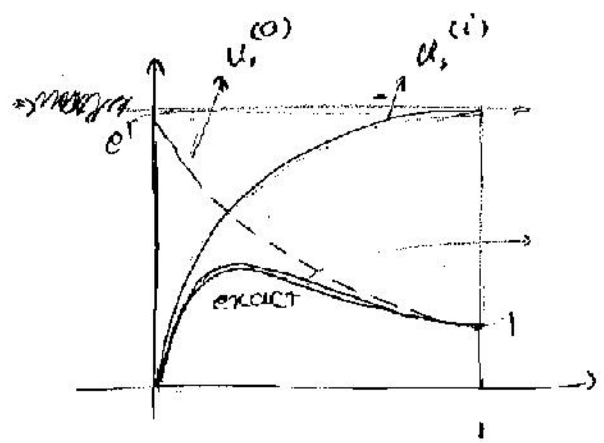
حل مرتبه صفر $\epsilon = 0$

$$\cancel{\frac{d^2u^{(i)}}{dx^2}} \quad \frac{d^2u_0^{(i)}}{d\zeta^2} + \frac{du_0^{(i)}}{d\zeta} = 0$$

$$\Rightarrow u_0^{(i)} = A_1 + A_2 e^{-\zeta}$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow u_0^{(i)} = A_1(1 - e^{-\zeta})$$

اینترپلاسل $\rightarrow \lim_{\substack{\zeta \to \infty \\ x \to 0}} u_0^{(i)} = u_0^{(0)} \Rightarrow A_1 = e^2$

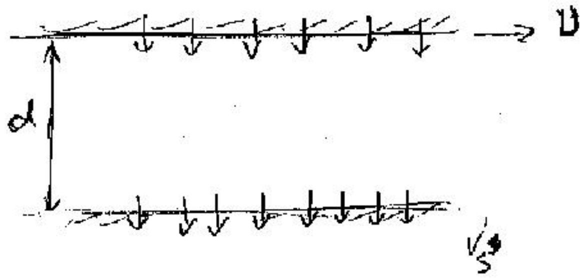


حل ترکیبی

$$u^{(c)} = u^{(0)} + u^{(i)} - e^{2}$$ ← حد مشترک

$$u^{(c)} = e^{2(1-x)} - e^{2} e^{-x/\epsilon}$$

مثال: مکش قوی بین دو صفحه



$$-V_s \frac{du}{dy} = \frac{1}{Re} \frac{d^2u}{dy^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dy^2} + \epsilon \frac{du}{dy} = 0 \qquad \epsilon = \frac{V_s' d}{\nu}$$

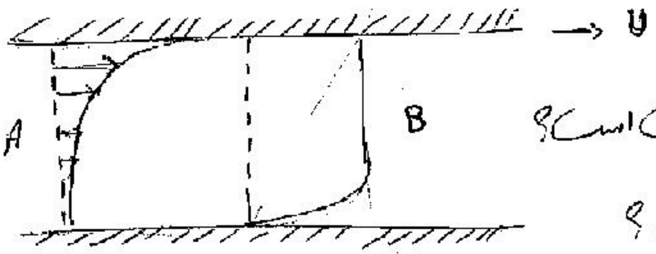
فرض می‌کنیم که ϵ بزرگ است ← ν کوچک یا V_s بیشتر.

آیا V_s آنقدر بزرگ نیست که $\frac{\partial P}{\partial x}$ وارد مسئله کند؟

$$\Rightarrow \delta \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{du}{dy} = 0 \qquad \delta = 1/\epsilon$$

$$u^{(C)} = u^{(i)} + u^{(O)}$$

$$\delta = 0 \Rightarrow \frac{du_0^{(o)}}{dy} = 0 \Rightarrow u_0^{(o)} = Cte \Rightarrow u_0^{(o)} = 1$$



A و B کدام درست است؟

تشخیص لایه مرزی؟

$$\eta = \frac{y}{\delta}$$

$$\frac{d^2 u_0^{(i)}}{d\eta^2} + \frac{du_0^{(i)}}{d\eta} = 0 \Rightarrow u(\eta) = A_1 + A_2 e^{-\eta}$$

$$= A_1(1 - e^{-\eta})$$

$$\lim_{y \to 0} u_0^{(o)} = \lim_{\eta \to \infty} u^{(i)} \Rightarrow A_1 = 1$$

$$\boxed{u^{(C)} = 1 - e^{-y/\delta}} \qquad \epsilon \gg 1$$

حل مشترک؟

۴/۲/۲۸

بحث جدید: تئوری ناپایداری (خطی)

در هر مسأله ای اگر اعداد بدون بعد کمی از حدی بگذرند، جواب ناپایدار خواهد بود.

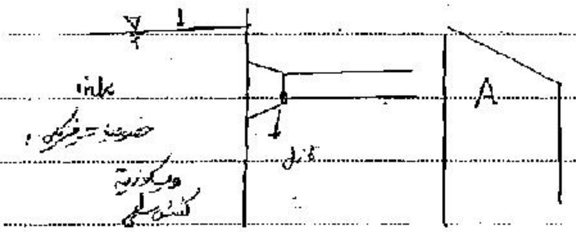
ناپایداری جریان آرام ← جریان آرام دیگر (با معادلات و شرایط مرزی یکسان چند جواب وجود خواهد داشت.)

در بعضی مسائل تنها جریان فرضی ناپایداری وجود دارد، چون معادلات غیرخطی جای یکتایی‌ها خدشه می‌شوند.

جریان درهم (حالت نهایی ناپایداری جریان آرام جریان درهم خواهد بود)

✓ ممکن است جریان آرام به آرام دیگر و سپس به درهم تبدیل شود.

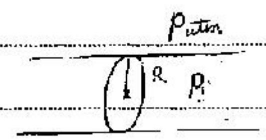
✓ در پرینتر Ink Jet :



اگر یک اختلال جزئی شکل سطح تغییر کند: و سیال قابلیت دو سطح آزاد را داشته باشد.

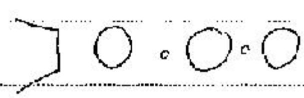
$A \quad B$

$P_A \gtrless P_B$



$$P_i = P_{at} + \frac{\sigma}{R}$$

ممکن است جریان به صورت قطره شود:



این پدیده یک پدیده ناپایداری است که به دلیل وجود free surface در آن پدید آمده است.

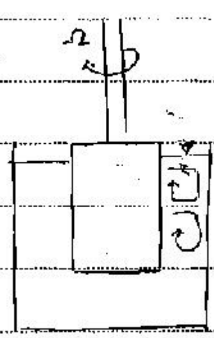
✓ در جریان بین دو استوانه: (تیلور کوئت)

وقتی عدد بدون بعد تیلور از حدی بیشتر شود، ورتکس‌ها تشکیل می‌شود.

$V_\theta(r)$

V_r, V_z

تغییر میدان سرعت ← تغییر سطح انرژی ← تغییر ویسکوزیته اندازه گرفته شده

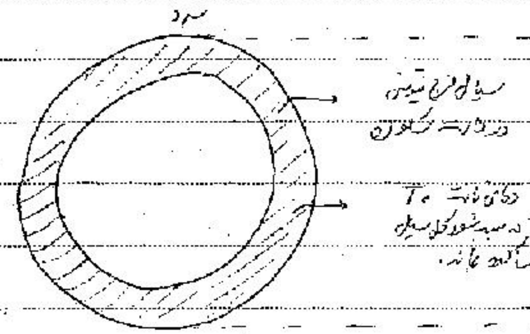


✓ بحث از تک — Triton

مثال: حلقه

اگر حلقه را به صورت

در سطح سرد گرم قرار دهیم.

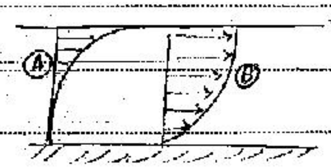


اگر توزیع دما در دو سطح یکنواخت باشد باز هم سیال را ساکن خواهد ماند. (چون هر جا ... است) گرم

$\delta \ll 1$ در این حالت ترم مشتق حذف شده، پس باید از تکنیک حل ترکیبی استفاده کنیم.

$u^{(c)} = u^{(i)} + u^{(o)} -$ حد مشترک

$$\delta = 0 \Rightarrow \frac{du_0}{dy} = 0 \rightarrow u_0^{(o)} = 1$$



با رسم فیزیکی و با توجه به حل قسمت خارجی و حل داخلی می‌توان رسم کرد

ولی در واقع شکل B را خواهیم داشت، در نتیجه از همین حالت لایه مرزی استفاده می‌کنیم.

برای حل مرزی پارامتر جدید را تعریف می‌کنیم:

$$\eta = \frac{y}{\delta}$$

$$\frac{d^2u_0^{(i)}}{d\eta^2} + \frac{du_0^{(i)}}{d\eta} = 0 \Longrightarrow u_0^{(i)}(\eta) = A_1 + A_2 e^{-\eta}$$

با اعمال B.C در $y=0$ داریم: $A_1 = -A_2$

$$\rightarrow u_0^{(i)}(\eta) = A_1(1 - e^{-\eta})$$

با استفاده از اصل Prandtl:

$$\lim_{y \to 0} u_0^{(o)} = \lim_{\eta \to \infty} u_i^{(o)} \Rightarrow A_1 = 1$$

در نهایت حل ترکیبی به دست می‌آید:

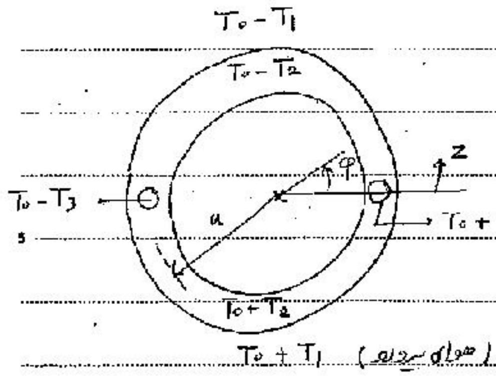
$$\boxed{u^{(c)} = 1 - e^{-y/\delta}} = 1 + (1 - e^{-\eta}) - 1$$

$$\delta = 1/\epsilon \ , \ \epsilon \gg 1$$

✓ حل دقیق برای $\epsilon \gg 1$ مشابه است.

✓ آیا برای مسأله قبل بیان امکان ؟؟

اولاً وضعیت سکون ناپایدار است و با یک اغتشاش کوچک سیال به حرکت در می‌آید اگر :



$T_E = T_0 - T_1 \left(\frac{z}{a} \right)$

$T_0 + T_3$ باهم ندارد تقارن در رو به رو

معادلات حاکم N.S و انرژی است :

معادلات روبرو شبیه معادلات لورنتز هستند . (از نظر فرم ریاضی)

پارامترها در معادلات فیزیکی عبارتند از :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -Pr\,X + Pr\,Y \\ \frac{dY}{dt} = -Y + \underbrace{Ra}_{\text{عدد ری}}\,X - XZ \\ \frac{dZ}{dt} = -Z + XY \end{cases}$$

$X \rightarrow V_\phi$

$Y \rightarrow T_3$ میزان عدم تقارن دما در دو سمت راست و چپ

$Z \rightarrow T_2$

✓ معادلات ODE هستند ~~[illegible]~~

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k} \qquad \underbrace{Ra}_{\text{معرف نیروی شناوری}} = \frac{g\beta T_1}{\nu\alpha} \Big/ 2a\mu k$$

$\alpha \equiv$ Thermal Diffuswity

$\beta \equiv$ Thermal Expantion

✓ تریتون Tritton باید α را به β تبدیل کرد

$\longrightarrow$ Steady state

آیا اینجا حل پایدار وجود دارد ؟

$\frac{d}{dt} = 0 \longrightarrow X_s = Y_s = Z_s = 0$ (فقط اگر $Ra \leq 1$ باشد) (حرکت وجود ندارد)

$$\begin{cases} X_s = Y_s = \pm (Ra - 1)^{1/2} \\ Z_s = Ra - 1 \end{cases}$$

پس در حالت کلی سه حل مختلف می‌توان داشت

آیا وضعیت تعادل سکون از نوع پایدار است ؟

اگر کمیت‌های فیزیکی به اندازه کوچکی دچار اغتشاش شوند ، یا به عبارت دیگر :

Basic Flow : $X = X_s + x$

$Y = Y_s + y$

$Z = Z_s + z$

Subject:

Year.   Month.   Date.   ( )

با جایگزین کردن در معادلات:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\mathrm{Pr}\,x + \mathrm{Pr}\,y \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + \mathrm{Ra}\,x - x Z_s - [X_s z (-xz)] \\ \dfrac{dz}{dt} = -z + x Y_s + [X_s y (+xy)] \end{cases}$$

معادلات دیفرانسیل حاکم بر تعداد اغتشاش به دست آمده، می‌توان با حل آنها پی برد که آیا اغتشاشات دمپ می‌شوند یا از بین می‌روند

در تئوری ناپایداری خطی x و y و z بسیار کوچک فرض شده و در نتیجه از ضرب آنها صرف نظر می‌شود:

- تحلیل ناپایداری خطی:

$$\frac{dx}{dt} = -\mathrm{Pr}\,x + \mathrm{Pr}\,y$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + \mathrm{Ra}\,x - x Z_s - z X_s$$

$$\frac{dz}{dt} = -z + x Y_s + y X_s$$

با این کار و نقاط تعادلی Transition به دست می‌آید. با عبارت دیگر Ra، Re، Pr بحرانی به دست می‌آید و x و y و z چه از ناپایداری وقت کافی خواهد داشت چون به سمت کمال است مقدار آنها بزرگ شود.

حل معادلات بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \exp(\sigma t) \\ y &= y_0 \exp(\sigma t) \\ z &= z_0 \exp(\sigma t) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \sigma = \sigma_r + i\sigma_i$$

حرف حاصل σ است. σ می‌تواند مختلط باشد اما قسمت حقیقی آن برای ما مهم تر است. اگر $\sigma_r \geq 0$ باشد، مسئله ناپایدار خواهد شد (چون در صورت نمایی x و y و z زیاد خواهند شد)

با قرار دادن سه حل پیشنهادی در دستگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -(\sigma + \mathrm{Pr})x_0 + \mathrm{Pr}\,y_0 = 0 \\ (\mathrm{Ra} - Z_s)x_0 - (\sigma+1)y_0 - X_s z_0 = 0 \\ Y_s x_0 + X_s y_0 - (\sigma+1)z_0 = 0 \end{cases}$$

از دستگاه بالا σ به دست خواهد آمد.

اگر وضعیت تعادل سکون بوده باشد: $\longrightarrow X_s = Y_s = Z_s = 0$

دترمینان ماتریس ضرایب باید صفر باشد:

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} -\sigma - \mathrm{Pr} & \mathrm{Pr} & 0 \\ \mathrm{Ra} - Z_s & -\sigma - 1 & -X_s \\ Y_s & X_s & -\sigma - 1 \end{vmatrix} = 0$$

وضعیت سکون:

$$\longrightarrow (\sigma+1)\left[\sigma^2 + \sigma(\mathrm{Pr}+1) - \mathrm{Pr}(\mathrm{Ra}-1)\right] = 0$$

یکی از جواب‌های معادله بالا $\sigma = -1$ است. اما این جواب ناپایدار نیست، پس باید ترم دیگر را بررسی کرد.

پس دو ریشه مزدوج هر دو منفی هستند پس باز هم حل پایدار خواهد بود. $IRa \leq 1$:

در این حالت یکی از ریشه‌ها مثبت بوده و حل ناپایدار می‌شود. $IRa > 1$:

پس حتی اگر اختلاف دما هم وجود داشته باشد تا زمانی که $IRa \leq 1$ است حرکت نخواهیم داشت و انتقال حرارت هدایتی خواهد بود. اگر اختلاف دما را افزایش دهیم، $IRa > 1$ شده و دیگر رژیم هدایتی ادامه نخواهد داشت.

پس عدد IRa بحرانی، 1 است.

✓ در دنیای واقعی پس از ناپایداری به دو حل پایدار جدید می‌رسیم. اما تئوری ناپایداری خطی قادر به پیش‌بینی آن نیست و تنها می‌گوید در این نقطه حل ناپایدار می‌شود.

اما دو حل پایدار جدید داریم، آیا این حل پایدار است یا باز با اغتشاش ناپایدار خواهد شد؟

از معادله مشخصه برای حل‌های قبلی می‌توان استفاده کرد تنها باید X_s، Y_s و Z_s دیگر را در آن قرار داد:

$$\sigma^3 + \sigma^2 (IPr + 2) + \sigma (IPr + IRa) + 2 IPr (IRa - 1) = 0$$

با توجه به A, B, C :

$$\rightarrow \sigma^3 + A\sigma^2 + B\sigma + C = 0$$

حالت اول) سه ریشه حقیقی وجود دارد ← هر سه ریشه منفی ← پایدار

" دوم) یک ریشه حقیقی منفی دارد، دو ریشه مزدوج دارد

$$\sigma = \underset{\smile}{\alpha} \pm i\beta$$

مهم در تعیین ناپایداری

$\alpha > 1 \longrightarrow$ حل ناپایدار

$\longrightarrow (C - AB) > 0 \Longrightarrow \alpha > 0 \longleftarrow$ (Tritton در اثبات)

$$\boxed{IRa (IPr - 2) - IPr (IPr + 4) > 0}$$

+ اگر $IPr \leq 2$ باشد، در این صورت $C - AB$ هرگز + نمی‌شود، یعنی سیستم پایدار خواهد بود. پس در این حالت عدد IPr مطرح می‌شود (تا اینجا همین شکل به حرکت خود ادامه خواهد داد).

+ اگر $Pr > 2$ باشد، در این صورت $C - AB$ تنها موقعی + است که داشته باشیم:

$$IRa \geq (IRa)_{cr} = \frac{IPr (IPr + 4)}{IPr - 2}$$

پس $IPr > 2$ تنها شرط ناپایداری نیست و باید شرط IRa نیز برقرار شود.

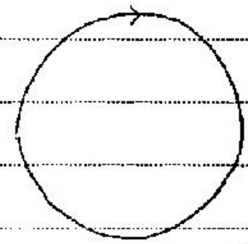
✓ هر سه عدد بحرانی قبلی $IPr = 2$، $IRa = 1$ و $IRa = \frac{IPr(IPr+4)}{IPr-2}$ به شکل آزمایشی نیز تأیید می‌شوند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

- ناپایداری تیلور-کوئت (خطوط جریان خمیده) Taylor Couette (Centrifugal Instability)

هر جایی که خطوط جریان خمیده باشند احتمال ناپایداری وجود دارد.

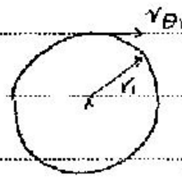
تحلیل ناپایداری تیلور مربوط به جریان لزج بود. پیش از او رایلی تئوری برای جریان غیر لزج ارائه داده بود.



سیرکولاسیون $\Gamma_1 = \oint \vec{V}\cdot d\vec{l} = \int \underbrace{(\nabla\times\vec{V})}_{\vec{\zeta}\,-\,\vec{\omega}}\cdot d\vec{A}$

ورتیسیته

در حالت دایره:



$$\Gamma_1 = \oint_0^{2\pi} v_\theta r_1\, d\theta = 2\pi r_1 v_{\theta_1}$$

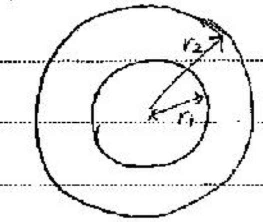
- قضیه کلوین: (برای سیال غیر قابل تراکم) Kelvin

این قضیه بیان می‌کند اگر جریان غیر قابل تراکم و غیر لزج باشد:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

(اثبات در Currie)

رایلی از این قضیه استفاده می‌کند. اگر المان را یک اغتشاش بدهیم تا به r_2 برسد، می‌خواهیم بدانیم آیا حالت تولید شده پایدار یا ناپایدار است:



$$\Gamma_2 = 2\pi r_2 v'_{\theta_2}$$

طبق قضیه کلوین:

$$2\pi r_2 v'_{\theta_2} = 2\pi r_1 v_{\theta_1}$$

$$\longrightarrow v'_{\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} v_{\theta_1} > v_{\theta_2} \longrightarrow \frac{d\Gamma}{dr} < 0$$ ناپایدار

اگر $v'_{\theta_2} > v_{\theta_2}$ باشد که v_{θ_2} سرعت ذرات در حالت پایدار در شعاع r_2 است.

در این صورت ابعاد آن دائماً بزرگ خواهد شد.

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v_\theta^2}{r}$$

اگر در جریانی $\frac{d\Gamma}{dr} < 0$ باشد، جریان ناپایدار خواهد بود. $r_1 v_{\theta_1} > r_2 v_{\theta_2}$

- شرح این بخش در کتاب Drazin است.

- شرح کلی در (Chandrasekhar) است.

یکشنبه ۱۳۸۹/۲/۲   ترمودینامیک

~~■ expander ← چه‌قدر است از دو حالت برگشت‌پذیر باشد ؟~~

■

یکشنبه ۱۳۸۹/۲/۲   سیالات

■

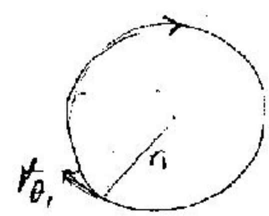
■ ناپایداری Teylor-Couette

خطوط جریان خمیده   Centrifugal instability

سیرکولاسیون

$$\Gamma_1 = \oint V \cdot d\vec{l}$$

$$= \oint (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot dA$$



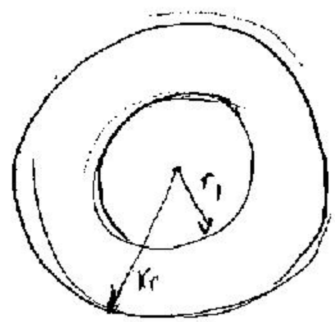
$$\Gamma_1 = 2\pi r_1 V_{\theta_1}$$

■ قضیه کلوین: Kelvin ← بدون اثبات

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \rightarrow$$ برای سیال غیرقابل تراکم + غیرلزج

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{v_\theta^2}{r}$$

اگر از r_1 به r_2 برویم در آنجا باقی می ماند یا نه؟



$$\Gamma_2 = 2\pi r_2 v'_{\theta_2}$$

$$\Gamma_1 = 2\pi r_1 v_{\theta_1}$$

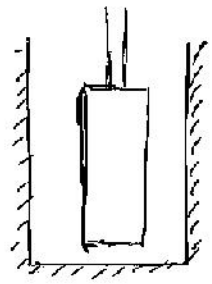
$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \Rightarrow \Gamma_1 = \Gamma_2 \Rightarrow v'_{\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} v_{\theta_1}$$

اگر $v'_{\theta_2} > v_{\theta_2}$ آنگاه جریان ناپایدار خواهد شد!

$$v'_{\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} v_\theta \Rightarrow r_1 v_{\theta_1} > r_2 v_{\theta_2} \rightarrow \frac{d\Gamma}{dr} < 0 \Rightarrow$$ ناپایدار

مطالب این بخش

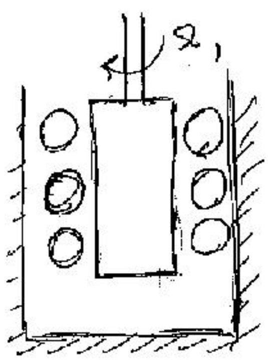
$\begin{cases} \text{Drazin} \\ \text{Chandrasekhar} \end{cases}$



$$v_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

شرط‌های مرزی ← B, A

Couette Viscometer



پارامترهای بازی ← $\Omega_1, \Omega_2, R_1, R_2, \nu$

$(Ta) > 1706 \rightarrow$ ناپایدار

این مشاهدات اولین نمونه برای اثبات وجود چند حل برای معادله N-S بود.

$V_0(r) = V_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r} \longrightarrow$ حل پایه

حل پایه

$= r\Omega_0(r) = r\left(A + \frac{B}{r^2}\right)$

$\frac{dP_0}{dr} = \rho \frac{V_0^2}{r} \Rightarrow$

حل پایه $\rightarrow A = -\Omega_1 \eta^2 \frac{1-\mu/\eta^2}{1-\eta^2}$

$B = \Omega_1 \frac{R_1^2(1-\mu)}{1-\eta^2}$

$\mu = \Omega_2/\Omega_1 \longrightarrow$ نسبت دورها

$\eta = R_1/R_2 \rightarrow$ نسبت شعاع‌ها

$$\vec{V} = \begin{cases} \cancel{(V_r)_0} + V_r' \longrightarrow \text{اغتشاش} = V_r(r,\theta,z,t) \\ (V_\theta)_0 + v_\theta'(r,\theta,z,t) = V_\theta(\text{———}) \\ \cancel{(V_z)_0} + V_z'(r,\theta,z,t) = V_z(\text{———}) \end{cases}$$

$P_0(r) + P'(r,z,\theta,t) = P(\text{———})$

موارد فوق را در معادلات N-S قرار می‌دهیم :

$$\frac{\partial p'}{\partial r} = \text{———}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = \text{———}$$

p' را حذف کنید

↓

یک معادله

↓

پیوستگی

↓

v_z' را حذف می‌کنیم

معادله θ مومنتوم ~~[illegible]~~ دست نخورده باقی می‌ماند

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta^*\right) \Delta^* v_r' = 2\Omega_0 \frac{\partial^2 v_\theta'}{\partial z^2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta^*\right) v_\theta' = -(D^* V_0)\, v_r' \qquad (1)$$

$$\Delta^* = \Delta - \frac{1}{r^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$D = \frac{d}{dr} \qquad D^* = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}$$

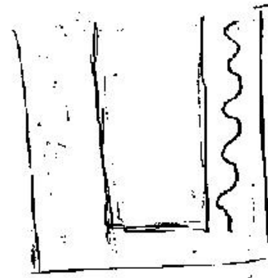
▪ فرض می‌کنیم که اغتشاش را بصورت سری فوریه ← مدهای نرمال

متد سیستم Normal-mode-Analysis

$$v'_r = \hat{u}(r)\, e^{st+ikz}$$

$$v'_\theta = \hat{v}(r)\, e^{st+ikz}$$

اغتشاش



$$\text{ODE}\ (2)\begin{cases} \left\{\nu(DD^* - k^2) - s\right\}(DD^* - k^2)\,\hat{u} = 2k^2\Omega_0\,\hat{v} \\ \left\{\nu(DD^* - k^2) - s\right\}\hat{v} = (D^* V_0)\,\hat{u} \end{cases}$$

K ← عدد موج

K = Wave Number = $2\pi/\lambda$

@ $z = \pm\infty$ → bounded

input را به عنوان

$s = s_r + i s_i$

→ $Re(s) > 0 \Rightarrow$ ناپایداری → Synge

Sunge ⇒ $\boxed{\mu > \eta^2}$ → معیار ناپایداری

وقتی $Re > 0$ می‌شود که رابطه $\mu > \eta^2$ برقرار شود

در مسئله Taylor از یک حالت steady CWB به steady CWB دیگر می‌رود. پس $s = 0$

→ exchange of Instability

$d = R_2 - R_1 = Gap$

Narrow Gap → $\hat{u}$ در معادله ② حذف شده

$$(D^2 - a^2)^3 \hat{v} = -a^2 T_a \{\overbrace{1 - (1-\mu)(x + 1/2)}^{f(x)}\} \hat{v} \quad ③$$

***

شرایط مرزی برای معادله ③ ص ۴

@ $r = R_1$
$r = R_2$ → اغتشاشات صفر → $x = \pm 1/2$

$$x = \frac{r - R_0}{d}$$

$R_0 = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ → دستگاه مختصات در وسط فاصله

برای استفاده از سری فوریه

$$\Rightarrow T_a = \frac{4\Omega_1^2 R_1^4}{\nu^2} \; \frac{\eta^2-\mu}{1-\eta^2} \left(\frac{1-\eta}{\eta}\right)^4$$

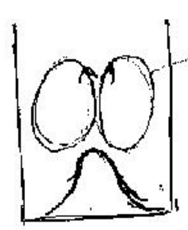
سه‌شنبه ۱۳۸۹,۳,۴

■ ناپایداری جریان‌های (تقریباً) موازی

* معادله Orr-Sommerfeld

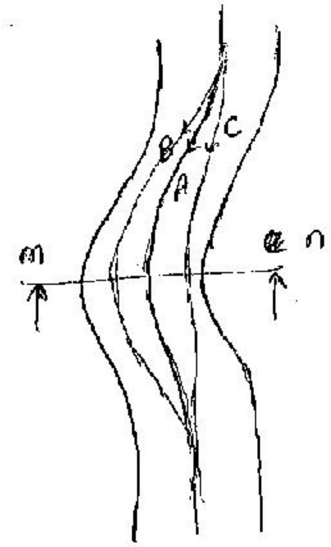
main flow

secondary flow

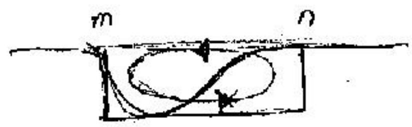


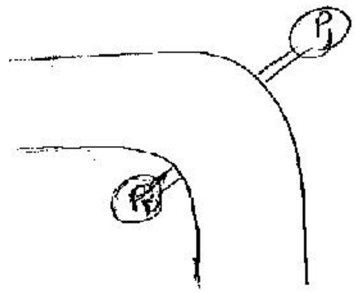
secondary flow

~ قارچی

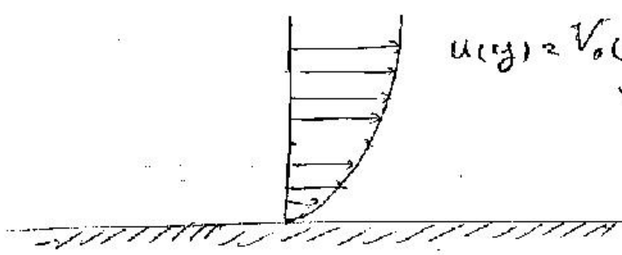


→ Jushkom? Kundla?





$P_1 > P_2 \rightarrow$ باید باشد.



$u(y) = V_0(y)$

↳ Base flow

$P_0 = P_\infty$

↳ base flow

$$u(x,y,t) = V_0(y) + u'(x,y,t)$$

$$v(x,y,t) = 0 + v'(x,y,t)$$

$$P(x,y,t) = P_0(x) + P'(x,y,t)$$

قضیه Squire : اغتشاش دو بعدی خطرناکتر از اغتشاش سه بعدی است.

فرض اغتشاش ضعیف : $\left|\frac{u'}{V_0}\right| \ll 1 \quad , \quad \left|\frac{P'}{P_0}\right| \ll 1$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left.\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad \right\}}$$

$$x: \frac{\partial u'}{\partial t} + (V_0 + u')\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\left(\frac{dV_0}{dy} + \frac{\partial u'}{\partial y}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\left(\cancel{\frac{dP_0}{dx}} + \frac{\partial P'}{\partial x}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \cancel{\frac{d^2 V_0}{dy^2}}\right)$$

$$y: \frac{\partial v'}{\partial t} + (V_0 + u')\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial y} +$$

$$+ \nu\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}\right)$$

$\Longrightarrow$ خطی سازی می‌کنیم:

با استفاده از کوچک بودن اغتشاشات داریم:

$$x: \frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU_0}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}\right)$$

$$y: \frac{\partial v'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \nabla^2 v'$$

continuity: $\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$

$$u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y} \qquad v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2 \psi' - \frac{d^2 U}{dy^2}\frac{\partial \psi'}{\partial x}$$

$$= \nu\left(\frac{\partial^4 \psi'}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi'}{\partial y^4} + \frac{2\,\partial^4 \psi'}{\partial x^2 \partial y^2}\right)$$

Normal mode Analysis

$$\psi'(x,y,z) = f(y)\, e^{i\alpha(x-ct)}$$

$\downarrow$ Travelling wave

α = wave number $= 2\pi/\lambda$

$$\boxed{(f'''' - 2\alpha^2 f'' + \alpha^4 f)\frac{\nu}{i\alpha} = (U_0 - c)(f'' - \alpha^2 f) - U_0'' f}$$

دارای بعد.

$\hat{f} = \frac{f}{LU}$

طول مشخصه   سرعت مشخصه

$V_0 \rightarrow$ Base پروفیل است

$\hat{V}_0 = \frac{V_0}{U}$ $\hat{x} = \frac{x}{L}$

$\hat{c} = \frac{c}{U}$ $\hat{\alpha} = \alpha L$

$Re = \frac{UL}{\nu}$

بی بعد شده:

$$(\hat{f}'''' - 2\hat{\alpha}^2\hat{f}'' + \hat{\alpha}^4\hat{f}) = i Re\,\hat{\alpha}(\hat{V}_0 - \hat{c})(\hat{f}'' - \hat{\alpha}^2\hat{f}) - \hat{V}_0''\hat{f} \quad (1)$$

Helmholtz $\rightarrow$ 

Tollmien + Schlichting: بعد از سی سال معادله (1) توسط این دو حل شد.

شرایط مرزی برای لایه مرزی:

@ $f(0) = f'(0) = 0$

@ $f(\infty) = f'(\infty) = 0$

$Re\ ,\ \underbrace{\alpha\ ,\ C}_{\text{ها}}$ می توانند موهومی باشند

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_r + i\alpha_i \\ C = C_r + iC_i \end{cases}$$

دو معادله داریم و ۶ تا پارامتر

α را یک مقدار حقیقی می گیریم $\Leftarrow \alpha_i = 0$

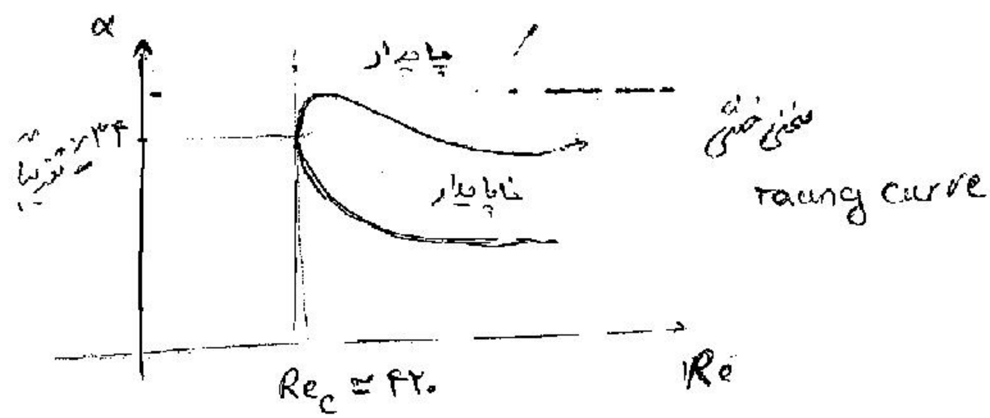
Temporal Instability Analysis.

به ازای مقادیر خاصی از C معادلات ~~[illegible]~~ تساوی ها ① برقرار می شود

$\Leftarrow$ eigenvalue problem

اولاً C مهم است با توجه به صفحه 11   Travelling wave

دوماً به ازای $C_i > 0$ ناپایداری اتفاق می افتد.



۷۳۴ ≅ ۹۶۵*

۷۳۴ ← ناپایداری یک طول موج کافی است تا جریان ناپایدار باشد.

چون در $Re = ۴۲۰$ از حالت پایدار درآمده و در $Re = ۵۲۰$ به درهم تبدیل می‌شود

Spatial Instability Analysis

$C \rightarrow$ مختلط

$e^{i\alpha x}$ $\quad \alpha_i < 0$

convective ?

سیع قال

$\frac{58}{}$)

Kelvin – Helmholtz Instability

Ref: Panton, kunder

*(Dean Instability)

$$f'''' - 2k^2 f'' + k^4 f = i R_e k [(U-c)(f'' - k^2 f) - U'' f] \quad : \text{OSE}$$

$k = 2\pi/\lambda$

$$\frac{f'''' - 2k^2 f'' + k^4 f}{i R_e k} = (U-c)(f'' - k^2 f) - U'' f$$

اگر فرض کنیم $\nu = 0$: $R_e \to \infty$ معادله به شکل OSE دارد

$$(U-c)(f'' - k^2 f) - U'' f = 0 \quad \text{Rayleigh Inviscid Instability}$$

Helmholtz = ~~...~~ $\; U'' = 0$ ... ~~...~~ دارای لایه

(لزجت)

بدون ν آید.

$$f'' - k^2 f = 0$$

حل کلی این معادله ODE ساده دارد!

$$f(y) = A e^{ky} + B e^{-ky}$$

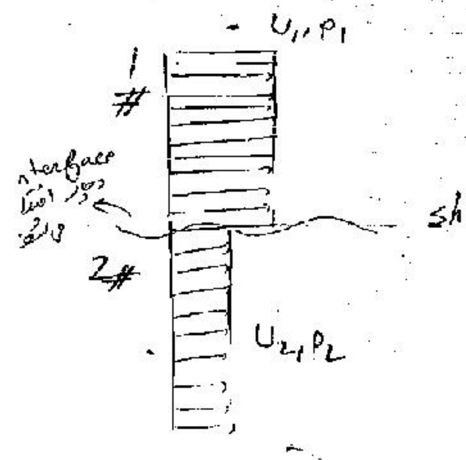
$$\psi'(x,y,t) = f(y) e^{ik(x-ct)}$$

$c = c_r + i c_i$

$c_i > 0 \rightarrow$ Instable

به شکل ... شد

مثال!



Airfoil برای جریان ... روی سطح

چون جریان غیرچرخشی است لذا:

پتانسیل
$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1)_0 = U_1 x \\ \varphi_2)_0 = U_2 x\end{array}\right.$$

$$\nabla^2\varphi_1 = 0 \qquad \nabla^2\varphi_2 = 0$$

فرض می‌شود دامنه سطح مشترک دو سیال دچار اغتشاش می‌گردد. که به صورت زیر تعریف می‌گردد. حال سؤال این است که آیا این اغتشاش به ازاء θ بزرگ می‌گردد یا دمپ شده و کوچک می‌گردد.

اغتشاش $\eta(x,t) = A e^{ik(x-ct)}$

کل $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1)_0 + \varphi'_1$ اغتشاش

$\tilde{\varphi}_2 = \varphi_2)_0 + \varphi'_2$

$$\nabla\varphi'_1 = \nabla\varphi'_2 = 0$$

چون سیال غیرچرخشی بوده و مطلق تقریب
کمیت‌های جریان غیرلزج و تراکم‌ناپذیر است لذا غیرچرخشی باقی خواهد ماند

$f_1(y) = A_1 e^{ky} + B_1 e^{-ky}$

$f_2(y) = A_2 e^{ky} + B_2 e^{-ky}$

چون سرعت اغتشاش نباید نامحدود شود $\left|\begin{array}{l}A_1 = 0 \\ B_2 = 0\end{array}\right.$

* شرط سینماتیکی ذراتی که روی سطح مشترک هستند همچنان روی سطح مشترک باقی خواهند ماند (روی)

خطی سازی صرف نظر شد

اغتشاش

$$v'_1 = \frac{\partial\varphi'_1}{\partial y} = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + (U_1 + u'_1)\,\partial\eta/\partial x + \cancel{v'_1\,\partial\eta/\partial y} \quad \text{مرتبه دو} \quad @\ y = \eta$$

$$v'_2 = \frac{\partial\varphi'_2}{\partial y} = D\eta/Dt = \partial\eta/\partial t + (U_2 + u'_2)\,\partial\eta/\partial x + \cancel{v'_2\,\partial\eta/\partial y}$$

$$v'_1 = \partial\eta/\partial t + U_1\,\partial\eta/\partial x \qquad v'_2 = \partial\eta/\partial t + U_2\,\partial\eta/\partial x$$

P/ 59/

$$\eta(x,t) = A e^{ik(x-ct)}$$

با مشتق گیری از x و t نسبت به η و جایگذاری در معادلات ما خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -ikcAe^{ik(x-ct)} \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = ikAe^{ik(x-ct)}$$

$$v_1' = \frac{\partial\psi_1'}{\partial x} \qquad v_2' = -\frac{\partial\psi_2'}{\partial x}$$

از شرط سینماتیکی

$$* \quad v_1' = -\partial\psi_1'/\partial x = -ikf_1(y)e^{ik(x-ct)}$$

$$** \quad v_2' = -\partial\psi_2'/\partial x = -ikf_2(y)e^{ik(x-ct)}$$

$$(*) \quad A = \frac{B_1}{C-U_1} \qquad (**) \quad A = \frac{A_2}{C-U_2}$$

* اول شرط دینامیکی

باید فشار در دو طرف سطح برابر

$$P_1 = P_2$$

$$\frac{\partial\tilde\phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\tilde\phi_1)^2 + P_1/\rho_1 + g\eta = C_1$$

$$\frac{\partial\tilde\phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\tilde\phi_2)^2 + P_2/\rho_2 + g\eta = C_2$$

از طرفی

$$\tilde\phi_1 = \Phi_1)_0 + \phi_1'$$

با جایگذاری در معادلات بالا و با فرض $P_1 = P_2$ خواهیم داشت

$$\tilde\phi_2 = \Phi_2)_0 + \phi_2'$$

$$\rho_1 C_1 - \rho_1\, \partial\phi_1'/\partial t - \frac{1}{2}\rho_1\left[(U_1+u_1')^2 + v_1'^2\right] - \rho_1 g\eta$$

$$= \rho_2 C_2 - \rho_2\, \partial\phi_2'/\partial t - \frac{1}{2}\rho_2\left[(U_2+u_2')^2 + v_2'^2\right] - \rho_2 g\eta$$

در این مرحله نیز از خطی سازی استفاده می کنیم

$$u_1' = \partial\psi_1'/\partial y = \partial\phi_1'/\partial x \qquad u_2' = \partial\psi_2'/\partial y = \frac{\partial\phi_2'}{\partial y}$$

فرض می‌کنیم ترم $\rho_1=\rho_2$ به کشش سطحی [illegible] اغتشاش را باید [illegible] باشد

برنولی $\quad \rho_1\left(\tfrac{1}{2}U_1^2-C_1\right)=\rho_2\left(\tfrac{1}{2}U_2^2-C_2\right)$

$$\varphi_1' \Longrightarrow \phi_1'=-\frac{i}{k}f_1'(y)e^{ik(x-ct)}$$

$$\varphi_2' \Longrightarrow \phi_2=-\frac{i}{k}f_2'(y)e^{ik(x-ct)}$$

$$\longrightarrow \rho_2\left[k(U_2-c)A_2+gA\right]=\rho_1\left[-k(U_1-c)B_1+gA\right]$$

با جایگذاری روابط (*) و (**) در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$k\rho_2(U_2-c)^2+k\rho_1(U_1-c)^2=g(\rho_2-\rho_1) \qquad \text{Final Equation}$$

$$c=\frac{\rho_2U_2+\rho_1U_1}{\rho_1+\rho_2}\pm\sqrt{\frac{g}{k}\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}\right)-\rho_1\rho_2\left(\frac{U_1-U_2}{\rho_1+\rho_2}\right)^2}$$

c باید مختلط باشد تا ناپایداری [illegible] داشته باشیم:

$$U_1\neq U_2 \qquad \frac{g}{k}\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}\right)<\rho_1\rho_2\left(\frac{U_1-U_2}{\rho_1+\rho_2}\right)^2$$

$$\longrightarrow g(\rho_2^2-\rho_1^2)<k\rho_1\rho_2(U_1-U_2)^2 \quad *$$

چون c_i در این حالت سیستم ناپایدار خواهد بود (چون (−) پشت رادیکال است دیگر [illegible] دوره حتماً منفی است)

$c>$ ⟵ k بزرگ ⟵ [illegible] (ناپایداری ایجاد می‌شود)

اگر k طول موج بسیار کوچک است

لذا برای طول موج‌های کوچک حالت [illegible]

اگر شرط * باشد همواره ناپایدار است.

homework

اثبات کنید در $\sigma \neq 0$ داریم (Ref: Kundu) Panton

$$\Delta U_{\text{بحرانی}} = \sqrt[4]{4(\rho_2-\rho_1)g\sigma\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}\right)^2}$$

ناشی از کشش سطحی

در شرط دینامیکی

$$p_2 - p_1 = -\sigma\, \partial^2\eta/\partial x^2$$

حالت:

#1

$$\rho_1 = \rho_2, \quad U_1 \neq U_2$$

$$c = \tfrac{1}{2}(U_1+U_2) \pm \tfrac{i}{2}(U_1-U_2) \longleftarrow$$

vortex sheet

پس این پدیده هیچ وقت در طبیعت دیده نمی‌شود

#2

$$\rho_1 \neq \rho_2, \quad U_1 = U_2$$

شرط ناپایداری $g(\rho_2^2-\rho_1^2)<0$

$\longrightarrow \rho_2 < \rho_1 \longrightarrow$ سیال سنگین‌تر بالای سیال سبک قرار دارد.

[illegible] که کشش [illegible] لایه سبک پایین قرار دارد و با [illegible] ترکیب می‌شود

در این نوع ناپایداری که در ابرها و اقیانوس‌ها اتفاق می‌افتد به شکل زیر است

در ابرها خطوط [illegible]

89/3/9

$\sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

شهبازی

"به نام خدا"

امتحان مکانیک سیالات پیشرفته

دانشگاه تهران- پردیس دانشکده های فنی - دانشکده مهندسی مکانیک

نوع امتحان : Take Home

تاریخ تحویل: ۱۳۸۷/۱۱/۶ (تا قبل از ظهر)

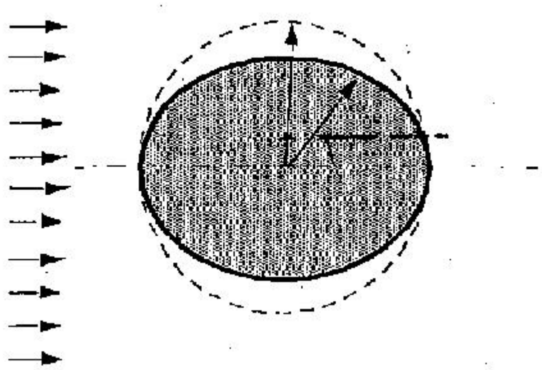
مسئله ۱) میله ای طویل با مقطع بیضوی و با معادله سطح $r = a(1-\varepsilon\sin^2\theta)$ را در نظر بگیرید. برای بدست آوردن تابع جریان در اطراف این میله میتوان در مواردیکه ε خیلی کوچک است از تابع جریان در اطراف استوانه ای به شعاع a بعنوان ترم مرتبه صفر در یک سری Perturbatoin استفاده نمود. با این فرض که جریان از نوع غیر لزج است تابع جریان در اطراف این میله را بصورت سری مجانبی زیر تا ترم مرتبه اول بدست آورید:

$$\psi(r,\theta,\varepsilon) \approx \psi_0(r,\theta) + \varepsilon\psi_1(r,\theta)$$

لازم بذکر است که در رابطه فوق ترم مرتبه صفر ψ_0 مربوط به جریان پتانسیل حول استوانه ای به شعاع a است که کمیتی معلوم می باشد. کافیست ثابت کنید ψ_1 در رابطه زیر صدق میکند:

$$\psi_1(r,\theta) = \varepsilon U_\infty \left(3\frac{a^2}{r}\sin\theta - \frac{a^4}{r^3}\sin 3\theta\right) + O(\varepsilon^2)$$

نکته: نشان دهید که $\nabla^2\psi_1 = 0$ است. شرطهای مرزی مناسب برای این معادله دیفرانسیل را نوشته و سپس معادله را حل نمایید.



مسئله ۲) حباب هوا به شعاع اولیه R_0 و فشار اولیه P_0 در داخل سیالی غیر لزج با دانسیته ρ و کشش سطحی σ در حالت تعادل استاتیک قرار دارد. شعاع این حباب به اندازه کمی افزایش داده می شود بنحویکه در وضعیت اغتشاش یافته جدید داریم $R = R_0 + \varepsilon\, R_1$. با استفاده از معادله دیفرانسیل حاکم بر دینامیک حبابهای گازی، پایداری وضعیت جدید این حباب را بررسی نموده و نشان دهید که اگر شعاع اولیه حباب کوچکتر از $\frac{3}{2}\frac{\sigma}{P_0}$ (شعاع بحرانی) باشد وضعیت جدید ناپایدار بوده و شعاع حباب بصورت نمایی افزایش خواهد یافت. اگر شعاع اولیه حباب هوا بزرگتر یا مساوی با این مقدار باشد چه اتفاقی می افتد؟ (فرآیند انبساط و انقباض حباب را ایزوترم فرض کنید).

مسئله ۳) مسئله شماره ۵ از بخش ۸ کتاب درسی Currie (صفحه ۲۶۷) را حل نمائید.

615

$-A^2$

موفق باشید: صادقی

$\frac{C_1}{a^2}\,\frac{d U_\infty}{2} = 2a\,U_\infty$

$4a$

$-2a\,p_\infty = -\frac{C_1'}{a^3}\times \frac{1}{2}\,dU_\infty$

$C_1' = +4a^3$

شهبازی

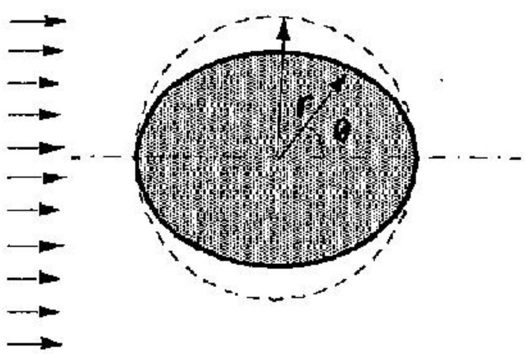
"به نام خدا"

امتحان مکانیک سیالات پیشرفته

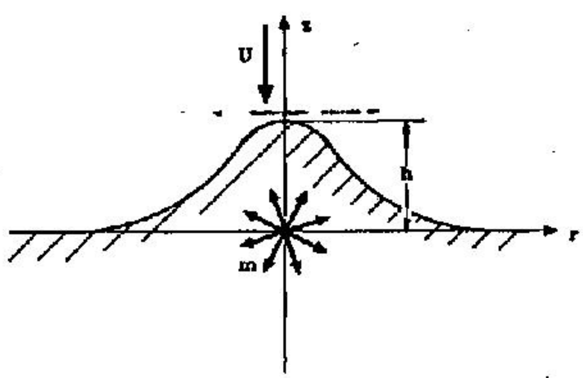
دانشگاه تهران- پردیس دانشکده های فنی - دانشکده مهندسی مکانیک

تاریخ: 1388/06/21 (Take Home)

مسئله 4) میله ای طویل با مقطع بیضوی و با معادله سطح $r = a(1-\varepsilon\sin^2\theta)$ را در نظر بگیرید. برای بدست آوردن تابع جریان در اطراف این میله میتوان در مواردیکه ε خیلی کوچک است از تابع جریان در اطراف استوانه ای به شعاع a بعنوان ترم مرتبه صفر در سری مجانبی استفاده نمود. با این فرض که جریان از نوع غیر لزج است تابع جریان در اطراف این میله را بصورت سری مجانبی $\psi(r,\theta,\varepsilon) \approx \psi_0(r,\theta) + \varepsilon\psi_1(r,\theta)$ تا ترم مرتبه اول بدست آورید. لازم بذکر است که در رابطه فوق ترم مرتبه صفر ψ_0 مربوط به جریان پتانسیل حول استوانه ای به شعاع a است که کمیتی معلوم می باشد. (کافیست ثابت کنید ψ_1 در رابطه $\psi_1(r,\theta) = \varepsilon U_\infty(3\frac{a^2}{r}\sin\theta - \frac{a^4}{r^3}\sin 3\theta) + O(\varepsilon^2)$ صدق میکند). نکته: نشان دهید که $\nabla^2\psi_1 = 0$ است. شرطهای مرزی مناسب برای این معادله دیفرانسیل را نوشته و سپس معادله را حل نمایید.



مسئله 5) برای شبیه سازی جریان در اطراف یک برآمدگی دو بعدی، پیشنهاد شده است که از ترکیب تابع پتانسیل یک چشمه دوبعدی با تابع پتانسیل مربوط به جریان با نقطه سکون از نوع دوبعدی استفاده شود. بدست آورید: الف) تابع پتانسیل جریان در اطراف برآمدگی، ب) میدان سرعت در اطراف برآمدگی، ج) قدرت چشمه مورد نیاز، د) تابع جریان در اطراف برآمدگی، ه) شکل تقریبی برآمدگی را رسم کنید.



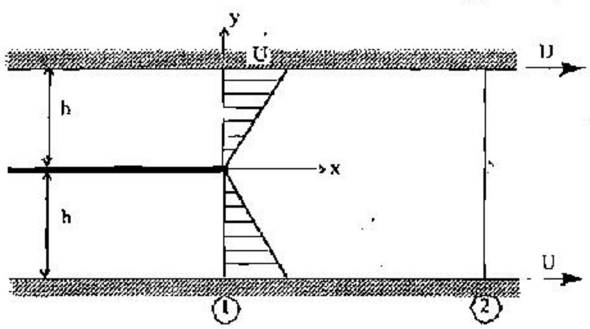
"به نام خدا"

امتحان پایان ترم مکانیک سیالات پیشرفته

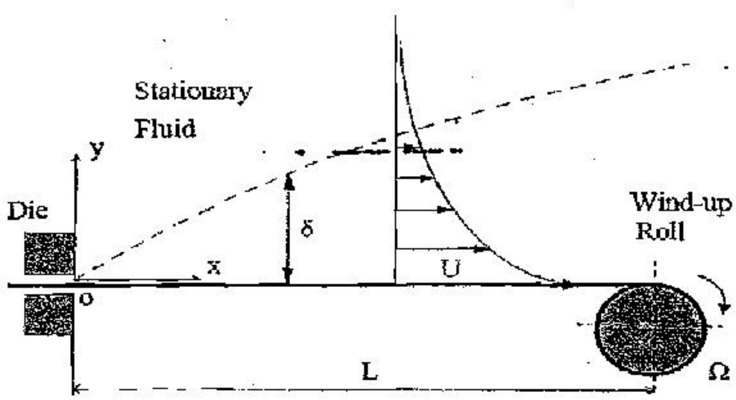
دانشگاه تهران– پردیس دانشکده‌های فنی – دانشکده مهندسی مکانیک

نوع امتحان : کتاب باز، تاریخ: ۱۳۸۷/۱۱/۵، زمان پاسخدهی به سئوالات = ۲/۵ ساعت تمام

مسئله ۱) بین دو صفحه موازی و نامتناهی که به فاصله $2h$ از یکدیگر قرار دارند تیغه ای فلزی و نازک قرار داده شده است (به شکل رجوع شود). فضای بین این دو صفحه از سیالی نیوتنی و غیر قابل تراکم پر شده و سپس صفحات مزبور با سرعت ثابت U به سمت راست حرکت داده می شوند تا در حالت دائم جریانی از نوع کوئت در بالا و پایین تیغه در مقطع ۱ برقرار شود. پروفیل سرعت در مقطع ۲ (که به اندازه کافی دور از مقطع ۱ قرار دارد) را با این فرض که در این مقطع جریان از نوع توسعه یافته شده است بدست آورید.



مسئله ۲) ورقی تخت و مستطیلی شکل به طول L و عرض b از یک قالب خارج شده و با سرعت ثابت $U = R\Omega$ دور یک قرقره پیچیده میشود. فرض کنید یک لایه مرزی از نوع آرام، دائم و غیر قابل تراکم در بالای این ورق تشکیل شده باشد. با استفاده از روش انتگرالی فون کارمن و با این فرض که پروفیل سرعت بصورت تابع سینوسی $u/U_w = 1-\sin(\pi y/2\delta)$ داده شده باشد توزیع تنش برشی بر روی سطح این ورق متحرک را بدست آورید.



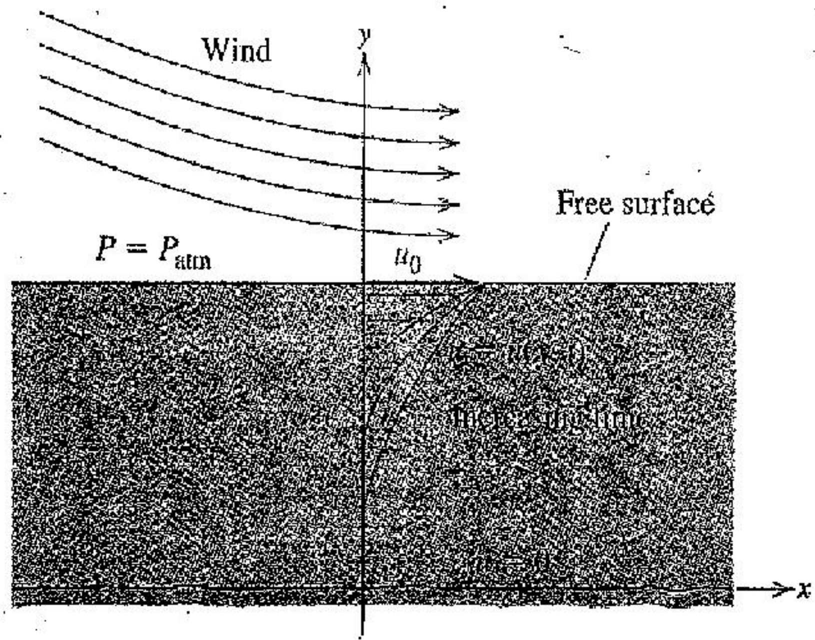
مسئله ۳) دریاچه ای را با عمق بسیار زیاد در نظر بگیرید. فرض کنید در لحظهٔ $t = 0$ باد بطور ناگهان و با سرعت ثابت U_0 در بالای سطح آب و به موازات آن شروع به وزیدن نماید و موجب به جریان در آمدن آب گردد. با فرض اینکه سطح آب همچنان مسطح باقی بماند:

الف) معادلهٔ دیفرانسیل PDF حاکم بر این جریان را بدست آورید.

ب) شرایط مرزی و اولیهٔ لازم برای حل معادلهٔ حاکم را مشخص نمایید.

ج) با استفاده از روش حلهای متشابه، معادلهٔ حاکم را از PDE به ODE تبدیل نمایید.

د) **پروفیل سرعت $u(y,t)$ را** بر حسب تابع خطا بدست آورید.



مسئله ۴) از بین دو روش **مکش** و **تزریق** کدام روش را برای اجتناب از وقوع پدیده جدایی در جریان بلازیوس توصیه می کنید. چرا؟ در ضمن، به ازای چه مقادیری از ضرایب A,B,C پروفیل سرعت $u/U_\infty = A + B(\frac{y}{\delta}) + C(\frac{y}{\delta})^2$ میتواند در مقطعی که یک جریان در آستانه وقوع پدیده جدایی قرار گرفته است (در **نقطه شروع جدایی**) بکار برده شود؟

ولی پروفیل درجه دو اصلاً نمی‌تواند جدایی داشته باشد چون نقطه عطف ندارد!

$\frac{u}{U_\infty}(\delta) = 1 \to A + B + C = 1$

$\frac{\partial (u/U_\infty)}{\partial y}\Big|_{y=\delta} = 0 \to B = 0$ $\quad C = 1$

$\frac{u}{U_\infty}(0) = 0 \to A = 0$

موفق باشید، صادقی

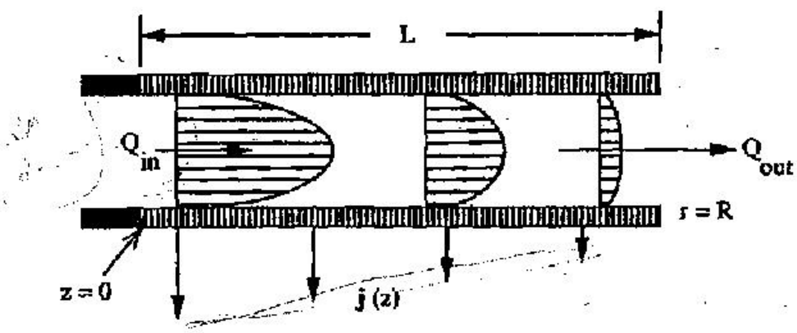
"به نام خدا"

امتحان مکانیک سیالات پیشرفته

دانشگاه تهران– پردیس دانشکده های فنی – دانشکده مهندسی مکانیک

تاریخ: 1388/06/21 (زمان پاسخ دهی به سئوالات = 2 ساعت تمام)

مسئله 1) جریان خزشی و دائم آب در یک لوله متخلخل به شعاع R و طول L را که در اثر اعمال اختلاف فشار ثابت Δp در دو سر لوله برقرار شده است در نظر بگیرید. فرض کنید آب با دبی $Q_{in} = Q_0$ به صورت توسعه یافته (با پروفیل سهموی) وارد این لوله شده و با شار j متر مکعب در ثانیه (به ازای واحد سطح) از جداره های این لوله به محیط نشت نماید بطوریکه داریم $j(z) = Kp(z)$ (K ثابت معلومی در رابطه با میزان تخلخل دیواره لوله است). در ضمن فرض کنید مولفه محوری سرعت در رابطه $u_z(r,z) = \frac{2Q_0}{\pi R^2}\left[1-(r/R)^2\right]f(z)$ صدق کند. با استفاده از معادلات ناویر – استوکس توابع $f(z)$ و $p(z)$ را با این فرض که مکش ضعیف است (بنحویکه جریان تقریباً از نوع موازی است) بدست آورده و سپس با استفاده از آنها ثابت کنید دبی خروجی از این لوله برابر با $Q_{out} = Q_0\left[(1+4\beta L/R)\ \exp\ (-4\beta L/R)\right]$ است (در این رابطه $\beta = \sqrt{K\mu/R}$ است. در ضمن، در صورت لزوم از فرض اساسی $\beta^2 << 1$ استفاده کنید.) مشاهدات تجربی حاکی از آن است که (تحت شرایط یکسان از نظر اختلاف فشار Δp) تخلخل موجب افزایش دبی خروجی می گردد! چرا؟



مسئله 2) حباب هوا به شعاع اولیه R_0 و فشار اولیه P_0 در داخل سیالی غیر لزج با دانسیته ρ و کشش سطحی σ در حالت تعادل استاتیک قرار دارد. شعاع این حباب به اندازه کمی افزایش داده می شود بنحویکه داریم $R = R_0 + \varepsilon\ R_1$. با استفاده از معادله دیفرانسیل حاکم بر دینامیک حبابهای گازی، پایداری وضعیت جدید این حباب را بررسی نموده و نشان دهید که اگر شعاع اولیه حباب کوچکتر از $2\sigma/3P_0$ باشد وضعیت جدید ناپایدار بوده و شعاع حباب بصورت نمایی افزایش خواهد یافت. (فرآیند انبساط و انقباض حباب را ایزوترم فرض کنید).

مسئله 3) ورق تخت قابل انعطاف از جنس لاستیک به طول ~~L و عرض نامتناهی~~ را در نظر بگیرید. با کشیدن ورق از دو طرف، سیال ساکن واقع در بالای این ورق بعلت شرط عدم لغزش به جریان در می آید. فرض کنید سرعت هر نقطه روی سطح ورق در حالت دائم برابر با مقدار $U_w = Ax$ باشد (x از نقطه سکون جریان اندازه گیری میشود و A نیز یک ثابت است). با این فرض که تقریب لایه مرزی در این جریان معتبر است با استفاده از متغیر تشابهی $\eta = y\sqrt{A/\nu}$ و نیز تابع جریان بدون بعد f معادله دیفرانسیل ODE حاکم بر جریان را بدست آورده و نشان دهید دارای حل تحلیلی بصورت $f = 1 - \exp(-\eta)$ است. نیروی لازم برای کشیدن ورق چقدر است؟

"به نام خدا"

امتحان میان ترم درس مکانیک سیالات پیشرفته

دانشکده مهندسی مکانیک – پردیس دانشکده های فنی – دانشگاه تهران – اردیبهشت 1386

مدت 2 ساعت

مسئله 1) صفحه ای تخت و افقی به طول L و عرض نامتناهی از جنس لاستیک از دو طرف با نیروی ثابت F کشیده میشود. با اینکار سیال ساکن واقع در بالای این ورق نیز بعلت شرط عدم لغزش به جریان در می آید بنحویکه سرعت در وسط ورق برابر صفر است. فرض کنید سرعت هر نقطه روی سطح این ورق بصورت رابطه خطی $U_w = ax$ باشد (x از وسط ورق اندازه گیری میشود و a یک ثابت است). با فرض اینکه تقریب لایه مرزی در مورد این جریان قابل استفاده باشد به سئوالات زیر پاسخ دهید (جریان دائم و بدون گرادیان فشار فرض میشود):

الف) با قرار دادن $\psi(x,y) = x\sqrt{a\nu}\, f(\eta)$ و $\eta = y\sqrt{\dfrac{a}{\nu}}$ نشان دهید این مسئله دارای حل تشابهی بصورت معادله $f''' + ff'' - f'^2 = 0$ است. شرطهای مرزی این معادله را بنویسید و آن را حل کنید.

ب) نشان دهید که معادله فوق دارای حلی تحلیلی بصورت تابع $f = 1 - e^{-\eta}$ است و با استفاده از این حل نیروی F لازم برای کشیدن ورق را محاسبه نمائید.

ج) با استفاده از معادله انتگرال ممنتوم و با فرض پروفیل سرعت درجه 2 توزیع تنش در سطح ورق را بدست آورده و با استفاده از این حل نیروی F را محاسبه نمایید.

د) نشان دهید که میتوان همچون ضخامت لایه مرزی (δ) ضخامت ممنتوم (θ) و ضخامت جابجایی (δ^*)، ضخامت دیگری تحت عنوان ضخامت انرژی (Δ) برای این لایه مرزی تعریف نمود (این ضخامت، معرف اثر لایه مرزی بر کاهش انرژی جنبشی جریان است). با توجه به قسمت (ب) مقدار این چهار ضخامت را حساب کنید (در بدست آوردن δ از شرط $u = 0.01\,U_\infty$ استفاده نمایید).

ه) نشان دهید که میتوان معادلات لایه مرزی حاکم بر این جریان را با بدون بعد کردن معادلات ناویر استوکس و بدنبال آن با میل دادن عدد رینولدز به سمت بینهایت بدست آورد (نکته: برای بدون بعد کردن y از δ که متناسب با عکس جذر عدد رینولدز است استفاده نمایید).

مسئله 2) دریاچه ای با عمق بسیار زیاد را در نظر بگیرید. فرض کنید بادی بطور ناگهانی با سرعت ثابت U_0 در لحظهٔ $t = 0$ در بالای سطح آب و به موازات آن شروع به وزیدن نماید و در اثر ظهور تنش برشی در سطح تماس موجب به جریان در آمدن آب گردد (فرض میشود که سطح آب همچنان مسطح باقی بماند):

الف) معادلهٔ دیفرانسیل PDF حاکم بر این جریان را بدست آورید.

ب) شرایط مرزی و اولیهٔ لازم برای حل معادلهٔ حاکم را مشخص نمایید.

ج) با استفاده از روش حلهای متشابه، معادلهٔ حاکم را از PDE به ODE تبدیل نمایید.

د) پروفیل سرعت در هر مقطع، u(y,t) ، را بر حسب تابع خطا بدست آورید.

$-\sqrt{\frac{\nu}{a}}\, e^{-y\sqrt{\frac{a}{\nu}}} + 2\sqrt{\frac{\nu}{a}}\, e^{-2y\sqrt{\frac{a}{\nu}}}$

مسئله 3) دو دیسک موازی به شعاع R و فاصله h از یکدیگر را در نظر بگیرند. فرض کنید فضای بین این دو دیسک از سیال بسیار لزجی پر شده باشد. فرض کنید این دو دسک با سرعت بسیار کم U بیکدیگر نزدیک شوند (در جریان خزشی) بنحویکه سیال بطور شعاعی تخلیه گردد. با این فرض که جریان از نوع (شبه) دائم است کمیتهای زیر را حساب کنید:

الف) معادله دیفرانسیل حاکم را بر حسب تابع جریان $\psi(r,z)$ بدست آورید.

ب) با استفاده از روش جدایی متغیرها دنبال حلی بصورت $\psi(r,z) = r^{\lambda} f(z)$ برای این معادله بگردید و در مورد مقادیر قابل قبول λ بحث کنید.

ج) با فرض $\lambda = 2$ تابع $f(z)$ را بدست آورید.

د) میدان سرعت و فشار بین دو دیسک را بدست آورید.

ه) نیروی وارده بر این دو دیسک را حساب کنید.

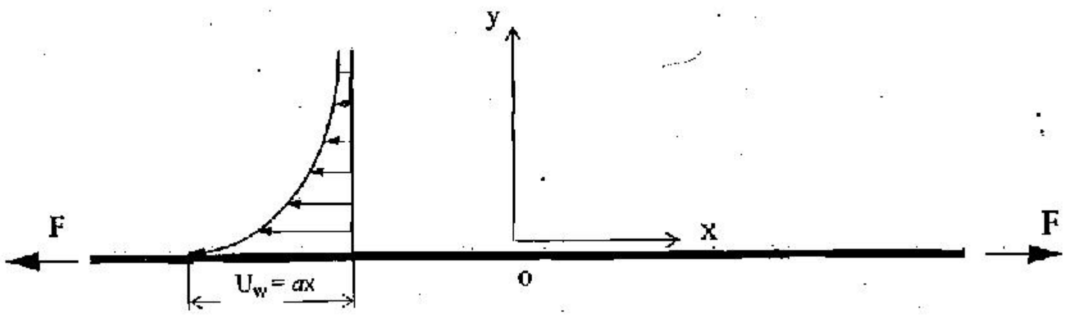


FIG. 1

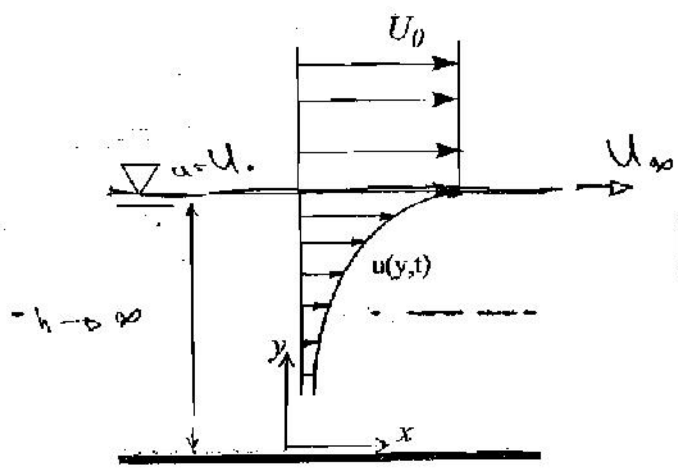


FIG. 2

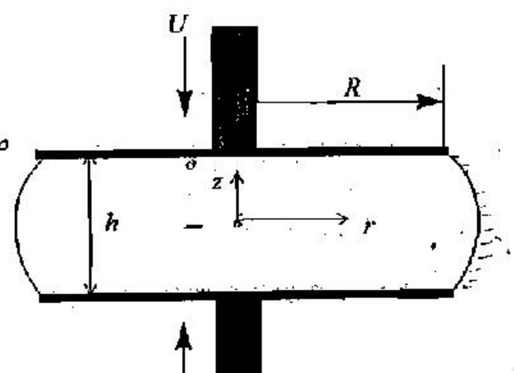


FIG. 3

موفق باشید: صادقی

$$x\text{-momentum}: \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$y\text{-momentum}: \frac{\partial P}{\partial y}=0 \longrightarrow P=f(x)$$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dP}{dx}, \quad \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \ @\ y=0 \ (1)\\ u=U \ @\ y=h \ (2)\end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\mu}\frac{dP}{dx}y+C_1 \xrightarrow{(1)} C_1=0 \qquad \text{so: } u(y)=\frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}y^2+C_2 \xrightarrow{(2)} U=\frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}h^2+C_2$$

$$\longrightarrow C_2=U-\frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}h^2 \longrightarrow u(y)=\frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}(y^2-h^2)+U \qquad Q=2\int_0^h u(y)\,dy$$

$$\longrightarrow\begin{cases}Q_1=2\left[\frac{h^3}{6\mu}\frac{dP}{dx}+Uh-\frac{h^3}{2\mu}\frac{dP}{dx}\right]=2Uh-\frac{2h^3}{3\mu}\frac{dP}{dx}\\ Q_2=2\int_0^h\frac{U}{h}y=\frac{2U}{\cancel{h}}\times\frac{h^2}{2}=Uh\end{cases}$$

$$Q_1=Q_2 \longrightarrow 2Uh-\frac{2h^3}{3\mu}\frac{dP}{dx}=Uh \longrightarrow U\cancel{h}=\frac{2h^{\cancel{3}\,2}}{3\mu}\frac{dP}{dx} \longrightarrow \frac{dP}{dx}=\frac{3\mu U}{2h^2}$$

$$\text{finally}: u(y)=\frac{3U}{4h^2}(y^2-h^2)+U=U\left[\frac{3}{4}\left(\frac{y^2}{h^2}\right)+\frac{1}{4}\right]=\frac{U}{4}\left[3\left(\frac{y^2}{h^2}\right)+1\right]$$

---

2) $$\text{MI}: \int_0^\delta\frac{\partial}{\partial x}(u^2)+\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial y}(uv)=\nu\int_0^\delta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\longrightarrow \int_0^\delta\frac{\partial}{\partial x}(u^2)+\left[uv\right]_0^\delta=\nu\frac{\partial u}{\partial y}\Big]_0^\delta=-\frac{\tau_w}{\rho} \longrightarrow \int_0^\delta\frac{\partial}{\partial x}(u^2)+0=-\frac{\tau_w}{\rho} \quad (1)$$

تعریف لایبنیتز: $$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2\,dy=\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,dy+0+0 \xrightarrow{(1)} \frac{d}{dx}\left[\int_0^\delta u^2\,dy\right]=-\frac{\tau_w}{\rho}$$

$$\int_0^\delta u^2\,dy=U^2\int_0^\delta\left[1-\sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)\right]^2dy=U^2\left[\frac{3z}{2}+2\cos z-\frac{\sin 2z}{4}\right]_0^{\pi/2}\times\frac{2\delta}{\pi}=0.2268\,\delta U^2$$

$$\tau_w=\mu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=\mu U\left[-\frac{\pi}{2\delta}\cos\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)\right]_0=-\mu\frac{U\pi}{2\delta} \longrightarrow -\frac{\tau_w}{\rho}=\frac{U\nu\pi}{2\delta}=1.5708\frac{U\nu}{\delta}$$

$$0.2268U^2\frac{d\delta}{dx}=1.5708\frac{U\nu}{\delta} \longrightarrow \delta\frac{d\delta}{dx}=6.9271\frac{\nu}{U} \longrightarrow \frac{\delta^2}{2}=6.9271\frac{\nu x}{U}$$

$$\delta=3.7221\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \longrightarrow \frac{\delta}{x}=\frac{3.7221}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\longrightarrow 0.2268U^2\frac{d\delta}{dx}=0.2268U^2\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{U}}\times 3.7221\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{0.42209\,U\sqrt{\nu U}}{\sqrt{x}}$$

$$\longrightarrow \tau_w=-\frac{0.42209\,U\sqrt{\mu\rho U}}{\sqrt{x}}=-\frac{0.42209\,\rho U^2}{\sqrt{Re_x}} \longrightarrow \frac{\tau_w}{\rho U^2}=-\frac{0.42209}{\sqrt{Re_x}}$$

* $U=R\,\Omega$

3) $\int \sim x: \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ (1) $\qquad u = u(y,t)$ i.e.

$\int \sim y: \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \longrightarrow P = f(x,t)$

$(1) \longrightarrow \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{g(y,t)} = \underbrace{\frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)}_{f(x,t)} \longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = f(t) = 0 \longrightarrow P = cte = P_{atm}$

$\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\begin{cases} u(\infty,t) = u_0 \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$ $\qquad \frac{u}{u_0} = f(\eta)$, $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \longrightarrow f'' + 2\eta f' = 0$, $\begin{cases} f(\infty) = \\ f(0) = \end{cases}$

$f' = g \longrightarrow g' + 2\eta g = 0 \longrightarrow g = Ke^{-\eta^2} \longrightarrow f = K\int_0^\eta e^{-\eta^2}d\eta + B \xrightarrow{B.C.} B = 0, K = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

$\longrightarrow \frac{u}{u_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\eta^2}d\eta = erf(\eta)$

$* \; u_t = f' \times u_0 \times \frac{y}{-4t\sqrt{\nu t}} = \frac{u_0}{-2t}\eta f'$

$* \; u_y = \frac{u_0}{2\sqrt{\nu t}}f' \longrightarrow u_{yy} = \frac{u_0}{4\nu t}f''$

$\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}: \; f'' + 2\eta f' = 0$

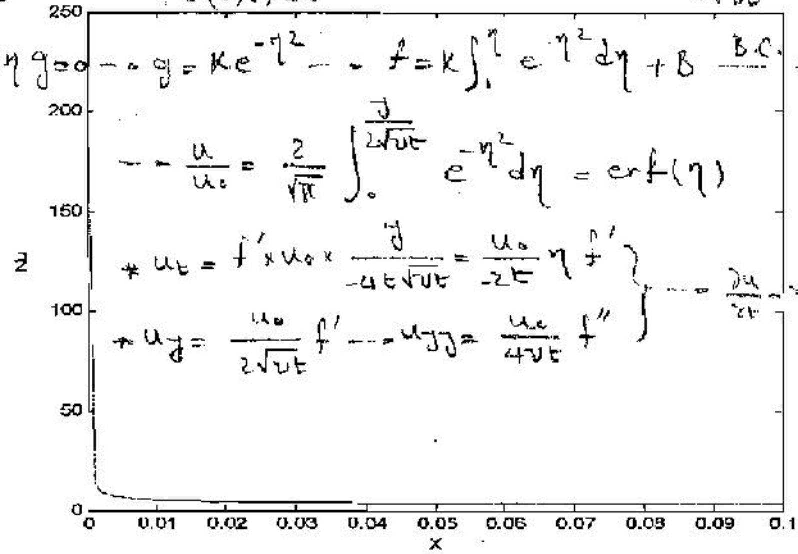


Figure 1. CWT, Br = 0

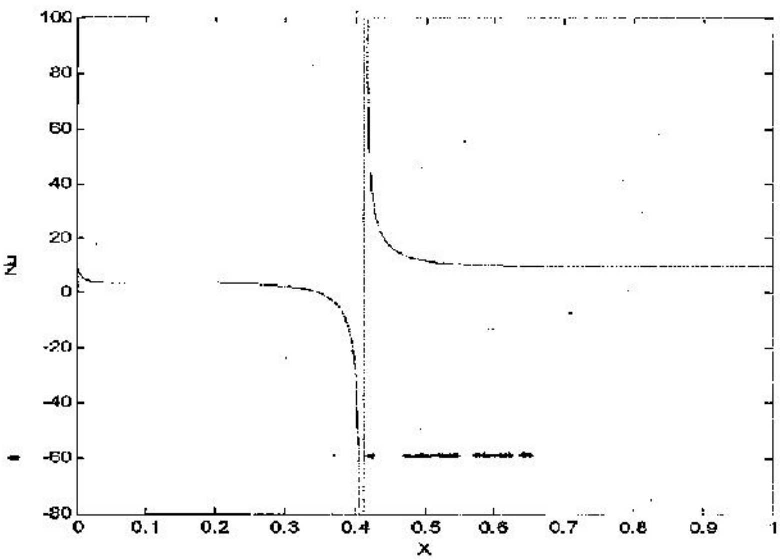


Figure 2. CWT, Br = 0.001

۱ـ شیرازی

$$* \quad u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad , \quad u=\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$* \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

$$\psi(x,y)=x\sqrt{a\nu}\,f(\eta) \quad , \quad \eta=y\sqrt{\frac{a}{\nu}}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}=x\sqrt{a\nu}\,\sqrt{\frac{a}{\nu}}\,f'=axf' \quad , \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=ax\sqrt{\frac{a}{\nu}}\,f'' , \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}=ax\sqrt{\frac{a}{\nu}}\sqrt{\frac{a}{\nu}}\,f'''=\frac{a^2x}{\nu}\,f'''$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=\sqrt{a\nu}\,f$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}=\sqrt{a\nu}\cdot\sqrt{\frac{a}{\nu}}\cdot f'=af'$$

$$(*) \Rightarrow axf'\cdot af'-\sqrt{a\nu}\,f\cdot ax\sqrt{\frac{a}{\nu}}\,f''=\nu\,\frac{a^2x}{\nu}\,f''' \Rightarrow \cancel{a^2x}f'^2-\cancel{a^2x}ff''=\cancel{a^2x}f'''$$

$$\Rightarrow f'''+ff''-f'^2=0$$

شرایط مرزی:

$$\begin{cases} u=\dfrac{\partial \psi}{\partial y}=axf' \\ \text{at } y=0 \;;\; u=ax \end{cases} \Rightarrow f'(0)=1$$

$$\text{at } y=\infty \;;\; u=0 \Rightarrow f'(\infty)=0$$

$$\text{at } y=0 \;;\; \psi=\text{cte} \Rightarrow f(0)=0$$

$f = 1-e^{-\eta} \Rightarrow f' = e^{-\eta} \Rightarrow f'' = -e^{-\eta} \Rightarrow f''' = e^{-\eta}$

ب) [illegible]

جایگذاری در معادله: $e^{-\eta} + (1-e^{-\eta})(-e^{-\eta}) - e^{-2\eta} = e^{-\eta} - e^{-\eta} + e^{-2\eta} - e^{-2\eta} = 0$

پس $f = 1-e^{-\eta}$ حل تحلیلی معادله دیفرانسیل فوق می‌باشد.

برای بدست آوردن نیروی F می‌بایست تنش برشی را روی صفحه انتگرال بگیریم:

$\tau = \mu \dfrac{\partial u}{\partial y}$

$u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \psi = x\sqrt{a\nu}\,(1-e^{-\eta})$

$\Rightarrow u = x\sqrt{a\nu} \times \sqrt{\dfrac{a}{\nu}}\, e^{-y\sqrt{a/\nu}} = a x e^{-y\sqrt{\frac{a}{\nu}}}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = ax\left(-\sqrt{\dfrac{a}{\nu}}\right) e^{-y\sqrt{a/\nu}} \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = -\sqrt{\dfrac{a}{\nu}}\, a x \Rightarrow \tau = -\mu a\sqrt{\dfrac{a}{\nu}}\, x$

$\Rightarrow F = \int_0^{L/2} -\mu a\sqrt{\dfrac{a}{\nu}}\, x\, dx \Rightarrow F = -\mu a\sqrt{\dfrac{a}{\nu}}\, \dfrac{x^2}{2}\Big]_0^{L/2} = -\mu a\sqrt{\dfrac{a}{\nu}} \cdot \dfrac{L^2}{8}$

ج)

$\dfrac{u}{U_w} = a_0 + a_1\left(\dfrac{y}{\delta}\right) + a_2\left(\dfrac{y}{\delta}\right)^2$

at $y=0$; $u = U_w \Rightarrow a_0 = 1$

at $y=\delta$; $u=0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0$ (I)

at $y=\delta$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow a_1 + 2a_2 = 0$ (II)

(II) $\Rightarrow a_1 = -2a_2$

(I) $\Rightarrow -2a_2 + a_2 + 1 = 0 \Rightarrow a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = -2$

$\Rightarrow \dfrac{u}{U_w} = 1 - 2\left(\dfrac{y}{\delta}\right) + \left(\dfrac{y}{\delta}\right)^2$

$\int_0^\delta \dfrac{\partial}{\partial x}(u^2)dy + \int_0^\delta \dfrac{\partial}{\partial y}(uv)dy = \int_0^\delta \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$

$\Rightarrow \int_0^\delta \dfrac{\partial}{\partial x}(u^2)dy = -\dfrac{\tau_w}{\rho}$

$\dfrac{d}{dx}\int_0^\delta u^2 dy = -\dfrac{\tau_w}{\rho}$

$\dfrac{d}{dx}\int_0^\delta U_w^2 \left[1 - 2\dfrac{y}{\delta} + \left(\dfrac{y}{\delta}\right)^2\right]^2 dy = -\dfrac{\tau_w}{\rho} \quad \begin{cases} \eta = \dfrac{y}{\delta} \\ dy = \delta\, d\eta \end{cases}$

construct an جواب تقریبی to problem

$$\frac{du}{dx}+\delta\left(\frac{du}{dx}+u\right)=0$$

$u(0)=\alpha$

$\delta \gg 1$

plot and compare asymptotic and حل دقیق برای مقادیر مختلف δ

$$\epsilon \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}=-\frac{3}{2}\left(e^{-3x}(1-3\epsilon)\right)$$

$u(0)=0$

$u(\infty)=1$

$\epsilon \ll 1$ is amenable to singular pertubation analysis

Construct the outer solution to satisfy $U(\infty)=1$

$U(0)=$

In each case plot the inner, outer, composite solution

asymptotic solution

$$\alpha \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}=0$$

$u(0)=1$ $\quad \alpha \gg 1$

$u(1)=0$

جریان ... بسیار زیاد در ...
در نظر بگیرید با سرعت ...

الف) معادله pde حاکم را پیدا کنید مشخص کنید

ج) با استفاده از حل تشابهی pde به ode

د) پروفیل سرعت ... برحسب تابع خطا ...

با کاربرد ... در نظر بگیرید با استفاده از ... روش ...

الف) ... در ...

...

ج) نیروی لازم برای کشیدن صفحه با سرعت ثابت

صفحه ... و عرض b با سرعت ثابت U در ... در حال حرکت است.

... در ... که در تماس با آن ... است ...

جریان آرام و ... است

سوال: با استفاده از روش انتگرالی ... نیروی لازم برای کشیدن صفحه را بدست آورید.

پروفیل سرعت درجه ...

اگر بخواهیم جدایی اتفاق نیفتد ... p ... تغییرات

علی اکبر شهبازی

به نام خدا

پروژه اول مکانیک سیالات پیشرفته

تاریخ تحویل: 1388/12/26

ارزش پروژه: 2 نمره از 20

قسمت اول) مسئله شماره یک استوکس را برای سیالات نیوتنی با استفاده از روش Shooting بطور مستقیم حل نموده و با حل (شبه) تحلیلی آن مقایسه کنید.

$$f'' + 2\eta f' = 0$$

$f(0)=1$

شرطهای مرزی (فیزیکی) مسئله فوق عبارتند از: $f(0)=0\ ;\ f(\infty)=0$

قسمت دوم) فرض کنید در یک سیال خاص معادله حاکم بر مسئله شماره یک استوکس به صورت زیر است:

$$K_1 f''^2 f''' + K_2 f''\left[\frac{3}{2}f'f''f''' + \frac{f f'''^2}{2} + \frac{1}{2}f''(f f'''' + f''^2)\right] + \left(f'' + 2\eta f'\right) = 0$$

که در این معادله $K_1 < 0$ و $K_2 > 0$ جزو خواص سیال محسوب می شوند. با در نظر گرفتن شرطهای مرزی مناسب، موارد زیر را انجام دهید:

الف) پروفیل سرعت را در حالت $K_1 = 0$ به ازای مقادیر مختلف K_2 رسم نمایید.

ب) پروفیل سرعت را در حالت $K_2 = 0$ به ازای مقادیر مختلف K_1 رسم نمایید.

نکته 1: صرفاً از روش طیفی (Spectral) استفاده کنید.

نکته 2: گزارش نهایی بصورت تایپ شده تحویل داده شود.

نکته 3: فلوچارت، لیست برنامه کامپیوتری و فایل قابل اجرا به همراه گزارش نهایی تحویل گردد.

نکته 4: تیم دانشجویی میتواند حداکثر دو نفره باشد.

Sadeghy@ut.ac.ir.

majsoleimani@ut.ac.ir

موفق باشید: صادقی

$\mu = Pa.s$

کاندرافتری تحت است

$\frac{\mu}{P_{atm}} = s$

علی اکبر شهبازی

به نام خدا

پروژه دوم درس مکانیک سیالات پیشرفته

تاریخ تحویل: 1389/02/05

ارزش پروژه = **4** نمره

موضوع پروژه: بررسی دینامیک یک حباب گاز در داخل مایعی نیوتنی با ویسکوزیته متغیر

===

تعریف مسئله: معادله دیفرانسیل حاکم بر دینامیک یک حباب گازی به شکل کره که با یک مایع نیوتنی با ویسکوزیته متغیر $\mu(r,t)$ احاطه شده است به صورت رابطه کلی زیر است:

$$\rho\left(R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2\right) = p_\infty(t) - p_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3k} - \frac{2\sigma}{R} - 12R^2\dot{R}\int_R^\infty \frac{\mu(r)}{r^4}dr$$

فرض کنید ویسکوزیته این سیال در رابطه زیر صدق کند:

$$\mu(t) = \mu_{min} + (\mu_{max} - \mu_{min})\,\lambda(r,t)$$

$\lambda = 0 \rightarrow \mu = \mu_{min} \qquad \lambda = 1 \rightarrow \mu_{max}$

که در این رابطه $0 \le \lambda \le 1$ قرار دارد و خود از معادله زیر بدست می آید:

$$\frac{D\lambda}{Dt} = -\cancel{A\lambda\dot{\varepsilon}^2} = A(1-\lambda) - B\lambda\dot{\varepsilon}^{1/2}$$

پارامتر ساختاری

که در این رابطه $\dot{\varepsilon} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = 2\left(\frac{R^2\dot{R}}{r^3}\right)$ نرخ کشش و K (A) ثابت مثبتی است. فرض کنید در لحظه $t=0$ میدان فشاری از نوع آکوستیک به صورت معادله $p_\infty(t) = p_{at}\left[1-\delta\sin(\omega t)\right]$ به حبابی با شعاع اولیه R_0 که در داخل حجم وسیعی از مایع در حالت تعادل استاتیک قرار دارد اعمال شود. پاسخ حباب به چنین میدان فشاری را به ازای مقادیر مختلف A در طول زمان رسم نمایید. (نکته: در لحظه $t=0$ مقدار λ در همه جا برابر با یک است.)

$n=1 \rightarrow$ exact
$n=2 \rightarrow$ exact

الف) معادلات حاکم را بدون بعد نمایید.

ب) نتایج عددی را به صورت $R(t)$ و $\lambda(r=R,t)$ ارائه نمایید.

ج) لیست برنامه و فایل اجرایی ضمیمه گزارش تحویل داده شود.

از مقادیر زیر در انجام محاسبات استفاده کنید. می‌توانید تغییر دهید، بازی کنید.

$\delta = 0.5$

$$R_0 = 1.5\,\mu m\ ;\ \cancel{\omega = 1\,MHz}\ ;\ \delta = 5\ ;\ \mu_{min} = 1\,mPa.s\ ;\ \mu_{max} = 100\,mPa.s$$

$\omega = 1\,MH$

$$\sigma = 0.1\,N/m\ ;\ \rho = 1000\,kg/m^3$$

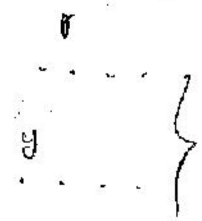
موفق باشید: صادقی

صادق ← اصل کن

$$\begin{bmatrix} \frac{d\lambda_1}{dt} \\ \frac{d\lambda_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\lambda_n}{dt} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 \\ 1-\lambda_2 \\ \vdots \\ 1-\lambda_n \end{bmatrix} - B\begin{bmatrix} \lambda_1\varepsilon_1^{1/2} \\ \lambda_2\varepsilon_2^{1/2} \\ \vdots \\ \lambda_n\varepsilon_n^{1/2} \end{bmatrix}$$

۷۲

تغییر متغیر $y=r^3-R^3$ در صورتی لازم است یا بدون آن شکل الزاماً ... ؟



ثابت A و B ؟

روش حل؟ رانگ‌کوتا؟

در نهایت حد R_0 ؟ $\int_R^{\infty=?}$

$P_0 = ?$ $\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3k}$

$K = ?$