$$\longrightarrow\quad B_{mn}=\begin{cases}0 & m,n \text{ زوج}\\ \dfrac{16}{mn^2} & m,n \text{ فرد}\\ \dfrac{-8}{mn\pi^2} & \left.\begin{array}{l}m \text{ فرد}, n \text{ زوج}\\ m \text{ زوج}, n \text{ فرد}\end{array}\right\}\end{cases}$$

$$, \; u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}B_{mn}\cos\left[\pi\sqrt{m^2+n^2}\,t\right]\sin n\pi x\sin m\pi y$$

معادلهٔ لاپلاس در مختصات قطبی، استوانه‌ای و کروی:

$$\begin{cases}u_{xx}=0\\ u_{xx}+u_{yy}=0 & \text{: معادلهٔ لاپلاس دو بعدی}\\ u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0 & \text{: معادلهٔ لاپلاس سه بعدی}\end{cases}$$

نکته ۱: معادلهٔ لاپلاس توصیف کنندهٔ انواع میدانها هستند. (میدان الکتریکی، مغناطیسی، جاذبه، ...)

نکته ۲: اگر شرایط کرانه‌ای صفر باشد جواب صفر است.

مثال: $u(0)$ $u(l)$ $\quad u_{xx}=0 \longrightarrow u=Ax+B$

اگر $u(0)$، $u(l)$ هر دو صفر باشند آن گاه $A=B=0$ در نتیجه $u=0$

نکته: لزوماً شرایط کرانه‌ای به فرم مستطیل یا مکعب مستطیل نیست بلکه ممکن است به فرم دایره (در مختصات دو بعدی) و یا استوانه‌ای و یا کروی (در حالت سه بعدی) داده شود.

لازم است که معادلهٔ لاپلاس (به طور کلی لاپلاسین) را در مختصات دیگر نیز تعریف کنیم.

یک بعدی ← کارتزین (x) ، $u_{xx}=0$

دو بعدی: کارتزین (x,y) ، $u_{xx}+u_{yy}=0$ ؛ قطبی (r,θ)

سه بعدی: کارتزین (x,y,z) ، $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ ؛ استوانه‌ای (r,θ,z) ؛ کروی (r,θ,φ)

تعریف لاپلاسین: $(\nabla^2 u)$

در مختصات کارتزین: ۱ـ یک بعدی $\nabla^2 u = u_{xx}$

۲ـ دو بعدی $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$

۳ـ سه بعدی $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

معادله لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ ، معادله گرما $c^2 \nabla^2 u = u_t$

، معادله موج $c^2 \nabla^2 u = u_{tt}$

لاپلاسین در مختصات قطبی: $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} , \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$u_x = u_r \cdot r_x + u_\theta \cdot \theta_x$$

$$u_{xx} = \underline{(u_r)_x} \cdot r_x + u_r \cdot r_{xx} + \underline{(u_\theta)_x} \cdot \theta_x + u_\theta \cdot \theta_{xx}$$

$$= \left[u_{rr} \cdot r_x + u_{r\theta} \cdot \theta_x\right] r_x + u_r \cdot r_{xx} + \left[u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta} \cdot \theta_x\right] \theta_x + u_\theta \cdot \theta_{xx}$$

$$= (r_x)^2 u_{rr} + r_{xx} \cdot u_r + 2 r_x \theta_x \cdot u_{r\theta} + (\theta_x)^2 u_{\theta\theta} + \theta_{xx} \cdot u_\theta$$

$$r_x = \frac{1}{2}(2x)(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}$$

$$r_{xx} = \frac{r - r_x \cdot x}{r^2} = \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}$$

$$\theta_x = \frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{r^2}$$

$$\theta_{xx} = \frac{2xy}{r^4}$$

$$\longrightarrow u_{xx} = \frac{x^2}{r^2}u_{rr} + \frac{y^2}{r^3}u_r \mp \frac{2xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4}u_{\theta\theta} + \frac{2xy}{r^4}u_\theta$$

$$\xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} u_{yy} = \frac{y^2}{r^2}u_{rr} + \frac{x^2}{r^3}u_r + \frac{2xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4}u_{\theta\theta} \mp \frac{2xy}{r^4}u_\theta$$

$$\longrightarrow \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

معادلهٔ لاپلاس در مختصات قطبی : $\longrightarrow u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$

معادلهٔ گرما در مختصات قطبی : $c^2\left[u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right] = u_t$

معادلهٔ موج در مختصات قطبی: $c^2\left[u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right] = u_{tt}$

لاپلاسین در مختصات استوانه‌ای :

در حالت سه بعدی لاپلاسین در مختصات کارتزین برابر است با : $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

لاپلاسین در مختصات استوانه‌ای : $\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz}$

لاپلاسین در مختصات کروی :

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{\cot\varphi}{r^2}u_\varphi + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}u_{\theta\theta}$$

مسئله بخش ۱۱-۱۱

مثال : نشان دهید که جواب معادلهٔ لاپلاس چنانچه شرایط مرزی به صورت کروی باشد از رابطهٔ

$u=\frac{c}{r}+k$ تبعیت می‌کند.

اگر شرایط مرزی کروی باشد: $\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$

لذا در معادله لاپلاس: $u_{rr}+\frac{2}{r}u_r=0$

$$u_r = P \longrightarrow P_r + \frac{2}{r}P = 0 \longrightarrow P = c' e^{-\int \frac{2}{r}dr} = c' e^{-2\ln r} = \frac{c'}{r^2}$$

$$\longrightarrow u_r = \frac{c'}{r^2} \longrightarrow u(r) = \frac{c}{r}+k$$

مسئله ۲ همین بخش: $r_2=10\ ,\ u_2=110$ $\quad r_1=2\ ,\ u_1=10$

$$\longrightarrow \begin{cases} 10=\frac{c}{2}+k \\ 110=\frac{c}{10}+k \end{cases} \longrightarrow u=\frac{-250}{r}+135$$

مثال ۲: دو استوانه با شعاع‌های $r_1=2$، $r_2=10$ داریم که روی اولی $u_1=10$ و روی دومی $u_2=110$ است. u را برای نقاط مختلف بیابید.

$$\nabla^2 u = u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}\cancel{u_{\theta\theta}}^{\,0}+\cancel{u_{zz}}^{\,0}$$

اگر شرایط مرزی استوانه‌ای باشد: $\nabla^2 u = u_{rr}+\frac{1}{r}u_r$

$$\longrightarrow P=u_r=\frac{c'}{r} \longrightarrow u=c\ln r+k$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 10=c\ln 2+k \\ 110=c\ln 10+k \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} c= \\ k= \end{matrix}$$

کاربرد تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی:

مثال از کاربرد تبدیل لاپلاس در حل ODE:

$$2y+\dot{y}=0$$

$$\longrightarrow 2Y(s)+sY(s)-y(0)=0 \longrightarrow Y(s)=\frac{y(0)}{s+2}$$

$$\longrightarrow y(t)=y(0)\,e^{-2t}\cdot u(t)$$

به طور کلی استفاده از تبدیل لاپلاس در حل ODE، معادلهٔ دیفرانسیل را به یک معادلهٔ جبری تبدیل می‌کند.

ولی اگر از تبدیل لاپلاس در یک PDE (که شامل فقط دو متغیر است) استفاده کنیم. در اینحالت PDE تبدیل به یک ODE می‌شود.

مثال:
$$\frac{\partial w}{\partial x}+x\frac{\partial w}{\partial t}=0 \quad , \quad \overset{①}{W(0,t)=t} \quad , \quad W(x,0)=0$$
$$W(x,t)=?$$

نکته: می‌توان اثبات کرد که:
$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial W}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\left[W(x,t)\right]$$

$$W(x,t)\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow}W(x,s) \qquad xt\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow}\frac{x}{s^2} \qquad x\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow}\frac{x}{s}$$

$$\longrightarrow \frac{dw}{dx}+x\left[sW-W(x,0)\right]=0$$

$$\longrightarrow \frac{dw}{dx}+xsW=0 \longrightarrow W(x,s)=C(s)\,e^{-s\frac{x^2}{2}}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}①} W(0,s)=\frac{1}{s^2} \longrightarrow C(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$\left[\int Q(x)e \quad dx + C\right] e$$

$$\longrightarrow W(x,s) = \frac{1}{s^2} e^{-s\frac{x^2}{2}}$$

: یادآوری

$$t.u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s^2} ,$$

$$(t-a)u(t-a) \longleftrightarrow \frac{e^{-as}}{s^2}$$

$$\longrightarrow W(x,t) = \left(t - \frac{x^2}{2}\right) u\left(t - \frac{x^2}{2}\right)$$

: مثال

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = x.t \quad , \quad u(0,t) = 0 \quad , \quad u(x,0) = 0$$

$$u(x,t) \longleftrightarrow U(x,s)$$

$$\longrightarrow x \cdot \frac{dU}{dx} + \left[sU - \cancel{u(x,0)}^{0}\right] = \frac{x}{s^2}$$

$$\longrightarrow \frac{dU}{dx} + \frac{s}{x} U = \frac{1}{s^2}$$

$$\longrightarrow U(x,s) = \left[\int \frac{1}{s^2} e^{s\ln x} dx + C\right] e^{-s\ln x} = \left[\int \frac{1}{s^2} x^s dx + C(s)\right] x^{-s}$$

$$= \left[\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s+1} x^{s+1} + C(s)\right] x^{-s} = \frac{x}{s^2(s+1)} + C(s) x^{-s}$$

$$U(0,s) = 0 \longrightarrow C(s) = 0 \longrightarrow U(x,s) = \frac{x}{s^2(s+1)}$$

$$U(x,s) = x\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right]$$

$$\longrightarrow u(x,t) = x\left[t - 1 + e^{-t}\right] u(t)$$

اعداد مختلط:

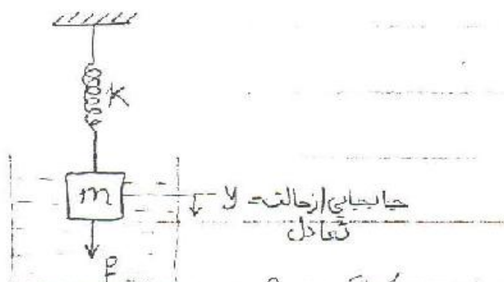
مقدمه: لزوم پرداختن به اعداد مختلط

۱- به طور کلی تجزیه و تحلیل سیستمهای مهندسی منجر به حل معادلات دیفرانسیل می‌شود.

۲- در حل معادلات دیفرانسیل گاهی نیاز به حل معادلاتی داریم که ریشهٔ حقیقی ندارند.

۳- پیدا کردن جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل اگر ورودی نمایی باشد بسیار ساده‌تر از دیگر ورودی‌ها است (مثلاً سینوسی)

مثال:



نیرو = ورودی سیستم $P = x$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + \underbrace{B}_{\text{ضریب اصطکاک}}\frac{dy}{dt} + Ky = x$$

برای پیدا کردن جواب همگن: $y(t) = Ae^{st}$

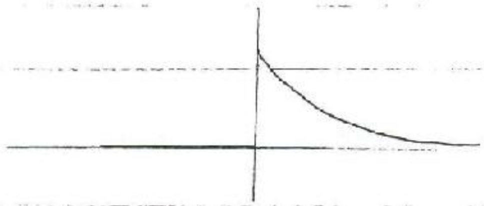
$$MAs^2e^{st} + BAse^{st} + KAe^{st} = 0$$

$$\longrightarrow Ae^{st}\left(Ms^2 + Bs + K\right) = 0 \qquad \longrightarrow Ms^2 + Bs + K = 0$$

حالت الف: $M = 1 \quad , \quad K = 2 \quad , \quad B = 3$

$$S^2+3S+2=0 \longrightarrow (S+1)(S+2)=0 \longrightarrow \begin{matrix} S_1=-1 \\ S_2=-2 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow y_n(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$$



حالت ب : $M=1\ ,\quad K=2\ ,\quad B=2$

$$\longrightarrow S^2+2S+2=0 \longrightarrow S_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-2}$$

در تجزیه و تحلیل این سیستم فیزیکی نیاز به پیدا کردن ریشهٔ یک عدد منفی داریم لذا تعریف می‌کنیم : $\sqrt{-1}=i$

$$\longrightarrow S_{1,2}=-1\pm i \longrightarrow y_n(t)=A_1e^{(-1+i)t}+A_2e^{(-1-i)t}$$

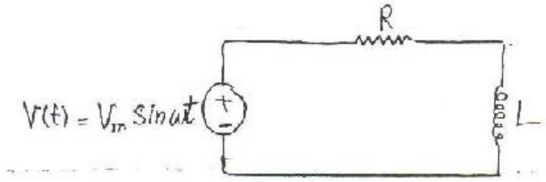
$$\longrightarrow y(t)=e^{-t}\left[A_1e^{it}+A_2e^{-it}\right]$$

بعداً اثبات می‌کنیم که : $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$$\longrightarrow y(t)=Ae^{-t}\sin\left[t+\acute{\theta}\right]$$

در جواب نهایی از i خبری نیست . به عبارت دیگر i یک محمل ریاضی است برای رسیدن به مقصد

مثال:



$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_m \sin\omega t$$

جواب همگن: $i_h(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$

جواب خصوصی: $i = A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t$

$$\longrightarrow R(A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t) + L[-A_1\omega\sin\omega t + A_2\omega\cos\omega t] = V_m\sin\omega t$$

$$\longrightarrow [RA_1 + L\omega A_2]\cos\omega t + [RA_2 - A_1L\omega]\sin\omega t = V_m\sin\omega t$$

$$\longrightarrow \begin{cases} RA_1 + L\omega A_2 = 0 \\ RA_2 - A_1L\omega = V_m \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} A_1 = \\ A_2 = \end{array}$$

راه استفاده از اعداد مختلط: $V_m\sin\omega t = \mathrm{Im}\{V_m e^{j\omega t}\}$

اگر $V(t) = V_m e^{i\omega t}$ باشد آنگاه: $i = I_m e^{i\omega t}$

$$\longrightarrow (RI_m + iL\omega I_m)e^{i\omega t} = V_m e^{i\omega t} \longrightarrow I_m = \frac{V_m}{R+iL\omega}$$

جواب خصوصی اصلی: $i = \mathrm{Im}\left\{\frac{V_m}{R+iL\omega}e^{i\omega t}\right\}$

یک عدد مختلط به فرم زیر از دو قسمت تشکیل شده است:

$$Z = x + iy \quad , \quad i \triangleq \sqrt{-1}$$

چند نکته :

۱- x و y هر دو حقیقی هستند.

۲- اگر $x=0$ باشد عدد را یک عدد موهومی گوییم.

جمع اعداد مختلط :

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{cases} \longrightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

تفریق دو عدد مختلط: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

ضرب دو عدد مختلط : $z_1 . z_2 = \left[x_1 + iy_1\right]\left[x_2 + iy_2\right]$

$$= \left[x_1 x_2 - y_1 y_2\right] + i\left[x_1 y_2 + x_2 y_1\right]$$

تقسیم دو عدد مختلط:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

چند خاصیت اعمال حسابی:

۱- خاصیت جابجایی

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$
$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

۲- خاصیت انجمنی

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$
$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_3) z_2$$

۳- خاصیت پخش‌پذیری $\qquad z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

چند تعریف :

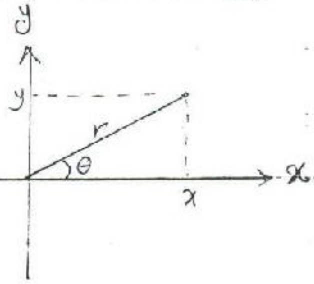
۱- مزدوج یک عدد مختلط $\qquad z=x+iy \longrightarrow z^*=\bar{z}=x-iy$

۲- قسمت حقیقی یک عدد مختلط $\qquad Re(z)=x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$

۳- قسمت موهومی یک عدد مختلط $\qquad Im(z)=y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

نکته: اعداد حقیقی روی یک محور x قابل نمایش هستند ولی اعداد مختلط در یک صفحهٔ (x,y) قابل نمایش هستند.

نمایش اعداد مختلط به فرم قطبی:



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} , \qquad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

فرم قطبی عدد مختلط: $\qquad z=x+iy=r\cos\theta + i\, r\sin\theta$

دو تعریف:

$$\begin{cases} r=|z| & \text{قدرمطلق } z \\ \theta = \arg z & \text{آرگومان } z \end{cases}$$

نکته: اگر θ آرگومان z باشد آن گاه $\theta \pm 2k\pi$ نیز آرگومان z است.

آرگومان اصلی z: اگر $-\pi < \theta < \pi$ باشد آن را آرگومان اصلی z گوییم.

نکته: در محاسبهٔ tg^{-1} باید دقت شود که α یا $\alpha \pm \pi$ را درست انتخاب کنیم.

$$z_1 = 1+i \longrightarrow \arg z_1 = tg^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

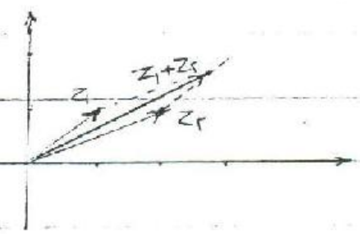
$$z_2 = -1-i \longrightarrow \arg z_2 = tg^{-1} 1 = \pi + \frac{\pi}{4}$$

نمایش جمع اعداد مختلط در صفحهٔ Z:

$z_1 = 1+i$

$z_2 = 2+i$

$Z = z_1 + z_2$



چند نامساوی:

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

$$\begin{cases} |z| \geqslant x \\ |z| \geqslant y \end{cases}$$

قضیهٔ دمورگان:

$$\left[r\cos\theta + i\, r\sin\theta\right]^n = r^n \cos n\theta + i\, r^n \sin n\theta$$

مثال: $(1+i)^8 = \left[\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right]^8 = 16\cos 2\pi + i\,16\sin 2\pi = 16$

اثبات: $z_1 \cdot z_2 = \left[r_1\cos\theta_1 + i r_1\sin\theta_1\right]\left[r_2\cos\theta_2 + i r_2\sin\theta_2\right]$

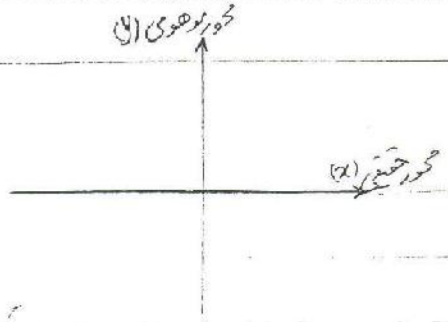
$$= r_1 r_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right] + i\, r_1 r_2\left[\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1\right]$$

$$= r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

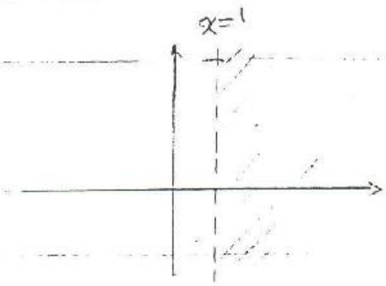
$$z_1=z_2=z \longrightarrow z^2=r^2\left[\cos 2\theta+i\sin 2\theta\right]$$

به همین شکل از طریق استقرای ریاضی برای توانهای بالاتر اثبات می‌شود.

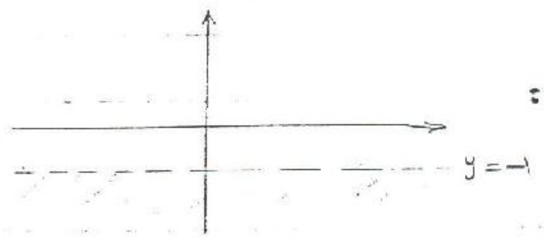
نواحی در صفحهٔ مختلط:



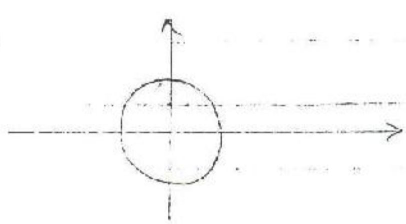
مثال۱: $Re\{z\}\geq 1$



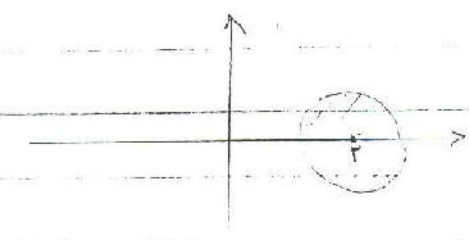
مثال۲: $Im\{z\}<-1$



مثال۳: $|z|\leq 1$



مثال۴: $|z-2|\leq 1$

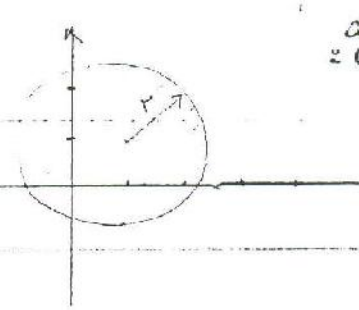


مثال۵: $|z-(1+i)|\leq 2$

$$\longrightarrow |x+iy-(1+i)|=2$$

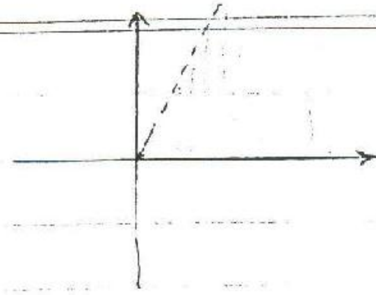
$$\longrightarrow |(x-1)+i(y-1)|=2$$

$$\longrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=2$$



مثال ۶:

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$$



مثال ۷:

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 4$$

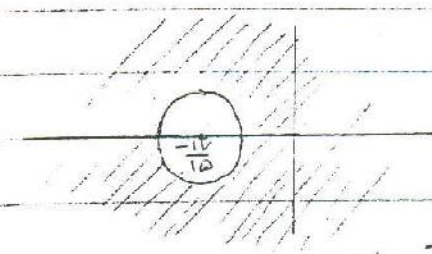
$$\xrightarrow{\text{برای تعیین مرز}} \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 4 \longrightarrow \frac{|x+iy-1|}{|x+iy+1|}=4 \longrightarrow \frac{|(x-1)+iy|}{|(x+1)+iy|}=4$$

$$\longrightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}=4 \longrightarrow (x-1)^2+y^2=16\left[(x+1)^2+y^2\right]$$

$$=15x^2+15y^2+15+34x=0$$

$$\longrightarrow x^2+y^2+1+\frac{34}{15}x=0$$

$$\longrightarrow \left(x+\frac{17}{15}\right)^2+y^2=\left(\frac{8}{15}\right)^2$$



چند تعریف:

۱- مکان هندسی نقاط: هر قانونی که تعدادی از نقاط صفحهٔ z را گرد آورد مکان هندسی نقاط نامند مانند، $|z|=1$ که مکان هندسی نقاطی است که فاصله‌شان تا مرکز ۱ است.

۲- مجموعه نقاط باز: مجموعه نقاطی است که در همسایگی تمام نقاط آن نقاطی درون مجموعه می‌باشد

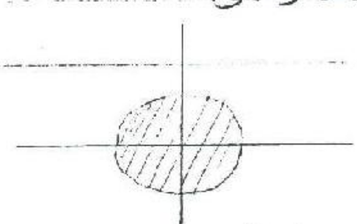
۳- نقاط کرانه‌ای: نقاطی هستند که در همسایگی آنها نقاطی درون مجموعه و نقاطی خارج از مجموعه وجود دارند.

۴- مجموعه نقاط بسته: مجموعه نقاطی است شامل نقاط کرانه‌ای.

مثال:

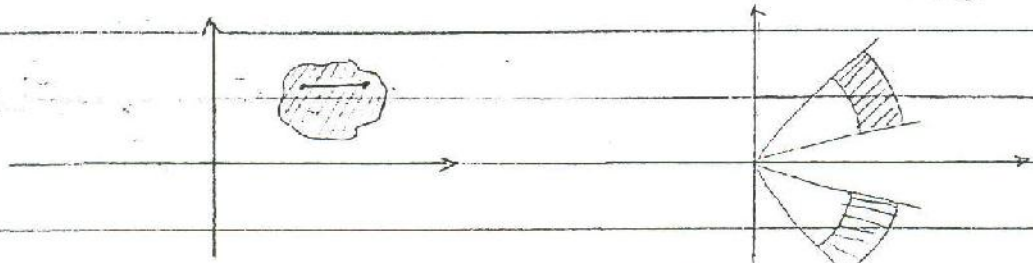
$$|z|<1$$

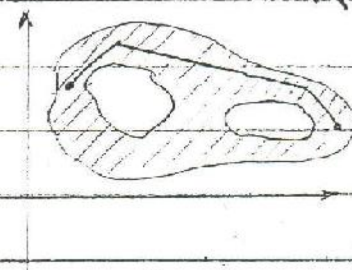
باز



بسته

همجموعه نقاط همبند : چنانچه هر دو نقطه مجموعه توسط خطی درون مجموعه قابل اتصال باشد آن مجموعه نقاط را همبند نامند.





۶ـ حوزه : مجموعه نقاط همبند باز را گوییم.

۷ـ ناحیه: مجموعه نقاط همبند بسته را گوییم

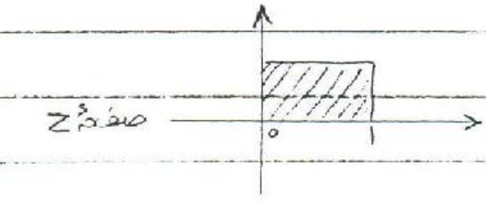
۸ـ تابع : تابع قانونی است که به تمام نقاط یک ناحیه (حوزه) در صفحهٔ z یک عدد مختلط نسبت دهد. $W = f(z)$

نکته: فرق تابع حقیقی و مختلط در این است که برد و دامنه در این حالت یک ناحیه هستند.

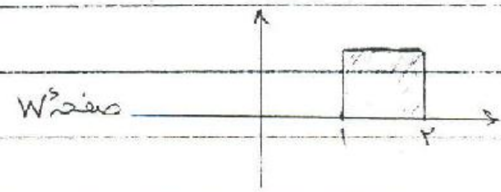
تابع حقیقی: $y = \sqrt{1-x}$ دامنه $x \leq 1$ برد $y \geq 0$

تابع مختلط: $W=Z+1$

فرض می‌کنیم دامنه به صورت مقابل باشد:



در نتیجه برد به صورت زیر است:



پیدا کردن برد از روی دامنه بحثی است تحت عنوان «نگاشت» که در فصول بعد بحث خواهد شد.

نکته ۲: در هر تابع مختلط: $W=f(z)=u(x,y)+i\,V(x,y)$

مثال ۱: $W=Z^2$

$$\longrightarrow W=(x+iy)^2=\underbrace{(x^2-y^2)}_{u(x,y)}+i\underbrace{(2xy)}_{V(x,y)}$$

مثال ۲: $W=(1+i)Z-(2-i)$

$$\longrightarrow W=(1+i)(x+iy)-(2-i)=\underbrace{(x-y-2)}_{u(x,y)}+i\underbrace{(x+y+1)}_{V(x,y)}$$

مثال ۳: $W=Z^3$

$$\longrightarrow W=(x+iy)^3=\underbrace{\left[x^3-3xy^2\right]}_{u(x,y)}+i\underbrace{\left[-y^3+3x^2y\right]}_{V(x,y)}$$

قضیه کوشی ریمان :

اگر تابع $f(x)$ در حوزهٔ D تحلیلی باشد، در آن صورت:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

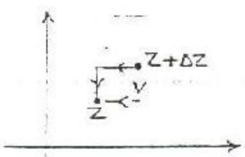
و بالعکس.

اثبات:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$\longrightarrow f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$\longrightarrow f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i\,v(x+\Delta x, y+\Delta y) - [u(x,y) + i\,v(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$



نکته: چون تابع $f(z)$ در حوزهٔ D تحلیلی است پس تفاوتی نمی‌کند که ابتدا کدام یک از متغیرها $(\Delta x, \Delta y)$ را به سمت صفر میل دهیم.

مرحلهٔ اول:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + i\,v(x+\Delta x, y) - u(x,y) - i\,v(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

نکتهٔ جانبی:

$$f(z) = z^2 \longrightarrow f'(z) = 2z$$

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$f'(z) = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$$

مرحلهٔ دوم:

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y} - i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta y}$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

در مثال بالا:

$$f'(z) = 2x - i(-2y) = 2z$$

$$\longrightarrow \begin{cases} f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ f'(z) = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

مثال: کدام یک از توابع زیر تحلیلی اند؟

$$f_1(z) = z^2 \longrightarrow f_1(z) = (\overbrace{x^2 - y^2}^{u}) + i(\overbrace{2xy}^{v})$$

$$\longrightarrow \begin{cases} u_x = 2x \\ u_y = -2y \end{cases}, \begin{cases} v_x = 2y \\ v_y = 2x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$ تحلیلی است

چون معادلات کوشی-ریمان برای تمام نقاط صفحهٔ z در مورد $f_1(z)$ برقرار است پس تابع $f_1(z)$

در تمام صفحهٔ z تحلیلی است.

$$f_2(z) = Re(z) \quad \text{—} \quad f_2(z) = \overset{u}{\widehat{x}} + i\overset{v}{\widehat{0}}$$

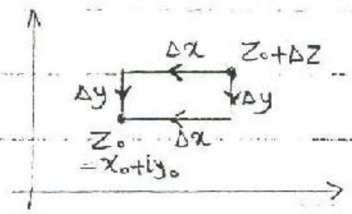
۹ـ حد یک تابع: تابع $w=f(z)$ در نقطهٔ z_0 دارای حد l است چنانچه به ازاء هر ε دلخواه (ε عددی است به طور دلخواه کوچک) یک δ وجود داشته باشد چنانچه $|z-z_0|<\delta$ باشد در آن صورت $|w-l|<\varepsilon$ باشد.

۱۰ـ تابع $f(z)$ در نقطهٔ $z=z_0$ دارای مشتق است چنانچه حد زیر وجود داشته باشد:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

نکته: در توابع حقیقی وقتی این مشتق وجود داشت که حد چپ و راست برابر بودند. در توابع مختلط باید این حد به ازاء تمام جهات در صفحهٔ z موجود و برابر باشد.

نکته: برای اثبات اینکه تابعی در نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست عموماً ابتدا Δx را به سمت صفر و سپس Δy را به سمت صفر میل می‌دهیم و بار دیگر برعکس عمل می‌کنیم. اگر این دو پاسخ یکی نشد نتیجه می‌گیریم که تابع مشتق‌پذیر نیست.



مثال: $f(z)=\bar{z}$

$$\to f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{(z+\Delta z)}-\bar{z}}{\Delta z}\ ,\quad z=x+iy\ ,\quad \Delta z=\Delta x+i\Delta y$$

$$\rightarrow f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[(x+\Delta x) - i(y+\Delta y)] - [x - iy]}{\Delta x + i\Delta y}$$

ابتدا $\Delta y \to 0$:

$$\rightarrow f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x} + \Delta x \cancel{- iy} \cancel{- x} \cancel{+ iy}}{\Delta x} = 1$$

حال اگر ابتدا $\Delta x \to 0$:

$$\rightarrow f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\cancel{x} \cancel{- iy} - i\Delta y \cancel{- x} \cancel{+ iy}}{i\Delta y} = -1$$

۱۱- تابع تحلیلی: تابع $f(z)$ را در ناحیه D تحلیلی گویند چنانچه این تابع در تمام نقاط D مشتق‌پذیر باشد.

قضیه کوشی-ریمان: اگر تابع $f(z)$ در یک ناحیه D تحلیلی باشد در آن صورت:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

و بالعکس

در مثال قبل:

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

$$\begin{matrix} u(x,y) = x \\ v(x,y) = -y \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -1 \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

پس تابع در هیچ نقطه تحلیلی نیست.

$$\longrightarrow \begin{cases} u_x = 1 \\ v_y = 0 \end{cases} \longrightarrow u_x \neq v_y$$

تابع $f_2(z)$ در هیچ نقطه‌ای از صفحهٔ Z تحلیلی نیست.

$$f_3(z) = z^3 + 2z \longrightarrow f_3(z) = (\overbrace{x^3 - 3xy^2 + 2x}^{u}) + i(\overbrace{3yx^2 - y^3 + 2y}^{v})$$

$$\longrightarrow \begin{cases} u_x = 3x^2 - 3y^2 + 2 \\ u_y = -6xy \end{cases}, \quad \begin{cases} v_x = 6xy \\ v_y = 3x^2 - 3y^2 + 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

تابع $f_3(z)$ در تمام نقاط صفحهٔ Z تحلیلی است.

$$f_4(z) = \overline{Z} \longrightarrow f_4(z) = \overset{u}{x} - i\overset{v}{\overbrace{y}}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} u_x = 1 \\ v_y = -1 \end{cases}, \quad u_x \neq v_y$$

تابع $f_4(z)$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست.

$$f_5(z) = \frac{1}{Z} \longrightarrow f_5(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} u_x = \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ u_y = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} v_x = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ v_y = -\dfrac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

تابع $f_5(z)$ در تمام نقاط به جز نقطه $z=0$ تحلیلی است.

$$f_6(z) = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow u = \sqrt{x^2+y^2}, \quad v = 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} u_x = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ u_y = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}, \quad \begin{cases} v_y = 0 \\ v_x = 0 \end{cases}$$

در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست.

توابع عمدتاً به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱- توابعی که در تمام نقاط صفحه تحلیلی هستند.
$z^2, \cos z, \sin z, e^z, \ldots$

۲- توابعی که در تمام صفحه تحلیلی نیستند.
$\bar{z}, |z|, Re(z), Im(z), \arg(z), \ldots$

۳- توابعی که فقط در نقاطی تحلیلی نیستند.
$\frac{1}{z-1}, \frac{1}{z^2-1}, \ldots$

نکته: اگر تابع $f(z)$ تحلیلی باشد در آن صورت $u(x,y)$ و $v(x,y)$ هر دو در معادله لاپلاس دو بعدی صدق می‌کنند.

یادآوری معادله لاپلاس دو بعدی:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ v_{xx}+v_{yy}=0 \end{cases}$$

اثبات: اگر تابع $f(z)$ تحلیلی باشد.

$$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_{xx}=v_{xy} \\ u_{yy}=-v_{xy} \end{cases} \longrightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$$

به همین شکل برای v نیز اثبات می‌شود.

تعریف ۱: تابعی که در معادله لاپلاس صدق کند را تابع همساز نامند.

تعریف ۲: v را همساز مزدوج u نامند.

مثال ۱: بررسی کنید که در تابع مختلط زیر u و v همساز هستند.

$$f(z)=z^2=\overbrace{(x^2-y^2)}^{u}+i\overbrace{(2xy)}^{v}$$

$$\begin{cases} u_x=2x \longrightarrow u_{xx}=2 \\ u_y=-2y \longrightarrow u_{yy}=-2 \end{cases} \longrightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$$

$$, \begin{cases} V_x = 2y \longrightarrow V_{xx} = 0 \\ V_y = 2x \longrightarrow V_{yy} = 0 \end{cases} \longrightarrow V_{xx} + V_{yy} = 0$$

مثال ۲: اولاً ثابت کنید که $u(x,y) = x^2 - y^2$ همساز است و ثانیاً همساز مزدوج آن را پیدا کنید.

قسمت اول در مثال قبلی حل شد.

$$\begin{cases} u_x = 2x \\ u_y = -2y \end{cases} \xrightarrow{\text{همساز } u \text{ است } V} \begin{cases} V_y = u_x = 2x \\ V_x = -u_y = 2y \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} V(x,y) = 2xy + g(x) \\ V(x,y) = 2xy + f(y) \end{cases} \longrightarrow V(x,y) = 2xy + C$$

$$\longrightarrow f(z) = (x^2 + y^2) + i(2xy + C) = z^2 + iC$$

$$if \ c = 0 \longrightarrow f(z) = z^2$$

معادلات کوشی ـ ریمان در فرم قطبی:

$$f(z) = u(x,y) + iV(x,y)$$

$$f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3yx^2 - y^3)$$

$$= [r\cos\theta + i\sin\theta]^3 = \underbrace{r^3\cos 3\theta}_{u(r,\theta)} + i\underbrace{r^3\sin 3\theta}_{V(r,\theta)}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} u_r = \frac{1}{r} V_\theta \\ V_r = \frac{-1}{r} u_\theta \end{cases}$$

در مثال قبل:

$$\longrightarrow \begin{cases} u_r = 3r^2\cos 3\theta \\ u_\theta = 3r^3\sin 3\theta \end{cases}, \begin{cases} V_r = 3r^2\sin 3\theta \\ V_\theta = 3r^3\cos 3\theta \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} u_r = \frac{1}{r} V_\theta \\ V_r = \frac{-1}{r} u_\theta \end{cases}$$

بحث‌های باقیمانده از فصل ۱۲ :

۱- محاسبهٔ Z^n : برای محاسبه Z^n ابتدا ثابت می‌کنیم که : $\boxed{Z=r\cos\theta+ir\sin\theta=re^{i\theta}}$

اثبات:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\rightarrow e^{i\theta}=1+(i\theta)+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\cdots$$

$$=\left[1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-+\cdots\right]+i\left[\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-+\cdots\right]=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$\longrightarrow Z^n=\left[re^{i\theta}\right]^n=r^n.e^{in\theta}$$

مثال :

$$(1+i)^8=\left[\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right]^8=16e^{i2\pi}=16\left[\cos 2\pi+i\sin 2\pi\right]=16$$

۲- محاسبه e^z :

$$e^z=e^{x+iy}=e^x.e^{iy}=e^x\left[\cos y+i\sin y\right]$$

$$\longrightarrow e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

مثال:

$$e^{2+i}=e^2\cos 1+ie^2\sin 1=$$

۳- محاسبهٔ ریشهٔ n ام یک عدد مختلط $\sqrt[n]{Z}$:

نکته: وقتی از اعداد مختلط استفاده می‌کنیم برای $\sqrt[n]{Z}$ ، n ریشه پیدا می‌شود.

در اعداد حقیقی همیشه این طور نبود : $\sqrt[2]{4}=\pm 2$, $\sqrt[3]{1}=1$

$$z=re^{i\theta} \quad , \quad e^{i2k\pi}=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=1$$

$$\longrightarrow z=re^{i\theta}.e^{i2k\pi}=re^{i(\theta+2k\pi)}$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{re^{i(\theta+2k\pi)}}=r^{\frac{1}{n}}.e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad , \quad k=0,1,\dots,n-1$$

$$k=0 \longrightarrow z_1=r^{\frac{1}{n}}.e^{i\frac{\theta}{n}}$$

$$k=1 \longrightarrow z_2=r^{\frac{1}{n}}.e^{i\frac{\theta+2\pi}{n}}$$

$$\vdots$$

$$k=n \longrightarrow z_{n+1}=r^{\frac{1}{n}}.e^{i\frac{\theta+2n\pi}{n}}=r^{\frac{1}{n}}.e^{i\frac{\theta}{n}}.\underbrace{e^{i2\pi}}_{1}=z_1$$

خلاصهٔ روش :

۱- z را به فرم قطبی نمایش می‌دهیم . $z=re^{i\theta}$

۲- n ریشه‌ها را از رابطهٔ زیر محاسبه می‌کنیم .

$$\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}.e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad , \quad k=0,1,\dots,n-1$$

مثال : $\sqrt[2]{1}=? \longrightarrow 1=(1)e^{i(0)} \quad , \quad r=1 , \theta=0$

$$\longrightarrow \sqrt[2]{1}=(1)^{\frac{1}{2}}.e^{i\frac{0+2k\pi}{2}} \quad , \quad k=0,1$$

$$k=0 \longrightarrow z_1=1.e^{i(0)}=1$$

$$k=1 \longrightarrow z_2=1.e^{i\pi}=-1$$

مثال:

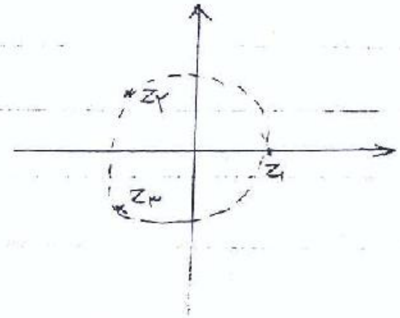
$\sqrt[3]{1} = ? \longrightarrow 1 = (1)e^{i(0)} \quad , \; r=1 \; , \; \theta = 0$

$\longrightarrow \sqrt[3]{1} = 1^{\frac{1}{3}} . e^{i\frac{2k\pi}{3}} \quad , \; k = 0, 1, 2$

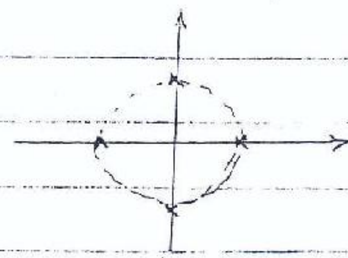
$K=0 \longrightarrow z_1 = 1e^{i(0)} = 1$

$K=1 \longrightarrow z_2 = 1e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

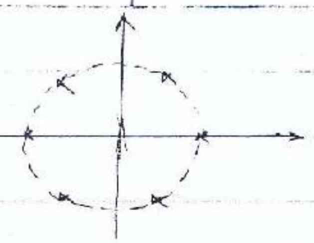
$K=2 \longrightarrow z_3 = 1e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\sqrt[4]{1} \longrightarrow$
$z_1 = 1$
$z_2 = i$
$z_3 = -1$
$z_4 = -i$



$\sqrt[6]{1}$



مثال۲:

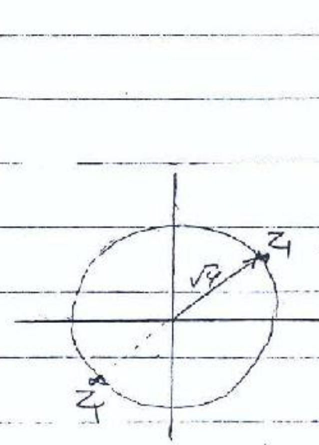
$\sqrt[2]{3+3\sqrt{3}i} = ?$

$3+3\sqrt{3}i = 6e^{i\frac{\pi}{3}} \quad , \; r=6 \; , \; \theta = \frac{\pi}{3}$

$\longrightarrow \sqrt[2]{3+3\sqrt{3}i} = 6^{\frac{1}{2}} . e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}} \quad , \; K=0,1$

$\longrightarrow K=0 \longrightarrow z_1 = \sqrt{6}.e^{i\frac{\pi}{6}}$

$K=1 \longrightarrow z_2 = \sqrt{6}.e^{i\frac{7\pi}{6}}$

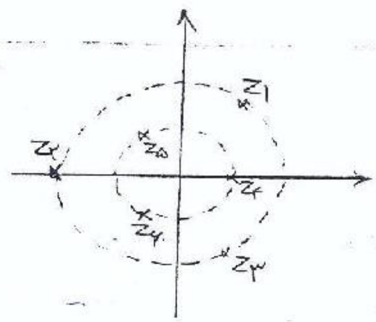


مثال : ریشه های معادله $z^6+7z^3=8$ را پیدا کنید.

$$W=z^3 \longrightarrow W^2+7W-8=0 \longrightarrow \begin{array}{l} W_1=-8 \\ W_2=1 \end{array}$$

$$\longrightarrow z^3=-8 \longrightarrow \begin{cases} z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}} \\ z_2=2e^{i\pi} \\ z_3=2e^{i\frac{5\pi}{3}} \end{cases}$$

$$z^3=1 \longrightarrow \begin{cases} z_4=1 \\ z_5=e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ z_6=e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{cases}$$



۴- محاسبه توابع مثلثاتی اعداد مختلط :

$$\cos z=\frac{1}{2}\left[e^{iz}+e^{-iz}\right]$$

$$\sin z=\frac{1}{2i}\left[e^{iz}-e^{-iz}\right]$$

$$\cosh z=\frac{1}{2}\left[e^{z}+e^{-z}\right]$$

$$\sinh z=\frac{1}{2}\left[e^{z}-e^{-z}\right]$$

مثال : $\cos(1+i)=?$

$$\longrightarrow \cos(1+i)=\frac{1}{2}\left[e^{i(1+i)}+e^{-i(1+i)}\right]=\frac{1}{2}\left[e^{-1+i}+e^{1-i}\right]$$

$$,\quad e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}\cdot e^{iy}=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y$$

$$\longrightarrow \cos(1+i)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{e}\cos 1+i\frac{1}{e}\sin 1+e\cos 1-ie\sin 1\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{e}+e\right]\cos\underset{\text{رادیان}}{(1)}+i\left[\frac{1}{e}-e\right]\sin\underset{\text{رادیان}}{(1)}$$

بعضی فرمولهای ساده کننده : $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

اثبات : $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$

$$\cos iy = \frac{1}{2}\left[e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{-y} + e^{y}\right] = \cosh y$$

به طریق مشابه : $\sin iy = i \sinh(y)$

$$\longrightarrow \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

۵- محاسبه لگاریتم یک عدد مختلط $Ln\, z$:

۱- z را به فرم قطبی می نویسیم:

$$Ln\, z = Ln\, r e^{i(\theta+2k\pi)} = Ln\, r + Ln\, e^{i(\theta+2k\pi)} = Ln\, r + i(\theta+2k\pi)$$

$$\longrightarrow Ln\, z = \underbrace{Ln\, r}_{\text{قسمت حقیقی جواب}} + i\underbrace{\left[\theta+2k\pi\right]}_{\text{قسمت موهومی جواب}}$$

بینهایت جواب داریم. جوابی که به ازای k=0 بدست می آید $(-\pi<\theta<\pi)$ جواب اصلی می نامیم

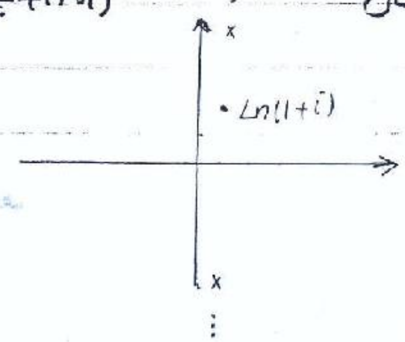
$$\longrightarrow Ln\, z = Ln\, r + i\theta$$

مثال

$$Ln(1+i) = Ln\sqrt{2}\, e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)} = Ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$$

$$= 0/35 + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$$

$$\xrightarrow{\text{جواب اصلی}} Ln(1+i) = 0/35 + i\, 0/73$$



نکته: اگر اعداد مختلط تعریف شده باشد در آن صورت Ln اعداد منفی نیز تعریف شده است.

$$Ln(-1) = ? \longrightarrow r=1\ ,\ \theta=\pi$$

$$\longrightarrow Ln(-1) = \underbrace{Ln1}_{\text{صفر}} + i\pi = i\pi$$

$$Ln(-i) \overset{\text{جواب اصلی}}{=} ? \longrightarrow r=1\ ,\ \theta=-\frac{\pi}{۲}$$

$$\longrightarrow Ln(-i) = \underbrace{\cancel{Ln1}}_{0} - i\frac{\pi}{۲} = -i\frac{\pi}{۲}$$

۶- محاسبه یک عدد مختلط به توان یک عدد مختلط دیگر:

$$Z = e^{Lnz} \longrightarrow Z^c = (e^{Lnz})^c = e^{cLnz} \longrightarrow Z^c = e^{cLnz}$$

در اینجا هم چون Lnz بینهایت جواب دارد جواب اصلی، تعریف می‌کنیم.

مثال: $(1+i)^i = ? \qquad Z=1+i\ ,\ c=i$

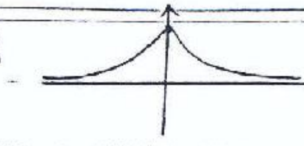
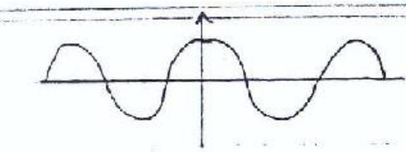
$$\longrightarrow Lnz = Ln(1+i) = ۰/۳۵ + i\,۰/۷۸$$

$$cLnz = i(۰/۳۵ + i\,۰/۷۸) = -۰/۷۸ + i\,۰/۳۵$$

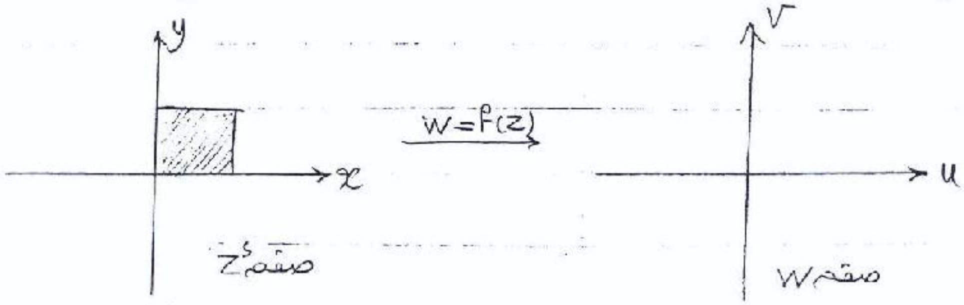
$$\longrightarrow (1+i)^i = e^{-۰/۷۸ + i\,۰/۳۵} = e^{-۰/۷۸}\left[Cos\,۰/۳۵ + i\,Sin\,۰/۳۵\right]$$

نگاشت:

یادآوری: در توابع حقیقی $y = f(x)$ نمودار (منحنی) داشتیم:

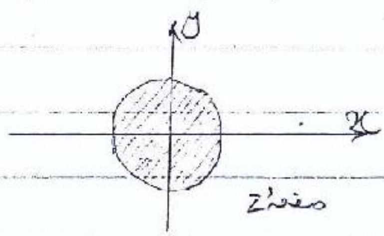
مثال: $y=e^{-|x|}$  $y=\cos x$ 

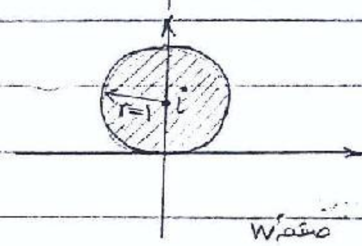
در توابع مختلط $W=f(z)$, $W=u+iV$, $z=x+iy$



نگاشت: تصویر ناحیه‌ای مشخص از صفحهٔ z در صفحهٔ W است با تابع تعریف شدهٔ $W=f(z)$.

مثال: نگاشت یا تصویر ناحیه‌ای در صفحهٔ z که با $|z|<1$ مشخص شده است با تابع $W=z+i$ تعیین کنید.





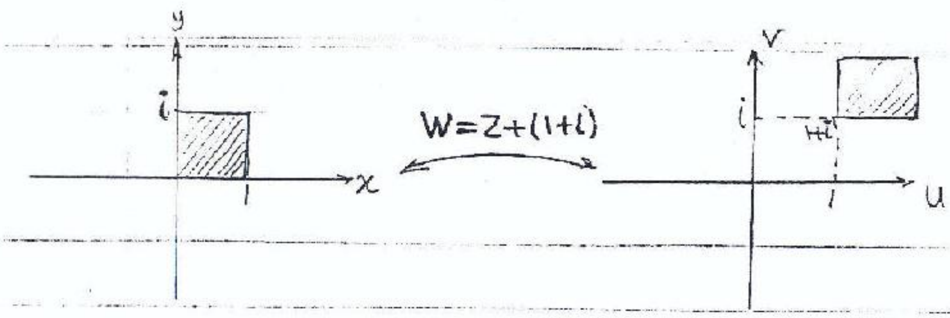
اثبات: $x^2+y^2=1$, $W=z+i$

$$\longrightarrow W = x+iy+i = \underbrace{(x)}_{u} + i\underbrace{(y+1)}_{V}$$

$$\begin{cases} u=x \\ V=y+1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \longrightarrow u^2+(V-1)^2=1$$

بطور کلی: نگاشت با تابع $W=z+b$ یک انتقال است.

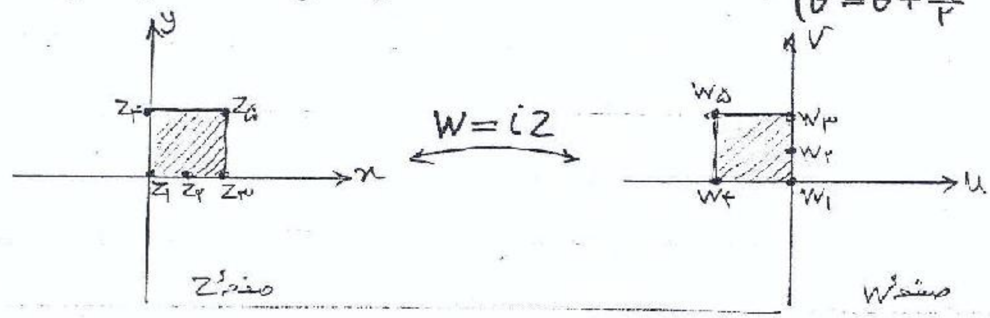
مثال ۲:



مثال ۳: $W = i \cdot Z$

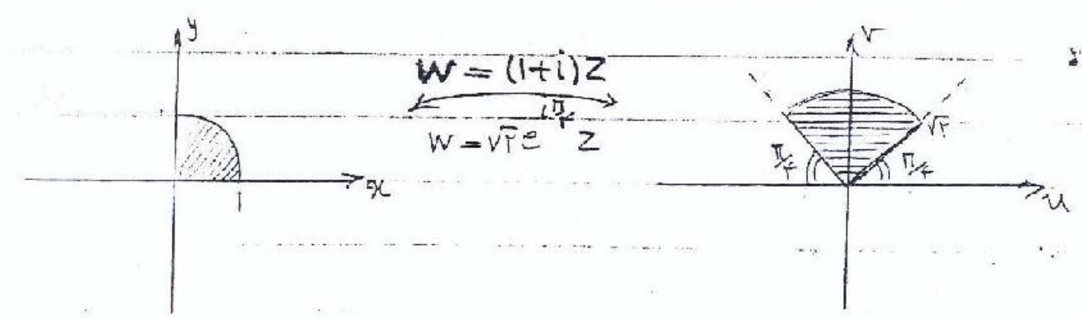
$$Z = re^{i\theta} \quad , \quad W = r'e^{i\theta'}$$

$$W = i\left[re^{i\theta}\right] = e^{i\frac{\pi}{2}}\left[re^{i\theta}\right] = r \cdot e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} \longrightarrow \begin{cases} r' = r \\ \theta' = \theta + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



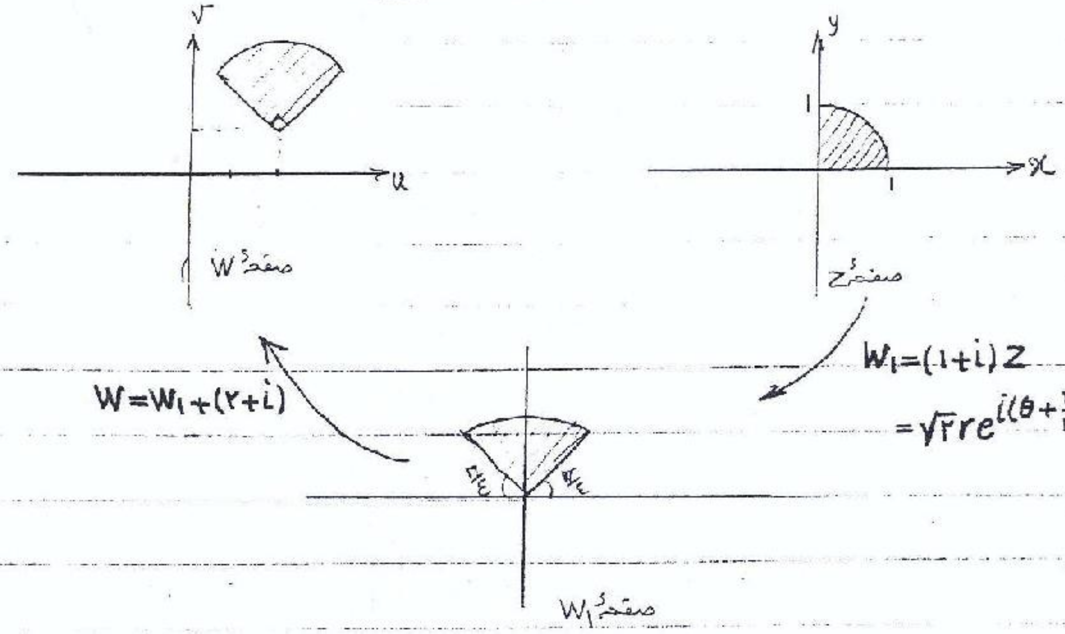
به طور کلی نگاشت تابع $W=aZ$ یک دوران است به اندازهٔ زاویهٔ a و یک انبساط یا یک انقباض است.

مثال:

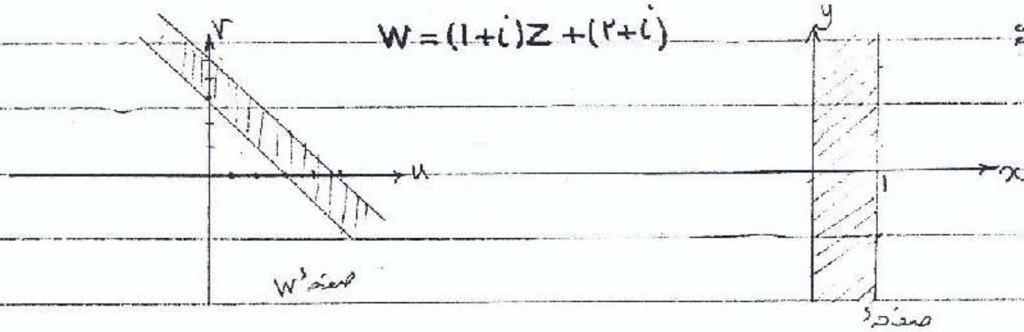


نگاشت $w=az+b$

مثال ۱: $W=(1+i)Z+(2+i)$



مثال ۲: $W=(1+i)Z+(2+i)$



محاسبات می‌خواهیم تصویر خط $x=1$ را در صفحهٔ W پیدا کنیم.

$x=1$

$$W=(1+i)(x+iy)+2+i=\underbrace{(x-y+2)}_{u}+i\underbrace{(x+y+1)}_{v}$$

$$\longrightarrow\begin{cases}x=1\\u=x-y+2\\v=x+y+1\end{cases}$$

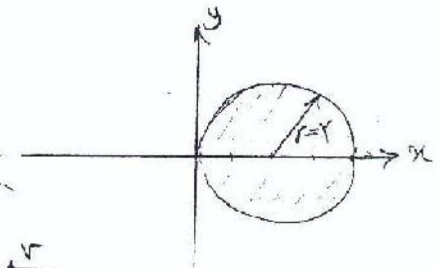
برای پیدا کردن خط $x=1$ کافی است در معادلات بالا x و y را حذف کنیم و یک معادله برحسب

u و v پیدا کنیم این معادله، معادلهٔ تصویر خواهد بود.

$$\begin{cases} u = 1-y+2 \\ v = 1+y+1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u = 3-y \\ v = 2+y \end{cases} \longrightarrow u+v=5$$

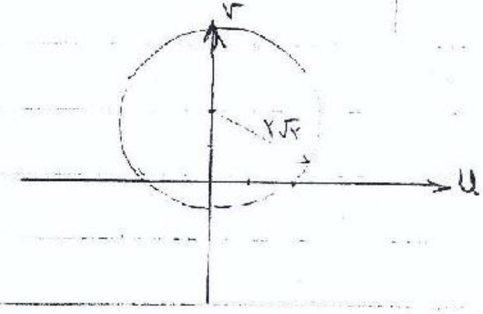
به همین شکل تصویر $x=0$ را پیدا می‌کنیم: $u+v=3$

مثال ۳: $W=(1+i)z-2$



$$\longrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+y^2=4 \\ u=x-y-2 \\ v=x+y \end{cases}$$

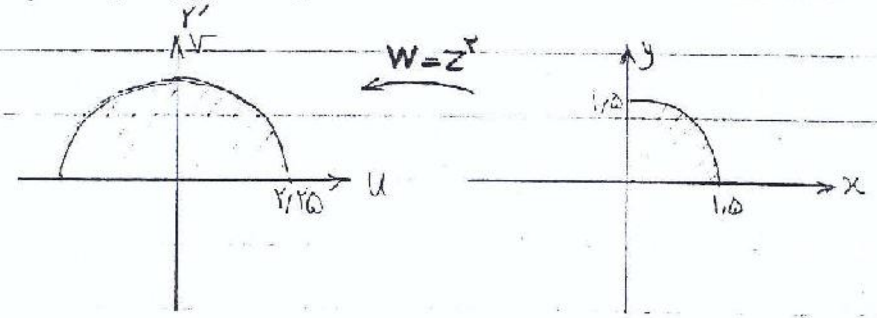
$$\longrightarrow (v-2)^2+u^2=8$$



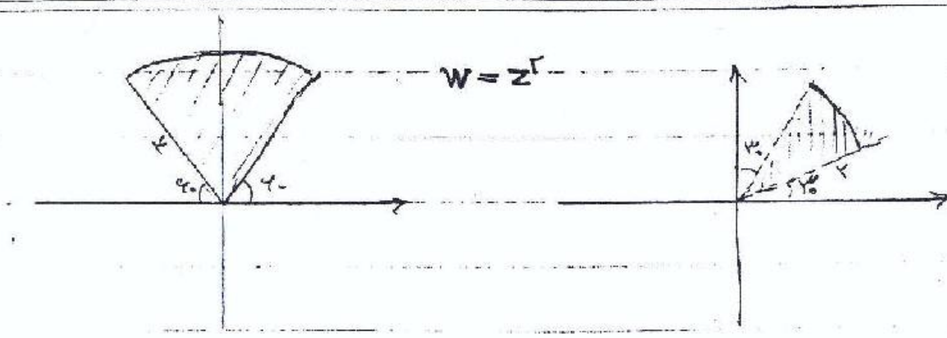
نگاشت $W=z^2$:

$$W = z^2 = (re^{i\theta})^2 = \underbrace{r^2}_{r'} . e^{i\underbrace{2\theta}_{\theta'}}$$

مثال:



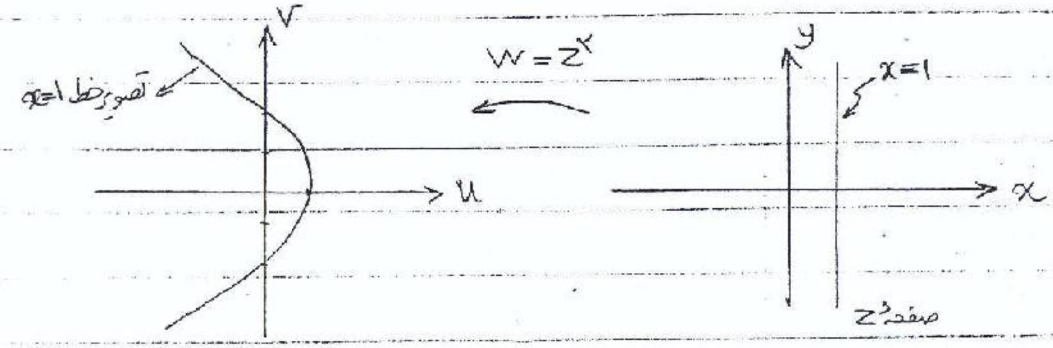
مثال۲ :



مثال۳: تصویر ربع اول در صفحه‌ی z با نگاشت $w=z^2$ ربع اول و دوم در صفحه‌ی w است.

مثال۴ : تصویر دایره‌ی واحد در صفحه‌ی z با نگاشت $w=z^2$ همان دایره واحد در صفحه‌ی w است.

مثال۵ :

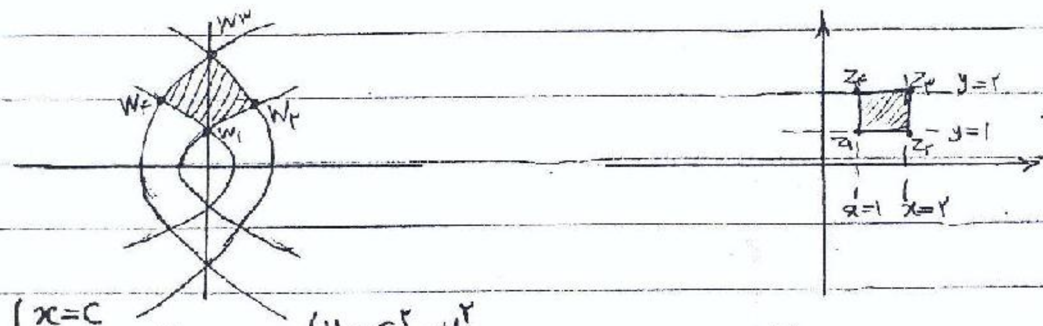


$x=1$

$W=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i(2xy)$

$$\longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u=1-y^2 \\ v=2y \end{cases} \longrightarrow u=1-\frac{v^2}{4}$$

مثال۶ :



$$\begin{cases} x=c \\ u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u=c^2-y^2 \\ v=2cy \end{cases} \longrightarrow u=c^2-\frac{v^2}{4c^2}$$

$$c=1 \longrightarrow u=1-\frac{v^2}{4}$$

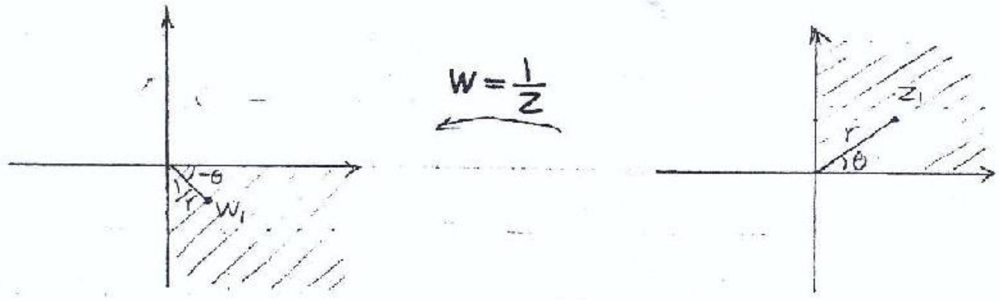
$$c=2 \longrightarrow u=4-\frac{v^2}{16}$$

$$\begin{cases} y = c \\ u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u = x^2 - c^2 \\ v = 2cx \end{cases} \longrightarrow u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2$$

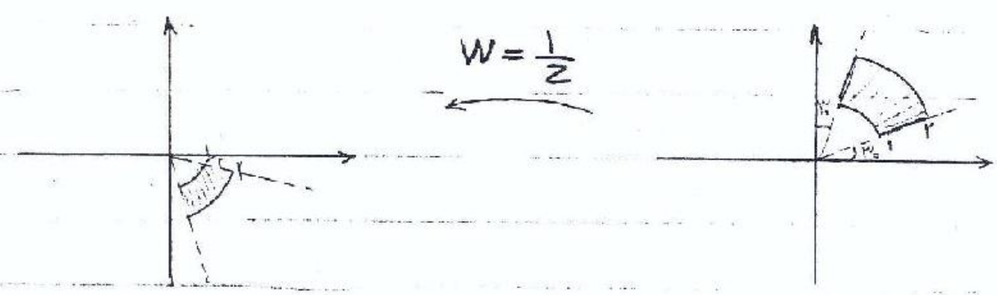
نگاشت $W = \frac{1}{z}$:

$$W = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \longrightarrow \begin{cases} r' = \frac{1}{r} \\ \theta' = -\theta \end{cases}$$

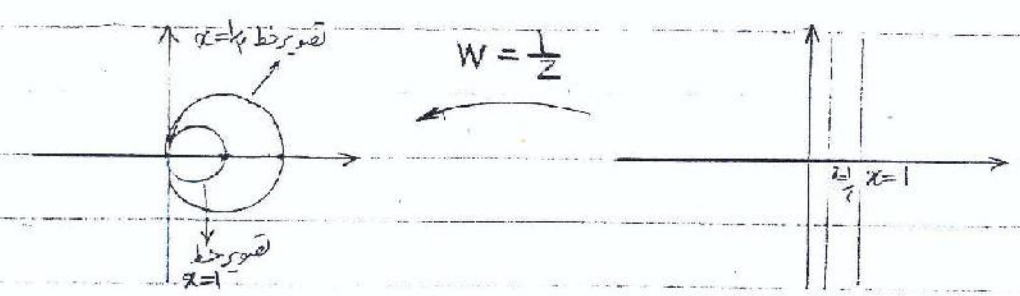
مثال ۱ :



مثال ۲ :



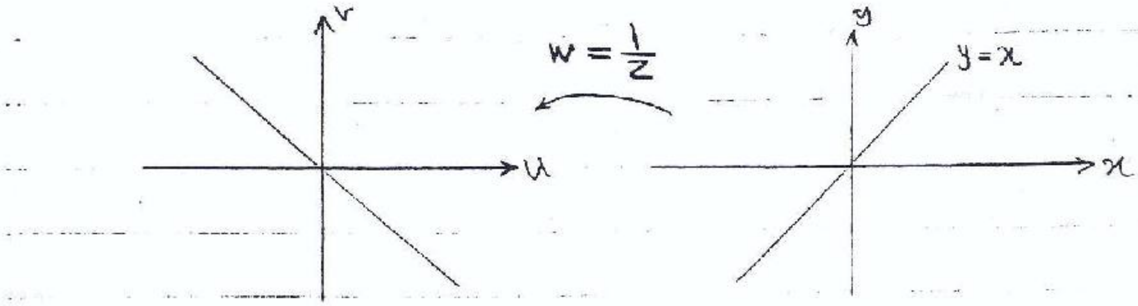
مثال ۳ :



$$W = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$$

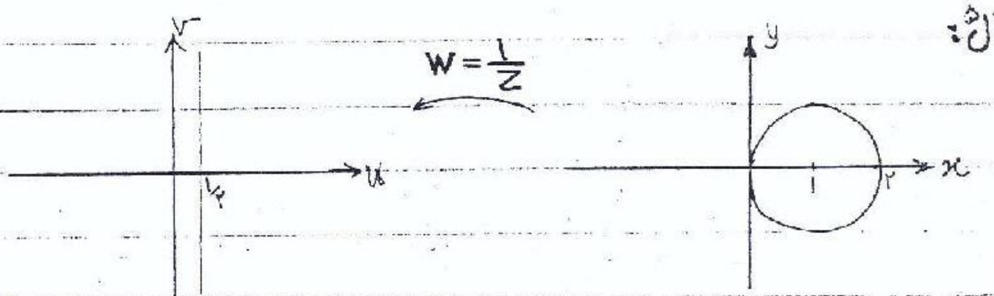
$$\longrightarrow \begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ x = c \end{cases} \longrightarrow \left(u - \frac{1}{2c}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2$$

مثال ۴:



$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ x = y \end{cases} \longrightarrow u = -v$$

مثال ۵:



$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases} \longrightarrow u = \frac{1}{2}$$

قضیه: نگاشت $W = \frac{1}{Z}$ تمام خطوط و دوایر در صفحهٔ Z را بر روی تمام خطوط و دوایر در صفحهٔ W تصویر می‌کند.

$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ معادلهٔ تمام خطوط و دوایر در صفحهٔ Z

$A'(u^2+v^2)+B'u+C'v+D'=0$ معادلهٔ تمام خطوط و دوایر در صفحهٔ W

اثبات:

$$\begin{cases} Z = x+iy \\ \bar{Z} = x-iy \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = Z\bar{Z} \\ x = \frac{1}{2}[Z+\bar{Z}] \\ y = \frac{1}{2i}[Z-\bar{Z}] \end{cases}$$

$$\longrightarrow A(Z\bar{Z}) + \frac{B}{2}(Z+\bar{Z}) + \frac{C}{2i}(Z-\bar{Z}) + D = 0$$

if $W=\frac{1}{Z} \longrightarrow \begin{cases} Z=\frac{1}{W} \\ \bar{Z}=\frac{1}{\bar{W}} \end{cases}$

$$\longrightarrow A\left[\frac{1}{W\bar{W}}\right] + \frac{B}{2}\left[\frac{1}{W}+\frac{1}{\bar{W}}\right] + \frac{C}{2i}\left[\frac{1}{W}-\frac{1}{\bar{W}}\right] + D = 0$$

$$\longrightarrow A + \frac{B}{2}\left[\bar{W}+W\right] + \frac{C}{2i}\left[\bar{W}-W\right] + DW\bar{W} = 0$$

$$\longrightarrow A + B.u - Cv + D\left[u^2+v^2\right] = 0 \longrightarrow \begin{cases} D'=A \quad , \quad B'=B \\ C'=-C \quad\quad A'=D \end{cases}$$

اگر بخواهیم تصویر دایرهٔ $(x-1)^2+y^2=1$ را پیدا کنیم به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\longrightarrow x^2+y^2-2x+1=1 \longrightarrow A=1 \;,\; B=-2$$

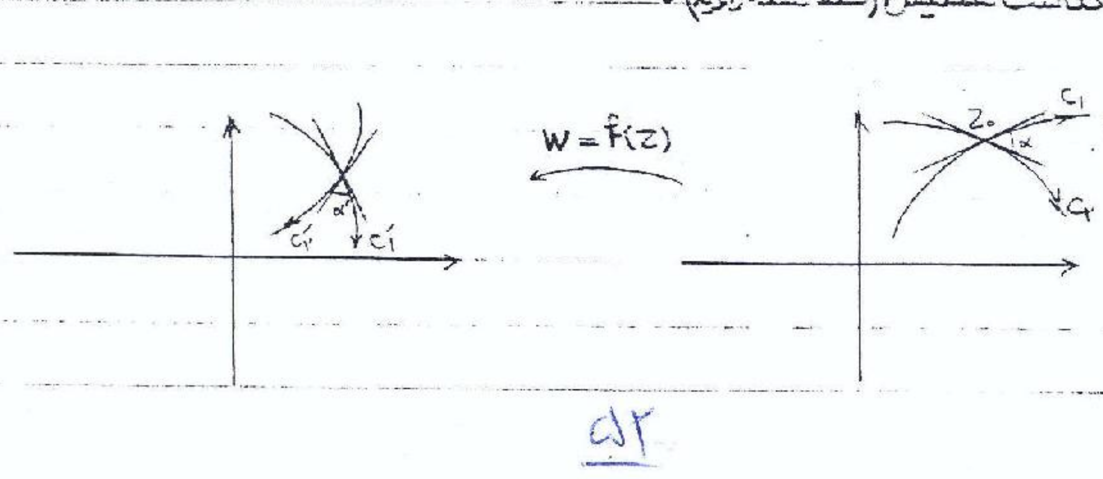
تصویر آن دایره: $1-2u=0 \longrightarrow u=\frac{1}{2}$

نگاشت چه خطوطی خط و چه خطوطی دایره است؟

بحث در مورد قضیه:

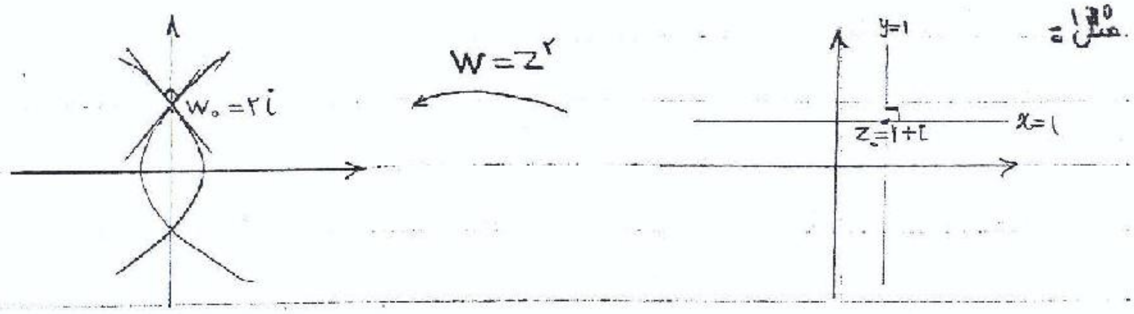
تعریف: نگاشت همدیس (حفظ کنندهٔ زاویه): Conformal mapping

مثال:

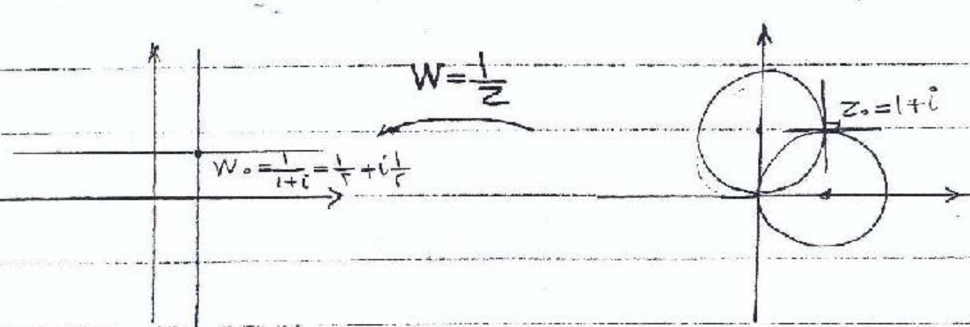


نگاشت $W = f(z)$ را در نقطهٔ z_0 همدیس گویند چنانچه زاویهٔ بین خطوط مار در آن نقطه را حفظ کند.

مثال ۱:



مثال ۲:



قضیه ۱: نگاشتی که با تابع تحلیلی $W = f(z)$ تعریف می‌شود یک نگاشت همدیس است مگر در نقاطی

که در آن نقاط $f'(z)$ برابر صفر است.

مثال: در نگاشت $W = z^2$، این نگاشت تمام نقاط به جز $z = 0$ همدیس است.

مثال ۲: در نگاشت $W = z^4 - z^2$ اولاً این تابع در تمام نقاط صفحهٔ z تحلیلی است. ثانیاً این

تابع در نقاط 0 و $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ مشتق صفر دارد.

$$\frac{dw}{dz} = 4z^3 - 2z \qquad 2z(2z^2 - 1) = \begin{cases} z = 0 \\ z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

نتیجه: نگاشتی که با تابع $W = z^4 - z^2$ تعریف می‌شود در تمام نقاط صفحهٔ z به جز 0 و $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ همدیس است.

دو قضیه:

۱- نگاشتی که با تابع تحلیلی $W=f(z)$ تعریف شده است همدیس است مگر در نقاطی که $f'(z)$ صفر است.

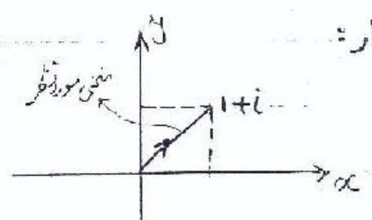
۲- تابع همساز $u(x,y)$ تحت تغییر متغیر ناشی از یک نگاشت همدیس، همساز باقی می‌ماند.

اثبات قضیه ۱:

برای اثبات لازم است که منحنی مورد نظر در صفحهٔ z را بصورت $z(t)$ نمایش دهیم.

روش کار:

$$z(t)=t+it\,,\quad 0<t<1$$



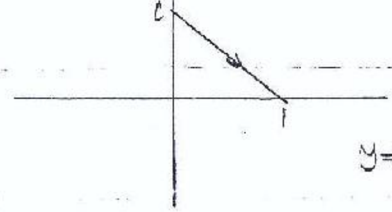
$$z(t)=t^3+it^3 \qquad 0<t<1$$

$$z(t)=\sin t+i\sin t \qquad 0<t<1$$

نکته: $z(t)$ برای یک منحنی منحصر به فرد نیست.

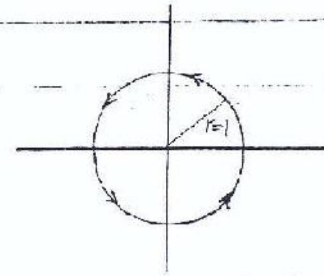
مثال ۱:

$$z(t)=t+i(1-t) \qquad 0<t<1$$

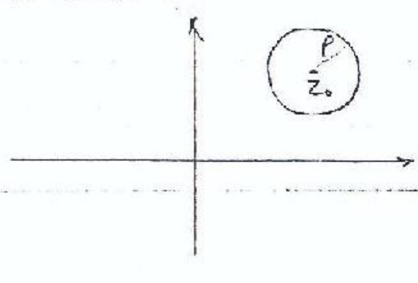


مثال ۲:

$$z(t)=\cos t+i\sin t$$
$$=e^{it}\,,\quad 0<t<2\pi$$



مثال ۳:

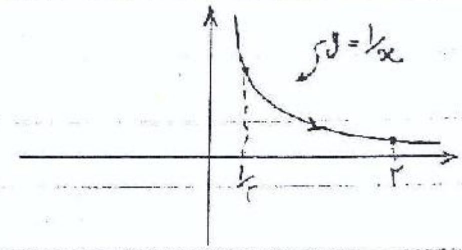


$$z(t)=z_0+\rho e^{it}$$
$$0<t<2\pi$$

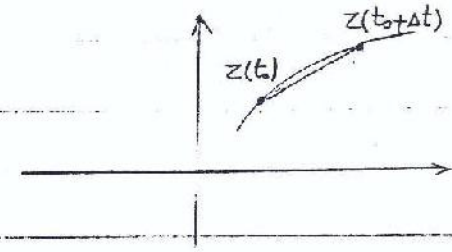
مثال۳:

$$z(t) = t + i\frac{1}{t}$$

$$, \ \frac{1}{2} < t < 2$$



$$\dot{z}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}$$



نکته: $\arg \dot{z}(t_0)$ زاویهٔ بین خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $z(t_0)$ با محور xها است.

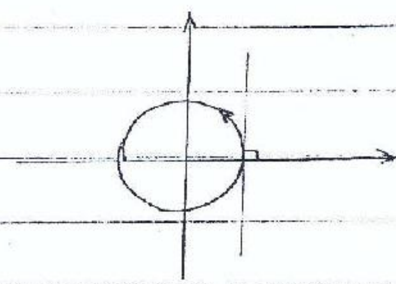
مثال۱:

$$z(t) = e^{it}$$

$$\dot{z}(t) = ie^{it}$$

$$t_0 = 0 \longrightarrow \dot{z}(0) = i$$

$$\arg \dot{z}(0) = \frac{\pi}{2}$$



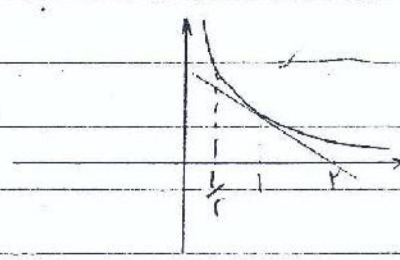
مثال۲:

$$z(t) = t + i\frac{1}{t}$$

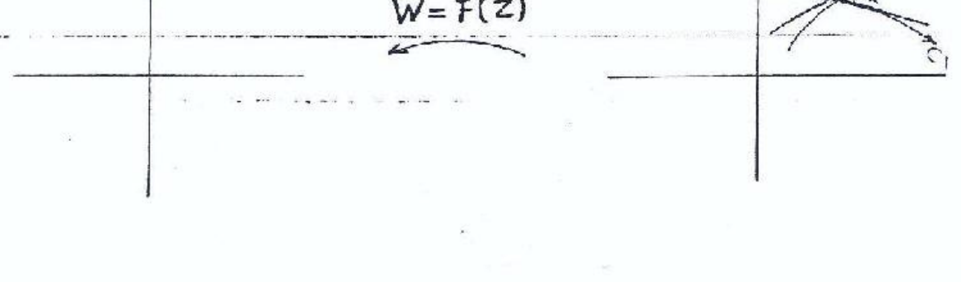
$$\dot{z}(t) = 1 + i\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$t_0 = 1 \longrightarrow \dot{z}(1) = 1 - i$$

$$\arg \dot{z}(1) = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$



یادآوری تعریف نگاشت:



$$W = f(z)$$

$$\dot{W} = \frac{dw}{dt} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$\dot{W} = f'(z) \cdot \dot{z}(t)$$

$$\longrightarrow \arg\left[\dot{w}(t)\right] = \arg\left[f'(z)\right] + \arg\left[\dot{z}(t)\right]$$

و برای یک نقطهٔ خاص

$$\arg\left[\dot{w}(t_0)\right] = \overbrace{\arg\left[f'(z_0)\right]}^{\text{یک مقدار ثابت مشخص}} + \arg\left[\dot{z}(t_0)\right]$$

(۱ـ مشتق وجود داشته باشد
۲ـ $f'(z)$ صفر نباشد)

نمونه مسائل این بخش: نگاشتی با تابع $f(z) = z^2 - z$ تعریف شده است. این نگاشت در نقاطی همدیس است که

۱ـ تابع $f(z)$ در تمام صفحه تحلیلی است. ۲ـ $f'(z)$ در نقطهٔ $z = \frac{1}{2}$ صفر است.

نتیجه اینکه نگاشت در تمام نقاط صفحهٔ z به جز نقطهٔ $z = \frac{1}{2}$ همدیس است.

قضیه ۲: تابع همساز $f(x, y)$ تحت تغییر متغیر ناشی از یک نگاشت همدیس، همساز باقی می‌ماند.

مثال: $f(x, y) = x^2 - y^2$

این تابع همساز است (در معادلهٔ لاپلاس $f_{xx} + f_{yy} = 0$ صدق می‌کند)

$$W = \operatorname{Ln} z$$

$$\longrightarrow u + iv = \operatorname{Ln}[x + iy] \qquad \longrightarrow x + iy = e^{u + iv}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x = e^{u} \cos v \\ y = e^{u} \sin v \end{cases}$$

$$h(u,v) = (e^{u}\cos v)^{2} - (e^{u}\sin v)^{2}$$

می‌توان ثابت کرد که $h(u,v)$ نیز همساز است. $\quad h_{uu} + h_{vv} = 0$

در مثال بالا:

$$h(u,v) = e^{2u}\cos^{2} v - e^{2u}\sin^{2} v$$

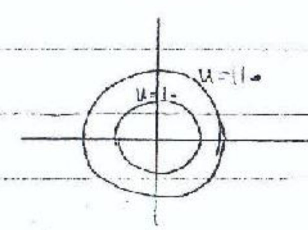
$$= e^{2u}\left[\cos^{2} v - \sin^{2} v\right] = e^{2u}\cos 2v$$

$$\longrightarrow \begin{cases} h_{u} = 2e^{2u}\cos 2v \\ h_{uu} = 4e^{2u}\cos 2v \end{cases} , \quad \begin{cases} h_{v} = -2e^{2u}\sin 2v \\ h_{vv} = -4e^{2u}\cos 2v \end{cases}$$

$$\downarrow$$

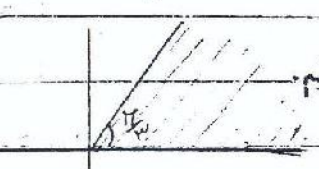
$$h_{uu} + h_{vv} = 0$$

مثال از کاربرد این قضیه:

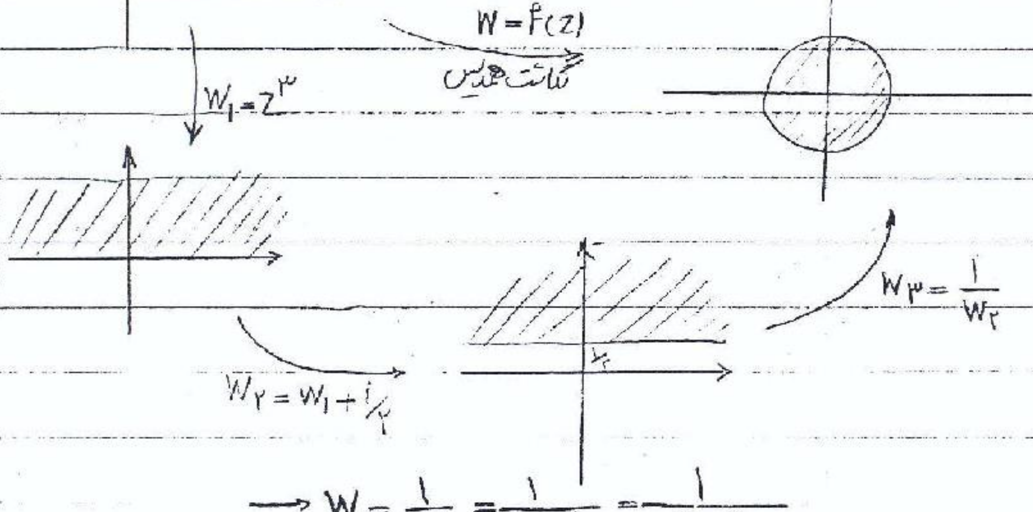


نکته: حل معادله لاپلاس در شرایط مرزی دایره‌ای ساده است.

$$u(r) = \frac{c}{r} + K$$



حال فرض کنید بخواهیم معادله لاپلاس را با شرایط مرزی زیر حل کنیم.



$$\longrightarrow W = \frac{1}{W_2} = \frac{1}{W_1 + i/2} = \frac{1}{z^3 + i/2}$$

نگاشت $w=\frac{az+b}{cz+d}$ (تبدیل کسری = نگاشت موبیوس) :

در این نگاشت باید شرط $ad-bc\neq 0$ برقرار باشد.

حالتهای خاص :

۱- $c=0$ که در این صورت $w=\frac{az+b}{d}=a'z+b'$ که بررسی شد.

۲- $a=d=0$ که در این صورت $w=\frac{b}{cz}=k.\frac{1}{z}$ که بررسی شد.

۳- $b=c=0$, $a=d$ که در این صورت $w=z$ نگاشت همانی است.

نکته:

نگاشت کسری صفحهٔ z توسعه یافته (صفحهٔ z شامل ∞) را به طوریکه به یک در صفحهٔ توسعه یافته

w می نگارد.

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

$$z=\frac{-d}{c}\longrightarrow w=\infty$$

$$z=\frac{-dw+b}{cw-a}\quad ,\quad w=\frac{a}{c}\longrightarrow z=\infty$$

قضیه : هر نگاشت کسری (غیر از حالتهای خاص) دارای دو نقطهٔ ثابت است مگر نگاشت همانی.

تعریف نقطهٔ ثابت : به ازاء $z=z_0$ اگر $w=z_0$ بشود در آن صورت فقط z_0 را نقطهٔ ثابت نامند.

برای پیدا کردن نقطهٔ ثابت در رابطهٔ $w=\frac{az+b}{cz+d}$ ، w را z می گذاریم.

$$z=\frac{az+b}{cz+d}\longrightarrow cz^2-(a-d)z-b=0 \begin{cases} z_1 \\ z_2 \end{cases}$$

مثال: نقاط ثابت تبدیل کسری زیر را پیدا کنید. $W=\dfrac{5z+4}{z+5}$

$$\longrightarrow z=\frac{5z+4}{z+5} \longrightarrow z^2=4 \longrightarrow z=\pm 2$$

مثال ۲: تمام تبدیلهای کسری را پیدا کنید که نقاط ثابت آنها $\pm i$ باشد.

$$\longrightarrow (z-i)(z+i)=0 \longrightarrow z^2+1=0$$

$$\left.\begin{array}{l} z^2+1=0 \\ cz^2-(a-d)z-b=0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} a=d \\ c=-b \end{cases}$$

$$\longrightarrow W=\frac{az+b}{-bz+a} \longrightarrow \frac{z+i}{-iz+1},\ \frac{iz+(1+i)}{-(1+i)z+i},$$

قضیه ۲: یک تبدیل کسری تمام خطوط و دوایر در صفحه z را به تمام خطوط و دوایر در صفحه W می‌نگارد.

برای اثبات قضیه نشان می‌دهیم که یک تبدیل کسری قابل نمایش با تبدیل‌های ساده‌تر به شکل زیر باشد:

$$\longrightarrow W=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\overbrace{\frac{bc-ad}{c}}^{k}\cdot\frac{1}{cz+d}$$

$$=\frac{a}{c}+k\cdot\frac{1}{cz+d}$$

$$W_1=cz \longrightarrow W_2=W_1+d \longrightarrow W_3=\frac{1}{W_2} \longrightarrow W_4=kW_3$$

$$\longrightarrow W=\frac{a}{c}+W_4$$

می‌دانیم که W_1، W_2 خط را به خط نظیر و دایره را به دایره تبدیل می‌کنند. W_3 تمام خطوط و دوایر به تمام خطوط و دوایر منقول می‌کند. W_4 خط را به خط و دایره را به دایره تبدیل می‌کند. در نتیجه W تبدیلی است که

خط را به خط و دایره را به دایره تصویر می‌کند.

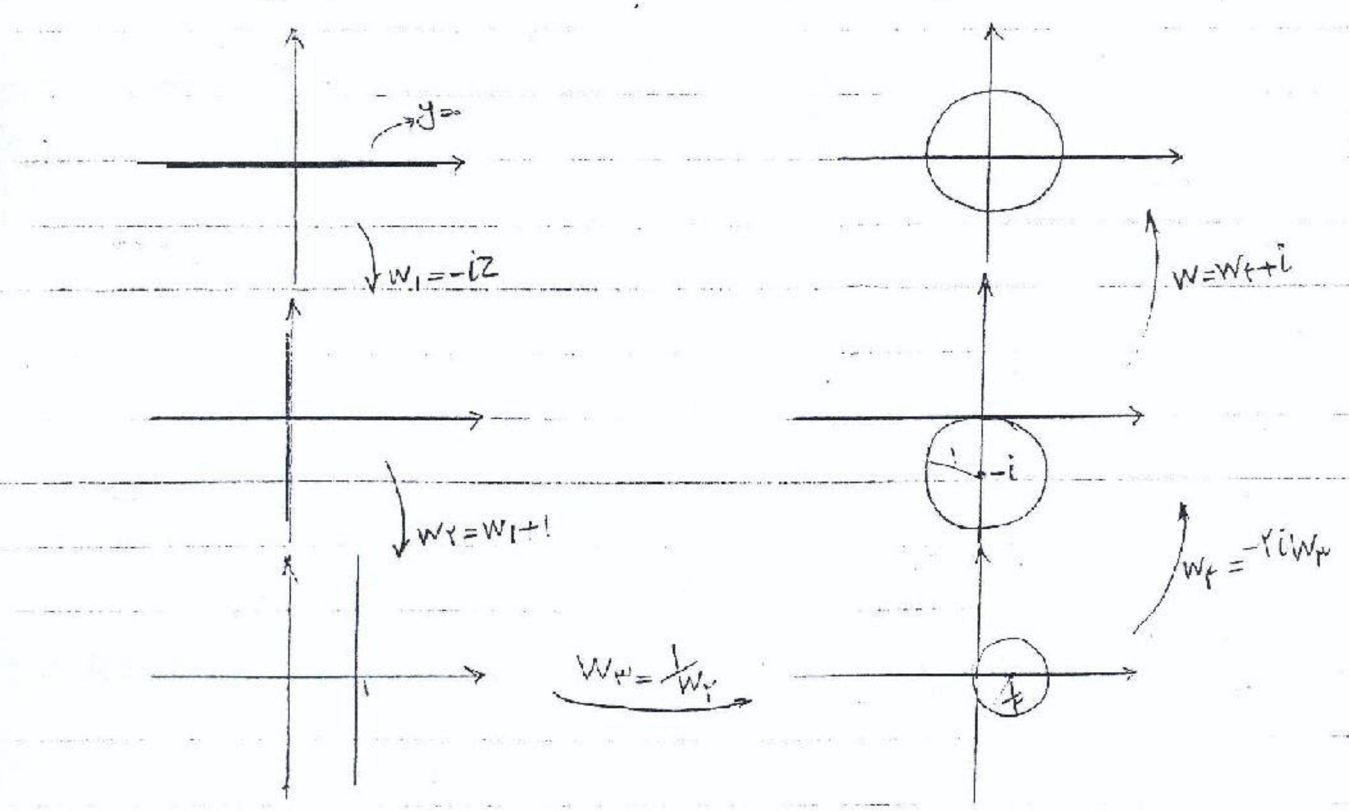
مثال ۴ یک تبدیل کسری به فرم $W=\frac{z-i}{-iz+1}$ تعریف شده است.

۱- این تبدیل را با تبدیلهای ساده نمایش دهید. ۲- با استفاده از تبدیلهای ساده بالا تصویر خط $y=0$ را پیدا کنید. ۳- تصویر خط $y=0$ را به طور مستقیم پیدا کنید.

$\longrightarrow\ c=-i \quad , \quad d=1 \quad , \quad K=\frac{bc-ad}{c}=-2i \quad , \quad \frac{a}{c}=i$

تبدیلهای ساده: $W_1=-iz \quad , \quad W_2=W_1+1$

$W_3=\frac{1}{W_2} \quad , \quad W_4=2i.W_3 \quad , \quad W=W_4+i$



تصویر خط $y=0$ ، $W=\dfrac{z-i}{-iz+1}$ ، $z=x+iy$

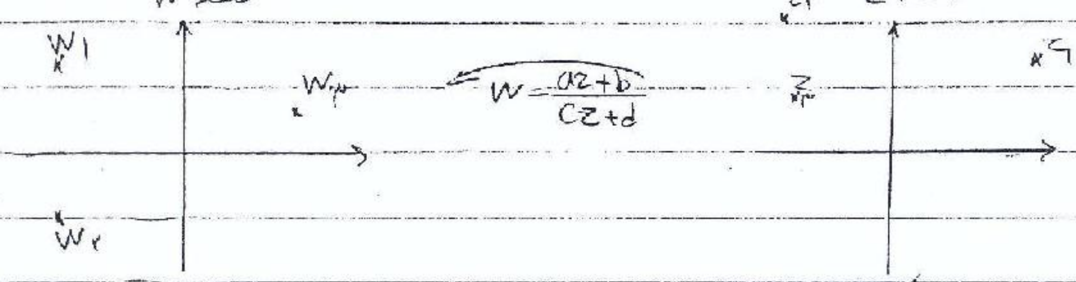
$$\longrightarrow W=\frac{x-i}{-ix+1}=\frac{x-i}{-ix+1}\cdot\frac{ix+1}{ix+1}=\frac{x+x}{1+x^2}+i\frac{x^2-1}{1+x^2}$$

$$\longrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{2x}{1+x^2}\\[2mm] v=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\end{cases}\longrightarrow u^2+v^2=1$$

قضیه ۲: سه نقطه مفروض z_1 ، z_2 ، z_3 با یک و فقط یک تبدیل کسری به سه نقطه

مفروض W_1 ، W_2 ، W_3 با رابطه زیر تصویر می‌شود.

$$\overbrace{\frac{W-W_1}{W-W_3}\cdot\frac{W_2-W_3}{W_2-W_1}}^{F(W)}=\overbrace{\frac{Z-Z_1}{Z-Z_3}\cdot\frac{Z_2-Z_3}{Z_2-Z_1}}^{G(Z)}$$



اثبات: $G(z)$ یک تبدیل کسری است. $F(w)$ نیز یک تبدیل کسری است.

$$W=F^{-1}\left[G(z)\right]$$

عکس تبدیل کسری یک تبدیل کسری است. $\quad Z=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$

تبدیل کسری یک تبدیل کسری نیز یک تبدیل کسری است.

در این تبدیل کسری: $\quad W=F^{-1}\left[G(z)\right]=f(z)$

$$F(w_1)=G(z_1) \quad , \quad F(w_2)=G(z_2) \quad . \quad F(w_3)=G(z_3)$$

تا به اینجا ثابت شد که یک تبدیل کسری وجود دارد که نقطه z_1 را بر روی w_1، z_2 را بر روی w_2، z_3 را بر روی w_3 تصویر کند.

ابتدا فرض می‌کنیم دو تبدیل کسری $f(z)$ و $g(z)$ وجود دارد که نقاط z_1 و z_2 و z_3 را به ترتیب بر روی w_1 و w_2 و w_3 تصویر کنند.

$$f(z)=g(z) \longrightarrow g^{-1}f(z)=z$$

مثال: یک تبدیل کسری پیدا کنید تا نقاط ۰ و ۱ و i را به ترتیب به نقاط ۲ و ۳ و i+2 تصویر کند (بنگارد):

$$z_1=0 ,\ z_2=1 ,\ z_3=i \qquad , \qquad w_1=2 ,\ w_2=3 ,\ w_3=i+2$$

$$\longrightarrow \frac{w-2}{w-(i+2)}\cdot\frac{3-(i+2)}{1}=\frac{z}{z-i}\cdot\frac{1-i}{1}$$

$$\longrightarrow \frac{w-2}{w-(2+i)}=\frac{z}{z-i} \longrightarrow \frac{w-2}{(w-2-i)-(w-2)}=\frac{z}{(z-i)-z}$$

$$\longrightarrow \frac{w-2}{-i}=\frac{z}{-i} \longrightarrow \boxed{w=z+2}$$

مثال:

$$z_1=-1 ,\quad z_2=0 ,\quad z_3=1$$
$$w_1=0 ,\quad w_2=-1 ,\quad w_3=\infty$$

$$\longrightarrow \frac{w}{w-\infty}\cdot\frac{-1-\infty}{-1}=\frac{z+1}{z-1}\cdot\frac{-1}{1}$$

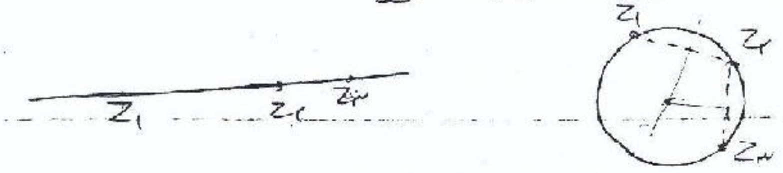
نکته: اگر یکی از نقاط ∞ باشد عبارات شامل آن نقطه از صورت و مخرج ساده می‌شوند.

درمثال بالا:

$$\frac{W-W_1}{W_2-W_1}=\frac{Z-Z_1}{Z-Z_3}\cdot\frac{Z_2-Z_3}{Z_2-Z_1}$$

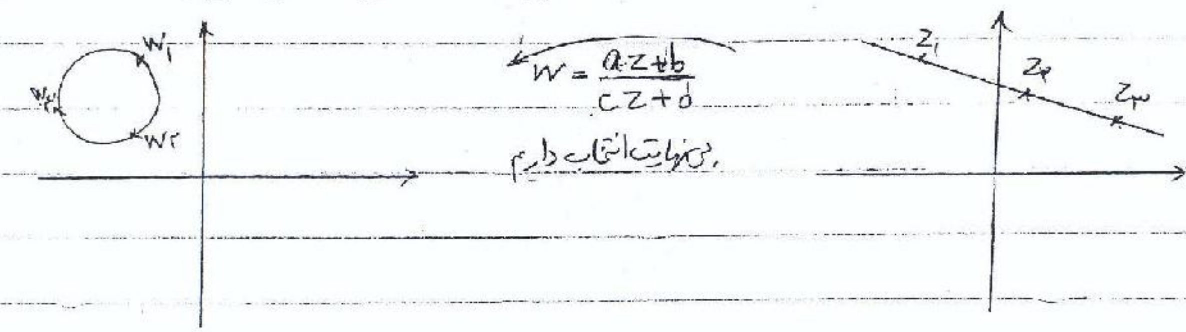
$$\longrightarrow \frac{W}{-1}=\frac{Z+1}{Z-1}\times -1 \longrightarrow W=\frac{Z+1}{Z-1}$$

نکته: از سه نقطه یا یک خط عبور می‌کند و یا یک دایره.



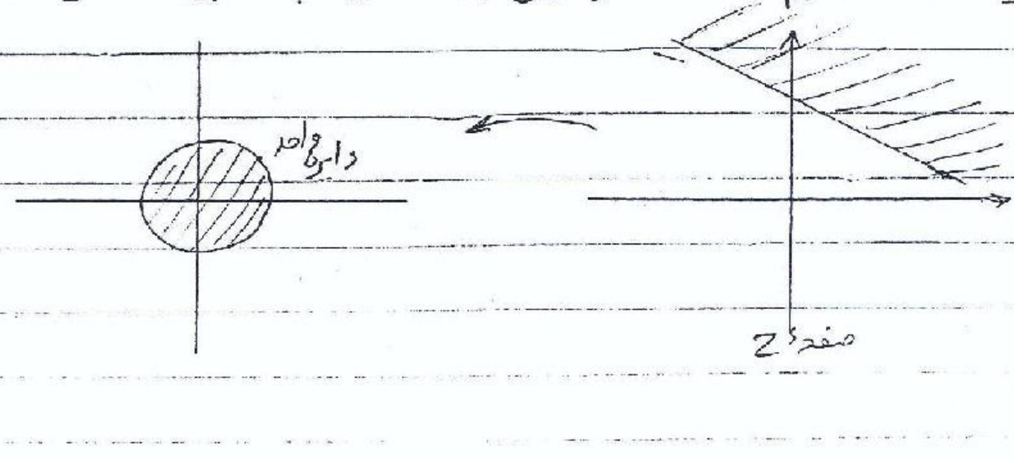
نتیجه (از این نکته و دو قضیهٔ قبلی):

هر خط یا دایره‌ای مورد نظر در صفحهٔ z قابل تصویر شدن به هر خط و یا دایره در صفحهٔ W می‌باشد.

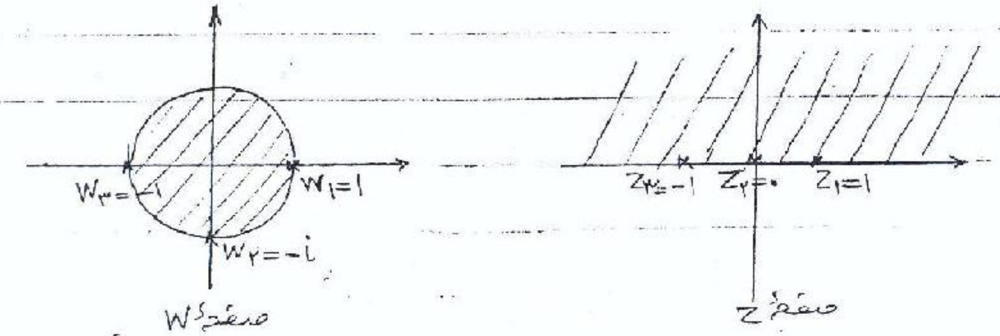


کاربرد: گاهی نیاز داریم معادلهٔ لاپلاسی را حل کنیم که شرایط مرزی آن به طور دلخواه نیست.

در این صورت می‌توانیم با استفاده از نتایج بالا و قضیهٔ جلسه قبل مسئله را ساده‌تر کنیم.

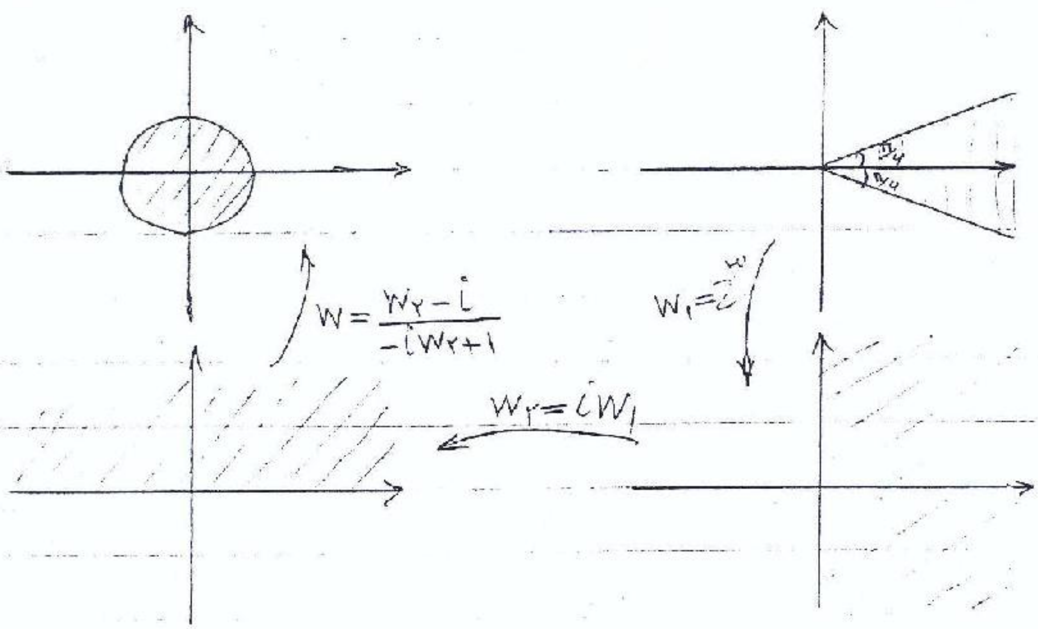


مثال ۱: تابع $w=f(z)$ را طوری تعریف کنید که نیم‌صفحه بالا در صفحه z را بر روی دایره‌ای در صفحه W تصویر کند.



$$W=\frac{Z-i}{-iZ+1}$$

مثال ۲: تابع $w=f(z)$ را طوری تعریف کنید که ناحیه شکل زیر در صفحه z را بر روی دایره‌ای در صفحه W تصویر کند.



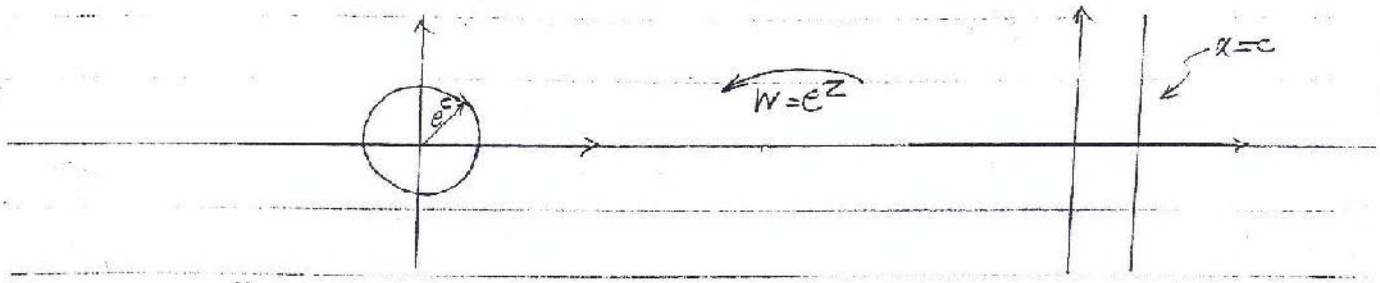
$$\longrightarrow \; W=\frac{iZ^2-i}{Z^2+1}=i\,\frac{Z^2-1}{Z^2+1}$$

نگاشت $W=e^z$:

$$W=e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}$$

$$\left.\begin{array}{r} W=e^z=e^x\cdot e^{iy} \\ W=r'e^{i\theta'} \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} r'=e^x \\ \theta'=y \end{cases}$$

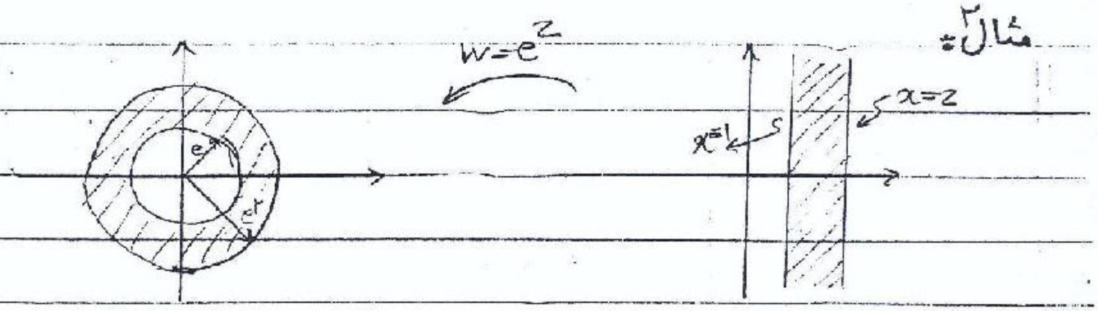
$$W=u(x,y)+iv(x,y)=\underbrace{e^x\cos y}_{u}+i\underbrace{e^x\sin y}_{v}$$



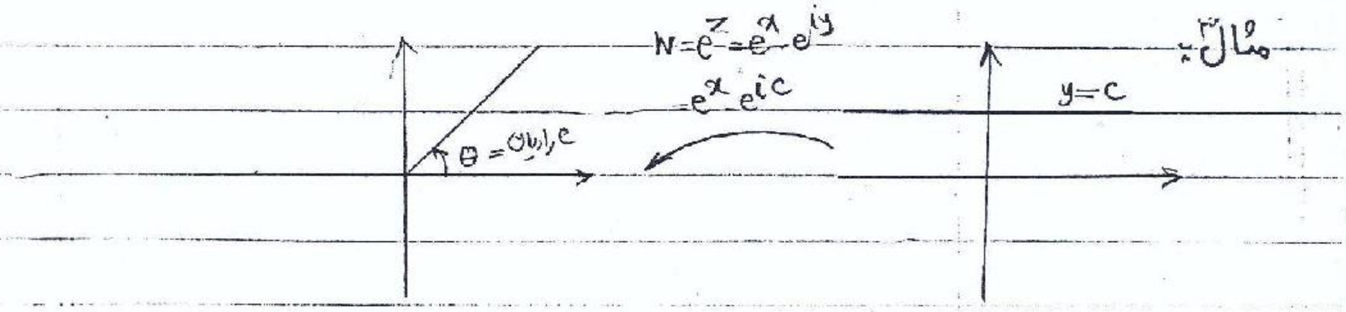
$$\begin{cases} u=e^x\cos y \\ v=e^x\sin y \\ x=c \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u=e^c\cos y \\ v=e^c\sin y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sin y=\dfrac{u}{e^c} \\ \cos y=\dfrac{v}{e^c} \end{cases}$$

$$\longrightarrow u^2+v^2=(e^c)^2$$

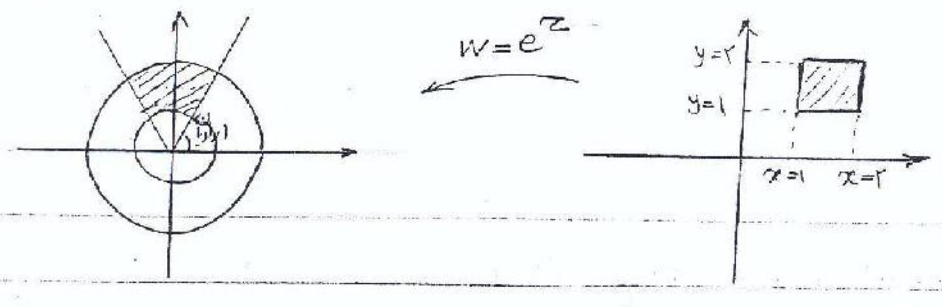
مثال۲:



مثال۳:



مثال ۴ :

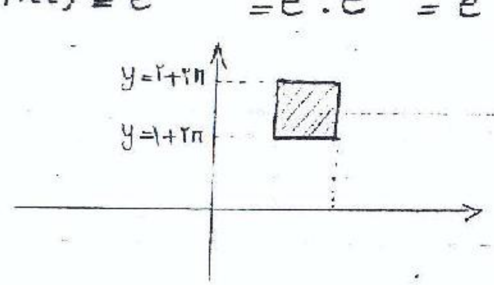


نکته: تابع e^z با دورهٔ تناوب $2\pi i$ متناوب است.

$$W=f(z)=e^z$$

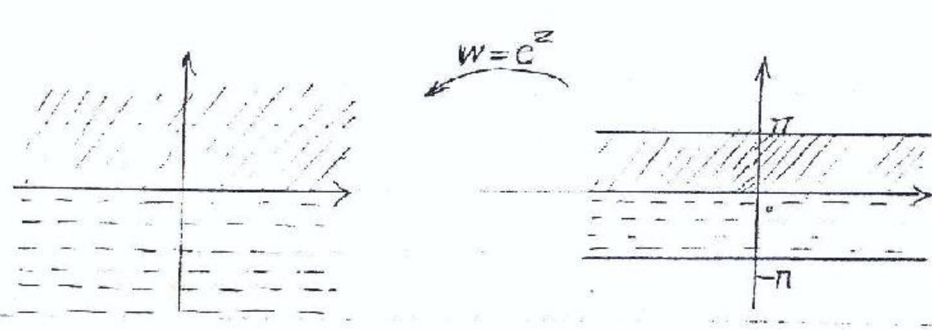
$$f(z+2\pi i)=e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{2\pi i}=e^z\big[\underbrace{\cos 2\pi}_{1}+i\overbrace{\sin 2\pi}^{0}\big]=e^z=f(z)$$

به عبارت دیگر در مثال قبل

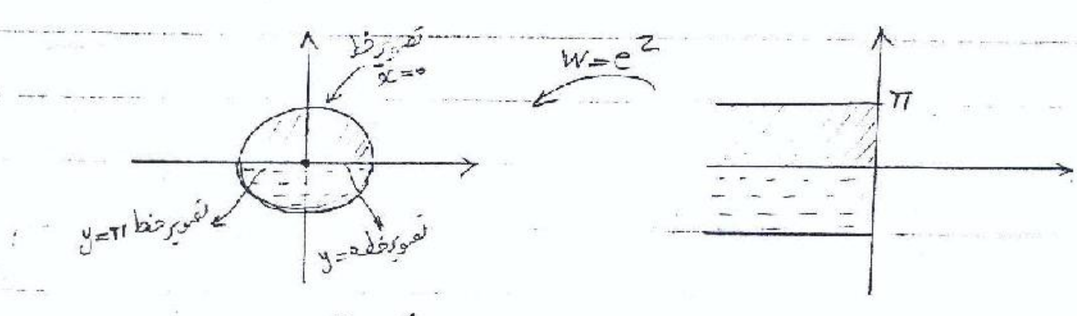


تصویر همان تصویر قبلی است.

مثال ۵:



مثال



اگر روند طی شده در مثالهای قبل را از صفحهٔ W به صفحهٔ z دنبال کنیم نگاشت $W=Lnz$ را خواهیم داشت.

نگاشت توابع مثلثاتی:

$W = \sin z \qquad W = \sinh z$

$W = \cos z \qquad W = \cosh z$

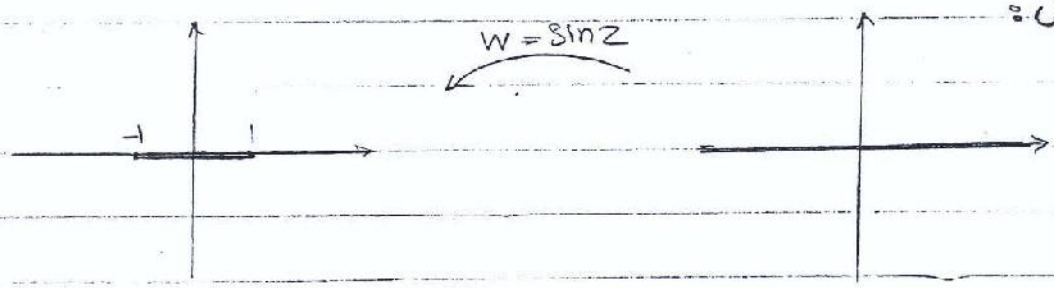
ابتدا به نگاشت $W=\sin z$ می‌پردازیم:

$$W = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

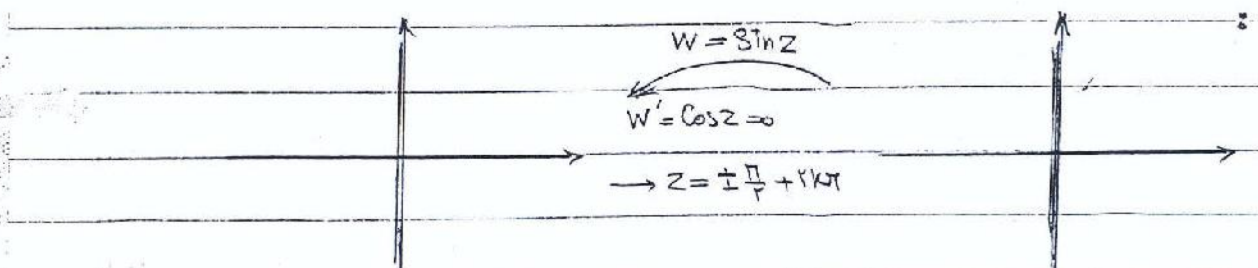
روش کلی محاسبهٔ تصویر مثل تمام نگاشتهای قبلی به فرم زیر است:

$$\begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \longrightarrow x, y \text{ را حذف می‌کنیم} \\ \text{رابطهٔ منحنی مورد نظر} \end{cases}$$

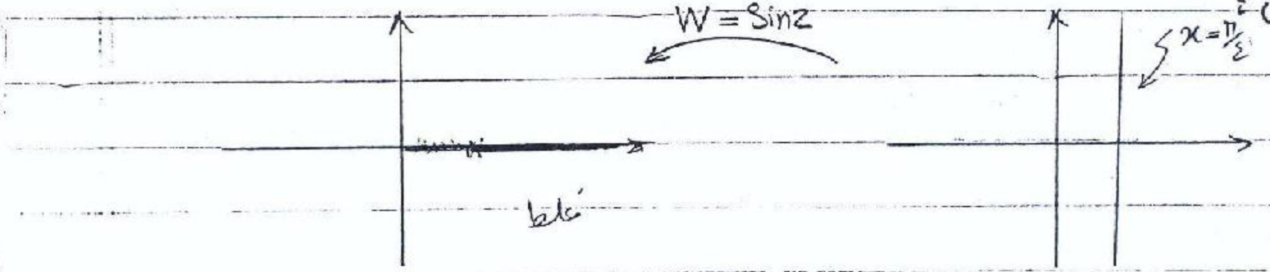
مثال ۱:



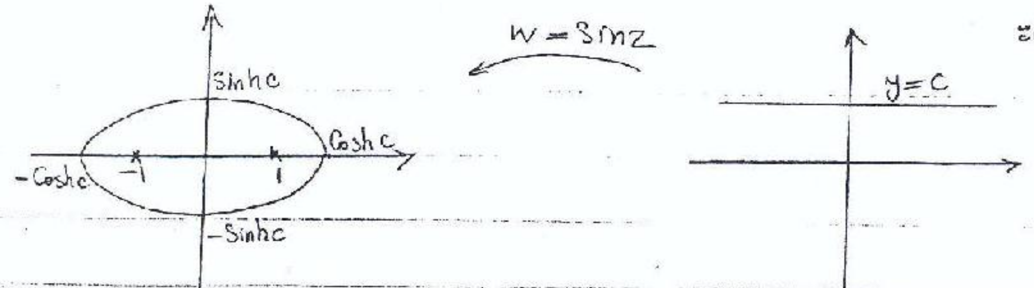
مثال ۲:



مثال ۳:



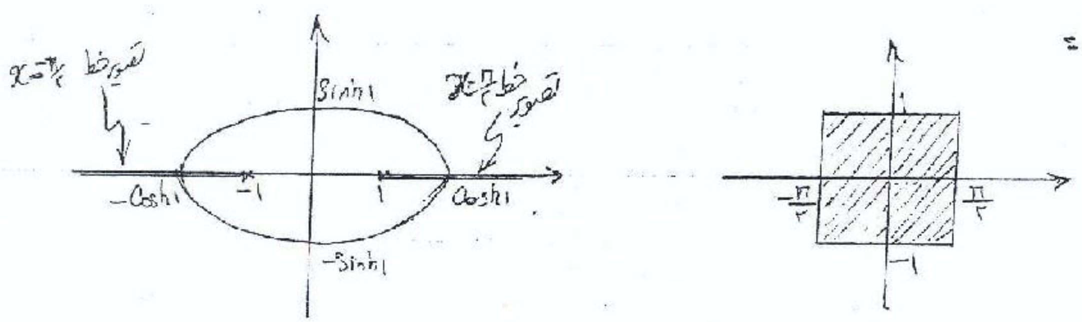
مثال:

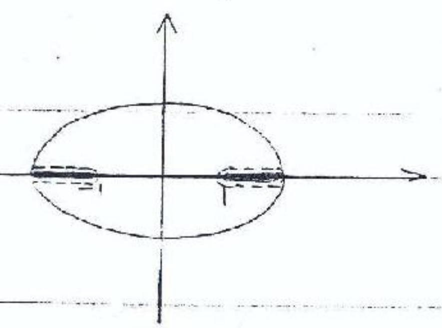


$$\begin{cases} u=\sin x\cosh c\\ v=\cos x \sinh c\end{cases} \longleftarrow \begin{cases} u=\sin x\cosh y\\ v=\cos x\sinh y\\ y=c\end{cases}$$

$$\left(\frac{u}{\cosh c}\right)^2+\left(\frac{v}{\sinh c}\right)^2=1$$

مثال ۵:





اگر ناحیه تعریف شده در صفحه Z شامل نواحی زیر باشد تصویر در W به صورت مقابل است.

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$
$$-1<y<1$$

برای محاسبه نگاشت $W=\cos Z=\sin\left(Z+\frac{\pi}{2}\right)$

۱- ابتدا ناحیه مورد نظر را به اندازه $+\frac{\pi}{2}$ انتقال می‌دهیم. $W_1=Z+\frac{\pi}{2}$

۲- $W=\sin(W_1)$

برای محاسبهٔ نگاشت $W = \cosh z$

$$\cosh(z) = \cos(iz) = \sin(iz + \tfrac{\pi}{2})$$

۱ـ تصویر را به اندازهٔ $+90^\circ$ می‌چرخانیم. $(W_1 = iz)$

۲ـ تصویر در W_1 را به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ انتقال می‌دهیم $(W_2 = W_1 + \frac{\pi}{2})$

۳ـ $W = \sin(W_2)$

برای محاسبهٔ نگاشت $W = \sinh z$

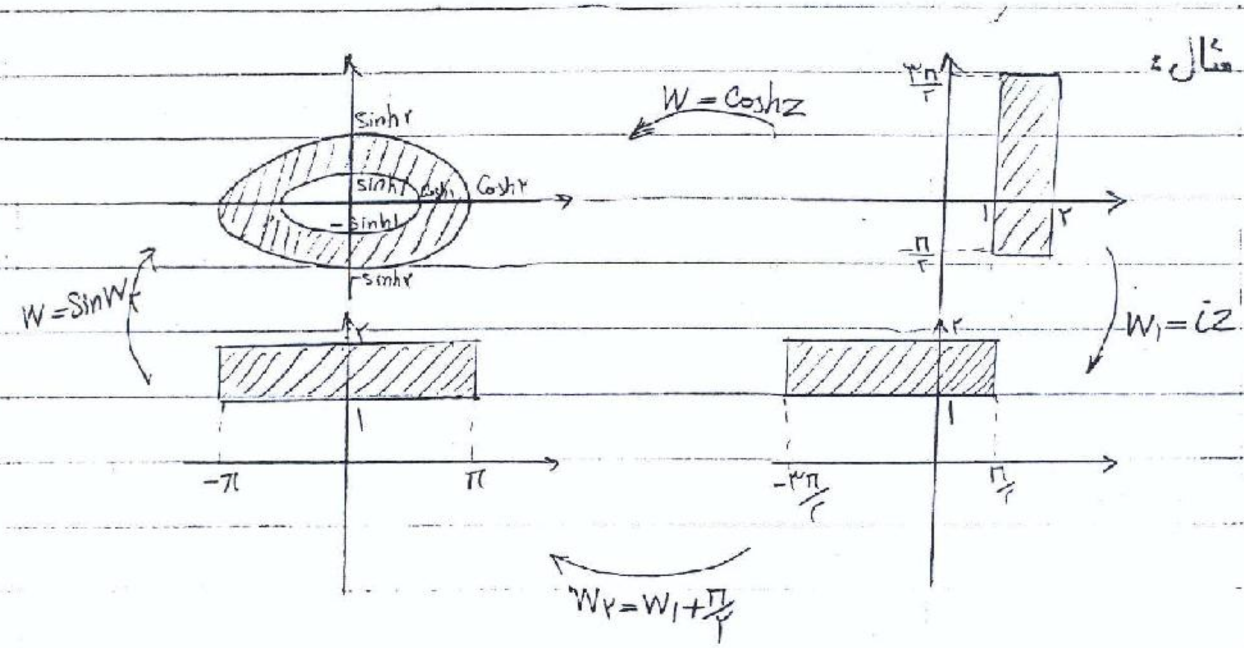
$$\sinh(z) = -i\sin(iz)$$

۱ـ تصویر را به اندازهٔ 90° می‌چرخانیم $(W_1 = iz)$

۲ـ $W_2 = \sin(W_1)$

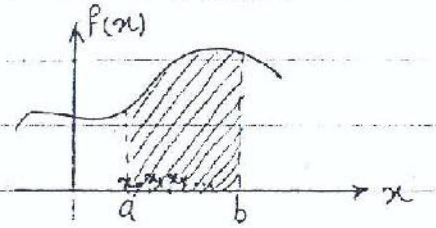
۳ـ تصویر را به اندازهٔ -90° می‌چرخانیم $W_3 = -iW_2$

مثال:



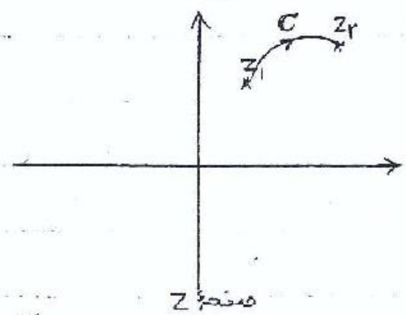
انتگرال توابع مختلط:

یادآوری انتگرال توابع حقیقی:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x_i)\,\Delta x$$

در اعداد مختلط به جای محور x صفحهٔ z را داریم: $\quad W = f(z)$

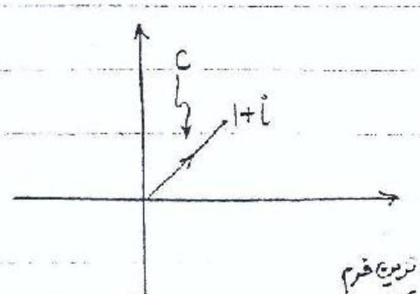


در حالت کلی انتگرال تابع $f(z)$ از نقطهٔ z_1 تا نقطهٔ z_2 به مسیر انتگرال‌گیری بستگی دارد. در نتیجه انتگرال توابع مختلط روی یک منحنی خاص (c) تعریف می‌شود.

$$\int_c f(z)\,dz$$

قبل از ادامه بحث این نکته را یادآوری می‌کنیم که هر منحنی در صفحهٔ z به صورت $z(t)$ قابل نمایش است.

مثال:

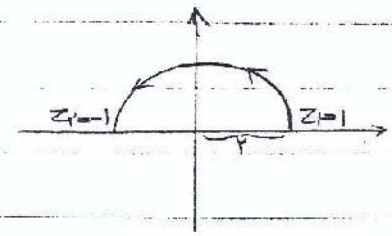


$Z(t) = t + it \quad , \quad 0 < t < 1$ ← ساده‌ترین فرم $\quad$ یا $\quad Z(t) = \sin t + i \sin t \quad , \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$

$Z(t) = t^3 + it^3 \quad , \quad 0 < t < 1$

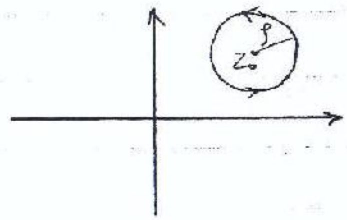
برای پاره‌خط روی $y=ax+b$ فرم $z(t)=t+i[at+b]$ بهترین است.

مثال ۲:



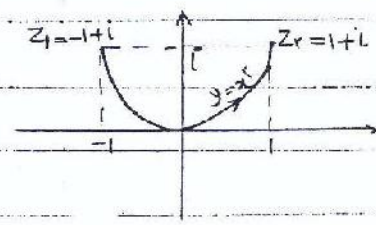
$$z(t)=2\cos t+2i\sin t$$
$$=2e^{it}\quad , \quad 0<t<\pi$$

مثال ۳: دایره‌ای به شعاع ρ و مرکز z_0 :



$$z(t)=z_0+\rho e^{it}\quad , \quad 0<t<2\pi$$

مثال ۴:



$$z(t)=t+it^2$$
$$, -1<t<1$$

مثال ۵: منحنی پاره‌خط واصل : $z_1=1+i$, $z_2=2-4i$.

نکته: اگر بخواهیم پاره‌خط واصل بین $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ را محاسبه کنیم

می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم : $z(t)=x_1+iy_1+\left[(x_2-x_1)+i(y_2-y_1)\right]t$
$, 0<t<1$

که در مثال ۵ : $z(t)=1+i+[1-5i]t=(1+t)+i(1-5t)\quad , 0<t<1$

قضیه: $\int_C f(z)\,dz=\int_a^b f\left[z(t)\right]\dot{z}(t)\,dt\quad , \quad C: z(t)\quad a<t<b$

مروری بر اثبات:

$$\int_C f(z)dz=\lim_{\Delta z\to 0}\sum f(z)\Delta z$$

$$W = f(z) = u + iv \qquad , \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

$$\longrightarrow \int_c f(z)\,dz = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum [u+iv][\Delta x + i\Delta y]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum u\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \sum iv\Delta x$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \sum iu\Delta y - \lim_{\Delta y \to 0} \sum v\Delta y$$

$$= \int u\,dx + i\int v\,dx + i\int u\,dy - \int v\,dy$$

$$= \int_a^b u.\dot{x}\,dt + i\int_a^b v\dot{x}\,dt + i\int_a^b u\dot{y}\,dt - \int_a^b v\dot{y}\,dt$$

$$= \int_a^b (u+iv)(\dot{x}+i\dot{y})\,dt = \int_a^b f[z(t)]\,\dot{z}(t)\,dt$$

مثال: از تابع $f(z)=\mathrm{Re}\,z$ روی پاره‌خط واصل بین $z_1=0$، $z_2=1+i$ انتگرال بگیرید.

$$z(t) = t + it \quad , \quad \overset{a}{0} < t < \overset{b}{1} \longrightarrow \dot{z}(t) = 1+i$$

$$f[z(t)] = \mathrm{Re}[z(t)] = t$$

$$\longrightarrow \int_c f(z)\,dz = \int_0^1 t\cdot(1+i)\,dt = (1+i)\int_0^1 t\,dt = (1+i)\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1+i}{2}$$

مثال: از تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ روی دایرهٔ واحد (در جهت عکس حرکت عقربهٔ ساعت) انتگرال بگیرید.

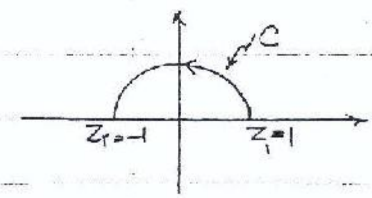
$$\longrightarrow z(t) = e^{it} \quad , \quad \overset{a}{0} < t < \overset{b}{2\pi} \longrightarrow \dot{z}(t) = ie^{it}$$

$$f[z(t)] = \frac{1}{e^{it}} = e^{-it}$$

$$\longrightarrow \int_c f(z)dz = \int_0^{۲\pi} e^{-it}\cdot ie^{it}dt = \int_0^{۲\pi} i\,dt = ۲\pi i$$

مثال۳:

$$f(z) = ۳z - \frac{۲}{z}$$



$$z(t) = e^{it} \quad , \quad 0<t<\pi \longrightarrow \dot{z}(t) = ie^{it}$$

$$f[z(t)] = ۳e^{it} - \frac{۲}{e^{it}} = ۳e^{it} - ۲e^{-it}$$

$$\longrightarrow \int_c f(z)dz = \int_0^{\pi} (۳e^{it} - ۲e^{-it})(ie^{it})dt = \int_0^{\pi} ۳ie^{۲it}dt - \int_0^{\pi} ۲i\,dt$$

$$= ۳i\int_0^{\pi} e^{۲it}dt - ۲i\int_0^{\pi} dt = \frac{۳i}{۲i} e^{۲it}\Big|_0^{\pi} - ۲it\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{۳}{۲}\left[\cancel{e^{۲\pi i} - e^{0}}\right] - ۲\pi i = -۲\pi i$$

مثال: از تابع $f(z) = (z-z_0)^m$ روی دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع ρ و روی تمام دایره در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال بگیرید. $m \in \mathbb{Z}$

$$\longrightarrow z(t) = z_0 + \rho e^{it}$$
$$0<t<۲\pi$$
$$\longrightarrow \dot{z}(t) = i\rho e^{it}$$

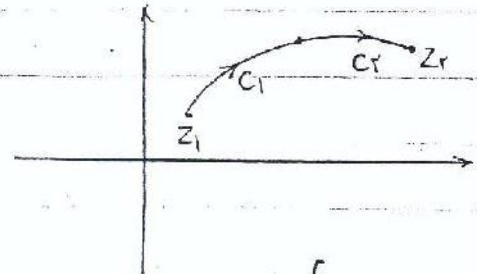
$$f[z(t)] = \left[z_0 + \rho e^{it} - z_0\right]^m = \rho^m \cdot e^{imt}$$

$$\longrightarrow \int_c f(z)dz = \int_0^{۲\pi} \rho^m e^{imt}\, i\rho e^{it}dt = i\rho^{m+1}\int_0^{۲\pi} e^{i(m+1)t}dt$$

$$= i\rho^{m+1} \times \begin{cases} \frac{1}{i(m+1)} e^{i(m+1)t}\Big|_0^{۲\pi} = \frac{1}{i(m+1)}\left[e^{i(m+1)۲\pi} - e^{0}\right] = 0 & m \neq -1 \\ ۲\pi \qquad = ۲\pi i & m = 1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \int_C (z-z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & m=-1 \\ 0 & m\neq -1 \end{cases}$$

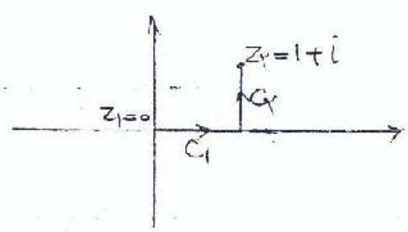
خواص انتگرال مختلط:



۱ـ اگر منحنی C به دو منحنی (یا چند منحنی) C_1 و C_2 تقسیم شود در آن صورت:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

مثال: از تابع $f(z) = Re[z]$ روی منحنی زیر انتگرال بگیرید.



$C_1: \ z_1(t)=t \quad , 0<t<1$

$C_2: \ z_2(t)=1+it \quad , 0<t<1$

$\dot{z}_1(t)=1 \quad , \quad \dot{z}_2(t)=i$

$f[z_1(t)]=t \quad , \quad f[z_2(t)]=1$

$$\longrightarrow \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \int_0^1 (t)(1)dt + \int_0^1 (1)(i)dt = \frac{1}{2}+i$$

نکته: اگر نتیجه این مثال را با نتیجه مثال ۱ مقایسه کنیم به این نتیجه می‌رسیم که در حالت کلی انتگرال از z_1 تا z_2 به مسیر انتگرال‌گیری بستگی دارد.

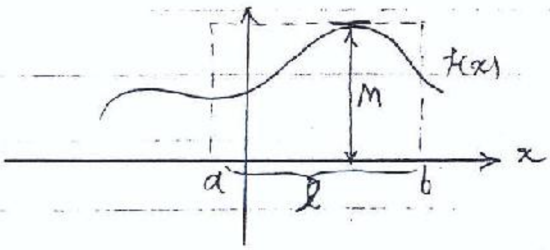
۲ـ اگر مسیر انتگرال‌گیری برعکس شود مقدار انتگرال منفی مقدار اولیه خواهد بود.

۳ـ اگر $f(z)=K_1 f_1(z)+K_2 f_2(z)$ آنگاه: $\int_C f(z)dz = K_1\int_C f_1(z)dz + K_2\int_C f_2(z)dz$

۴- $\left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant M\cdot l$ که در آن:

M = حداکثر مقدار $|f(z)|$ ، l = طول منحنی C است.

یادآوری این رابطه برای انتگرال‌های حقیقی:



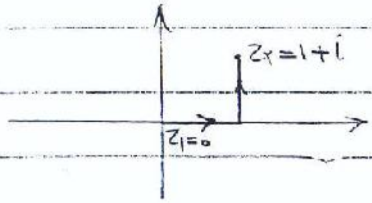
اثبات:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\lim_{\Delta z\to 0}\sum f(z)\Delta z\right| \leqslant \lim_{\Delta z\to 0}\sum |f(z)||\Delta z|$$

$$\leqslant \lim_{\Delta z\to 0}\sum M\,|\Delta z| = M\underbrace{\lim_{\Delta z\to 0}\sum|\Delta z|}_{l} = M\cdot l$$

مثال: یک حد بالا برای $\left|\int_C f(z)\,dz\right|$ وقتی $f(z)=\mathrm{Re}\,z$ ، C منحنی زیر است بدست آورید.

(بدون محاسبه انتگرال)



$l=2$

$M=1$

$$\longrightarrow \left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant 2$$