

انگزال توابع مختلط روی منحنی C (ادامه بحث) :

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] \dot{z}(t) dt$$

$$C: z(t), \quad a < t < b$$

قضیه انگزال کوشی: اگر D یک حوزه همبند ساده و کراندار باشد که تابع $f(z)$ در آن حوزه تحلیلی است.

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad \text{و } C \text{ یک منحنی بسته درون } D \text{ باشد:}$$

$$\int_C z^2 dz \quad \text{مثال: در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت} \quad C: |z|=1$$

باتوجه به اینکه تابع z^2 در تمام صفحه z از جمله نقاط درون منحنی C تحلیلی است پس طبق قضیه

$$\int_C z^2 dz = 0 \quad \text{انگزال کوشی}$$

مثالهای دیگر: (در مثالهای زیر فرض کنید که $C: |z|=1$)

$$\int_C \cos z dz = 0 \quad , \quad \int_C (z^2 + z^1) dz = 0$$

$$\int_C [e^{z^2} \cos z + 5z^3] dz = 0$$

نکته: شرط تحلیلی بودن در نقاط درون منحنی C برای استفاده از قضیه انگزال کوشی یک شرط کافی است.

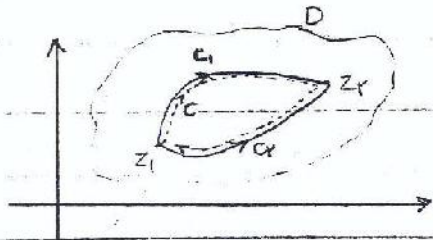
$$\int_C \frac{1}{z^2} dz = 0 \quad \text{مثال: در جهت عکس عقربه‌های ساعت} \quad C: |z|=1$$

تابع $f(z) = \frac{1}{z^2}$ در نقطه $z=0$ تحلیلی نیست.

$$\int_C (z-z_0)^m dz = 0 \quad , \quad m \neq -1$$

دو نتیجه از قضیه انگرال کوشی:

۱- اگر تابع $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد و بخواهیم از z_1 تا z_2 (درون حوزه D) انگرال گیری کنیم



مقدار این انگرال بستگی به مسیر ندارد.

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz = 0$$

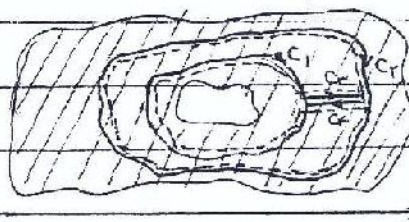
$$\rightarrow \int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

اصل تغییر شکل مسیر
اصل استقلال از مسیر

۲- اگر تابع $f(z)$ در حوزه D هم بند (ساده یا چندگانه) تحلیلی باشد و C_1 و C_2 دو مستقیم بسته به طوری که $f(z)$ در تمام نقاط این دو مستقیم تحلیلی نباشد

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

درون D (داخل همگیر) باشند در آن صورت



$$\int_C f(z) dz = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_1} f(z) dz = 0$$

$$\rightarrow \int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

چند مثال دیگر - (C: |z|=1)

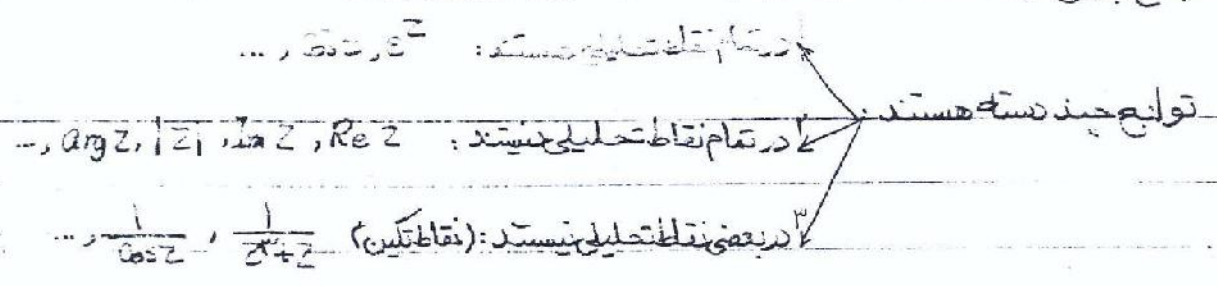
$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

$$\int_C \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i$$

$$\int_C \frac{\sin z}{z} dz = 0$$

$$\int_C e^z \cos z dz = 0$$

جمع بندی :



اگر تابع از نوع اول باشد و بخواهیم از z_1 تا z_2 انتگرال بگیریم، انتگرال مثل انتگرال حقیقی

$$\int_0^i \cos z dz = \frac{1}{i} \sin iz \Big|_0^i = \frac{1}{i} [\sin 2i]$$

برخوردی کنیم:

اگر تابع از نوع اول باشد و بخواهیم روی یک مسیر بسته انتگرال بگیریم، طبق قضیه انتگرال کوشی:

$$\int_C f(z) dz = 0$$

اگر تابع از نوع دوم باشد راهی جز استفاده از فرمول اصلی نداریم:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] \dot{z}(t) dt$$

اگر تابع از نوع سوم باشد و بخواهیم روی یک مسیر بسته انتگرال بگیریم،

حالاتی که تا بحال بررسی کردیم:

$\int_c \frac{z-1}{z^2+2} dz = ?$, $C: |z|=1/r$

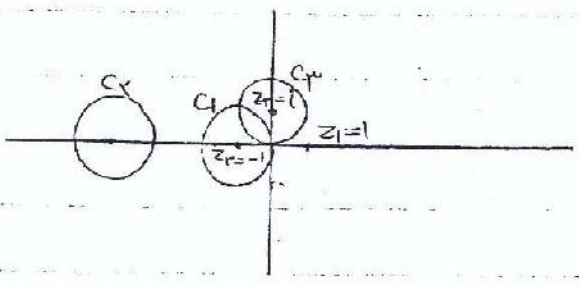
مثال 2

$\rightarrow \int_c \frac{z-1}{z^2+2} dz = \int_c \frac{(z-1)}{z} dz = 2\pi i \cdot \frac{z-1}{z+1} \Big|_{z=1} = -2\pi i$

$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, الف: $C_1: |z+1|=1$

ب: $C_2: |z+2|=1$ ج: $|z-1|=1$

نقاط تکین (نقطی که تابع $f(z)$ در آن تحلیلی نیست) را ابتدا محاسبه می کنیم.



$\int_a \frac{1}{z^2-1} dz$ حل الف:

راه اول: (راه تجزیه کسر و نتیجه کلی برابر $\frac{1}{z-2}$)

$\frac{1}{z^2-1} = \frac{A_1}{z-i} + \frac{A_2}{z+i} + \frac{A_3}{z-2} + \frac{A_4}{z-1}$

راه دوم: (استفاده از قضیه بقا)

$\int_a \frac{1}{z^2-1} dz = \int_a \frac{f(z)}{\frac{(z-1)(z+i)(z-i)}{z-2}} dz = 2\pi i \frac{1}{(-1-i)(-1-i)(-1-i)} = \frac{-\pi i}{1}$

$\int_{C_2} \frac{1}{z^2-1} dz = 0$ جواب:

$\int_{C_3} \frac{1}{z^2-1} dz = \int \frac{1}{\frac{(z-1)(z+i)(z-i)}{z-2}} dz = 2\pi i \frac{1}{(i-1)(i+1)(i+i)} = \frac{-\pi}{1}$ حل ج

۱. نقاط تکین را دور نمی‌زنند که: $\int_C f(z) dz = 0$

۲. یکی از نقاط تکین از مرتبه ۱ را دور می‌زنند: $\int_C \frac{g(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i g(z_0)$

حالتی که تابع را بررسی نکرده‌ایم:

۱- چند نقطه تکین را دور نزنند. ۲- نقطه تکین از مرتب بالاتر داشته باشیم.

قضیه مانده‌ها = (Residuals)

اگر یک منحنی بسته باشد که تابع $f(z)$ در تمام نقاط درون این مسیر به جز نقاط z_1, z_2, \dots, z_n

تحلیلی باشد در آن صورت: $\int_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^n \text{Res } f(z_i)$

الف: اگر z تکراری نباشد: $\text{Res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z)$

ب: اگر z تکراری باشد (الزمره m): $\text{Res } f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z)$

مثال: $\int_C \frac{15z+9}{z^2-4z} dz$, $C: |z-2|=4$

$$z^2-4z=0 \rightarrow z(z-4)=0$$

$$\rightarrow \int_C \frac{15z+9}{z^2-4z} dz = 2\pi i \left[\text{Res } f(z)_{z=0} + \text{Res } f(z)_{z=4} \right]$$

$$\text{Res } f(z)_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{15z+9}{z-4} = -\frac{9}{4}$$

$$\text{Res } f(z)_{z=4} = \lim_{z \rightarrow 4} \frac{15z+9}{z(z+4)} = \frac{54}{16} = \frac{27}{8}$$

$$\rightarrow \int_C \frac{15z+9}{z^2-9z} dz = 2\pi i (-1+3) = 4\pi i$$

بحث روی انتگرال یک تابع کسری روی یک منحنی بسته بود.

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \quad \text{دیدیم که:}$$

۱- z_k نقاط تکلیف روی مسیر بسته است.

۲- این انتگرال در جهت عکس عقربه‌های ساعت تعریف شده است.

$$\operatorname{Res}_{z=z_i} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_i} (z-z_i) f(z) \quad \text{اگر از مرتبه اول باشد:}$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_i} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_i)^m f(z) \quad \text{اگر از مرتبه } m \text{ باشد:}$$

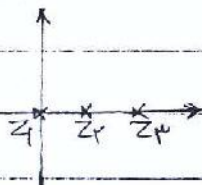
چند مثال:

مثال: از تابع $\frac{z+1}{z(z-1)(z-2)}$ روی $C: |z-2| = \frac{1}{2}$ در جهت عکس عقربه‌های ساعت

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 1$$

$$z_3 = 2$$



انتگرال بگیرد.

$$\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z+1}{z(z-1)} = \frac{3}{2}$$

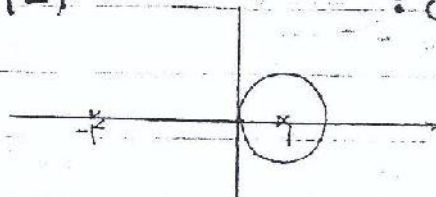
$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{3}{2}\right) = 3\pi i$$

نکته: تعداد مانده (وقتی که ریشه از مرتبه ۱ باشد) از رابطه زیر نیز قابل محاسبه است:

$$f(z) = \frac{q(z)}{p(z)}, \quad \text{Res } f(z) = \frac{q(z)}{p'(z)} \Big|_{z=z_i}$$

$$\rightarrow f(z) = \frac{z+1}{z^2 - 4z + 4}, \quad \text{Res } f(z) = \frac{z+1}{2z-4} \Big|_{z=2} = \frac{3}{2}$$

$$f(z) = \frac{yz}{(z+\gamma)(z-1)^\gamma}, \quad C: |z-1| = 1 \quad \text{: مثال}$$

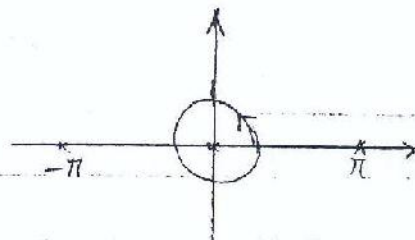


$$\rightarrow \text{Res } f(z) = \frac{1}{(\gamma-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{yz}{z+\gamma} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\gamma(z+\gamma) - (yz)}{(z+\gamma)^\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma^\gamma}$$

$$\rightarrow \int_C f(z) dz = 2\pi i \frac{\gamma}{\gamma^\gamma} = \frac{2\pi i}{\gamma^\gamma}$$

$$\int_C \cot g z dz = ? \quad C: |z|=1 \quad \text{: مثال}$$

$$\rightarrow \int_C \frac{\cos z}{\sin z} dz \rightarrow \sin z = 0 \rightarrow z = \pm k\pi$$



$$\text{Res } f(z) = \frac{\cos z}{\cos z} \Big|_{z=0} = 1$$

$$\int_C \frac{\sin \pi z}{z^\gamma} dz = ? \quad C: |z|=1 \quad \text{: مثال}$$

$$\text{Res } f(z) = \gamma \pi i \cdot \frac{1}{(\gamma-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{\gamma-1}}{dz^{\gamma-1}} (\sin \pi z) = \frac{\gamma \pi i}{\gamma} \lim_{z \rightarrow 0} (-\pi^\gamma \cos \pi z) = \frac{\pi i}{\gamma} (-\pi^\gamma)$$

$$= -\frac{i \pi^\gamma}{\gamma}$$

$$\int_C \frac{dz}{1-e^z} = ? \quad C: |z|=1 \quad \text{: مثال}$$

$$1 - e^z = 0 \rightarrow e^z = 1 \rightarrow z = \pm 2k\pi i$$

$$\int_c \frac{1}{1 - e^z} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{-e^z} \Big|_{z=0} = -2\pi i$$

$$\int_c \frac{15z + 9}{z^2 - 9} dz = ? \quad c: |z - 3| = 4 \quad \text{مسئله}$$

$$\text{Res } f(z) \Big|_{z=0} = \frac{15z + 9}{z^2 - 9} \Big|_{z=0} = -1, \quad \text{Res } f(z) \Big|_{z=3} = \frac{15z + 9}{z^2 - 9} \Big|_{z=3} = 3$$

$$\rightarrow \int \frac{15z + 9}{z^2 - 9} dz = 2\pi i [3 - 1] = 4\pi i$$

محاسبه برخی انتگرال‌های حقیقی با استفاده از انتگرال‌های مختلط:

$$\int_0^{2\pi} R[\cos \theta, \sin \theta] d\theta \quad (\text{انتگرال توابعی به جنس مقابل})$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{\sqrt{3 + \sin \theta + \sin^2 \theta}} d\theta, \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta} d\theta \quad \text{مسئله}$$

نحوه تبدیل این انتگرال حقیقی به یک انتگرال مختلط:

$$\cos \theta = \frac{1}{2} [e^{i\theta} + e^{-i\theta}], \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} [e^{i\theta} - e^{-i\theta}]$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left[z + \frac{1}{z} \right], \quad \text{با تغییر متغیر } z = e^{i\theta} \text{ خواهیم داشت}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} \left[z - \frac{1}{z} \right]$$

$$R[\cos \theta, \sin \theta] = f(z)$$

$$z = e^{i\theta} \rightarrow dz = i e^{i\theta} d\theta = iz d\theta \rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} R[\cos\theta, \sin\theta] d\theta = \int_C f(z) \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r\omega - r + r\cos\theta} d\theta = \int_C \frac{1}{r\omega - r(z + \frac{1}{z})} \cdot \frac{dz}{iz}, \quad C: |z|=1 \quad \text{مثال 1}$$

$$= \frac{1}{i} \int_C \frac{1}{-rz^2 + r\omega z - r} dz = \frac{1}{-ir} \int_C \frac{1}{z^2 - \frac{\omega}{r}z + 1} dz$$

$$= \frac{i}{r} \int_C \frac{1}{(z - \frac{\omega}{2r})(z - \frac{\omega}{2r})} dz = \frac{i}{r} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{z - \frac{\omega}{2r}} \Big|_{z = \frac{\omega}{2r}} = \frac{4\pi}{r}$$

نکته مهم: نتیجه این محاسباتی حتماً یک مقدار حقیقی است.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - rP\cos\theta + rP^2} d\theta \quad 0 < P < 1 \quad \text{مثال 2}$$

$$= \int_C \frac{1}{1 - P(z + \frac{1}{z}) + P^2} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_C \frac{1}{z - Pz^2 + P^2z - P} dz$$

$$= \frac{1}{i} \int_C \frac{1}{-Pz^2 + (1+P^2)z - P} dz = \frac{1}{i} \int_C \frac{1}{(1-Pz)(z-P)} dz$$

$$\begin{cases} z_1 = P \\ z_2 = \frac{1}{P} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{1-Pz} \Big|_{z=P} = \frac{2\pi}{1-P^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a_1 - \sin\theta} d\theta = \int_C \frac{1}{a_1 - \frac{1}{2i}[z - \frac{1}{z}]} \cdot \frac{dz}{iz} \quad \text{مثال 3}$$

$$= \int_C \frac{1}{\frac{a_1}{2}z - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}} dz = \int_C \frac{1}{(i - \frac{1}{2}z)(z - 2i)} dz$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2}{i} \\ z_2 = 2i \end{cases}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a_1 - \sin\theta} d\theta = 2\pi i \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{2}} \Big|_{z = \frac{2}{i}} = \frac{2\pi}{a_1}$$

$$\text{Res } f(z) = \frac{1}{f'(z)} \Big|_{z=ri} = \frac{-1}{r \cdot i}$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = r \cdot i \left[\frac{1}{1 \cdot i} - \frac{1}{r \cdot i} \right] = \frac{\pi}{r}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

نکته: در مثال ۱

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2+x^2} \cos \omega x dx, \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2+x^2} \sin \omega x dx \quad \text{مثال ۳}$$

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2+x^2} e^{i\omega x} dx$$

برای محاسبه انتگرال بالا انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم.

$$\rightarrow A = \text{Re}[C], \quad B = \text{Im}[C]$$

$$f(z) = \frac{1}{k^2+z^2} \rightarrow k^2+z^2=0 \rightarrow z = \pm ik$$

نقاط تکین $f(z)$:

لذا فقط مقدار ما در $z = ik$ محاسبه می‌کنیم.

$$\text{Res } g(z) = \text{Res}_{z=ik} \frac{e^{i\omega z}}{(z+ik)(z-ik)} = \lim_{z \rightarrow ik} \frac{e^{i\omega z}}{z+ik} = \frac{e^{i\omega \cdot ik}}{r \cdot ik} = \frac{e^{-\omega k}}{r \cdot ik}$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{k^2+x^2} dx = r \cdot i \cdot \frac{e^{-\omega k}}{r \cdot ik} = \frac{\pi}{k} e^{-\omega k}$$

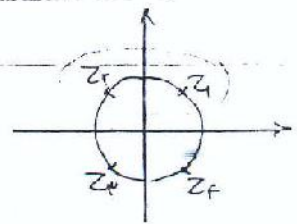
$$\rightarrow A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega x}{k^2+x^2} dx = \frac{\pi}{k} e^{-\omega k}, \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega x}{k^2+x^2} dx = 0$$

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kx}{1+x^2} dx = ?$$

مثال ۴

$$A = \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{1+x^2} dx \right]$$

$$g(z) = \frac{e^{i\omega z}}{z^2+1}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^r+1} dx$$

مثال: چون $f(x)$ دارای شرایط لازم است

پس: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^r+1} dx = 2\pi i \sum_{z=z_i} \text{Res } f(z)$, z نقاط تکثیر نیم‌صفت بالا

$$f(z) = \frac{1}{z^r+1} \rightarrow z^r+1=0 \rightarrow z^r=-1 = e^{i(\pi+2k\pi)}$$

$$\rightarrow z_k = e^{i \frac{\pi+2k\pi}{r}}, \quad k=0, 1, 2, \dots, r-1$$

$$k=0, \quad z_0 = e^{i \frac{\pi}{r}}$$

$$k=1, \quad z_1 = e^{i \frac{3\pi}{r}}$$

$$k=2, \quad z_2 = e^{i \frac{5\pi}{r}}$$

$$k=r-1, \quad z_{r-1} = e^{i \frac{(2r-1)\pi}{r}}$$

پس نقاط مانده فقط به ازاء z_0 و z_{r-1} محاسبه می‌شوند

$$\rightarrow \text{Res}_{z=e^{i \frac{\pi}{r}}} \frac{1}{z^r+1} = \frac{1}{r z^{r-1}} \Big|_{z=e^{i \frac{\pi}{r}}} = \frac{1}{r e^{i \frac{(r-1)\pi}{r}}} = \frac{1}{r} e^{-i \frac{(r-1)\pi}{r}}$$

$$\text{Res}_{z=e^{i \frac{(2r-1)\pi}{r}}} \frac{1}{z^r+1} = \frac{1}{r z^{r-1}} \Big|_{z=e^{i \frac{(2r-1)\pi}{r}}} = \frac{1}{r e^{i \frac{(2r-1)(r-1)\pi}{r}}} = \frac{1}{r} e^{-i \frac{(2r-1)(r-1)\pi}{r}}$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^r+1} dx = \frac{2\pi i}{r} \left[e^{-i \frac{(r-1)\pi}{r}} + e^{-i \frac{(2r-1)(r-1)\pi}{r}} \right] = \frac{2\pi i}{r} \left[-\frac{\sqrt{r}}{r} - i \frac{\sqrt{r}}{r} + \frac{\sqrt{r}}{r} - i \frac{\sqrt{r}}{r} \right]$$

$$= \frac{2\pi}{r} \cdot \sqrt{r} = \frac{2\pi\sqrt{r}}{r}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$$

مثال:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1+2z^2+9}$$

$$\rightarrow z^2+1=0 \begin{cases} z_1=i \\ z_2=-i \end{cases}$$

$$z^2+9=0 \begin{cases} z_3=3i \\ z_4=-3i \end{cases}$$

$$\text{Res } f(z) = \frac{1}{2z+2z} \Big|_{z=i} = \frac{1}{4i}$$

$$\rightarrow \left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leq \pi r \cdot \frac{K}{r} = \frac{K\pi}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \rightarrow \int_{C_r} f(z) dz = 0$$

محاسبه بعضی انتگرالهای حقیقی با استفاده از تکنیکهای محاسبه انتگرالهای مختلط:

$$\int_0^{2\pi} R[\cos\theta, \sin\theta] d\theta = \int_C \frac{f(z)}{iz} dz \quad , \quad C: |z|=1 \quad -1-$$

۲- اگر $f(x)$ دارای شرایط زیر باشد:

$$f(x) = \frac{x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0}{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0} \quad \text{الف:}$$

ب: n حداقل دو تا از m بیشتر باشد.

ج: مخزن هیچ ریشه حقیقی نداشته باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z=z_i} \text{Res } f(z) \quad \text{دانشمورت}$$

که z نقاط تکیه نیم صفحه بالا هستند.

۳- اگر $f(x)$ دارای شرایط گفته شده در بند ۱ باشد در آن صورت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos wx dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 2\pi i \sum_{z=z_i} \text{Res } g(z)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin wx dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 2\pi i \sum_{z=z_i} \text{Res } h(z)$$

که z نقاط تکیه نیم صفحه بالا هستند.

محاسبه انتگرال ناسره توابع گویا:

$$f(x) = \frac{x^4 + 13x^2 + 7x + 1}{x^2 + 1}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

شرط لازم برای اینکه از انتگرال مختلط استفاده کنیم

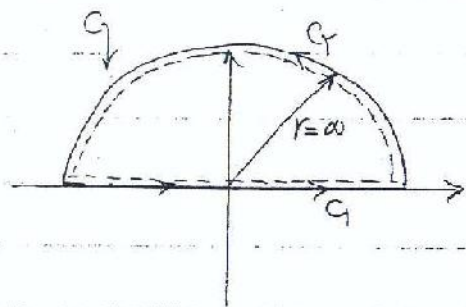
۱- مخرج $f(x)$ هیچ ریشه حقیقی نداشته باشد.

۲- درجه مخرج از درجه صورت حداقل دو تا بیشتر باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{z=Z_i} \text{Res } f(z) \quad \text{قضیه این شرایط:}$$

z نقاط تکین نیم صفحه بالا هستند.

اثبات قضیه:



$$\int_C f(z) dz$$

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

$$\left| \int_{C_2} f(z) dz \right| \ll m \cdot l$$

طول پیرامترالگیری \longleftarrow \longleftarrow حداکثر مقدار $|f(z)|$

$$l = \pi R, \quad m = \frac{K}{R^2} \quad (\text{اگر مخرج فقط دو درجه بیشتر باشد})$$

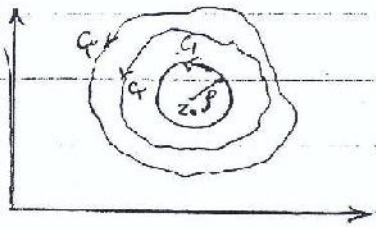


یادآوری یک مثال =

$$\int_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$$

در جهت عکس عقربه‌های ساعت $C: |z-z_0| < r$

$$\int_{C_1} \frac{1}{z-z_0} dz = \int_{C_2} \frac{1}{z-z_0} dz = \int_{C_3} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$$



نتیجه کلی: تابع کسری $\frac{1}{z-z_0}$ را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم از این تابع روی یک منحنی بسته که نقطه z_0 را دور نمی‌زند انتگرال بگیریم مقدار انتگرال طبق قضیه انتگرال کوشی برابر صفر است. ولی اگر بخواهیم از این تابع روی یک منحنی بسته که نقطه z_0 را دور می‌زند انتگرال بگیریم (جهت عکس عقربه‌های ساعت) مقدار انتگرال برابر $2\pi i$ می‌باشد.

مثال: (در جهت عکس عقربه‌های ساعت) $\int_C \frac{2z-1}{z^2+z} dz$

الف: $\frac{1}{z} = \frac{1}{z-0}$ ب: $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-(-1)}$ ج: $2z-1 = 2(z-\frac{1}{2})$

$$\frac{2z-1}{z^2+z} = \frac{2}{z+1} - \frac{1}{z}$$

حل الف: $\int_C f(z) dz = 2 \int_C \frac{1}{z+1} dz - \int_C \frac{1}{z} dz$
 طبق قضیه کوشی برابر صفر است طبق قضیه انتگرال کوشی صفر است

$$\rightarrow \int_C f(z) dz = -2\pi i$$

$$\int_C \frac{z-1}{z^2+z} dz = \int \frac{3dz}{z+1} - \int \frac{1}{z} dz = 0 \quad \text{حل ب:}$$

$$\int_C \frac{z-1}{z^2+z} dz = 3 \int \frac{dz}{z+1} - \int \frac{1}{z} dz = 2\pi i \quad \text{حل ج:}$$

دو قضیه دیگر:

۱- اگر تابع $f(z)$ در حوزه همبند D تحلیلی باشد و بخوانیم از این تابع از نقطه z_1 تا به انتگرال

بگیریم (اثبات شد که این انتگرال به مسیر بستگی ندارد) در آن صورت یک تابع $F(z)$ (تابع اولیه $f(z)$)

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1) \quad \text{و ثانیا} \quad F'(z) = f(z) \quad \text{وجود دارد که اولاً}$$

$$\int_0^{\pi i} e^z dz = ? \quad f(z) = e^z \rightarrow F(z) = e^z \quad \text{مثال:}$$

$$\rightarrow \int_0^{\pi i} e^z dz = e^z \Big|_0^{\pi i} = e^{\pi i} - 1 = -1 - 1 = -2$$

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3} (1+i)^3 = \frac{1}{3} 2i(i+1) \quad \text{مثال ۲:}$$

$$= -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}$$

$$\int_0^i (z^2 + z^3) dz = \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{4} z^4 \Big|_0^i = \frac{1}{3} - i\frac{1}{4} \quad \text{مثال ۳:}$$

$$\int_0^{1+i} \sin z dz = -\cos z \Big|_0^{1+i} = 1 - \cos(1+i) \quad \text{مثال ۴:}$$

۲- چنانچه $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد و z_0 یک نقطه متعلق به D و C یک منحنی بسته درون D

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad \text{که z_0 را دور می زند باشد در آن صورت:}$$

تعریف ۱: دنباله Z_n را کراندار نامند چنانچه بتوان دایره ای به شعاع R (R عددی) است به طور

طخواه بزرگ ولی مخالف ∞ رسم کرد که تمام جملات در درون آن قرار گیرند.

تعریف ۲: دنباله Z_n را همگرا نامند چنانچه ^{برای} دنباله یک عدد C وجود داشته باشد که به ازاء

هر ϵ دلخواه (یعنی اندازه دلخواه کوچک ولی مخالف صفر) بتوان یک N تعریف کرد که:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \quad , \quad |Z_n - C| < \epsilon \quad n > N$$

مثال: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad , \quad \epsilon = 1/100 \rightarrow |Z_n - C| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} < 1/100 \rightarrow n > \frac{1000}{N}$$

مثال: $1 + 3i, \frac{3}{2} + i\frac{5}{2}, \dots \rightarrow (2 - \frac{1}{n}) + i(2 + \frac{1}{n}), \dots$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(2 - \frac{1}{n}) + i(2 + \frac{1}{n}) \right] = 2 + 2i \quad , \quad \epsilon = 1/10$$

$$|Z_n - C| = \left| (2 - \frac{1}{n}) + i(2 + \frac{1}{n}) - 2 - 2i \right| < 1/10 \rightarrow \left| -\frac{1}{n} + i\frac{1}{n} \right| < 1/10$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{n} < 1/10 \rightarrow n > \frac{\sqrt{2}}{1/10} \approx \frac{141}{N}$$

مثال: دنباله مقابل و اگر است. $1, -1, 1, -1, \dots, (i)^n, \dots$

نکته: هر دنباله همگرا، کراندار است و لذا هر دنباله بی کران، واگر است.

قضیه: هر دنباله مختلط Z_n از دو دنباله حقیقی x_n و y_n تشکیل شده است.

$$Z_n = x_n + iy_n$$

و دنباله مختلط Z_n همگرا است اگر و فقط اگر دنباله های x_n و y_n همگرا باشند.

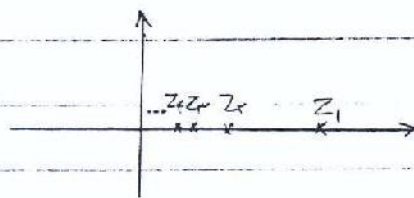
بحث‌های باقیمانده از ریاضیات مهندسی: مطالبی منتخب از فصول ۱۵ و ۱۶.

اولین بحث فصل ۱۵: تعریف و قضایای دنباله‌ها

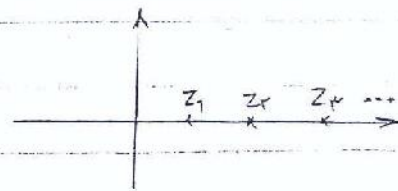
دنباله: چنانچه به هر عدد صحیح و مثبت n یک عدد مختلط Z_n نسبت دهیم:

$Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n, \dots$ در آن صورت یک دنباله تعریف کرده‌ایم.

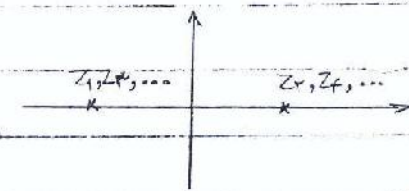
مثال ۱: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$



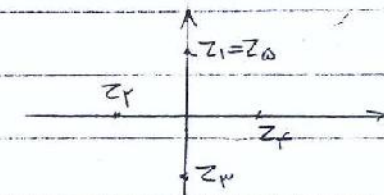
مثال ۲: $2, 3, 4, 5, \dots, (n+1), \dots$



مثال ۳: $-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$



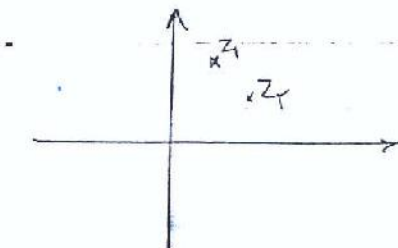
مثال ۴: $i, -1, -i, 1, i, \dots, (i)^n, \dots$



مثال ۵: $\frac{i}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{-i}{8}, \frac{1}{16}, \dots, (\frac{i}{2})^n, \dots$



مثال ۶: $1 + 3i, \frac{3}{2} + i\frac{5}{2}, \dots, (2 - \frac{1}{n}) + i(2 + \frac{1}{n}), \dots$



✓

$$\text{Res } g(z) = \frac{e^{i\pi z}}{fz^r} \Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{r}}} = \frac{e^{i\pi(\frac{\sqrt{r}}{r} + i\frac{\sqrt{r}}{r})}}{r e^{i\frac{\pi}{r}}} = \frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{r}}{r}}}{r} \cdot e^{i[\frac{\pi\sqrt{r}}{r} - \frac{\pi}{r}]}$$

$$\text{Res } g(z) = \frac{e^{i\pi z}}{fz^r} \Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{r}}} = \frac{e^{i\pi(-\frac{\sqrt{r}}{r} + i\frac{\sqrt{r}}{r})}}{r e^{i\frac{\pi}{r}}} = \frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{r}}{r}}}{r} \cdot e^{i[\frac{\pi\sqrt{r}}{r} - \frac{\pi}{r}]}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow A &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos r^x}{x^r+1} dx = 2\pi i \frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{r}}{r}}}{r} \left[e^{i(\frac{\pi\sqrt{r}}{r} - \frac{\pi}{r})} + e^{i(\frac{\pi\sqrt{r}}{r} - \frac{\pi}{r})} \right] \\ &= 2\pi i \cdot \frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{r}}{r}}}{r} \left[-e^{i(\frac{\pi\sqrt{r}}{r} + \frac{\pi}{r})} + e^{-i(\frac{\pi\sqrt{r}}{r} + \frac{\pi}{r})} \right] \\ &= 2\pi i \cdot \frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{r}}{r}}}{r} \left[-2i \sin(\frac{\pi\sqrt{r}}{r} + \frac{\pi}{r}) \right] = \pi e^{-\frac{\pi\sqrt{r}}{r}} \sin(\frac{\pi\sqrt{r}}{r} + \frac{\pi}{r}) = 4 \cdot 0.874 \end{aligned}$$

نکته: بعضی انتگرالهای حقیقی خاص را نیز می توان با استفاده از تئوری محاسبه انتگرالهای مضبوط محاسبه

نمود (با همان تکنیک قضیه ۷)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^r} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{r} \quad \text{ب}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{الف}$$

نکته: انتگرال $\int \frac{1}{x^r} dx$ تعریف شده نیست ولی می توان مقدار اصلی (Pr.v) برای آن تعریف

$$\text{Pr.v.} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^r} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x^r} dx + \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^r} dx \right] \quad \text{کرده}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{r-1} \left[x^{1-r} \Big|_{-1}^{-\epsilon} + x^{1-r} \Big|_{\epsilon}^1 \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{r-1} \left[\epsilon^{-r+1} - 1 + 1 - \epsilon^{-r+1} \right] = 0$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] \dot{z}(t) dt$$

به طریق مشابه در مورد انتگرال

اگر معنی است از نقطه تکین عبور کنند انتگرال بنا بر چه فرم مشابه (تعریف شده نیست ولی به همین

شکل می توان مقدار اصلی Pr.v برای آن تعریف کرد.



سری تیلور (مکملون) توابع کسری:

به طور کلی برای پیدا کردن سری تیلور توابع کسری از دو رابطه زیر استفاده می شود:

$$\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + w^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \quad |w| < 1$$

سری هندسی

رابطه دو جمله ای:

$$\frac{1}{(1+w)^m} = 1 - m\omega + \frac{m(m+1)}{2!} \omega^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} \omega^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \binom{m+n-1}{n} \omega^n$$

$|w| < 1$

مثال: سری تیلور $f(z)$ را حول نقطه $a=1$ پیدا کرده و

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2+z+2}$$

خادیه همگرایی آن را تعیین کنید

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-1)^n$$

$$= \frac{1}{2+(z-1)} + \frac{1}{3+(z-1)} = \frac{1}{2-[-(z-1)]} + \frac{1}{3-[-(z-1)]}$$

$$\rightarrow f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left[-\frac{z-1}{2}\right]} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left[-\frac{z-1}{3}\right]}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{z-1}{2}\right]^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{z-1}{3}\right]^n$$

$$\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1, \quad \left|\frac{z-1}{3}\right| < 1$$

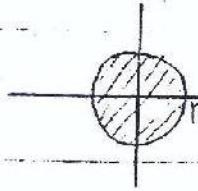
مشروط بر اینکه:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} \right) \right] (z-1)^n$$

$$|z-1| < 3, \quad |z-1| < 2$$

مشروط بر اینکه:

$$\rightarrow \boxed{|z-1| < 2}$$



ناحیه همگرایی:

$$f(z) = \frac{z^2 + 9z + 5}{(z+2)^r (z+3)}$$

حول $a=1$

مثال =

$$\rightarrow f(z) = \frac{1}{\frac{(z+2)^r}{f_1(z)}} + \frac{z}{\frac{z+3}{f_2(z)}}$$

$$f_1(z) = \frac{z}{-2+(z-1)} = \frac{-z}{1 - \frac{z-1}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n, \quad \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^n} (z-1)^n$$

$$f_2(z) = \frac{1}{(z+2)^2} = \frac{1}{[3+(z-1)]^2} = \frac{1}{9} \frac{1}{\left[1 + \frac{z-1}{3}\right]^2} =$$

$$= \frac{1}{9} \left[1 - 2 \cdot \frac{z-1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{z-1}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{z-1}{3}\right)^3 + \dots \right] = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} \left(\frac{z-1}{3}\right)^n$$

$$, \quad \left|\frac{z-1}{3}\right| < 1$$

$$\rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{\binom{-r}{n}}{2^{n+r}} \frac{1}{2^n}}_{b_n} \right] (z-1)^n$$

ناحیه همگرایی این مثال نیز شبیه ناحیه همگرایی مثال قبل است.

سری لوران:

اگر یک تابع کسری داشته باشیم و بخواهیم سری تیلور حول نقطه‌ای که در آن نقاط تابع تحلیلی است

شکل نداریم و طبق روابط گفته شده سری قابل محاسبه می‌باشد.

اگر بتوانیم یک سری توانی حول نقطه z_0 پیدا کنیم که z_0 نقطه تکین تابعی باشد در آن صورت

سری تیلور قابل تعریف نیست. در اینجا سری لوران را تعریف می کنیم.

قضیه سری لوران :

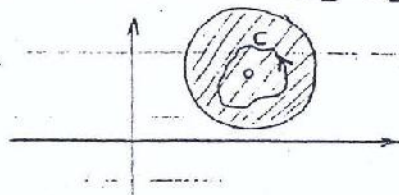
اگر تابع $f(z)$ در حوزه $0 < |z - z_0| < R$ تحلیلی باشد در آن صورت می توان آن را به صورت

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$$

سری توانی زیر نمایش داد.

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

سری به شامل z در ناحیه R



محاسبه ضرایب سری لوران از روشی ساده :

مثال: سری لوران $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ حول نقطه $z_0 = 0$ پیدا کنید.

$$g(z) \triangleq \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\frac{\sin z}{z^4} = z^{-4} - \frac{z^{-1}}{3!} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \dots \quad \text{اگر } z \neq 0 \text{ باشد} \quad 0 < |z| < \infty$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!} \quad \text{if } 2n-3 = m$$

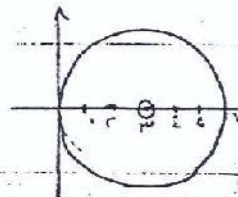
$$\rightarrow = \sum_{m=-3}^{\infty} (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{z^m}{(m+3)!}$$

مثال: $f(z) = \frac{1}{z^3(z+3)}$ حول نقطه $z=3$

$$g(z) = \frac{1}{z^3} = \frac{1}{(3+z-3)^3} = \frac{1}{3^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{z-3}{3}\right)^3} = \frac{1}{3^3} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} \left(\frac{z-3}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{-3}{n}}{3^{n+3}} (z-3)^n, \quad |z-3| < 3$$

$$\rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{-3}{n}}{3^{n+3}} (z-3)^{n-1}, \quad z \neq 3$$



فصل ۱۰ کامل

۱۲ کامل

(۱۳-۱۲-۱۱-۱۰-۹-۸-۷-۶-۵-۴-۳-۲-۱) ۱۳

(۱۶-۱۵-۱۴-۱۳-۱۲-۱۱-۱۰-۹-۸-۷-۶-۵-۴-۳-۲-۱) ۱۴

(۱۵) ۱۵ (۵ و ۴ و ۳)

(۱۶) ۱۶ (۷ و ۴ و ۳)

۱۷ کامل

۱۷
۱۶
۱۵

(۱۶) ۱۶