ریاضیات مهندسی

مجموعهٔ دروس عمومی

دکتر محمدصادق معتقدی

مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

فصل اول   آنالیز فوریه

فصل دوم   توابع مختلط

فصل سوم نگاشت‌ها

فصل چهارم انتگرال‌گیری از توابع مختلط

فصل پنجم معادلات با مشتقات جزئی

فصل اول

آنالیز فوریه

سری فوریه

فرض کنید $f(x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $p = 2L$ باشد که در فاصله تناوب خود پیوسته و تکه‌تکه هموار باشد. آن‌گاه می‌توان تابع مذکور را به صورت مجموعی از جملات سینوسی و کسینوسی با آرگومان‌های مختلف که به سری فوریه تابع موسوم است به فرم زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

که در آن ضرایب سری فوریه به فرم زیر حاصل می‌شود.

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x)\,dx$$

نکته : برخی مواقع یک تابع به خودی خود متناوب نمی‌باشد و در فاصله‌ای روی آن بحث می‌شود که تابع مذکور در فاصله داده شده مد نظر قرار گرفته و در خارج آن فاصله به صورت متناوب گسترش یافته است که برای آن تابع متناوب سری فوریه می‌نویسیم

نکته : اگر تابع $f(x)$ تابعی زوج باشد، (نمودار آن نسبت به محور y ها متقارن باشد):

$$\boxed{b_n = 0} \quad , \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

و اگر تابع $f(x)$ تابعی فرد باشد، (نمودار آن نسبت به مرکز مختصات متقارن باشد):

$$\boxed{a_n = 0} \quad , \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

مثال : برای تابع $f(x)=\begin{cases}1 & -1<x<0\\ x & 0<x<1\end{cases}$، ثابت سری فوریه را محاسبه کنید؟

حل :

$$2L=2\to L=1$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f(x).dx\to a_0=\frac{1}{1}\left\{\int_{-1}^{0}1.dx+\int_{0}^{1}x.dx\right\}=x\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{a_0}{2}=\frac{3}{4}$$

مثال : تابع $f(x)=x$ ،$0\le x\le 2\pi$ مفروض است، ضرایب جملات کسینوسی در بسط سری فوریه این تابع را بیابید.

حل :

مشتق	انتگرال
x	$\cos nx$
1	$\frac{1}{n}\sin nx$
0	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$

$$2L=2\pi\Rightarrow L=\pi$$

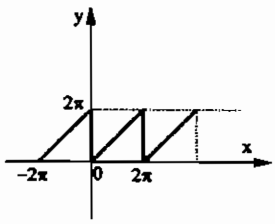
$$a_n=\frac{1}{L}\int_0^{2\pi}x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx.dx$$

$$\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right\}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right\}=0$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x.dx=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{x^2}{2}\right\}\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi\Rightarrow\frac{a_0}{2}=\pi$$

دقت کنید $\frac{a_0}{2}$، همان مقدار متوسط تابع در فاصلهٔ تناوب آن می‌باشد که می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\text{مقدار متوسط}=\frac{\text{سطح زیر نمودار تابع در فاصله تناوب}}{\text{طول فاصله تناوب}}$$



$$\frac{a_0}{2}=\frac{\frac{2\pi.2\pi}{2}}{2\pi}=\pi$$

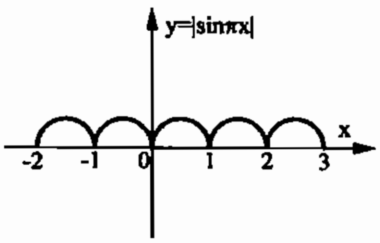
مثال : سری فوریه تابع $f(x)=4\sin x\cos^2 x$ کدامست؟

حل :

$$f(x)=4\sin x\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)=2\sin x+2\sin x\cos 2x=2\sin x+\sin(x+2x)+\sin(x-2x)$$

$$=2\sin x+\sin 3x-\sin x=\sin x+\sin 3x$$

مثال : تابع $f(x)=|\sin\pi x|$ مفروض است، دوره تناوب و ضرایب a_n را به‌دست آورید.



حل : $f(x)$ متناوب است با دوره تناوب $L=\frac{1}{2}, P=1$ و از آن‌جا که $f(x)$ زوج است $b_n=0$ پس:

$$a_n=\frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} \sin\pi x.\cos\frac{n\pi}{\frac{1}{2}}x.dx=4\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\pi x.\cos 2n\pi x.dx=4\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\{\sin(1+2n)\pi x+\sin(1-2n)\pi x\}dx$$

$$=2\left\{\frac{-\cos(1+2n)\pi x}{(1+2n)\pi}+\frac{-\cos(1-2n)\pi x}{(1-2n)\pi}\right\}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=2\left\{0+\frac{1}{(1+2n)\pi}+0+\frac{1}{(1-2n)\pi}\right\}=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1-2n+1+2n}{1-4n^2}\right\}=\frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

مثال : بسط فوریه تابع دلتای دیراک در فاصله $-\pi<x<\pi$ را به‌دست آورید.

حل : با توجه به خاصیت تابع دلتای دیراک داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx=f(0)$$

لذا در بسط فوریه این تابع داریم:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\delta(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\cos 0=\frac{1}{\pi}$$
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\delta(x)dx=\frac{1}{\pi}$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\delta(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\sin(0)=0$$

لذا:

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cos nx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\right)$$

نکته : همان‌طوری که دیدیم سری فوریه یک تابع، نوشتن تابع به صورت مجموع جملات سینوسی، کسینوسی است و ثابت می‌شود ضرایب سری فوریه که با توجه به روابط گفته شده، به‌دست می‌آیند، چنان‌چه مورد استفاده قرار گیرند، بهترین تقریب برای توصیف یک تابع از نظر حداقل مربعات می‌باشد.

مثال : تابع $f(x)$ به صورت زیر مفروض است.

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x\le 0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}$$

چنان‌چه بخواهیم تابع مذکور در فاصلهٔ داده شده به صورت تابعی به فرم $a+b\cos x+c\sin x$ تقریب بزنیم، a، b، c چقدر باشند که بهترین تقریب زده شود.

حل :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\int_0^{\pi}x\,dx\right\}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{a_0}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}0\cdot\cos x\,dx+\int_0^{\pi}x\cos x\,dx\right\}=\frac{1}{\pi}\left\{x\sin x\Bigg|_0^{\pi}+\cos x\Bigg|_0^{\pi}\right\}=-\frac{2}{\pi}$$

مشتق	انتگرال
x	$\cos x$
1	$\sin x$
0	$-\cos x$

مشتق	انتگرال
x	$\sin x$
1	$-\cos x$
0	$-\sin x$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}0\sin x\,dx+\int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx\right\}=\frac{1}{\pi}\left[-x\cos x\Big|_0^\pi+\sin x\Big|_0^\pi\right]=1$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x$$

قضیه دیریکله و بحث هم‌گرایی سری‌های فوریه

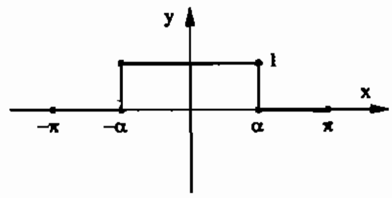
می‌توان نشان داد:

الف) اگر $f(x)$ در x_0 پیوسته باشد، آن‌گاه: $f(x_0)$ برابرمقدار سری فوریه تابع به ازای $x=x_0$ است.

ب) اگر $f(x)$ در x_0 گسسته باشد، آن‌گاه: $\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$ برابر مقدار سری فوریه تابع به ازای $x=x_0$ است.

به عبارت ساده‌تر: سری فوریه در نقاط پیوستگی به $f(x)$ و در نقاط ناپیوستگی به $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ هم‌گرا است.

مثال : با توجه به سری فوریه تابع ترسیم شده در شکل زیر حاصل سری عددی $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}$ را به دست آورید.



حل :

$2L=2\pi\to L=\pi$ تابع زوج $\Rightarrow b_n=0$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\alpha 1dx=\frac{2\alpha}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\alpha\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_0^\alpha=\frac{2}{n\pi}\sin n\alpha$$

سری فوریه: $\frac{\alpha}{\pi}+\sum\frac{2}{n\pi}\sin n\alpha.\cos nx$

در $x=0$ که پیوستگی تابع است طبق قضیه دیریکله داریم:

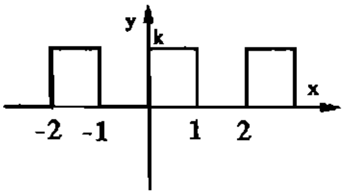
$$f(0)=\frac{\alpha}{\pi}+\sum\frac{2\sin n\alpha}{n\pi}\cos 0$$

داریم $f(0)=1$، در نتیجه:

$$1-\frac{\alpha}{\pi}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}$$

$$I=\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right).\frac{\pi}{2}$$

مثال : از بسط فوریه تابع زیر مقدار $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ برابر است با:



حل : تابع ترسیم شده، توسیع متناوب تابع $f(x)=\begin{cases}k & 0<x<1\\0 & -1<x<0\end{cases}$ می‌باشد.

$$2L=2\rightarrow L=1$$

$$a_0=\frac{1}{1}\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx=\frac{1}{1}\int_0^1 k\,dx=k$$

$$a_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{+1}f(x)\cos\frac{n\pi}{1}x.dx=\frac{1}{1}\int_0^1 k\cos\frac{n\pi}{1}x.dx=\frac{k}{1}\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{1}x\Big|_0^1=0$$

$$b_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{+1}f(x)\sin\frac{n\pi}{1}x.dx=\frac{1}{1}\int_0^1 k\sin\frac{n\pi}{1}x.dx=\frac{-k}{1}\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{1}x\Big|_0^1=\frac{-k}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}0 & \text{زوج } n\\ \frac{2k}{n\pi} & \text{فرد } n\end{cases}$$

لذا سری فوریه تابع مورد نظر، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x)=\frac{k}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2k}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi}{1}x$$

در $x=\frac{1}{2}$، تابع پیوسته بوده و طبق قضیه دیریکله داریم:

$$k=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

مثال : تابع $0<x<2$ و $f(x)=e^{-x}$ مفروض است در سری فوریهٔ این تابع مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ چقدر است؟

حل :

$$\text{سری فوریه}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$$

$$a_0=\frac{1}{1}\int_0^2 e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^2=-\left(e^{-2}-1\right)=1-e^{-2}$$

در $x=0$ که تابع گسسته می‌شود، طبق دیریکله داریم:

$$\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{e^{-2}+e^0}{2}=\frac{1-e^{-2}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n=e^{-2}$$

سری فوریه سینوسی و کسینوسی

فرض کنید تابع $f(x)$ در $(0\,,L)$ تعریف شده باشد، اگر این تابع را در فاصله $(-L,0)$ به طور زوج گسترش داده و برای تابع حاصله سری فوریه بنویسیم، به این سری فوریه، سری فوریه کسینوسی گفته می‌شود. البته بدیهی است که در چنین وضعیتی $b_n=0$ است.

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x).dx \qquad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx$$

هم‌چنین اگر این تابع را در فاصلهٔ $(-L,0)$ به طور فرد گسترش داده و برای تابع حاصله سری فوریه بنویسیم، به این سری فوریه، سری فوریه سینوسی گفته می‌شود. البته بدیهی است ضرایب a_n و a_0 مساوی با صفر است.

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx$$

مثال : تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ \frac{1}{2} & 1<x<2\end{cases}$ مفروض است، مطلوب است سری فوریه سینوسی تابع مورد نظر:

حل : گسترش به‌صورت فرد $a_n=a_0=0$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{2}{2}\left[\int_0^1 1\sin\frac{n\pi}{2}x.dx+\int_1^2\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}x.dx\right]=\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_1^2$$
$$=\frac{-2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)-\frac{1}{n\pi}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

مثال : تابع $f(x)$ در فاصله $(0\,,\,L)$ تعریف شده است اگر بخواهیم برای این تابع سری فوریه سینوسی بنویسیم $b_n=\frac{1}{n^3}$ و اگر بخواهیم سری فوریه کسینوسی بنویسیم $a_n=\frac{1}{n+\pi}$، کدام نوع سری فوریه برای توصیف این تابع مناسب‌تر است.

نکته : بدیهی است که سری فوریه‌ای مناسب‌تر است که با تعداد جملات کمتری به رفتار تابع واقعی نزدیک‌تر شود و البته این موضوع زمانی رخ می‌دهد که ضرایب سری فوریه با افزایش n، سریع‌تر کوچک شده و به صفر میل کند البته در این مساله سری فوریه سینوسی مناسب خواهد بود.

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری فوریه

فرض کنید تابع $f(x)$ که در فاصله $(-L,L)$ تعریف شده باشد دارای سری فوریه به فرم زیر باشد.

می‌توان نشان داد:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

الف) چنان‌چه $f(L)=f(-L)$ باشد می‌توان از رابطهٔ فوق مشتق‌گیری کرده و سری فوریه $f'(x)$ را در $(-L,L)$ را به صورت زیر مشخص کرد.

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left\{-a_n\sin\frac{n\pi}{L}x+b_n\cos\frac{n\pi}{L}x\right\}$$

ب) می‌توان از رابطه $f(x)$ انتگرال‌گیری کرد و سری فوریه را برای $\int f(x).dx$ در فاصلهٔ $[-L,L]$ به‌دست آورد.

$$\int f(x)dx=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\left(a_n\sin\frac{n\pi}{L}x-b_n\cos\frac{n\pi}{L}x\right)+K$$

دقت کنید: عبارت نوشته شده در سمت راست تساوی فوق توصیف سری فوریه $\int f(x).dx$ نخواهد بود (به خاطر وجود ترم $\frac{a_0}{2}x$) اما به هر حال از رابطهٔ فوق می‌توان سری فوریه تابع $\int f(x)dx-\frac{a_0}{2}x$ را در فاصله $[-L,L]$ به سادگی بیان کرد ولی باید مقدار ثابت K را مشخص کنیم.

مثال : اگر بسط فوریه تابع متناوب $f(x)=|x|$ در فاصله $(-\pi,\pi)$ به صورت زیر باشد.

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right),(-\pi<x<+\pi)$$

حاصل سری $I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ را به‌دست آورید.

حل :

$$f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x\le 0\\ x & 0\le x<\pi\end{cases} \quad \text{و داریم} \quad f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

حال با انتگرال از $f(x)$ و سری فوریه آن نتیجه می‌شود:

$$\int f(x)dx=\frac{\pi}{2}x-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}+K$$

$$\int f(x).dx=\begin{cases}-\frac{x^2}{2} & -\pi<x<0\\ \frac{x^2}{2} & 0<x<\pi\end{cases}$$

با نگاه کردن به رابطهٔ فوق در $x=0$ نتیجه می‌شود:

$$0=0-\frac{4}{\pi}\sum\frac{\sin(0)}{(2n+1)^3}+K\to K=0$$

و حال چنان‌چه در $x=\frac{\pi}{2}$ که برای تابع فوق نقطه پیوستگی است از قضیه دیریکله استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}=\frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^3}\Rightarrow\sum\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{8}\right)\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^3}{32}$$

مثال : تابع $f(x)=x^2$, $(-\pi<x<\pi)$ دارای سری فوریهٔ به فرم زیر می‌باشد،

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad (-\pi<x<\pi)$$

آن گاه سری فوریه تابع $x^3-\pi^2x$ را در فاصلهٔ مزبور بیابید؟

حل : اگر از فرض مساله انتگرال‌گیری کنیم به‌دست می‌آید:

$$\frac{x^3}{3}=\frac{\pi^2}{3}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}.\frac{1}{n}\sin nx+k$$

اگر در $x=0$ به رابطه فوق نگاه کنیم، مقدار $K=0$ خواهد شد، لذا داریم:

$$\left(x^3-\pi^2x\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

مثال : سری فوریهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{2}$ در فاصله $-\pi \le x \le \pi$ به‌صورت زیر است.

$$f(x)=\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-+\cdots$$

سری فوریه تابع $g(x)=x^2$ در فاصله $-\pi \le x \le \pi$ کدام است؟

حل : با انتگرال‌گیری از $f(x)$ داریم:

$$\frac{1}{4}x^2=-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+-\cdots+k \Rightarrow x^2=4\left(-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+-\cdots\right)+c$$

برای محاسبه c، ضریب a_0 مربوط به سری فوریه تابع $g(x)=x^2$ را در فاصله $-\pi \le x \le \pi$ به‌دست می‌آوریم:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx=\frac{2}{\pi}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{3}\pi^3=\frac{2}{3}\pi^2 \Rightarrow c=\frac{a_0}{2}=\frac{\pi^2}{3}$$

تساوی پارسوال در سری‌های فوریه

اگر $f(x)$ تابعی متناوب باشد که در فاصله تناوب $(-L,L)$ تعریف شده است. داریم:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f^2(x).dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

مثال : هرگاه سری فوریه تابع $f(x)=x^2$ و $-\pi \le x \le \pi$ به‌صورت $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ باشد، حاصل $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ کدام است.

حل :

$$\text{سمت چپ تساوی پارسوال}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^4dx=\frac{1}{\pi}\frac{1}{5}x^5\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{5\pi}\pi^5$$

$$\text{سمت راست تساوی پارسوال}=\frac{\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{n^4}+0\right)$$

بنابراین طبق تساوی پارسوال خواهیم داشت:

$$\frac{2\pi^4}{5}=\frac{2\pi^4}{9}+16I \Rightarrow I=\frac{\pi^4}{90}$$

مثال : اگر بسط سری فوریه کسینوسی $f(x)=\sin x$ و $0 \le x \le \pi$ به صورت زیر باشد،

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}\right)\cos nx$$

آن‌گاه مقدار سری $\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\frac{1}{5^2.7^2}+\cdots$ برابر است با:

حل : در این مثال داریم:

$$L=\pi \qquad \frac{a_0}{2}=\frac{2}{\pi} \qquad b_n=0$$

$$a_n=\frac{-2}{\pi}\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}=\begin{cases}0 & \text{اگر n فردباشد}\\ \frac{-2}{\pi}\frac{2}{n^2-1} & \text{اگر n زوج باشد}\end{cases}$$

لذا طبق تساوی پارسوال می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2 x dx=\frac{\left(+\frac{4}{\pi}\right)^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{(2k)^2-1}\right)^2 \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}\Rightarrow\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\frac{1}{5^2.7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)=\frac{\pi^2-8}{16}$$

انتگرال فوریه

اگر تابع $f(x)$ در فاصله $(-\infty,+\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ هم‌گرا باشد این امکان وجود دارد که تابع مذکور را در بیان انتگرالی که اصطلاحاً انتگرال فوریه تابع نامیده می‌شود به فرم زیر بنویسیم.

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

که در آن ضرایب انتگرال فوریه به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\boxed{A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x).\cos\omega x.dx} \qquad \boxed{B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x).\sin\omega x.dx}$$

توجه کنید اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد $B(\omega)=0$ و اگر فرد باشد $A(\omega)=0$ است.

قضیه دیریکله و بحث هم‌گرایی انتگرال‌های فوریه

الف) اگر $f(x)$ در نقطه x_0 پیوسته باشد آن‌گاه مقدار انتگرال فوریه تابع در نقطهٔ x_0 برابر $f(x_0)$ است.

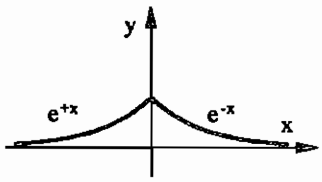
ب) اگر $f(x)$ در نقطه x_0 گسسته باشد آن‌گاه مقدار انتگرال فوریه تابع در نقطهٔ x_0 برابر $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$ است.

(از این موضوع دریافتن مقدار هم‌گرایی برخی انتگرال‌های ناسره استفاده می‌کنیم).

مثال : کدامیک از توابع زیر دارای انتگرال فوریه می‌باشد.

حل :

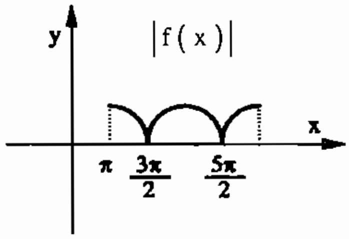
$$f(x)=e^{-|x|}\rightarrow f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ e^{+x} & x<0\end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx \xrightarrow{\text{زوج بودن تابع}} 2\int_0^{\infty}e^{-x}dx=-2e^{-x}\Big|_0^{\infty}=2$$

پس تابع دارای انتگرال فوریه می‌باشد.

$$2)f(x)=\begin{cases}0 & x<\pi\\ \cos x & x>\pi\end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\cos x|\,dx=\int_{\pi}^{\infty}|\cos x|\,dx=\infty \text{ نامحدود}$$

پس $g(x)$ انتگرال فوریه ندارد.

مثال : تابع $f(x)=f(-x)=e^{-2x};x>0$ مفروض است با استفاده از انتگرال فوریه این تابع حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید.

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\cos 2x}{4+x^2}dx$$

حل : با توجه به زوج بودن تابع داریم:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-2x}\cos\omega x dx \text{ و } B(\omega)=0$$

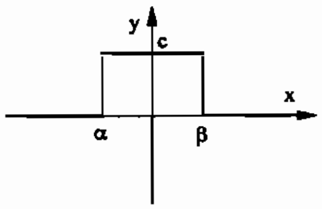
$$\boxed{F(s)=L\{f(x)\}=\int_0^{\infty}e^{-sx}f(x)dx} \Rightarrow A(\omega)=\frac{2}{\pi}L[\cos\omega x]\Big|_{s=2}=\frac{2}{\pi}\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=2}=\frac{4}{\pi(4+\omega^2)}$$

پس انتگرال فوریه تابع چنین است. $f(x)=\int_0^{\infty}\frac{4}{\pi(4+\omega^2)}\cos\omega x d\omega$

در $x=2$ که نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ می‌باشد، طبق قضیه دیریکله داریم:

$$f(2)=\int_0^{\infty}\frac{4\cos 2\omega}{\pi(4+\omega^2)}d\omega=e^{-4}\longrightarrow\int_0^{\infty}\frac{\cos 2\omega}{4+\omega^2}d\omega=\frac{\pi e^{-4}}{4}$$

مثال : در صورتی که $f(x)=\begin{cases}0 & x<\alpha\\ c & \alpha<x<\beta\\ 0 & x>\beta\end{cases}$ ، و مقادیر $\beta>0$ و $\alpha<0$ و c اعداد ثابتی باشند و علاوه بر این $f(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$ آن‌گاه، مقادیر c,β,α را بیابید؟



حل : با توجه به شکل تابع و با توجه به فرم انتگرالی بیان شده برای تابع $f(x)$ (که فرم انتگرال فوریه کسینوسی می‌باشد)، نتیجه می‌گیریم که تابع $f(x)$ باید زوج باشد و لذا لازم است که داشته باشیم: $\alpha=-\beta$.

حال انتگرال فوریه تابع $f(x)$ را با این شرط می‌نویسیم:

$$f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,d\omega,\ A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$\Rightarrow A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\beta}c\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}c\frac{1}{\omega}\sin\omega x\Big|_0^{\beta}=\frac{2c}{\pi\omega}\sin\omega\beta$$

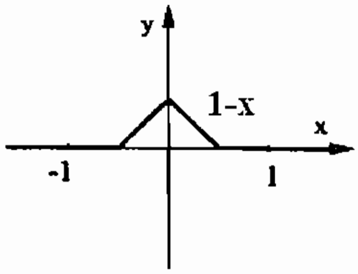
بنابراین خواهیم داشت:

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^{\infty}\frac{2c}{\pi\omega}\sin\omega\beta\cos\omega x\,d\omega$$

لذا با مقایسه این رابطه و فرم انتگرالی داده شده در فرض مساله، به‌دست می‌آید:

$$\beta=1\quad,\quad \frac{2c}{\pi\omega}=\frac{1}{\omega}\Rightarrow c=\frac{\pi}{2}\quad,\quad \alpha=-1$$

مثال : در معادله انتگرالی زیر $\int_0^\infty f(\omega)\cos\omega x\, d\omega=\begin{cases}1-x & 0\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}$ تابع $f(\omega)$ برابر است با:



حل : از فرض مساله مشخص می‌شود تابع $h(x)=\begin{cases}1-x & 0\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}$ به صورت زوج توسیع داده شده و سپس انتگرال فوریه آن نوشته شده است.

لذا با انجام این کار خواهیم داشت:

$$h(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\, d\omega$$

که در آن:

$$f(\omega)=A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty h(x)\cos\omega x\, dx$$

با محاسبه $A(\omega)$ خواهیم داشت:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-x)\cos\omega x\, dx=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{(1-x)}{\omega}\sin\omega x-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x\right\}\Bigg|_0^1$$

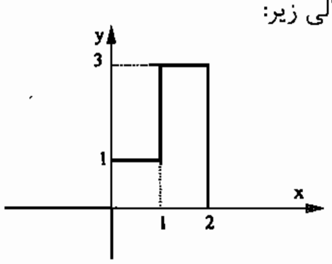
$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega+\frac{1}{\omega^2}\right)=\frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)$$

$$\Rightarrow\quad f(\omega)=\frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)$$

مشتق	انتگرال
$1-x$	$\cos\omega x$
-1	$\frac{1}{\omega}\sin\omega x$
0	$\frac{-1}{\omega^2}\cos\omega x$

مثال : مطلوب است محاسبه $P(\omega)$ از معادله انتگرالی زیر:

$$\int_0^\infty P(\omega)\cos\omega x d\omega=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 3 & 1<x<2\\ 0 & x>2\end{cases}$$



حل : قاعدتاً بیان انتگرالی سمت چپ باید انتگرال فوریه تابع سمت راست باشد، منتها تابع سمت راست فقط برای xهای مثبت تعریف شده، مضافاً بیان انتگرالی نوشته شده فقط دارای $\cos\omega x$ می‌باشد، بنابراین می‌توان این‌طور پنداشت تابع سمت چپ برای xهای منفی به صورت زوج گسترش پیدا کرده و بعد انتگرال فوریه آن نوشته شده، پس باید:

$$P(\omega)=A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x.dx=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^1(1)\cos\omega x.dx+\int_1^2 3\cos\omega x.dx+\int_2^\infty 0\cos\omega x.dx\right\}.$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\sin\omega x}{\omega}\bigg|_0^1+\frac{3\sin\omega x}{\omega}\bigg|_1^2\right\}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{3\sin(2\omega)-2\sin(\omega)}{\omega}$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم $f(x)=\int_0^\infty P(\omega)\sin\omega x.d\omega$, $xf(x)=\int_0^\infty q(\omega)\cos\omega x d\omega$ آن‌گاه رابطه بین $\frac{dP(\omega)}{d\omega}$ و $q(\omega)$ را بیابید.

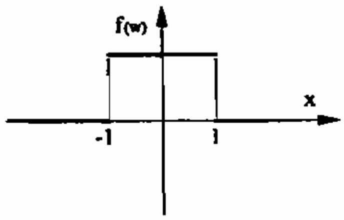
حل : بدیهی است که:

$$q(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty x.f(x).\cos\omega x dx \qquad P(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x).\sin\omega x dx$$

بنابراین ملاحظه می‌شود:

$$\frac{dp(\omega)}{d\omega}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial\omega}\big(f(x).\sin\omega x\big)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x).x.\cos\omega x.dx=q(\omega)\longrightarrow\frac{dp(\omega)}{d\omega}=q(\omega)$$

مثال : با فرض آن که $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}=\int_0^\infty\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x d\omega$ باشد. آن‌گاه انتگرال‌های زیر را به‌دست آورید؟



$$I=\int_0^\infty\frac{\sin x^5}{x}dx$$

$$J=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx$$

حل : در $x=0$ که نقطه پیوستگی تابع است طبق قضیه دیریکله داریم:

$$f(0)=\int_0^\infty\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega(0)d\omega=\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

حل (الف):

با تغییر متغیر $\omega=x^5$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\omega=x^5\Rightarrow d\omega=5x^4dx\\ \omega=0\Rightarrow x=0\\ \omega=\infty\Rightarrow x=\infty\end{cases}$$

پس به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}\xrightarrow{\text{بازنویسی برحسب } x}\int_0^\infty\frac{\sin x^5}{x^5}5x^4.dx=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\int_0^\infty\frac{\sin x^5}{x}dx=\frac{\pi}{10}$$

$$I=\int_0^\infty\frac{\sin x^5}{x}dx=\frac{\pi}{10}$$

حل (ب): با اعمال روش جزء به جزء داریم:

مشتق	انتگرال
$\sin^2 x$	$\frac{1}{x^2}$
$\sin 2x$	$-\frac{1}{x}$

$$J=\int_0^\infty\frac{(\sin x)^2}{x^2}dx\Rightarrow J=-\frac{1}{x}\sin^2x\Big|_0^\infty+\int_0^\infty\frac{\sin 2x}{x}dx$$

$$=0+\int_0^\infty\frac{\sin 2x}{x}dx\xrightarrow[\substack{x=0\ \Rightarrow\ \omega=0\\ x=\infty\ \Rightarrow\ \omega=\infty}]{2x=\omega\ \Rightarrow\ dx=\frac{d\omega}{2}}$$

$$J=\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\frac{\omega}{2}}\cdot\frac{d\omega}{2}=\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

مثال : با استفاده از انتگرال فوریه سینوسی، برای تابع $f(x)=e^{-x}$ که در آن $x \geq 0$ می‌باشد، مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{1+x^2} dx \ , \ m>0$$

حل :

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x} \sin \omega x \, dx=\frac{2}{\pi} L(\sin \omega x)\bigg|_{s=1}=\frac{2}{\pi}\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

لذا با تبدیل $x \to m$ و $\omega \to x$ نتیجه می‌شود.

$$e^{-m}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{1+x^2} dx \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{1+x^2} dx=\frac{\pi}{2}e^{-m}$$

دقت کنید در حقیقت یکی از انتگرال‌های لاپلاس را در این مساله به‌دست آورده‌ایم.

تبدیل فوریه

تبدیل فوریه تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(f(x))=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$$

و تبدیل فوریه معکوس $F(\omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F^{-1}(F(\omega))=f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i\omega x}.F(\omega) d\omega$$

تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی:

$$F_c(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos \omega x \, dx=\tilde{f}_c(\omega)$$

$$F_c^{-1}(\tilde{f})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \tilde{f}_c(\omega)\cos \omega x . d\omega=f(x)$$

به همین ترتیب تبدیلات سینوسی فوریه و معکوس آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F_s(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x).\sin \omega x . dx=\bar{f}_s(\omega)$$

$$F_s^{-1}(\bar{f})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \bar{f}_s(\omega).\sin \omega x \, d\omega=f(x)$$

چند قضیه:

قضیه ۱) هرگاه $F\{f(x)\}=F(\omega)$ باشد خواهیم داشت:

$$F\left\{f^{(n)}(x)\right\}=(i\omega)^n F(\omega)$$

قضیه ۲) به سادگی می‌توان نشان داد:

$$F\left(e^{-a|x|}\right)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

قضیه ۳) (تقارن):

$$F(F(x))=2\pi f(-\omega)$$

و نیز می‌توان نشان داد:

$$F\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$$

مثال : تبدیل فوریه $f(x)=\begin{cases}1 & -2<x<2\\ 0 & \text{بقیه جاها}\end{cases}$ را بیابید.

حل :

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}f(x)dx=\int_{-2}^{+2}e^{-i\omega x}(1)dx=\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega x}\bigg|_{-2}^{+2}=-\frac{1}{i\omega}\left\{e^{-2i\omega}-e^{2i\omega}\right\}$$

$$=\frac{1}{-i\omega}\left\{(\cos 2\omega-i\sin 2\omega)-(\cos 2\omega+i\sin 2\omega)\right\}=\frac{-1}{i\omega}(-2i\sin 2\omega)=\frac{2}{\omega}\sin 2\omega$$

مثال : معادله دیفرانسیل $y''+4y=\begin{cases}0 & x<0\\ e^{-2x} & x>0\end{cases}$ را در نظر بگیرید، چنان‌چه تبدیل فوریه $y(x)$ را $Y(\omega)$ بنامیم، $Y(\omega)$ را به‌دست آورید؟

حل : از دو طرف معادله تبدیل فوریه می‌گیریم.

$$(i\omega)^2Y(\omega)+4Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}f(x)dx\Rightarrow(-\omega^2+4)Y(\omega)=\int_0^{\infty}e^{-i\omega x}.e^{-2x}dx\Rightarrow(4-\omega^2)Y(\omega)=\frac{1}{s+2}\bigg|_{s=i\omega}$$

$$\Rightarrow Y(\omega)=\frac{1}{(i\omega+2)(4-\omega^2)}$$

مثال : تبدیل فوریه سینوسی معکوس $e^{-3\omega}$ را بیابید.

حل :

$$f(x)=F_s^{-1}\left(e^{-3\omega}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-3\omega}\sin\omega x\,d\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}L\{\sin\omega x\}\bigg|_{s=3}\Rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{x}{s^2+x^2}\bigg|_{s=3}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{x}{9+x^2}$$

مثال : تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=xe^{-x}$ را بیابید.

حل :

$$F_c(f(x))=\tilde{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cdot\cos\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}xe^{-x}\cos\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}L\{x\cos x\}\bigg|_{s=1}$$

$$L\{\cos\omega x\}=\frac{s}{s^2+\omega^2}\Rightarrow L\{x\cos\omega x\}=-\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)'=\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow F_c(f(x))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\right\}\bigg|_{s=1}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\omega^2}{\left(1+\omega^2\right)^2}$$

نکته : چند انتگرال مهم:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{k^2+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2k}e^{-kx} \qquad (k>0\ ,\ x>0)$$

$$\int_0^\infty \frac{\omega\sin(\omega x)}{k^2+\omega^2}\,d\omega = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}e^{-kx} & (k>0\ ,\ x>0) \\ -\dfrac{\pi}{2}e^{-kx} & (k>0\ ,\ x>0) \end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\cos(ax)\,dx = \begin{cases} 1-a & 0\le a\le 1 \\ 0 & a>1 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

حفظ کردن این انتگرال‌ها در حل مسایل بسیار موثر خواهد بود.

فصل دوم

توابع مختلط

توابع مختلط

یادآوری

در عدد مختلط $z = x + iy$ که در آن $i = \sqrt{-1}$ و $\mathrm{Im}(z) = y$ و $\mathrm{Re}(z) = x$، روابط اولیه زیر برقرار است:

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\bar{z}$ مزدوج $= x - iy$

$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$

حال اگر $z = x + iy$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ یک عدد مختلط باشد داریم:

$|z - z_0| = R$ یک دایره به شعاع R و به مرکز z_0 می‌باشد.

$|z - z_0| + |z - z_1| = R$ بیانگر یک بیضی با کانون‌های z_0 و z_1 می‌باشد، (با شرط $R > |z_0 - z_1|$)

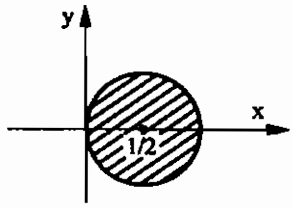
$|z - z_0| - |z - z_1| = R$ بیانگر یک هذلولی با کانون‌های z_0 و z_1 می‌باشد، (با شرط $R > |z_0 - z_1|$)

رابطه $|z - z_0| = |z - z_1|$ بیانگر عمود منصف پاره خطی است که دو سر آن روی z_0 و z_1 است.

ـ فرم قطبی یک عدد مختلط به صورت $z = re^{i\theta}$ است که $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

مثال : مکان هندسی نقاطی از صفحه، که با رابطه $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)>1$ تعریف می‌شود را مشخص کنید.

حل :



$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}\times\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}>1\Rightarrow x^2+y^2-x<0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4}$$

بنابراین مکان هندسی موردنظر داخل دایره‌ای به مرکز $\left(\frac{1}{2},0\right)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است.

مثال : هرگاه $z=x+iy$ باشد، آن‌گاه نامعادله $\frac{|z-3|}{|z+3|}<2$ را ساده کنید.

حل :

$$\frac{|x+iy-3|}{|x+iy+3|}<2 \quad \to \quad \frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}<2$$

$$\frac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2}<4 \quad \to \quad 3x^2+30x+27+3y^2>0 \quad \to \quad x^2+10x+9+y^2>0 \quad \to \quad (x+5)^2-25+9+y^2>0$$

$$\to \quad (x+5)^2+y^2>16 \quad \to \quad |z+5|>4$$

توابع مختلط

حد و پیوستگی در توابع مختلط

تابع مختلط $w=f(z)$ که $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را در نظر بگیرید، می‌گوییم این تابع مختلط در نقطه z_0 دارای حد است، هرگاه هر دو تابع دو متغیره $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) دارای حد تابع باشند. هم‌چنین می‌گوییم تابع مختلط $w=f(z)$ در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ پیوسته است هرگاه هر دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در (x_0,y_0) پیوسته باشد.

به عبارت دیگر:

$$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y) \quad \Rightarrow \quad \lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)+i\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

تذکر: ملاحظه می‌شود که بحث حد توابع مختلط ارتباط نزدیکی با حد توابع دو متغیر دارد و می‌دانیم حاصل یک حد دو متغیره در صورت وجود، باید منحصر به فرد باشد و لذا اگر دو طریق مختلفی که برای محاسبهٔ یک حد دو متغیره استفاده می‌شود به دو جواب مختلف منجر شود حاصل آن حد دو متغیره موجود نیست.

مثال : مقدار ثابت α را چقدر انتخاب کنیم تا تابع مختلط $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z+\operatorname{Im} z}{2\bar{z}+\operatorname{Re} z} & z\neq 0\\ \alpha & z=0\end{cases}$ در $z=0$ پیوسته باشد.

حل :

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z+\operatorname{Im} z}{2\bar{z}+\operatorname{Re} z}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+iy)+y}{2(x-iy)+x}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y(i+1)}{3x-2iy}=\frac{0}{0}\quad \text{مبهم}$$

اگر ترتیب میل کردن متغیر را به صفر در نظر بگیریم:

۱ـ اول فرض می‌کنیم که $x\to 0$ و بعد $y\to 0$ میل می‌کند.

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{(x+iy)+y}{2(x-iy)+x}=\lim_{y\to 0}\frac{y(i+1)}{-2iy}=\frac{i+1}{-2i}$$

۲ـ اول فرض می‌کنیم که $y\to 0$ و بعد $x\to 0$ میل می‌کند.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{(x+iy)+y}{2(x-iy)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$$

پس چون دو جواب مختلف به‌دست آوردیم تابع در $z=0$ دارای حد نیست و به ازای هیچ مقدار α در این نقطه پیوسته نمی‌شود.

مثال : تابع مختلط $f(z)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}+i\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ را در نظر بگیرید، آیا این تابع در نقطه $z=0$ دارای حد می‌باشد.

حل :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)=\lim\frac{xy^2}{x^2+y^2}\xrightarrow{\text{در مختصات قطبی}}\lim_{r\to 0,\forall\theta}\frac{r\cos\theta . r^2\sin^2\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0,\forall\theta} r\cos\theta . \sin^2\theta=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y)=\lim\frac{xy}{x^2-y^2}\xrightarrow{\text{در مختصات قطبی}}\lim_{r\to 0,\forall\theta}\frac{r\cos\theta . r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta . \sin\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$ (وابسته به θ است (حد موجود نیست))

پس در کل حد $f(z)$ در $z=0$ وجود ندارد.

مشتق تابع مختلط

می‌گوییم تابع $f(z)$ در نقطه z_0 مشتق‌پذیر است هرگاه حد زیر موجود باشد.

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

و همچنین $f'(z)$ در صورت وجود از رابطهٔ زیر نیز به‌دست می‌آید:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

مثال : تابع $f(z)=\operatorname{Im}(z)$ مفروض است، این تابع در کجا پیوسته و در کجا مشتق‌پذیر است؟

حل :

$U=0 \quad V=y \quad f(z)=y$

به وضوح دیده می‌شود که توابع U و V همه جا پیوسته هستند، لذا $f(z)$ همه جا پیوسته است.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\operatorname{Im}(z+\Delta z)-\operatorname{Im}(z)}{\Delta z}=\lim_{(\Delta y,\Delta x)\to(0,0)}\frac{(y+\Delta y)-y}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{(\Delta y,\Delta x)\to(0,0)}\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\begin{cases}\Delta x\to 0 \quad , \quad f'(z)=\dfrac{1}{i}\\ \Delta y\to 0 \quad , \quad f'(z)=0\end{cases}$$

پس حد مذکور موجود نیست و لذا $f(z)$ هیچ‌جا مشتق ندارد.

تعاریف:

می‌گوییم تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی است هرگاه در این نقطه یک همسایگی به شعاع ε از این نقطه مشتق‌پذیر باشد (بنابراین مشتق‌پذیر بودن یک تابع در یک نقطه شرط لازم و نه کافی برای تحلیلی بودن آن تابع در نقطه مذکور است).

تمام توابع چند جمله‌ای از z مانند $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}\cdots+a_0$ که در آن n عددطبیعی و $a_n,\dots,a_0$ اعداد مختلط باشند همه‌جا تحلیلی هستند.

تمام توابع گویا مانند $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ که در آن $P(z)$ و $Q(z)$ دو چند جمله‌ای از z می‌باشند در همه جا به جز احتمالاً صفرهای مخرج تحلیلی هستند.

توابع $e^z, \cos z, \sin z$ همه جا تحلیلی هستند.

ترکیب دو تابع تحلیلی، fog، یک تابع تحلیلی است.

نقطه تکین: فرض کنید تابع مختلط $f(z)$ در تمام نقاط به جز نقاطی خاص تحلیلی باشد به آن نقاط خاص، نقاط تکینی تابع گفته می‌شود. بنابراین اگر تابعی هیچ جا تحلیلی نباشد، هیچ نقطهٔ تکینی ندارد.

به طور مثال در تابع $f(z)=e^{\cos z}+z^2$، چون $\cos z$ و e^z و z^2 توابعی تحلیلی هستند پس جمع آن‌ها نیز یک تابع تحلیلی می‌باشد.

چون تابع $f(z)=\operatorname{Im}(z)$ هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست، بنابراین در هیچ‌جا تحلیلی نیست، پس اصلاً نقطهٔ تکینی ندارد.

قضایای کوشی ـ ریمان

الف) قضیه اول کوشی ـ ریمان

هرگاه تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه: $f'(z_0)=\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\right|_{(x_0,y_0)}$

و توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) در شرایط زیر که به معادلات کوشی ـ ریمان مشهورند صدق می‌کنند.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

قضیه دوم کوشی ـ ریمان

تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+v(x,y)$ را در نظر بگیرید. چنانچه توابع v و u در نقطه (x_0,y_0) معادلات کوشی ـ ریمان را ارضا کنند، و توابع v و u و u_x و u_y و v_x و v_y در نقطه (x_0,y_0) و همسایگی آن پیوسته باشند، آن‌گاه تابع مختلط $w=f(z)$ در نقطه $x_0+iy_0=z_0$ مشتق‌پذیر است.

توجه کنید برقراری معادلات کوشی ـ ریمان در یک نقطه شرط لازم ولی غیرکافی برای مشتق داشتن یک تابع مختلط در آن نقطه است. بنابراین عدم برقراری معادلات کوشی ـ ریمان در یک نقطه عدم مشتق‌پذیری تابع مختلط مورد نظر در نقطهٔ مذکور را نتیجه می‌دهد.

مثال : تابع مختلط زیر مفروض است این تابع در چه نقاطی مشتق‌پذیر است و مشتق آن در آن نقاط چیست؟

$$f(z)=2\operatorname{Re}z+\bar{z}+z^2$$

حل :

$$f(z)=2x+x-iy+x^2-y^2+2ixy$$

$$\begin{cases}u(x,y)=3x+x^2-y^2\\ v(x,y)=2xy-y\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3+2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2x-1$$

چون $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$ بنابراین تابع $f(z)$ در هیچ کجا مشتق‌پذیر نیست.

مثال : تابع مختلط زیر را در نظر بگیرد در چه نقاطی مشتق‌پذیر می‌باشد؟

$$f(z)=\operatorname{Re}z^2+iz\bar{z}$$

حل :

$$f(z)=(x^2-y^2)+i(x^2+y^2)\rightarrow\begin{cases}u=x^2-y^2\\ v=x^2+y^2\end{cases}$$

برقراری معادلات کوشی ـ ریمان می‌طلبد:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow 2x=2y\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-\partial v}{\partial x}=-2y=-2x\end{cases}$$

بنابراین معادلات کوشی ـ ریمان فقط روی خط $y=x$ برقرار است.

چون توابع u و v و u_x، u_y، v_x و v_y همه جا پیوسته است.

بنابراین تابع در اطراف خط $y=x$ نیز پیوسته است و $f(z)$ در روی خط $y=x$ مشتق‌پذیر است:

$f'(z)=2x+i(2x)$ (روی خط $y=x$)

مثال : اگر $f(z)=-\operatorname{Re}(z^2)+iz\bar{z}$ آنگاه تابع $f(z)$ در کجا مشتق‌پذیر است؟

$f(z)=y^2-x^2+i(y^2+x^2)$ باشد، در این صورت داریم: $v=y^2+x^2$ و $u=y^2-x^2$ لذا برای برقرای معادلات کوشی ریمان باید داشته باشیم:

حل :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow -2x=2y\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow 2y=-2x\end{cases}$$

معادلات مذکور تنها روی خط $y=-x$ برقرارند و با استفاده از قضیه دوم کوشی ریمان می‌توان نشان داد، تنها روی این خط تابع $f(z)$ مشتق‌پذیر است بنابراین تابع در هیچ کجا (حتی روی خط مزبور) تحلیلی نیست.

تابع همساز

تابع حقیقی $h(x,y)$ را تابعی همساز می‌گوییم هرگاه معادله لاپلاس را ارضا کند.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0$$

قضیه: چنانچه تابع مختلط $w=f(x)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابعی تام باشد، یعنی همه‌جا تحلیلی باشد، آن‌گاه معادلات کوشی ریمان $\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}$ همه جا برقرارند و نیز هر دو تابع v و u توابعی همسازند و اصطلاحاً در این شرایط می‌گوییم v مزدوج همساز u می‌باشد.

مثال : می‌دانیم تابع $f(x)=u(y)+iv(x,y)$ تابعی همواره تحلیلی است کلی ترین ضابطه‌ای که $f(z)$ برحسب z را دارد مشخص کنید:

حل :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

معادلات C. R باید همواره برقرار باشد.

از آن‌جا که $u=u(y)$ لذا $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ و از معادله اول داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0\rightarrow v=v(x)$$

پس از معادله دوم داریم:

$$\underbrace{u'(y)}_{\text{عبارت برحسب } y}=\underbrace{-v'(x)}_{\text{عبارت برحسب } x}=k$$

توجه کنید که رابطه‌ی $u'(y)=-v'(x)$. تنها زمانی برقرار خواهد بود که هر دو تابع، تابع ثابت باشند.

پس $u'(y)=k \Rightarrow u(y)=ky+A$

$v'(x)=-k \Rightarrow v(x)=-kx+B$

پس داریم:

$$f(z)=(ky+A)+i(-kx+B)=-ik(x+iy)+A+iB$$

$$f(z)=-ikz+c$$

نکته : توجه کنید، وقتی تابع تحلیلی $f(z)$ برحسب (x,y) پیدا شد، برای نوشتن آن بر حسب z کافی است همه x ها را به z و همه yها را به صفر تبدیل کنیم.

مثال : چنانچه u مزدوج همساز v و v مزدوج همساز u باشد. توابع u و v باید دارای چه شرطی باشند؟

حل :

$$v \text{ مزدوج همساز } u \Rightarrow \underset{\text{تابع تحلیلی}}{v+iu} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

$$u \text{ مزدوج همساز } v \Rightarrow \underset{\text{تابع تحلیلی}}{u+iv} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

با کمی مقایسه روابط داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0 \rightarrow u=\text{ثابت}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0 \rightarrow v=\text{ثابت}$$

مثال : اگر تابع $f(z)=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ همه جا تحلیلی باشد، معادلات حاکم بر u و v را به‌دست آورید.

حل :

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x+v_y)=\frac{\partial}{\partial y}(v_x-u_y) \rightarrow u_{xx}+v_{xy}=v_{xy}-u_{yy} \rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_x+v_y)=-\frac{\partial}{\partial x}(v_x-u_y) \rightarrow u_{xy}+v_{yy}=-v_{xx}+u_{xy} \rightarrow v_{yy}+v_{xx}=0$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم $u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$ چنانچه $v(x,y)$ مزدوج همساز این تابع باشد و داشته باشیم $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ مطلوب است محاسبه $f'(i)$.

حل :

$$f'(z)=u_x-iu_y$$

$$u_x=2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy-2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

$$u_y=-2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy-2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

$$f'(i)=f'(0,1)=0-i\left(-2e^{0^2-(1)^2}\cos 0\right)=+2ie^{-1}$$

مثال : اولاً مقادیر a ، b و c را طوری پیدا کنید تا تابع $u(x,y)=x^4+ax^2y^2+2x^3+by^4+cxy^2$ تابع همساز باشد. سپس تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ را پیدا کنید.

حل : شرط همساز بودن تابع u ایجاب می‌کند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \Rightarrow \left(12x^2+2ay^2+12x\right)+\left(2ax^2+12by^2+2cx\right)=0$$

چون روابط فوق می‌خواهد همواره به ازای هر x و y برقرار باشد، پس داریم:

x^2 ضریب: $12+2a=0 \rightarrow a=-6$

y^2 ضریب: $2a+12b=0 \rightarrow b=1$

x ضریب: $12+2c=0 \rightarrow c=-6$

برای به‌دست آوردن $f(z)$ می‌توان از دو روش جلو رفت.

الف) نخست مزدوج همساز u را پیدا می‌کنیم پس داریم:

$$u=x^4-6x^2y^2+2x^3+y^4-6xy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=4x^3-12xy^2+6x^2-6y^2 \rightarrow v(x,y)=4x^3y-4xy^3+6x^2y-2y^3+f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=-\left(-12x^2y+4y^3-12xy\right) \rightarrow v(x,y)=4x^3y-4y^3x+6x^2y+g(y)$$

$$\rightarrow v(x,y)=4x^3y-4xy^3+6x^2y-2y^3+c$$

پس داریم:

$$f(z)=\left(x^4-6x^2y^2+2x^3+y^4-6xy^2\right)+i\left(4x^3y-4xy^3+6x^2y-2y^3+c\right)$$

حال با تبدیل $\begin{cases} x \rightarrow z \\ y \rightarrow 0 \end{cases}$ به‌دست می‌آید: $f(z)=z^4+2z^3+ic$

ب) بدون نیاز به محاسبه v با توجه به قضیه اول کوشی ـ ریمان می‌توان $f'(z)$ را به‌دست آورد.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{i\partial u}{\partial y}=\left(4x^3-12xy^2+6x^2-6y^2\right)-i\left(-12x^2y+4y^3-12xy\right)$$

حال با تبدیل $\begin{cases} x \rightarrow z \\ y \rightarrow 0 \end{cases}$ به‌دست می‌آید $f'(z)=4z^3+6z^2$

حال از $f'(z)$ انتگرال می‌گیریم. $\rightarrow f(z)=z^4+2z^3+k$

مثال: اگر $u(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)$ داده شده باشد، مزدوج همساز u و تابع مختلط تحلیلی $f(z)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_x=2^x\ln 2\cos(y\ln 2)=v_y \\ u_y=-2^x\ln 2\sin(y\ln 2)=-v_x \end{cases} \rightarrow \quad v=2^x\sin(y\ln 2)+c$$

$$f(z)=2^x\cos(y\ln 2)+\left(2^x\sin(y\ln 2)+c\right)i$$

حال با تبدیل $\begin{cases} x \rightarrow z \\ y \rightarrow 0 \end{cases}$ به‌دست می‌آید: $f(z)=2^z+C$

فصل سوم

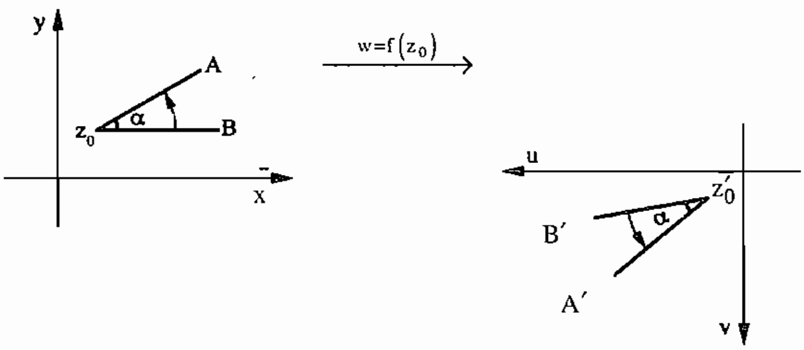
نگاشت‌ها

نگاشت

تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را در نظر بگیرید از نقطه نظر هندسی عملکرد این تابع را می‌توان به صورت یک نگاشت از صفحه z (صفحه (x,y)) به صفحه w (صفحه (u,v)) در نظر گرفت، بدین معنا که تحت این تابع مختلط یک نقطه مشخص $P(x_0,y_0)$ از صفحه z به یک نقطه مشخص مانند (u_0,v_0) از صفحه w تبدیل می‌شود.

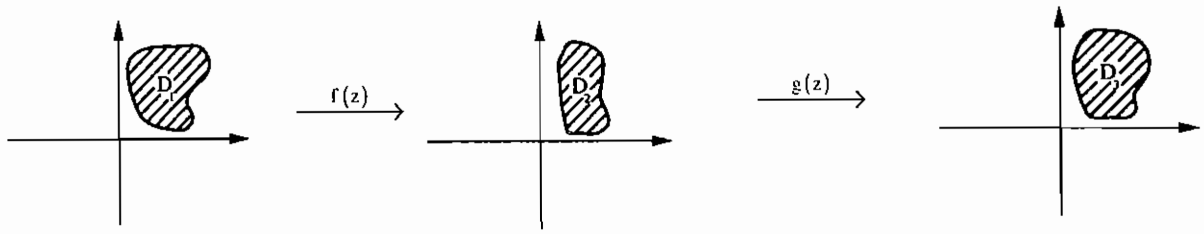
می‌گوییم تابع مختلط مانند $w=f(z)$ دارای نقطهٔ ثابتی مانند z_0 است هرگاه $f(z_0)=z_0$ باشد.

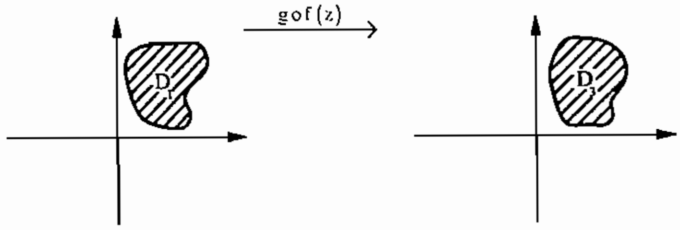
می‌گوییم تابع مختلط $w=f(z)$ در نقطه z_0 همدیس است، هرگاه هر زاویه به راس z_0 در صفحه xy توسط نگاشت مذکور به زاویه‌ای در صفحه uv تبدیل شود که از حیث اندازه و جهت مانند زاویه اول است.



قضیه: هرگاه $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی باشد و $f'(z_0)$ مخالف صفر باشد تابع $w=f(z)$ در نقطه z_0 همدیس است.

اصل ترکیب نگاشت‌ها:





مثال: تابع $f(z)=\frac{z^2-1}{z^2+1}$ مفروض است، این تابع در چه نقاطی از صفحهٔ مختلط همدیس نمی‌باشد؟

حل:

$z^2+1=0 \to z=\pm i$ (جاهایی که تابع تحلیلی نیست)

از طرفی داریم:

$$f'(z)=\frac{2z\left(z^2+1\right)-2z\left(z^2-1\right)}{\left(z^2+1\right)^2}=\frac{4z}{\left(z^2+1\right)^2}$$

$$f'(z)=0 \Rightarrow z=0$$

پس تابع در نقاط $z=\pm i,0$ همدیس نمی‌باشد.

مثال: تابع $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ در چه نقاطی همدیس نمی‌باشد؟

حل: نقاطی که تابع $f(z)$ در آن‌ها تحلیلی نمی‌باشد به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{cases} z=0 \\ \sin\frac{1}{z}=0 \Rightarrow \frac{1}{z}=k\pi \Rightarrow z=\frac{1}{k\pi} \end{cases}$$

از طرفی نقاطی که مشتق تابع $f(z)$ در آن‌ها صفر می‌باشد، بدین ترتیب محاسبه می‌شوند:

$$f'(z)=\frac{\frac{1}{z^2}\cos\frac{1}{z}}{\left(\sin\frac{1}{z}\right)^2}=0 \Rightarrow \cos\frac{1}{z}=0 \Rightarrow \frac{1}{z}=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow z=\frac{1}{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)}$$

لذا برای تمام z ها به‌جز $z=\frac{1}{k\pi}$ و $z=0$ و $z=\frac{1}{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)}$ تابع همدیس خواهد بود.

۱) نگاشت خطی $w=az$ ($a\neq 0$ عدد مختلط دلخواه)

طبیعی است نگاشت مذکور همه جا تحلیلی است و از آن‌جا که $w'=a\neq 0$، این نگاشت همه جا همدیس است.

با فرض $w=\rho e^{i\varphi}\,;\,z=re^{i\theta}\,;a=r_0e^{i\theta_0}$ داریم: $w=az\Rightarrow \rho e^{i\varphi}=re^{i\theta}\,.\,r_0e^{i\theta_0}\Rightarrow \rho e^{i\varphi}=r_0r\,e^{i(\theta_0+\theta)}$

پس داریم: $\rho=r_0r$ و $\varphi=\theta_0+\theta$

یعنی نگاشت مذکور انبساط یا انقباضی به اندازه $|r_0|$ و دورانی به اندازه θ_0 در جهت مثلثاتی بر روی تابع انجام می‌دهد. (بدیهی است اگر θ_0 منفی باشد جهت دوران خلاف جهت مثلثاتی خواهد بود.)

۲) نگاشت خطی $w=az+b$ ($b,a\neq 0$ دو عدد مختلط دلخواه)

می‌توان گفت که این نگاشت سه عمل زیر را انجام می‌دهد.

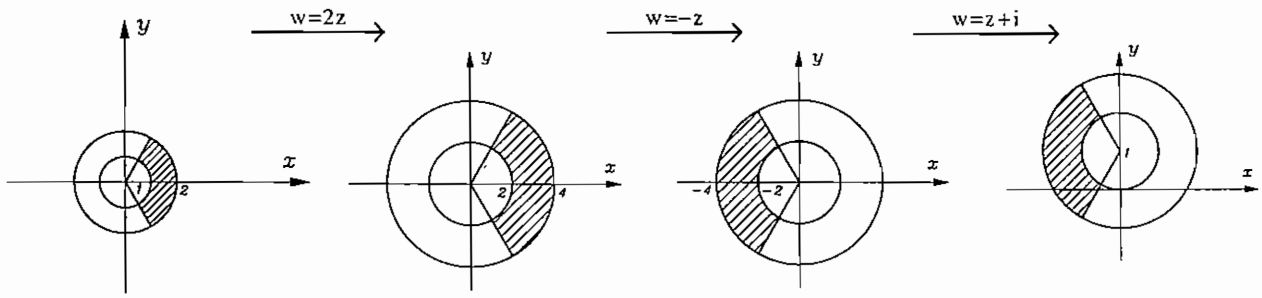
الف) انبساط یا انقباضی به اندازه $|a|$

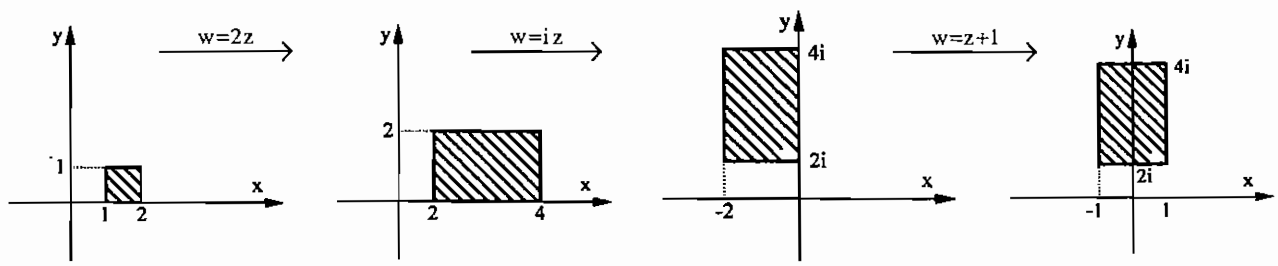
ب) دورانی به اندازه Arga

ج) انتقالی به اندازهٔ b

مثال: تبدیل یافته ناحیه $D_1=\left\{z\,\middle|\,1<|z|<2\,,-\frac{\pi}{3}<\text{Arg}z<\frac{\pi}{3}\right\}$ با نگاشت $w=-2z+i$ و تبدیل یافته ناحیه $D_2=\left\{z\,\middle|\,1\leq \text{Re}\,z\leq 2\,,0\leq \text{Im}\,z\leq 1\right\}$ با نگاشت $w=2iz+1$ را حساب کنید.

حل:





مثال: معادله منحنی $xy=1$ مفروض است تحت نگاشت $w=(1-i)z+2i$ معادله منحنی حاصله در صفحه $u-v$ چگونه خواهد بود؟

حل: $w=(1-i)z+2i \Rightarrow u+iv=(1-i)(x+iy)+2i \Rightarrow u+iv=x+iy-ix+y+2i$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=x+y \\ v=y-x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{u+v-2}{2} \\ x=\dfrac{u-v+2}{2} \end{cases}$$

پس تبدیل یافته $xy=1$ با نگاشت مذکور چنین خواهد بود:

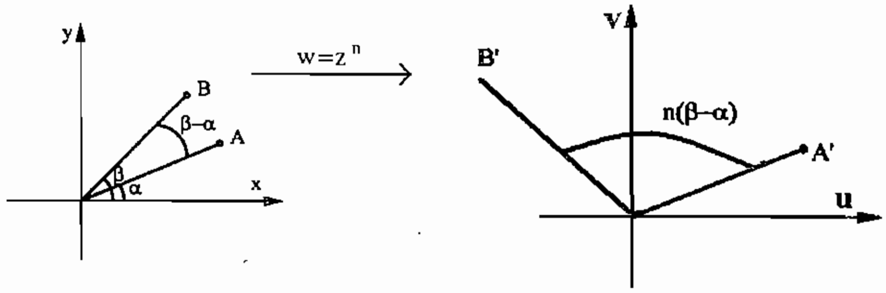
$$\left(\frac{u+v-2}{2}\right)\left(\frac{u-v+2}{2}\right)=1$$

۳) نگاشت توانی $w=z^n$ (n عدد طبیعی مخالف یک)

طبیعی است این نگاشت همه جا تحلیلی است و مشتق آن $w'=nz^{n-1}$ به جز در نقطه $z=0$ همه جا مخالف صفر است. بنابراین نگاشت در همه جا غیر از مبدا مختصات همدیس است.

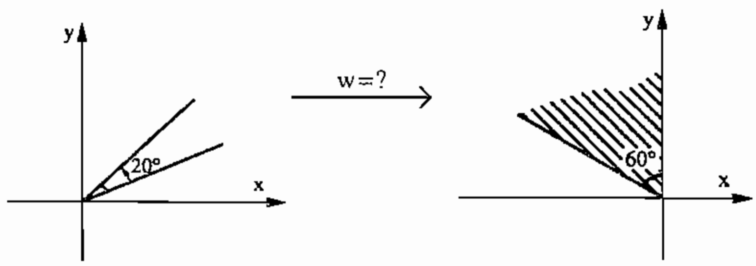
با فرض $w=\rho e^{i\varphi}$ و $z=re^{i\theta}$ داریم:

$$w=z^n \quad \Rightarrow \quad \rho e^{i\varphi}=\left(re^{i\theta}\right)^n \quad \Rightarrow \quad \rho e^{i\varphi}=r^n e^{in\theta} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho=r^n \\ \varphi=n\theta \end{cases}$$

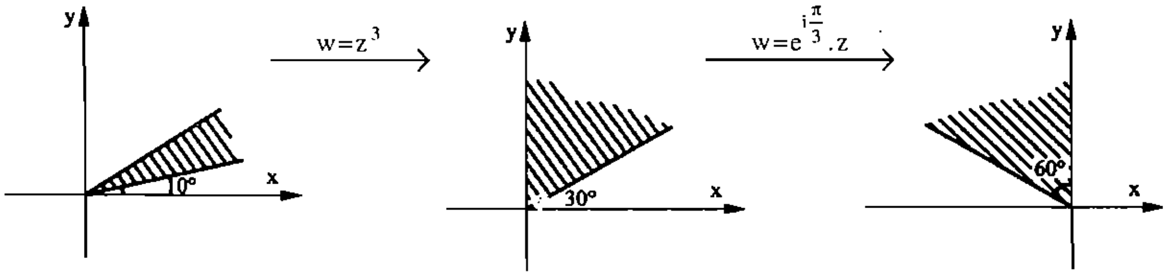


یعنی این نگاشت فاصله هر نقطه تا مبدا را بتوان n رسانده و زاویه شعاع حامل نقطه را n برابر می‌کند.

مثال: نگاشتی پیدا کنید که ناحیه $D:\left\{z \middle| \ 10 \le Agr(z) \le 30\right\}$ را به ناحیه $D'=\left\{w \middle| \ 90 \le Arg(w) \le 150\right\}$ بنگارد.

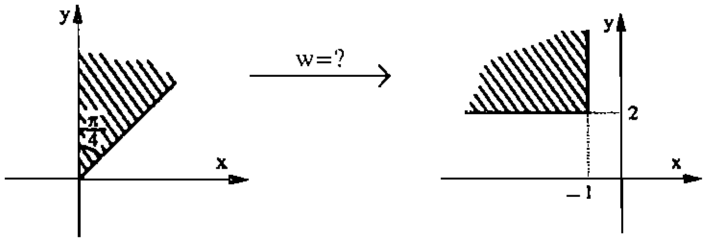


حل: می‌توان گفت:

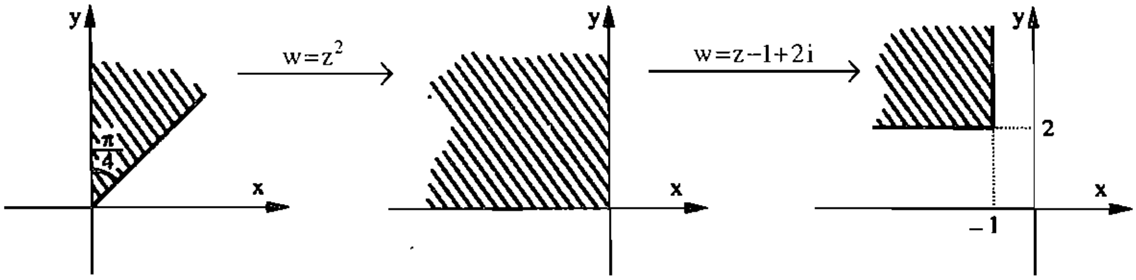


پس نگاشت مورد نظر برابر است با: $w=e^{\frac{i\pi}{3}}z^3$

مثال: نگاشتی را پیدا کنید که ناحیه $D=\left\{z\,\middle|\,\frac{\pi}{4}\le \operatorname{Arg}(z)<\frac{\pi}{2}\right\}$ را به ناحیه $D'=\left\{w\,\middle|\,\operatorname{Re}(w)\le -1\,,\operatorname{Im}(w)\ge 2\right\}$ تبدیل کند.

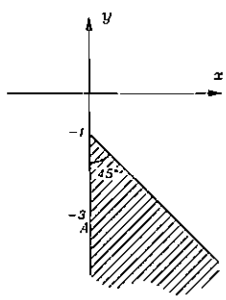


حل:



لذا نگاشت مورد نظر از ترکیب انتهایی دو نگاشت فوق قابل حصول است. $w=z^2-1+2i$

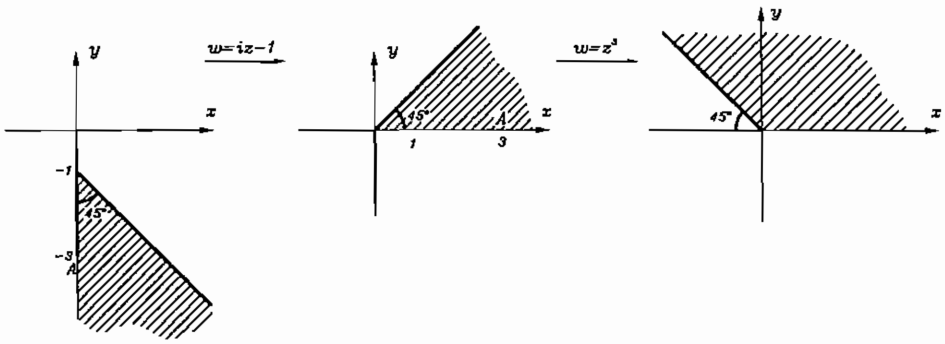
مثال: تبدیل یافته ناحیه نشان داده شده در شکل زیر را تحت نگاشت $w=(iz-1)^3$ بیابید.



حل: w را می‌توان با ترکیب از انتهای نگاشت‌های زیر در نظر گرفت:

$w=(iz-1)\,,\,z^3$

بنابراین با اعمال نگاشت‌های فوق از ابتدا داریم:



مثال: تحت نگاشت $w = z^3 - iz$ خط $x = 2$ به چه معادله‌ای تبدیل می‌شود؟

حل:

$$z^3 = (x+iy)^3 \to w = (x+iy)^3 - i(x+iy)$$

$$w = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 - ix + y$$

$$w = (x^3 - 3xy^2 + y) + (3x^2y - x - y^3)i \to \begin{cases} u = x^3 - 3xy^2 + y \\ v = 3x^2y - x - y^3 \end{cases}$$

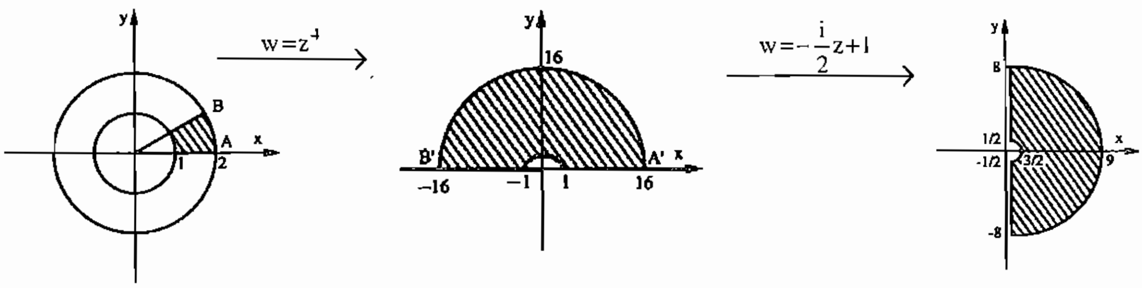
چون تبدیل یافته $x = 2$ را می‌خواهیم، لذا داریم:

$$\begin{cases} u = 8 - 6y^2 + y \\ v = 12y - y^3 - 2 \end{cases}$$

مثال: تبدیل یافته ناحیه $D = \left\{ z \;\middle|\; 1 \le |z| \le 2 \,,\, 0 \le \mathrm{Arg}(z) \le \frac{\pi}{4} \right\}$ را تحت نگاشت $w = -\frac{i}{2}z^4 + 1$ بیابید؟

حل: نگاشت مذکور را می‌توان با ترکیب از انتهای دو نگاشت زیر به‌دست آورد.

$$w = z^4 \,,\, \frac{-i}{2}z + 1$$



مکان هندسی ناحیه D' به صورت مقابل می‌باشد.

$$D' = \left\{ w \;\middle|\; 0.5 \le |w - 1| \le 8 \,,\, \mathrm{Re}(w) \ge 1 \right\}$$

۴) نگاشت ریشهٔ n ام، $w = \sqrt[n]{z}$ (n عدد طبیعی مخالف یک)

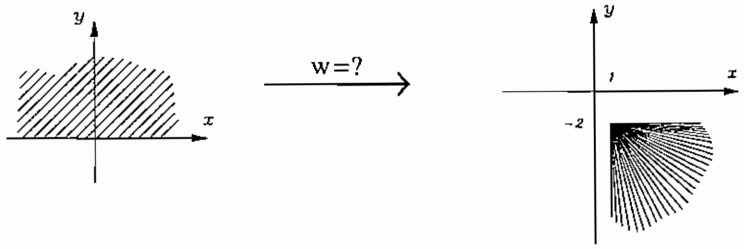
همان‌طور که می‌دانیم چنانچه $z = re^{i\theta}$ باشد در محاسبه ریشه n ام این عدد مختلط به n جواب می‌رسیم که از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \times e^{i\frac{(\theta + 2k\pi)}{n}} = \sqrt[n]{r}\left\{ \cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right\} \qquad (0 \le k < n \;.\; k \in \mathbb{N})$$

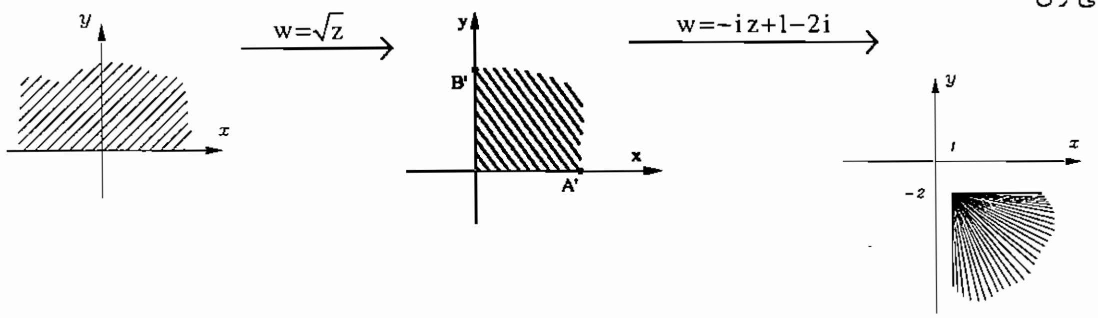
با انتخاب $k=0$ به منظور تک مقداره شدن حاصل $\sqrt[n]{z}$، نگاشت $w=\sqrt[n]{z}$ برابر است با:

$$\rho e^{i\varphi}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}}\Rightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r}\\ \varphi=\dfrac{\theta}{n}\end{cases}$$

مثال: نگاشتی پیدا کنید که نیم صفحه فوقانی صفحه z را به ناحیه $D=\left\{w\;\middle|\;\operatorname{Re}(w)\ge 1,\ \operatorname{Im}(w)\le -2\right\}$ بنگارد.



حل: می‌توان گفت که:



پس نگاشت مورد نظر $w=-i\sqrt{z}+1-2i$ است.

مثال: مطلوب است محاسبه ریشه چهارم عدد $z=1-\sqrt{3}i$

حل:

$$z=1-\sqrt{3}\,i\Rightarrow\begin{cases}r=2\\ \theta=-\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

$$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{2k\pi-\frac{\pi}{3}}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi-\frac{\pi}{3}}{4}\right)\right)$$

حال به ازای $k=0,1,2,3$، چهار ریشه چهارم z به‌دست می‌آید.

$$k=0\rightarrow z_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right)$$

$$k=1\rightarrow z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

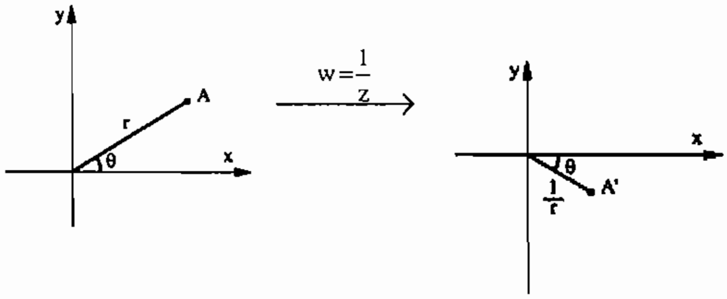
$$k=2\rightarrow z_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$$

$$k=3\rightarrow z_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$$

۵) نگاشت کسری $w=\frac{1}{z}$

بدیهی است نگاشت مذکور در تمام صفحه مختلط، به جز مبدا مختصات تحلیلی است و مشتق آن یعنی $w'=-\frac{1}{z^2}$، همه جا مخالف صفر است پس این نگاشت در همه جا به جز مبدأ مختصات همدیس است و (می‌توان تصور کرد که تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ نقاط $z_1=0$ و $z_2=\infty$ به ترتیب به نقاط $w_2=0$ و $w_1=\infty$ تبدیل شود).

حال با فرض $w=\rho e^{i\varphi}$ و $z=re^{i\theta}$ می‌توان نوشت:



$$w=\frac{1}{z}\Rightarrow \rho e^{i\varphi}=\frac{1}{re^{i\theta}}\Rightarrow \rho e^{i\varphi}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}\rightarrow\begin{cases}\rho=\frac{1}{r}\\ \varphi=-\theta\end{cases}$$

نکته : معادله $A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0$ توصیف کننده یک خط و یا یک دایره در صفحهٔ $x-y$ می‌باشد، اگر بخواهیم تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ تبدیل یافته این شکل را پیدا کنیم می‌نویسیم:

$$w=\frac{1}{z}\rightarrow z=\frac{1}{w}\rightarrow x+iy=\frac{1}{u+iv}.\frac{u-iv}{u-iv}\rightarrow\begin{cases}x=\frac{u}{u^2+v^2}\\ y=\frac{-v}{u^2+v^2}\end{cases}$$

و بدین ترتیب به‌دست می‌آید:

$$D\left(u^2+v^2\right)+Bu-Cv+A=0$$

که خود یک دایره و یا خط در صفحه $u-v$ می‌باشد.

نکته :

$$A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0$$

الف)

$$A=0\,,B=0\quad\Rightarrow\quad y=-\frac{D}{C}$$

خط $y=-\frac{D}{C}$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ تبدیل می‌شود به:

$$u^2+v^2-\frac{C}{D}v=0\rightarrow u^2+\left(v-\frac{C}{2D}\right)^2=\left(\frac{C}{2D}\right)^2$$

ب)

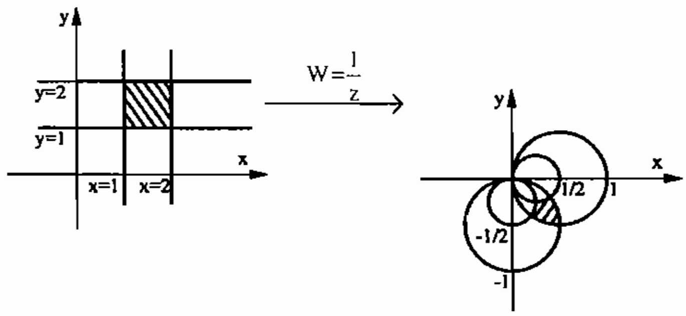
$$A=0\,,C=0\quad\Rightarrow\quad x=-\frac{D}{B}$$

خط $x=-\frac{D}{B}$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ تبدیل می‌شود به:

$$u^2+v^2+\frac{B}{D}u=0\rightarrow u^2+\left(v+\frac{B}{2D}\right)^2=\left(\frac{B}{2D}\right)^2$$

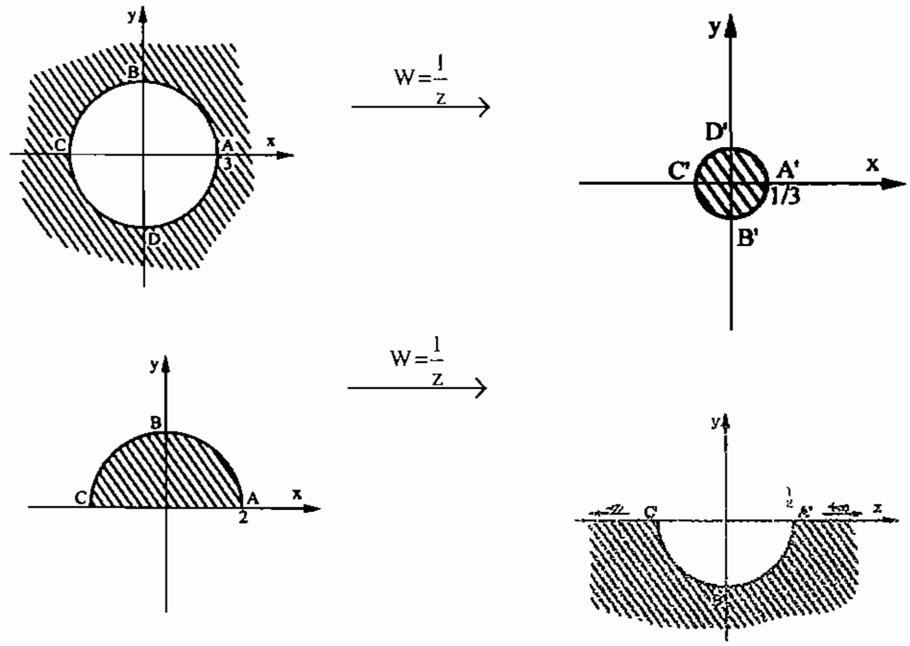
از این دو نکته برای حل بسیاری از مسایل در نگاشت $w=\frac{1}{z}$ می‌توان استفاده کرد.

به عنوان مثال داریم:



مثال: تبدیل یافته نواحی نشان داده شده در شکل زیر را تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ مشخص کنید.

حل:



مثال: تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ ، دایره $|z+1-2i|=1$ به یک دایره تبدیل می‌شود، معادله آن دایره و مساحت آن را بیابید.

حل:

$$|z+1-2i|=1 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=1$$

$$x^2+y^2+2x-4y+4=0$$

پس تبدیل یافتهٔ این دایره تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ چنین است:

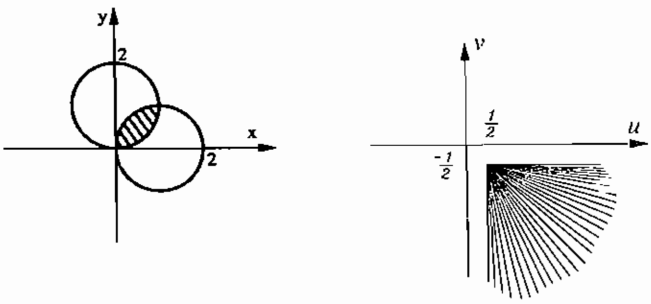
$$4\left(u^2+v^2\right)+2u+4v+1=0$$

$$\left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow \left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$$

پس شعاع دایره حاصل $R=\frac{1}{4}$ و مساحت آن $s=\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{\pi}{16}$ است.

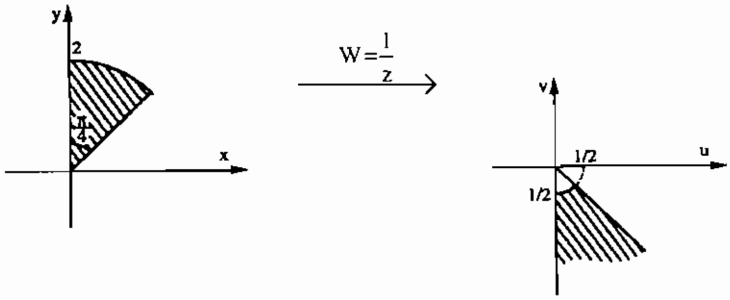
مثال: تبدیل یافته ناحیه محصور بین دو دایره $|z-1|=1$ و $|z-i|=1$ توسط $w=\frac{1}{z}$ را به‌دست آورید.

حل:

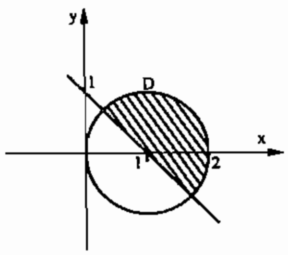


مثال: تبدیل یافته $D=\left\{z \middle| |z|<2, \frac{\pi}{4}<\operatorname{Arg}z<\frac{\pi}{2}\right\}$ را تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ به‌دست آورید.

حل:



مثال: تبدیل یافته ناحیه نشان داده شده را تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ به‌دست آورید.



حل: مرزهای ناحیه مورد نظر را مشخص می‌کنیم و سپس با توجه به رابطه بیان شده داریم:

مرز اول : $x+y=1 \Rightarrow x+y-1=0 \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} (A=0 \quad , \quad B=1 \quad , \quad C=1 \quad . \quad D=-1)$

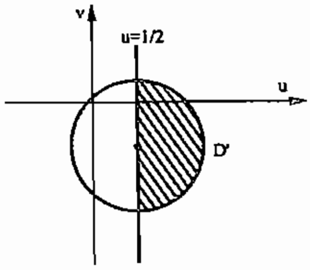
$$-1(u^2+v^2)+1u-1v+0=0 \Rightarrow u^2+v^2-u+v=0 \quad \rightarrow$$

تبدیل یافته خط مورد نظر: $\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

مرز دوم : $(x-1)^2+(y-0)^2=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-2x=0 \quad \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} \quad (A=1 \quad , \quad B=-2 \quad , \quad C=0 \quad , \quad D=0)$

$0(u^2+v^2)-2u-0v+1=0 \quad \rightarrow \quad u=\frac{1}{2}$ تبدیل یافته دایره موردنظر

در نتیجه تبدیل یافته ناحیه D چنین می‌باشد.



۶) نگاشت خطی کسری (تبدیل موبیوس) $W=\dfrac{az+b}{cz+d}$ (با شرط $ad-bc\neq 0$)

بدیهی است نگاشت مذکور در تمام صفحه مختلط به جز $z=-\dfrac{d}{c}$ تحلیلی است و مشتق آن یعنی $w'=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ همه جا مخالف صفر است. بنابراین، این نگاشت، در همه جا، جز $z=-\dfrac{d}{c}$ همدیس است، می‌توان این طور تصور کرد که تحت نگاشت مذکور تابع $z_1=-\dfrac{d}{c}$ و $z_2=\infty$ به ترتیب به نقاط $w_1=\infty$ و $w_2=\dfrac{a}{c}$ تبدیل می‌شود.

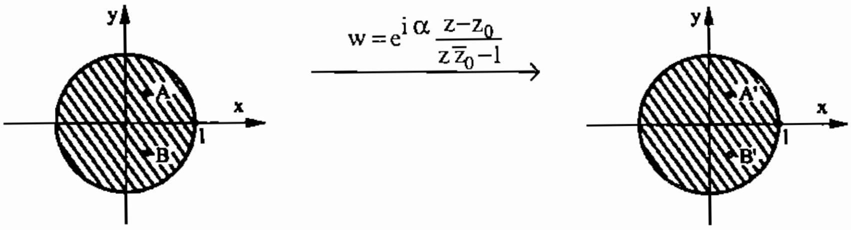
نکته ۱) می‌توان نشان داد اگر از طریق این نگاشت سه نقطهٔ z_1، z_2، z_3 از صفحه z ها را به ترتیب بر سه نقاط w_1، w_2، w_3 از صفحه ωها بنگاریم نگاشت مذکور از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{z-z_1}{z-z_3}\times\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}=\frac{w-w_1}{w-w_3}\times\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}$$

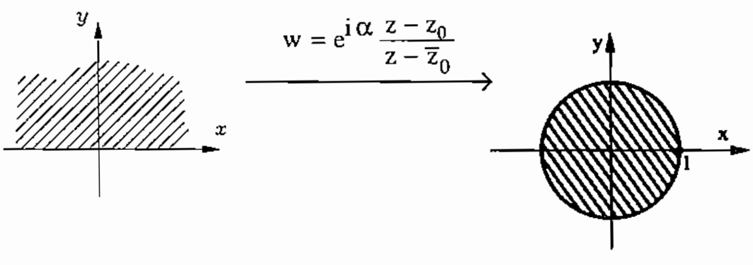
دقت کنید که اگر یکی از مقادیر z_i ها یا w_iها بی‌نهایت بود صورت و مخرج شامل بی‌نهایت را با هم ساده می‌کنیم.

نکته ۲) می‌توان نشان داد کلی‌ترین تبدیل موبیوسی که ناحیه $|z|<1$ را به ناحیه $|w|<1$ تبدیل می‌کند به صورت مقابل است.

که در آن α عدد حقیقی دلخواه و z_0 عدد مختلط با شرط $|z_0|<1$ است.



نکته ۳) می‌توان نشان داد کلی‌ترین تبدیل موبیوسی که ناحیه $\operatorname{Im} z>0$ را به ناحیه $|w|<1$ می‌نگارد به صورت مقابل است.
که در آن α عدد حقیقی و z_0 عدد مختلط دلخواه با شرط $\operatorname{Im} z_0>0$ است.



مثال: با کدام تبدیل می‌توان ربع اول دستگاه مختلط صفحه z را به داخل دایره واحد در صفحه w نگاشت به نحوی که تبدیل یافته نقاط $1+i$ و $i\sqrt{2}$ به ترتیب نقاط 0 و i باشد.

حل: می‌دانیم نگاشت $w_1=z^2$ ربع اول دستگاه مختلط را به نیم صفحه فوقانی تبدیل می‌کند و همچنین نگاشت $w_2=e^{i\alpha}\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ نیم صفحه فوقانی را به داخل دایره واحد می‌نگارد. لذا با تبدیل $w=e^{i\alpha}\dfrac{z^2-z_0}{z^2-\bar{z}_0}$ ربع اول صفحه به داخل دایره واحد نگاشته

می‌شود و برای آن که نقاط $1+i$ و $i\sqrt{2}$ به ترتیب بر نقاط 0 و i نگاشته شوند باید داشته باشیم.

$$0=e^{i\alpha}\frac{(1+i)^2-z_0}{(1+i)^2-\overline{z}_0} \qquad i=e^{i\alpha}\frac{\left(i\sqrt{2}\right)^2-z_0}{\left(i\sqrt{2}\right)^2-\overline{z}_0}$$

از حل معادله اول نتیجه می‌شود:

$$(1+i)^2-z_0=0\Rightarrow z_0=2i$$

و استفاده از این مقدار در معادله دوم نتیجه می‌دهد:

$$i=e^{i\alpha}\frac{-2-2i}{-2+2i}\to e^{i\alpha}\frac{-2i-2}{-2-2i}=1\Rightarrow \alpha=0$$

بنابراین نگاشت مورد نظر عبارت است از:

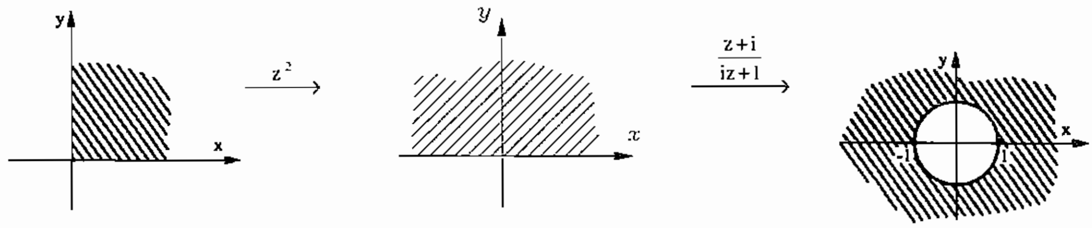
$$w=\frac{z^2-2i}{z^2+2i}$$

مثال: نگاشت $w=\frac{z^2+i}{iz^2+1}$، ربع اول صفحه zها را به کدام ناحیه از صفحه wها تبدیل می‌کند:

۱) نیم دایره بالایی از دایره یکه
۲) خارج از دایره یکه
۳) بالای محور x و خارج نیم دایره یکه
۴) داخل دایره یکه

حل: بدیهی است w را می‌توان با ترکیب از انتهای نگاشت‌های زیر دید. $w: z^2\ ,\ \frac{z+i}{iz+1}$

بنابراین با دیدن اعمال نگاشت‌های فوق از ابتدا داریم:



تبدیل یافته نقطه $z=i$ با نگاشت موبیوس $\frac{z+i}{iz+1}$ چنین است. $w=\frac{i+i}{i^2+1}=\infty$

لذا قطعاً گزینه‌های ۱ و ۴ غلط است.

تبدیل یافته نقطه $z=2i$ با نگاشت موبیوس $\frac{z+i}{iz+1}$ چنین است. $w=\frac{2i+i}{i(2i)+1}=-3i$

لذا قطعاً گزینه‌های ۱ و ۳ غلط است.

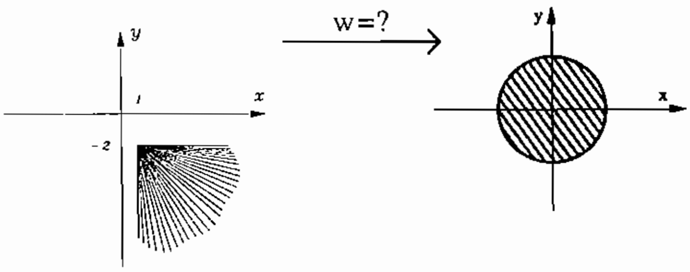
پس گزینه ب صحیح است.

دقت کنید اگر نمی‌خواستیم با روش نقطه یابی مساله فوق را حل کنیم در حقیقت مساله ما این بود که $\operatorname{Im} z>0$ تحت نگاشت $w=\frac{z+i}{iz+1}$ چیست؟

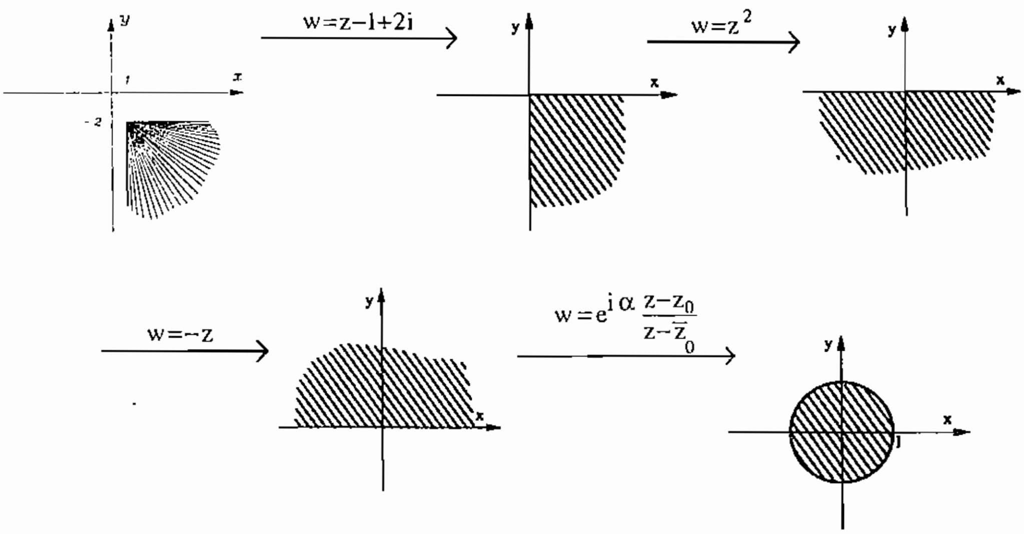
$$w=\frac{z+i}{iz+1}\Rightarrow wiz+w=z+i\Rightarrow z=\frac{i-w}{wi-1}\Rightarrow z=\frac{-u+i(1-v)}{-v-1+ui}\cdot\frac{(-v-1)-iu}{(-v-1)-iu}\ \Rightarrow\ \operatorname{Im} z=\frac{i\left(u^2+v^2-1\right)}{(v+1)^2+u^2}$$

چون ما تبدیل یافته $\operatorname{Im} z>0$ را می‌خواهیم، لذا داریم: $u^2+v^2-1>0\Rightarrow u^2+v^2>1$

مثال: نگاشتی پیدا کنید که عمل زیر را انجام دهد هم‌چنین مشخص کنید که اگر منظور یافتن نگاشتی باشدکه علاوه بر تبدیل فوق نقاط $z_1 = 2-3i$ و $z_2 = 3-3i$ را به ترتیب بر نقاط $w_1 = 0$ و $w_2 = \frac{i}{2}$ بنگارد نگاشت ما به چه صورت خواهد بود؟



حل:



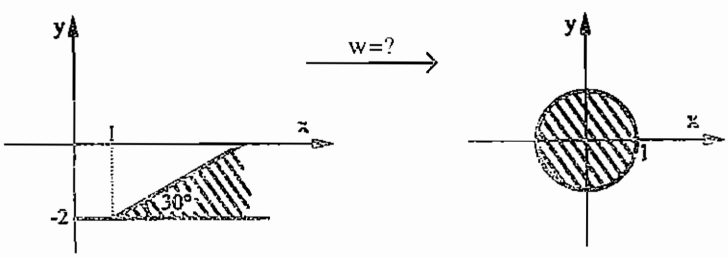
لذا نگاشتی که عمل تبدیل هندسه سمت چپ به هندسه سمت راست را انجام می‌دهد با ترکیب از انتهای نگاشت‌های فوق به صورت زیر به‌دست می‌آید:

پس نگاشت مورد نظر برا بر است با:
$$w = e^{i\alpha}\frac{-(z-1+2i)^2 - z_0}{-(z-1+2i)^2 - \bar{z}_0}$$

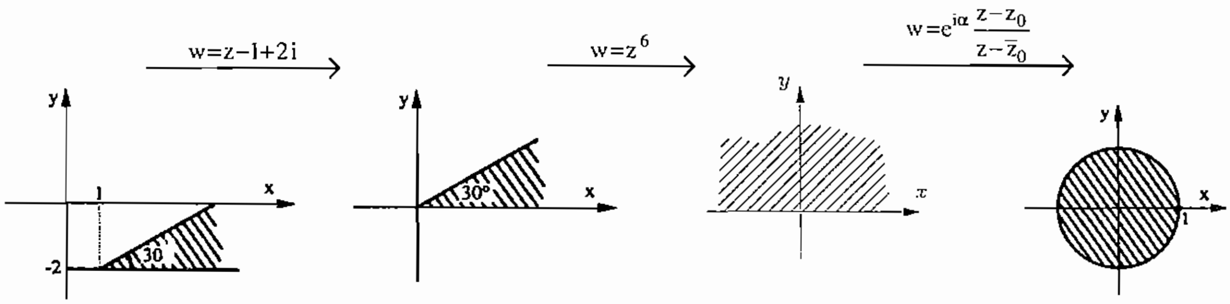
قسمت دوم مسئله:

دقت کنید حال اگر بخواهیم علاوه بر آن که عمل تبدیل نواحی گفته شده صورت می‌گیرد و نقطه z_1 و z_2 مورد نظر به دو نقطه w_1 و w_2 داده شده تبدیل شود کافی است در معادله نگاشت به‌دست آمده یک بار به جای z و w مقادیر z_1 و w_1 و یک بار مقادیر z_2 و w_2 را قرار داده و از حل دو معادله، دو مجهول به‌دست آمده α و z_0 است.

مثال: نگاشتی پیدا کنید که عمل زیر را انجام دهد:



حل:



پس نگاشت مذکور با ترکیب از نگاشت‌های فوق به‌دست می‌آید:

$$w = e^{i\alpha}\frac{(z-1+2i)^6 - z_0}{(z-1+2i)^6 - \bar{z}_0}$$

۷) نگاشت یاکوفسکی $w = z+\frac{1}{z}$

طبیعی است نگاشت مذکور بر تمام صفحه مختلط، به جز $z=0$ تحلیلی است و مشتق آن یعنی $w' = 1-\frac{1}{z^2}$ در همه جا به جز $z=\pm1$، مخالف صفر است. بنابراین نگاشت همه جا به جز $z=0,\pm1$ همدیس است.

می‌توان نشان داد:

$$w = z+\frac{1}{z} \Rightarrow w = re^{i\theta} + \frac{1}{re^{i\theta}} = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

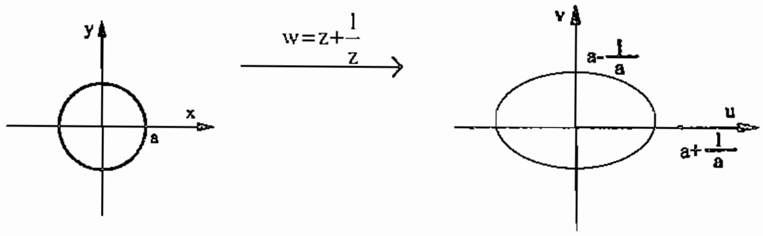
$$u+iv = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$u = \left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta \qquad v = \left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

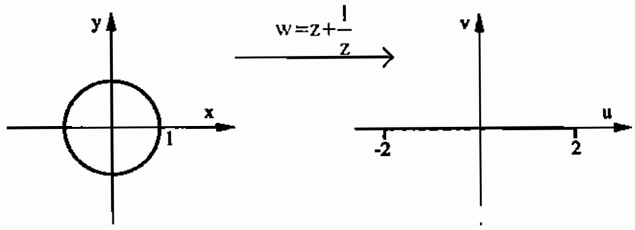
مثال: تبدیل یافته $|z| = a$ را با نگاشت $w = z+\frac{1}{z}$ پیدا کنید و روی حالت خاص $a=1$ بحث کنید.

حل: برای $|z| = a$ داریم:

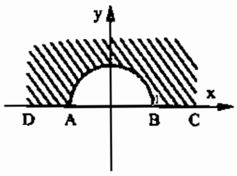
$$\begin{cases} u = \left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta \\ v = \left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} u = \left(a+\frac{1}{a}\right)\cos\theta \\ v = \left(a-\frac{1}{a}\right)\sin\theta \end{cases} \xrightarrow{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1} \frac{u^2}{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2} = 1$$



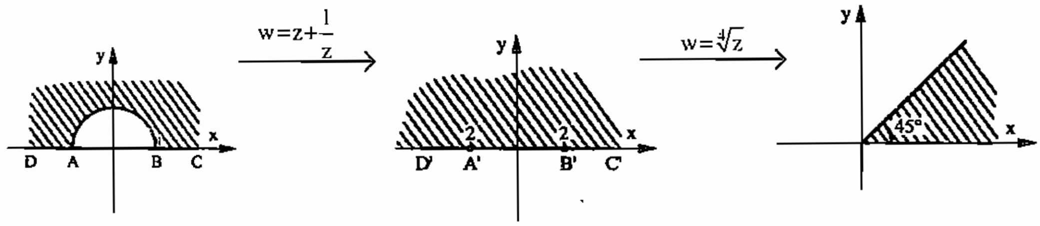
برای $|z|=1$ داریم: (تبدیل یافته دایره $|z|=1$، پاره‌خط $v=0$ و $-2\le u\le 2$ می‌باشد).



مثال: تبدیل یافته ناحیه زیر را تحت نگاشت $w=\sqrt[4]{\left(z+\frac{1}{z}\right)}$ را بیابید.



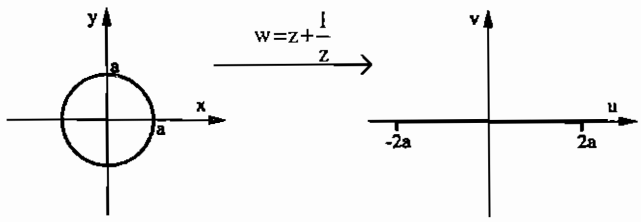
حل:



مثال: دایره $|z|=a$ از صفحه z، تحت نگاشت $w=z+\frac{a^2}{z}$ در صفحه w به چه ناحیه‌ای تبدیل شود.

$$z=re^{i\theta}\ ,\ w=re^{i\theta}+\frac{a^2}{re^{i\theta}}=\begin{cases}u=\cos\theta\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\\ v=\sin\theta\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\end{cases}\qquad \left.\begin{matrix}|z|=a\\ r=a\end{matrix}\right\}\to\begin{cases}u=\cos\theta\left(a+\frac{a^2}{a}\right)=2a\cos\theta\\ v=\sin\theta\left(a-\frac{a^2}{a}\right)=0\end{cases}$$

بنابراین روی محور حقیقی فاصله بین نقاط $-2a$ تا $+2a$ جواب مطلوب مساله خواهد بود.



۸) نگاشت نمایی $W=e^z$

بدیهی است این نگاشت همه جا تحلیلی می‌باشد و مشتق آن یعنی $w'=e^z$ همه جا مخالف صفر است بنابراین این نگاشت همه جا همدیس است.

داریم:

$$w=c^z=e^{x+iy}=e^x.e^{iy}=u+iv=e^x(\cos y+i\sin y)$$

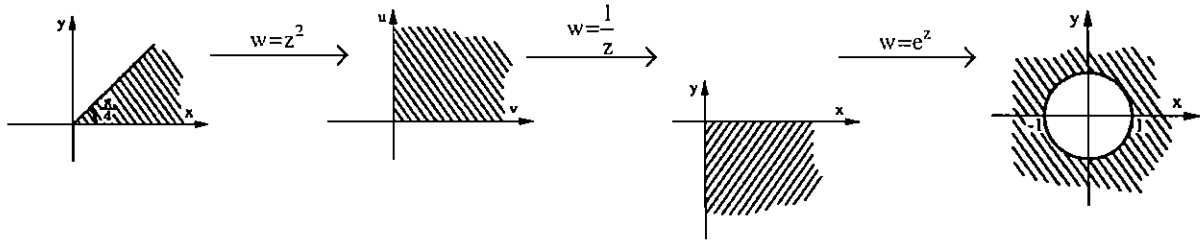
$$\begin{cases}u=e^x\cos y\\ v=e^x\sin y\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود با تبدیل y به $y+2\pi$ تغییری در عبارت‌های u و v حاصل نمی‌شود. به تعبیر دیگر نگاشت مورد نظر متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ است.

$$w=e^{z}=\rho e^{i\varphi}=e^{x+iy}\Rightarrow \rho e^{i\varphi}=e^{x}.e^{iy}\longrightarrow\begin{cases}\rho=e^{x}\\ \varphi=y\end{cases}$$

مثال: تبدیل یافته ناحیه $D=\left\{z\left|\ 0<\operatorname{Arg}(z)<\frac{\pi}{4}\right.\right\}$ تحت نگاشت $e^{\frac{1}{z^2}}$ را به‌دست آورید.

حل: $W:z^2\ ,\ e^{\frac{1}{z}}:z^2\ ,\frac{1}{z}\ ,e^{z}$



۹) نگاشت لگاریتمی $W=\operatorname{Ln}z$

فرض کنید $z=re^{i\theta}$ و $(-\pi<\theta\leq\pi)$ باشد، می‌توان نشان داد.

$$\ln z=\ln r+i(\theta+2k\pi)\,;-\pi<\theta\leq\pi$$

که در آن k یک عدد صحیح نسبی است، ملاحظه می‌شود رابطه فوق برای هر عدد مختلط، بی‌نهایت مقدار برای z تولید می‌کند. بنابراین به خودی خود، بیانگر یک تابع نمی‌باشد لذا اگر بخواهیم به معادله $w=\ln z$ به عنوان یک نگاشت نگاه کنیم باید رابطهٔ فوق را به یک k خاص که معمولاً $k=0$ فرض می‌شود مد نظر قرار دهیم بدین ترتیب می‌توان نگاشت لگاریتمی را تعریف کرد. به مقدار به‌دست آمده با فرض زاویه $-\pi<\theta\leq\pi$ مقدار اصلی تابع می‌گوییم.

$$w=\ln z=\ln r+i\theta \qquad -\pi<\theta\leq\pi$$

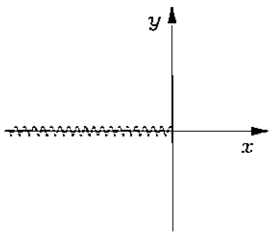
بدیهی است در این شرایط داریم $u=\ln r\ ,\ v=\theta$.

معادلات کوشی به فرم قطبی:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\\[2mm] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}=-\dfrac{\partial v}{\partial r}\end{cases}$$

در این مساله همواره برقرارند.

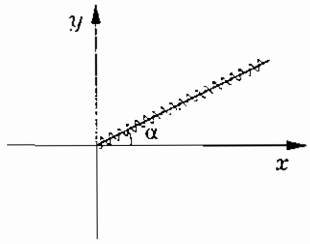
اما مشکلی که وجود دارد این است که تابع مذکور در نقاط واقع بر نیم محور حقیقی منفی اصولاً پیوسته نمی‌باشد.



که به این خط، بریدگی شاخه‌ای تابع $\ln z$ گفته می‌شود و چنانچه تابع لگاریتمی به صورت زیر تعریف شود.

$$w=\ln z=\ln r+i\theta\quad ;\quad \alpha<\theta\leq\alpha+2\pi$$

آن‌گاه بریدگی شاخه‌ای برای این تابع مطابق شکل زیر است.



دقت کنید که در تمام وضعیت‌ها بریدگی‌های شاخه‌ای تابع $w = \ln z$ از نقطه $z = 0$ می‌گذرد که اصطلاحاً $z = 0$ را نقطهٔ شاخه‌ای این تابع می‌گویند.

مثال: مطلوب است محاسبهٔ عبارت‌های زیر:

الف) $A = \ln(-1)$

حل:

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = +\pi \end{cases} \Rightarrow \ln(-1) = \ln 1 + i(+\pi + 2k\pi) = 0 + i\pi(2k+1)$$

دارای بی‌شمار مقدار می‌باشد.

ب) $B = (1-i)^{2i}$

از دو طرف ln می‌گیریم.

$$\ln B = \ln(1-i)^{2i} = 2i\ln(1-i)$$

$$(1-i) = \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \ln(1-i) = \ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$\ln(B) = 2i\left[\ln\sqrt{2} + i\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right] = 2i\ln\sqrt{2} - 2\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$B = \exp\left(-2i\ln\sqrt{2} - 2\left(\frac{-\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$$

مثال: تابع $\ln\left(e^z + 1\right)$ در چه نقاطی تحلیلی نیست (با فرض آن‌که منظور شاخه اصلی لگاریتم است یعنی $\ln z$ با شرط $-\pi < \theta \le +\pi$ مد نظر قرار گرفته)

۱) $x \ge 0, y = (2k+1)\pi$ ۲) $x \ge 0, y = 2k\pi$ ۳) $x \le 0, y = (2k+1)\pi$ ۴) $x \le 0, y = 2k\pi$

حل: چون بریدگی شاخه‌ای lnz به‌صورت $\begin{cases} \operatorname{Im} z = 0 \\ \operatorname{Re} z \le 0 \end{cases}$ فرض شده پس نقاطی که تابع $\ln\left(e^z + 1\right)$ در آن‌ها تحلیلی نمی‌باشد بـه فـرم زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\left(e^z + 1\right) = 0 \\ \operatorname{Re}\left(e^z + 1\right) \le 0 \end{cases}$$

اما داریم:

$$e^z + 1 = e^{x+iy} + 1 = e^x(\cos y + i\sin y) + 1$$

پس نقاط تکین موردنظر از حل دستگاه زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{cases} e^x \sin y = 0 \\ e^x \cos y + 1 \le 0 \end{cases}$$

از معادله اول چون e^x هرگز صفر نمی‌شود، داریم:

$$\sin y = 0 \to \begin{cases} \text{اگر } \cos y = +1 \xrightarrow{\text{معادله دوم}} e^x + 1 \le 0 \text{ غیر ممکن} \\ \text{اگر } \cos y = -1 \xrightarrow{\text{معادله دوم}} -e^x + 1 \le 0 \to e^x \ge 1 \to x \ge 0 \end{cases}$$

لذا نقاط تکین تابع $f(z)$ عبارتند از:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ \cos y = -1 \Rightarrow y = (2k+1)\pi \end{cases}$$

دقت کنید نقاط شاخه‌ای تابع $\ln\left(e^z + 1\right)$ عبارتند از:

$$e^z + 1 = 0 \ \Rightarrow \ e^z = -1 \ \Rightarrow \ z = \ln(-1) = \ln|-1| + i\left(\arg(-1) + 2k\pi\right) = i(\pi + 2k\pi) = i\pi(1+2k)$$

و مشاهده می‌شود بریدگی‌های شاخه‌ای به دست آمده در فوق دقیقاً از این نقاط شاخه‌ای منشعب می‌شوند.

۱۰) نگاشت سینوس و کسینوس

توابع مثلثاتی به‌صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\begin{cases} \sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{cases}$$

با توجه به تعاریف، روابط زیر برقرار می‌باشد.

$$\begin{cases} \sin(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\ \cos(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(iz) = i \sinh(z) \\ \cos(iz) = \cosh(z) \end{cases}$$

مثال: فرض کنید $0 \le \theta < 2\pi$ و $z = re^{i\theta}$ روی درستی هر یک از روابط زیر بحث کنید.

الف) $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$ ب) $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$ ج) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

روابط مربوط به گزینه‌های الف) و ب) و ج) اتحادهایی شناخته شده در بحث توابع مختلط هستند، به عنوان مثال:

$$\overline{\left(e^z\right)} = \overline{\left(e^{x+iy}\right)} = \overline{\left(e^x e^{iy}\right)}$$

و از آن‌جا که هرگاه $z = re^{i\theta}$، آن‌گاه $\overline{z} = re^{-i\theta}$ خواهیم داشت:

$$\overline{\left(e^z\right)} = e^x . e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\overline{z}}$$

و یا:

$$\overline{\sin z} = \overline{\left(\sin(x+iy)\right)} = \overline{\left(\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\right)} = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

و از طرفی:

$$\sin \overline{z} = \sin(x - iy) = \sin x \cos(iy) - \cos x \sin iy = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

مثال: تبدیل یافته خطوط $x=c$ و $y=k$ را تحت نگاشت $w=\sin z$ پیدا کنید.

حل:

$$w=\sin z \longrightarrow \begin{cases} u=\sin x.\cosh y \\ v=\cos x.\sinh y \end{cases}$$

$$x=c \to \begin{cases} u=\sin c.\cosh y \\ v=\cos c \sinh y \end{cases} \xrightarrow{\cosh^2 y-\sinh^2 y=1} \frac{u^2}{\sin^2 c}-\frac{v^2}{\cos^2 c}=1$$

$$y=k \to \begin{cases} u=\sin x.\cosh k \\ v=\cos x.\sinh k \end{cases} \xrightarrow{\sin^2 x+\cos^2 x=1} \frac{u^2}{\cosh^2 k}+\frac{v^2}{\sinh^2 k}=1$$

توجه: به یاد داشته باشید سینوس و کسینوس با آرگومان‌های مختلط هرگز محدودیت بین (1 -) و 1 را ندارد.

مثال: حاصل $|\sin z|^2$ کدام است؟

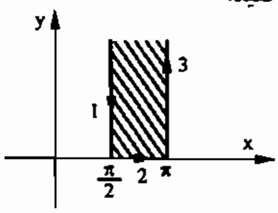
حل: از آن جا که می‌توان نوشت:

$$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$

در نتیجه:

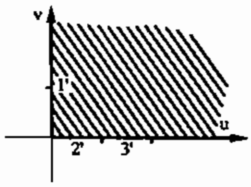
$$|\sin z|^2=\sin^2 x\cosh^2 y+\cos^2 x\sinh^2 y=\sin^2 x\left(1+\sinh^2 y\right)+\cos^2 x\sinh^2 y$$
$$=\sin^2 x+\sinh^2 y\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=\sin^2 x+\sinh^2 y$$

مثال: تبدیل یافته ناحیه نشان داده شده در شکل زیر را با نگاشت $w=-\cos z$ پیدا کنید.



حل:

$$w=-\cos z=-\cos(x+iy)\longrightarrow \begin{cases} u=-\cos x.\cosh y \\ v=\sin x.\sinh y \end{cases}$$

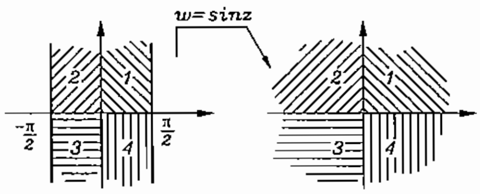


۱) $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2} \\ y:+\infty\to 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=\sinh y \end{cases} \quad 0<v<\infty$

۲) $\begin{cases} y=0 \\ x:\dfrac{\pi}{2}\to\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=-\cos x \\ v=0 \end{cases} \quad 0<u<1$

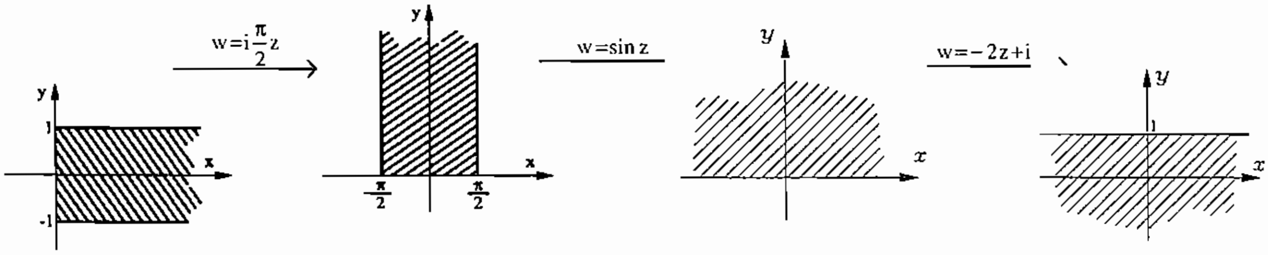
۳) $\begin{cases} x=\pi \\ y:0\to+\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\cosh y \\ v=0 \end{cases} \quad 0<u<\infty$

برای نگاشت $w=\sin z$ حالت خاص زیر در بسیاری موارد در حل مسأله کمک می‌کند.

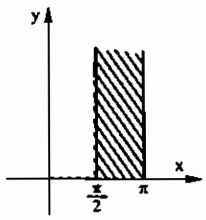


مثال: تبدیل یافته ناحیه $D=\left\{z \,\middle|\, -1\le \operatorname{Im} z\le +1 \,;\, \operatorname{Re} z\ge 0\right\}$ را تحت نگاشت: $w=-2\sin\left(\frac{i\pi}{2}z\right)+i$ بیابید:

نگاشت w را می‌توان با ترکیب‌هایی از انتهای نگاشت‌های زیر به‌دست آورد.

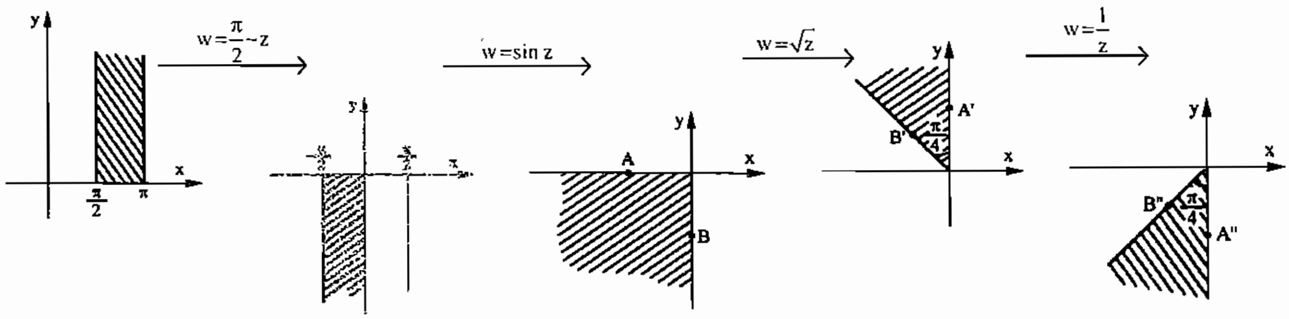


مثال: تبدیل یافته ناحیه نشان داده شده در شکل زیر را با نگاشت $w=\frac{1}{\sqrt{\cos z}}$ پیدا کنید.



حل:

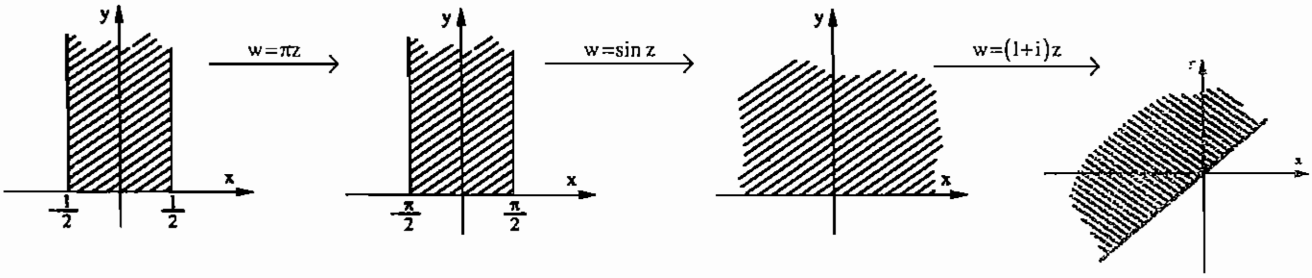
$$W:\frac{\pi}{2}-z\,,\ \sin z\,;\ \sqrt{z}:\frac{1}{z}$$



مثال: ناحیه نشان داده شده در شکل از صفحه z تحت نگاشت $w=(1+i)\sin\pi z$ به کدام ناحیه از صفحه مختلط w تبدیل می‌شود.

حل: با استفاده از ترکیب نگاشت‌ها می‌توان نوشت:

$$w:w_1=\pi z\,,\ w_2=\sin z\,,\ w_3=(1+i)z$$

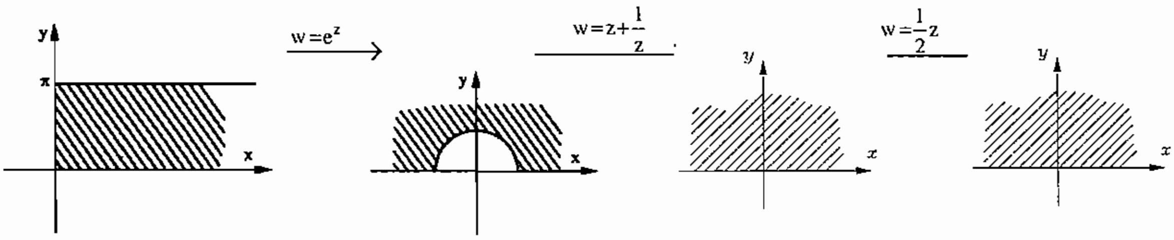


بنابراین تبدیل یافته ناحیه مورد نظر با رابطه $v+u \geq 0$ توصیف می‌شود.

مثال: تبدیل $D=\left\{z \,\middle|\, \operatorname{Re} z>0\,,\,0\leq \operatorname{Im} z\leq +\pi\right\}$ با نگاشت $w=\cosh z$ را به‌دست آورید.

حل: از آن‌جایی که $\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}=\dfrac{e^z+\frac{1}{e^z}}{2}$ لذا این نگاشت را می‌توان به صورت ترکیبی از نگاشت‌های زیر نوشت:

$w_1=e^z\,,\,w_2=z+\dfrac{1}{z}\,,\,w_3=\dfrac{1}{2}z$

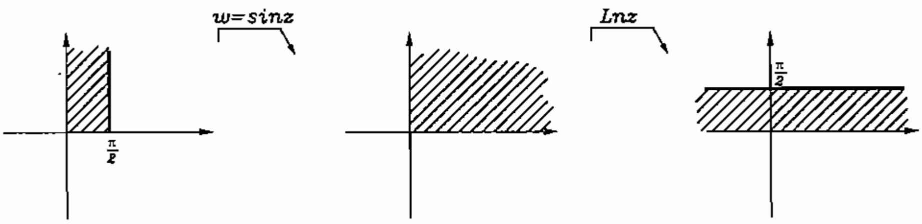


تحت نگاشت $w=\ln(\sin z)$ ناحیه $\left\{0\leq \operatorname{Re} z\leq \dfrac{\pi}{2}\,,\,\operatorname{Im} z\geq 0\right\}$ به کدام ناحیه تبدیل می‌شود؟

حل:

$w=\ln(\sin z):\sin z,\ln z$

لذا می‌توان گفت:



برای $\ln z$ می‌دانیم:

$\begin{cases} u=\ln r \\ v=\theta \end{cases}$

لذا تبدیل یافته ناحیه وسطی را با این نگاشت چنین تعیین کرده‌ایم.

$0<r<+\infty \rightarrow \ln o^+<u<\ln(+\infty)\rightarrow -\infty<u<+\infty$

$0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\rightarrow 0\leq v\leq\dfrac{\pi}{2}$

فصل چهارم

انتگرال‌گیری از توابع مختلط

انتگرال‌گیری از توابع مختلط

در محاسبه انتگرال مختلط $I=\int_c f(z)dz$ که در آن C یک منحنی تعریف شده در صفحه (x , y) می‌باشد، قاعده کلی آن است که با توجه به ارتباطی که بین متغیرها در روی منحنی C وجود دارد تمام متغیرها در f (z) و dz را برحسب یک متغیر بازنویسی کنیم، سپس با توجه به حدود تغییرات آن متغیر و منحنی C مساله را به یک انتگرال برحسب یک متغیر تبدیل کنیم.

توجه: یک روش بسیار مناسب برای محاسبهٔ انتگرال‌های مختلط استفاده از روش مانده‌ها می‌باشد، ولی انتگرال‌گیری به روش مانده‌ها تنها زمانی قابل قبول خواهد بود که دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) تابع زیر علامت انتگرال، تابعی باشد که در تمام صفحه مختلط به جز نقاطی خاص (نقاط تکین) تحلیلی باشد بنابراین وجود ترم‌هایی نظیر Rez ، Imz ، | z |، $\bar{z}$ و ... در تابع تحت انتگرال‌گیری استفاده از روش مانده‌ها را تعطیل می‌کند.

ب) انتگرال‌گیری روی منحنی C ای صورت گرفته باشد که منحنی C بسته باشد.

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال مختلط $I=\int_c z.\bar{z}\,dz$ که در آن c پاره خطی است که نقطه $-1+i$ را به نقطه $2i$ وصل می‌کند.

حل: بدیهی است معادله منحنی c به صورت $y=x+2$ می‌باشد و داریم: $dy=dx$

$$\begin{cases} z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2 \\ dz=d(x+iy)=dx+idy \end{cases}$$

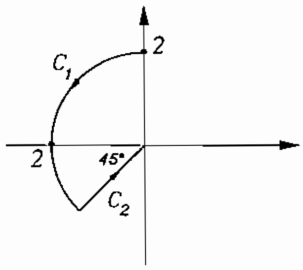
اما روی منحنی c می‌توان گفت:

$$\begin{cases} z\bar{z}=x^2+(x+2)^2 \\ dz=dx+idx \end{cases}$$

$$I=\int_{x=-1}^{0}\left(x^2+(x+2)^2\right)(dx+idx)=\int_{-1}^{0}\left(2x^2+4x+4\right)(1+i)dx=(1+i)\left\{\frac{2}{3}x^3+2x^2+4x\right\}\Bigg|_{-1}^{0}=\left(+\frac{8}{3}\right)(1+i)$$

مثال : حاصل انتگرال مختلط $I=\int \bar{z}.dz$ که در آن C مطابق شکل زیر می‌باشد را محاسبه کنید؟

حل:



$$z=re^{i\theta}\ ;\ \bar{z}=re^{-i\theta}$$

$$I=\int_{C_1}+\int_{C_2}=\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}}\left(2e^{-i\theta}\right)d\left(2e^{i\theta}\right)+\int_{r=2}^{0}re^{\frac{-i5\pi}{4}}\,d\left(re^{\frac{+i5\pi}{4}}\right)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}}2\cancel{e^{-i\theta}}.2i\cancel{e^{i\theta}}.d\theta+\int_{2}^{0}r\cancel{e^{\frac{-i5\pi}{4}}}.\cancel{e^{\frac{+i5\pi}{4}}}dr$$

$$=4i\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}r^2\Big|_2^0=3\pi i-2$$

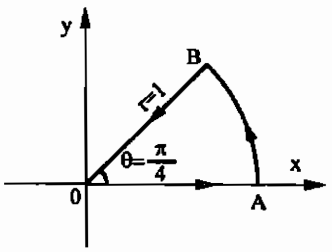
مثال : حاصل انتگرال $I=\oint\left(\frac{z}{\bar{z}}+\frac{|z|}{z}\right)dz$ روی دایرهٔ یکه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت برابر است با:

حل: چون روی دایره واحد هستیم:

$$|z|=1\Rightarrow r=1\Rightarrow z=e^{i\theta}\Rightarrow\begin{cases}\bar{z}=e^{-i\theta}\\ dz=ie^{i\theta}d\theta\end{cases}\Rightarrow I=\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)ie^{i\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}i\left(e^{3i\theta}+1\right)d\theta$$

$$=i\left(\frac{1}{3i}e^{3i\theta}+\theta\right)\Bigg|_0^{2\pi}=i\left(\frac{1}{3i}e^{6\pi i}+2\pi-\frac{1}{3i}e^{0}-0\right)=2\pi i$$

مثال : حاصل انتگرال $\oint\bar{z}dz$ روی مسیر OABO نشان داده شده در شکل، برابر است با:



حل: به‌خاطر داشته باشید که با توجه به آن که تابع $\bar{z}$ تحلیلی نمی‌باشد، لذا استفاده از قضیه مانده‌ها در این مسأله بی‌معنی است و باید انتگرال منحنی‌الخط را به‌دست آوریم.

داریم $z=x+iy,\ \bar{z}=x-iy$ و روی مسیر OA داریم $y=0$ لذا:

$$z=x\ ,\ \bar{z}=x\ ,\ dz=dx\Rightarrow\int_{OA}\bar{z}dz=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

از طرفی داریم $z=re^{i\theta}$, $\bar{z}=re^{-i\theta}$ و روی مسیر AB داریم $r=1$ لذا:

$$z=e^{i\theta}\ ,\ \bar{z}=e^{-i\theta}\ ,\ dz=ie^{i\theta}d\theta\Rightarrow\int_{AB}\bar{z}dz=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}}e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta=\frac{i\pi}{4}$$

و روی مسیر BO داریم $\theta=\frac{\pi}{4}$ لذا:

$$z=re^{\frac{i\pi}{4}},\ \bar{z}=re^{-\frac{i\pi}{4}},\ dz=e^{\frac{i\pi}{4}}dr\Rightarrow\int_{BO}\bar{z}dz=\int_{r=1}^{0}re^{-\frac{i\pi}{4}}e^{+\frac{i\pi}{4}}dr=\frac{1}{2}r^2\Big|_{r=1}^{0}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین به‌دست می‌آید:

$$\oint_c\bar{z}dz=\frac{1}{2}+\frac{i\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{i\pi}{4}$$

مثال : حاصل انتگرال مختلط $\int_{|z-2|=2} \mathrm{Re}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right) dz$ را به‌دست آورید؟

حل: با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{-2i\theta} = \cos 2\theta - i\sin 2\theta$$

از طرفی معادله دایره $|z-2| = 2$ را می‌توان به فرم زیر در مختصات قطبی بیان نمود.

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x \ + y^2 - 4x = 0 \Rightarrow r^2 - 4r\cos\theta = 0 \Rightarrow r = 4\cos\theta \qquad \frac{-\pi}{2} \le \theta \le +\frac{\pi}{2}$$

بنابراین روی دایره مزبور خواهیم داشت:

$$dz = d\left(re^{i\theta}\right) = d\left[4\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta)\right]$$

$$d\left[4\cos^2\theta + 2i\sin 2\theta\right] = (-8\cos\theta\sin\theta + 4i\cos 2\theta)d\theta = (-4\sin 2\theta + 4i\cos 2\theta)d\theta$$

$$\int_{|z-2|=2} \mathrm{Re}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta(-4\sin 2\theta + 4i\cos 2\theta)\ d\theta$$

و با کمی عملیات جبری به‌دست می‌آوریم:

$$I = 2\pi i$$

تعاریف

ـ یک ناحیه را در صفحه z کران دار می‌گوییم هرگاه مرزهای آن به بی‌نهایت نرفته باشد.

ـ یک ناحیه در صفحه y و x را هم‌بند می‌گوییم هرگاه هر دو نقطه در ناحیه مذکور را بتوان بایک پاره خط شکسته به هم متصل کرد بدون آن که لازم باشد از داخل آن ناحیه خارج شویم.

یک ناحیه هم‌بند را زمانی هم‌بند ساده می‌گوییم که هر منحنی بسته داخل ناحیه D با منقبض کردن در آن داخل ناحیه باقی بماند.

هم‌بند مرکب (غیر ساده)   هم‌بند ساده   غیر هم‌بند

قضیه انتگرال کوشی ـ گورسا:

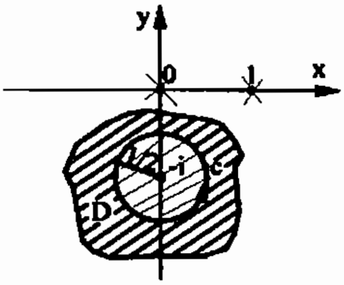
هرگاه تابع $f(z)$ در تمام ناحیه هم‌بند ساده و کران‌دار D تحلیلی باشد آن گاه به ازای هر منحنی بسته دلخواه واقع در ناحیه D انتگرال $I = \int_c f(z)dz$ مساوی صفر است. از قضیه مذکور به سادگی می‌توان نتیجه گرفت چنانچه تابع $f(z)$ در کل ناحیه کران‌دار و هم‌بند ساده D تحلیلی باشد، حاصل انتگرال $\int f(z)dz$ در روی هر منحنی دلخواه غیر بسته که از نقاط تکین $f(z)$ نمی‌گذرد و در این ناحیه واقع است و نقطهٔ z_1 را به نقطهٔ z_2 وصل می‌کند، مستقل از مسیر می‌باشد و حاصل آن برابر است با $I = F(z_2) - F(z_1)$ که در آن $F'(z) = f(z)$ می‌باشد.

مثال : حاصل انتگرال مختلط $I=\int_c e^{-2z}dz$ که در آن c پاره خط واصل بین نقطه $1-i\pi$ و نقطه $2+3i\pi$ می‌باشد کدام است؟

حل: چون تابع e^{-2z} همه جا تحلیلی است لذا طبق نتیجه قضیه انتگرال کوشی گورسا داریم:

$$I=\frac{-1}{2}e^{-2z}\Big|_{z=1-i\pi}^{2+3i\pi}=\frac{-1}{2}\left(e^{-2(2+3i\pi)}-e^{-2(1-i\pi)}\right)=\frac{-1}{2}\left(e^{-4}e^{-6i\pi}-e^{-2}e^{2i\pi}\right)=\frac{-1}{2}\left(e^{-4}-e^{-2}\right)=\frac{1}{2}e^{-2}\left(1-e^{-2}\right)$$

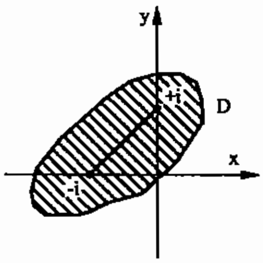
مثال : حاصل انتگرال مختلط $I=\int_c\left(\cos z+\frac{1}{z^3-z^2}\right)dz$ که در آن $c:|z+i|=\frac{1}{2}$ می‌باشد را به دست آورید:



حل: مشخص است تابع $f(z)=\cos z+\frac{1}{z^3-z^2}$ در تمام صفحهٔ مختلط به جز $z=1$ ، $z=0$ تحلیلی می‌باشد حال با توجه به شکل زیر ملاحظه می‌شود که تابع *f (z)* در تمام نقاط ناحیه کران‌دار و هم‌بند سادهٔ *D*، تحلیلی می‌باشد. طبق قضیه انتگرال کوشی ـ گورسا حاصل انتگرال صفر است.

مثال : مطلوب است محاسبه $I=\int_c ze^{z^2}dz$ که در آن c منحنی دلخواهی است که نقطه $z=i$ را به نقاط $z=-1$ وصل کرده است.

حل: بدیهی است تابع زیر علامت انتگرال در تمام ناحیه کران‌دار و هم‌بند ساده *D* تحلیلی است بنابراین طبق نتیجه قضیه کوشی گورسا می‌توان گفت:

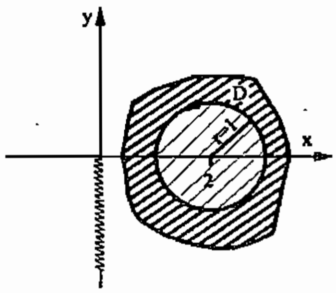


$$I=\int_c ze^{z^2}dz$$

$$I=\frac{1}{2}e^{z^2}\Big|_i^{-1}=\frac{1}{2}\left\{e^{(-1)^2}-e^{(i)^2}\right\}=\frac{1}{2}\left\{e^{1}-e^{-1}\right\}=\sinh 1$$

مثال : مطلوب است محاسبهٔ $\int_c\frac{\ln z}{z+1}dz$ که در آن $-\frac{\pi}{2}\le\theta<\frac{3\pi}{2}$ و $\ln z=\ln r+i\theta$ و $c:|z-2|=1$ می‌باشد.

حل: تابع $f(z)=\frac{\ln z}{z+1}$ در تمام صفحه مختلط به جز $z=-1$ و نقاط بریدگی شاخه‌ای تابع *ln z* تعریف شده تحلیلی است، که این نقاط تکین نقاط *f (z)* در شکل زیر نمایش داده شده است.



ملاحظه می‌شود تابع f (z) در کل ناحیه کران‌دار و هم‌بند ساده D که به‌طور دلخواه ترسیم شده تحلیلی است بنابراین طبق قضیه حاصل انتگرال صفر است.

سری‌های مختلط

ناحیه همگرایی یک سری مختلط

برای یافتن ناحیه همگرایی یک سری مختلط $\sum_{n=0}^{\infty} a(n,z)$ کافی است شرط همگرایی این سری را بررسی کنیم که برای بررسی دو روش وجود دارد.

الف) شرط همگرایی مطابق روش دالامبر

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a(n+1,z)}{a(n,z)}\right|<1$$

ب) شرط همگرایی مطابق روش کوشی

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a(n,z)|}<1$$

و شعاع همگرایی (R) از رابطه‌ی $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a(n+1,z)}{a(n,z)}\right|$ یا $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a(n,z)|}$ به‌دست می‌آید.

توجه کنید اگر ناحیه همگرایی، یک دایره باشد، شعاع دایره را شعاع همگرایی می‌نامیم و می‌توان ثابت کرد سری حاصل از مشتق یک سری توانی و نیز سری حاصل از انتگرال‌گیری یک سری توانی دارای شعاع همگرایی برابر با شعاع همگرایی سری اصلی خواهد بود.

نکته: به خاطر داشته باشید:

$$I=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n+b}\right)^{cn+d}=1^{\infty}\Rightarrow I=e^{ac}$$

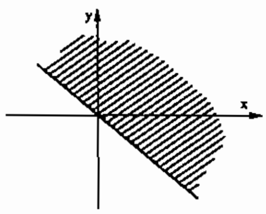
$I=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{an^k+bn^{k-1}+\cdots}=\infty^0$ مبهم پس از رفع ابهام: $I=1$

$$I=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=\frac{n}{e}$$

مثال : ناحیه همگرایی و شعاع همگرایی سری‌های زیر را بیابید.

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{z+1}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{z-i}{z+1}\right)^n\right|}<1\Rightarrow\left|\frac{z-i}{z+1}\right|<1\Rightarrow|z-i|<|z+1|$$



شعاع همگرایی نداریم چون شعاع همگرایی مخصوص دایره است.

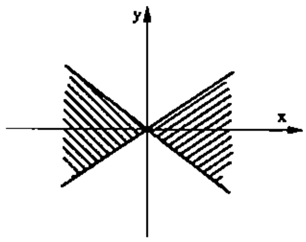
۲) $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nz^2}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|e^{-nz^2}\right|}<1\Rightarrow\left|e^{-z^2}\right|<1$ ناحیه همگرایی

$$\Rightarrow\left|e^{-(x+iy)^2}\right|<1\Rightarrow\left|e^{-x^2+y^2-2ixy}\right|<1\Rightarrow\left|e^{y^2-x^2}\right|\underbrace{\left|\cancel{e^{-2ixy}}\right|}_{1}<1$$

توجه: اگر θ حقیقی باشد داریم: $|e^{i\theta}|=1$ و $e^{\theta}>0$ لذا شرط همگرایی چنین می‌شود:

$e^{y^2-x^2}<e^0 \Rightarrow y^2-x^2<0 \Rightarrow y^2<x^2 \Rightarrow |y|<|x|$ ناحیه همگرایی



شعاع همگرایی نداریم.

مثال: فرض همگرایی سری مختلط $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}(z-i)^n$ کدام است؟

حل: برای همگرایی سری مزبور کافی است داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}(z-i)^{n+1}}{\frac{3^n}{n^3}(z-i)^n}\right|<1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\frac{3^{n+1}}{3^n}|z-i|<1 \Rightarrow 3|z-i|<1 \Rightarrow |z-i|<\frac{1}{3}$$

مثال: ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{z-1}\right)^n$ در صفحه مختلط کدام است؟

حل: شرط همگرایی طبق آزمون کوشی نتیجه می‌دهد:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{z}{z-1}\right|^n}<1 \Rightarrow \left|\frac{z}{z-1}\right|<1 \Rightarrow \left|\frac{x+iy}{(x-1)+iy}\right|<1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}<1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2<x^2-2x+1+y^2 \Rightarrow 1-2x>0 \Rightarrow x<\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{Re} z<\frac{1}{2}$$

بسط تیلور یک تابع مختلط:

هرگاه تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی باشد می‌توان این تابع را بر حسب توان‌های صحیح نامنفی از عبارت $(z-z_0)$ که به بسط تیلور تابع موسوم است به فرم زیر بسط داد.

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

که در آن $a_n=\frac{f^n(z)}{n!}$

توجه: بسط تیلور حول نقطه $z=0$ را بسط مکلورن تابع می‌گویند. حال به بسط مکلورن توابع زیر توجه کنید:

$$\forall z\begin{cases} e^{z}=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\cdots+\dfrac{z^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}\\ \sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ \cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\\ \sinh z=z+\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\cdots=\sum\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ \cosh z=1+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}+\cdots=\sum\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}\end{cases}$$

$$|z|<1 \text{ شرط اعتبار } \begin{cases}\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n=\sum\limits_{n=0}z^n\\ \dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots+(-1)^n z^n=\sum\limits_{n=0}(-1)^n z^n\end{cases}$$

توجه کنید: با توجه به بسط‌های فوق این امکان وجود دارد که بسط بسیاری از توابع دیگر را بدون آنکه لازم باشد ضرایب بسط را به طریقه سنتی پیدا کنیم، به سادگی مشخص کنیم به خصوص می‌توان از بسط‌های فوق جمله به جمله مشتق‌گیری و یا جمله به جمله انتگرال‌گیری کرد و بسط توابع دیگری را به‌دست آوریم.

مثال : تابع $f(z)=(z^3+2z-1)e^{-z}$ مفروض است. ضریب z^4 در بسط مکلورن این تابع را بیابید.

حل:

$$f(z)=(z^3+2z-1)\left\{1+(-z)+\frac{(-z)^2}{2!}+\frac{(-z)^3}{3!}+\frac{(-z)^4}{4!}+\cdots\right\}$$

$$z^4 \text{ ضریب } = (-1)+\frac{(-1)^3}{3!}\times 2+(-1)\frac{(-1)^4}{4!}=-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{24}$$

$$z^4 \text{ ضریب } =-\frac{33}{24}$$

مثال : با فرض آن که $f(z)=\dfrac{\cos z}{(1-z)^2}$ باشد ضریب جمله z^4 در بسط مکلورن این تابع بیابید.

$$\text{می‌دانیم}: \frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+\cdots\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{1}{(1-z)^2}=1+2z+3z^2+4z^3+5z^4+\cdots$$

حال می‌توان نوشت:

$$f(z)=\frac{\cos z}{(1-z)^2}=\frac{1}{(1-z)^2}\cos z=(1+2z+3z^2+4z^3+5z^4+\cdots)\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}\pm\cdots\right)$$

حال ملاحظه می‌شود:

$$z^4 \text{ ضریب } =\frac{1}{4!}-\frac{3}{2!}+5=\frac{1}{24}-\frac{3}{2}+5=\frac{85}{24}$$

مثال : در بسط مکلورن تابع $f(z)=\text{Ln}(1-z).\sin z$، ضریب z^3 کدام است؟

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots \xrightarrow{\text{انتگرال}} -\text{Ln}(1-z)=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots$$

حال می‌توان نوشت:

$$f(z)=\text{Ln}(1-z).\sin z=-\left(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots\right)\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)$$

لذا می‌توان دید: z^3 ضریب $:=-\frac{1}{2}$

انواع نقاط تکین تابع مختلط:

همان‌طور که می‌دانیم اگر تابع $f(z)$ در تمام صفحه مختلط به جز نقاطی خاص تحلیلی باشد به آن نقاط خاص، نقاط تکین تابع گفته می‌شود که این نقاط تکین را می‌توان به دو دسته تکین‌های تنها و تکین‌های غیرتنها دسته‌بندی کرد.

بنابراین، اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد اما در هر نقطه از همسایگی آن تحلیلی باشد، آنگاه z_0 را نقطه‌ی تکین تابع گویند.

برخی مواقع وقتی نقاط تکین یک تابع را مشخص می‌کنیم ملاحظه می‌کنیم که تابع دارای بی‌شمار نقطهٔ تکین است که همگی در حال نزدیک شدن یا انباشته شدن روی یکی از نقاط تکین می‌باشد که اصطلاحاً آن نقطهٔ تکین را، تکین انباشته گویند.

مثال : برای توابع زیر نقاط تکین و نوع آن‌ها را از حیث تنها و یا غیرتنها بودن مشخص کنید.

حل:

۱) $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$

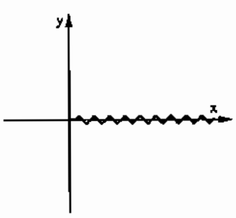
نقاط تکین عبارتند از: (از نوع تنها) $z^2+4=0 \Rightarrow z=\pm 2i$

۲) $f(z)=\frac{1}{(z-1)^{10}}$

نقاط تکین عبارتند از: (از نوع تنها) $(z-1)^{10}=0 \quad \Rightarrow \quad z=1$

۳) $f(z)=\ln z \quad , \quad 0\le\theta<2\pi$

تابع $\ln z$ تعریف شده در تمام صفحه مختلط به جز بریدگی شاخه‌ای آن تحلیلی است و این نقاط بریدگی شاخه‌ای که در شکل زیر نشان داده شده‌اند، تکین‌های غیرتنهای این تابع می‌باشند.



۴) $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$

نقاط تکین عبارتند از:

$$\begin{cases} z=0 \\ \sin\frac{1}{z}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z}=k\pi \Rightarrow z=\frac{1}{k\pi} \quad \Rightarrow \quad z=\pm\frac{1}{\pi},\pm\frac{1}{2\pi},\pm\frac{1}{3\pi},\pm\frac{1}{4\pi}+\cdots \end{cases}$$

که تمام نقاط تکین از نوع تنها می‌باشند، ولی $z=0$ تکین از نوع غیرتنها (انباشته) است.

انواع نقاط تکین

نقاط تکین تنها خود به دو دستهٔ تکین‌های از نوع قطب و تکین اساسی تقسیم‌بندی می‌شوند.

تعریف (قطب و تکین اساسی):

اگر z_0 یک تکین تنها برای تابع $f(z)$ باشد وبتوان mای پیدا کرد که حاصل حد $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ موجود و مخالف صفر باشد آنگاه z_0 قطب مرتبهٔ m ام تابع $f(z)$ است و در غیر این صورت z_0 را تکین اساسی تابع $f(z)$ می‌گوییم.

مثال : تابع $f(z)=\dfrac{1-e^{z^3}}{z^7}$ مفروض است، نقاط تکین این تابع و نوع آن را مشخص کنید.

حل: کاندیدای نقطه تکین $z=0$ است. (به خاطر صفر شدن مخرج)

$$\lim_{z\to 0} z^7 . \frac{1-e^{z^3}}{z^7}=0$$

پس $z=0$ قطب مرتبه هفتم نمی‌باشد.

$$\lim_{z\to 0} z^5 \frac{1-e^{z^3}}{z^7}=\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{z^3}}{z^2}=\frac{0}{0}\overset{H}{\Rightarrow}\lim_{z\to 0}\frac{-3z^2e^{z^3}}{2z}=\lim_{z\to 0}-\frac{3}{2}ze^{z^3}=0$$

$$\lim_{z\to 0} z^4 \frac{1-e^{z^3}}{z^7}=\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{z^3}}{z^3}=\frac{0}{0}\overset{H}{\Rightarrow}\lim_{z\to 0}\frac{-3z^2e^{z^3}}{3z^2}=-1\neq 0$$

پس $z=0$ قطب مرتبه ۴ است.

مثال : تابع $f(z)=\dfrac{\sin\left(\frac{1}{z-1}\right).\sin^4(z+1)}{\left(z^2-1\right)^3.z^7}$ برای این تابع نوع نقاط $z=0$ و $z=\pm1$ را تعیین کنید.

حل:

برای $\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$، $z=1$ تکین اساسی است.

برای $\sin^4(z+1)$، $z=-1$ صفر مرتبه چهارم است.

برای $\left(z^2-1\right)^3$، $z=\pm1$ هر کدام صفر مرتبه سوم‌اند.

برای z^7 , $z=0$ صفر مرتبه هفتم است.

پس برای کل تابع $f(z)$ داریم:

$z=0$ یک قطب مرتبه هفتم است.

$z=-1$ یک صفر مرتبه اول است.

$z=1$ یک تکین اساسی است.

مثال : تابع $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}.\,\text{Ln}z.\sin(z-2)}{\left(z^2-4\right)}$ مفروض است، با فرض $-\pi\leq\theta<\pi$ و $\text{Ln}z=\text{Ln}r+i\theta$ مشخص کنید نقاط $z=0$ و $z=\pm2$ برای این تابع چگونه نقاطی هستند؟

حل: تابع $Ln\,z$ تعریف شده در تمام صفحه مختلط به جز بریدگی شاخه‌ای تابع تحلیلی است. (که این بریدگی شاخه‌ای با توجه به تعریف $-\pi\leq\theta<\pi$ روی نیم محور حقیقی منفی واقع است).

برای $e^{\frac{1}{z}}$، $z=0$ تکین اساسی است، برای $\sin(z-2)$، $z=2$ صفر مرتبه اول است و برای (z^2-4)، $z=\pm2$ هر کدام صفر مرتبه اولند.

جمع‌بندی: برای تابع $f(z)$ ، $z=2$ یک قطب مرتبه صفرم تابع است (تکین برداشتنی تابع است) ($z=2$ نقطه تکین تابع به حساب نمی‌آید).

$z=-2$ تکین غیرتنها است. $z=0$ تکین غیرتنها است. (هر دو روی بریدگی شاخه‌ای تابع $\ln z$ قرار گرفته‌اند).

مثال : قطب‌های تابع $f(z)=\dfrac{z}{\sinh z\cosh z}$ عبارتند از:

حل:

$$\sinh z\cosh z=0\Rightarrow\frac{1}{2}\sinh 2z=0\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{1}{i}\sin(2iz)=0$$

$$\Rightarrow\sin 2iz=0\Rightarrow 2iz=n\pi\Rightarrow z=\frac{n}{2i}\pi\qquad n=0,\pm1,\ldots$$

توجه کنید که به ازای $n=0$ ، یعنی $z=0$، مخرج $f(z)$ صفر می‌شود، و صورت کسر نیز در این نقطه صفر می‌شود، و چون:

$$\lim_{z\to0}\frac{z}{\sinh z\cosh z}=1$$

بنابراین $z=0$ یک نقطه تکین برداشتنی بوده و به تعبیری تابع در این نقطه تحلیلی است و $z=0$ قطب به حساب نمی‌آید. و قطب‌های تابع به ازای مقادیر $n=1,2,\ldots$ ایجاد می‌شود. (که همگی قطب مرتبه اول خواهند بود).

مثال : نقاط تکین تابع $f(z)=\dfrac{e^{\sin z}+3}{(e^z+i)(z^2+1)}$ عبارتند از:

حل: می‌دانیم توابع $\sin z$ و e^z همواره تحلیلی می‌باشند، لذا ترکیب آن‌ها یعنی $e^{\sin z}$ همواره تحلیلی می‌باشند، و از آن‌جا که z^2+1 نیز همواره تحلیلی است پس تابع مورد نظر به ازای موارد زیر غیرتحلیلی خواهد بود.

$$e^z+i=0\Rightarrow e^z=-i\Rightarrow z=\ln(-i)=\ln(1)+i\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\Rightarrow z=i\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi$$

$$z^2+1=0\Rightarrow z^2=-1\Rightarrow z=\pm i$$

پس نقاط تکین عبارتند از:

$$z=\pm i\quad,\quad z=i\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi$$

بسط لوران

اگر تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی باشد حول این نقطه دارای بسط تیلور است اما اگر در این نقطه تحلیلی نباشد در اطراف آن نقطه بسط تیلور نخواهد داشت.

اما چنانچه z_0 یک نقطهٔ تکین از نوع تنها برای تابع $f(z)$ باشد، می‌توان تابع را حول این نقطه به بسطی که اصطلاحاً بسط لوران تابع می‌باشد نوشت. ویژگی اساسی این بسط آن است که برخلاف بسط تیلور توان‌های صحیح منفی عبارت $(z-z_0)$ نیز در آن وجود دارد و دارای ویژگی زیر می‌باشد:

۱) بالاترین توان منفی عبارت $(z-z_0)$ را، مرتبه قطب برای نقطه تکین z_0 در نظر می‌گیریم و اگر بالاترین توان منفی موجود نباشد به معنای آن است که z_0 یک تکین اساسی تابع بوده است.

۲) ضریب جمله $\frac{1}{z-z_0}$ در بسط لوران مذکور را C_{-1} یا $\operatorname{Res} f(z)\big|_{z_0}$ و به تعبیری، مانده تابع در نقطه z_0 می‌گوییم.

مثال: بسط توابع زیر را حول نقطه $z=0$ نوشته و نتایج حاصله را بیان کنید.

1) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$

$$f(z)=z^3\left\{1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^3 3!}+\frac{1}{z^4 4!}+\frac{1}{z^5 5!}+\cdots\right\}=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\cdots$$

به واسطه وجود توان‌های منفی بسط مذکور از نوع لوران است و این به ما می‌گوید $z=0$ نقطه تکین است و چون بالاترین توان منفی دیده نمی‌شود پس $z=0$ تکین اساسی است.

2) $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$

روش اول:

$$f(z)=\frac{1-\left\{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots\right\}}{z^2}=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}+\cdots$$

در بسط مذکور توان‌های منفی عبارت z موجود نمی‌باشد. پس بسط مذکور از نوع تیلور می‌باشد، یعنی تابع در $z=0$ تحلیلی می‌باشد ($z=0$ نقطه تکین نیست.)

روش دوم:

$z=0$ صفر مرتبه دوم مخرج است.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{صورت کسر} & (1-\cos z)\big|_{z=0}=0\\ \text{مشتق اول صورت کسر} & \sin z\big|_{z=0}=0\\ \text{مشتق دوم صورت کسر} & \cos z\big|_{z=0}=1\end{array}\right\}$$

پس $z=0$ صفر مرتبه دوم صورت کسر است

در کل داریم: $z=0$ قطب مرتبه صفر یا یک تکین برداشتی برای تابع $f(z)$ می‌باشد.

3) $f(z)=z^3\cos\frac{1}{z}$

$$f(z)=z^3\left\{1-\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^4}{4!}-\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^6}{6!}\right\}=z^3-\frac{z}{2!}+\frac{1}{4!z}-\frac{1}{6!z^3}+\cdots$$

به واسطه وجود توان‌های منفی بسط فوق، از نوع لوران می‌باشد و چون بالاترین توان منفی در این بسط قابل رؤیت نیست، لذا $z=0$ یک تکین اساسی تابع $f(z)$ بوده و بنابراین داریم: $\operatorname{Res} f(z)\big|_{z=0}=\frac{1}{4!}$

مثال : مانده تابع $f(z)=(z-1)^5\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)$ در $z=1$ کدام است؟

حل: $z=1$ تکین اساسی تابع است و داریم:

$$f(z)=(z-1)^5\cos\frac{1}{z-1}=(z-1)^5\left\{1-\frac{1}{(z-1)^2 2!}+\frac{1}{(z-1)^4 4!}-\frac{1}{(z-1)^6 6!}+-\cdots\right\}$$

بنابراین ضریب جمله $\frac{1}{z-1}$ (یعنی مانده تابع در نقطه $z=1$) عبارت است از:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=1}=\frac{-1}{6!}$$

مثال : ماندهٔ تابع $f(z)=(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ در نقطه تکین $z=-2$ برابر است با:

حل: توجه داریم که $z=-2$ نقطه تکین اساسی تابع $f(z)$ است، برای محاسبه مانده در $z=-2$ باید سری توانی حول نقطه $z=-2$ را بنویسیم، لذا:

$$f(z)=(z+2-5)\sin\frac{1}{z+2}=(z+2-5)\left[\frac{1}{z+2}-\frac{1}{(z+2)^3 3!}+\frac{1}{(z+2)^5 5!}-+\cdots\right]=-\cdots+\frac{1}{z+2}(-5)+\cdots$$

لذا مانده $f(z)$ در $z=-2$، ضریب جمله $\frac{1}{z+2}$ یعنی -5 است.

چند روش برای پیدا کردن ماندهٔ یک تابع در نقاط تکین از نوع قطب

اگرچه یک راه حل همیشگی برای پیدا کردن مانده با استفاده از بسط لوران تابع می‌باشد که در بسط لوران ما تابع را حول نقطه z_0 می‌نویسیم و ضریب جمله $\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ مانده تابع در آن نقطه می‌باشد. اما چنانچه z_0 یک تکین از نوع قطب باشد مانده را می‌توان با روش‌های زیر پیدا کرد.

الف اگر z_0 یک قطب مرتبه اول تابع $f(z)$ باشد داریم:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0).f(z)$$

ب) تابع $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ را در نظر بگیرید چنانچه z_0 یک قطب مرتبه اول این تابع باشد و $P(z_0)\neq 0$ داریم:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0}=\frac{P(z)}{Q'(z)}\Big|_{z_0}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

ج) چنانچه z_0 یک قطب مرتبه mام تابع $f(z)$ باشد داریم:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left\{(z-z_0)^m f(z)\right\}$$

مثال : مانده تابع $f(z)=\frac{2z+3}{(z-1)(z^2+4)}$ را در نقطه تکین $z=2i$ پیدا کنید.

حل: بدیهی است $2i$ قطب مرتبه اول تابع است و البته از هر دو مورد الف و ب می‌توان استفاده کرد.

الف) $\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=2i}=\lim\limits_{z\to 2i}(z-2i)\dfrac{(2z+3)}{(z-1)(z-2i)(z+2i)}=\lim\limits_{z\to 2i}\dfrac{2z+3}{(z-1)(z+2i)}=\dfrac{4i+3}{(2i-1)(4i)}$

ب) $\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=2i}=\dfrac{2z+3}{(1)(z^2+4)+2z(z-1)}\Big|_{z=2i}=\dfrac{4i+3}{(2i-1)(4i)}$

مثال : مانده تابع $f(z)=\dfrac{\sin 3z}{(2z+1)^4}$ را در نقطه تکین $z=-\dfrac{1}{2}$ پیدا کنید.

حل: در $z=-\dfrac{1}{2}$ چون صورت صفر نمی‌شود قطب مرتبه ۴ است و طبق قاعده (ج) داریم:

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\left\{\left(z+\frac{1}{2}\right)^4\frac{\sin 3z}{(2z+1)^4}\right\}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3!}\frac{1}{2^4}\frac{d^3}{dz^3}\{\sin 3z\}\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^4}(-1)(3)^3\cos 3z\Big|_{z=-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{-3^3}{3!2^4}\cos\left(-\frac{3}{2}\right)$$

مثال : مانده تابع $f(z)=\dfrac{\cos z}{z(e^z-1)}$ را در نقطه تکین $z=2\pi i$ به‌دست آورید.

حل: توجه کنید که $e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ لذا $z=2\pi i$ در حقیقت یک نقطه تکین تابع می‌باشد. از آن‌جا که مشتق مخرج در $z=2\pi i$ مخالف صفر است:

مشتق مخرج $= ze^z+e^z-1\Big|_{z=2\pi i}=2\pi i\neq 0$

و $z=2\pi i$ صفر صورت نیز نمی‌باشد، در نتیجه $z=2\pi i$ یک قطب مرتبه اول برای تابع است و داریم:

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=2\pi i}=\frac{\cos z}{(ze^z-z)'}\Big|_{z=2\pi i}=\frac{\cos 2\pi i}{2\pi i}=-\frac{\cosh 2\pi}{2\pi}i$$

مثال : مانده تابع $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ در نقطه $z=0$ کدام است؟

حل: $z=0$ یک تکین اساسی می‌باشد، لذا باید بسط لوران تابع را حول نقطه $z=0$ نوشت و سپس مانده را در نقطه مزبور به‌دست آورد.

$$f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=\frac{1}{1-z}.e^{\frac{1}{z}}=(1+z+z^2+z^3+\cdots)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^3 3!}+\cdots\right)$$

لذا ملاحظه می‌شود ضریب جمله $\dfrac{1}{z}$ عبارت است از:

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=0}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

اما داریم:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\Rightarrow e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=0}=e-1$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z^2+1}$ مجموع مانده‌های این تابع را در نقاط تکین $z=\pm i$ محاسبه کنید:

حل: بدیهی است که $z=\pm i$ هر دو قطب‌های مرتبه اول تابع هستند، پس داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z\to i} f(z)=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-i)(z+i)}=\frac{\sin\frac{1}{i}}{2i}=\frac{-i\sin(-i)}{2}=-\frac{\sinh 1}{2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z\to(-i)} f(z)=\lim_{z\to(-i)}(z+i)\frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-i)(z+i)}=\frac{\sin\left(-\frac{1}{i}\right)}{(-2i)}=\frac{+i\sin i}{2}=-\frac{\sinh 1}{2}$$

پس:

$$\operatorname{Res} f(z)=-\frac{\sinh 1}{2}-\frac{\sinh 1}{2}=-\sinh 1$$

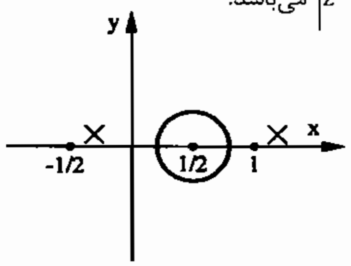
انتگرال‌گیری به روش مانده‌ها

فرض کنید C یک منحنی بسته در جهت مثلثاتی باشد برای محاسبه $\int_c f(z)dz$ ، با این فرض که f (z) در تمام صفحه مختلط به جزء نقاطی خاص تحلیلی است به صورت زیر عمل می‌کنیم. نخست تمام نقاط تکین تابع f (z) را یافته و مانده تابع را در آن نقاط تکین که داخل ناحیه محدود به مرز C می‌باشند محاسبه می‌کنیم.

(توجه کنید نقاط تکین تابع f (z) حق واقع شدن بر روی مرز انتگرال‌گیری را ندارند)

حال می‌توان ادعا کرد با جمع مانده‌های محاسبه شده و ضرب آن در $2\pi i$ حاصل انتگرال مورد نظر محاسبه می‌شود.

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال مختلط $I=\int_c\dfrac{e^z dz}{(z-1)^2(2z+1)}$ که در آن c دایره $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}$ می‌باشد.



حل:

نقاط تکین عبارتند از:

قطب مرتبه دوم: $z=1$

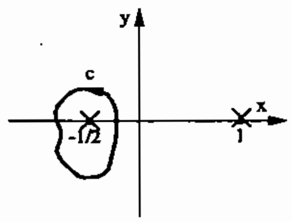
قطب ساده: $z=-\frac{1}{2}$

خارج مرز: $\left|1-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$

خارج مرز: $\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|=1>\frac{1}{3}$

پس چون هر دو نقطه تکین خارج مرز انتگرال‌گیری است، لذا: $I=0$

ب) همان مساله قبل را وقتی C مرز نشان داده شده در شکل زیر می‌باشد را محاسبه کنید.



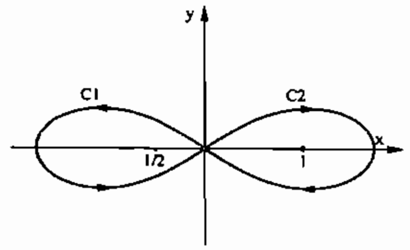
در این حالت تنها نقطه تکین داخل مرز C نقطه $z=-\frac{1}{2}$ است و داریم:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=\left(-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{z\to\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(z+\frac{1}{2}\right)\frac{e^z}{(z-1)^2(2z+1)}=\lim_{z\to\left(-\frac{1}{2}\right)}\frac{e^z}{2(z-1)^2}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{9}{4}\right)}\Rightarrow I=2\pi i\frac{\left(2e^{-\frac{1}{2}}\right)}{9}$$

ج) همان مثال قبل را وقتی C مرز نشان داده شده در شکل زیر باشد را حل کنید.

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=1}=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left\{(z-1)^2\frac{e^z}{(z-1)^2(2z+1)}\right\}\Bigg|_{z=1}$$

$$=\frac{d}{dz}\left\{\frac{e^z}{(2z+1)}\right\}\Bigg|_{z=1}=\frac{e^z(2z+1)-2e^z}{(2z+1)^2}=\frac{e}{9}$$



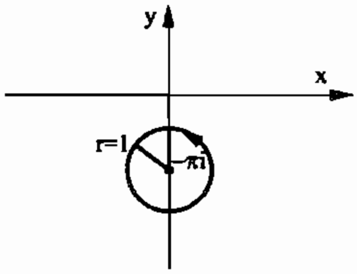
پس داریم:

$$I=\int_{c_1}+\int_{c_2}=2\pi i\left(\frac{2e^{-\frac{1}{2}}}{9}-\frac{e}{9}\right)$$

(چون برای منحنی C_2 در خلاف جهت مثلثاتی حرکت کردیم باید در $(-2\pi i)$ ضرب شود).

مثال : مطلوب است محاسبه $I=\int_c \frac{z^2}{\sinh z}dz$ که در آن c دایره، $|z+\pi i|=1$ که یک بار در جهت مثلثاتی طی شده است.

حل: کاندیدای نقاط تکین عبارتند از:



$$\sinh z=0\ \Rightarrow\ \frac{1}{i}\sin iz=0\ \Rightarrow\ \sin iz=0$$

$$\Rightarrow\ iz=k\pi\ \Rightarrow\ z=\frac{k\pi}{i}=-ik\pi\ \Rightarrow\ z=0,\pm i\pi;\pm 2i\pi$$

نکته : $\boxed{\cos iA=\cosh A}$ $\boxed{\sin iA=i\sinh A}$

$z=0$ در این مساله صفر مرتبه اول تابع $f(z)$ است چون دو صفر در صورت و یک صفر در مخرج است.

دقت داریم تمام نقاط به‌دست آمده قطب‌های مرتبه اولند به جز $z=0$ که اساساً نقطه تکین تابع نمی‌باشند و البته نقطه $z=-\pi i$ داخل مرز c است داریم:

$$\operatorname{Res}\Big|_{z=-\pi i}=\frac{z^2}{\cosh z}\Big|_{z=-\pi i}=\frac{-\pi^2}{\cosh(-\pi i)}$$

$$I=2\pi i\left(\frac{-\pi^2}{\cosh(-\pi i)}\right)=\frac{-2\pi^3 i}{\cos(i(-\pi i))}=\frac{-2\pi^3 i}{\cos\pi}=2\pi^3 i$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم $\int_c \frac{z+3}{z^2\left(z^2-1\right)}dz$ چنانچه حاصل این انتگرال بر روی دایره c که $c:|z|=3$ تعریف شده برابر با m باشد، حاصل انتگرال مذکور بر روی دایره $c':|z-1|=\frac{3}{2}$ کدام است:

حل:

قطب مرتبه دوم: $z=0$

قطب‌های ساده: $z=\pm 1$

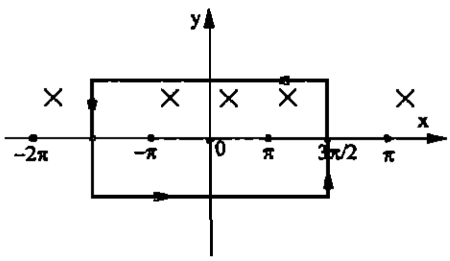
و با توجه به این که هر سه نقطه تکین مذکو، در داخل دایرهٔ c واقع می‌باشد بنابراین، چنانچه که دقت کنیم با توجه به مرز c' فقط نقاط $z=0$ و $z=1$ داخل مرز می‌باشند، لذا:

$$m=2\pi i\left\{\operatorname{Res}\Big|_{z=0}+\operatorname{Res}\Big|_{z=1}+\operatorname{Res}\Big|_{z=-1}\right\} \qquad I=m-2\pi i\left\{\operatorname{Res}\Big|_{z=-1}\right\}$$

$$\operatorname{Res}\Big|_{z=-1}=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{(z+3)}{z^2\left(z^2-1\right)}\Bigg|_{z=-1}=-1$$

$$I=\int_{c'}\frac{z+3}{z^2\left(z^2-1\right)}=m+2\pi i$$

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال $I=\int_c \frac{\cot gz}{z^3}dz$ که در آن c مرز نشان داده شده درشکل زیر است:



حل: برای تابع $f(z)=\frac{\cos z}{z^3.\sin z}$ نقاط تکین عبارت است از:

$$\sin z=0\Rightarrow z=0,\pm\pi\ ,\ \pm 2\pi,...$$

$z=0$ یک قطب مرتبهٔ چهارم و $z=\pm\pi$ قطب مرتبه اول واقع در ناحیه مورد نظر می‌باشد.

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=\pi}=\frac{\cos z}{3z^2\sin z+z^3\cos z}\Bigg|_{z=\pi}=\frac{1}{\pi^3}$$

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=-\pi}=\frac{\cos z}{3z^2\sin z+z^3\cos z}\Bigg|_{z=-\pi}=-\frac{1}{\pi^3}$$

از آن‌جایی که تابع $f(z)$ تابعی زوج می‌باشد، لذا در بسط این تابع حول نقطه $z=0$ فقط توان‌های زوج z ظاهر می‌شود لذا در بسط مذکور اساساً جمله $\frac{1}{z}$ تولید نمی‌شود و بنابراین $\operatorname{Res}f(z)$ در صفر برابر صفر می‌باشد.

پس حاصل انتگرال مورد نظر برابر است با:

$$I=2\pi i\left\{\frac{1}{\pi^3}+\frac{-1}{\pi^3}+0\right\}=0$$

مثال : مطلوب است محاسبه $I=\int_{|z|=6}\left(z^3-2z+\frac{1}{z}\right)e^{\frac{1}{z}}$

حل: بدیهی است تنها نقطه تکین تابع $z=0$ است که از نوع اساسی می‌باشد و البته داخل مرز انتگرال‌گیری واقع است برای یافتن مانده، بسط لوران را حول $z=0$ می‌نویسیم:

$$f(z)=\left(z^3-2z+\frac{1}{z}\right)\left\{1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^3 3!}+\frac{1}{z^4 4!}+\cdots\right\}$$

$$\text{ضریب } \frac{1}{z}=\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0}=\frac{1}{4!}-2\left(\frac{1}{2!}\right)+1=\frac{1}{24}$$

پس: $I=2\pi i\left(\frac{1}{24}\right)$

مثال : مطلوب است محاسبه $I=\int_{|z|=1}\sinh\left(\frac{1}{z}\right)\cos\left(\frac{2}{z}\right)dz$

حل: بدیهی است $z=0$ تکین اساسی است.

$$f(z)=\sinh\left(\frac{1}{z}\right).\cos\left(\frac{2}{z}\right)=\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3 3!}+\frac{1}{z^5 5!}+\cdots\right)\left(1-\frac{\left(\frac{2}{z}\right)^2}{2!}+\cdots\right)=\ldots$$

$$\text{ضریب } \frac{1}{z}=1\Rightarrow I=2\pi i(1)=2\pi i$$

مثال : مطلوب است محاسبه $I=\int_{|z-1|=1}\left(2z^2+z-6\right)\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)dz$

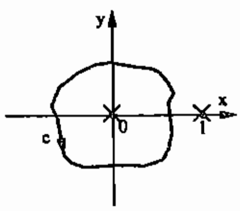
حل: تنها نقطه تکین $z=1$ است که از نوع اساسی است و داخل مرز انتگرال‌گیری واقع است. با نوشتن بسط لوران تابع حول نقطه $z=1$ داریم:

$$f(z)=\left(2z^2+z-6\right)\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

$$\left\{2(z-1)^2+5(z-1)-3\right\}\left\{\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^3 3!}+\frac{1}{(z-1)^5 5!}+\cdots\right\}$$

$$\text{پس ضریب } \frac{1}{z-1}: \operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=1}=\frac{-2}{3!}+(-3)\Rightarrow I=2\pi i\left(-\frac{2}{3!}-3\right)=-\frac{20\pi}{3}i$$

مثال : مطلوب است محاسبهٔ $I=\int_c\frac{\cos\frac{1}{z}}{1-z}dz$ که در آن c مرز زیر است.



حل: نقاط تکین تابع عبارت است از:

$z=0$ تکین اساسی

$z=1$ قطب ساده

و از آن‌جایی که فقط $z=0$ داخل مرز c واقع است باید بسط لوران تابع را حول $z=0$ بنویسیم:

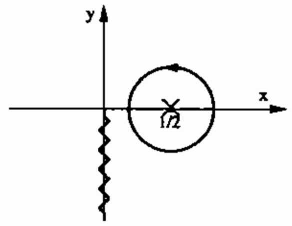
$$f(z)=\frac{1}{1-z}\cos\frac{1}{z}=\left\{1+z+z^2+z^3+\cdots\right\}\left\{1-\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^4 4!}-\frac{1}{z^6 6!}+\cdots\right\}$$

$$\frac{1}{z}\ \text{ضریب}=-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots=\cos 1-1\Rightarrow I=2\pi i(\cos 1-1)$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال $I=\int_c \frac{\ln z}{(2z-1)^2}dz$ که $c:\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}$

(فرض شده: $-\frac{\pi}{2}\le\theta<\frac{3\pi}{2}$. $\ln z=\ln r+i\theta$)

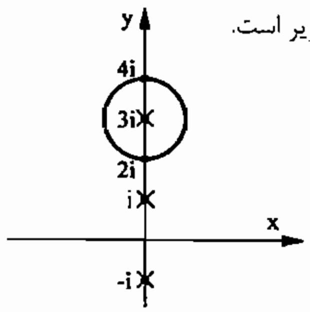
حل: برای تابع $f(z)=\frac{\ln z}{(2z-1)^2}$ ، نقاط تکین تابع با توجه به وضعیت تعریف $\ln z$ در شکل زیر نمایش داده شده است.



$z=\frac{1}{2}$ قطب مرتبه دوم تابع است، بنابراین داریم:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left\{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\ln z}{(2z-1)^2}\right\}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\frac{d}{dz}(\ln z)=\frac{1}{4}\frac{1}{z}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{2}{4}\Rightarrow I=2\pi i\left(\frac{2}{4}\right)$$

مثال: مطلوب است محاسبه $I=\int_c\frac{\ln(z^2+1)dz}{(z-3i)^2}$ که در آن c مطابق مرز نشان داده شده در شکل زیر است.



حل:

در این مساله نقاط شاخه‌ای تابع $\ln(z^2+1)$ یعنی نقاطی که بریدگی شاخه‌ای از آن‌ها منشعب می‌شوند عبارتند از:

$$z^2+1=0\quad;\quad z=\pm i$$

که البته هر دو خارج دایره c قرار دارند بنابراین می‌توان بریدگی شاخه‌ای به طور دلخواه از این دو نقطه منشعب کرد، که تماماً خارج دایره c قرار گیرند و لذا تنها نقطه تکین تابع زیر علامت انتگرال $z=3i$ است که قطب مرتبه دوم بوده و داخل دایره c واقع است.

$$\operatorname{Res}\Big|_{z=3i}=\frac{d}{dz}\left\{(z-3i)^2\frac{\ln(z^2+1)}{(z-3i)^2}\right\}=\frac{2z}{z^2+1}\Bigg|_{z=3i}=\frac{6i}{-9+1}=-\frac{6}{8}i\quad;\quad I=2\pi i\left(-\frac{6}{8}i\right)=\frac{3}{2}\pi$$

مثال: اگر c بیضی $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ باشد که در جهت مثلثاتی پیموده شده و $f(w)=\int_c\frac{z^2-z+1}{z(z-w)}dw$ آن گاه مقدار $f'(2)$ برابر است با:

حل: نقاط تکین تابع $g(z)=\frac{z^2-z+1}{z(z-w)}$، نقاط $z=0$, $z=w$ هستند که هر دو قطب مرتبه اول به حساب می‌آیند.

بدیهی است که نقطه $z=0$ خارج بیضی داده شده واقع است.

$$\frac{(0-4)^2}{9}+\frac{(0)^2}{16}>1$$

اگر $z=w$ داخل بیضی مزبور باشد، داریم:

$$\operatorname{Res} g(z)\Big|_{z=w}=\lim_{z\to w}\frac{z^2-z+1}{z(z-w)}(z-w)=\frac{w^2-w+1}{w}\Rightarrow f(w)=2\pi i\frac{w^2-w+1}{w}$$

و لذا:

$$f'(w)=2\pi i\frac{(2w-1)w-(w^2-w+1)}{w^2}=2\pi i\frac{w^2-1}{w^2}$$

و چون $w=2$ داخل بیضی c واقع است:

$$f'(2)=2\pi i\frac{2^2-1}{2^2}=\frac{3\pi i}{2}$$

مثال: انتگرال $\int_c \sin\left(\frac{z}{z-1}\right)dz$ وقتی مسیر c تصویر خط $\operatorname{Re} w=1$ تحت نگاشت $z=e^w$ می‌باشد، کدام است؟

حل: نخست تصویر خط $\operatorname{Re} w=1$ را تحت نگاشت $z=e^w$ به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}z=e^{u+iv}\\ u=1\end{cases}\Rightarrow\quad z=e^{1+iv}\quad\Rightarrow\quad |z|=\left|e^{1+iv}\right|=|e|\left|e^{iv}\right|=e$$

لذا مسیر c دایره به مرکز مبدأ و شعاع e در صفحه z خواهد بود.

نقطه تکین تابع $f(z)=\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)$، $z=1$ می‌باشد که در داخل مسیر بسته c واقع است و از آن‌جا که $z=1$ تکین اساسی تابع مزبور است، برای محاسبه مانده تابع در این نقطه باید بسط لوران حول $z=1$ را نوشت:

$$f(z)=\sin\left(\frac{z-1+1}{z-1}\right)=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\sin\frac{1}{z-1}$$

$$=\sin 1\left(1-\frac{1}{(z-1)^2 2!}+\cdots\right)+\cos 1\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^3 3!}+\cdots\right)$$

بنابراین $\operatorname{Res} f(z)\big|_{z=1}=\cos 1$ بوده و حاصل انتگرال مورد نظر $1=2\pi i\cos 1$ می‌باشد.

نکته‌ای در ارتباط با یافتن مانده یک تابع زوج در نقطه تکین $z=0$:

اگر $f(z)$ تابعی زوج باشد در بسط آن تابع حول نقطه $z=0$ فقط توان‌های زوج z می‌تواند وجود داشته باشد (توان‌های زوج مثبت و یا منفی) بنابراین طبیعی است اگر $z=0$ برای تابع زوجی نقطه تکین باشد قطعاً مانده تابع در آن برابر صفر است.

مثال: مانده تابع $f(z)=\frac{1}{1-\cos z}$ در نقطه تکین $z=0$ بیابید.

بدیهی است $z=0$ یک قطب مرتبه دوم تابع است، زیرا:

مخرج: $1-\cos z\Big|_{z=0}=0$

مشتق اول مخرج $\sin z\Big|_{z=0}=0$

$\cos z \Big|_{z=0} \neq 0$ مشتق دوم مخرج

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0} = \lim \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left\{z^2 \frac{1}{1-\cos z}\right\} = \ldots\ldots = 0$$

اما می‌توان گفت چون تابع f (z) تابعی زوج است، لذا:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0} = 0$$

نکته بسیار مهم:

همان‌طور که گفتیم توابع $\bar{z}$ و $\operatorname{Im} z$ و $\operatorname{Re} z$ و $|z|$ هیچ کجا تحلیلی نیستند، بنابراین وجود این ترم‌ها در تابع زیر علامت انتگرال استفاده مستقیم از روش مانده‌ها را تعطیل می‌کند اما در زمانی که انتگرال‌گیری مختلط روی $|z| = a$ تعریف شود می‌توان با استفاده از روابط زیر این عوامل را حذف کرده و به محاسبه انتگرال پرداخت:

$$\begin{cases} z+\bar{z} = 2x = 2\operatorname{Re} z \\ z-\bar{z} = 2iy = 2i \operatorname{Im} z \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \operatorname{Re} z = \dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ \operatorname{Im} z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} \end{matrix}$$

$$\bar{z} = \frac{z.\bar{z}}{z} = \frac{|z|^2}{z}$$

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال مختلط $I = \int_{|z|=2} \dfrac{e^z}{\bar{z}-3i} dz$

حل: بدیهی است به واسطه وجود ترم $\bar{z}$ استفاده مستقیم از روش مانده‌ها مجاز نمی‌باشد اما می‌توان نوشت:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{ze^z}{z\bar{z}-3iz} dz$$

اما می‌دانیم $z\bar{z} = |z|^2$ و چون حاصل انتگرال را روی مرز $|z| = 2$ حساب می‌کنیم.

$$z\bar{z} = 2^2 = 4$$

پس به دست می‌آید:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{ze^z}{4-3iz} dz$$

حال می‌توان به قضیه مانده‌ها ارجاع داد:

$$f(z) = \frac{ze^z}{4-3iz}$$

نقطه $z = \dfrac{4}{3i} = -\dfrac{4}{3}i$ قطب مرتبه اول است و چون داخل $|z| = 2$ است می‌نویسیم:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=-\frac{4}{3}i} = \frac{ze^z}{-3i}\Big|_{z=-\frac{4}{3}i} = \frac{-\frac{4i}{3}.e^{-\frac{4i}{3}}}{-3i} = \frac{4}{9}e^{-\frac{4}{3}i} \qquad I = 2\pi i\left(\frac{4}{9}e^{-\frac{4}{3}i}\right) = \cdots$$

مثال: مطلوب است محاسبهٔ $I=\int_{|z|=1}\left(\frac{z}{|z|}+\sin z\right)d\bar{z}$

حل: از آن جا که $|z|$ و $\bar{z}$ هیچ کجا تحلیلی نمی‌باشد لذا استفاده مستقیم از روش مانده‌ها مجاز نمی‌باشد چون روی مسیر $|z|=1$ کار می‌کنیم داریم $z\bar{z}=|z|^2=1$ و می‌نویسیم:

$$I=\int_{|z|=1}\left(\frac{z}{1}+\sin z\right)d\left(\frac{z\bar{z}}{z}\right)=\int_{|z|=1}(z+\sin z)\,d\left(\frac{1}{z}\right)=\int_{|z|=1}(z+\sin z).\frac{-1}{z^2}dz=-\int_{|z|=1}\frac{z+\sin z}{z^2}dz$$

حال می‌توان از روش مانده‌ها استفاده کرد.

با توجه به بسط زیر:

$$-\frac{z+\sin z}{z^2}=-\frac{z+\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)}{z^2}=\frac{-2z+\frac{z^3}{3!}+\cdots}{z^2}\Rightarrow \operatorname{Res} f(z)\big|_{z=0}=-2\Rightarrow I=-4\pi i$$

محاسبهٔ برخی انتگرال‌های حقیقی با استفاده از انتگرال‌های مختلط

الف) در محاسبهٔ انتگرال‌هایی به فرم $I=\int_0^{2\pi}f(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ با توجه به آن که داریم:

$$\boxed{\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}\qquad\qquad \boxed{\cos\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}}$$

با استفاده از فرض $z=e^{i\theta}$ به‌دست می‌آید:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta\quad\Rightarrow\quad d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\quad;\quad\cos\theta=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

لذا انتگرال مورد نظر به فرم زیر قابل بیان است:

$$I=\int_{|z|=1}h(z)dz$$

که با استفاده از روش مانده‌ها قابل حل است.

مثال: مطلوب است محاسبهٔ $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\sin\theta}$

حل:

$$I=\int_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2}-\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}}\;=\;\xrightarrow[\text{در 2iz ضرب می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج را}}\;\int\frac{2dz}{2\sqrt{2}iz-z^2+1}$$

نقاط تکین عبارت است از:

$$-z^2+2\sqrt{2}\,iz+1=0\Rightarrow z=\frac{-\sqrt{2}i\pm\sqrt{-2+1}}{-1}=i\left(\sqrt{2}\pm1\right)$$

هر دو نقطهٔ تکین از نوع قطب مرتبه اولند و فقط $\left(\sqrt{2}-1\right)i$ داخل دایره $|z|=1$ واقع می‌باشد.

لذا:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=(\sqrt{2}-1)i} = \frac{2}{2\sqrt{2}\,i-2z}\Big|_{z=(\sqrt{2}-1)i} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i}$$

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{i}\right) = 2\pi$$

مطلوب است محاسبهٔ انتگرال روبه‌رو با فرض $n \in N$

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}.e^{-i(n\theta+\sin\theta)}.d\theta$$

حل:

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}.e^{-i(n\theta+\sin\theta)}.d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta - i\sin\theta}.e^{-in\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} e^{e^{-i\theta}}\left(e^{i\theta}\right)^{-n}d\theta$$

با فرض $z = e^{i\theta}$ داریم:

$$e^{-i\theta} = \frac{1}{z}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$I = \int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}.z^{-n}\,\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}\frac{dz}{iz^{n+1}}$$

تنها نقطه تکین $z = 0$ است که از نوع تکین اساسی است و البته داخل $|z| = 1$ می‌باشد لذا می‌نویسیم:

$$e^{\frac{1}{z}} \times \frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1}{z^{n+1}}\left\{1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\cdots\right\}$$

بنابراین چون n یک عدد طبیعی است $(n \geq 1)$ لذا در بسط مورد نظر اساساً جملهٔ $\frac{1}{z}$ ای درست نمی‌شود یعنی $\operatorname{Ref}(z)\Big|_{z=0} = 0$ ،

$$I = 2\pi i(0) = 0$$

ب) در محاسبهٔ انتگرال‌هایی به فرم $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای از x هستند که درجه $Q(x)$ لااقل دو درجه از درجه $P(x)$ بزرگ‌تر است و $Q(x)$ صفر حقیقی ندارد می‌توان نشان داد:

$$I = \int_{\operatorname{Im} z>0}\frac{P(z)}{Q(z)}dz$$

یعنی کافی است مانده‌های تابع‌های $\frac{P(z)}{Q(z)}$ درنقاط تکینی که در نیم صفحه فوقانی واقع هستند حساب کرده و با ضرب $2\pi i$ در مجموع آن مانده‌ها جواب انتگرال مورد نظر را پیدا کنیم.

مثال : مطلوب است محاسبهٔ انتگرال زیر:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x^2+1}{(x^2+1)(x^2+4)}.dx$$

حل:

نقاط تکین:

$$z^2+1=0 \quad ; \quad z = \pm i$$

$$z^2+4=0 \quad ; \quad z=\pm 2i$$

با استفاده از بحث (ب) ما برای انتگرال‌گیری فقط به مانده در $z=i$ و $z=2i$ نیازمندیم:

$$\operatorname{Res}\frac{2z^2+1}{(z^2+1)(z^2+4)}\bigg|_{z=i}=\frac{2z^2+1}{(2z)(z^2+4)+2z(z^2+1)}\bigg|_{z=i}=\frac{-1}{(2i)(3)}$$

$$\operatorname{Res}\frac{2z^2+1}{(z^2+1)(z^2+4)}\bigg|_{z=2i}=\frac{2z^2+1}{(2z)(z^2+4)+(2z)(z^2+1)}\bigg|_{z=2i}=\frac{-7}{(-3)(4i)}$$

$$I=2\pi i\left(\frac{1}{-6i}+\frac{7}{12i}\right)$$

ج) در محاسبه انتگرال‌های حقیقی به فرم $A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos ax.dx$ و $B=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin ax.dx$ که در آن $\frac{P(x)}{Q(x)}$ وضعیتی مانند وضعیت (ب) دارد کافی است نخست انتگرال مختلط زیر را حساب کنیم:

$$I=\int_{\operatorname{Im}>0}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{iaz}dz$$

حال می‌توان نشان داد:

$$\begin{cases}A=\operatorname{Re}(I)\\ B=\operatorname{Im}(I)\end{cases}$$

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال‌های مختلط زیر:

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+1}dx$$

حل: داریم $\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{1}{z^2+1}$ و لذا نقاط تکین تابع $e^{2iz}\frac{P(z)}{Q(z)}$ عبارتند از:

$$z^2+1=0 \;\Rightarrow\; z=\pm i$$

و البته فقط $z=i$ در نیم صفحه فوقانی است و داریم:

$$\operatorname{Res}\left(e^{2iz}\frac{1}{z^2+1}\right)\bigg|_{z=i}=\frac{e^{2iz}}{2z}\bigg|_{z=i}=\frac{e^{-2}}{2i}$$

$$I=\int_{\operatorname{Im}z>0}e^{2iz}\frac{1}{z^2+1}dz=2\pi i\left\{\frac{e^{-2}}{2i}\right\}=\frac{\pi}{e^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+1}dx=\operatorname{Re}(I)=\frac{\pi}{e^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+1}dx=\operatorname{Im}(I)=0$$

$$B=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+2x+5}dx$$

برای $\frac{e^{iz}}{z^2+2z+5}$ نقاط تکین عبارتند از:

$$z^2+2z+5=0 \;\Rightarrow\; z=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm 2i$$

که هر دو قطب مرتبه اولند و فقط $-1+2i$ در نیم صفحه فوقانی است پس:

$$\operatorname{Res}\frac{e^{iz}}{z^2+2z+5}\bigg|_{z=-1+2i}=\frac{e^{iz}}{2z+2}\bigg|_{z=-1+2i}=\frac{e^{i(-1+2i)}}{4i}$$

$$I=\int_{\operatorname{Im} z>0}\frac{e^{iz}}{z^2+2z+5}\,dz=2\pi i\frac{e^{i(-1+2i)}}{4i}=\frac{\pi}{2}e^{-i-2}=\frac{\pi}{2}e^{-2}\left(\cos 1-i\sin 1\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+2x+5}\,dx=\operatorname{Re}(I)=\frac{\pi}{2}e^{-2}\cos 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+2x+5}\,dx=\operatorname{Im}(I)=-\frac{\pi}{2}e^{-2}\sin 1$$

د) در محاسبه انتگرال‌هایی به فرم $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}\,dx$ که درآن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای از x می‌باشند، که درجه $Q(x)$ لااقل یک واحد از درجه $P(x)$ بیشتر است و تمام ریشه‌های حقیقی معادله $Q(x)$ ریشه‌های مرتبه اول می‌باشند که بر صفرهای توابع $\sin(\alpha x)$ یا $\cos(ax)$ منطبق‌اند می‌توان نشان داد.

$$I=2\pi i\left\{\left[\begin{array}{c}\text{مجموع مانده‌های تابع}\\ e^{i\alpha z}\dfrac{P(z)}{Q(z)}\ \text{که در نقاط تکین}\\ \text{واقع بر نیم صفحه فوقانی هستند}\end{array}\right]+\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c}\text{مجموع مانده‌های تابع}\ e^{i\alpha z}\dfrac{P(z)}{Q(z)}\\ \text{در نقاط تکین حقیقی}\end{array}\right)\right\}$$

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x\left(x^2+1\right)}dx$.

حل: برای تابع $\frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}$ نقاط تکین عبارتند از: $z=\pm i$; $z=0$

$$\operatorname{Res}\frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}\bigg|_{z=i}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)e^{iz}}{z(z-i)(z+i)}=\frac{e^{-1}}{i(2i)}=\frac{-e^{-1}}{2}$$

$$\operatorname{Res}\frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}\bigg|_{z=0}=\lim_{z\to 0}z\frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}=\frac{1}{1}=1$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x\left(x^2+1\right)}dx=2\pi i\left(\frac{e^{-1}}{-2}+\frac{1}{2}(1)\right)=\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)\quad\to$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x\left(x^2+1\right)}\,dx=\operatorname{Im}(I)=\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)\qquad\qquad\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x\left(x^2+1\right)}dx=\operatorname{Re}(I)=0$$

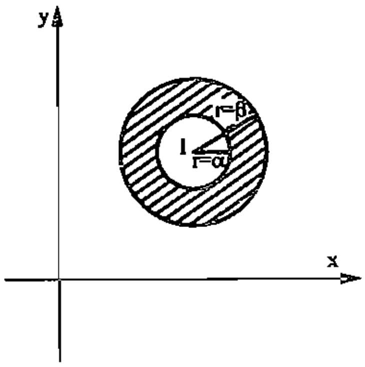
نوشتن بسط لوران معتبر در نواحی مختلف

همان‌طور که می‌دانید دو بسط زیر که به سری‌های هندسی موسوم هستند، فقط با شرط $|A|<1$ اعتبار دارند بنابراین در زمان استفاده از هر کدام از آن‌ها باید وجود این شرط را ارزیابی کنیم و در غیر این صورت مجاز به استفاده از این بسط نیستیم.

$$\boxed{\frac{1}{1-A}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+A}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A^n}$$

مثال : تابع $f(z)=\dfrac{1}{z(1+z)}$ مفروض است بسط این تابع معتبر در ناحیه $|z|>1$ را بنویسید.



حل:

مطابق قرارداد، وقتی می‌خواهیم بسط تابعی را که در ناحیه $\alpha<|z-z_0|<\beta$ معتبر است بنویسیم، بسط تابع بر حسب توان‌های مختلف $(z-z_0)$ می‌باشد و چنانچه توان‌های منفی عبارت $(z-z_0)$ وجود داشته باشد. اصطلاحاً جنس بسط از نوع لوران است و اگر توان منفی از عبارت $(z-z_0)$ نباشد، جنس از نوع تیلور است.

$$f(z)=\frac{1}{z(1+z)}=\frac{1}{z}\,\frac{1}{z+1}$$

حال لازم است که بسط $\dfrac{1}{1+z}$ را حول نقطه $z=0$ و معتبر در ناحیه $|z|>1$ بنویسیم داریم:

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z}\,\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n \qquad \left(|z|>1\Rightarrow\left|\frac{1}{z}\right|<1\right)$$

$$f(z)=\frac{1}{z}\,\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+2}}$$

مثال : تابع $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z-2}$ مفروض است بسط معتبر برای این تابع در ناحیه $1<|z|<2$ را بنویسید:

حل:

بسط تابع را حول نقطه $z=0$ و معتبر در ناحیه $1<|z|<2$ را می‌خواهیم، پس داریم:

$$f(z)=\frac{2z-1}{(z+1)(z-2)}\ \xlongequal{\text{روش تجزیه کسرها}}\ \frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-2}$$

با کمی محاسبه به دست می‌آید $A=B=1$

$$f(z)=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-2}$$

حال باید بسط دو تابع $\dfrac{1}{z+1}$ و $\dfrac{1}{z-2}$ را حول نقطه $z=0$ در ناحیه مورد نظر بنویسیم:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}.\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\Rightarrow\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n \qquad \boxed{1<|z|<2\Rightarrow\frac{1}{2}<\left|\frac{1}{z}\right|<1}$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad \boxed{1<|z|<2\Rightarrow\frac{1}{2}<\left|\frac{z}{2}\right|<1}$$

پس داریم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

جنس بسط مذکور از نوع لوران است به واسطه آن که در آن توان منفی عبارت z وجود دارد.

مثال : بسط تیلور تابع $f(z)=\frac{1}{z-1+2i}$ را حول نقطه $z=2-3i$ نوشته و شعاع همگرایی را تعیین کنید:

حل: چون قرار است بسط را حول نقطه $z=2-3i$ بنویسیم (که البته باید بسط تیلوری باشد) لذا باید در بسط جملات توان‌های نامنفی عبارت $z-z_0=z-2+3i$ پدید می‌آید، لذا داریم:

$$f(z)=\frac{1}{(z-2+3i)+1-i}=\frac{1}{(1-i)}\,\frac{1}{1+\left(\frac{z-2+3i}{1-i}\right)}=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2+3i)^n}{(1-i)^n} \qquad \left(\text{با شرط } \left|\frac{z-2+3i}{1-i}\right|<1\right)$$

البته ناحیه همگرایی چنین است:

$$\left|\frac{z-2+3i}{1-i}\right|<1\Rightarrow|z-2+3i|<|1-i|\Rightarrow|z-2+3i|<\sqrt{2}$$

و لذا شعاع همگرایی $R=\sqrt{2}$ است.

دقت کنید شعاع همگرایی بسط تیلور مذکور را قبل از هر کاری می‌توان تعیین کرد بدین ترتیب که min فاصله نقطه z_0 تا تمام نقاط تکین تابع $f(z)$ همان شعاع همگرایی بسط تیلور تابع حول نقطه z_0 است. در این مساله تنها نقطه تکین تابع $f(z)$ نقطه $1-2i$ است که البته فاصله آن تابع $z_0=2-3i$ چنین است:

$$R=\sqrt{(2-1)^2+(-3+2)^2}=\sqrt{2}$$

مثال : سری لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ در ناحیه $|z-1|>2$ کدام است؟

حل:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{1}{z-1}\,\frac{1}{z+1}$$

اینک هدف ما این است که تابع $\frac{1}{z+1}$ را بر حسب توان‌های مختلف $(z-1)$ بنویسیم، که در ناحیه $|z-1|>2$ اعتبار داشته باشد.

$$g(z)=\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-1+2}=\frac{1}{z-1}\,\frac{1}{1+\frac{2}{z-1}}$$

اما در ناحیه مورد نظر داریم $|z-1|>2\Rightarrow\frac{|z-1|}{2}>1\Rightarrow\left|\frac{2}{z-1}\right|<1$ ، لذا می‌توان نوشت:

$$g(z)=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z-1}\right)^n\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z-1}\,\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z-1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(z-1)^{n+2}}$$

مثال : ضریب $(z-1)^{-1}$ در بسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{1}{z(z-5)}$ در ناحیه $2<|z-1|<3$ کدام است؟

حل: با استفاده از روش تجزیه کسرها می‌توان به‌دست آورد:

$$f(z)=\frac{1}{z(z-5)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-5}-\frac{1}{z}\right)$$

حال بسط توابع $\dfrac{1}{z-5}$ و $\dfrac{1}{z}$ را حول نقطه $z=1$ که در داخل ناحیه $2<|z-1|<3$ معتبر است، می‌نویسیم:

$$A=\frac{1}{z-5}=\frac{1}{z-1-4}=\frac{1}{4}\,\frac{1}{\frac{z-1}{4}-1}=\frac{-1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{z-1}{4}}$$

با توجه به شرط $2<|z-1|<3$ داریم $\left|\dfrac{z-1}{4}\right|<1$ و لذا می‌توان نوشت:

$$=\frac{-1}{4}\left(1+\frac{z-1}{4}+\left(\frac{z-1}{4}\right)^2+\cdots\right)$$

$$B=\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1+1}=\frac{1}{z-1}\,\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}$$

با توجه به شرط $2<|z-1|<3$ داریم $\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{|z-1|}>\dfrac{1}{3}$ بوده، لذا $\dfrac{1}{|z-1|}<1$ و می‌توان نوشت:

$$=\frac{1}{z-1}\left(1-\frac{1}{z-1}+\left(\frac{1}{z-1}\right)^2-+\cdots\right)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(z)=\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\left(1+\frac{z-1}{4}+\left(\frac{z-1}{4}\right)^2+\cdots\right)-\frac{1}{z-1}\left(1-\frac{1}{z-1}+\left(\frac{1}{z-1}\right)^2-+\cdots\right)\right)$$

لذا به وضوح دیده می‌شود که ضریب $\dfrac{1}{z-1}$ عبارت است از $\dfrac{-1}{5}$.

فصل پنجم

معادلات با مشتقات جزئی

تعاریف اولیه

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معادله‌ای است که ارتباط بین یک تابع چند متغیره و مشتقات آن نسبت به متغیرهای مختلف و خود آن متغیرها را نشان می‌دهد. چنانچه بتوان این معادله را به گونه‌ای بیان کرد که شامل هیچ جمله غیرخطی از تابع و مشتقات تابع نباشد آن را از نوع خطی گویند.

در یک معادله دیفرانسیل خطی چنانچه جملات شامل تابع و یا یکی از مشتقات آن باشد آن معادله دیفرانسیل خطی را همگن می‌نامیم.

$xy''' + 4y' + y^2 = x$ معادله دیفرانسیل معمولی ـ غیر خطی

$x^2y\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 4y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} = xy$ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ـ خطی ـ غیرهمگن

در ارتباط با این معادلات به چند بحث زیر توجه کنید:

نوشتن یک معادله با مشتقات جزئی با تغییر متغیرهای داده شده:

برخی مواقع یک معادله با مشتقات جزئی داده شده و می‌خواهیم با تغییر متغیرهای خاص آن را بازنویسی کنیم در این مواقع لازم است با استفاده از قانون زنجیره‌ای در مشتقات جزئی معادله مورد نظر را ساده کنیم.

مثال : معادله با مشتقات جزئی $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = nz$ با تغییر متغیرها $p = \dfrac{1}{2}(\text{Ln}x + \text{Ln}y)$ و $q = \dfrac{1}{2}(\text{Ln}x - \text{Ln}y)$ به چه فرمی در خواهد آمد؟

حل :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial q}.\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial p}\left(\frac{1}{2x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)\left(\frac{1}{2x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial q}.\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial p}\left(\frac{1}{2y}\right) + \frac{\partial z}{\partial q}\left(\frac{-1}{2y}\right)$$

با استفاده از این مقادیر در معادله اصلی به‌دست می‌آید:

$$x\left(\frac{1}{2x}\left(\frac{\partial z}{\partial p}+\frac{\partial z}{\partial q}\right)\right)+y\left(\frac{1}{2y}\left(\frac{\partial z}{\partial p}-\frac{\partial z}{\partial q}\right)\right)=nz \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial p}=nz$$

حذف تابع اختیاری در یک رابطه داده شده و یافتن معادله با مشتقات جزئی حاکم بر آن:

می‌دانیم یک دسته منحنی شامل یک ثابت اختیاری را می‌توان به منزله جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول دانست که برای یافتن آن معادله دیفرانسیل کافی است بین آن رابطه و مشتق آن، ثابت داده شده را حذف کنیم.

به همین ترتیب یک رابطه شامل یک تابع اختیاری را می‌توان به منزله جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول دانست که برای یافتن آن معادله کافیست بین آن رابطه و مشتقات جزئی آن، تابع داده شده را حذف کنیم.

مثال : رابطه $z=y^2\varphi(xy)$ که در آن φ یک تابع اختیاری است مفروض است، معادله با مشتقات جزئی حاکم بر z را بیابید.

x , y متغیرهای مستقل و z تابع فرض شده است با فرض $xy=u$ داریم:

حل :

$$z=y^2\varphi(u) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x}.y^2=y^2.\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}.y & \text{I} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y\varphi+y^2\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y\varphi+y^2\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}.x & \text{II} \\ \text{فرض مساله}: z=y^2\varphi & \text{III} \end{cases}$$

$$(\text{I}): \frac{\partial \varphi}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{1}{y^3}\right)$$

$$(\text{II}): \frac{\partial z}{\partial y}-\frac{2z}{y}=xy^2\frac{\partial \varphi}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial u}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{2z}{y}\right)\frac{1}{xy^2}$$

حال با مساوی قرار دادن رابطهٔ I و II به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{2z}{y}=\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}$$

نکته : فرض کنید $z=z(x,y)$ و داشته باشیم $F\big(u(x,y,z),v(x,y,z)\big)=0$ که در آن F تابع اختیاری است برای حذف تابع اختیاری F و یافتن معادله با مشتقات جزئی حاکم بر z می‌توان دترمینان زیر را بسط داد:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=0$$

به عنوان مثال در همان مساله قبلی می‌توانستیم بنویسیم:

$$z=y^2\varphi(x,y) \Rightarrow \frac{z}{y^2}=\varphi(x,y) \Rightarrow F\left(xy,\frac{z}{y^2}\right)=0$$

حال $v=\dfrac{z}{y^2}$ و $u=xy$ بوده و داریم (x , y متغیرهای مستقل و z تابع است)

$$\begin{vmatrix} y & x \\ \dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}}{y^2} & \dfrac{\frac{\partial z}{\partial y}y^2-2yz}{y^4} \end{vmatrix}=0\Rightarrow\cdots$$

حل معادلات با مشتقات جزئی در حالات خاص به کمک انتگرال‌گیری

برخی مواقع با انتگرال‌گیری‌های ساده از یک معادله با مشتقات جزئی ممکن است بتوانیم جواب معادله مورد نظر را پیدا کنیم.

مثال : جواب عمومی معادله زیر را مشخص کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=xy^2 \\ u(x,0)=x \\ u(0,y)=\sin y \end{cases}$$

حل :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=xy^2 \xrightarrow{\text{انتگرال گیری نسبت به } x} \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2}{2}y^2+A(y) \xrightarrow{\text{انتگرال گیری نسبت به } y} u(x,y)=\frac{x^2}{2}\frac{y^3}{3}+B(y)+C(x)$$

با جای‌گذاری مقادیر $x=0$ و $y=0$ در معادله $u(x,y)$ داریم:

$$u(0,0)=B(0)+C(0)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0)=B(0)+C(x)=x \\ u(0,y)=B(y)+C(0)=\sin y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B(0)+C(x)+B(y)+C(0)=x+\sin y$$

$$C(x)+B(y)=x+\sin y$$

$$u(x,y)=\frac{x^2y^3}{6}+\sin y+x$$

معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول شبه خطی:

معادله با مشتقات جزئی زیر را در نظر بگیرید:

$$p(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$$

برای یافتن جواب این معادله دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{dx}{p(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$$

طبیعی است دستگاه مذکور دارای دو معادله مستقل است، چنانچه دو معادله مستقل این دستگاه را حل کنیم به جواب‌های به فرم زیر می‌رسیم:

$$u(x,y,z)=C_1 \quad , \quad v(x,y,z)=C_2$$

می‌توان نشان داد جواب کلی معادله مرتبه اول شبه خطی مورد نظر به صورت مقابل است:

$$F(u,v)=0$$

مثال : جواب کلی معادله زیر را پیدا کنید:

$$x^2z^3\frac{dz}{dx}+y^2\frac{dz}{dy}=z+1$$

حل : دستگاه لاگرانژ چنین است:

$$\frac{dx}{x^2z^3}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{z+1}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy}{y^2}=\dfrac{dz}{z+1}\Rightarrow-\dfrac{1}{y}=\mathrm{Ln}(z+1)+c & (1\\ \dfrac{dx}{x^2z^3}=\dfrac{dz}{z+1}\Rightarrow\dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{z^3dz}{z+1}\Rightarrow\dfrac{dx}{x^2}=\left(z^2-z+1-\dfrac{1}{z+1}\right)dz \\ \Rightarrow-\dfrac{1}{x}=\dfrac{z^3}{3}-\dfrac{z^2}{2}+z-\mathrm{Ln}(z+1)+k & (2\end{cases}$$

پس جواب عمومی چنین است:

$$F\left(\frac{1}{y}+\mathrm{Ln}(z+1)\ ,\ \frac{1}{x}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{2}+z-\mathrm{Ln}(z+1)\right)=0$$

دسته‌بندی انواع معادلات با مشتقات جزئی مرتبه دوم شبه‌خطی و رسیدن به فرم استاندارد:

معادله با مشتقات جزئی مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+H\left(x.y.z.\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

که در آن a، b و c می‌توانند توابعی از x و y باشند

با تعریف $\Delta=b^2-ac$ می‌گوییم:

۱) اگر $\Delta>0$ باشد معادله مورد نظر از نوع هذلولی‌گون است.

۲) اگر $\Delta=0$ باشد معادله مورد نظر از نوع سهمی گون است.

۳) اگر $\Delta<0$ باشد معادله مورد نظر از نوع بیضی گون است.

این امکان وجود دارد که با تغییر متغیرهای مناسب معادله مذکور را به ساده‌ترین فرم ممکن که اصطلاحاً به فرم کانونیک (استاندارد) موسوم است تبدیل کنیم. برای این منظور نخست معادله مشخصه‌ای به فرم زیر تشکیل می‌دهیم:

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2b\left(\frac{dy}{dx}\right)+c=0$$

ملاحظه می‌شود این معادله مشخصه، خود یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجه ۲ می‌باشد.

اگر معادله با مشتقات جزئی اصلی از نوع سهمی‌گون باشد از حل این معادله مشخصه یک جواب برای $\frac{dy}{dx}$ پیدا می‌کنیم که با حل آن یکی از تغییر متغیرهای مورد نیاز برای رسیدن به فرم کانونیک یافت می‌شود و تغییر متغیر دوم را به طریق دلخواهی که البته مستقل از متغیر اول است می‌توان انتخاب کرد اما چنانچه معادله با مشتقات جزئی اصلی از نوع هذلولی گون یا بیضی‌گون باشد از حل معادله مشخصه دو جواب برای $\frac{dy}{dx}$ پیدا می‌شود (دو جواب حقیقی و یا دو جواب مختلط) که با حل آن‌ها تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم کانونیک یافته می‌شود.

مثال : در معادله $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3y^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ روی طبیعت معادله به ازای x و y های مختلف بحث کنید.

حل :

$$a = x\ ;\ 2b = 0\ ;\ c = y \Rightarrow \Delta = b^2 - ac = 0 - xy$$

اگر $xy > 0$ باشد آن‌گاه $\Delta < 0$ است بنابراین معادله از نوع بیضی‌گون است.

اگر $xy < 0$ باشد آن‌گاه $\Delta > 0$ است بنابراین معادله از نوع هذلولی‌گون است.

اگر x یا y هر کدام برابر صفر باشند $\Delta = 0$ است بنابراین معادله از نوع سهمی‌گون است.

مثال : روی طبیعت معادله $e^{2y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+ye^{x+y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+xe^{2x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ در حالت مختلف بحث کنید.

حل :

$$a = e^{2y}\ :\ 2b = ye^{x+y}\ :\ c = xe^{2x}$$

$$\Delta = b^2 - ac = \frac{y^2}{4}e^{2x+2y} - xe^{2x+2y} = \underbrace{e^{2x+2y}}_{\text{همواره مثبت}}\left\{\frac{y^2}{4}-x\right\}$$

اگر $\dfrac{y^2}{4}-x > 0$ باشد معادله مورد نظر از نوع هذلولی گون است.

اگر $\dfrac{y^2}{4}-x = 0$ باشد معادله از نوع سهمی‌گون است.

اگر $\dfrac{y^2}{4}-x < 0$ باشد معادله از نوع بیضی‌گون است.

مثال : تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم کانونیک معادله با مشتقات جزئی زیر را مشخص کنید.

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad a = x^2 : 2b = 0 : c = 4$$

حل : معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\left(\frac{dy}{dx}\right)+c=0 \Rightarrow x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4=0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-\frac{4}{x^2} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2i}{x}\\[2mm] \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2i}{x}\end{cases}$$

معادله اول : $dy = \dfrac{2idx}{x} \Rightarrow y = 2iLnx + C$

معادله دوم : $dy = \dfrac{-2idx}{x} \Rightarrow y = -2iLnx + k$

لذا تغیر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم کانونیک عبارتند از:

$$p = y - 2i\,Ln\,x \qquad q = y + 2i\,Ln\,x$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی با ضرایب ثابت از نوع همگن

با فرض آن که c , b , a اعداد ثابت هستند برای حل معادله $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}+cz=0$ با تعریف اپراتورهای $D=\dfrac{\partial}{\partial x}$ و $D'=\dfrac{\partial}{\partial y}$ می‌توان نوشت $(aD+bD'+c)z=0$ و می‌توان نشان داد جواب کلی معادله مورد نظر چنین است:

$$z=e^{-\frac{c}{a}x}.\varphi(ay-bx) \qquad \text{با فرض } a\neq 0$$

یا

$$z=e^{-\frac{c}{b}y}.\varphi(ay-bx) \qquad \text{با فرض } b\neq 0$$

(φ تابع اختیاری است.)

مثال : جواب کلی معادله $3\dfrac{\partial z}{\partial x}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}+5=0$ را بنویسید.

حل :

$$z=e^{-\frac{5}{3}x}\varphi(3y+2x) \quad \text{یا} \quad z=e^{-\frac{5}{-2}y}\varphi(3y+2x)$$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت:

با فرض آنکه b , a , ... اعداد ثابتند برای حل معادله با مشتقات جزئی

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+c\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+d\frac{\partial z}{\partial x}+e\frac{\partial z}{\partial y}+fz=0$$

با تعریف اپراتورهای D و D' می‌توان نوشت:

$$\Big(\underbrace{aD^2+bD'^2+cDD'+dD+eD'+f}_{H(D,D')}\Big)z=0$$

حال چنانچه بتوان عبارت $H(D,D')$ به حاصل‌ضرب دو عامل درجه اول برحسب D و D' تجزیه کرد.

$$H(D,D')=(\alpha D+\beta D'+\gamma)(mD+nD'+\ell)$$

آن‌گاه پایه جواب معادله مورد نظر چنین است:

پایه جواب اول		پایه جواب دوم
$e^{-\frac{\gamma}{\alpha}x}\varphi(\alpha y-\beta x) \quad \alpha\neq 0$ $e^{-\frac{\gamma}{\beta}y}\varphi(\alpha y-\beta x) \quad \beta\neq 0$	و	$e^{-\frac{\ell}{m}x}\psi(my-nx) \quad m\neq 0$ $e^{-\frac{\ell}{n}y}\psi(my-nx) \quad n\neq 0$

اگر در تجزیه $H(D,D')$ به وضعیت مقابل رسیدیم: $H(D,D')=(\alpha D+\beta D'+\gamma)^2$

آن‌گاه پایه‌های جواب به فرم زیر خواهد بود:

$e^{-\frac{\gamma}{\alpha}x}\varphi(\alpha y-\beta x) \quad \alpha\neq 0$ $e^{-\frac{\gamma}{\beta}y}\varphi(\alpha y-\beta x) \quad \beta\neq 0$	و	$xe^{-\frac{\gamma}{\alpha}x}\psi(\alpha y-\beta x) \quad \alpha\neq 0$ $ye^{-\frac{\gamma}{\beta}y}\psi(\alpha y-\beta x) \quad \beta\neq 0$
پایه جواب اول		پایه جواب دوم

مثال : جواب کلی معادلات زیر را مشخص کنید.

$$1)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

حل :

$$H(D,D')=D^2-DD'-6D'^2=(D-3D')(D+2D')$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است:

$$u=e^{-\frac{0}{1}x}\varphi(1y+3x)+e^{-\frac{0}{1}x}\psi(1y-2x)$$

$$2)\quad 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

حل :

$$H(D,D')=4D^2-12DD'+9D'^2=(2D-3D')^2$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است:

$$u=\varphi(2y+3x)+y\psi(2y+3x)$$ یا $$u=\varphi(2y+3x)+x\psi(2y+3x)$$

$$3)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

حل :

$$H(D,D')=D^2-DD'+3D-3D'=D(D+3)-D'(D+3)=(D-D')(D+3)$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است:

$$u=e^{-\frac{0}{1}}\varphi(x+y)+e^{-\frac{3}{1}x}\varphi(1y-0x)$$

(جواب را برحسب $z=x+iy$; $z=x-iy$ بنویسید.)

$$4)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y}=0$$

حل :

$$H(D,D')=D^2+D'^2=(D-iD')\,(D+iD')$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است:

$$u=\varphi(1y+ix)+\psi(1y-ix)$$
$$u=\varphi(i(x-iy))+\psi(-iz)=F(\overline{z})+G(z)$$

حل معادلات با مشتقات جزئی با استفاده از تبدیل لاپلاس:

همان‌طوری که می‌دانید تعریف تبدیل لاپلاس به گونه‌ای است که تابع با متغیر زمان را تبدیل به تابعی با متغیر s می‌کند. بنابراین با توجه به قضایای تبدیل لاپلاس طبیعی است برای تابعی مانند $u(x,t)$ اگر تبدیل لاپلاس این تابع را $U(x,s)$ بنامیم داریم:

$$1)\ L\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=\frac{\partial}{\partial x}U(x,s)$$

$$2)\ L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s)$$

$$3)\ L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=sU(x,s)-u(x,0)$$

$$4)\ L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}=s^2U(x,s)-su(x,0)-u_t(x,0)$$

$$5)\ L\{tu(x,t)\}=-\frac{\partial}{\partial s}(U(x,s))$$

$$6)\ L\left\{t\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x}U(x,s)\right)$$

$$7)\ L\left\{x\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=x\left(sU(x,s)-u(x,0)\right)$$

مثال : چنانچه $L\{u(x,t)\}=U(x,s)$ فرض شود تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}+u=xt\\ u(x,0)=0\end{cases}$ کدام است؟

حل : از دو طرف معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}U+\Big(sU-\underbrace{u\cancel{(x,0)}}_{0}\Big)+U=x\frac{1}{s^2}\ \rightarrow\frac{\partial U}{\partial x}+(s+1)U=\frac{x}{s^2}$$

مثال : معادله دیفرانسیل همراه با شرایط کمکی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\\ u(x,0)=u_t(x,0)=0\\ u(0,t)=\sin t\\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=\text{محدود}\end{cases}$$

حل : از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s)-\Big(s^2U(x,s)-s\,\underbrace{u\cancel{(x,0)}}_{0}-\underbrace{u_t\cancel{(x,0)}}_{0}\Big)=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-s^2U=0\ \Rightarrow\ \boxed{\lambda^2-s^2=0\Rightarrow\lambda=\pm s}$$

$$U(x,s)=A(s)e^{sx}+B(s)e^{-sx}$$

از شرایط مرزی داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$u(0,t)=\sin t\Rightarrow U(0,s)=\frac{1}{1+s^2}\qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}u(x,t)=\text{محدود}\rightarrow \underset{x\to+\infty}{U(x,s)}=\text{محدود}$$

با اعمال شرط ($\underset{x\to+\infty}{U(x,s)}=\text{محدود}$) نتیجه می‌گیریم باید $A(s)=0$ باشد، لذا:

$$U(x,s)=B(s)e^{-sx}$$

و با اعمال شرط $U(0,s)=\frac{1}{1+s^2}$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{1+s^2}=B(s)e^{\circ}\Rightarrow U(x,s)=\frac{1}{1+s^2}e^{-sx}\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}}u(x,t)=u_x(t)\sin(t-x)$$

یادآوری:

$$\boxed{L^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}\ \underline{\text{قضیه دوم انتقال}}\ u_c(t)f(t-c)}$$

روش جداسازی متغیرها:

فرض کنید یک معادله با مشتقات جزئی برای تابعی مانند $u(x,y)$ داده شده باشد. با این فرض که شاید بتوان این تابع را به صورت $u(x,y)=A(x).B(y)$ نوشت u را به صورت جداسازی شده در داخل معادله با مشتقات جزئی قرار می‌دهیم. چنانچه حاصل کار را در نهایت بتوان به صورت $H(x)=L(y)$ نوشت که در آن H تابع A (x) و L تابع B (y) باشد، آن‌گاه فرض انجام شده برای u قابل قبول بوده و ناگزیریم بنویسیم:

$H(x)=L(y)=$ ثابت

و بدین ترتیب به دو معادله دیفرانسیل معمولی برای A (x) و B (y) می‌رسیم که با حل آن می‌توان تابع u رامشخص کرد.

مثال : با استفاده از روش جداسازی متغیرها جواب معادله با مشتقات جزئی $u_x+u_y=2(x+y)u$ را به‌دست آورید.

حل :

با فرض: $u(x,y)=A(x)B(y)$

با قرار دادن آن در معادله داریم:

$$A'(x)B(y)+A(x).B'(y)=2(x+y)A(x).B(y)$$

با تقسیم دو طرف بر AB داریم:

$$\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}=2(x+y)\Rightarrow \underbrace{\frac{A'}{A}-2x}_{\text{فقط x داریم}}=\underbrace{2y-\frac{B'}{B}}_{\text{فقط y داریم}}=C$$

به عبارت دیگر دو عبارت تنها در صورتی می‌توانند با هم برابر باشند که هر دو تابع ثابتی مانند C باشند.

داریم:

$$\begin{matrix}\frac{A'}{A}=2x+C\Rightarrow LnA=x^2+Cx+k_1\\ \frac{B'}{B}=2y-C\Rightarrow LnB=y^2-Cy+k_2\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A=e^{x^2+Cx+k_1}\\ B=e^{y^2-Cy+k_2}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad u=A.B=e^{x^2+Cx+k_1+y^2-Cy+k_2}$$

مثال : چنانچه معادله لاپلاس دو بعدی در مختصات قطبی به‌صورت $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$ بیان شود با استفاده از روش جداسازی متغیرها به چه معادلات دیفرانسیلی برخورد می‌کنیم.

حل :

$$A''B+\frac{1}{r}A'.B+\frac{1}{r^2}AB''=0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر AB می‌کنیم}} \frac{A''}{A}+\frac{1}{r}\frac{A'}{A}+\frac{1}{r^2}\frac{B''}{B}=0 \xrightarrow{\text{در } r^2 \text{ ضرب می‌کنیم}} \underbrace{r^2\frac{A''}{A}+r\frac{A'}{A}}_{\text{فقط دارای } r}=\underbrace{\frac{-B''}{B}}_{\text{فقط دارای } \theta}=C$$

$$\begin{cases} r^2\frac{A''}{A}+r\frac{A'}{A}=C \Rightarrow r^2A''+rA'-CA=0 & \text{معادله کوشی ـ اویلر} \\ \frac{-B''}{B}=C \Rightarrow B''+CB=0 & \text{معادله با ضرایب ثابت} \end{cases}$$

یادآوری:

$ax^2y''+bxy'+cy=0$ معادله‌کوشی اویلر

$x^2y''+xy'+\left(\lambda^2x^2-v^2\right)y=0$ معادله بسل

$\left(1-x^2\right)y''-2xy''+m\left(m+1\right)y=0$ معادله لژاندر

یادآوری از مسایل مقدار ویژه:

برخی مواقع یک معادله دیفرانسیل همگن همراه با شرایط کمکی همگن داده می‌شود که در آن یک پارامتر مانند λ موجود است. طبیعی است به واسطه همگن بودن معادله و شرایط مرزی آن همواره یک جواب بدیهی صفر برای مساله موجود است اما ممکن است بتوان با تعیین λ به طوری خاص برای مساله مورد نظر جواب‌های غیربدیهی نیز پیدا کرد. در چنین شرایطی به آن λها مقادیر ویژه مساله و به توابع جواب توابع ویژه مساله گفته می‌شود.

دقت کنید معمولاً در حین انجام این کار مجبوریم شرط خاصی روی λها قرار داده و بعد حل را ادامه دهیم که اگر آن شرط خاص مناسب نباشد، در انتهای کار به جواب‌های بدیهی می‌رسیم که البته مورد نظر نیست. (برای یافتن مقدار ویژه باید فرض دیگر را در مساله قرار داده و دوباره به بررسی معادلات بپردازیم. معمولاً مقدار λ با توجه به شرایط مرزی به راحتی قابل حدس زدن است.)

مثال : مقادیر ویژه و توابع ویژه مساله زیر را پیدا کنید:

$$\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$$

(راهنمایی: فرض بر آن است که توابع ویژه مساله از جنس sin و cos می‌باشد).

حل :

معادله مشخصه: $m^2+2m+\lambda=0 \Rightarrow m=-1\pm\sqrt{1-\lambda}$

چون فرض مساله در سینوسی یا کسینوسی بودن توابع ویژه است لذا با فرض $1-\lambda<0$ داریم:

$$m=-1\pm\sqrt{\lambda-1}\,i$$

لذا جواب عمومی چنین است:

$$y=Ae^{-x}\sin\left(\sqrt{\lambda-1}\,x\right)+Be^{-x}\cos\left(\sqrt{\lambda-1}\,x\right)$$

با اعمال شرط $y(0)=0$ به‌دست می‌آید $B=0$ و با اعمال شرط $y(1)=0$ به‌دست می‌آید:

$$0=Ae^{-1}\sin\left(\sqrt{\lambda-1}\right)$$

اگر بخواهیم A را مساوی صفر قرار دهیم به جواب بدیهی $y=0$ می‌رسیم که البته یک جواب مساله است ولی ما به دنبال مقادیر ویژه و توابع ویژه هستیم:

$$\sin\left(\sqrt{\lambda-1}\right)=0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\lambda-1}=k\pi \;\Rightarrow\; \underbrace{\lambda=k^2\pi^2+1}_{\text{مقادیر ویژه مساله}}$$

و لذا داریم: $y=Ae^{-x}\sin(k\pi x)$

معادلات فیزیکی موج ـ حرارت و لاپلاس از نوع همگن همراه با شرایط مرزی همگن:

موج : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

حرارت : $\dfrac{\partial u}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

لاپلاس
$$\begin{cases} \text{دکارتی} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\[2ex] \text{قطبی} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \end{cases}$$

هر سه معادله مذکور (در هر دستگاه مختصات) با روش جداسازی متغیرها قابل حل است در زمان استفاده از این روش در انتهای مساله به معادلات دیفرانسیل معمولی برخورد می‌کنیم که برای حل آن‌ها نیاز داریم تکلیف ثابت مربوط به روش جداسازی متغیرها را معلوم کنیم، مرسوم است با یک فرض دلخواه راجع به آن ثابت که بتوان جواب‌های معادلات دیفرانسیل حاصله را پیدا کرد به حل آن معادلات دیفرانسیل بپردازیم و سپس با اعمال شرایط مرزی همگن داده شده در مساله تکلیف آن ثابت را به طور دقیق مشخص کنیم.

دقت کنید اگر فرض صورت گرفته برای ثابت مذکور مناسب نباشد به جواب‌های بدیهی یا غیرقابل قبول خواهیم رسیم که مورد نظر ما نیست و باید آن فرض را عوض کرده و دوباره مساله را با فرض جدید حل کنیم.

در انتهای کار جواب مساله به صورت حاصل‌ضرب چند تابع پیدا می‌شود که در این‌جا ثابت‌هایی نیز موجودند و بنا به خطی بودن معادلات اصلی‌مان هر مجموعی از این جواب‌ها به عنوان جواب مساله قابل قبول است. لذا در نهایت جواب وابسته به طبیعت مساله و طبیعت مقادیر ویژه مساله، در قالب سیگما یا انتگرال بیان می‌شود و با اعمال شرایط کمکی داده شده با استفاده از بحث سری‌های فوریه یا انتگرال‌های فوریه یا ... ثابت‌های مذکور را پیدا و جواب نهایی را گزارش می‌دهیم.

دقت کنید در بسیاری مواقع برای یافتن جواب صحیح بدون نیاز به اعمال فوق می‌توان از سه بحث زیر استفاده کرد:

الف) جواب صحیح باید شرایط مرزی و اولیه مساله را ارضا کند.

ب) جواب صحیح باید روی حالت‌های حدی متغیرهای ممکنه همواره شرط محدود ماندن را اقناع کند.

ج) جواب صحیح البته باید معادله با مشتقات جزئی داده شده را ارضا کند.

مثال : برای معادله حرارت زیر ساختار جواب مساله چگونه خواهد بود؟

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=0\\ u(x,0)=f(x)\end{cases}$$

۱) $u(x,t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-n^2\pi^2 t}\cos n\pi x$

۲) $u(x,t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{n^2\pi^2 t}\cos n\pi x$

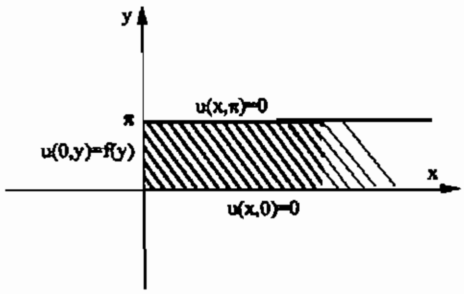
۳) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$

۴) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$

حل : شرایط محدود بودن برای $t\to\infty$ وجود ترم‌های $e^{n^2\pi^2 t}$ را منتفی می‌کند والبته از آن‌جا که $\lim_{t\to\infty}e^{-n^2\pi^2 t}=0$ است فقط گزینه‌های *1* و *3* کاندیدای جواب باقی می‌ماند هم‌چنین برای اقناع شرایط مرزی همگن داده شده روی u_x گزینه‌های شامل $\cos n\pi x$ که در مشتق آن‌ها نسبت به x $\sin n\pi x$ باقی می‌ماند به عنوان جواب قابل قبول است. گزینه‌های شامل $\sin n\pi x$ که در مشتق آن‌ها $\cos n\pi x$ ظاهر می‌شود و $\cos n\pi(1)$ و $\cos n\pi(0)$ مخالف صفر است، مردودند پس گزینه ۱ صحیح است.

مثال : در حل معادله لاپلاس در هندسه نشان داده شده به همراه شرایط مرزی موجود چنانچه جواب مساله ساختاری مانند:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n e^{-nx}+B_n e^{nx}\right)\left(C_n\sin(ny)+D_n\cos(ny)\right)$$



داشته باشد تکلیف ضرایب A_n، B_n، C_n و D_n را مشخص کرده و برای حالت‌های $f(y)=1$ و $f(y)=\sin 3y+2\sin 4y$ وضعیت نهایی جواب را مشخص کنید.

حل : اولاً وقتی $x\to+\infty$ جواب باید محدود باقی بماند لذا وجود e^{nx} منتفی است. لذا باید $B_n=0$ باشد از طرفی برای اقناع شرایط $u(x,0)=u(x,\pi)=0$ وجود $\cos ny$ در جواب منتفی است لذا باید $D_n=0$ باشد. پس باید:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}E_n e^{-nx}\sin ny$$

الف) $u(0,y)=1=f(y)$ باشد با اعمال این شرط به‌دست می‌آید:

$$1=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\sin ny$$

باید E_n ضرایب سری فوریه سینوسی تابع $f(y)=1$ در فاصله $0\le y\le\pi$ باشد یعنی:

$$E_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\sin ny\,dy=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos ny\Big|_0^{\pi}=\frac{-2}{n\pi}(\cos n\pi-1)$$

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}\{\cos n\pi-1\}\sin ny$$

ب) $u(0,y)=\sin 3y+2\sin 4y=f(y)$ باشد با اعمال این شرط به‌دست می‌آید:

$$\sin 3y+2\sin 4y=\sum_{n=0}^{\infty}E_n \sin ny$$

پس باید $E_4=2$ و $E_3=1$ و بقیه E_nها صفرباشند لذا:

$$u(x,y)=1e^{-3x}\sin 3y+2e^{-4x}\sin 4y$$

همگن کردن یک مساله غیرهمگن:

برخی مواقع یک معادله با مشتقات جزئی همراه با شرایط مرزی و اولیه خاص داده می‌شود که خود معادله و شرایط مرزی آن از نوع همگن نمی‌باشد. این امکان وجود دارد که به طریق مناسب معادله مورد نظر به یک مساله جدید که در آن معادله حاصله و شرایط مرزی موجود از نوع همگن می‌باشد تبدیل شود.

مثال : به ازای چه تابعی از $\psi(x)$ و $u(x,t)=w(x,t)+\psi(x)$، مساله $u_t=4u_{xx}+\sin x$ با شرایط $u(x,0)=f(x)$ و $u(0,t)=1$ و $u_x(0,t)=-1$ به معادله همگن با شرایط مرزی همگن برای تابع w تبدیل می‌شود.

حل : $u(x,t)=w(x,t)+\psi(x)$ را داخل معادله اصلی قرار می‌دهیم: $w_t=4(w_{xx}+\psi'')+\sin x$

اگر قرار است معادله حاصله برای w همگن شود باید $4\psi''+\sin x=0$ شود.

از طرفی اگر قرار است شرایط مرزی حاکم بر w همگن باشد باید $w(0,t)=0$ و $w_x(0,t)=0$ باشد.

$$u(x,t)=w(x,t)+\psi(x)\Rightarrow u_x(x,t)=w_x(x,t)+\psi'(x)$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$\cancel{u(0,t)}^{1}=\cancel{w(0,t)}^{0}+\psi(0)\Rightarrow\psi(0)=1$$

$$u_x(0,t)=w_x(0,t)+\psi'(0)\Rightarrow\psi'(0)=-1$$

حال می‌نویسیم:

$$4\psi''+\sin x=0\Rightarrow\psi''=-\frac{\sin x}{4}\Rightarrow\psi'=\frac{\cos x}{4}+A\Rightarrow\psi=\frac{\sin x}{4}+Ax+B$$

با اعمال شرایط پیدا شده برای ψ داریم:

$$\psi(0)=1\Rightarrow B=1 \qquad \psi'(0)=-1\Rightarrow\frac{1}{4}+A=-1\Rightarrow A=-\frac{5}{4}$$

لذا:

$$\psi(x)=\frac{\sin x}{4}-\frac{5}{4}x+1$$

پیدا کردن جواب حالت ماندگار یک معادله با مشتقات جزئی

برخی مواقع تابع مورد نظر در یک معادله با مشتقات جزئی به گونه‌ای است که با توجه به گذشت زمان‌های طولانی جواب حاصله مستقل از زمان می‌باشد این جواب اصطلاحاً جواب حالت ماندگار گفته می‌شود.

مثال : معادله ناهمگن انتقال حرارت در یک بعد به همراه شرایط زیر را در نظر بگیرید:
جواب حالت ماندگار مساله چیست؟

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a=\dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(0,t)=10 \\ u_x(1,t)=2 \end{cases}$$

حل :

$$u_{ss}=\lim_{t\to\infty} u(x,t)$$

در حالت ماندگار $\dfrac{\partial}{\partial t}=0$ است لذا:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-a \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=-ax+C_1 \Rightarrow u=-\frac{ax^2}{2}+C_1x+C_2$$

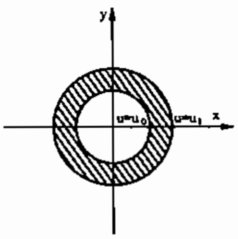
با اعمال شرایط مرزی داده شده داریم:

$$u_x(1,t)=2 \Rightarrow -a(1)+C_1=2 \Rightarrow C_1=a+2 \qquad u(0,t)=10 \Rightarrow C_2=10$$

پس $u_{ss}(x)=-\dfrac{a}{2}x^2+(a+2)x+10$.

حل معادله لاپلاس $(\nabla^2 u=0)$ در دو هندسه خاص با شرایط مرزی ثابت

الف) می‌توان نشان داد حل معادله لاپلاس $(\nabla^2 u=0)$ در مساله زیر به صورت زیر نوشته می‌شود:



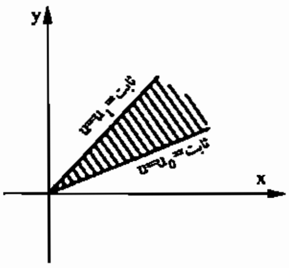
$$u=A\,\mathrm{Ln}\,r+B \quad \text{یا} \quad u=\frac{A}{2}\mathrm{Ln}\left(x^2+y^2\right)+B$$

A و B با اعمال شرایط مرزی محاسبه می‌شوند.

ب) می‌توان نشان داد حل معادله لاپلاس $\nabla^2 u=0$ در مساله زیر به صورت زیر خواهد بود.

$$u=A\theta+B \quad \text{یا} \quad u=A\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+B$$

A و B با اعمال شرایط مرزی محاسبه می‌شوند.

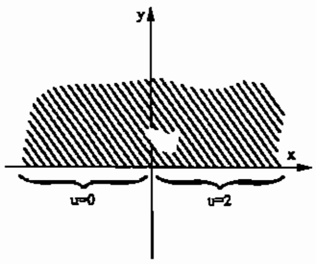


(دقت کنید در هر دو بحث فوق شرایط مرزی روی هر دو مرز عدد ثابت است).

مثال : جواب مساله زیر را در (3 و 2) محاسبه کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad ; \quad -\infty<x<+\infty \quad ; \quad y\geq 0 \qquad u(x,0)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2 & x>0\end{cases}$$

حل : با توجه به نکته گفته شده داریم:



$$u=A\theta+B$$
$$\theta=0\Rightarrow u=2\Rightarrow 2=A(0)+B\Rightarrow B=2$$
$$\theta=\pi\Rightarrow u=0\Rightarrow 0=A(\pi)+2\Rightarrow A=-\frac{2}{\pi}$$

پس:

$$u=-\frac{2}{\pi}\theta+2\Rightarrow u(x,y)=-\frac{2}{\pi}\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{y}{x}\right)+2\Rightarrow u(2,3)=-\frac{2}{\pi}\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{3}{2}\right)+2$$

حل دالامبر معادله موج

معادله موج $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ را در نظر بگیرید می‌توان نشان داد با شرایط اولیه داده شده در زیر:

$$\begin{cases}u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$$

جواب مساله را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\{f(x+ct)+f(x-ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(p)dp$$

توجه:

۱) معادله موج $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ را با شرایط اولیه و مرزی داده شده در زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=g(x)\\ u(0,t)=u(L,t)=0\end{cases}$$

دقت کنید در حل معادله موج در محیط متناهی فوق می‌توان همان حل دالامبر گفته شده را مورد استفاده قرار داد. فقط لازم است توابع f و g نسبت به خط $x=0$ به فرم فرد گسترش یافته و برای توابع حاصله گسترش متناوب با دوره تناوب 2L را اعمال کنیم.

۲) معادله موج $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ را با شرایط اولیه و مرزی داده شده در زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=g(x)\\ u_x(0,t)=u(L,t)=0\end{cases}$$

دقت کنید در حل معادله موج در محیط متناهی فوق می‌توان همان حل دالامبر گفته شده را مورد استفاده قرار داد. فقط لازم است توابع f و g نسبت به خط $x=L$ به فرم فرد و نسبت به خط $x=0$ به فرم زوج گسترش یافته و برای توابع حاصله گسترش متناوب با دوره تناوب $4L$ را اعمال کنیم.

مثال : معادله موج زیر را در نظر بگیرید.

$$4u_{xx}=u_{tt}$$

$$u(x,0)=\begin{cases} x & 0<x<\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}<x<1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t(x,0)=0 \\ u_x(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

آن‌گاه $u\left(\frac{1}{2},4\right)$ چقدر می‌شود؟

حل : داریم:

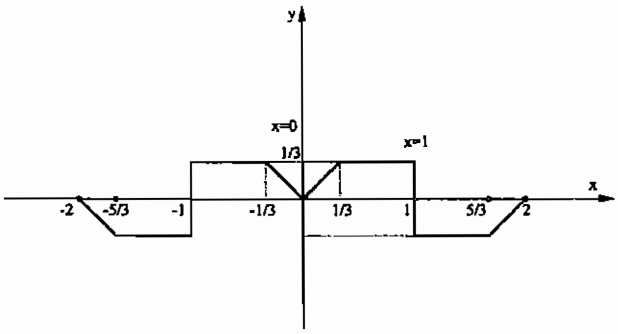
$$u_x(0,t)=u(1,t)=0 \qquad C=2$$

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}<x<1 \end{cases} \qquad g(x)=0$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\{f(x+2t)+f(x-2t)\}\Rightarrow u\left(\frac{1}{2},4\right)=\frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{1}{2}+8\right)+f\left(\frac{1}{2}-8\right)\right\}=\frac{1}{2}\{f(8.5)+f(-7.5)\}$$

با توجه به نکته گفته شده گسترش مناسب برای $f(x)$ چنین است:

$$u\left(\frac{1}{2},4\right)=\frac{1}{2}\{f(0.5)+f(0.5)\}=f(0.5)=\frac{1}{3}$$



مثال‌هایی دیگر از مشتقات جزئی

مثال : معادله با مشتقات جزئی زیر را با توجه به شرایط کمکی داده شده حل کنید:

حل :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=x^2\cos y+y^2 \\ u(x,0)=\cos x \\ u(0,y)=e^y+y \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2\cos y+y^3 \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{انتگرال‌گیری}} \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^3}{3}\cos y+y^3x+A(y) \xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\text{انتگرال‌گیری}} u=\frac{x^3}{3}\sin y+\frac{y^4}{4}x+B(y)+C(x)$$

با اعمال شرایط کمکی داده شده داریم:

$$u(x,0)=\cos x\Rightarrow \cos x=B(0)+C(x)\Rightarrow C(x)=\cos x-B(0)\Rightarrow C(0)=1-B(0)\Rightarrow C(0)+B(0)=1$$

$$u(0,y)=e^y+y\Rightarrow e^y+y=B(y)+C(0)\Rightarrow B(y)=e^y+y-C(0)$$

پس به‌دست می‌آید:

$$u=\frac{x^3}{3}\sin y+\frac{y^4}{4}x+e^y+y-C(0)+\cos x-B(0)\Rightarrow \frac{x^3}{3}\sin y+\frac{y^4}{4}x+e^y+y+\cos x-1$$

مثال: معادله با مشتقات جزئی $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$ را با تغییر متغیرهای $v=xy$ و $u=x+y$ برحسب مشتقات نسبی z برحسب u و v بازنویسی کنید.

حل :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.(1)+\frac{\partial z}{\partial v}(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}.(1)+\frac{\partial z}{\partial v}(x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}^{1}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}.\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}^{x}+\frac{\partial z}{\partial v}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v.\partial u}.\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}^{1}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}^{x}\right)y$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}(x+y)+\frac{\partial z}{\partial v}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial^2 v}$$

با قرار دادن سه عبارت به‌دست آمده در معادله اصلی داریم:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u.\partial v}(x+y)+\frac{\partial z}{\partial v}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad 2\frac{\partial z}{\partial u}+(u-1)\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-u\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-v\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$$

مثال : معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاصل از حذف تابع اختیاری F در رابطه $F(xz,z-y)=0$ را بیابید.

حل : Z تابعی از $x\,,y$ فرض شده است.

$$u=xz\quad;\quad v=z-y$$

لذا معادله با مشتقات جزئی مورد نظر چنین است:

$$\begin{vmatrix} z+x\frac{\partial z}{\partial x} & x\frac{\partial z}{\partial y}\\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}-1\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad z\frac{\partial z}{\partial y}-z+x\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}-x\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=0\quad\Rightarrow\quad \boxed{z\frac{\partial z}{\partial y}-x\frac{\partial z}{\partial x}=z}$$

مثال : مقدار k یک ثابت حقیقی فرض شده است، در وضعیت‌های مختلف k روی طبیعت معادله با مشتقات جزئی زیر بحث کنید.

$$(3-k)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2k\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

حل : داریم:

$$a=3-k \quad ; \quad b=k \quad ; \quad c=1$$

$$\Delta : b^2-ac=k^2+k-3$$

برای تعیین علامت Δ می‌نویسیم:

$$k^2+k-3=0 \Rightarrow k=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

لذا ملاحظه می‌شود:

k		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	
Δ	+	0	−	0	+
طبیعت معادله	هذلولی‌گون	سهموی‌گون	بیضی‌گون	سهموی‌گون	هذلولی‌گون

مثال : معادله با مشتقات جزئی $\left(y^2+2x\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$ (با فرض $y^2\neq 2x$) اولا روی طبیعت معادله بحث کنید و ثانیاً تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم کانونیک را پیدا کنید.

حل : معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم.

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\left(y^2+2x\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)+2x=0 \quad \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} \quad \begin{cases}\frac{dy}{dx}=1\\ \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{y^2}\end{cases} \Rightarrow$$

هر دو جواب معادله مشخصه از جنس حقیقی شده (با توجه به شرط $y^2\neq 2x$) لذا معادله از نوع هذلولی‌گون است.

حال داریم:

$$\frac{dy}{dx}=1\Rightarrow dy=dx\Rightarrow y=x+C_1\Rightarrow y-x=C_1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{y^2}\Rightarrow y^2dy=2xdx\Rightarrow\frac{y^3}{3}-x^2=C_2$$

لذا تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم استاندارد چنین است:

$$u=y-x \quad ; \quad v=\frac{y^3}{3}-x^2$$

مثال : معادله با مشتقات جزئی زیر را در نظر بگیرید معادله حاکم بر تبدیل لاپلاس جواب مساله چیست؟

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-x\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+t\dfrac{\partial x}{\partial t}=t^2\\ u(x,0)=1\quad;\quad u_t(x,0)=2\\ u(0,t)=t\end{cases}$$

حل : با فرض $L\{u(x,t)\}=U(x,s)$ از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L\left\{\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial t}\right\}-L\left\{x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}+L\left\{t\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=L\{t^2\}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial x}\{sU-u(x,0)\}-x\{s^2U-su(x,0)-u_t(x,0)\}-\frac{\partial}{\partial s}(sU-u(x,0))=\frac{2}{s^3}$$

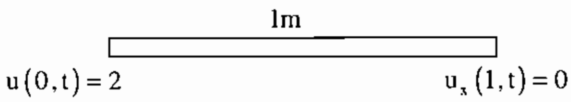
$$s\frac{\partial U}{\partial x}-xs^2U+sx+2x-U-s\frac{\partial U}{\partial s}=\frac{2}{s^3}$$

و البته تبدیل لاپلاس شرط مرزی نیز چنین است:

$$u(0,t)=t\xrightarrow{\ell}U(0,s)=\frac{1}{s^2}$$

مثال : معادله انتقال حرارت میله‌ای به طول 1 به صورت $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4x+\dfrac{\partial u}{\partial t}$ داده شده است چنانچه سر میله در دمای ثابت 2 و انتهای میله عایق شده باشد توزیع دمای حالت ماندگار یعنی $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=u_{ss}(t)$ را بیابید.

حل :



در حالت ماندگار $\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$ است لذا معادله مورد نظر به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4x\Rightarrow \text{انتگرال}\ \frac{\partial u}{\partial x}=2x^2+C$$

با اعمال شرط $u_x(1,t)$ به‌دست می‌آید:

$$0=2+C\Rightarrow C=-2$$

لذا داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x^2-2\Rightarrow \text{انتگرال}\ u=\frac{2}{3}x^3-2x+k$$

با اعمال شرط $u(0,t)=2$ به‌دست می‌آید $k=2$

مثال : معادله با مشتقات جزئی با شرایط زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\cos x+\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & 0<x<\pi\\ u(0,t)=1\quad;\quad u(\pi,t)=2\\ u(x,0)=1\quad;\quad u_t(x,0)=x\end{cases}$$

با فرض آن‌که $u(x,t)=w(x,t)+\varphi(x)$ (*) ; $\varphi(x)$ را طوری پیدا کنید که معادله حاکم بر w از نوع همگن و شرایط مرزی آن نیز همگن باشد.

حل: جواب (*) را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\varphi''(x)=\cos x+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

اگر بخواهیم معادله فوق برای w همگن باشد، یعنی نباید در معادله جملات فاقد w داشته باشیم، یعنی باید $\cos x$, $\varphi''(x)$ از معادله حذف شود و این حاصل نمی‌شود مگر این که $\varphi''(x)=\cos x$ باشد لذا داریم:

$$\varphi''(x)=\cos x \Rightarrow \varphi'(x)=\sin x+C \Rightarrow \varphi(x)=-\cos x+cx+k(**)$$

چون می‌خواهیم شرایط مرزی برای w همگن باشد باید:

$$w(0,t)=0 \quad ; \quad w(\pi,t)=0$$

لذا:

$$u(0,t)=w\cancel{(0,t)}^{0}+\varphi(0)\Rightarrow \varphi(0)=1$$

$$u(\pi,t)=w\cancel{(\pi,t)}^{0}+\varphi(\pi)\Rightarrow \varphi(\pi)=2$$

با اعمال شرایط در (**) داریم:

$$\varphi(0)=1\Rightarrow 1=-1+0+k\Rightarrow k=2$$

$$\varphi(\pi)=2\Rightarrow 2=1+C\pi+2\Rightarrow C=-\frac{1}{\pi}$$

لذا به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\varphi(x)=-\cos x-\frac{1}{\pi}x+2}$$

اگر بخواهیم شرایط اولیه حاکم بر w را پیدا کنیم می‌نویسیم:

$$u(x,t)=w(x,t)-\cos x-\frac{1}{\pi}x+2$$

$$u_t(x,t)=w_t(x,t)$$

حال داریم:

$$u(x,0)=w(x,0)-\cos x-\frac{1}{\pi}x+2$$

$$u_t(x,0)=w_t(x,0)$$

مثال : جواب معادله لاپلاس همراه با شرایط مرزی زیر را مشخص کنید:

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0 \quad 1<r<0 \\ \qquad\qquad 0\le\theta\le 2\pi \\ u(1,\theta)=2 \\ u(e,\theta)=0\end{cases}$$

حل : با توجه حل معادله لاپلاس در حالت خاص داریم:

$$u(r) = A\,\mathrm{Ln}\,r + B$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$\begin{array}{l} u(1)=2 \Rightarrow 2 = A\mathrm{Ln}(1)+B \Rightarrow B=2 \\ u(e)=0 \Rightarrow 0 = A\mathrm{Ln}e+B \Rightarrow A=-2 \end{array} \Rightarrow \quad u(r) = -2\mathrm{Ln}\,r+2 \Rightarrow \text{یا}\ \ u(x,y) = -2\,\mathrm{Ln}\sqrt{x^2+y^2}+2$$

مثال : توزیع مکانی و زمانی درجه حرارت $u(x,t)$ در میله‌ای به طول π که دو طرف آن در مخلوط آب و یخ قرار گرفته و منبع حرارتی باعث ایجاد توزیع دمای اولیه $u(x,0)=\sin x$ در میله‌شده است و در معادله $u_{xx}=u_t$ صدق می‌کند کدام است؟

الف) $\sin x \cos t$ ب) $\sinh x . e^{-t}$ ج) $\sin x . e^{-t}$ د) $\sin x\, e^{-\frac{t}{\pi}}$

حل :

برای ارضای شرایط مرزی $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ ملاحظه می‌شود تمام گزینه‌ها به جز گزینه (ب) قابل قبول می‌باشد ($\sin 0 = 0$ و $\sin\pi = 0$ ولی $\sinh\pi \neq 0$)

توجه داریم تمام گزینه‌ها برای حالت حدی $t \to +\infty$ شرط محدود ماندن جواب را ارضا می‌کند اما به سادگی می‌توان دید تنها گزینه‌ای که معادله $u_t = u_{xx}$ را ارضا می‌کند گزینه (ج) می‌باشد زیرا:

$$u(x,t) = \sin x . e^{-t} \Rightarrow u_x = \cos x . e^{-t}\ ,\ u_{xx} = -\sin x e^{-t} \qquad , \qquad u_t = -\sin x e^{-t}$$