معادلات دیفرانسیل

مجموعهٔ دروس عمومی

دکتر محمدصادق معتقدی

مؤسسهٔ آموزش عالی آزاد پارسه

فصل اول   معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

فصل دوم   معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و مراتب بالاتر

فصل سوم   سری‌های توانی

فصل چهارم   تبدیل لاپلاس

فصل پنجم   دستگاه معادلات دیفرانسیل

فصل اول

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱) تعاریف اولیه

یک معادله دیفرانسیل، معادله‌ای است که ارتباط بین یک تابع و مشتقات آن تابع نسبت به متغیرهای مختلف موجود در آن تابع و خود آن متغیرها را توصیف می‌کند.

چنان‌چه تابع مورد نظر تنها از یک متغیر تبعیت کند، معادله دیفرانسیل مربوطه از نوع معمولی و در غیر این صورت معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی خواهد بود.

مرتبه یک معادله دیفرانسیل:

بالاترین مرتبه مشتق موجود در یک معادله دیفرانسیل را مرتبه آن معادله دیفرانسیل می‌گوییم.

درجه معادله دیفرانسیل:

چنان‌چه یک معادله دیفرانسیل را بر حسب بالاترین مرتبه مشتق موجود، بتوان به صورت یک چند جمله‌ای نوشت، درجه آن چند جمله‌ای را، درجه معادله دیفرانسیل می‌گوییم.

معادله دیفرانسیل خطی:

اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان به گونه‌ای نوشت که شامل هیچ جمله غیر خطی از تابع و مشتقات تابع نباشد، آن‌گاه آن معادله دیفرانسیل را از نوع خطی می‌گوییم.

معادله دیفرانسیل خطی همگن:

یک معادله دیفرانسیل خطی را از نوع همگن گویند، هر گاه، تمام جملات آن معادله دیفرانسیل شامل تابع و یا یکی از مشتقات آن باشد.

مسایل حل شده:

مثال ۱: نوع معادلات زیر را مشخص کنید.

۱) $5yx^2+y^3e^x-4=0$

۲) $x^2y'''-4xe^y+1=0$

۳) $y^2+x\int_0^x y(t)dt-4=0$

حل: معادله ۱ و ۳ به ترتیب از نوع جبری و انتگرالی هستند، زیرا اثری از y' یا y'' و یا... نیست. ولی معادله ۲ به واسطه وجود ترم (y''') از نوع معادله دیفرانسیل معمولی است.

مثال ۲: درباره معادلات دیفرانسیل زیر بحث کنید.

۱) $x^3y''+y'^4-4x=0$

۲) $(x-1)y''+\cos y+\sin y''-4y=x^2$

۳) $x^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-x\frac{\partial u}{\partial x}+y^3\frac{\partial u}{\partial y}-4x=0$

حل مثال شماره ۲-۱:

$$x^3y''+y'^4-4x=0$$

۱) معادله، یک معادله دیفرانسیل است.

۲) به واسطه وجود ترم y'' مرتبه این معادله ۲ می‌باشد.

۳) معادله از نوع غیر خطی به واسطه ترم (y'^4) است.

۴) درجه این معادله دیفرانسیل به واسطه وجود ترم $(y'')^1$، درجه اول است.

حل مثال شماره ۲-۲:

$$(x-1)y''+\cos y+\sin y''-4y=x^2$$

۱) معادله، یک معادله دیفرانسیل است.

۲) مرتبه این معادله به واسطه وجود ترم (y'')، مرتبه ۲ است.

۳) این معادله از نوع غیر خطی است، به واسطه وجود ترم $(\sin y'')$,$(\cos y)$.

۴) چون برای تشخیص درجه معادله باید به سراغ درجه توانی بالاترین مشتق رفت و نیز در این مثال بالاترین مرتبه مشتق y'' است. که به‌واسطه آن‌که ترم y'' به صورت $\sin y''$ به کار رفته است، پس معادله فاقد درجه است.

حل مثال شماره ۲-۳:

$$x^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-x\frac{\partial u}{\partial x}+y^3\frac{\partial u}{\partial y}-4x=0$$

۱) معادله، یک معادله دیفرانسیل از نوع مشتقات جزیی است (به واسطه وجود ترم‌های $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$).

۲) مرتبه این معادله به واسطه وجود ترم $\left(\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)$ مرتبه ۲ است.

۳) معادله از نوع خطی است، چون فرم غیر خطی از u ندارد.

۴) معادله غیر همگن است (کافی است عبارتی را ببینیم که u نداشته باشد.).

۵) درجه ندارد. (چون معادله از نوع مشتقات جزیی است)

۲) تشکیل معادلات دیفرانسیل

هر معادله دیفرانسیل مرتبه nام می‌تواند در جواب خود n ثابت اختیاری داشته باشد. به تعبیر بر عکس، هر دسته منحنی شامل n ثابت اختیاری را می‌توان به صورت جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام دانست که برای پیدا کردن آن معادله دیفرانسیل کافی است، بین معادله آن دسته منحنی‌ها و مشتق مرتبه اول و دوم و... ومشتق مرتبه nام آن، ثابت‌های اختیاری مذکور را حذف کرد.

نکته: فرض کنید $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n$ ثابت‌های اختیاری و $y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots, y_n(x)$ توابعی معلوم باشند. می‌توان نشان داد، معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت‌های $k_1, k_2, \ldots, k_n$، دسته منحنی‌های $y = k_1y_1 + k_2y_2 + \ldots\ldots + k_ny_n$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\begin{vmatrix} y & y' & \cdots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & \cdots & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت‌های a و b در دسته منحنی‌های $y = a\sin(x+b)$ کدام است؟

حل:

$$\left.\begin{aligned} &1)\, y = a\sin(x+b) \\ &2)\, y' = a\cos(x+b) \\ &3)\, y'' = -a\sin(x+b) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{معادلات اول و سوم را بر هم تقسیم می‌کنیم.}} \frac{y}{y''} = -1$$

مثال ۲: معادله دیفرانسیل نظیر دسته توابع $y = ae^{2x} + bx^2$ که در آن a و b پارامترهای اختیاری می‌باشند را مشخص کنید.

حل: با توجه به نکته گفته شده خواهیم داشت:

$$y_1 = e^{2x} \quad ; y_2 = x^2$$

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ e^{2x} & 2e^{2x} & 4e^{2x} \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow e^{2x}\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ 1 & 2 & 4 \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ 1 & 2 & 4 \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow[\text{کرده و مساوی صفر قرار می‌دهیم.}]{\text{مقدار دترمینان ماتریس فوق را حساب}}$$

$$y(4-8x) - y'(2-4x^2) + y''(2x-2x^2) = 0$$

مثال ۳: معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت c در دسته توابع $y = c\sin 2x + \cos 2x$ را مشخص کنید.

حل:

$$\begin{aligned} &۱:\quad y - \cos 2x = c\sin 2x \\ &۲:\quad y' + 2\sin 2x = 2c\cos 2x \end{aligned} \longrightarrow \frac{y - \cos 2x}{y' + 2\sin 2x} = \frac{\sin 2x}{2\cos 2x} \Rightarrow$$

مشتق

$$2y\cos 2x - 2\cos^2 2x = y'\sin 2x + 2\sin^2 2x \Rightarrow y'\sin 2x - 2y\cos 2x + 2 = 0$$

۳) روش‌هایی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول در کلی‌ترین حالت، به صورت $H(x,y,y')$ بیان می‌شود که ممکن است تحت شرایطی مانند زیر، بتوان جواب آن را یافت.

۳-۱) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از نوع جدایی پذیر:

اگر بتوان یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول را در قالب کلی $A(x)dx = B(y)dy$ نوشت، آن‌گاه با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه مذکور، می‌توان جواب را یافت.

نکته: معادله دیفرانسیل $y' = f(ax + by + c)$ را در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد، با جایگزینی $\boxed{u(x) = (ax + by + c)}$ معادله مذکور، به یک معادله جدایی پذیر برای تابع u تبدیل می‌شود.

مسایل حل شده:

مثال ۱: معادله دیفرانسیل $y' = 2x\cos^2 y$ مفروض است. حد جواب این معادله دیفرانسیل را وقتی $x \to \infty$ محاسبه کنید.

حل: معادله دیفرانسیل مورد نظر تفکیک‌پذیر است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx} = 2x\cos^2 y \to \frac{dy}{\cos^2 y} = 2xdx \Rightarrow \int (1+tg^2 y)dy = \int 2x\,dx \Rightarrow tgy = x^2 + c \Rightarrow y = tg^{-1}(x^2 + c)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} tg^{-1}(x^2 + c) = tg^{-1}\infty = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = \dfrac{y^2 - 4}{x^2 + 9}$ چیست؟

حل: معادله دیفرانسیل مورد نظر از نوع تفکیک پذیر است. پس خواهیم داشت:

$$y' = \frac{y^2-4}{x^2+9} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2-4}{x^2+9} \Rightarrow \frac{dy}{y^2-4} = \frac{dx}{x^2+9} \Rightarrow \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\right)dy = \int \frac{dx}{x^2+9} \Rightarrow \frac{1}{4}Ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = \frac{1}{3}tg^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

مثال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را مشخص کنید.

$$y' = \sqrt{1 + x + y + xy}$$

حل:

$$y' = \sqrt{1 + x + y(x+1)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1+x)(1+y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x)^{\frac{1}{2}}(1+y)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow (1+y)^{-\frac{1}{2}}dy = (1+x)^{\frac{1}{2}}dx \Rightarrow \int (1+y)^{-\frac{1}{2}}dy = \int (1+x)^{\frac{1}{2}}dx \Rightarrow 2(1+y)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + k$$

مثال ۴: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = (x+y)^2$ را بیابید.

حل: با توجه به نکته گفته شده خواهیم داشت:

$$u(x) = x + y \Rightarrow u' = 1 + y' \xrightarrow[\text{خواهیم داشت:}]{\text{با جایگذاری در معادله}} u' - 1 = u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 + u^2 \Rightarrow \int \frac{du}{1+u^2} = \int dx \Rightarrow tg^{-1}u = x + c$$

$$\to u = tg(x+c) \xrightarrow{\text{با توجه به این‌که } u=x+y} x + y = tg(x+c)$$

۳-۲) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی:

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی در کلی‌ترین حالت به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

می‌توان نشان داد، جواب عمومی این معادله دیفرانسیل از رابطه زیر قابل حصول است.

$$\boxed{y(x)=e^{-\int P(x)dx}.\left\{\int Q(x).e^{\int P(x)dx}dx+c\right\}}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی معادله دیفرانسیل روبه‌رو را بیابید. $y'+y\,tgx=\cos^3 x$

حل: با توجه به این‌که معادله از نوع خطی مرتبه اول است، با توجه به فرمول خواهیم داشت:

$$y=e^{-\int tgx dx}\left[\int \cos^3 x.e^{\int tgx.dx}dx+c\right]\Rightarrow y=e^{+Ln\cos x}\left[\int \cos^3 x.e^{-Ln\cos x}dx+c\right]\Rightarrow y=\cos x\left[\int \cos^2 x\,dx+c\right]$$

$$\Rightarrow y=\cos x\left[\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx+c\right]=\cos x\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+c\right]\Rightarrow y=\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{4}\sin 2x.\cos x+c.\cos x$$

مثال ۲: در معادله دیفرانسیل همراه با شرط کمکی داده شده $\begin{cases}y'+2y=x^2+x\\ y(0)=1\end{cases}$ حاصل $y(1)$ کدام است؟

حل: با توجه به این‌که معادله از نوع خطی مرتبه اول است، لذا خواهیم داشت:

$$y(x)=e^{-\int 2dx}\left[\int (x^2+x)e^{\int 2dx}dx+c\right]\Rightarrow y(x)=e^{-2x}\left[\int (x^2+x).e^{2x}dx+c\right]$$

برای محاسبه انتگرال فوق خواهیم داشت:

مشتق		انتگرال
x^2+x		e^{2x}
$2x+1$	(+)	$\frac{1}{2}e^{2x}$
2	(-)	$\frac{1}{4}e^{2x}$
0	(+)	$\frac{1}{8}e^{2x}$

$$\Rightarrow \int (x^2+x)e^{2x}dx=\frac{1}{2}(x^2+x)e^{2x}-\frac{1}{4}(2x+1)e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}$$

$$\Rightarrow y(x)=e^{-2x}\left[\frac{1}{2}(x^2+x)e^{2x}-\frac{1}{4}(2x+1)e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+c\right]$$

$$\Rightarrow y(x)=\frac{x^2+x}{2}-\frac{2x+1}{4}+\frac{1}{4}+ce^{-2x}$$

حال با اعمال $y(0)=1$ داریم:

$$y(0)=1\Rightarrow c=1\Rightarrow y(x)=\frac{x^2}{2}+e^{-2x}$$

$$y(1)=\frac{1}{2}+e^{-2}$$

مثال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'-\frac{2}{x}y=\sin\frac{1}{x}$ را بیابید.

حل: معادله دیفرانسیل فوق از نوع خطی مرتبه اول است. لذا خواهیم داشت:

$$y(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int\sin\frac{1}{x}.e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+c\right]\Rightarrow y(x)=e^{\ln x^2}\left[\int\sin\frac{1}{x}.e^{-\text{Ln}x^2}dx+c\right]\Rightarrow y(x)=x^2\left[\int x^{-2}\sin\frac{1}{x}dx+c\right]$$

$$y(x)=x^2\left[+\cos\frac{1}{x}+C\right]\Rightarrow y(x)=x^2\cos\frac{1}{x}+Cx^2$$

مثال ۴: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $dy+\left(y\cot gx-e^{\cos x}\right)dx=0$ را با شرط $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ بیابید.

حل: با تقسیم طرفین معادله بر dx، بدیهی است معادله فوق به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود. پس خواهیم داشت:

$$y'+y\cot gx=e^{\cos x}\Rightarrow y(x)=e^{-\int\cot gx\,dx}\left[\int e^{\cos x}.e^{\int\cot gx\,dx}dx+c\right]\Rightarrow y(x)=e^{-\text{Ln}\sin x}\left[\int e^{\cos x}.e^{\text{Ln}\sin x}dx+c\right]$$

$$\Rightarrow y(x)=\frac{1}{\sin x}\left[\int\sin x.e^{\cos x}dx+c\right]\xrightarrow[u'=-\sin x\,e^{\cos x}]{u=e^{\cos x}\quad\text{تغییر متغیر}}y(x)=\frac{1}{\sin x}\left[-e^{\cos x}+c\right]\Rightarrow y(x)=-\frac{e^{\cos x}}{\sin x}+\frac{c}{\sin x}$$

$$\xrightarrow{y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\quad\text{با توجه به شرط اولیه}}y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{e^0}{1}+\frac{c}{1}=1\Rightarrow c=2\Rightarrow y(x)=\frac{2}{\sin x}-\frac{e^{\cos x}}{\sin x}$$

مثال ۵: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'+1=xe^{-y}$ را بیابید.

حل: ابتدا دو طرف معادله را در e^y ضرب می‌کنیم و سپس با تغییر متغیر $u=e^y$، معادله فوق به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود.

$$y'+1=xe^{-y}\xrightarrow{\text{طرفین را در } e^y \text{ ضرب می‌کنیم}}y'e^y+e^y=x\xrightarrow{u=e^y\ \Rightarrow\ u'=y'e^y}u'+u=x$$

$$\rightarrow\quad u(x)=e^{-\int dx}\left[\int xe^{\int dx}dx+c\right]$$

$$\Rightarrow\quad u(x)=e^{-x}\left[\int xe^x\,dx+c\right]\quad\Rightarrow\quad u(x)=e^{-x}\left[xe^x-e^x+c\right]\quad\Rightarrow\quad u(x)=x-1+ce^{-x}$$

$$\xrightarrow{u=e^y}\quad e^y=(x-1+ce^{-x})\quad\Rightarrow\quad y=\text{Ln}(x-1+ce^{-x})$$

یادآوری:

برای حل $\int xe^x dx$ داریم:

مشتق		انتگرال
x		e^x
1	(+)	e^x
0	(-)	e^x

$$\Rightarrow\int xe^x\,dx=xe^x-e^x$$

۳ـ۳) معادله دیفرانسیل مرتبه اول از نوع برنولی:

یک معادله دیفرانسیل برنولی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$y' + p(x)y = Q(x).y^n$$

می‌توان نشان داد با جایگزینی:

$$\boxed{u(x) = y^{1-n} \Rightarrow u'(x) = (1-n)y^{-n}y'}$$

معادله برنولی، مذکور به یک معادله مرتبه اول خطی برای تابع $u(x)$ تبدیل می‌شود که قابل حل است.

توجه: وقتی می‌خواهیم معادله برنولی را بر حسب u بازنویسی کنیم، نخست آن را به صورت $\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)}{y^{n-1}} = Q(x)$ نوشته و سپس عمل جایگزینی را انجام می‌دهیم.

مسایل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy' + y = xy^4$ را بیابید.

حل: بدیهی است معادله فوق به ازای $n = 4$ از نوع برنولی می‌باشد. لذا خواهیم داشت:

$$u(x) = y^{1-4} = y^{-3} \Rightarrow u'(x) = -3y^{-4}y'$$

$$xy' + y = xy^4 \Rightarrow \frac{xy'}{y^4} + \frac{y}{y^4} = x \Rightarrow x\left(\frac{-u'}{3}\right) + u = x \Rightarrow u' - \frac{3}{x}u = -3 \Rightarrow$$

معادله فوق، یک معادله مرتبه اول خطی می‌باشد. لذا خواهیم داشت:

$$u(x) = e^{+\int \frac{3}{x}dx}\left[\int -3e^{-\int \frac{3}{x}dx}dx + c\right] \Rightarrow u(x) = e^{3\ln x}\left[\int -3e^{-3\ln x}dx + c\right] \Rightarrow u(x) = x^3\left[\int -3x^{-3} + c\right]$$

$$\Rightarrow u(x) = x^3\left[\frac{+3}{2}x^{-2} + c\right] \Rightarrow u(x) = \frac{3}{2}x + cx^3 \xrightarrow{u = y^{-3}} y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{2}x + cx^3}}$$

مثال ۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + y = \frac{x}{y}$ را بیابید.

حل: بدیهی است معادله دیفرانسیل فوق، به ازای $n = -1$ از نوع برنولی می‌باشد. لذا خواهیم داشت:

$$u(x) = y^{1-(-1)} = y^2 \Rightarrow u'(x) = 2yy'$$

$$y' + y = \frac{x}{y} \Rightarrow yy' + y^2 = x \xrightarrow[u'(x) = 2yy']{u(x) = y^2} \frac{u'}{2} + u = x \Rightarrow u' + 2u = 2x$$

ملاحظه می‌شود، معادله مذکور، به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود. لذا خواهیم داشت:

$$u(x) = e^{-\int 2dx}\left[\int 2xe^{+\int 2dx}dx + c\right] \Rightarrow u(x) = e^{-2x}\left[\int 2xe^{2x}dx + c\right] \Rightarrow u(x) = e^{-2x}\left[xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + c\right] \Rightarrow$$

$$u(x) = x - \frac{1}{2} + ce^{-2x} \xrightarrow{u = y^{+2}} y(x) = \sqrt{x - \frac{1}{2} + ce^{-2x}}$$

یادآوری:

مشتق	انتگرال
$2x$	e^{2x}
2 (+)	$\frac{1}{2}e^{2x}$
0 (-)	$\frac{1}{4}e^{2x}$

$$\Rightarrow \int 2xe^{2x}\,dx = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}$$

مثال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$ را بیابید.

حل: بدیهی است معادله فوق، به ازای $n = 2$ از نوع برنولی می‌باشد. لذا خواهیم داشت:

$$u(x) = y^{1-2} = y^{-1} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = -y^{-2}y'$$

$$y' + y = y^2(\cos x - \sin x) \xrightarrow{\text{طرفین را در } (y^{-2}) \text{ ضرب می‌کنیم}} y^{-2}y' + y^{-1} = \cos x - \sin x$$

$$\xrightarrow[u'(x) = -y^{-2}y']{u(x) = y^{-1}} -u' + u = \cos x - \sin x$$

ملاحظه می‌شود که معادله مورد نظر، به یک معادله مرتبه اول خطی تبدیل می‌شود. لذا خواهیم داشت:

$$u' - u = \sin x - \cos x \Rightarrow u(x) = e^{+\int dx}\left[\int(\sin x - \cos x)e^{-\int dx}dx + c\right] \Rightarrow u(x) = e^{+x}\left[\int(\sin x - \cos x)e^{-x}dx + c\right]$$

$$\Rightarrow u(x) = e^{+x}\left[c - \sin x.e^{-x}\right] \Rightarrow u(x) = ce^{x} - \sin x \xrightarrow{u = y^{-1}} y(x) = \frac{1}{ce^{x} - \sin x}$$

یادآوری:

مشتق	انتگرال
$\sin x - \cos x$ (+)	e^{-x}
$\cos x + \sin x$ (-)	$-e^{-x}$
$-(\sin x - \cos x)$ (+) $\int$	$+e^{-x}$

$$\int(\sin - \cos x)e^{-x}dx$$
$$= (\cos x - \sin x)e^{-x} - (\cos x + \sin x)e^{-x} - \int(\sin - \cos x)e^{-x}dx$$
$$\Rightarrow 2\int(\sin x - \cos x)e^{-x}dx = -2\sin xe^{-x}$$
$$\Rightarrow \int(\sin x - \cos x)e^{-x}dx = -\sin x.e^{-x}$$

مثال ۴: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = \dfrac{y}{x^3y^2\ln y - x}$ را بیابید.

حل: با کمی دقت در فرم معادله، به این نتیجه می‌رسیم که، معادله فوق از نوع برنولی برای تابع x است. چرا که:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^3y^2\ln y - x}{y} \Rightarrow x' + \frac{1}{y}x = (y\ln y).x^3$$

با کمی دقت در شکل معادله تصحیح شده بالا، به این نتیجه می‌رسیم که $n = 3$ می‌باشد. لذا خواهیم داشت:

$$u(y) = x^{1-3} = x^{-2} \Rightarrow u'(y) = -2x^{-3}x'$$

$$x' + \frac{1}{y}x = x^3.y\ln y \xrightarrow{\text{طرفین را در } x^{-3} \text{ ضرب می‌کنیم}} x'x^{-3} + \frac{x^{-2}}{y} = y\ln y \Rightarrow \frac{-u'}{2} + \frac{u}{y} = y\ln y \Rightarrow u' - \frac{2u}{y} = -2y\ln y$$

ملاحظه می‌شود که معادله فوق، به یک معادله مرتبه اول خطی تبدیل می‌شود. لذا خواهیم داشت:

$$u(y)=e^{\int\frac{2}{y}dy}.\left[\int -2y\ln y.e^{-\int\frac{2}{y}dy}dy\right]=e^{\ln y^2}.\left[\int -2y\ln y.e^{\ln y^{-2}}dy+c\right]=y^2\left[\int -2\frac{\ln y}{y}dy+c\right]\xrightarrow{\text{با استفاده از یادآوری}}$$

$$u(y)=y^2\left[-(\ln y)^2+c\right]\xrightarrow{u(y)=x^{-2}}\frac{1}{x^2}=y^2\left[c-(\ln y)^2\right]\Rightarrow x^2y^2=\frac{1}{c-(\ln y)^2}$$

یادآوری:

$$I=\int\frac{2\ln y}{y}dy\xrightarrow[\text{بدیهی است}]{(\ln y)'=\frac{1}{y}}I=2\frac{(\ln y)^2}{2}=(\ln y)^2$$

۳-۴) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از نوع کامل:

معادله دیفرانسیل مقابل را در نظر بگیرید: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

چنان‌چه $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ برابر باشد، معادله مذکور، از نوع کامل گفته می‌شود و می‌توان نشان داد، جواب عمومی آن $u(x,y)=c$ می‌باشد که در آن:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=P(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=Q(x,y)\end{aligned}}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: جوابی از معادله دیفرانسیل $\left(2x^3+3xy^2\right)dx+\left(2y^3+3x^2y\right)dy=0$ که از مبدأ مختصات می‌گذرد، چیست؟

حل: شکل سؤال به صورت $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ است که ما را به یاد معادلات دیفرانسیل کامل و غیر کامل می‌اندازد. حال باید ابتدا شرط کامل بودن را برررسی کنیم:

$$\left.\begin{aligned}P(x,y)&=\left(2x^3+3xy^2\right)\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=6xy\\ Q(x,y)&=\left(2y^3+3x^2y\right)\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=6xy\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow$$ معادله از نوع کامل است.

لذا خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\left(2x^3+3xy^2\right)\Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2+A(y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\left(2y^3+3x^2y\right)\Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{2}y^4+\frac{3}{2}x^2y^2+B(x)\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{اجتماع جواب‌ها}}u(x,y)=\frac{x^4}{2}+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{2}$$

$$\frac{x^4}{2}+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{2}=c\xrightarrow{\text{شرط گذشتن از مبدأ}}c=0$$

پس جواب عمومی چنین است:

$$\Rightarrow\quad x^4+3x^2y^2+y^4=0\quad\Rightarrow\quad\left(x^2+y^2\right)^2+x^2y^2=0\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x^2y^2=0\\ \left(x^2+y^2\right)^2=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x=y=0$$

پس جواب، یک نقطه است.

مثال۲: مقادیر a و b چگونه باشند تا، معادله دیفرانسیل $\left(x^2+\frac{1}{y}+by^2\right)dx+axy^{-2}dy=0$ کامل باشد؟

حل: شرط کامل بودن می‌طلبد که: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. لذا خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y)=x^2+\frac{1}{y}+by^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}+2by \\ Q(x,y)=axy^{-2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=ay^{-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{-1}{y^2}+2by=\frac{a}{y^2}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases}$$

مثال۳: منحنی جواب معادله دیفرانسیل $(x^3-xy^2)dx+(y^3-x^2y)dy=0$ از مبدأ مختصات گذشته است. در این صورت شکل منحنی جواب به چه صورت است؟

حل: شکل مسئله به‌صورت $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ می‌باشد که ما را به یاد معادلات کامل و غیرکامل می‌اندازد. حال باید ابتدا شرط کامل بودن را بررسی کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y)=x^3-xy^2\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=-2xy \\ Q(x,y)=y^3-x^2y\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=-2xy \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow \quad \text{معادله از نوع کامل است.}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}=x^3-xy^2\Rightarrow u(x,y)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2y^2}{2}+A(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}=y^3-x^2y\Rightarrow u(x,y)=\frac{y^4}{4}-\frac{x^2y^2}{2}+B(x) \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اجتماع جواب‌ها}} u(x,y)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}$$

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}=c\xrightarrow{\text{شرط گذشتن از مبدأ}}c=0\Rightarrow(x^2-y^2)^2=0\Rightarrow x^2=y^2\Rightarrow x=\pm y$$

لذا جواب مورد نظر، دو خط متقاطع (عمود برهم) می‌باشد.

۳ ـ ۵) بحث یافتن عامل انتگرال‌ساز:

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

چنان‌چه $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$ باشد، معادله مذکور کامل نخواهد بود، اما ممکن است بتوان تابعی مانند $\mu(x,y)$ را به گونه‌ای یافت که با ضرب آن، در این معادله دیفرانسیل، معادله، به یک معادله دیفرانسیل کامل تبدیل شود. یعنی:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}(P.\mu)=\frac{\partial}{\partial x}(Q.\mu)}$$

آن‌گاه می‌توان گفت: $\mu(x,y)$ یک عامل انتگرال‌ساز، برای معادله دیفرانسیل مورد نظر بوده است. برای یافتن عامل انتگرال ساز ممکن است یکی از دو بحث زیر مناسب باشد:

الف) برخی مواقع ساختار کلی عامل انتگرال ساز که در قالب کلی $\mu = x^{\alpha}y^{\beta}$ قابل بیان بوده، در فرض مسئله و یا با استفاده از گزینه‌های داده شده مشخص گردد. در این شرایط، می‌توان آن ساختار کلی را، در معادله دیفرانسیل مورد نظر ضرب کرده و شرط کامل بودن معادله حاصله را بنویسیم، تا وضعیت عامل انتگرال ساز معلوم شود.

ب) معادله دیفرانسیل $pdx + Qdy = 0$ را در نظر بگیرید و سه بحث زیر را به خاطر داشته باشید.

۱) اگر: $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = h(x)$ باشد آن‌گاه:

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int h(x)dx}}$$

۲) اگر: $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = h(y)$ باشد آن‌گاه:

$$\boxed{\mu(y) = e^{-\int h(y)dy}}$$

۳) اگر: $\frac{1}{yQ - xP}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = h(xy)$ باشد آن‌گاه:

$$\boxed{\mu(xy) = e^{\int h(xy)d(xy)}}$$

نکته: اگر معادله دیفرانسیل دارای یک فاکتور انتگرال باشد، آن‌گاه دارای بی‌نهایت فاکتور انتگرال است.

مسایل حل شده:

مثال ۱: یک عامل انتگرال‌ساز، برای معادله دیفرانسیل $ydx + (xLny + y^6)dy = 0$ پیدا کنید.

حل:

$$\left.\begin{aligned} P(x,y) = y \;&\Rightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \\ Q(x,y) = (xLny + y^6) \;&\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x} = Lny \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1 - Lny}{y} = \frac{1}{y} - \frac{Lny}{y} = h(y)$$

پس می‌توان گفت:

$$\mu(y) = e^{-\int h(y)\,dy} = e^{\int\left(\frac{Lny}{y} - \frac{1}{y}\right)dy} = e^{-Lny + \frac{(Lny)^2}{2}} \Rightarrow \mu(y) = \frac{e^{\frac{(Lny)^2}{2}}}{y}$$

مثال ۲: یک عامل انتگرال‌ساز، برای معادله $(1+x^2)dy-(tg^{-1}x-y)dx=0$ پیدا کنید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y)=y-tg^{-1}x \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=1 \\ Q(x,y)=1+x^2 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=h(x) \quad\Rightarrow\quad h(x)=\frac{1-2x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mu(x)=e^{\int h(x)dx}=e^{\int\frac{1-2x}{1+x^2}dx}=e^{\int\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}\right)dx}$$

$$\Rightarrow \mu(x)=e^{tg^{-1}x-Ln\left(1+x^2\right)}=e^{tg^{-1}x}.e^{-Ln\left(1+x^2\right)} \Rightarrow \mu(x)=\frac{e^{tg^{-1}x}}{1+x^2}$$

مثال ۳: معادله دیفرانسیل $(xy+y^2)dx-(x^2+xy)dy=0$ چند عامل انتگرال ساز دارد؟

حل:

روش اول:

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y)=xy+y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=x+2y \\ Q(x,y)=-x^2-xy \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2x-y \end{array}\right\} \Rightarrow h(y)=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \Rightarrow h(y)=\frac{3x+3y}{y(x+y)}=\frac{3}{y}$$

$$\Rightarrow \mu(y)=e^{-\int h(y)dy}=e^{-\int\frac{3}{y}dy}=e^{-3Lny}=\frac{1}{y^3}$$

روش دوم:

$$h(x)=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{3x+3y}{-\left(x^2+xy\right)}=-\frac{3}{x} \Rightarrow \mu(x)=e^{\int h(x)dx}=e^{\int\frac{-3}{x}dx}=e^{-3Lnx} \Rightarrow \mu(x)=+\frac{1}{x^3}$$

روش سوم:

با توجه به این‌که معادله دیفرانسیل کامل نیست، فاکتور انتگرال را به صورت $\mu(x,y)=x^\alpha y^\beta$ می‌نویسیم. لذا خواهیم داشت:

$$x^\alpha y^\beta\left(xy+y^2\right)dx-x^\alpha y^\beta\left(x^2+xy\right)dy=0 \Rightarrow \left(x^{\alpha+1}y^{\beta+1}+x^\alpha y^{\beta+2}\right)dx-\left(x^{\alpha+2}y^\beta+x^{\alpha+1}y^{\beta+1}\right)dy=0$$

حال شرط کامل بودن را می‌نویسیم و از آن‌جا مقدار β,α را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y)=\left(x^{\alpha+1}y^{\beta+1}+x^\alpha y^{\beta+2}\right) \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\left((\beta+1)x^{\alpha+1}y^\beta+(\beta+2)x^\alpha y^{\beta+1}\right) \\ Q(x,y)=-\left(x^{\alpha+2}y^\beta+x^{\alpha+1}y^{\beta+1}\right) \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\left((\alpha+2)x^{\alpha+1}y^\beta+(\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+1}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \beta+1=-(\alpha+2) \\ \beta+2=-(\alpha+1) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha+\beta=-3 \\ \alpha+\beta=-3 \end{array} \Rightarrow$$

با توجه به یک معادله و دو مجهول، می‌توانیم β,α های مختلف داشته باشیم.

به ازای β,α های مختلف که شرط $\alpha+\beta=-3$ را دارند، عوامل انتگرال ساز مختلف به‌دست می‌آید.

مثال ۴: معادله دیفرانسیل $y(2-3xy)dx - xdy = 0$، عامل انتگرال سازی به صورت $\mu(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ دارد. β,α را بیابید.

حل: ابتدا عامل انتگرال ساز $\mu(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم و سپس شرط کامل بودن را برای یافتن β,α بررسی می‌کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$\left(2y-3xy^2\right)dx - xdy = 0 \xrightarrow{\text{ضرب می‌کنیم}\ \mu=x^{\alpha}y^{\beta}\ \text{در}} \left(2x^{\alpha}y^{\beta+1} - 3x^{\alpha+1}y^{\beta+2}\right)dx - x^{\alpha+1}y^{\beta}dy = 0 \Rightarrow \text{شرط کامل بودن}: \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} P(x,y) = 2x^{\alpha}y^{\beta+1} - 3x^{\alpha+1}y^{\beta+2} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2(\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta} - 3(\beta+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1} \\ Q(x,y) = -x^{\alpha+1}y^{\beta} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta} - 3(\beta+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1} = -(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta} \Rightarrow \begin{cases} 2(\beta+1) = -(\alpha+1) \\ -3(\beta+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = -2\ ;\ \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \text{عامل انتگرال ساز}: \mu(x,y) = xy^{-2}$$

۳-۶) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از نوع همگن:

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

اگر توابع Q,P، توابعی همگن از درجه α باشند، یعنی:

$$\boxed{\begin{aligned} P(\lambda x,\lambda y) &= \lambda^{\alpha}P(x,y) \\ Q(\lambda x,\lambda y) &= \lambda^{\alpha}Q(x,y) \end{aligned}}$$

معادله دیفرانسیل مذکور را از نوع همگن گفته و می‌توان نشان داد، با جایگزینی $y(x) = xu(x)$، معادله همگن مورد نظر، به یک معادله جدایی پذیر برای تابع u تبدیل خواهد شد.

$$\boxed{y = ux \begin{cases} y' = u + xu' \\ dy = xdu + udx \end{cases}}$$

تذکر ۱: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $y' = f\left(\dfrac{ax+by}{cx+dy}\right)$ همگن می‌باشند و با تغییر متغیر $y = ux$; $y' = u + xu'$ به معادله جدا شدنی تبدیل می‌شوند.

تذکر ۲: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$ همگن نیستند ولی می‌توان با تغییر متغیر مناسب، آن‌ها را به معادلات همگن تبدیل کرد.

الف) اگر صورت و مخرج، دو خط موازی باشند $\left(\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e}\right)$، با تغییر متغیر $u = ax + by$، معادله، تبدیل به معادله جداشدنی می‌شود.

ب) اگر صورت و مخرج، دو خط موازی نباشند و همدیگر را در نقطه (x_0,y_0) قطع کنند، با تغییر متغیرها $y = Y + y_0$ و $x = X + x_0$]، می‌توان معادله را به صورت تذکر ۱ تبدیل کرد.

مسایل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xyy' = x^2 + y^2$ را مشخص کنید.

حل: معادله بالا همگن است، زیرا:

$$y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \xrightarrow[x=\lambda x\,;\,y=\lambda y]{\text{برای پیدا کردن درجه همگن}} y' = \frac{\lambda^2(x^2+y^2)}{\lambda^2 xy} \Rightarrow$$ همگن از درجه صفر است.

حال با تغییر متغیر $y' = u + xu'; y = ux$ خواهیم داشت:

$$u + xu' = \frac{x^2+u^2x^2}{x^2u} \Rightarrow xu' = \frac{1+u^2}{u} - u \Rightarrow xu' = \frac{1}{u} \Rightarrow udu = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = \text{Ln}x + c'$$

$$\Rightarrow u^2 = 2\text{Ln}x + c \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \text{Ln}x^2 + c \Rightarrow y^2 = x^2\text{Ln}x^2 + cx^2$$

مثال ۲: معادله دیفرانسیل $y' - \frac{y}{x} + \text{cosec}\frac{y}{x} = 0$ را حل کنید.

حل: همان‌طور که ملاحظه می‌شود، معادله مذکور، همگن است. لذا خواهیم داشت:

$$y = ux \Rightarrow y' = u + xu'$$

$$y' - \frac{y}{x} + \text{cosec}\frac{y}{x} = 0 \Rightarrow u + xu' = u - \text{cosec}\,u \Rightarrow xu' = -\frac{1}{\sin u} \Rightarrow -\sin u\,du = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int -\sin u\,du = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \cos u - \text{Ln}x = c \Rightarrow \cos\frac{y}{x} - \text{Ln}x = c$$

مثال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$ را بیابید.

حل: بدیهی است که معادله فوق، همگن است. لذا خواهیم داشت:

$$y = ux \Rightarrow y' = u + xu'$$

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \Rightarrow u + xu' = \frac{x+ux}{x-ux} \Rightarrow xu' = \frac{1+u}{1-u} - u \Rightarrow xu' = \frac{1+u^2}{1-u} \Rightarrow \frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{u}{1+u^2}\right)du = \int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \text{Arc}\,\text{tg}u - \frac{1}{2}\text{Ln}(1+u^2) = \text{Ln}x + c' \Rightarrow \text{Arc}\,\text{tg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\text{Ln}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \text{Ln}x + c'$$

$$\Rightarrow 2\text{Arc}\,\text{tg}\frac{y}{x} = \text{Ln}\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) + 2\text{Ln}x + c \Rightarrow 2\text{Arc}\,\text{tg}\frac{y}{x} - \text{Ln}(x^2+y^2) = c$$

مثال ۴: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = \frac{-(x-2y+3)}{(2x-4y-3)}$ را بیابید.

حل: بدیهی‌است چون $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4}$، دو خط موازی هستند. لذا با استفاده از تغییر متغیر $u' = 1 - 2y'; u = x - 2y$، خواهیم داشت:

$$y' = \frac{-x+2y-3}{2x-4y-3} \Rightarrow \frac{1-u'}{2} = \frac{-u-3}{2u-3} \Rightarrow u' = 1 + \frac{2u+6}{2u-3} \Rightarrow u' = \frac{4u+3}{2u-3}$$

$$\Rightarrow \frac{2u-3}{4u+3}du = dx \Rightarrow x = \frac{u}{2} - \frac{9}{8}\text{Ln}|4u+3| + c \Rightarrow x = \frac{1}{2}(x-2y) - \frac{9}{8}\text{Ln}|4x-8y+3| + c$$

مثال ۵: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = \frac{x+y+2}{x-y-4}$ را بیابید.

حل: بدیهی است چون $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$، دو خط متقاطع هستند. لذا باید نقطه تلاقی دو خط را به‌دست آوریم.

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \Rightarrow x=1\,;\, y=-3$$

لذا با تغییر متغیر $y = Y-3\,;\, x = X+1$ خواهیم داشت:

$$dx = dX\,;\, dy = dY$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{x-y-4} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

حال معادله فوق همگن می‌باشد و با استفاده از تغییر متغیر $dY = VdX + XdV\,;\, Y = VX$ خواهیم داشت:

$$(X-Y)dY = (X+Y)dX \quad \Rightarrow \quad X(1-V)(VdX+XdV) = X(1+V)dX$$

طرفین را بر X تقسیم می‌کنیم.

$$(1+V^2)dX + X(V-1)dV = 0$$

$$\frac{dX}{X} + \frac{V-1}{V^2+1}dV = 0$$

با انتگرال‌گیری از طرفین داریم:

$$\ln X + \frac{1}{2}\ln(1+V^2) - tg^{-1}V = c \quad \Rightarrow \quad \ln X + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{Y^2}{X^2}\right) - tg^{-1}\frac{Y}{X} = c$$

$$\Rightarrow \quad \ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{(y+3)^2}{(x-1)^2}\right) - tg^{-1}\frac{y+3}{x-1} = c$$

۳-۷) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از درجه n:

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجه n به فرم زیر بیان می‌شود:

$$y'^n + P(x,y)\,y'^{n-1} + \ldots + Q(x,y) = 0$$

چنان‌چه بتوان این معادله دیفرانسیل را به فرم زیر و به صورت حاصل ضرب n عامل درجه اول خطی، بر حسب y' تجزیه نمود، یعنی داشته باشیم:

$$\big(y' - L_1(x,y)\big)\big(y' - L_2(x,y)\big)\ldots\ldots = 0$$

کافی است، تک تک عوامل فوق را مساوی صفر قرار داده و جواب‌های زیر را پیدا کنیم.

$$\boxed{\begin{array}{l} y' - L_1(x,y) = 0 \rightarrow \alpha(x,y,c) = 0 \\ y' - L_2(x,y) = 0 \rightarrow \beta(x,y,c) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \end{array}}$$

و سپس می‌توان نشان داد جواب عمومی معادله چنین است:

$$\boxed{\alpha(x,y,c)\,\beta(x,y,c)..........=0}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'^2 \mathrm{Ln}x+\left(y^2+\mathrm{Ln}x\right)y'+y^2=0$ را پیدا کنید.

حل: به سادگی مشاهده می‌شود که معادله فوق، دو ریشه دارد و دو ریشه عبارتند از:

$$y'=-1\ ;\ y'=-\frac{y^2}{\mathrm{Ln}x}$$

$$y'=-1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-1 \Rightarrow dy=-dx \Rightarrow y=-x+c_1$$

$$y'=-\frac{y^2}{\mathrm{Ln}x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{\mathrm{Ln}x} \Rightarrow -\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{\mathrm{Ln}x} \Rightarrow \frac{1}{y}=\int\frac{dx}{\mathrm{Ln}x}+c_2$$

پس جواب عمومی عبارت است از:

$$\left(y+x-c_1\right)\left(\frac{1}{y}-\int\frac{dx}{\mathrm{Ln}x}-c_2\right)=0$$

مثال ۲: جواب عمومی معادله $y'^2-\left(3y^2+\cos x\right)y'+3y^2\cos x=0$ را بیابید.

حل: با تجزیه معادله به صورت $\left(y'-\cos x\right)\left(y'-3y^2\right)=0$ داریم:

$$y'=\cos x \to y=\sin x+k_1$$

$$y'-3y^2=0 \to y'=3y^2 \to \frac{dy}{y^2}=3dx \to -\frac{1}{y}=3x+k_2$$

بنابراین جواب عمومی عبارت است از:

$$\left(y-\sin x-k_1\right)\left(3x+\frac{1}{y}+k_2\right)=0$$

مثال ۳: جواب عمومی معادله $xyy'^2+\left(x^2+y^2\right)y'+xy=0$ را بیابید.

حل: با تجزیه معادله به صورت زیر داریم:

$$xyy'^2+(x^2+y^2)y'+xy=0 \xrightarrow{\text{طرفین را بر } xy \text{ تقسیم می‌کنیم.}} y'^2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)y'+1=0 \Rightarrow \left(y'+\frac{x}{y}\right)\left(y'+\frac{y}{x}\right)=0$$

می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} y'+\dfrac{x}{y}=0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x}{y} \Rightarrow \dfrac{1}{2}y^2=-\dfrac{1}{2}x^2+a \Rightarrow y^2+x^2-2a=0 \\ y'+\dfrac{y}{x}=0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x} \Rightarrow \ln y+\ln x=c \Rightarrow \ln xy=\ln b \Rightarrow xy-b=0 \end{cases}$$

بنابراین جواب عمومی عبارت است از:

$$\left(x^2+y^2-2a\right).\left(xy-b\right)=0$$

۳-۸) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از نوع کلرو:

یک معادله دیفرانسیل کلرو در فرم کلی به صورت زیر است:

$$\boxed{y = xy' + f(y')}$$

می‌توان نشان داد جواب عمومی این معادله دیفرانسیل به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{y = cx + f(c)}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y = xy' + y'^4$ را مشخص کنید.

حل: جواب مسئله فوق طبق رابطه بالا عبارت است از: $y = cx + c^4$

مثال ۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y = xy' + \dfrac{y'^2 + 1}{\sin y'}$ را بیابید.

حل: جواب مسئله طبق رابطه گفته شده عبارت است از: $y = cx + \dfrac{c^2 + 1}{\sin c}$

مثال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y = xy' + \sqrt{y'}$ را بیابید.

حل: جواب مسئله عبارت است از: $y = cx + \sqrt{c}$

۳-۹) دو کاربرد از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول:

۳ـ۹ـ الف) پوش یک دسته منحنی و بحث جواب غیر عادی یک معادله دیفرانسیل:

تعریف اول: جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل، جوابی از آن معادله دیفرانسیل است که به ازای هیچ ثابت از فرم جواب عمومی معادله دیفرانسیل، قابل رویت نمی‌باشد (ثابت می‌شود معادله دیفرانسیل خطی جواب غیر عادی ندارد).

تعریف دوم: پوش یک دسته منحنی در صورت وجود، منحنی می‌باشد که، بر تمام منحنی‌های آن دسته منحنی و بر هر کدام، تنها در یک نقطه مماس می‌شود. فرض کنید معادله یک دسته منحنی، به صورت $\rho(x,y,c) = 0$ نوشته شده باشد (که در آن c پارامتر دلخواه است). می‌توان ثابت کرد، پوش این دسته منحنی‌ها در صورت وجود، از حذف پارامتر c در دستگاه زیر قابل حصول است:

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho(x,y,c) = 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial c} = 0 \end{array}}$$

تعریف سوم: فرض کنید دسته منحنی‌های $\rho(x,y,c)=0$، جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول مانند $F(x,y,y')=0$ باشد. ثابت می‌شود، پوش دسته منحنی‌های عمومی (در صورت وجود)، جوابی از معادله دیفرانسیل $F(x,y,y')=0$ است که اصطلاحاً به آن جواب غیر عادی معادله فوق، گفته می‌شود.

مسایل حل شده:

مثال ۱: پوش دسته منحنی‌های $x\sin c+y\cos c=1$ را مشخص کنید.

از دستگاه مقابل، پارامتر c را حذف کرده و در نهایت پوش دسته منحنی به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}\rho(x,y,c)=0\\ \dfrac{\partial\rho}{\partial c}=0\end{cases}\to\begin{cases}x\sin c+y\cos c=1\\ x\cos c-y\sin c=0\end{cases}\to\begin{cases}x=\sin c\\ y=\cos c\end{cases}\to x^2+y^2=1$$

مثال ۲: جواب غیر عادی معادله دیفرانسیل $y=xy'+\cos y'$ را بیابید.

حل: معادله فوق، از نوع کلرو می‌باشد. لذا جواب عمومی آن به صورت $y=cx+\cos c$ است. برای به‌دست آوردن پوش دسته منحنی خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\rho(x,y,c)=0\\ \dfrac{\partial\rho}{\partial c}=0\end{cases}\to\begin{cases}y=cx+\cos c\\ 0=x-\sin c\end{cases}\to\begin{cases}y=c\sin c+\cos c\\ x=\sin c\to\cos c=\sqrt{1-x^2}\end{cases}\to y=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$$

مثال ۳: جواب‌های معادله دیفرانسیل $x=y'^2+\dfrac{y}{y'}$ را بیابید.

حل: همان‌طور که ملاحظه می‌شود، معادله دیفرانسیل فوق از نوع کلرو است که دارای یک جواب عمومی و یک جواب غیر عادی (در صورت وجود) می‌باشد. لذا خواهیم داشت:

$xy'=y'^3+y\to y=xy'-y'^3\to y=cx-c^3$ * : جواب عمومی

برای به‌دست آوردن جواب غیر عادی معادله، باید پوش دسته منحنی‌ها را به‌دست آورد. لذا خواهیم داشت:

با مشتق گیری از معادله * نسبت به c داریم: $0=x-3c^2\to x=3c^2$

برای حذف پارامتر c بین رابطه بالا و رابطه * به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y^2=\left(cx-c^3\right)^2\to y^2=c^2x^2+c^6-2c^4x\xrightarrow{x=3c^2}y^2=\frac{x}{3}.x^2+\frac{x^3}{27}-2\left(\frac{x^2}{9}\right)x\to4x^3=27y^2$$

۳-۹-ب) بحث یافتن مسیرهای قایم:

دو دسته منحنی را مسیرهای قایم همدیگر گویند هرگاه، هرکدام از منحنی‌های یک دسته به هر کدام از منحنی‌های دسته دیگر، عمود باشد.

۱) روش یافتن مسیرهای قایم یک دسته منحنی که در مختصات دکارتی توصیف شده‌اند:

برای یافتن مسیرهای قایم دسته منحنی‌های $\varphi(x,y,c)=0$ کافی است از رابطه موجود نسبت به x مشتق گرفته و بین دو رابطه موجود، پارامتر c را حذف کنیم تا بدین ترتیب معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی، پیدا شود. سپس با تبدیل y' به $-\dfrac{1}{y'}$ در معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی، معادله دیفرانسیل مسیرهای قایم پیدا می‌شود که از حل آن، مسیرهای قایم مورد نظر به‌دست می‌آید.

۲) روش پیدا کردن مسیرهای قایم یک دسته منحنی که در مختصات قطبی بیان شده‌اند:

برای پیدا کردن مسیرهای قایم دسته منحنی‌های $\varphi(r,\theta,c)=0$ کافی است از رابطه موجود نسبت به متغیر θ مشتق گرفته و بین روابط حاصله، پارامتر c را حذف کنیم تا معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی پیدا شود. سپس با تبدیل $\frac{dr}{d\theta}$ به $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ در معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی، معادله دیفرانسیل مسیرهای قایم و با حل آن، مسیرهای قایم به‌دست می‌آیند.

مسایل حل شده:

مثال ۱: دسته منحنی‌های $(x^3+1)(y^3+1)=c$ مفروضند. مسیرهای قایم این دسته منحنی‌ها را بیابید.

حل: معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی عبارتند از:

$$3x^2(y^3+1)+3y^2y'(x^3+1)=0$$

معادله دیفرانسیل مسیرهای قایم با تبدیل $y' \leftarrow -\frac{1}{y'}$ داریم:

$$3x^2(y^3+1)+3y^2(-\frac{1}{y'})(x^3+1)=0 \Rightarrow (3x^2)(y^3+1)y'=3y^2(x^3+1) \Rightarrow \frac{y^3+1}{3y^2}dy=\frac{x^3+1}{3x^2}dx$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{y}{3}+\frac{1}{3y^2}\right)dy=\int\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{3x^2}\right)dx \Rightarrow \frac{y^2}{2}-\frac{1}{y}=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+k$$

مثال ۲: دسته منحنی‌های $y=kx^3$ را در نظر بگیرید. مسیر قایم بر این دسته منحنی‌ها که از نقطه $(-1,1)$ می‌گذرد را تعیین کنید.

حل:

$$\frac{y=kx^3}{y'=3kx^2} \to \frac{y}{y'}=\frac{x}{3} \xrightarrow{y'\to-\frac{1}{y'}} \frac{y}{-\frac{1}{y'}}=\frac{x}{3} \to -yy'=\frac{x}{3} \to \int -y\,dy=\int\frac{x}{3}dx \to \frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{6}+k=0$$

مسیر قایمی که از $(-1,1)$ می‌گذرد برابر است با:

$$0=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^2}{6}+k \to k=-\frac{4}{6} \to \frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{6}=\frac{4}{6}$$

که این معادله، معادله بیضی است.

مثال ۳: مسیرهای قایم این دسته منحنی را بیابید. $r=c(1+\cos\theta)$

حل:

$$r=c(1+\cos\theta) \overset{\text{مشتق}}{\Rightarrow} \frac{dr}{d\theta}=-c\sin\theta \underset{\text{بر یکدیگر}}{\overset{\text{با تقسیم دو رابطه}}{\Rightarrow}} \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}=\frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta} \xrightarrow{\frac{dr}{d\theta}\to-r^2\frac{d\theta}{dr}} \frac{r}{-r^2\frac{d\theta}{dr}}=\frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta}$$

$$\to \frac{dr}{r}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}d\theta \to \int\frac{dr}{r}=\int\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)d\theta$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln}r=\operatorname{Ln}(\operatorname{cosec}\theta-\operatorname{cotg}\theta)+\operatorname{Ln}\sin\theta+\operatorname{Ln}k \Rightarrow \operatorname{Ln}r=\operatorname{Ln}((\operatorname{cosec}\theta-\operatorname{cotg}\theta).\sin\theta.k)$$

$$\Rightarrow r=k(\operatorname{cosec}\theta-\operatorname{cotg}\theta)\cdot\sin\theta \Rightarrow r=k(1-\cos\theta)$$

یادآوری:

$$\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \int \sec\theta\, d\theta = \mathrm{Ln}\left(\sec\theta + \mathrm{tg}\theta\right)$$

$$\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \mathrm{cosec}\theta\, d\theta = \mathrm{Ln}\left(\mathrm{cosec}\theta - \mathrm{cotg}\theta\right)$$

مثال ۴: مسیرهای قایم دسته دوایر $x^2 + y^2 = cy$ را بیابید.

حل: اگر از دستگاه مختصات قطبی استفاده کنیم، یعنی $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ ، داریم: $r^2 = cr\sin\theta \to r = c\sin\theta$

و می‌نویسیم:

$$r = c\sin\theta \overset{\text{مشتق}}{\Rightarrow} \frac{dr}{d\theta} = c\cos\theta \underset{\text{بر یکدیگر}}{\overset{\text{با تقسیم دو رابطه}}{\Rightarrow}} \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \mathrm{tg}\theta \xrightarrow{\frac{dr}{d\theta} \to -r^2\frac{d\theta}{dr}} \frac{r}{-r^2\frac{d\theta}{dr}} = \mathrm{tg}\theta \to \frac{dr}{r} = -\mathrm{tg}\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ln} r = \mathrm{Ln}\cos\theta + \mathrm{Ln} k \Rightarrow r = k\cos\theta \overset{\text{دو طرف را در r ضرب‌می‌کنیم}}{\Rightarrow} r^2 = kr\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = kx$$

مثال ۵: معادله دسته منحنی‌های عمود بر دسته منحنی $r = -2\cos\theta$ را بیابید.

حل:

$$r = -2\cos\theta \Rightarrow r' = 2\sin\theta \underset{\text{بر یکدیگر}}{\overset{\text{با تقسیم دو رابطه}}{\Rightarrow}} \frac{r}{r'} = \frac{-2\cos\theta}{2\sin\theta} \Rightarrow \frac{r}{r'} = -\mathrm{cotg}\theta \xrightarrow{\frac{dr}{d\theta} \to -r^2\frac{d\theta}{dr}} \frac{r}{-r^2\frac{d\theta}{dr}} = -\mathrm{cotg}\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = \mathrm{cotg}\theta d\theta \Rightarrow \mathrm{Ln} r = \mathrm{Ln}\sin\theta + \mathrm{Ln}(c) \Rightarrow r = c\sin\theta$$

فصل دوم

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و مراتب بالاتر

۱) تعاریف اولیه

معادله دیفرانسیل مرتبه n خطی و همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$y^{(n)} + P(x)\,y^{(n-1)} + \ldots\ldots + Q(x).y = 0$$

چنان‌چه $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ جواب‌های مستقل خطی این معادله دیفرانسیل باشند، هر ترکیب خطی از این جواب‌ها، جوابی از معادله دیفرانسیل مورد نظر خواهد بود و به تعبیر دیگر جواب عمومی چنین است:

$$\boxed{y = ky_1 + k_2y_2 + \ldots\ldots k_ny_n}$$

در جواب معادله دیفرانسیل فوق، $k_1, k_2, \ldots\ldots k_n$ ثابت‌های اختیاری می‌باشند.

یک تعریف مهم:

توابع $y_1(x); y_2(x); \ldots\ldots; y_n(x)$ را در نظر بگیرید. می‌گویند این توابع، وابستگی خطی دارند، هرگاه، بتوان ثابت‌های $k_1, k_2, \ldots, k_n$ را به گونه‌ای یافت که: $k_1y_1 + k_2y_2 + \ldots\ldots + k_ny_n = 0$ باشد.

می‌توان نشان داد، شرط لازم و کافی برای آن‌که توابع $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ وابستگی خطی داشته باشند، آن است که:

$$\left(\begin{array}{c}\text{رونسکین توابع}\\ y_1(x); y_2(x); \cdots; y_n(x)\end{array}\right) w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

نکته: شرط استقلال خطی دو جواب $y_2(x), y_1(x)$ مربوط به معادله خطی مرتبه دوم همگن، در یک فاصله، آن است که: رونسکین‌های آن‌ها در این فاصله مخالف صفر باشد. یعنی:

$$\boxed{w = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: معادله دیفرانسیل $y'' + (x^2+1)y' + p(x)y = 0$ دارای دو جواب مستقل $y_2(x); y_1(x)$ می‌باشد. راجع به عبارت $y_1 y_2' - y_2 y_2'$ چه می‌توان گفت؟

حل: اگر y_2, y_1 دو جواب مستقل معادله باشد، آن‌گاه، طبق نکته گفته شده خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

مثال ۲: برای آن‌که معادله دیفرانسیل $x^n \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + f(x) y^m = 0$ خطی باشد، باید چه شرطی برقرار باشد؟

حل: برای خطی شدن معادله، کافی است $m = 1$ شود.

۲) روش‌های حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، در کلی‌ترین حالت به صورت $\boxed{y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0}$ بیان می‌شود که ممکن است تحت شرایطی مانند شرایط زیر، بتوان جواب آن را یافت.

۲-۱) معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت از نوع همگن:

شکل یک معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت، عبارت است از:

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0}$$

برای معادله فوق، جوابی به صورت $y = e^{\lambda x}$ (λ یک ثابت است) را در نظر می‌گیریم و سپس با جایگذاری در معادله فوق، به معادله مشخصه زیر می‌رسیم:

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

چون معادله مشخصه فوق، از نوع معادله درجه دوم با ضرایب حقیقی می‌باشد، پس سه حالت ایجاد می‌شود:

۱) حالت اول: $(\Delta > 0)$ معادله مشخصه، دارای دو ریشه حقیقی متمایز λ_1 و λ_2 است و جواب عمومی عبارت است از:

$$\boxed{y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}$$

۲) حالت دوم: $(\Delta = 0)$ معادله مشخصه، دارای دو ریشه تکراری (مضاعف) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ است و جواب عمومی عبارت است از:

$$\boxed{y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}}$$

۳) حالت سوم: $(\Delta < 0)$ معادله مشخصه، دارای دو ریشه مختلط $\alpha + \beta i\,;\,\alpha - \beta i$ است و جواب عمومی عبارت است از:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)}$$

نکته ۱: بحث انجام گرفته در رابطه با معادلات خطی با ضرایب ثابت از مرتبه‌های بالاتر نیز قابل تعمیم است. یعنی کافی است، معادله مشخصه را، به ترتیب مقتضی تشکیل داده و پس از یافتن تمام ریشه‌های آن، پایه‌های جواب را تعیین کنیم.

نکته ۲: برخی مواقع، هدف، یافتن معادله دیفرانسیل مربوط به یک دسته منحنی است که خود آن دسته منحنی، جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت است. در این گونه مسایل، کافی است با توجه به معادله دسته منحنی‌ها، ریشه‌های معادله مشخصه را تعیین کرده و معادله مشخصه را تشکیل داده تا، معادله دیفرانسیل مورد نظر به‌دست آید.

مسایل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی $y'' - 5y' + 4y = 0$ را تعیین کنید.

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل داده و سپس پایه‌های جواب را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = 1;\ \lambda = 4 \rightarrow y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{4x}$$

مثال ۲: معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه زیر را در نظر بگیرید: $\begin{cases} y'' + y' - 12y = 0 \\ y(0) = \alpha; y'(0) = 1 \end{cases}$ چنان‌چه جواب این معادله دیفرانسیل وقتی $x \to +\infty$ به صفر بگراید، مقدار α را محاسبه کنید.

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل داده و سپس پایه‌های جواب را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \rightarrow \lambda = 3; \lambda = -4 \rightarrow y(x) = Ae^{3x} + Be^{-4x}$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{3x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-4x} = 0 \end{cases}$$

بنابراین شرط $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$ می‌طلبد $A=0$ باشد. پس با اعمال شرایط اولیه که در فرض مسئله داده شده است، خواهیم داشت:

$$y(x)=Be^{-4x}\to y'(x)=-4Be^{-4x}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=\alpha\to\alpha=Be^{-0}\to B=\alpha \\ y'(0)=1\to 1=-4Be^{-0}\to B=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right\}\to\alpha=-\frac{1}{4}$$

مثال ۳: معادله دیفرانسیل $ay''+y'+by=0$ که در آن a و b اعداد حقیقی هستند، دارای پایه جواب $y=xe^{-2x}$ می‌باشد. مقادیر a و b و هم‌چنین مقدار رونسکین پایه‌های جواب این معادله را بیابید.

حل: بدیهی است با توجه به این‌که یک پایه جواب $y=xe^{-2x}$ می‌باشد، باید پایه دیگر جواب به صورت $y=e^{-2x}$ باشد. یعنی معادله مشخصه، دارای ریشه مضاعف $\lambda=-2$ می‌باشد. حال خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l} a\lambda^2+\lambda+b\big|_{\lambda=-2}=0 \\ \xrightarrow{\text{مشتق}} 2a\lambda+1\big|_{\lambda=-2}=0\end{array}\quad\Rightarrow\begin{cases}4a-2+b=0\\ 2a(-2)+1=0\end{cases}\to a=\frac{1}{4};b=1$$

و نیزرونسکین‌های پایه جواب عبارتند از:

$$w(x)=\begin{vmatrix}e^{-2x} & xe^{-2x}\\ -2e^{-2x} & e^{-2x}-2xe^{-2x}\end{vmatrix}=e^{-2x}\left(e^{-2x}-2xe^{-2x}\right)-xe^{-2x}\left(-2e^{-2x}\right)=e^{-4x}$$

مثال ۴: معادله دیفرانسیل $y''+ay'+by=0$ که در آن a و b ثابت حقیقی می‌باشد، مفروض است. a و b دارای چه شرایطی باشند که اولاً: پایه‌های جواب طبیعت نوسانی داشته باشند. ثانیا: پایه‌های جواب طبیعت متناوب داشته باشند.

حل: الف) شرط داشتن پایه‌های جواب نوسانی آن است که: ریشه‌های معادله مشخصه، مختلط باشند.

$$\lambda^2+a\lambda+b=0\xrightarrow{\Delta<0}a^2-4b<0\to a^2<4b$$

ب) شرط داشتن پایه‌های جواب متناوب آن است که: ریشه‌های معادله مشخصه، موهومی محض باشند. (فاقد قسمت حقیقی باشند)

$$\begin{cases}a^2-4b<0\\ -\dfrac{a}{2}=0\end{cases}\Rightarrow a=0;b>0$$

مثال ۵: جواب عمومی معادلات زیر را مشخص کنید.

1) $y^{(4)}-9y''=0$

حل:

$$\lambda^4-9\lambda^2=0\to\lambda^2\left(\lambda^2-9\right)=0\to\lambda=0;0;-3;+3$$

$$\to y(x)=Ae^{0x}+Bxe^{0x}+ce^{-3x}+De^{+3x}\Rightarrow y(x)=A+Bx+Ce^{-3x}+De^{3x}$$

2) $y^{(4)}+4y^{(3)}+6y''+4y'+y=0$

حل:

$$\lambda^4+4\lambda^3+6\lambda^2+4\lambda+1=0\to(\lambda+1)^4=0\to\lambda=-1;-1;-1;-1$$

$$\to y(x)=Ae^{-x}+Bxe^{-x}+Cx^2e^{-x}+Dx^3e^{-x}$$

$3)\ y''' + 8y = 0$

حل:

$$\lambda^3 + 8 = 0 \rightarrow (\lambda+2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = -2 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{3}i \end{cases}$$

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{x}\sin\sqrt{3}x + Ce^{x}\cos\sqrt{3}\ x$$

$4)\ y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$

حل:

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = 0 \rightarrow (\lambda^2+2)^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}\ i\ ;\ \lambda = \pm\sqrt{2}i$$

$$y(x) = A\sin\sqrt{2}\ x + B\cos\sqrt{2}\ \ x + Cx\ \sin\sqrt{2}\ x + Dx\cos\sqrt{2}\ \ x$$

مثال ۶: معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت‌های A و B و C، در دسته منحنـی‌هـای $y = Ae^{3x} + Be^{-x}\sin 2x + Ce^{-x}\cos 2x$ را بیابید.

حل: این عبارت، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه سومی با ریشه‌های معادله مشخصه به فرم زیر است:

$$\lambda = 3;\ \lambda = -1 \pm 2i \xrightarrow{\text{لذا معادله مشخصه چنین است:}} (\lambda-3)(\lambda^2+2\lambda+5) = 0 \rightarrow \lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 3\lambda^2 - 6\lambda - 15 = 0$$

$$\rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 15 = 0 \rightarrow y^{(3)} - y'' - y' - 15y = 0$$

مثال ۷: معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت‌های c، b، a، در دسته منحنی‌های $y = ae^{-2x} + be^{-x} + cxe^{-x}$ را مشخص کنید.

حل: با کمی دقت، متوجه می‌شویم که، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه سوم همگن با ضرایب ثابت، با ریشه‌های معادله مشخصه به فرم زیر تعیین می‌شود:

$$\lambda = -2;\ \lambda = -1;\ \lambda = -1 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه چنین است:}} (\lambda+2)(\lambda+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^{(3)} + 4y'' + 5y' + 2y = 0$$

۲-۲) معادلات دیفرانسیل خطی غیر همگن و بحث جواب خصوصی:

معادله دیفرانسیل مرتبه n ام و غیر همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$y^{(n)} + p(x)y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + Q(x)y = R(x)$$

چنان‌چه $y_1(x); y_2(x); \dots\dots; y_n(x)$ پایه‌های جواب معادله دیفرانسیل همگن متناظر با معادله مذکور باشند (که در حقیقت با فرض $R(x) = 0$ پیدا شده‌اند) و $y_p(x)$ جوابی برای معادله غیر همگن مورد نظر باشد که اصطلاحاً به جواب خصوصی این معادله غیر همگن موسوم است، می‌توان نشان داد، جواب کلی معادله غیر همگن مورد نظر به صورت زیر است:

$$\boxed{y(x) = \underbrace{c_1y_1 + c_2y_2 + \dots\dots + c_ny_n}_{y_h\ \text{جواب عمومی معادله همگن متناظر}} + y_p(x)}$$

معادله دیفرانسیل غیر همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$\boxed{y^{(n)}+p(x)y^{(n-1)}+.......+Q(x)y=R(x)+S(x)}$$

چنان‌چه $y_{P_1}(x)$ جواب خصوصی معادله، زمانی که فقط $R(x)$ در طرف ثانی وجود دارد و $y_{P_2}(x)$ جواب خصوصی معادله، زمانی که فقط $S(x)$ در طرف ثانی وجود دارد باشد، جواب خصوصی کلی برای معادله مورد نظر چنین است:

$$\boxed{y_p(x)=y_{P_1}(x)+y_{P_2}(x)}$$

دو روش برای پیدا کردن جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل مرتبه n ام خطی با ضرایب ثابت از نوع غیر همگن، موجود است:

۲-۲- الف) روش ضرایب نامعین:

$$\boxed{y^{(n)}+ay^{(n-1)}+.........+by=R(x)}$$

برای پیشنهاد ساختارکلی جواب خصوصی این معادله دیفرانسیل، نخست، معادله مشخصه معادله همگن متناظر را تشکیل داده و در صورت امکان، ریشه‌های معادله مشخصه را پیدا می‌کنیم. حال با توجه به وضعیت تعریف $R(x)$، می‌توان با یکی از دو بحث زیر ساختارکلی جواب خصوصی را مشخص نمود.

در هر حالت، در این جواب خصوصی پیشنهادی، نخست باید از ضرایب نامعینی استفاده کنیم که با قرار دادن این جواب در معادله غیر همگن اصلی، می‌توان تکلیف آن ثابت‌های نامعین را معلوم کرد.

۱) اگر $R(x)=e^{px}$ (چند جمله‌ای از x با درجه m) بود که در آن p یک عدد حقیقی معلوم است، آن‌گاه می‌توان گفت:

$$\boxed{y_p(x)=x^{t}.e^{px}.\{Ax^m+Bx^{m-1}+........+D\}}$$

$A\ ,\ B\ ,\ \ldots\ ,D$ ضرایب نامعینی هستند که باید مشخص شوند و t تعداد ریشه‌های معادله مشخصه است که برابر عدد p می‌باشد.

۲) اگر $R(x)=e^{px}\{M(x)\sin qx+N(x)\cos qx\}$ باشد که در آن q,P اعداد ثابت حقیقی بوده و $N(x),M(x)$ دو چند جمله‌ای از x می‌باشند که در آن، درجه چند جمله‌ای قوی‌تر، m فرض می‌شود، در این صورت داریم:

$$\boxed{y_p(x)=x^{t}.e^{px}\{L(x)\sin qx+H(x)\cos qx\}}$$

$L(x),H(x)$ دو چند جمله‌ای کامل از درجه m می‌باشند و t تعداد ریشه‌های معادله مشخصه است که برابر $p+iq$ می‌باشد.

مسایل حل شده:

مثال ۱: جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را چگونه پیشنهاد می‌کنید؟

$$1)\ 3y''+2y'-5y=\left(x^2+3\right)e^{-x}$$

حل: ابتدا معادله مشخصه نظیر معادله حالت همگن را تشکیل می‌دهیم:

$$3\lambda^2+2\lambda-5=0\rightarrow\lambda_1=+1;\lambda_2=-\frac{5}{3}$$

$$\rightarrow y_P(x)=x^0e^{-x}\left\{Ax^2+Bx+C\right\}\Rightarrow y_p(x)=e^{-x}\left\{Ax^2+Bx+C\right\}$$

$$2)\ y^{(3)}+3y''+3y'+y=xe^{-x}$$

حل: ابتدا معادله مشخصه نظیر معادله حالت همگن را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0\rightarrow(\lambda+1)^3=0\rightarrow\lambda_1=-1;\ \lambda_2=-1;\ \lambda_3=-1$$

$$y_p(x)=x^3e^{-x}\left\{Ax+B\right\}$$

$$3)\ y^{(4)}-4y''=x^2+x\sinh 2x$$

حل: ابتدا معادله مشخصه نظیر معادله حالت همگن را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^4-4\lambda^2=0\rightarrow\lambda^2\left(\lambda^2-4\right)=0\rightarrow\lambda_1=0;\lambda_2=0;\lambda_3=-2;\lambda_4=2$$

یادآوری:

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\quad;\quad\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

با توجه به یادآوری فوق داریم:

$$y^{(4)}-4y''=x^2+x.\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\ \rightarrow\ \begin{cases}y^{(4)}-4y''=x^2e^{0x}\ \rightarrow\ y_{p1}(x)=x^2e^{0x}\left(Ax^2+Bx+C\right)\\ y^{(4)}-4y''=\frac{x}{2}e^{2x}\ \rightarrow\ y_{p2}(x)=x^1e^{2x}(Dx+E)\\ y^{(4)}-4y''=-\frac{x}{2}e^{-2x}\ \rightarrow\ y_{p3}(x)=x^1e^{-2x}(Fx+G)\end{cases}$$

و لذا جواب کل به صورت زیر است:

$$y_p(x)=y_{p1}(x)+y_{p2}(x)+y_{p3}(x)=x^2e^{0x}\left(Ax^2+Bx+C\right)+xe^{2x}(Dx+E)+xe^{-2x}(Fx+G)$$

$$4)\ y^{(3)}+7y''+16y'+12y=e^{-2x}+xe^x$$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^3+7\lambda^2+16\lambda+12=0$$

بدیهی است یافتن ریشه‌های این معادله، به سادگی امکان پذیر نمی‌باشد، ولی سؤال اصلی ما این است که این معادله چند بار ریشه $\lambda=-2$ و چند بار ریشه $\lambda=1$ دارد:

$$\lambda^3+7\lambda^2+16\lambda+12\Big|_{\lambda=1}=1+7+16+12\neq0\rightarrow$$

پس معادله به ازای $\lambda = 1$، ریشه‌ای ندارد.

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^3+7\lambda^2+16\lambda+12\big|_{\lambda=-2}=-8+28-32+12=0 \\ \xrightarrow{\text{مشتق}} 3\lambda^2+14\lambda+16\big|_{\lambda=-2}=12-28+16=0 \\ \xrightarrow{\text{مشتق}} 6\lambda+14\big|_{\lambda=-2}=-12+14\neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$ پس معادله دو ریشه $\lambda = -2$ دارد

پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y_{P_1}(x)=x^2e^{-2x}\{A\} \\ y_{P_2}(x)=x^0e^{x}\{Bx+C\} \end{array}\right\} \rightarrow y_P(x)=y_{P_1}(x)+y_{P_2}(x) \rightarrow y_P(x)=x^2e^{-2x}\{A\}+x^0e^{+x}\{Bx+c\}$$

$$\Rightarrow y_P(x)=x^2e^{-2x}.\{A\}+e^x.\{Bx+C\}$$

5) $y''+2y'+5y=e^{-x}\{2\sin 2x+2\cos 2x\}$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^2+2\lambda+5=0 \rightarrow \lambda_1=-1+2i \ ; \ \lambda_2=-1-2i$$
$$y_p(x)=x^1e^{-x}\{A\sin 2x+B\cos 2x\}$$

6) $y^{(4)}+2y''+y=x\sin x$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^4+2\lambda^2+1=0 \rightarrow \left(\lambda^2+1\right)^2=0 \rightarrow \lambda_1=+i;\lambda_2=-i;\lambda_3=+i;\lambda_4=-i$$
$$y_p(x)=x^2.e^{0x}\{(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x\}$$

7) $y^{(7)}-3y''+y'+y=\left(x^2-x\right)e^x$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^7-3\lambda^2+\lambda+1=0$$

بدیهی است یافتن ریشه‌های این معادله به سادگی امکان پذیر نمی‌باشد. ولی سؤال اصلی ما این است که این معادله چند بار ریشه $\lambda = 1$ دارد:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^7-3\lambda^2+\lambda+1\big|_{\lambda=1}=0 \\ \xrightarrow{\text{مشتق}} 7\lambda^6-6\lambda+1\big|_{\lambda=1}\neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$ پس معادله یک ریشه $\lambda = 1$ دارد

$$y_p(x)=x^1e^x\left\{Ax^2+Bx+C\right\}$$

8) $y''+2y'+5y=16e^x+\sin 2x$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^2+2\lambda+5=0 \rightarrow \lambda_1=1+2i \ ; \ \lambda_2=-1-2i$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{P_1}(x)=e^x\{A\} \\ y_{P_2}(x)=B\sin 2x+C\cos 2x \end{array}\right\}\rightarrow y_P(x)=y_{P_1}(x)+y_{P_2}(x)=Ae^x+B\sin 2x+C\cos 2x$$

$9)\ y^{(3)}+y'=x^2+\cos x+xe^{2x}$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^3+\lambda=0\rightarrow\lambda_1=0;\lambda_2=+i;\lambda_3=-i$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{P_1}(x)=x^1e^{0x}\left\{Ax^2+Bx+C\right\} \\ y_{P_2}(x)=x^1e^{0x}\left(D\cos x+E\sin x\right) \\ y_{P_3}(x)=e^{2x}\{Fx+G\} \end{array}\right\}\rightarrow y_P(x)=y_{P_1}(x)+y_{P_2}(x)+y_{P_3}(x)\longrightarrow$$

$$y_p(x)=x\left\{Ax^2+Bx+C\right\}+x\{D\cos x+E\sin x\}+e^{2x}\{Fx+G\}$$

$10)\ y''+2y'+10y=\sinh x.\cos 3x$

حل: از مثال ۳ به یاد داریم که:

$$y''+2y'+10y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.\cos 3x=\frac{e^x}{2}\cos 3x-\frac{e^{-x}}{2}\cos 3x$$

حال معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^2+2\lambda+10=0\rightarrow\lambda_1=-1+3i\ ;\ \lambda_2=-1-3i$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{P_1}(x)=x^0e^x\{A\cos 3x+B\sin 3x\} \\ y_{P_2}(x)=x^1e^{-x}\{C\cos 3x+D\sin 3x\} \end{array}\right\}\rightarrow y_P(x)=y_{P_1}(x)+y_{P_2}(x)\rightarrow$$

$$y_p(x)=e^x\{A\cos 3x+B\sin 2x\}+xe^{-x}\{C\cos 3x+D\sin 3x\}$$

۲-۲- ب) روش اپراتورمعکوس:

معادله دیفرانسیل مرتبه nام خطی با ضرایب ثابت غیر همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$\boxed{y^{(n)}+ay^{(n-1)}+.......+by=R(x)}$$

$a;.........;b$ عددهای ثابت هستند.

با تعریف اپراتور: $D=\frac{d}{dx};D^2=\frac{d^2}{dx^2};........;D^n=\frac{d^n}{dx^n}$ داریم:

$$\left(D^n+aD^{n-1}+......+b\right)y=R(x)\rightarrow y_p=\frac{1}{D^n+aD^{n-1}+......+b}\{R(x)\}$$

$$\boxed{y_p(x)=\frac{1}{F(D)}\{R(x)\}}$$

با توجه به تعریف اپراتور D ، طبیعی است عملکرد D^n، به معنای n بار عمل مشتق‌گیری و عملکرد $\frac{1}{D^n}$، بـه معنـای n بـار عمـل انتگرال‌گیری است.

سؤال اصلی این است که عملکرد $\frac{1}{F(D)}$ بر تابع $R(x)$ چیست؟

برخی از خواص اپراتور معکوس $\frac{1}{F(D)}$ عبارتند از:

: 1

(1	$\frac{1}{F(D)}\{e^{px}\}=\frac{e^{px}}{F(P)}$; (با شرط $F(P)\neq 0$)
(1′	$\frac{1}{(D-p)^k.F(D)}\{e^{px}\}=\frac{x^k.e^{px}}{k!.F(P)}$; (با شرط $F(P)\neq 0$)

مسایل حل شده:

مثال: جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$1)\,3y^{(3)}+y'+y=e^x+2e^{-x}$$

حل:

$$y_p(x)=\frac{1}{F(D)}\{e^x+2e^{-x}\}\rightarrow y_p(x)=\frac{1}{3D^3+D+1}\{e^x+2e^{-x}\}\xrightarrow{\text{با توجه به فرمول (۱) خواهیم داشت:}}$$

$$y_p(x)=\frac{e^x}{3(1)^3+(1)+1}+2\frac{e^{-x}}{3(-1)^3+(-1)+1}\rightarrow y_p(x)=\frac{e^x}{5}-\frac{2e^{-x}}{3}$$

$$2)\;y^{(4)}-2y''+y=e^x+2e^{-x}+e^{3x}$$

حل:

$$y_p(x)=\frac{1}{F(D)}\{e^x+2e^{-x}+e^{3x}\}\;\rightarrow\; y_p(x)=\frac{1}{D^4-2D^2+1}\{e^x+2e^{-x}+e^{3x}\}$$

$$\rightarrow\; y_p(x)=\frac{1}{(D^2-1)^2}\{e^x+2e^{-x}+e^{3x}\}\;\rightarrow\; y_p(x)=\frac{1}{(D-1)^2(D+1)^2}\{e^x+2e^{-x}+e^{3x}\}$$

$$\rightarrow\; y_p(x)=\frac{x^2e^x}{2!\times(1+1)^2}+\frac{2x^2e^{-x}}{2!\times(-1-1)^2}+\frac{e^{3x}}{(3-1)^2(3+1)^2}\;\rightarrow\; y_p(x)=\frac{x^2e^x}{8}+\frac{x^2e^{-x}}{4}+\frac{e^{3x}}{64}$$

$$3)\,(2D+1)^3(D-1)^2D^4y=e^x+3+e^{\frac{-x}{2}}$$

حل:

$$y_p(x)=\frac{1}{F(D)}\left\{e^x+3+e^{\frac{-x}{2}}\right\}\;\rightarrow\; y_p(x)=\frac{1}{(2D+1)^3(D-1)^2D^4}.\left\{e^x+3e^{0x}+e^{\frac{-x}{2}}\right\}$$

$$\rightarrow\quad y_p(x)=\left\{\frac{x^2e^x}{(2+1)^3.(1)^4(2!)}+\frac{3x^4e^{0x}}{(1)^3.(-1)^2(4!)}+\frac{x^3e^{\frac{-x}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2.\left(-\frac{1}{2}\right)^4.(3!)}\right\}$$

$$\rightarrow\quad y_p(x)=\left\{\frac{x^2e^x}{54}+\frac{x^4}{8}+\frac{32x^3e^{-\frac{x}{2}}}{27}\right\}$$

2:

$$\boxed{\begin{array}{ll}\dfrac{1}{F(D)}\{\sin qx\} & (2\\ \dfrac{1}{F(D)}\{\cos qx\} & (2'\end{array}}$$

در تأثیر دو شرط 2 و $2'$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

نخست در عبارت $F(D)$، تمام D^2 ها را به $(-q^2)$ تبدیل می‌کنیم. با انجام این کار، اگر در $F(D)$، دیگر Dای باقی نماند که حل مسئله به انتها رسیده و اگر در $F(D)$، یک عبارت درجه اول از D باقی ماند، صورت و مخرج را در مزدوج آن عبارت، ضرب کرده و مجدداً تمام D^2 ها را به $(-q^2)$ تبدیل می‌کنیم.

نکته ۱: عبارت D، توصیف مشتق‌گیری است و عبارت $\frac{1}{D}$، به معنی انتگرال گیری است.

نکته ۲: تمام اعمال فوق با این شرط اعتبار دارد که به مخرج صفری بر خورد نکنیم. اگر با انجام این کارها به مخرج صفر برخورد کردیم، نخست، عبارت کمکی زیر را حساب می‌کنیم:

$$\boxed{k=\frac{1}{F(D)}\{e^{iqx}\}}$$

حال می‌توان گفت:

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{1}{F(D)}\{\cos qx\}=\operatorname{Re}k\\ \dfrac{1}{F(D)}\{\sin qx\}=\operatorname{Im}k\end{array}}$$

دو عبارت فوق بدین مفهوم هستند که اگر در کنار عبارت $\frac{1}{F(D)}$جمله $\cos qx$ داشتیم، باید بعد از محاسبه عبارت k ، قسمت Re (حقیقی) عبارت محاسبه شده k را به عنوان جواب معرفی کنیم و اگر در کنار عبارت $\frac{1}{F(D)}$جمله $\sin qx$ داشتیم، باید قسمت Im (موهومی) عبارت k را به عنوان جواب معرفی کنیم.

یادآوری: هر عدد مختلط، به صورت $z = x + iy$ معرفی می‌شود که در آن x و y اعداد حقیقی بوده و خواهیم داشت:

$Re\,z = x$:قسمت حقیقی z

$Im\,z = y$:قسمت موهومی z

مسایل حل شده:

مثال: جواب خصوصی مسایل زیر را پیدا کنید.

1) $y^{(6)} + 2y'' + 4y = \sin 2x + \cos x$

حل:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^6 + 2D^2 + 4}\{\sin 2x + \cos x\} = \frac{1}{D^6 + 2D^2 + 4}\{\sin 2x\} + \frac{1}{D^6 + 2D^2 + 4}\{\cos x\} \xrightarrow[\text{تاثیر } \cos x:\ D^2 \to -1]{\text{تاثیر } \sin 2x:\ D^2 \to -4}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{(-4)^3 + 2(-4) + 4}\{\sin 2x\} + \frac{1}{(-1)^3 + 2(-1) + 4}\{\cos x\} \Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{68}\sin 2x + \cos x$$

2) $y''' + 3y'' + 4y' - 2y = \sin x$

حل:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^3 + 3D^2 + 4D - 2}\{\sin x\} \xrightarrow{D^2 \to -1} y_p(x) = \frac{1}{(-1)D + 3(-1) + 4D - 2}\{\sin x\} \to y_p(x) = \frac{1}{3D - 5}\{\sin x\}$$

$$\xrightarrow{\times \frac{3D+5}{3D+5}} y_p(x) = \frac{3D + 5}{9D^2 - 25}\{\sin x\} \xrightarrow{D^2 \to -1} y_p(x) = \frac{3D + 5}{9(-1) - 25}.\{\sin x\} \xrightarrow{\text{طبق نکته ۱}} y_p(x) = \frac{-1}{34}\{3\cos x + 5\sin x\}$$

3) $y^{(4)} + 9y'' = \cos 3x$

حل:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^4 + 9D^2}\{\cos 3x\} \xrightarrow{D^2 \to -9} y_p(x) = \frac{1}{(-9)^2 + 9(-9)}\{\cos 3x\} = -\frac{1}{0}\cancel{\{\cos 3x\}} \xrightarrow[\text{محاسبه k می‌پردازیم.}]{\text{طبق نکته ۲ نخست به}}$$

$$k = \frac{1}{D^2(D^2 + 9)}\{e^{3ix}\} = \frac{1}{D^2(D + 3i)(D - 3i)}\{e^{3ix}\} \xrightarrow{\text{طبق فرمول جواب خصوصی نوع ۱}} k = \frac{xe^{3ix}}{(1!).(9i^2).6i}$$

$$\to k = \frac{xe^{3ix}}{-54i} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{x.i}{54}\{\cos 3x + i\sin 3x\} \to k = \frac{x}{54}\{-\sin 3x + i\cos 3x\}$$

$$\xrightarrow{y_p(x) = Re\,k} y_p(x) = \frac{-x}{54}\sin 3x$$

4) $y^{(4)} + 2y'' + 3y = \sin x + e^{-x}$

حل:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^4 + 2D^2 + 3}\{\sin x + e^{-x}\} \to y_p(x) = \frac{1}{D^4 + 2D^2 + 3}\{\sin x\} + \frac{1}{D^4 + 2D^2 + 3}\{e^{-x}\} \xrightarrow[\text{از روش نوع ۱: برای عبارت دوم}]{D^2 \to -1 \text{: برای عبارت اول}}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{(-1)^2 + 2(-1) + 3}\{\sin x\} + \frac{1}{(-1)^4 + 2(-1)^2 + 3}\{e^{-x}\} \to \ y_p(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{6}e^{-x}$$

3: $\boxed{\dfrac{1}{F(D)}\{\text{چند جمله‌ای درجه } m \text{ از } x\}}$

در تأثیر شرط بالا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

نخست عبارت $F(D)$ را برحسب توان‌های صعودی D مرتب می‌کنیم و سپس عمل تقسیم $1\,\big|\,\underline{F(D)}$ را انجام مـی‌دهـیم. بـدیهی است تقسیم مذکور، هیچ گاه به باقی مانده صفر نخواهد رسید. اما کافی است. تقسیم را تا جایی انجام دهیم که در خارج قسمت تقسیم به توان‌های بالاتر از D^m نرسیم. حال، کافی است، خارج قسمت به‌دست آمده را به عنوان نماینده $\dfrac{1}{F(D)}$ بر چند جمله‌ای مورد نظر تأثیر دهیم.

مسایل حل شده:

مثال: جواب خصوصی مسایل زیر را بیابید.

1) $3y''-y'+y=x^3-4x+1$

حل: با توجه به نکات گفته شده در بالا، باید ابتدا عبارت $F(D)$ را بر حسب توان‌های صعودی مرتب کنیم و سپس عمل تقسیم را انجام دهیم.

$$F(D)=3D^2-D+1 \xrightarrow[\text{مرتب می‌کنیم}]{\text{بر حسب توان‌های صعودی}} F(D)=1-D+3D^2$$

حال عمل تقسیم را انجام می‌دهیم:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-D+3D^2 \\ \cline{2-2}
\underline{\mp 1\pm D\mp 3D^2} & 1+D-2D^2-5D^3 \\
D-3D^2 & \\
\underline{\mp D\pm D^2\mp 3D^3} & \\
-2D^2-3D^3 & \\
\underline{\pm 2D^2\mp 2D^3\pm 6D^4} & \\
-5D^3+6D^4 & \\
\underline{\pm 5D^3\mp 5D^4\pm 15D^5} & \\
+D^4+15D^5 &
\end{array}$$

$$y_p(x)=\left(1+D-2D^2-5D^3\right)\left(x^3-4x+1\right)\to$$
$$y_p(x)=\left(x^3-4x+1\right)+\left(3x^2-4\right)-2(6x)-5(6)\to$$
$$y_p(x)=x^3+3x^2-16x-33$$

2) $y'''+y''+2y'+y=x^2+3x+1$

حل: ابتدا عبارت $F(D)$ را برحسب توان‌های صعودی مرتب می‌کنیم.

$$F(D)=1+2D+D^2+D^3$$

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1+2D+D^2+D^3 \\ \cline{2-2}
\underline{\mp 1\mp 2D\mp D^2\mp D^3} & 1-2D+3D^2+\dots \\
-2D-D^2-D^3 & \\
\underline{\pm 2D\pm 4D^2\pm 2D^3\pm 2D^4} & \\
3D^2+D^3+2D^4 & \\
\underline{\mp 3D^2\mp 6D^3\mp 3D^4\mp 3D^5} &
\end{array}$$

$$y_p(x)=\left(1-2D+3D^2\right)\left(x^2+3x+1\right)\rightarrow y_p(x)=\left(x^2+3x+1\right)-2(2x+3)+3(2)\rightarrow$$
$$y_p(x)=x^2-x+1$$

:4

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{1}{F(D)}\{e^{px}.u(x)\}=e^{px}\dfrac{1}{F(D+p)}\{u(x)\}\\[2mm] \dfrac{1}{F(D)}\{x.u(x)\}=x.\dfrac{1}{F(D)}\{u(x)\}-\dfrac{F'(D)}{F^2(D)}\{u(x)\}\end{array}}$$

مسایل حل شده:

مثال: جواب خصوصی مسایل زیر را پیدا کنید.

1) $y''+3y'+y=e^{-x}.\cos 2x$

حل:

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2+3D+1}\{e^{-x}.\cos 2x\}\rightarrow y_p(x)=e^{-x}.\frac{1}{(D-1)^2+3(D-1)+1}\{\cos 2x\}\rightarrow y_p(x)=e^{-x}.\frac{1}{D^2+D-1}.\{\cos 2x\}$$
$$\xrightarrow[\quad]{\text{طبق فرمول ۲}\ D^2\rightarrow -4} y_p(x)=e^{-x}.\frac{1}{-4+D-1}\{\cos 2x\}\xrightarrow{\times\frac{D+5}{D+5}} y_p(x)=e^{-x}\frac{D+5}{D^2-25}\{\cos 2x\}\xrightarrow{D^2\rightarrow -4}$$
$$y_p(x)=e^{-x}\frac{D+5}{-29}\{\cos 2x\}\rightarrow y_p(x)=\frac{-e^{-x}}{29}\{-2\sin 2x+5\cos 2x\}$$

2) $y^{(4)}+2y''+5y=x\sin x$

$$y_p(x)=\frac{1}{D^4+2D^2+5}\{x\sin x\}\rightarrow y_p(x)=x\frac{1}{D^4+2D^2+5}\{\sin x\}-\frac{4D^3+4D}{\left(D^4+2D^2+5\right)^2}\{\sin x\}\xrightarrow{D^2\rightarrow -1}$$

$$y_p(x)=x\frac{1}{(-1)^2+2(-1)+5}\{\sin x\}-\frac{\overset{0}{4D(-1)+4D}}{\left((-1)^2+2(-1)+5\right)^2}\{\sin x\}\quad\rightarrow y_p(x)=\frac{x}{4}\{\sin x\}$$

3) $y''+y'+y=xe^{2x}\cos x$

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2+D+1}\{xe^{2x}\cos x\}\rightarrow y_p(x)=e^{2x}.\frac{1}{(D+2)^2+(D+2)+1}\{x\cos x\}\rightarrow y_p(x)=e^{2x}\frac{1}{D^2+5D+7}\{x\cos x\}$$

$$\rightarrow y_p(x)=e^{2x}\left\{x.\frac{1}{D^2+5D+7}\{\cos x\}-\frac{2D+5}{\left(D^2+5D+7\right)^2}\{\cos x\}\right\}\xrightarrow{D^2\rightarrow -1}$$

$$y_p(x)=e^{2x}\left\{\underbrace{x.\frac{1}{(-1)+5D+7}\{\cos x\}}_{H_1}-\underbrace{\frac{2D+5}{\left((-1)+5D+7\right)^2}\{\cos x\}}_{H_2}\right\}$$

حال به محاسبه H_2, H_1 می‌پردازیم:

$$H_1 = x\cdot\frac{1}{5D+6}\{\cos x\} = x\cdot\frac{1}{5D+6}\cdot\frac{5D-6}{5D-6}.\{\cos x\} = x\cdot\frac{5D-6}{25D^2-36}.\{\cos x\} \xrightarrow{D^2\to -1} H_1 = -\frac{x}{61}.\{-5\sin x - 6\cos x\}$$

$$\to H_1 = \frac{x}{61}\{5\sin x + 6\cos x\}$$

$$H_2 = \frac{2D+5}{(5D+6)^2}\{\cos x\} = \frac{2D+5}{25D^2+60D+36}\{\cos x\} \xrightarrow{D^2\to -1} H_2 = \frac{2D+5}{+25(-1)+60D+36}\{\cos x\}$$

$$\to H_2 = \frac{2D+5}{60D+11}\{\cos x\}$$

$$\xrightarrow{\times\frac{60D-11}{60D-11}} H_2 = \frac{(2D+5)(60D-11)}{3600D^2-121}\{\cos x\} \to H_2 = \frac{120D^2+278D-55}{3600D^2-121}\{\cos x\}$$

$$\xrightarrow{D^2\to -1} H_2 = \frac{120(-1)+278D-55}{3600(-1)-121}\{\cos x\} \to H_2 = \frac{278D-175}{-3721}\{\cos x\} = \left\{\frac{278}{3721}\sin x + \frac{175}{3721}\cos x\right\}$$

$$\to H_2 = \frac{278}{3721}\sin x + \frac{175}{3721}\cos x$$

$$\to y_p(x) = e^{2x}\left\{\frac{x}{61}\{5\sin x + 6\cos x\} - \frac{278}{3721}\sin x - \frac{175}{3721}\cos x\right\}$$

4) $y'' + 4y' + 4y = xe^{-x}$

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2+4D+4}\{xe^{-x}\} \longrightarrow y_p(x) = x\frac{1}{D^2+4D+4}\{e^{-x}\} - \frac{2D+4}{(D^2+4D+4)^2}\{e^{-x}\} \longrightarrow$$

$$\to y_p(x) = x.\frac{e^{-x}}{(-1)^2+4(-1)+4} - \frac{(2(-1)+4)e^{-x}}{((-1)^2+4(-1)+4)^2} \to y_p(x) = \frac{xe^{-x}}{1} - \frac{2e^{-x}}{1} \to y_p(x) = xe^{-x} - 2e^{-x}$$

راه دیگر:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2+4D+4}\{xe^{-x}\} = e^{-x}\frac{1}{(D-1)^2+4(D-1)+4}(x) = e^{-x}\frac{1}{D^2+2D+1}(x) = e^{-x}(1-2D\ldots)x = e^{-x}(x-2)$$

۲-۳) معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم همگن از نوع کوشی ـ اویلر:

یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم از نوع کوشی اویلر، در حالت کلی به فرم زیر نشان داده می‌شود:

$$\boxed{ax^2y'' + bxy' + cy = 0}$$

می‌توان نشان داد با تغییر متغیر $u = Lnx$ یا $x = e^u$، معادله کوشی مورد نظر، به یک معادله مرتبه ۲ همگن با ضرایب ثابت، برای تابع $y(u)$ تبدیل می‌شود. که معادله مشخصه آن، معادله با ضرایب ثابت $a\lambda(\lambda-1) + b\lambda + c = 0$ می‌باشد. که ما اصطلاحاً همین معادله مشخصه را، معادله مشخصه معادله کوشی اویلر مورد نظرمی‌نامیم.

پس از حل معادله مشخصه مذکور و یافتن ریشه‌های آن، می‌توان از سه بحث زیر استفاده کرد:

۱) حالت اول: $(\Delta > 0)$ اگرمعادله مشخصه مورد نظر دارای دو ریشه متمایز λ_2,λ_1 باشد، پایه‌های جواب معادله کوشی عبارتند از:

$$\boxed{y_1(x) = x^{\lambda_1}\ ;\ \ y_2(x) = x^{\lambda_2}}$$

۲) حالت دوم: $(\Delta = 0)$ اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه تکراری (مضاعف) λ_1 باشد، پایه‌های جواب معادله کوشی عبارتند از:

$$\boxed{y_1(x) = x^{\lambda_1}\ ;\ \ y_2(x) = x^{\lambda_1}.Lnx}$$

۳) حالت سوم: $(\Delta < 0)$ اگر معاله مشخصه دارای دو ریشه مختلط $p \pm iq$ باشد، پایه‌های جواب معادله کوشی عبارتند از:

$$\boxed{y_1(x) = x^p \sin(q.Lnx)\ ;\ \ y_2(x) = x^p \cos(q.Lnx)}$$

نکته ۱:

بحث انجام شده در ارتباط با معادلات کوشی ـ اویلر مرتبه ۲، برای معادلات کوشی از مراتب بالاتر نیز قابل تعمیم است. در این‌جا نیز باید معادله مشخصه را به طور مناسب تشکیل داده و پس از یافتن تمام ریشه‌های معادله مشخصه، پایه‌های جواب معادله کوشی را معلوم کنیم:

$y \to 1$	$x^3y''' \to \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$
$xy' \to \lambda$	$x^4y'''' \to \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$
$x^2y'' \to \lambda(\lambda-1)$	$\vdots \qquad \vdots$
	$x^ny^{(n)} \to \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)..........(\lambda-(n-1))$

نکته ۲: به خاطر داشته باشید یک معادله کوشی ـ اویلر مرتبه ۲ در حالت کلی می‌تواند به فرم زیر باشد:

$$\boxed{\alpha(ax+b)^2 y'' + \beta(ax+b)y' + \gamma y = 0}$$

و می‌توان نشان داد این معادله با تغییر متغیر:

$$\boxed{\begin{array}{l} u = Ln(ax+b) \\ \qquad \text{یا} \\ ax+b = e^u \end{array}}$$

به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود. هم‌چنین توجه داشته باشید اگر بخواهیم جواب معادله کوشی ـ اویلر مذکور را به صورت مستقیم و از طریق تشکیل معادله مشخصه به‌دست آوریم، نخست باید، ضریب x را در پرانتزهای $(ax+b)$ به یک تبدیل کنیم. سپس معادله مشخصه را دقیقاً مانند حالت‌های قبل تشکیل داده، ریشه‌های آن را پیدا کنیم و در نهایت، وقتی می‌خواهیم جواب عمومی را معرفی کنیم، به جای x از عبارت $\left(x+\frac{a}{b}\right)$ استفاده کنیم.

معادله خطی لژاندر:

یک معادله دیفرانسیل مرتبه n از نوع لژاندر، در حالت کلی به فرم زیر نشان داده می‌شود:

$$\boxed{(ax+b)^n y^{(n)} + a_{n-1}(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + ... + ay = 0}$$

می‌توان نشان داد، معادله فوق، با تغییر متغیر $ax+b=e^u$ یا $u=Ln(ax+b)$، به یک معادله مرتبه n همگن با ضرایب ثابت، تبدیل می‌شود.

مسایل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

$1)\, x^2y'' + 7xy' - 7y = 0$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$\lambda(\lambda-1)+7\lambda-7=0 \to \lambda^2-\lambda+7\lambda-7=0 \to \lambda^2+6\lambda-7=0 \to (\lambda+7)(\lambda-1)=0 \to \lambda_1=-7;\lambda_2=1 \to$

جواب عمومی : $y(x)=Ax^1+Bx^{-7}$

$2)\, x^2y'' + 7xy' + 9y = 0$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$\lambda(\lambda-1)+7\lambda+9=0 \to \lambda^2+6\lambda+9=0 \to (\lambda+3)^2=0 \to \lambda_1=-3;\lambda_2=-3 \to$

جواب عمومی : $y(x)=Ax^{-3}+Bx^{-3}Lnx$

$3)\, 2x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$

حل:

$$2\lambda(\lambda-1)+3\lambda+5=0 \to 2\lambda^2+\lambda+5=0 \to \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-40}}{4} \to \begin{cases} \lambda_1=\dfrac{-1+\sqrt{39}\,i}{4} \\ \lambda_2=\dfrac{-1-\sqrt{39}\,i}{4} \end{cases}$$

$$\to y(x)=Ax^{\frac{-1}{4}}\sin\left(\frac{\sqrt{39}}{4}Lnx\right)+Bx^{\frac{-1}{4}}\cos\left(\frac{\sqrt{39}}{4}Lnx\right)$$

$4)\, x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم.

$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+3\lambda(\lambda-1)-2\lambda+2=0 \to \lambda^3-3\lambda^2+2\lambda+3\lambda^2-3\lambda-2\lambda+2=0$

$$\to \lambda^3-3\lambda+2=0 \xrightarrow[\text{ریشه مساوی ۱ است.}]{\text{چون جمع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یک}} \begin{array}{r|l} \lambda^3-3\lambda+2 & \lambda-1 \\ \cline{2-2} \mp\lambda^3\pm\lambda^2 & \lambda^2+\lambda-2 \\ \hline \lambda^2-3\lambda+2 & \\ \mp\lambda^2\pm\lambda & \\ \hline -2\lambda+2 & \\ \pm2\lambda\mp2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\lambda^3-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-1)=0 \xrightarrow{\text{سه ریشه عبارتند از}} \lambda_1=1;\ \lambda_2=1;\lambda_3=-2$

$\Rightarrow$: جواب عمومی معادله $\quad y(x)=Ax^1+Bx^1Lnx+Cx^{-2}$

مثال ۲: ثابت حقیقی A را طوری پیدا کنید تا پایه‌های جواب معادله $x^2y''+5xy'+Ay=0$، طبیعت نوسانی داشته باشد.

حل: زمانی پایه‌های جواب معادله طبیعت نوسانی دارند که، Δ معادله مشخصه، کوچک‌تر از صفر باشد. لذا خواهیم داشت:

معادله مشخصه : $\lambda(\lambda-1)+5\lambda+A=0 \to \lambda^2+4\lambda+A=0 \to \Delta:16-4A<0 \to A>4$

مثال ۳: مقادیر a و b را طوری بیابید که پایه‌های جواب $x^2y''+axy'+by=0$، وقتی $x \to o^+$ به سمت صفر بگرایند.

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda(\lambda-1)+a\lambda+b=0 \to \lambda^2+(a-1)\lambda+b=0$$

چنان‌چه ریشه‌های معادله مشخصه، اعداد حقیقی λ_2,λ_1 باشد، پایه‌های جواب معادله کوشی مورد نظر ($y_2(x)=x^{\lambda_2}$; $y_1(x)=x^{\lambda_1}$) می‌باشند. لذا طبیعی است اگر بخواهیم وقتی $x \to 0^+$ ، هر دو پایه جواب به صفر بگراید، بایستی λ_2 , λ_1 هر دو مثبت باشند. لذا باید:

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2>0 \to \dfrac{-(a-1)}{1}>0 \to a-1<0 \to a<1 \\ \lambda_1.\lambda_2>0 \to \dfrac{b}{1}>0 \to b>0 \end{cases}$$

مثال ۴: فرض کنید یک معادله کوشی ـ اویلر مرتبه هفتم، ریشه‌های معادله مشخصه‌اش به صورت $m;m;m;\ p\pm iq;p\pm iq$ به‌دست آمده باشد. در این حالت پایه‌های جواب را به‌دست آورید.

حل: $x^p\sin(qLnx);x^p\cos(qLnx);x^pLnx.\sin(qLnx);x^pLnx\cos(qLnx);x^m;x^mLnx;x^m(Lnx)^2$

مثال ۵: جواب کلی معادله دیفرانسیل $x^3y'''+2xy'-2y=x^2Lnx+3x$ را بیابید.

حل: ابتدا باید معادله مشخصه را تشکیل داده و جواب عمومی را به‌دست آوریم.

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+2\lambda-2=0 \to \lambda^3-3\lambda^2+4\lambda-2=0 \xrightarrow[\text{ریشه معادله مشخصه، مساوی ۱ است.}]{\text{چون جمع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یک}}$$

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3-3\lambda^2+4\lambda-2 & \lambda-1 \\ \cline{2-2} \underline{\mp\lambda^3\pm\lambda^2} & \lambda^2-2\lambda+2 \\ -2\lambda^2+4\lambda-2 & \\ \underline{\pm2\lambda^2\mp2\lambda} & \\ 2\lambda-2 & \\ \underline{\mp2\lambda\pm2} & \\ 0 & \end{array}$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda_1=1;\lambda_2=1+i;\lambda_3=1-i \Rightarrow$$

جواب عمومی معادله : $y(x)=Ax^1+Bx^1\sin(Lnx)+Cx^1\cos(Lnx)$

حال با استفاده از روش اپراتور معکوس و نیز تغییر متغیر $x=e^u$ یا $u=Lnx$ جواب خصوصی را پیدا می‌کنیم.

$$y_p(u)=\frac{1}{D^3-3D^2+4D-2}\{u.e^{2u}+3e^u\} \to y_p(u)=\frac{1}{D^3-3D^2+4D-2}\{ue^{2u}\}+\frac{3}{D^3-3D^2+4D-2}\{e^u\}$$

$$\to y_p(u)=u.\frac{1}{D^3-3D^2+4D-2}\{e^{2u}\}-\frac{3D^2-6D+4}{(D^3-3D^2+4D-2)^2}\{e^{2u}\}+\frac{3}{D^3-3D^2+4D-2}\{e^u\} \to$$

$$y_p(u)=\frac{u}{(2)^3-3(2)^2+4(2)-2}.e^{2u}-\frac{3(2)^2-6(2)+4}{\left((2)^3-3(2)^2+4(2)-2\right)^2}e^{2u}+\frac{3}{(D-1)(D^2-2D+2)}\{e^u\}\to$$

$$y_p(u)=\frac{u}{2}e^{2u}-e^{2u}+\frac{3u}{\left((1)^2-2(1)+2\right)(1!)}e^u\to y_p(u)=e^{2u}\left(\frac{u}{2}-1\right)+3ue^u\xrightarrow[u=Lnx;x=e^u]{\text{با جایگزینی}}$$

$$y_p(x)=x^2\left(\frac{1}{2}Lnx-1\right)+3x\,Lnx$$

جواب کلی : $Ax+Bx\sin(Lnx)+Cx\cos(Lnx)+x^2\left(\frac{1}{2}Lnx-1\right)+3xLnx$

مثال ۶: جواب کلی معادله دیفرانسیل $(x+2)^2y''-(x+2)y'+y=3x+4$ را بیابید.

حل: بدیهی است که معادله فوق از نوع لژاندر خطی است. لذا با تغییر متغیر $u=Ln(x+2);x+2=e^u$ خواهیم داشت:

$$\lambda(\lambda-1)-\lambda+1=0\to\lambda^2-2\lambda+1=0\to(\lambda-1)^2=0\to\lambda_1=1;\lambda_2=1$$

جواب عمومی معادله همگن : $y(x)=A(x+2)^1+B(x+2)^1Ln(x+2)$

حال با استفاده از روش اپراتور معکوس به یافتن جواب خصوصی می‌پردازیم:

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-2D+1}\{3(e^u-2)+4\}\to y_p(x)=\frac{1}{(D-1)^2}\{3e^u-2\}\to y_p(x)=\frac{1}{(D-1)^2}\{3e^u\}-\frac{1}{(D-1)^2}\{2e^0\}$$

$$\to y_p(x)=\frac{3u^2e^u}{2}-\frac{2}{(-1)^2}\to y_p(x)=\frac{3}{2}u^2e^u-2\xrightarrow{u=Ln(x+2)\ \text{یا}\ (x+2)=e^u}y_p(x)=\frac{3}{2}\left(Ln(x+2)\right)^2.(x+2)-2$$

جواب کلی معادله : $y=(x+2)\cdot[A+B\ln(x+2)]+\frac{3}{2}(x+2)[\ln(x+2)]^2-2$

۲-۴) پیدا کردن یک پایه جواب معادلات مرتبه دوم خطی با داشتن پایه جواب دیگر:

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\boxed{y''+p(x)y'+Q(x)y=0}$$

چنان‌چه یک پایه جواب این معادله دیفرانسیل y_1 باشد، پایه جواب دیگر را می‌توان به صورت $y_2=u(x).y_1$ در نظر گرفت. که در آن $u(x)$ به فرم زیر است:

$$\boxed{u(x)=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: می‌دانیم یک جواب معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ به صورت $y_1(x)=x$ می‌باشد. جواب مستقل دوم این معادله را پیدا کنید.

حل: ابتدا باید $u(x)$ را پیدا کنیم:

$$u(x)=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx \;\rightarrow\; u(x)=\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{-2x}{1-x^2}dx} \;\rightarrow\; u(x)=\int\frac{1}{x^2}.e^{-Ln\left(1-x^2\right)}dx$$

$$\rightarrow\; u(x)=\int\frac{1}{x^2}.\frac{1}{1-x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1-x^2}\right)dx \;\rightarrow\; u(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}Ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$

پس خواهیم داشت : $y_2(x)=u(x).y_1 \rightarrow y_2(x)=\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}Ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\right)x \Rightarrow y_2(x)=-1-\frac{x}{2}Ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$

مثال ۲: اگر $y_1(x)=\sqrt{x-1}$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y''+\frac{1}{4(x-1)}y'=0$ باشد، جواب مستقل دیگر را بیابید.

حل: ابتدا $u(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$u(x)=\int\frac{1}{(x-1)}e^{-\int\frac{1}{4(x-1)}dx}dx \;\rightarrow\; u(x)=\int\frac{1}{(x-1)}e^{-\frac{1}{4}Ln(x-1)}dx$$

$$\rightarrow\; u(x)=\int\frac{1}{x-1}.\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{4}}}dx=\int\frac{1}{(x-1)^{\frac{5}{4}}}dx=\frac{-4}{(x-1)^{\frac{1}{4}}} \;\rightarrow\; y_2(x)=u(x).y_1(x) \;\rightarrow\; y_2(x)=\frac{-4\sqrt{x-1}}{(x-1)^{\frac{1}{4}}}$$

مثال ۳: اگر $y_1(x)=x$ یک جواب معادله دیفرانسیل زیر باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

$$x^2\left(x^2-1\right)y''-x\left(x^2+1\right)y'+\left(x^2+1\right)y=0$$

حل: ابتدا $u(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$u(x)=\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{-x\left(x^2+1\right)}{x^2\left(x^2-1\right)}.dx}dx \Rightarrow u(x)=\int\frac{1}{x^2}e^{+\int\frac{x^2+1}{x^3-x}.dx}dx \Rightarrow u(x)=\int\frac{1}{x^2}e^{\underbrace{\int\left(\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x^3-x}\right)dx}_{H(x)}}dx$$

$$H(x)=\int\left(\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x\left(x^2-1\right)}\right)dx=\underbrace{\int\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)dx}_{L(x)}+\underbrace{\int\frac{1}{x(x-1)(x+1)}dx}_{M(x)}$$

$$L(x)=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}Ln\left(x^2-1\right)$$

$$M(x)=\int\frac{1}{x(x-1)(x+1)}dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx \rightarrow M(x)=-Lnx+\frac{1}{2}Ln(x-1)+\frac{1}{2}Ln(x+1)$$

$$\rightarrow M(x)=\frac{1}{2}Ln\left(x^2-1\right)-Ln\,x \rightarrow M(x)=Ln\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$\rightarrow H(x)=M(x)+L(x)=Ln\sqrt{x^2-1}+Ln\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \rightarrow H(x)=Ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right|$$

$$\rightarrow u(x)=\int\frac{1}{x^2}e^{Ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right|}dx \rightarrow u(x)=\int\frac{1}{x^2}.\left(\frac{x^2-1}{x}\right)dx=\int\frac{x^2-1}{x^3}dx \rightarrow u(x)=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx \rightarrow u(x)=Lnx+\frac{1}{2x^2}$$

$$\rightarrow y_2(x)=u(x).y_1(x) \rightarrow y_2(x)=x\,Lnx+\frac{1}{2x}$$

مثال ۴: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید. چنان‌چه این معادله دیفرانسیل، دارای پایه جوابی به صورت $y(x)=e^{px}$ باشد، p را پیدا کنید و سپس پایه دوم جواب را مشخص کنید.

$$(x-2)y''-(4x-7)y'+(4x-6)y=0$$

حل:

$$y=e^{px}\rightarrow y'=pe^{px}\rightarrow y''=p^2e^{px}$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله، مقدار p را به‌دست می‌آوریم.

$$(x-2)p^2e^{px}-(4x-7)pe^{px}+(4x-6)e^{px}=0\rightarrow x\left(p^2-4p+4\right)+\left(-2p^2+7p-6\right)=0$$

اگر واقعاً e^{px} جواب معادله باشد، باید به ازای هر xای رابطه فوق برقرار باشد و این می‌طلبد:

$$\begin{cases} p^2-4p+4=0\rightarrow (p-2)^2=0\rightarrow p=2 \\ -2p^2+7p-6=0\rightarrow p=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-48}}{-4}\rightarrow p=2;p=+\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

پس به ازای $p=2$ اتفاق مورد نظر می‌افتد. لذا $y_1(x)=e^{2x}$ است و با فرض $y_2(x)=u(x)y_1(x)$، باید ابتدا $u(x)$ را محاسبه کنیم:

$$u(x)=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx\rightarrow u(x)=\int\frac{1}{e^{4x}}.e^{-\int\frac{-(4x-7)}{x-2}dx}dx\rightarrow u(x)=\int\frac{1}{e^{4x}}.e^{\overbrace{\int\frac{(4x-7)dx}{x-2}}^{H(x)}}dx$$

$$\xrightarrow{\text{ابتدا به محاسبه } H(x) \text{ می‌پردازیم.}}H(x)=\int\frac{4x-7}{x-2}dx\xrightarrow[dx=du]{x-2=u}$$

$$H(x)=\int\frac{4u+1}{u}du\rightarrow H(x)=\int\left(4+\frac{1}{u}\right)du\rightarrow H(x)=4u+\mathrm{Ln}u=4x-8+\mathrm{Ln}(x-2)$$

$$\rightarrow u(x)=\int\frac{1}{e^{4x}}.e^{4x}.e^{-8}e^{\mathrm{Ln}(x-2)}dx\rightarrow u(x)=\frac{1}{e^8}\int(x-2)dx\rightarrow u(x)=\frac{1}{e^8}\left(\frac{x^2}{2}-2x+c\right)$$

$$\xrightarrow{\text{به یاد داریم } y_2(x)=u(x).y_1(x)}y_2(x)=\frac{e^{2x}}{e^8}\left(\frac{x^2}{2}-2x+c\right)\rightarrow y_2(x)=e^{(2x-8)}\left(\frac{x^2}{2}-2x+c\right)$$

۲-۵) روش لاگرانژ برای پیدا کردن جواب خصوصی معادلات خطی مرتبه دوم غیر همگن:

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y''+p(x)y'+Q(x)=R(x)$$

چنان‌چه $y_1(x)$, $y_2(x)$ پایه‌های جواب همگن متناظر باشد و رونسکین پایه‌های جواب به صورت زیر باشد:

$$\boxed{W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}}$$

آن‌گاه می‌توان نشان داد، جواب خصوصی معادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$\boxed{y_p(x)=-y_1\int\frac{y_2.R}{w}dx+y_2\int\frac{y_1.R}{w}dx}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: جواب خصوصی معادله $y''+y=\operatorname{cosec}x$ را بیابید.

حل: ابتدا پایه‌های جواب معادله همگن را به‌دست می‌آوریم:

$$y''+y=0 \;\to\; D^2+1=0 \;\to\; D_1=i;D_2=-i$$
$$\to\; y_1(x)=\cos x\ ;\ y_2(x)=\sin x \;\to\; y_1'=-\sin x\ ;\ y_2'=\cos x$$

حال برای تعیین جواب خصوصی، باید رونسکین پایه‌های جواب معادله همگن را تشکیل دهیم:

$$W(x)=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

$$y_p(x)=-\cos x.\int\frac{\sin x.\operatorname{cosec}x}{1}dx+\sin x.\int\frac{\cos x.\operatorname{cosec}x}{1}dx \to y_p(x)=-\cos x.\int\frac{\sin x}{\sin x}dx+\sin x.\int\frac{\cos x}{\sin x}dx \to$$
$$\to y_p(x)=\sin x.\mathrm{Ln}(\sin x)-x\cos x$$

مثال ۲: جواب معادله دیفرانسیل $y''-4y'+4y=\frac{e^{2x}}{x}$ کدام است؟

حل: ابتدا پایه‌های جواب معادله همگن را به‌دست می‌آوریم:

$D^2-4D+4=0 \to (D-2)^2=0 \to D_1=2;D_2=2 \to$ جواب عمومی معادله همگن: $y_h(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$

حال برای تعیین جواب خصوصی، باید رونسکین پایه‌های جواب معادله همگن را تشکیل دهیم.

$$w(x)=\begin{vmatrix}e^{2x} & xe^{2x}\\ 2e^{2x} & e^{2x}+2xe^{2x}\end{vmatrix}=e^{4x}$$

$$y_p(x)=-e^{2x}\int\frac{xe^{2x}.e^{2x}}{xe^{4x}}dx+xe^{2x}\int\frac{e^{2x}.e^{2x}}{x.e^{4x}}dx \to y_p(x)=-e^{2x}\int dx+xe^{2x}\int\frac{dx}{x}$$
$$\to y_p(x)=-xe^{2x}+xe^{2x}\mathrm{Ln}x \to y_p(x)=xe^{2x}(\mathrm{Ln}x-1)$$

جواب کلی : $y=c_1\sin x+c_2\cos x+\sin x\cdot\mathrm{Ln}(\operatorname{cosec}x-\cot g\,x)$

مثال ۳: جواب کلی معادله دیفرانسیل $y''+y=\cot gx$ را بیابید.

حل: ابتدا پایه‌های جواب معادله همگن را به‌دست می‌آوریم:

$D^2+1=0 \to D_1=i;D_2=-i \to$ جواب عمومی معادله همگن: $y_h(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$

برای تعیین جواب خصوصی باید رونسکین پایه‌های جواب معادله همگن را تشکیل دهیم:

$$w(x)=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1$$

پس جواب خصوصی چنین است:

$$y_p(x)=-\cos x\int\frac{\sin x.\cot gx}{1}dx+\sin x\int\frac{\cos x.\cot gx}{1}dx \to y_p(x)=-\cos x.\int\cos x dx+\sin x.\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx$$
$$\to y_p(x)=-\cos x.\sin x+\sin x.\{\mathrm{Ln}(\operatorname{cosec}x-\cot gx)+\cos x\} \to y_p(x)=\sin x.\mathrm{Ln}(\operatorname{cosec}x-\cot gx)$$

مثال ۴: جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $x^2y''+6xy'-6y=x^3$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله همگن را تشکیل داده و سپس پایه‌های جواب معادله همگن را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda(\lambda-1)+6\lambda-6=0\to\lambda^2+5\lambda-6=0\to(\lambda+6)(\lambda-1)=0\to\lambda_1=1;\lambda_2=-6\to$$

جواب عمومی معادله همگن: $y_h(x)=c_1x^1+c_2x^{-6}$

$$w(x)=\begin{vmatrix}x^1 & x^{-6}\\ 1 & -6x^{-7}\end{vmatrix}=-7x^{-6}$$

$$y''+6x^{-1}y'-6yx^{-2}=\underset{\substack{\downarrow\\ R}}{x}$$

$$y_p=-y_1\int\frac{y_2R}{w}+y_2\int\frac{y_1R}{w}$$

$$y_p(x)=-x\int\frac{x^{-6}\cdot x}{-7x^{-6}}+x^{-6}\int\frac{x\cdot x}{-7x^{-6}}=\frac{x}{7}\times\frac{x^2}{2}-\frac{x^{-6}}{7}\times\frac{x^9}{9}=\frac{1}{7}\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{9}\right)=\frac{1}{7}\,\frac{7x^3}{18}=\frac{x^3}{18}$$

۲-۶) روش‌های کاهش مرتبه:

اساس روش‌های کاهش مرتبه بر مبنای آن است که به طریقی مناسب و با یک جانشینی، مرتبه معادله دیفرانسیل مورد نظر را کاهش داده و سپس آن را حل کنیم.

روش کاهش مرتبه در دو قالب کلی مطرح می‌شود:

۱) حالت اول: $F(x,y',y'')=0$

اگر معادله دیفرانسیل در قالب کلی $F(x,y',y'')=0$ مطرح شده باشد. (یعنی معادله فاقد y باشد.) با فرض $y'=u(x)$ داریم $y''=u'(x)$. و بدین ترتیب، معادله، به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل خواهد شد.

۲) حالت دوم: $F(y,y',y'')=0$

اگر معادله مرتبه دومی قالب کلی $F(y,y',y'')=0$ مطرح شده باشد (یعنی معادله فاقد x باشد). با فرض $y'=u(y)$ داریم $y''=u'(y).u(y)$. به این ترتیب، معادله، به یک معادله مرتبه اول برای تابع $u(y)$ تبدیل می‌شود.

$$y'=u(y)$$

$$y''=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(u(y))\xrightarrow{\text{قاعده زنجیره‌ای}}\frac{d}{dy}(u(y)).\frac{dy}{dx}=u'(y).u(y)$$

نکته ۱: توجه کنید در بسیاری مواقع، به واسطه وضعیت خاصی که معادله دیفرانسیل مورد نظر دارد، این امکان وجود دارد که دو جمله معادله دیفرانسیل مورد نظر را، در قالب مشتق یک جمله بازنویسی کرده و سپس با انتگرال گیری‌های ساده، جواب معادله مورد نظر را پیدا کنید.

نکته ۲: معادله $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ را در نظر بگیرید:

۱ـ اگر $a=b\neq 0$ باشد، معادله فوق، معادله یک دایره است.

۲ـ اگر a,b، متحدالعلامه باشد، معادله فوق، معادله یک بیضی است.

۳ـ اگر a,b مختلف العلامه باشد، معادله فوق، معادله یک هذلولی است.

۴ـ اگر a و یا b (فقط یکی) صفر باشد، معادله فوق، معادله یک سهمی است.

۵ـ اگر $a=b=0$ باشد، معادله فوق، معادله یک خط راست است.

مسایل حل شده:

مثال ۱: معادله $y''=1+y'^2$ را حل کنید.

حل: معادله هم فاقد تابع است و هم فاقد متغیر است. لذا چنان‌چه از فاقد تابع بودن معادله استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$y'=v(x)\ ;\ y''=v'(x)$$

$$y''=1+y'^2\to v'(x)=1+v^2(x)\to\frac{dv}{1+v^2(x)}=dx\to tg^{-1}v=x+c\to v=\frac{dy}{dx}=tg(x+c)\to y=-Ln\left(\cos(x+c)\right)+k$$

مثال ۲: جواب عمومی معادله $xy''+y'=x$ را بیابید.

حل: روش اول: بدیهی است معادله فوق، فاقد تابع است. لذا خواهیم داشت:

$$y'=v(x)\to y''=v'(x)$$

$$xy''+y'=x\to xv'(x)+v(x)=x\xrightarrow{\text{طرفین را بر x تقسیم می‌کنیم.}}v'(x)+\frac{1}{x}v(x)=1\xrightarrow{\text{معادله از نوع خطی مرتبه اول است.}}$$

$$v(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int 1.e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right]\to v(x)=e^{-Lnx}\left[\int e^{Lnx}+c\right]\to v(x)=+\frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}x^2+c\right]$$

$$\to v(x)=+\frac{x}{2}+\frac{c}{x}\xrightarrow{\frac{dy}{dx}=v(x)}\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2}+\frac{c}{x}\to\int dy=\int\left(\frac{x}{2}+\frac{c}{x}\right)dx\to y(x)=\frac{x^2}{4}+cLnx+k$$

روش دوم: بدون هیچ ارتباطی به روش‌های کاهش مرتبه و بلکه به واسطه خاص بودن وضعیت معادله می‌توان نوشت:

$$(xy')'=x\xrightarrow{\text{انتگرال}}xy'=\frac{x^2}{2}+c\xrightarrow{\text{طرفین بر x تقسیم می‌کنیم.}}y'=\frac{x}{2}+\frac{c}{x}$$

بعد از انتگرال‌گیری داریم:

$$y(x)=\frac{x^2}{4}+cLnx+k$$

مثال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $yy''+y'^2=1$، چه شکلی را توصیف می‌کند.

حل: این مسئله را می‌توان از روش ۲ حل کرد. ولی با کمی دقت متوجه می‌شویم که به علت خاص بودن معادله، می‌توان بدون ارتباط دادن مسئله به روش‌های کاهش مرتبه، مسئله را حل کرد.

$$(yy')'=1\xrightarrow{\text{از دو طرف انتگرال می‌گیریم.}}yy'=x+c\to y.\frac{dy}{dx}=x+c\to ydy=(x+c)dx\xrightarrow{\text{از دو طرف انتگرال می‌گیریم.}}$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+cx+k$$

با توجه به نکته ۲، معادله روبرو، توصیف یک هذلولی است.

مثال ۴: معادله دیفرانسیل $y''+y'.tgx+y.sec^2x=nx^{n-1}$ مفروض است. چنان‌چه $y'(0)=0$ باشد حاصل $y'(\pi)$ چیست.

حل: بدون هیچ ارتباطی به روش‌های کاهش مرتبه و بلکه به واسطه خاص بودن وضعیت معادله می‌توان نوشت:

یادآوری:

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}\ ;\ 1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$
$$\operatorname{cosec}x=\frac{1}{\sin x}\ ;\ 1+\operatorname{cotg}^2x=\frac{1}{\sin^2 x}=\operatorname{cosec}^2x$$

$$y''+y'tgx+y\sec^2x=nx^{n-1}\Rightarrow y''+y'tgx+\left(1+tg^2x\right)y=nx^{n-1}\rightarrow y''+\left(y.tgx\right)'=nx^{n-1}\xrightarrow{\text{از دو طرف انتگرال می‌گیریم}}$$
$$y'+ytgx=x^n+c$$

با اعمال شرط $y'(0)=0$ داریم:

$$0+y(0).tg(0)=0^n+c\rightarrow c=0$$

یعنی داریم:

$$y'+y.tgx=x^n\rightarrow y'(\pi)+y(\pi).tg(\pi)=\pi^n\rightarrow y'(\pi)=\pi^n$$

مثال ۵: معادله حرکت یک متحرک به صورت $y''+e^{2y}=0$ داده شده است. (مشتقات نسبت به متغیر زمان می‌باشد.) چنان‌چه $y(0)=1\ ;\ y'(0)=0$ باشد، سرعت این متحرک را به صورت تابعی از y، $(v(y))$ به‌دست آورید.

حل: معادله فوق فاقد متغیر است. لذا با فرض $y''=v'(y).v(y);y'=v(y)$ خواهیم داشت:

$$y''+e^{2y}=0\rightarrow v'(y).v(y)+e^{2y}=0\rightarrow\frac{dv}{dy}.v(y)=-e^{2y}\rightarrow v\,dv=-e^{2y}dy\xrightarrow{\text{از دو طرف انتگرال می‌گیریم}}\frac{1}{2}v^2=-\frac{1}{2}e^{2y}+c$$
$$\rightarrow v(y)=\sqrt{2c-e^{2y}}$$

با اعمال شرایط داده شده در $t=0$ داریم:

$$0=\sqrt{2c-e^{2(1)}}\rightarrow 2c=e^2\rightarrow v(y)=\sqrt{e^2-e^{2y}}$$

فصل سوم

سری‌های توانی

۱) تعاریف اولیه:

تعریف ۱: تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ تحلیلی می‌گویند هر گاه $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای بسط تیلور با $R>0$ باشد (R شعاع همگرایی می‌باشد.)

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \;;\; |x-a|<R}$$

تعریف ۲: یک سری نامتناهی به شکل زیر را یک سری توانی از $(x-a)$ گویندکه در آن اعداد $a_0, a_1, \dots, a_n$ ضرایب سری و a مرکز سری می‌باشد.

$$\boxed{a_0+a_1(x-a)+\dots\dots+a_n(x-a)^n+\dots\dots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n}$$

تعریف ۳: در حالت خاص سری توانی حول نقطه صفر عبارت است از:

$$\boxed{a_0+a_1x+\dots\dots+a_nx^n+\dots\dots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n}$$

تعریف ۴: شعاع و بازه سری‌های توانی را می‌توان از طریق آزمون‌های نسبت و ریشه به‌دست آورد.

آزمون ریشه: $\boxed{\frac{1}{R}=\sqrt[n]{|a_n|}}$

آزمون نسبت: $\boxed{\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$

قضیه: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$y''+p(x)y'+Q(x)y=0$$

چنان‌چه x_0 یک نقطه عادی برای این معادله دیفرانسیل باشد، جواب این معادله دیفرانسیل را می‌توان به فرم یک سری توانی حول نقطه x_0 از جنس بسط تیلور به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-x_0)^n \\ a_n=\dfrac{y^{(n)}(x_0)}{n!} \end{array}}$$

می‌توان نشان داد شعاع همگرایی این جواب برابر با مینیمم فاصله نقطه x_0 تا نقاط تکین معادله دیفرانسیل مذکور(خواه این نقاط تکین از نوع حقیقی باشند یا مختلط)می‌باشد.

مسایل حل شده:

مثال ۱: هر گاه $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جوابی به صورت سری توانی برای $y''+xy=0$ با $y(0)=1; y'(0)=1$ باشد آن‌گاه ضریب a_3 را بیابید.

با توجه به فرمول گفته شده در بالا ضریب a_3 به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a_3=\frac{y'''(0)}{3!}$$

لذا برای محاسبه $y'''(0)$ باید از معادله فوق یک بار مشتق بگیریم:

$$y''+xy=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} y'''+y+xy'=0 \to y'''(0)+y(0)+(0).y'(0)=0 \xrightarrow{y(0)=1} y'''(0)=-1 \xrightarrow{\text{طبق فرمول}} a_3=\frac{-1}{3!}=-\frac{1}{6}$$

مثال ۲: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید. چنان‌چه جواب این معادله دیفرانسیل را به صورت $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در نظر بگیریم، ضرایب a_3, a_2 را پیدا کنید.

$$\begin{cases} y''+e^x y'+xy=x+1 \\ y(0)=1; y'(0)=2 \end{cases}$$

اگر به معادله داده شده در $x=0$ نگاه کنیم آن‌گاه $y''(0)$ به‌دست می‌آید که از روی آن می‌توانیم a_2 را پیدا کنیم.

$$y''+e^x y'+xy=x+1 \to y''(0)+e^0 y'(0)+0.y(0)=0+1 \to y''(0)+2e^0=1 \to y''(0)=-1 \to a_2=\frac{y''(0)}{2!} \to a_2=-\frac{1}{2}$$

برای به‌دست آوردن ضریب a_3 باید $y'''(0)$ را به‌دست آوریم و برای به‌دست آوردن $y'''(0)$ باید از معادله داده شده مشتق بگیریم:

$$y''+e^x y'+xy=x+1 \xrightarrow{\text{مشتق}} y'''+e^x.y'+e^x y''+y+xy'=1 \to y'''(0)+e^0.y'(0)+e^0 y''(0)+y(0)+0.y'(0)=1$$

$$\to y'''(0)+2e^0-1e^0+1=1 \to y'''(0)=-1 \to a_3=\frac{y'''(0)}{3!} \to a_3=-\frac{1}{6}$$

مثال ۳: معادله دیفرانسیل زیر مفروض است در بسط مکلورن جواب این معادله دیفرانسیل ضریب x^2 کدام است؟

$$\begin{cases} y'+e^y=x \\ y(0)=1 \end{cases}$$

برای پیدا کردن ضریب x^2 نیاز به این است که مقدار $y''(0)$ را داشته باشیم و برای پیدا کردن مقدار $y''(0)$ بایدابتدا از صورت سؤال $y'(0)$ را یافته و بعد از معادله فوق مشتق بگیریم:

$$y'+e^y=x \xrightarrow{\text{در نقطه x=0 نگاه می‌کنیم}} y'(0)+e^{y(0)}=0 \to y'(0)=-e$$

$$y'+e^y=x \xrightarrow{\text{مشتق}} y''+y'.e^y=1 \xrightarrow{\text{در نقطه x=0 نگاه می‌کنیم}} y''(0)+y'(0).e^{y(0)}=1 \to y''(0)+(-e).e^1=1 \to y''(0)=1+e^2$$

$$\to \text{در بسط مکلورن } x^2 \text{ ضریب} = a_2=\frac{y''(0)}{2!}=\frac{1+e^2}{2}$$

مثال ۴: معادله دیفرانسیل زیر مفروض است. چنان‌چه جواب این معادله دیفرانسیل را بـه صـورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ در نظـر بگیـریم، رابطه بازگشتی مربوط به a_n ها را پیدا کنید.

$$y''+x^2y=0$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \to y'=\sum_{n=1}^{\infty}n.a_nx^{n-1} \to y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1).a_n.x^{n-2}$$

این مقادیر را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم:

$$y''+x^2y=0 \to \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n.x^{n-2}+x^2.\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \to \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1).a_n.x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n.x^{n+2}=0$$

قدم اول آن است که توان xها را در تمام سیگماها یکسان کنیم. یعنی توان xها یا $(n-2)$ باشد یا $(n+2)$ باشد که به اختیار یک کدام را انتخاب می‌کنیم که ما در این‌جا از $(n-2)$ استفاده می‌کنیم؛ لذا در جمله دوم $n+2$ را به $n-2$ تبدیل می‌کنیم. پس خواهیم داشت:

$$n+2 \mapsto N-2 \ \to\ n \mapsto N-4$$

$$\to \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n.x^{n-2}+\sum_{N=4}^{\infty}a_{N-4}.x^{N-2}=0$$

اینک کافی است با بسط چند جمله اولیه سیگماهای موجود حد پایینی همه آن‌ها را یکسان کنیم و آن‌ها را در قالب یـک سـیگما بازنویسی کنیم:

$$2a_2x^0+6a_3x^1+\sum_{n=4}^{\infty}\left(n(n-1)a_n+a_{n-4}\right)x^{n-2}=0$$

پس باید تمام ضرایب توان‌های مختلف x متحد با صفر باشند:

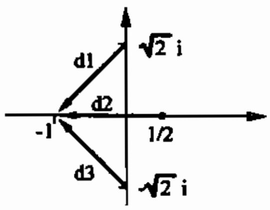
$$\begin{cases} 2a_2=0 \Rightarrow a_2=0 \\ 6a_3=0 \Rightarrow a_3=0 \\ n(n-1)a_n+a_{n-4}=0 \to a_n=-\dfrac{a_{n-4}}{n(n-1)} \quad \text{:رابطه بازگشتی} \end{cases}$$

مثال ۵: معادله دیفرانسیل زیر موجود است. چنان‌چه جواب این معادله دیفرانسیل را به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$ در نظر بگیریم شعاع همگرایی سری جواب چگونه خواهد بود؟

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+2\right)y''+y'+4y=0$$

بدیهی است جواب به صورت سری توانی حول نقطه $x_0=-1$ مد نظر است. نقاط غیر عادی معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x-\frac{1}{2}=0 \to x=\frac{1}{2} \\ x^2+2=0 \to x \pm \sqrt{2}\,i \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} d_1=d_3=\sqrt{1+2}=\sqrt{3} \\ d_2=\frac{3}{2} \end{array}\right\} \to \text{شعاع همگرایی } (R)=\min\left\{\sqrt{3};\frac{3}{2}\right\} \to R=\frac{3}{2}$$

۲) تعیین نقاط عادی و غیر عادی (منفرد) یک معادله دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

اگر توابع $Q(x),P(x)$ هر دو در نقطه $x=x_0$ تحلیلی باشند آن‌گاه هر جواب معادله در نقطه $x=x_0$ تحلیلی است.

نقاط عادی و غیر عادی (تکین) از نوع منظم و یا نامنظم معادله $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ عبارتند از:

۱) نقطه عادی: نقطه $x=x_0$ یک نقطه عادی (معمولی) است اگر هر دو حد $\lim_{x\to x_0}Q(x),\lim_{x\to x_0}P(x)$ موجود باشد.

۲) نقطه غیر عادی (تکین): نقطه $x=x_0$ یک نقطه غیر عادی (تکین یا منفرد) است اگر حداقل یکی از دو حد $\lim_{x\to x_0}Q(x),\lim_{x\to x_0}P(x)$ موجود نباشد.

۳) نقطه غیر عادی (تکین) منظم: نقطه غیرعادی $x=x_0$ را یک نقطه غیر عادی (تکین یا منفرد) منظم است. اگر هر دو حد $\lim_{x\to x_0}(x-x_0).P(x)$ و $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2.Q(x)$ موجود باشد.

۴) نقطه غیر عادی (تکین) نامنظم: نقطه غیرعادی $x=x_0$ را یک نقطه غیر عادی (تکین یا منفرد) نامنظم است اگر حداقل یکی از دو حد $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x),\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2.Q(x)$ موجود نباشد.

مسایل حل شده:

مثال ۱: نقاط $x=0$ و $x=1$ برای معادله $(x-1)x^2y''-y\sin x=0$ چه نوع نقاطی هستند؟

$$y''-\frac{\sin x}{(x-1)x^2}y=0 \Rightarrow p(x)=0\ ;\ Q(x)=\frac{-\sin x}{(x-1)x^2}$$

برای تعیین این که نقطه $x=1,\ x=0$ عـادی یـا غیـر عـادی اسـت، بایـد دو حـد $\lim\limits_{x\to 0}P(x);\lim\limits_{x\to 0}Q(x);\lim\limits_{x\to 1}P(x);\lim\limits_{x\to 1}Q(x)$ را تشکیل دهیم:

ابتدا به بررسی نقطه $x=0$ می‌پردازیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}P(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0}Q(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{(x-1)x^2}=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{نقطه غیر عادی است}$$

حال برای تعیین نوع نقطه غیر عادی باید $\lim\limits_{x\to 0}(x-0)P(x)\ ;\ \lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2.Q(x)$ را تعیین کنیم:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}x.P(x)=\lim_{x\to 0}x.0=0\ ;\ \lim_{x\to 0}x^2.Q(x)=\lim_{x\to 0}x^2.\frac{\sin x}{(x-1)x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(x-1)}=0$$

پس نقطه $x=0$ یک نقطه غیر عادی (تکین) از نوع منظم است.

حال به بررسی نقطه $x=1$ می‌پردازیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1}P(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 1}Q(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x}{(x-1)x^2}=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{پس نقطه } x=1 \text{ یک نقطه غیر عادی است.}$$

برای تعیین نوع نقطه غیر عادی باید $\lim\limits_{x\to 1}(x-1).P(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2.Q(x)$ را تعیین کنیم:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}(x-1).P(x)=\lim_{x\to 1}(x-1).0=0$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2.Q(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)^2.\frac{\sin x}{(x-1).x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1).\sin x}{x^2}=0$$

پس نقطه $x=1$ یک نقطه غیر عادی (تکین) از نوع منظم است.

مثال ۲: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید و نوع نقطه $x=0$ را برای آن تعیین کنید.

$$x^2y''+(e^x-1)y'+(\sin^2 x)y=0$$

برای تعیین این که آیا نقطه $x=0$ عادی یا غیر عادی است، باید $\lim\limits_{x\to 0}P(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0}Q(x)$ را تعیین کنیم:

$$y''+\frac{(e^x-1)}{x^2}y'+\frac{\sin^2 x}{x^2}y=0\Rightarrow P(x)=\frac{(e^x-1)}{x^2}\ \ ;\ Q(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}P(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)}{x^2}=\dfrac{0}{0}\ \ \text{مبهم}\ \ \xrightarrow{H}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2x}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 0}Q(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=\dfrac{0}{0}\ \ \text{مبهم}\ \ \xrightarrow{H}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x.\cos x}{2x}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{نقطه } x=0 \text{ از نوع غیر عادی است.}$$

برای تعیین نوع نقطه غیر عادی (منظم یا نامنظم) باید $\lim\limits_{x\to 0}(x-0)P(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2.Q(x)$ را تعیین کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}(x-0)P(x)=\lim\limits_{x\to 0}x.\dfrac{(e^x-1)}{x^2}=\dfrac{0}{0}\ \ \text{مبهم}\ \ \xrightarrow{H}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2.Q(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2.\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{پس نقطه } x=0 \text{ یک نقطه غیر عادی از نوع منظم است.}$$

مثال ۳: نقطه $x=0$ برای معادله دیفرانسیل $x^3y''+x^2y'+y=0$ چه نوع نقطه‌ای است؟

برای تعیین این که آیا نقطه $x=0$ عادی یا غیر عادی است، باید $\lim\limits_{x\to 0}P(x)$; $\lim\limits_{x\to 0}Q(x)$ را تشکیل دهیم:

$$x^3y''+x^2y'+y=0\Rightarrow y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^3}y=0\Rightarrow P(x)=\frac{1}{x};Q(x)=\frac{1}{x^3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}P(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 0}Q(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$ نقطه $x=0$ از نوع غیر عادی است

برای تعیین این که آیا نقطه $x=0$ (غیر عادی) از نوع منظم یا نامنظم است بایـد دو حـد $\lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2.Q(x);\lim\limits_{x\to 0}(x-0).P(x)$ را تشکیل دهیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}(x-0).P(x)=\lim\limits_{x\to 0}x.\frac{1}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2.Q(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2.\frac{1}{x^3}=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$ پس نقطه $x=0$ یک نوع نقطه غیر عادی (تکین) از نوع نامنظم است.

مثال ۴: معادله دیفرانسیل $y''+\frac{\alpha}{x^s}y'+\frac{\beta}{x^t}y=0$ را در نظر بگیرید کـه در آن β,α اعـداد حقیقـی و مخـالف صـفر و t,s اعـداد صحیح مثبت‌اند؛ به ازای چه مقادیری از t,s نقطه $x=0$ یک نقطه غیر عادی نامنظم است؟

اگر بخواهیم نقطه $x=0$ یک نقطه غیر عادی از نوع نامنظم باشد باید لااقـل یکـی از دو حـد $\lim\limits_{x\to 0}x^2.Q(x);\lim\limits_{x\to 0}x.P(x)$ موجـود نباشد:

$$\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}x.\frac{\alpha}{x^s}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{x^{s-1}}\\ \lim\limits_{x\to 0}x^2.\frac{\beta}{x^t}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta}{x^{t-2}}\end{array}\xrightarrow{\text{شرط موجود نبودن}}\begin{array}{l}s-1>0\Rightarrow s>1\\ t-2>0\Rightarrow t>2\end{array}$$

البته لازم به ذکر است که اگر هر کدام از شرایط به‌دست آمده برقرار باشند نقطه $x=0$ تکین نامنظم است و نیازی نیست هم زمـان هر دو شرط ارضا شود.

۳) حل معادلات دیفرانسیل به روش فروبینیوس (روش سری‌های توانی اصلاح شده):

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

چنان‌چه x_0 یک نقطه منفرد (غیر عادی) از نوع منظم برای این معادله دیفرانسیل باشد و بخواهیم جواب معادله را به صورت سری توانی حول x_0 بنویسیم باید از روش فروبینیوس استفاده کنیم، برای این منظور معادله مشخصه‌ای به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\boxed{r^2+(A-1)r+B=0}$$

که در آن:

$$\boxed{\begin{array}{l}A=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0).P(x)\\ B=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^2.Q(x)\end{array}}$$

پس از یافتن ریشه‌های معادله مشخصه می‌توان نشان داد پایه‌های جواب به صورت سری توانی حول نقطه x_0 به فرم زیر قابل بیان است:

حالت اول: اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه r_2, r_1 باشد و تفاضل r_2, r_1 عدد صحیح نباشد خواهیم داشت:

$$\boxed{y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r_1}} \qquad \boxed{y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r_2}}$$

حالت دوم: اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه r_2, r_1 باشد و تفاضل r_2, r_1 عددی صحیح باشد، داریم: $(r_1 > r_2)$

$$\boxed{y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r_1}} \qquad \boxed{y_2(x) = k y_1 \mathrm{Ln}(x-x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r_2}}$$

حالت سوم: اگر معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف $r_1 = r_2 = r$ باشد داریم:

$$\boxed{y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r}} \qquad \boxed{y_2(x) = y_1 \ln(x-x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r}}$$

در موارد فوق k, b_n, a_n پس از قرار دادن این جواب‌ها در معادله مشخص می‌شوند.

مسایل حل شده:

مثال ۱: معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + (e^{2x} - 1) y' - 2y = 0$ مفروض است. چنان‌چه بخواهیم جواب این معادله دیفرانسیل را به فرم سری توانی حول نقطه $x = 0$ بنویسیم، ریشه‌های معادله مشخصه به روش فروبینیوس کدام است؟

حل:

$$y'' + \frac{e^{2x}-1}{x^2} y' - \frac{2}{x^2} y = 0 \Rightarrow P(x) = \frac{e^{2x}-1}{x^2}\ ; Q(x) = \frac{-2}{x^2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} P(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{2x} = \infty \\ &\lim_{x\to 0} Q(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{x^2} = -\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ است بدیهی است نقطه فوق از نوع غیر عادی

حال باید بررسی کنیم که نقطه $x = 0$ از نوع تکین منظم است یا نامنظم:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} x.P(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{e^{2x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2 \\ &\lim_{x\to 0} x^2.Q(x) = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{-2}{x^2} = -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ است پس نقطه $x = 0$ از نوع تکین منظم

پس برای حل معادله فوق می‌توانیم از روش فروبینیوس استفاده کنیم و برای استفاده از روش فروبینیوس باید معادله مشخصه را تشکیل دهیم و برای تشکیل معادله مشخصه باید ضرایب B,A را تعیین کنیم:

$$A=\lim_{x\to 0} x.P(x)=2$$
$$B=\lim_{x\to 0} x^2.Q(x)=-2$$

معادله مشخصه: $r^2+(A-1)r+B=0 \Rightarrow r^2+r-2=0 \Rightarrow r_1=-2;r_2=1$

بحث اضافی: اگر بخواهیم جواب را به صورت سری توانی حول $x_0=0$ بنویسیم از آن‌جا که تفاضل دو ریشه عدد صحیح می‌باشد، داریم:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \quad ; \quad y_2(x)=ky_1 Lnx+\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2}$$

مثال ۲: ساختار پایه‌های جواب معادله دیفرانسیل $x^2y''-\frac{\sin 2x}{3}y'+(x^2+3x)y=0$ به صورت سری توانی حول نقطه $x_0=0$ چگونه خواهد بود؟

حل: با توجه به حل مشابه این مثال نسبت به مثال ۱ برای تعیین این‌که نقطه $x_0=0$ تکین منظم است یا نامنظم از بحث اضافی اجتناب می‌کنیم و به سراغ پیدا کردن ضرایب ثابت B,A معادله مشخصه می رویم:

$$x^2y''-\frac{\sin 2x}{3}y'+(x^2+3x)y=0 \Rightarrow P(x)=\frac{-\sin 2x}{3x^2} \;;Q(x)=\frac{x^2+3x}{x^2}$$

$$\begin{cases} A=\lim_{x\to 0} x.P(x)=\lim_{x\to 0} x.\frac{-\sin 2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x}{3x} \xrightarrow{H} A=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos 2x}{3}=-\frac{2}{3} \\ B=\lim_{x\to 0} x^2.Q(x)=\lim_{x\to 0} x^2.\frac{x^2+3x}{x^2}=\lim_{x\to 0} x^2+3x=0 \end{cases}$$

معادله مشخصه: $r^2+(A-1)r+B=0 \Rightarrow r^2+\left(-\frac{2}{3}-1\right)r=0 \Rightarrow r_1=0;r_2=+\frac{5}{3}$

از آن‌جا که تفاضل دو ریشه عددی صحیح نمی‌باشد لذا خواهیم داشت:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{5}{3}}=x^{\frac{5}{3}}.\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$$
$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

مثال ۳: برای معادله دیفرانسیل $2x^2y''+(-x)y'+(x+1)y=0$ فرم پایه‌های جواب به صورت سری توانی حول نقطه $x=0$ چگونه است؟

حل:

$$2x^2y''-xy'+(x+1)y=0 \Rightarrow y''-\frac{x}{2x^2}y'+\frac{x+1}{2x^2}y=0 \Rightarrow P(x)=\frac{-1}{2x};Q(x)=\frac{x+1}{2x^2}$$

$$\begin{cases} A=\lim_{x\to 0} x.p(x)=\lim_{x\to 0} x.\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2} \\ B=\lim_{x\to 0} x^2.Q(x)=\lim_{x\to 0} x^2.\frac{x+1}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

معادله مشخصه $r^2+(A-1)r+B=0 \Rightarrow r^2+\left(-\frac{1}{2}-1\right)r+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow$: $r_1=1\ ;\ r_2=\frac{1}{2}$

از آن‌جا که تفاضل دو ریشه عددی صحیح نمی‌باشد، لذا خواهیم داشت:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

مثال ۴: دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل $x^2y''+3xy'+(1+x)y=0\ ;\ x>0$ به کدام صورت است؟

حل: از آن‌جا که نقطه $x_0=0$ یک نقطه منفرد منظم است به سراغ پیدا کردن ضرایب ثابت B, A معادله مشخصه می‌پردازیم:

$$x^2y''+3xy'+(1+x)y=0 \Rightarrow P(x)=\frac{3x}{x^2}\ \ ;\ Q(x)=\frac{1+x}{x^2}$$

$$\begin{cases} A=\lim\limits_{x\to 0} x.P(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{x^2}=3 \\ B=\lim\limits_{x\to 0} x^2.Q(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1+x)}{x^2}=1 \end{cases}$$

معادله مشخصه: $r^2+(A-1)r+B=0 \Rightarrow r^2+2r+1=0 \Rightarrow (r+1)^2=0 \Rightarrow r_1=-1\ ;\ r_2=-1$

از آن‌جا که معادله مشخصه فوق دارای ریشه مضاعف است لذا داریم:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} \Rightarrow y_1(x)=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_2(x)=y_1(x).\ln x+\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} \Rightarrow y_2(x)=y_1(x).\ln x+x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n.x^n$$

۴) معادله دیفرانسیل لژاندر:

یک معادله دیفرانسیل لژاندر به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{(1-x^2)y''-2xy'+m(m+1)y=0}$$

طبیعی است $x_0=0$ برای این معادله دیفرانسیل یک نقطه عادی است و چنان‌چه جواب این معادلـه را بـه صـورت $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بنویسیم به جوابی به فرم زیر خواهیم رسید:

$$y=a_0\underbrace{\left[\text{سری توانی نامتناهی شامل توان‌های زوج}\right]}_{h_m(x)}+a_1\underbrace{\left[\text{سری توانی نامتناهی شامل توان‌های فرد}\right]}_{q_m(x)}$$

$$\boxed{y=a_0 h_m(x)+a_1 q_m(x)}$$

اما آن‌چه اهمیت دارد تعیین m است زیرا فرم جواب بستگی به مقدار m است.

حالت اول: برای m های غیر صحیح هر دوپایه جواب دارای تعدادجملات نامتناهی هستند.

حالت دوم: اگر m زوج باشد پایه $h_m(x)$ تبدیل به یک چند جمله‌ای از درجه m با تعداد جملات محدود می‌شود و تعداد جملات با توان فرد نامحدود است ($q_m(x)$ سری نامتناهی باقی می‌ماند).

حالت سوم: اگر m فرد باشد پایه $q_m(x)$ تبدیل به یک چند جمله‌ای از درجه m با تعداد جملات محدود می‌شود و تعداد جملات با توان زوج نامحدود است ($h_m(x)$ سری نامتناهی باقی می‌ماند).

نکته: در حالت دوم و سوم به آن پایه از جواب که دارای تعداد جملات محدود است چند جمله‌ای لژاندر می‌گوییم و آن را با $P_n(x)$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۱: بدیهی است تمام چند جمله‌ای‌های زوج لژاندر توابعی زوج و تمام چند جمله‌ای‌های فرد لژاندر توابعی فرد هستند.

نکته ۲: در مورد چند جمله‌ای‌های لژاندر $P_n(x)$ روابط زیر صادق است:

۱) خاصیت تعامد چند جمله‌ای لژاندر:

$$\int_{-1}^{+1} p_m(x).p_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \dfrac{2}{2m+1} & m=n\end{cases}$$

۲) $p_m(1)=1$

۳) $p_m(-1)=(-1)^m$

۴) $p_m(-x)=(-1)^m p_m(x)$

نکته ۳: قضیه: اگر تابع $f(x)$ در شرایط قضیه دریکله در بازه (-1,1) صدق کند (در فاصله $-1<x<1$ پیوسته تکه‌ای بوده و در هر نقطه از این بازه مشتق چپ و راست داشته باشد) آن‌گاه در هر نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ در بازه $(-1,1)$ داریم:

$$\boxed{f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m p_m \quad ; c_m=\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x).p_m(x)\,dx}$$

و در هر نقطه ناپیوستگی تابع سری فوق به $\dfrac{\left[f(x^+)+f(x^-)\right]}{2}$ همگرا خواهد بود.

مسایل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

$$1)\left(1-x^2\right)y''-2xy'+30y=0$$

حل: ابتدا باید m معادله را به‌دست آوریم تا از روی آن جواب را تشخیص دهیم:

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+30y=0\Rightarrow\left(1-x^2\right)y''-2xy'+5(5+1)y=0\Rightarrow m=5$$

پس با توجه به مقدار m که عددی فرد است جواب معادله لژاندر بالا از حالت سوم پیروی می‌کند:

$$m=5\Rightarrow\begin{cases}h_m(x)=\quad x \quad \text{یک سری نامتناهی شامل توان‌های زوج}\\ q_m(x)=\quad x \quad \text{یک چند جمله‌ای درجه پنجم شامل توان های فرد}=P_5(x)\end{cases}$$

2) $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\frac{3}{4}y=0$

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\frac{3}{4}y=0 \Rightarrow \left(1-x^2\right)y''-2xy'+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)y=0 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

با توجه به این‌که مقدار m عددی صحیح نیست فرم جواب معادله لژاندر از حالت ۱ پیروی می‌کند:

معادله فوق دارای دو پایه جواب است که یکی دارای جملات با توان زوج ودیگری جملات با توان فرد است و تعداد جملات هر دو نامحدود است.

3) $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+420y=0$

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+420y=0 \Rightarrow \left(1-x^2\right)y''-2xy'+20(20+1)y=0 \Rightarrow m=20$$

با توجه به این‌که m عددی زوج است جواب معادله لژاندر بالا از حالت دوم پیروی می‌کند:

$$m=20 \Rightarrow \begin{cases} h_m(x)= \text{یک چند جمله‌ای درجه 20 با توان‌های زوج } x = p_{20}(x) \\ q_m(x)= \text{یک سری نامتناهی شامل توان‌های فرد } x \end{cases}$$

نکته: چند جمله‌ای‌های لژاندر از فرمول ردریگس به‌دست می‌آید:

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m.m!}\frac{d^m}{dx^m}\left(\left(x^2-1\right)^m\right)$$

مثلاً چند $P_m(x)$ بکار رفته در بالا را به‌دست می‌آوریم:

$$P_0(x)=\frac{1}{2^0.0!}\frac{d^0}{dx^0}\left(\left(x^2-1\right)^0\right)=1\ ;\ P_1(x)=\frac{1}{2^1.1!}\frac{d^1}{dx^1}\left(\left(x^2-1\right)^1\right)=\frac{2x}{2}=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2^2.2!}\frac{d^2}{dx^2}\left(\left(x^2-1\right)^2\right)=\frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^4-2x^2+1\right)=\frac{1}{8}\left(\left(4x^3-4x\right)'\right)=\frac{1}{8}\left(12x^2-4\right)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

مثال ۲: چند جمله‌ای $f(x)=x^4$ را بر حسب چند جمله‌ای‌های لژاندر بیان کنید.

راه ۱: چون چند جمله‌ای فوق از درجه چهارم می‌باشد لذا خواهیم داشت:

$$x^4=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x)+c_4p_4(x)$$

حال باید با توجه به نکته ۳ مقدار c_nها را پیدا کنیم:

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^4\right)(1)dx=\frac{1}{5}$$

$$c_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^4\right)(x)dx=0$$

$$c_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^4\right)\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{4}{7}$$

$$c_3=\frac{7}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^4\right)\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)dx=0$$

$$c_4=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^4\right)\left(\frac{35}{8}x^4-\frac{30}{8}x^2+\frac{3}{8}\right)dx=\frac{8}{35}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$x^4=\frac{1}{5}p_0(x)+\frac{4}{7}p_2(x)+\frac{8}{35}p_4(x)$$

راه ۲: چون چند جمله‌ای فوق از درجه چهارم می‌باشد لذا خواهیم داشت:

$$x^4=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x)+c_4p_4(x) \qquad *$$

مقدار $p_4(x),p_3(x),p_2(x),p_1(x)$ را با توجه به نکته گفته شده در مثال قبل می‌توانیم به‌دست آوریم:

$$p_0(x)=(1)\ ;\ p_1(x)=x;\ p_2(x)=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right);\ p_3(x)=\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right);\ p_4(x)=\left(\frac{35}{8}x^4-\frac{30}{8}x^2+\frac{3}{8}\right)$$

حال با قرار دادن مقادیر فوق در رابطه * و مساوی قرار دادن ضرایب x خواهیم داشت:

$$x^4=c_0+c_1x+c_2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+c_3\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)+c_4\left(\frac{35}{8}x^4-\frac{30}{8}x^2+\frac{3}{8}\right)$$

$$\begin{cases} x^4 \ \text{ضریب}: \frac{35}{8}c_4=1\Rightarrow c_4=\frac{8}{35} \\ x^3 \ \text{ضریب}: \frac{5}{2}c_3=0\Rightarrow c_3=0 \\ x^2 \ \text{ضریب}: \frac{-30}{8}c_4+\frac{3}{2}c_2=0\Rightarrow c_2=\frac{4}{7} \\ x \ \text{ضریب}: \frac{-3}{2}c_3+c_1=0\Rightarrow c_1=0 \\ x^0 \ \text{ضریب}: c_0-\frac{1}{2}c_2+\frac{3}{8}c_4=0\Rightarrow c_0=\frac{1}{5} \end{cases}$$

پس با جایگزینی ضرایب فوق در معادله (*) خواهیم داشت:

$$x^4=\frac{1}{5}p_0(x)+\frac{4}{7}p_2(x)+\frac{8}{35}p_4(x)$$

مثال ۳: اگر $p_n(x)$ یک چند جمله‌ای لژاندر باشد مقدار $\int_{-1}^{1}(x+1)p_0(x)dx$ را بیابید.

با توجه به نکته گفته شده در مثال ۲ می‌دانیم $p_0(x)=1$ لذا خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^{1}(x+1)p_0(x)dx=\int_{-1}^{1}(x+1).(1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{1}=2$$

مثال ۴: اگر $p_m(x)$ مبین چند جمله‌ای‌های لژاندر باشد حاصل انتگرال $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}p_{2k+1}(x).(x^4+\cos x)dx$ را بیابید.

با توجه به این‌که چند جمله‌ای $p_{2k+1}(x)$ یک چند جمله‌ای فرد است وتابع $(x^4+\cos x)$ یک تابع زوج است و ضرب یک تابع زوج و فرد یک تابع فرد است، حاصل انتگرال در بازه متقارن صفر است:

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\underbrace{p_{2k+1}(x)}_{\text{فرد}}.\underbrace{(x^4+\cos x)}_{\text{زوج}}.dx=0$$

مثال ۵: اگر $p_m(x)$ مبین چند جمله‌ای لژاندر باشد حاصل انتگرال $\int_{-1}^{1}x^2.p_3(x)dx$ را بیابید.

حل: با توجه به این‌که چند جمله‌ای $p_3(x)$، یک تابع فرد است و تابع (x^2) یک تابع زوج است و حاصل‌ضرب دو تابع فرد و زوج، فرد است، حاصل انتگرال در بازه متقارن صفر است:

$$\int_{-1}^{1}\underbrace{x^2}_{\text{زوج}}.\underbrace{P_3(x)}_{\text{فرد}}dx=0$$

مثال ۶: می‌دانیم y_1 جوابی به فرم چند جمله‌ای برای معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+30y=0$ و y_2 جوابی به صورت چند جمله‌ای برای معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+56y=0$ می‌باشند؛ حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$A=\int_{-1}^{+1} y_1.y_2\,dx$

ابتدا باید فرم جواب دو معادله فوق را به‌دست آوریم:

$(1-x^2)y''-2xy'+30y=0 \Rightarrow (1-x^2)y''-2xy'+5(5+1)y=0 \Rightarrow m=5$

پس با توجه به این‌که $m=5$ یک عدد فرد است، خواهیم داشت: $y_1=P_5(x)$

$(1-x^2)y''-2xy'+56y=0 \Rightarrow (1-x^2)y''-2xy'+7(7+1)y=0 \Rightarrow m=7$

پس با توجه به این‌که $m=7$ یک عدد فرد است، لذا خواهیم داشت.

$y_2=P_7(x)$

$A=\int_{-1}^{+1} y_1.y_2\,dx=\int_{-1}^{+1} P_5(x).P_7(x)dx \xrightarrow{\text{با توجه به نکته ۲ چون } m\neq n \text{ است.}} A=0$

۵) معادله دیفرانسیل بسل:

معادله دیفرانسیل بسل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^2y''+xy'+(x^2-\upsilon^2)y=0$$

برای به‌دست آوردن جواب حول نقطه $x_0=0$ که یک نقطه تکین (منفرد) منظم است کافی است جواب را به فرم $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^{n+r}$ در نظر گرفته و با جایگذاری y و مشتقاتش در معادله، (با استفاده از روش فروبنیوس) مقدار r را به‌دست آوریم:

$$\boxed{\begin{array}{l} r^2+(a_0-1)r+b_0=0 \Rightarrow a_0=1;b_0=-\upsilon^2 \\ r^2-\upsilon^2=0 \Rightarrow r_1=\upsilon;r_2=-\upsilon \end{array}}$$

می‌توان دید ریشه‌های معادله مشخصه $\pm\upsilon$ خواهد بود. اگر جواب معادله را با روش فروبینیوس پیدا کنیم به دو سری توانی نامتناهی پیچیده می‌رسیم:

$$\boxed{y(x)=cJ_\upsilon(x)+kJ_{-\upsilon}(x)}$$

نکته بسیار مهم این‌جا است که اگر υ یک عدد غیرطبیعی باشد می‌توان جواب معادله بسل را به جواب عمومی ارایه شده ارجاع داد.در حالت کلی جواب فوق نمی‌تواند توصیف کننده جواب عمومی معادله بسل مورد نظر باشد، زیرا وقتی υ عدد طبیعی باشد داریم:

$J_{-\upsilon}(x)=(-1)^{\upsilon}J_\upsilon(x)$

لذا پایه جواب دوم معادله بسل مورد نظر را به طریق دیگری پیدا می‌کنند، جواب عمومی به‌دست آمده برای تمام موارد υ به‌کار می‌رود:

$$\boxed{y(x)=cJ_\upsilon(x)+k\,Y_\upsilon(x)}$$

نکته: در معادله فوق جواب فروبینیوسی جواب $Y_\upsilon(x)$ طبیعت لگاریتمی دارد.

$J_\upsilon(x)$: تابع بسل نوع اول از مرتبه υ، جواب معادله بسل بوده و وقتی که x به سمت صفر میل می‌کند این تابع محدود (کراندار) می‌باشد.

$Y_\upsilon(x)$: تابع بسل نوع دوم از مرتبه υ یا تابع نیومن، جواب معادله بسل بوده و وقتی که x به سمت صفر میل می‌کند نامحدود (بی‌کران) و مقدار آن $-\infty$ می‌باشد.

نکات تکمیلی:

نکته ۱: می‌توان نشان داد در معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'+\left(\lambda^2x^2-\upsilon^2\right)y=0$ با تغییر متغیر $u=\lambda x$ به یک معادله بسل استاندارد می‌رسیم که در نهایت جواب عمومی به فرم زیر خواهد بود:

$$\boxed{y(x)=AJ_\upsilon(\lambda x)+BY_\upsilon(\lambda x)}$$

نکته ۲: می‌توان نشان داد در معادله دیفرانسیل $x^2y''+(2k+1)xy'+(m^2x^{2r}+n^2)y=0$، با فرض $s=\sqrt{k^2-n^2}$ جواب عمومی به فرم زیر است:

$$\boxed{y(x)=x^{-k}\left(AJ_{\frac{s}{r}}\left(\frac{mx^r}{r}\right)+BY_{\frac{s}{r}}\left(\frac{mx^r}{r}\right)\right)}$$

نکته ۳: روابط زیر همیشه برقرار است:

$$\boxed{J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\ ;\ J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x}$$

نکته ۴: خواص توابع نوع اول عبارتند از:

$$\boxed{\begin{array}{ll}
1)\ J_{-\upsilon}(x)=(-1)^\upsilon J_\upsilon(x)\quad(\upsilon\in N) & 2)\ \left(x^\upsilon J_\upsilon(x)\right)'=x^\upsilon J_{\upsilon-1}(x)\\
3)\ \left(x^{-\upsilon}J_\upsilon(x)\right)'=-x^{-\upsilon}J_{\upsilon+1}(x) & 4)\ J_{\upsilon-1}(x)+J_{\upsilon+1}(x)=\dfrac{2\upsilon}{x}J_\upsilon(x)\\
5)\ J_{\upsilon-1}(x)-J_{\upsilon+1}(x)=2J_\upsilon'(x) & 6)\ \int x^\upsilon J_{\upsilon-1}(x)dx=x^\upsilon J_\upsilon(x)+c\\
7)\ \int x^{-\upsilon}J_{\upsilon+1}(x)dx=-x^{-\upsilon}J_\upsilon(x)+c & 8)\ \int J_{\upsilon+1}(x)dx=\int J_{\upsilon-1}(x)dx-2J_\upsilon(x)
\end{array}}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را برحسب توابع بسل بنویسید.

$$1)\ x^2y''+xy'+\left(\frac{x^2}{9}-16\right)y=0$$

در این مسئله داریم:

$$\left.\begin{array}{l}
2k+1=1\Rightarrow k=0\\
m^2=\dfrac{1}{9}\Rightarrow m=\dfrac{1}{3}\\
2r=2\Rightarrow r=1\\
n^2=-16
\end{array}\right\}\Rightarrow s=\sqrt{k^2-n^2}=\sqrt{0+16}=4$$

پس خواهیم داشت:

$$y(x)=x^{-0}\left(AJ_{\frac{4}{1}}\left(\frac{\frac{1}{3}x^{1}}{1}\right)+BY_{\frac{4}{1}}\left(\frac{\frac{1}{3}x^{1}}{1}\right)\right)\Rightarrow\ y(x)=AJ_{4}\left(\frac{x}{3}\right)+BY_{4}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$2)\ x^{2}y''+3xy'+xy=0$$

در این مسئله داریم:

$$\left.\begin{array}{l}2k+1=3\Rightarrow k=1\\ m^{2}=1\Rightarrow m=1\\ 2r=1\Rightarrow r=\dfrac{1}{2}\\ n^{2}=0\end{array}\right\}\Rightarrow s=\sqrt{k^{2}-n^{2}}=\sqrt{1-0}=1$$

پس خواهیم داشت:

$$y(x)=x^{-1}\left(AJ_{\frac{1}{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+BY_{\frac{1}{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\right)\Rightarrow\ y(x)=x^{-1}\left(AJ_{2}\left(2\sqrt{x}\right)+BY_{2}\left(2\sqrt{x}\right)\right)$$

$$3)\ x^{2}y''+5xy'+\left(16x^{6}-3\right)y=0$$

در این مسئله داریم:

$$\left.\begin{array}{l}2k+1=5\Rightarrow k=2\\ m^{2}=16\Rightarrow m=4\\ 2r=6\Rightarrow r=3\\ n^{2}=-3\end{array}\right\}\Rightarrow s=\sqrt{k^{2}-n^{2}}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$$

پس خواهیم داشت:

$$y(x)=x^{-2}\left(AJ_{\frac{\sqrt{7}}{3}}\left(\frac{4x^{3}}{3}\right)+BY_{\frac{\sqrt{7}}{3}}\left(\frac{4x^{3}}{3}\right)\right)$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال‌های زیر:

$$I_{1}=\int x^{4}J_{1}(x)dx$$

$$\int x^{4}J_{1}(x)dx=\int \underbrace{x^{2}}_{u}.\underbrace{x^{2}J_{1}(x).dx}_{dv}$$

با اعمال روش جز به جز خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x^{2}=u\\ x^{2}J_{1}(x).dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2x\\ v=\int x^{2}J_{1}(x)dx\xrightarrow{\text{نکته ۴ شماره}}v=x^{2}J_{2}(x)\end{cases}$$

$$I_{1}=u.v-\int v.du=x^{4}J_{2}(x)-\int 2x^{3}J_{2}(x)\xrightarrow[\text{بدست می‌آید}\quad \int 2x^{3}J_{2}(x)dx]{\text{با توجه به نکته ۴ شماره ۶ مقدار}}I_{1}=x^{4}J_{2}(x)-2x^{3}J_{3}(x)+c$$

$$I_{2}=\int_{0}^{1}x^{3}J_{0}(x)dx$$

$$I_{2}=\int_{0}^{1}x^{3}J_{0}(x)dx=\int_{0}^{1}\underbrace{x^{2}}_{u}\underbrace{x^{1}J_{0}(x)dx}_{dv}$$

با اعمال روش جز به جز داریم:

$$\begin{cases} x^2 = u \\ x^1 J_0(x)dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x \\ v = \int x^1 . J_0(x)dx \xrightarrow{\text{با توجه به نکته ۴ شماره ۶}} v = x^1 J_1(x) \end{cases}$$

$$I_2 = \int_0^1 x^2.(xJ_0(x))dx = \left[u.v - \int v.du\right]\Big|_0^1 = \left[x^3.J_1(x) - \int 2x^2.J_1(x)dx\right]\Big|_0^1 \xrightarrow[\text{را به‌دست می‌آوریم } \int 2x^2 J_1(x)dx]{\text{با توجه به نکته ۴ شماره ۶ مقدار}}$$

$$I_2 = \left[x^3 J_1(x) - 2x^2.J_2(x)\right]\Big|_0^1 \Rightarrow I_2 = J_1(1) - 2J_2(1)$$

$$I_3 = \int J_3(x)dx$$

با توجه به نکته ۴ و فرمول ۸ داریم:

$$I_3 = \int J_3(x)dx = \int J_1(x)dx - 2J_2(x)$$

از طرفی با توجه به فرمول ۷ نکته ۴ مقدار $\int x^\circ J_1(x)dx$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\int x^\circ J_1(x)dx = -x^\circ J_0(x) + c$$

پس خواهیم داشت:

$$I_3 = -J_0(x) - 2J_2(x) + c$$

مثال۳: برای تابع بسل نوع اول داریم: $\frac{d}{dx}\left[x^\alpha J_\alpha(x)\right] = x^\alpha J_{\alpha-1}(x)$ مقدار $\frac{d(J_\alpha(x))}{dx}$ را بیابید:

$$\frac{d}{dx}\left[x^\alpha J_\alpha(x)\right] = x^\alpha J_{\alpha-1}(x) \Rightarrow \alpha x^{\alpha-1} J_\alpha(x) + x^\alpha . \frac{d(J_\alpha(x))}{dx} = x^\alpha . J_{\alpha-1}(x) \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{x^\alpha \text{ طرفین را بر}}$$

$$\frac{d(J_\alpha(x))}{dx} = J_{\alpha-1}(x) - \frac{\alpha}{x} J_\alpha(x)$$

فصل چهارم

تبدیل لاپلاس

۱) تعاریف اولیه

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که آن را با نماد $L[f(t)]$ یا $F(s)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_0^\infty e^{-st}.f(t)\,dt}$$

;

$$\boxed{f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]}$$

تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس $f(t)$ و تابع $f(t)$ را تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)$ می‌گوییم.

تبدیل لاپلاس برخی توابع مهم عبارتند از (α یک عدد ثابت و n یک عدد طبیعی فرض شده است):

	$f(t)$	$F(s)$	شروط
1	$f(t)=a$	$F(s)=\frac{a}{s}$	$s>0$
2	$f(t)=e^{at}$	$F(s)=\frac{1}{s-a}$	$s>a$
3	$f(t)=\cos at$	$F(s)=\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>a$
4	$f(t)=\sin at$	$F(s)=\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>a$
5	$f(t)=\cosh at$	$F(s)=\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
6	$f(t)=\sinh at$	$F(s)=\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
7	$f(t)=t^n$	$F(s)=\frac{n!}{s^{n+1}}$	$n\in N\ ;\ s>0$
8	$f(t)=t^a$	$F(s)=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$a>-1;\ s>0$
9	$f(t)=J_0(at)$	$F(s)=\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$s>0$
10	$f(t)=J_n(at)$	$F(s)=\frac{\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^n}{a^n\sqrt{s^2+a^2}}$	$s>0$
11	$f(t)=u(t-a)$	$F(s)=\frac{e^{-as}}{s}$	$s>0$
12	$f(t)=\delta(t-a)$	$F(s)=e^{-as}$	$s>0$

یادآوری:

با توجه به این‌که در مبحث تبدیل لاپلاس، از توابع گاما و خواص آن به وفور استفاده می‌شود، در این‌جا به یادآوری نکاتی خاص از تابع گاما می‌پردازیم.

تابع گاما در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-x}.x^{a-1}dx}$$

ثابت می‌شود تابع فوق همگرا است اگر و فقط اگر $a>0$ باشد.

نکات زیر را به خاطر داشته باشید:

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)\ ;\quad \Gamma(a+1)=a!\ ;\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

چند مثال حل شده درباره تابع گاما:

مثال ۱: مقدار $\Gamma(4)$ را به‌دست آورید:

حل: با توجه به نکات فوق داریم:

$$\Gamma(4)=\Gamma(3+1)=3\Gamma(3)=3\times2\ \Gamma(2)=3\times2\times1\Gamma(1)=(3)!$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال روبرو: $I=\int_0^\infty x^2.e^{-2x^4}dx$

حل: با فرض: $2x^4=t;8x^3dx=dt$

$$I=\int_0^\infty x^2.e^{-2x^4}dx=\frac{1}{8}\int_0^\infty\left[\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2.e^{-t}.\frac{1}{\left[\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^3}dt=\frac{1}{8}\int_0^\infty\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}e^{-t}dt=\frac{2^{\frac{1}{4}}}{8}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

از بحث‌های فوق دو نوع مسئله زیر قابل حل است:

۱) در محاسبه لاپلاس معکوس توابع کسری که در قالب یک کسر، نوشته شده و صورت و مخرج، دو چند جمله‌ای برحسب s می‌باشد، چنان‌چه بتوانیم تابع مذکور را با روش تجزیه کسرها، به صورت مجموع کسرهای جزییٔ بنویسیم، معمولاً محاسبه لاپلاس معکوس به سادگی صورت می‌گیرد.

۲) در بسیاری از مواقع برای محاسبه انتگرال‌های ناسره، به خصوص مسایلی که در قالب کلی $\int_0^\infty$ بیان می‌شود، استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس، می‌تواند حل مسئله را به سادگی امکان‌پذیر کند.

مسایل حل شده:

مثال ۱: لاپلاس معکوس توابع زیر راپیدا کنید؟

$$1)\ F(s)=\frac{1}{s^2+25}$$

حل: با توجه به فرمول ۴ از جدول تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

$$F(s)=\frac{1}{s^2+25}\Rightarrow F(s)=\frac{1}{5}\frac{5}{s^2+25}\Rightarrow f(t)=\frac{1}{5}\sin 5t$$

$$2)\ F(s)=\frac{3s+5}{s^2+2s-3}$$

حل: ابتدا باید کسر فوق را با استفاده از روش تجزیه کسرها، ساده کنیم:

$$F(s)=\frac{3s+5}{s^2+2s-3}=\frac{3s+5}{(s-1)(s+3)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+3}\Rightarrow\begin{cases}A+B=3\\3A-B=5\end{cases}\Rightarrow A=2\ ;\ B=1$$

$$F(s)=\frac{2}{s-1}+\frac{1}{s+3}\xrightarrow{\text{با توجه به فرمول ۲}}f(t)=2e^{t}+e^{-3t}$$

$$3)\ F(s)=\frac{2s^2+1}{s^{\frac{5}{2}}}$$

$$F(s)=\frac{2s^2+1}{s^{\frac{5}{2}}}\longrightarrow F(s)=2s^{-\frac{1}{2}}+s^{-\frac{5}{2}}\xrightarrow[\text{و خواص تابع گاما}]{\text{طبق فرمول شماره ۸}}F(s)=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}.\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}$$

$$\longrightarrow f(t)=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}t^{\frac{3}{2}}\longrightarrow f(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{-\frac{1}{2}}+\frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}$$

یادآوری:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\longrightarrow\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\to\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال‌های زیر:

$$I_1)\ \int_0^{\infty}\left(2x^5+3x\right).e^{-3x}dx$$

حل: بدیهی است انتگرال فوق، همان تعریف تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=2x^5+3x$ به ازای $s=3$ است. لذا داریم:

$$\int_0^{\infty}\left(2x^5+3x\right).e^{-3x}\,dx=L\left\{\left(2x^5+3x\right)\right\}\Big|_{s=3}=2.\frac{5!}{s^6}+3.\frac{1!}{s^2}\Big|_{s=3}=\frac{240}{3^6}+\frac{1}{3}=\frac{483}{729}$$

$I_2)\ \int_0^\infty (\cos x + \sin 2x).e^{-3x}dx$

حل: همانند مثال قبل، بدیهی است انتگرال فوق، همان تعریف تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = (\cos x + \sin 2x)$ به ازای $s = 3$ است.

$$\int_0^\infty (\cos x + \sin 2x).e^{-3x}dx = L\{\cos x + \sin 2x\}\Big|_{s=3} = \left\{\frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+4}\right\}\Bigg|_{s=3} = \frac{3}{10} + \frac{2}{13} = \frac{59}{130}$$

$$I_3) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$$

حل: با تغییر متغیر $x = e^{-t}$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = e^{-t} \overset{\text{مشتق}}{\Rightarrow} dx = -e^{-t}dt \\ x = 0^+ \longrightarrow t = \infty \\ x = 1 \longrightarrow t = 0 \end{cases}$$

لذا انتگرال فوق با تغییر متغیر مذکور به انتگرال زیر تبدیل خواهد شد:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \int_\infty^0 \frac{-e^{-t}dt}{\sqrt{-\ln e^{-t}}} = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$$

همانند مثال‌های قبل، انتگرال تغییر یافته فوق، همان تعریف تبدیل لاپلاس تابع $\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ به ازای $s = 1$ است:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = L\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}\Bigg|_{s=1} = L\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\}\Bigg|_{s=1} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_{s=1} = \sqrt{\pi}$$

۲) قضایای تبدیل لاپلاس

۲-۱) قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی:

فرض کنید $L\{f(t)\} = F(s)$ باشد. می‌توان نشان داد:

قضیه مقدار نهایی: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s.F(s)$
قضیه مقدار اولیه: $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s.F(s)$

مسایل حل شده:

مثال ۱: فرض کنید داشته باشیم $F(s) = \frac{e^{-4s} + e^{-s}}{s^2+s+1} + \frac{1}{s}$. مقدار $\lim_{t\to\infty} f(t)$ را به‌دست آورید:

حل: طبق قضیه مقدار نهایی داریم:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s.F(s) = \lim_{s\to 0} s.\left[\frac{e^{-4s} + e^{-s}}{s^2+s+1} + \frac{1}{s}\right] \to \lim_{s\to 0} s\frac{e^{-4s} + e^{-s}}{s^2+s+1} + \frac{s}{s} = 0 + 1 = 1$$

مثال ۲: فرض کنید $F(s)=\frac{2s^2+3}{s^3+s^2+s+7}$. مقدار $\lim_{t\to0} f(t)$ را به‌دست آورید:

حل: طبق قضیه مقدار اولیه داریم:

$$\lim_{t\to0} f(t)=\lim_{s\to\infty} s.F(s)=\lim_{s\to\infty} s\left[\frac{2s^2+3}{s^3+s^2+s+7}\right]=\lim_{s\to\infty}\left[\frac{2s^3+3s}{s^3+s^2+s+7}\right]=2$$

مثال ۳: فرض کنید $F(s)=\frac{2s+1}{e^s}+\frac{2}{s}$. مقدار $\lim_{t\to\infty} f(t)$ را بیابید.

حل: طبق قضیه مقدار نهایی داریم:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to0} s.F(s)=\lim_{s\to0} s.\left[\frac{2s+1}{e^s}+\frac{2}{s}\right]=2$$

۲-۲) قضیه تبدیل لاپلاس تابع متناوب:

فرض کنید تابع $f(t)$ برای t های مثبت، تابعی متناوب بادوره تناوب p باشد. می‌توان نشان داد:

$$\boxed{F(s)=\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}.f(t)\,dt}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: فرض کنید داشته باشیم $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le\pi\\ -\sin x & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$; $f(x+2\pi)=f(x)$ تبدیل لاپلاس این تابع را به‌دست آورید.

حل: چون f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π است:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} e^{-st}.f(t)\,dt=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\int_0^{\pi} e^{-st}.(0)\,dt+\int_\pi^{2\pi} e^{-st}.(-\sin t)\,dt\right]$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}.\int_\pi^{2\pi}-\sin t.e^{-st}\,dt=\frac{+e^{-\pi s}\left(e^{-\pi s}+1\right)}{\left(1-e^{-\pi s}\right)\left(1+e^{-\pi s}\right)\left(1+s^2\right)}=\frac{e^{-\pi s}}{\left(1+s^2\right)\left(1-e^{-\pi s}\right)}$$

یادآوری:

برای محاسبه انتگرال فوق باید از روش جز به جز استفاده کنیم لذا خواهیم داشت:

$$I=\int \sin t.e^{-st}dt=-\cos t.e^{-st}-\sin t.se^{-st}-s^2 I\Rightarrow I=\frac{-e^{-st}(\cos t+s.\sin t)}{1+s^2}$$

$$I_1=\int_\pi^{2\pi}\sin t.e^{-st}dt=\left.\frac{-e^{-st}(\cos t+s.\sin t)}{1+s^2}\right|_\pi^{2\pi}=\frac{-\left(e^{-2\pi s}+e^{-\pi s}\right)}{1+s^2}=\frac{-e^{-\pi s}\left(e^{-\pi s}+1\right)}{1+s^2}$$

مشتق		انتگرال
e^{-st}	(+)	$\sin t$
$-se^{-st}$	(-)	$-\cos t$
s^2e^{-st}	(+) $\int$	$-\sin t$

۲-۳) قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات یک تابع:

هرگاه $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد داریم:

$$\boxed{\begin{aligned}&L\{f'(t)\}=s.F(s)-f(0)\\&L\{f''(t)\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)\\&L\{f'''(t)\}=s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)\\&\quad\vdots\qquad\quad\vdots\end{aligned}}$$

و نیز می‌توان نشان داد:

$$\boxed{\begin{aligned}&f(0)=\lim_{s\to\infty}sF(s)\\&f'(0)=\lim_{s\to\infty}s^2F(s)-sf(0)\\&f''(0)=\lim_{s\to\infty}s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)\\&\quad\vdots\quad\ \vdots\end{aligned}}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: فرض کنید $F(s)=\dfrac{2s^3+s^2+3}{s^4+s^3+7}$. مطلوب است محاسبه $f'(0)$:

حل:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty}s.F(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{2s^4+s^3+3s}{s^4+s^3+7}=2$$

$$f'(0)=\lim_{s\to\infty}s^2F(s)-sf(0)=\lim_{s\to\infty}s^2.\frac{2s^3+s^2+3}{s^4+s^3+7}-2s=\lim_{s\to\infty}\frac{2s^5+s^4+3s^2-2s^5-2s^4-14s}{s^4+s^3+7}$$

$$\to\quad f'(0)=\lim_{s\to\infty}\frac{-s^4+3s^2-14s}{s^4+s^3+7}=-1$$

مثال ۲: فرض کنید $L\{\cos\sqrt{t}\}=F(s)$. مطلوب است محاسبه $L\left\{\dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$:

حل:

$$f(0)=1\,;\ \left(\cos\sqrt{t}\right)'=\frac{-\sin\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$$

$$L\{f'(t)\}=s.F(s)-f(0)\to\frac{-1}{2}L\left\{\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}=sF(s)-1\to L\left\{\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}=2-2s.F(s)$$

مثال ۳: معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه زیر را در نظر بگیرید. $\begin{cases}y''+3y'-y=t\\y(0)=1;y'(0)=-1\end{cases}$ تبدیل لاپلاس جواب این معادله دیفرانسیل کدام است؟

حل: با فرض $L\{y(t)\}=Y(s)$ از دو طرف معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$y''+3y'-y=t \to (s^2Y(s)-s\overset{1}{y(0)}-\overset{-1}{y'(0)})+3(sY(s)-\overset{1}{y(0)})-Y(s)=\frac{1}{s^2} \to$$

$$\left(s^2+3s-1\right)Y(s)=\frac{1}{s^2}+s-1+3 \to Y(s)=\frac{s^3+2s^2+1}{s^2\left(s^2+3s-1\right)}$$

مثال ۵: هر گاه $y''-y'+y=t \;;\; y(0)=0;\, y'(0)=0$; آن‌گاه $L\{y\}$ را به‌دست آورید.

حل: از دو طرف معادله فوق لاپلاس می‌گیریم.

$$y''-y'+y=t \to \left(s^2Y(s)-s\overset{0}{Y(0)}-\overset{0}{y'(0)}\right)-\left(sY(s)-\overset{0}{y(0)}\right)+Y(s)=\frac{1}{s^2} \to \left(s^2-s+1\right)Y(s)=\frac{1}{s^2} \to Y(s)=\frac{1}{s^2\left(s^2-s+1\right)}$$

۲-۴) قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال‌های یک تابع:

هر گاه $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد، می‌توان نشان داد:

$$\boxed{L\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\}=\frac{1}{s}F(s)}$$

و در فرم معکوس:

$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}=\int_0^t f(u)\,du}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: تبدیل لاپلاس توابع زیر را به‌دست آورید.

1) $\int_0^t \left(r^3-4\cos r\right)dr$

حل: با استفاده از قضیه فوق خواهیم داشت:

$$L\left[\int_0^t \left(r^3-4\cos r\right)dr\right]=\frac{1}{s}L\left\{r^3-4\cos r\right\}=\frac{1}{s}\left(\frac{3!}{s^4}-\frac{4s}{s^2+1}\right)=\frac{-4s^5+6s^2+6}{s^5\left(s^2+1\right)}$$

2) $\int_0^t \left(x^{\frac{1}{2}}-2\sinh x\right)dx$

حل: با استفاده از قضیه فوق خواهیم داشت:

$$L\left[\int_0^t \left(x^{\frac{1}{2}}-2\sinh x\right)dx\right]=\frac{1}{s}L\left\{x^{\frac{1}{2}}-2\sinh x\right\}=\frac{1}{s}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{s^2-1}\right)$$

یادآوری:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \to \quad L\left[\int_0^t \left(x^{\frac{1}{2}}-2\sinh x\right)dx\right]=\frac{1}{s}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{s^2-1}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\left(s^2-1\right)-4s^{\frac{3}{2}}}{2s^{\frac{5}{2}}\left(s^2-1\right)}$$

مثال ۲: تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

$$1)\ F(s)=\frac{1}{4s^3+s}$$

حل: با استفاده از قضایای فوق در فرم معکوس داریم:

$$F(s)=\frac{1}{s\left(4s^2+1\right)}\rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(4s^2+1\right)}\right\}=\int_0^t \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt=\frac{1}{2}(-2)\cos\frac{t}{2}\Big|_0^t=1-\cos\frac{t}{2}$$

$$2)\ F(s)=\frac{1}{s^2(2s+3)}$$

حل: با استفاده از قضایای فوق داریم:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(2s+3)}\right\}=\int_0^t\left(\int_0^t\frac{1}{2}e^{\frac{-3t}{2}}dt\right)dt=\int_0^t\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-2}{3}\right).e^{\frac{-3}{2}t}\right]\Big|_0^t dt=\frac{-1}{3}\int_0^t\left(e^{\frac{-3}{2}t}-1\right)dt$$

$$=-\frac{1}{3}\left[-\frac{2}{3}e^{\frac{-3}{2}t}-t\right]\Big|_0^t=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}e^{\frac{-3}{2}t}+t-\frac{2}{3}\right]=\frac{2}{9}e^{-\frac{3}{2}t}+\frac{t}{3}-\frac{2}{9}$$

یادآوری:

ما ابتدا باید $L^{-1}\left\{\frac{1}{2s+3}\right\}$ را به‌دست آورده و سپس با استفاده از اثر $\frac{1}{s^2}$ موجود در مسئله لاپلاس معکوس کل را به‌دست آوریم:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{2S+3}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{S+\frac{3}{2}}\right\}\xrightarrow[\text{تبدیل لاپلاس}]{\text{فرمول شماره ۲ صفحه اول}}\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t}$$

۲ـ۵) قضیه اول انتقال:

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد، داریم:

$$\boxed{L\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s)\big|_{s\to(s-a)}=F(s-a)}$$

و در فرم معکوس داریم:

$$\boxed{L^{-1}\left\{F(s-a)\right\}=e^{at}.f(t)}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$1)\ f(t)=\sin 2t.\cos h3t$$

حل:

$$f(t)=\sin 2t\cdot\cos h3t=\sin 2t\cdot\frac{e^{3t}+e^{-3t}}{2}=\frac{1}{2}\left[e^{3t}\cdot\sin 2t+e^{-3t}\cdot\sin 2t\right]$$

$$\rightarrow\ F(s)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\Big|_{s\to(s-3)}+\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\Big|_{s\to(s+3)}\right]\ \rightarrow\ F(s)=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{(s-3)^2+4}+\frac{2}{(s+3)^2+4}\right]$$

$$2)\ f(t)=\int_0^t e^{-2t}.\cos 3t\,dt$$

حل:

$$L\{\cos 3t\}=\frac{s}{s^2+9}\rightarrow L\{e^{-2t}.\cos 3t\}=\frac{s}{s^2+9}\Big|_{s\rightarrow(s+2)}=\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\rightarrow L\{f(t)\}=L\left\{\int_0^t e^{-2t}.\cos 3t\,dt\right\}=$$

$$\frac{1}{s}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right)=\frac{s+2}{s(s+2)^2+9s}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{2s+5}{s^2+s+3}$.

حل: از آن‌جا که مخرج کسر قابل تجزیه به عوامل اول حقیقی نمی‌باشد، لذا با ایجاد مربع کامل در مخرج کسر می‌نویسیم:

$$F(s)=\frac{2s+5}{s^2+s+3}=\frac{2\left(s+\frac{1}{2}\right)+4}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}=\frac{2\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}+\frac{4}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}\ \Rightarrow\ f(t)=2e^{-\frac{1}{2}}\cos\sqrt{\frac{11}{4}}\,t+\frac{8\sqrt{11}}{11}e^{-\frac{1}{2}}\sin\sqrt{\frac{11}{4}}\,t$$

۲-۶) قضیه دوم انتقال:

هر گاه $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد، داریم:

$$\boxed{1:\ L\{u_c(t).f(t-c)\}=e^{-cs}.F(s)}$$

و یا

$$\boxed{2:\ L\{u_c(t).f(t)\}=e^{-cs}L\{f(t+c)\}}$$

و در فرم معکوس داریم:

$$\boxed{L^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}=u_c(t).f(t-c)}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$1)\ f(t)=u_3(t).(4t+1)$$

حل: با توجه به قضیه بالا قسمت ۱، می‌خواهیم فرم مسئله را به صورت فرمول ۱ در بیاوریم. لذا خواهیم داشت:

$$f(t)=u_3(t).(4t+1)\rightarrow f(t)=u_3(t).\{4(t-3)+13\}\xrightarrow[(t-3)\rightarrow T]{\text{فرمول ۱}}F(s)=e^{-3s}.L\{4T+13\}\rightarrow F(s)=e^{-3s}.\left(\frac{4}{s^2}+\frac{13}{s}\right)$$

یک راه‌حل دیگر مسئله فوق این است که مسئله را با استناد به فرمول شماره ۲ حل کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$f(t)=u_3(t).(4t+1)\rightarrow F(s)=e^{-3s}.L\{4(t+3)+1\}\rightarrow F(s)=e^{-3s}.L\{4t+13\}\rightarrow F(s)=e^{-3s}.\left(\frac{4}{s^2}+\frac{13}{s}\right)$$

$$2)\ f(t)=u_2(t).(t^2+3t-1)$$

حل: با توجه به فرمول ۱ قضیه فوق خواهیم داشت:

$$f(t)=u_2(t).\left(t^2+3t-1\right)\xrightarrow[t\to(T-2)]{\text{طبق فرمول ۱}}f(t)=u_2(t).\left\{(t-2)^2+7(t-2)+9\right\}$$

$$\Rightarrow F(s)=e^{-2s}.L\left\{T^2+7T+9\right\}\Rightarrow F(s)=e^{-2s}.\left(\frac{2!}{s^3}+\frac{7}{s^2}+\frac{9}{s}\right)\Rightarrow F(s)=e^{-2s}.\left(\frac{9s^2+7s+2}{s^3}\right)$$

یک راه حل دیگر مسئله فوق این است که، مسئله را با استناد به فرمول شماره ۲ حل کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$f(t)=u_2(t).\left(t^2+3t-1\right)\Rightarrow F(s)=e^{-2s}.L\left((t+2)^2+3(t+2)-1\right)=e^{-2s}.L\left(t^2+7t+9\right)$$

$$\Rightarrow F(s)=e^{-2s}.\left(\frac{2!}{s^3}+\frac{7}{s^2}+\frac{9}{s}\right)\Rightarrow F(s)=e^{-2s}.\left(\frac{9s^2+7s+2}{s^3}\right)$$

3) $f(t)=e^{3t}.u_{\frac{\pi}{2}}(t).\{2\sin t+\cos 2t\}$

حل: مسئله فوق، ادغام قضیه اول و دوم انتقال است. لذا خواهیم داشت:

$$L\left\{u_{\frac{\pi}{2}}(t).\{2\sin t+\cos 2t\}\right\}=e^{\frac{-\pi}{2}s}.L\left\{2\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+\cos 2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=e^{\frac{-\pi}{2}s}.L\{2\cos t-\cos 2t\}=e^{\frac{-\pi}{2}s}.\left(\frac{2s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$L\{f(t)\}\xrightarrow{\text{قضیه اول انتقال}}L\left\{e^{3t}.u_{\frac{\pi}{2}}(t).\{2\sin t+\cos 2t\}\right\}=\left(e^{\frac{-\pi}{2}s}.\frac{s^3+7s}{S^4+5s^2+4}\right)\Bigg|_{s\to(s-3)}$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\}=e^{\frac{-\pi}{2}(s-3)}.\left(\frac{(s-3)^3+7(s-3)}{(s-3)^4+5(s-3)^2+4}\right)$$

مثال ۲: لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

1) $F(s)=\dfrac{e^{-3s}}{s\left(s^2+4\right)}$

حل:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2t\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2+4}\right\}\xrightarrow{\text{قضیه دوم انتقال در فرم معکوس}}=u_3(t).\frac{1}{2}\sin 2(t-3)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s}.\frac{e^{-3s}}{s^2+4}\right\}\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس انتگرال}}=\int_0^t\frac{1}{2}u_3(t).\sin 2(t-3)dt\Rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2}\int_0^t u_3(t).\sin 2(t-3)dt$$

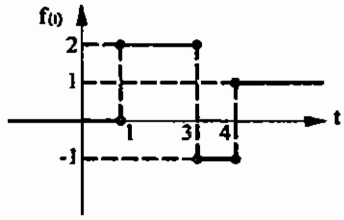
2) $F(s)=\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+5}$

حل:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+5}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$$

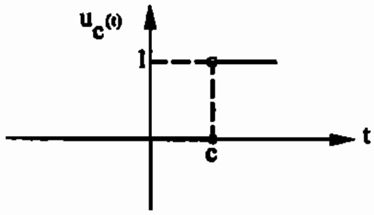
$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+5}\right\}=u_\pi(t).f(t-\pi)=\frac{1}{2}u_\pi(t).e^{(\pi-t)}.\sin 2(t-\pi)=\frac{1}{2}u_\pi(t).e^{(\pi-t)}.\sin 2t$$

مثال ۳: تابع نشان داده شده در شکل را در نظر بگیرید و تبدیل لاپلاس آن را به‌دست آورید.



نکته: همان‌طوری‌که می‌دانیم تابع پله واحد به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$u_c(t)=u(t-c)=\begin{cases}0 & t<c\\ 1 & t>c\end{cases}$$



و می‌توان نشان داد:

$$L\{u_c(t)\}=\frac{e^{-cs}}{s}$$

به طور کلی توابعی را که تغییراتشان به صورت پله‌ای می‌باشد، می‌توان به صورت مجموعه‌ای از توابع پله واحد به صورت نوشت.

با توجه به نکته گفته شده داریم:

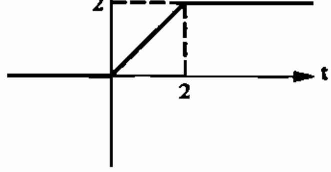
$$f(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2 & 1<t<3\\ -1 & 3<t<4\\ 1 & t>4\end{cases}$$

$$f(t)=2u_1(t)-3u_3(t)+2u_4(t)\rightarrow L\{f(t)\}\xrightarrow{\text{(با توجه به قضیه دوم انتقال)}}F(s)=\frac{2e^{-s}}{s}-\frac{3e^{-3s}}{s}+\frac{2e^{-4s}}{s}$$

مثال ۳: تبدیل لاپلاس تابع زیر پیدا کنید.

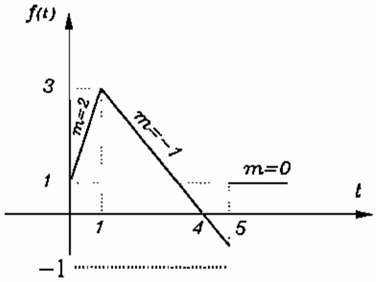
$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0<t<2\\ 2 & t>2\end{cases}$$

حل: ابتدا نمودار تابع فوق را رسم می‌کنیم.



$$f(t)=t.u_0(t)-(t-2)u_2(t)\xrightarrow{\text{قضیه دوم انتقال}}F(s)=e^{-0\times s}.\frac{1}{s^2}-e^{-2s}.\frac{1}{s^2}=\frac{1-e^{2s}}{s^2}$$

مثال ۴: تبدیل لاپلاس تابع نشان داده شده در شکل زیر را مشخص کنید.



حل:

توجه:

اگر در $t=c$ پرشی به اندازه k واحد داشتیم، جمله $k\,u_c(t)$ را اضافه می‌کنیم.

اگر در $t=c$ شیب به اندازه m واحد افزایش یافت، جمله $m(t-c)u_c(t)$ را اضافه می‌کنیم.

$$f(t)=1.u_0(t)+2(t-0).u_0(t)-3(t-1)u_1(t)+1(t-5).u_5(t)+2u_5(t)$$

$$\Rightarrow\quad F(s)=\frac{e^{-0\times s}}{s}+\frac{2e^{-0\times s}}{s^2}-\frac{3e^{-1s}}{s^2}+\frac{e^{-5s}}{s^2}+\frac{2e^{-5s}}{s}$$

۲-۷) قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس:

هر گاه $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد، داریم:

$$\boxed{L\{t^n.f(t)\}=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}}$$

و به خصوص برای $n=1$ داریم:

$$\boxed{L\{t.f(t)\}=-F'(s)}$$

و در فرم معکوس داریم:

$$\boxed{L^{-1}\{F'(s)\}=-t.f(t)}$$

نکته: تبدیل معکوس عبارت‌های شامل Ln، معکوسهای مثلثاتی و هذلولی (هیپربولیک)، از رابطه فوق به‌دست می‌آید.

مسایل حل شده:

مثال ۱: تبدیل لاپلاس توابع زیر را به‌دست آورید.

$1)\ f(t)=t^2\sin 3t$

حل:

$$L\{\sin 3t\}=\frac{3}{s^2+9}\quad\Rightarrow\quad L\{t^2\sin 3t\}=(-1)^2.\left(\frac{3}{s^2+9}\right)''\quad\Rightarrow\quad L\{f(t)\}=\frac{(18s^2-54)}{(s^2+9)^3}$$

2) $f(t)=t^2e^{4t}\sin 3t$

حل:

$$L\{\sin 3t\}=\frac{3}{s^2+9}\Rightarrow L\{e^{4t}.\sin 3t\}=\frac{3}{s^2+9}\bigg|_{s\to(s-4)}=\frac{3}{(s-4)^2+9}$$

$$\Rightarrow L\{t^2.e^{4t}.\sin 3t\}=(-1)^2.\left(\frac{3}{(s-4)^2+9}\right)''=\frac{18(s^2-8s+13)}{(s^2-8s+25)^3}$$

حل:

3) $f(t)=t^2e^{-t}.\int_0^t e^{2t}.\sin 5t\,dt$

$$L\{\sin 5t\}=\frac{5}{s^2+25}\Rightarrow L\{e^{2t}.\sin 5t\}=\frac{5}{s^2+25}\bigg|_{s\to(s-2)}=\frac{5}{(s-2)^2+25}$$

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^t e^{2t}.\sin 5t\,dt\right\}=\frac{1}{s}.F(s)=\frac{1}{s}.\frac{5}{(s-2)^2+25}\Rightarrow L\left\{\int_0^t e^{2t}.\sin 5t\,dt\right\}=\frac{1}{s}.\frac{5}{s^2-4s+29}$$

$$\Rightarrow L\left\{e^{-t}\int_0^t e^{2t}.\sin 5t\,dt\right\}=\frac{1}{s}.\frac{5}{s^2-4s+29}\bigg|_{s\to(s+1)}=\frac{1}{s+1}.\frac{5}{(s+1)^2-4(s+1)+29}=\frac{1}{s+1}.\frac{5}{s^2-2s+26}$$

$$\Rightarrow L\left\{t^2.e^{-t}\int_0^t e^{2t}.\sin 5t\,dt\right\}=(-1)^2.\left(\frac{1}{s+1}.\frac{5}{s^2-2s+26}\right)''=\left(\frac{5}{s^3-s^2+24s+26}\right)''=\frac{10(6s^4-8s^3+75s^2-150s+602)}{(s^3-s^2+24s+26)^3}$$

4) $f(t)=te^{-2t}.\sin 3t$

حل:

$$L\{\sin 3t\}=\frac{3}{s^2+9}\to L\{e^{-2t}.\sin 3t\}=\frac{3}{s^2+9}\bigg|_{s\to(s+2)}=\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

$$L\{t.e^{-2t}.\sin 3t\}=-\left(\frac{3}{(s+2)^2+9}\right)'=\frac{+6(s+2)}{(s^2+4s+13)^2}$$

5) $f(t)=(t-\pi).\sin 3t.e^{2t}.u_\pi(t)$

حل: همانند مثال قبل، مسئله فوق، ادغام چند قضیه است.

$$L\{f(t)\}=L\{u_\pi(t).(t-\pi).\sin 3t.e^{2t}\}\xrightarrow[t\to t+\pi]{\text{فرمول دوم قضیه دوم انتقال}}L\{f(t)\}=e^{-\pi s}.L\left\{(t+\pi-\pi).e^{2(t+\pi)}.\sin 3(t+\pi)\right\}$$

$$=e^{-\pi s}.L\left\{t.e^{(2t+2\pi)}.(-\sin 3t)\right\}=-e^{-\pi s}.e^{2\pi}.L\{te^{2t}.\sin 3t\}$$

$$L\{\sin 3t\}=\frac{3}{s^2+9}\Rightarrow L\{e^{2t}\sin 3t\}=\frac{3}{s^2+9}\bigg|_{s\to(s-2)}=\frac{3}{s^2-4s+13}$$

$$\Rightarrow\quad L\{te^{2t}.\sin 3t\}=-\left(\frac{3}{s^2-4s+13}\right)'=\frac{(6s-12)}{(s^2-4s+13)^2}$$

$$\Rightarrow\quad F(s)=e^{\pi(2-s)}.\frac{(6s-12)}{(s^2-4s+13)^2}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$I_1=\int_0^{\infty} x.e^{-3x}.\cos\beta x\,dx$$

حل: طبق تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$I_1=L\{x.\cos\beta x\}\big|_{s=3}$$

$$L\{\cos\beta x\}=\frac{s}{s^2+\beta^2}\quad\Rightarrow\quad L\{x\cos\beta x\}=(-1)^1\cdot\left(\frac{s}{s^2+\beta^2}\right)'=\frac{s^2-\beta^2}{\left(s^2+\beta^2\right)^2}$$

لذا خواهیم داشت:

$$I_1=\int_0^{\infty} x.\cos\beta x.e^{-3x}\,dx=\frac{s^2-\beta^2}{\left(s^2+\beta^2\right)}\bigg|_{s=3}=\frac{9-\beta^2}{\left(9+\beta^2\right)^2}$$

مثال ۳: تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

$$1)\,F(s)=Ln\left(\frac{s+3}{s^2+1}\right)$$

حل: ابتدا باید مسئله را بازنویسی کرده و سپس مشتق بگیریم:

$$F(s)=Ln\frac{s+3}{s^2+1}=Ln(s+3)-Ln\left(s^2+1\right)\Rightarrow F'(s)=\frac{1}{s+3}-\frac{2s}{s^2+1}$$

پس می‌توان نوشت:

$$L^{-1}\{F'(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}-\frac{2s}{s^2+1}\right\}=e^{-3t}-2\cos t\xrightarrow{\text{طبق فرمول}}L^{-1}\{F'(s)\}=e^{-3t}-2\cos t=-t.f(t)$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{e^{-3t}-2\cos t}{-t}$$

$$2)\,F(s)=Arc\cot g(2s+1)$$

حل: از دو طرف مسئله فوق باید مشتق گرفت:

$$F'(s)=\frac{-2}{1+(2s+1)^2}=-\frac{2}{4}.\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=-\frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

حال می‌توان نوشت:

$$L^{-1}\{F'(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\right\}=-e^{-\frac{t}{2}}.\sin\frac{t}{2}=-t.f(t)\Rightarrow f(t)=\frac{-e^{\frac{-t}{2}}.\sin\frac{t}{2}}{-t}=\frac{e^{\frac{-t}{2}}.\sin\frac{t}{2}}{t}$$

مثال ۴: تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

$$\begin{cases}xy''+y'+xy=0\\ y(0)=0\,;y'(0)=1\end{cases}$$

حل: با فرض $L\{y\}=Y(s)$ خواهیم داشت:

$$\left\{(-1)^1.\left(s^2.Y(s)-s.\overset{0}{\cancel{y(0)}}-\overset{1}{\cancel{y'(0)}}\right)'\right\}+\{s.Y(s)-\overset{0}{\cancel{y(0)}}\}+\left\{(-1)^1Y(s)'\right\}=0$$

$$\Rightarrow\quad -\left\{(s^2.Y(s)-1)'\right\}+\{s.Y(s)\}-\left\{(Y(s))'\right\}=0\quad\Rightarrow\quad -2sY(s)-s^2Y'(s)+sY(s)-Y'(s)=0$$

$$\Rightarrow\quad -(s^2+1)Y'(s)=sY(s)\quad\Rightarrow\quad -(s^2+1)\frac{dy}{ds}=s.Y\quad\Rightarrow\quad \frac{dY}{Y}=-\frac{s}{s^2+1}ds$$

$$\Rightarrow\quad \ln Y=-\frac{1}{2}\ln(s^2+1)+\ln k\quad\Rightarrow\quad Y(s)=\frac{k}{\sqrt{s^2+1}}$$

۸-۲) قضیه انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس:

هرگاه $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد، داریم:

$$\boxed{L\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\}=\int_s^{+\infty}F(s).ds}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: مطلوب است محاسبه تبدیل لاپلاس توابع زیر:

1) $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{t}$

حل:

$$L\{\sin^2 t\}=L\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\}=\frac{1}{2}L\{1-\cos 2t\}=\frac{1}{2}.\left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right\}$$

$$L\left\{\frac{1}{t}.\sin^2 t\right\}=\int_s^{+\infty}f(u).du=\frac{1}{2}\int_s^{+\infty}\left\{\frac{1}{u}-\frac{u}{u^2+4}\right\}du=\frac{1}{2}\left[\ln u-\frac{1}{2}\ln\left(u^2+4\right)\right]\Bigg|_s^{+\infty}$$

$$\Rightarrow\quad F(s)=\frac{1}{2}\left[\ln\frac{u}{\left(u^2+4\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\Bigg|_s^{+\infty}=\frac{1}{2}\left[\ln 1-\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\right]=-\frac{1}{2}\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال I_1 و محاسبه تبدیل لاپلاس I_2 :

$$I_1=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}.e^{-\alpha x}dx$$

حل: با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

$$I_1=L\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}\Bigg|_{S=\alpha}$$

$$L\{\sin x\}=\frac{1}{s^2+1}\Rightarrow L\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}=\int_S^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}du=\tan^{-1}u\Big|_S^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s$$

$$I_1=L\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}\Bigg|_{S=\alpha}=\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s\right)\Bigg|_{S=\alpha}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\alpha$$

$$I_2=t^2\cdot\int_0^t e^{3t}\cdot\frac{\sinh t}{t}dt$$

حل:

$$L\{\sinh t\}=\frac{1}{s^2-1} \quad\Rightarrow\quad L\left\{\frac{1}{t}\sinh t\right\}=\int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2-1}du=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\Bigg|_s^{\infty}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right|$$

$$\Rightarrow\quad L\left\{e^{3t}.\frac{\sinh t}{t}\right\}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right|\Bigg|_{s\to(s-3)}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{s-2}{s-4}\right| \quad\Rightarrow\quad L\left\{\int_0^t e^{3t}\cdot\frac{\sin ht}{t}dt\right\}=\frac{1}{2s}\mathrm{Ln}\left|\frac{s-2}{s-4}\right|$$

$$L\left\{t^2\cdot\int_0^t e^{3t}\cdot\frac{\sinh t}{t}dt\right\}=\left((-1)^2\cdot\frac{1}{2s}\cdot\ln\left|\frac{s-2}{s-4}\right|\right)''=\frac{\mathrm{Ln}\frac{s-2}{s-4}}{s^3}+\frac{2\left(2s^2-9s+8\right)}{s^2\cdot(s-4)^2\cdot(s-2)^2}$$

۲-۹) قضیه تبدیل لاپلاس پیچش دوتابع:

پیچش دوتابع $f(t)$ و $g(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{(f*g)(t)=\int_0^t f(\lambda).g(t-\lambda)d\lambda=\int_0^t f(t-\lambda).g(\lambda)d\lambda}$$

می توان نشان داد هرگاه $L\{g(t)\}=G(s);L\{f(t)\}=F(s)$ باشد، داریم:

$$\boxed{L\{(f*g)(t)\}=F(s).G(s)}$$

و در فرم معکوس:

$$\boxed{L^{-1}\{F(s).G(s)\}=(f*g)(t)}$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: تبدیل لاپلاس توابع زیر را به‌دست آورید.

$$1)\ f(t)=\int_0^t(\sin\lambda-\cos 2\lambda).(t-\lambda)^3d\lambda$$

حل: با توجه به مباحث گفته شده در بالا خواهیم داشت:

$$F(s)=L\{\sin t-\cos 2t\}.L\{t^3\}=\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}\right).\left(\frac{3!}{s^4}\right)$$

$$2)\ f(t)=e^{2t}\int_0^t\lambda^3.\sin(t-\lambda)d\lambda$$

حل: ابتدا تبدیل لاپلاس انتگرال را پیدا کنیم و سپس باتوجه به قضیه اول انتقال، تبدیل لاپلاس کل تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$L\left\{\int_0^t\lambda^3\sin(t-\lambda)d\lambda\right\}=L\{t^3*\sin t\} \quad\Rightarrow\quad F(s)=L\{t^3\}.L\{\sin t\}=\frac{3!}{s^4}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$$L\left\{e^{2t}\cdot\int_0^t\lambda^3\cdot\sin(t-\lambda)d\lambda\right\}=L\left\{\int_0^t\lambda^3.\sin(t-\lambda)d\lambda\right\}\Bigg|_{s\to s-2}=\frac{6}{(s-2)^4}\cdot\frac{1}{(s-2)^2+1}$$

مثال ۲: معادله دیفرانسیل همراه باشرایط اولیه زیر را درنظر بگیرید. با استفاده از تبدیل لاپلاس، جواب این معادله دیفرانسیل را در یک قالب انتگرال بیان کنید.

$$\begin{cases} y''' - 4y' = f(t) \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$$

حل: از دو طرف معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم و پس از اعمال شرایط اولیه داریم:

$$s^3Y(s) - 4sY(s) = F(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^3 - 4s}.F(s)$$

و نیز می‌دانیم:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3 - 4s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}.\frac{1}{s^2 - 4}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}\sinh 2t dt = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\cosh 2t\Big|_0^t = \frac{1}{4}(\cosh 2t - 1)$$

پس می‌توان گفت:

$$Y(s) = \frac{1}{s^3 - 4s}.F(s) \longrightarrow y(t) = \frac{1}{4}\int_0^t (\cosh(2t-\lambda) - 1).f(\lambda)d\lambda$$

مثال ۳: مطلوب است حل معادلات انتگرالی زیر و پیداکردن تابع $f(t)$.

1) $f(t) = te^{-t} + \int_0^t \lambda f(t-\lambda)e^{-\lambda}d\lambda$

حل:

$$f(t) = te^{-t} + \left((t.e^{-t}) * f(t)\right) \xrightarrow{\text{از دوطرف تبدیل لاپلاس می‌گیریم.}} F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2}F(s)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2 + 2s} = \frac{1}{s(s+2)} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} f(t) = \int_0^t e^{-2t}dt = -\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^t = \frac{-1}{2}(e^{-2t} - 1)$$

2) $\int_0^t \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}d\lambda = t^2$

حل: انتگرال فوق را به صورت پیچش دوتابع می‌نویسیم:

$$\int_0^t \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}} = t^2 \Rightarrow f(t) * \frac{1}{\sqrt{t}} = t^2 \longrightarrow F(s).\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{s^3}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.\frac{1}{s^{\frac{5}{2}}} \Rightarrow F(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}.\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}} \longrightarrow f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}.t^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f(t) = \frac{8}{3\pi}.t^{\frac{3}{2}}$$

مثال: لاپلاس معکوس تابع $\frac{s}{s^2+1}.\cot g^{-1}(s+1)$ را بیابید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} F(s) = \dfrac{s}{s^2+1} \Rightarrow f(t) = \cos t \\ G(s) = \cot g^{-1}(s+1) \xrightarrow{\text{از مثالهای قبل}} g(t) = \dfrac{1}{t}.e^{-t}.\sin t \end{array}\right\} \; L^{-1}(F(s).G(s)) = (f*g)(t) = \cos t * \frac{e^{-t}.\sin t}{t}$$

$$= \int_0^t \cos(t-\lambda).\frac{e^{-\lambda}.\sin\lambda}{\lambda}d\lambda$$

۲ـ۱۰) تابع دلتای دیراک:

تابع دلتای دیراک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\delta_a(t)=\delta(t-a)=\begin{cases}0 & t=a\\ \infty & t=a\end{cases}}$$

به طوری‌که همواره:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_a(t)\,dt=1}$$

به خاطر داشته باشید می‌توان نشان داد:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t).\delta_a(t)\,dt=f(a)}$$

پس می‌توان دید:

$$\boxed{L\{\delta_a(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}\delta_a(t)\,dt=e^{-sa}}$$

مسئله حل شده:

مثال ۱: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید و تبدیل لاپلاس جواب معادله را مشخص کنید:

$$\begin{cases}y''-3y'+2y=\delta_2(t).\cos t\\ y(0)=1;\ y'(0)=0\end{cases}$$

حل: از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\left(s^2Y(s)-s\overset{1}{y(0)}-\overset{0}{y'(0)}\right)-3\left(sY(s)-\overset{1}{y(0)}\right)+2Y(s)=\underbrace{\int_0^{\infty}e^{-st}.\delta_2(t).\cos t\,dt}_{e^{-st}.\cos t\,\big|_{t=2}=e^{-2s}.\cos 2}\Rightarrow\left(s^2-3s+2\right)Y(s)=e^{-2s}\cos 2+s-3$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{e^{-2s}.\cos 2+s-3}{s^2-3s+2}$$

فصل پنجم

دستگاه معادلات دیفرانسیل

به حل چند مسئله در دستگاه معادلات دیفرانسیل دقت کنید.

مثال: برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\begin{cases} y_1' - y_2' = y_2 - y_1 \\ y_1'' + y_2'' = e^t \end{cases}$ با شرایط اولیه $y_1(0) = y_2'(0) = 0$ و $y_1'(0) = y_2(0) = 1$ کدام گزینه صحیح است؟ (راهنمایی: از تبدیل لاپلاس استفاده کنید.)

۱) $y_1(1) = \dfrac{e^1 - e^{-1}}{2}$ ۲) $y_1(1) = e^1 - e^{-1}$ ۳) $y_1(1) = \dfrac{e^{+1} + e^{-1}}{2}$ ۴) $y_1(1) = e^1 + e^{-1}$

حل: از معادلات دستگاه تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{cases} \left(SY_1(s) - y_1(0)\right) - \left(SY_2(s) - y_2(0)\right) = Y_2(s) - Y_1(s) \\ \left(S^2Y_1(s) - sy_1(0) - y_1'(0)\right) + \left(S^2Y_2(s) - sy_2(0) - y_2'(0)\right) = \dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

با اعمال شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} SY_1 - SY_2 + 1 = Y_2 - Y_1 \\ S^2Y_1 + S^2Y_2 - 1 - S = \dfrac{1}{S-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (S+1)Y_1 - (S+1)Y_2 = -1 \\ S^2Y_1 + S^2Y_2 = \dfrac{1}{S-1} + S + 1 = \dfrac{1 + S^2 - 1}{S-1} = \dfrac{S^2}{S-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 - Y_2 = \dfrac{-1}{S+1} \\ Y_1 + Y_2 = \dfrac{1}{S-1} \end{cases} \rightarrow 2Y_1 = \frac{-1}{S+1} + \frac{1}{S-1} = \frac{-S+1+S+1}{S^2-1} \rightarrow 2Y_1(S) = \frac{2}{S^2-1} \rightarrow y_1(t) = \sinh t$$

لذا داریم:

$$y_1(1)=\sinh 1=\frac{e^1-e^{-1}}{2}$$

مثال: در دستگاه معادلات $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-2y\end{cases}$ حاصل $x(t)$ کدام است؟

۱) $x(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}$ ۲) $x(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-3t}$ ۳) $x(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$ ۴) $x(t)=c_1e^{-2t}+c_2c^{3t}$

حل: با استفاده از تعریف اپراتور $D=\frac{d}{dt}$ داریم:

$$\begin{cases}Dx=x+2y\\ Dy=2x-2y\end{cases}\to\begin{cases}(D-1)x-2y=0\\ 2x-(2+D)y=0\end{cases}$$

با ضرب معادله اول در $(2+D)$ و ضرب معادله دوم در -2 و جمع معادلات حاصله نتیجه می‌شود:

$$(2+D)(D-1)x-4x=0\to\left(D^2+D-6\right)x=0$$

معادله حاصله از نوع همگن با ضرایب ثابت بوده که معادله مشخصه آن چنین است:

$$D^2+D-6=0\to(D-2)(D+3)=0\to D=2\,,-3$$

لذا داریم:

$$x(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-3t}$$

مثال: در دستگاه $\begin{cases}2x'+x+y'=t\\ x'-x+y'=2\end{cases}$ حاصل $x(t)$ کدام است؟

حل: با کم کردن دو معادله از هم به دست می‌آید:

$$x'+2x=t-2$$

معادله همگن دارای جواب $x=c_1e^{-2t}$ بوده و برای یافتن جواب خصوصی می‌نویسیم:

$$x_p=\frac{1}{D+2}(t-2)$$

$$\begin{array}{l|l}1 & 2+D\\ \mp1\mp\frac{D}{2} & \frac{1}{2}-\frac{D}{4}\\ \hline -\frac{D}{2} & \\ \pm\frac{D}{2}\ \ldots\ldots & \\ \hline \ldots & \end{array}$$

لذا:

$$x_p=\left(\frac{1}{2}-\frac{D}{4}\right)(t-2)=\frac{1}{2}(t-2)-\frac{1}{4}(1)=\frac{t}{2}-\frac{5}{4}$$

پس داریم:

$$x(t)=c_1e^{-2t}+\frac{t}{2}-\frac{5}{4}$$

مثال: در دستگاه $\begin{cases}x'=2x+y\\ y'=-x+4y\end{cases}$ ، $\begin{cases}x(0)=1\\ y(0)=3\end{cases}$ حاصل $x(t)$ کدام است؟

حل: از معادلات دستگاه تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{cases}SX(s)-x(0)=2X(s)+Y(s)\\ SY(s)-y(0)=-X(s)+4Y(s)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(S-2)X(s)-Y(s)=1\\ X(s)+(s-4)Y(s)=3\end{cases}$$

با استفاده از دستور کرامر داریم:

$$X(s)=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & s-4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s-2 & -1\\ 1 & s-4\end{vmatrix}}=\frac{(s-4)+3}{(s-2)(s-4)+1}=\frac{s-1}{s^2-6s+9}=\frac{s-1}{(s-3)^2}=\frac{s-3+2}{(s-3)^2}=\frac{1}{s-3}+\frac{2}{(s-3)^2}\rightarrow x(t)=e^{3t}+2te^{3t}$$

یادداشت