بسمه تعالی

جزوه

معادلات

دانشگاه

صنعتی امیر کبیر

استاد

دکتر نیکوکار

$y = x^2 + c \Rightarrow y' = 2x$

تشکیل
برای تعیین معادله دیفرانسیل یک دسته منحنی یک پارامتری باید پارامتر بین معادله و مشتق آن حذف شود

$y = cx^2 + 4 \quad y' = 2cx \Rightarrow y = \frac{y'}{2}x + 4$

$y = x^2 + ax + b$
$y' = 2x + a$
$\boxed{y'' = 2}$

$y = ax^2 + bx + 5$
$y' = 2ax + b$
$y'' = 2a$

اگر یک دسته منحنی n پارامتر داشته باشد و بخواهیم معادله دیفرانسیل آن را بدست آوریم باید n پارامتر را بین خود منحنی و مشتقاتش حذف کنیم

مسیرهای قائم

هرگاه هر دو منحنی از دسته منحنیهای دو معادله برهم عمود باشند یکی از منحنی‌ها را مسیرهای قائم دسته منحنی دیگر می‌گوییم

$y = ax \qquad y^2 + x^2 = c^2$

معادله معلوم ← مسیر اصلی
معادله‌ای که بدست می‌آید ← مسیر قائم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قدم ۱ برای تعیین مسیرهای قائم باید معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را تشکیل داد

$y = ax \qquad y' = a \qquad y' = \frac{y}{x}$

قدم 2 تشکیل معادله دیفرانسیل مسیر قائم:

هرجا y' داریم آن را با $-\frac{1}{y'}$ عوض می‌کنیم:

$-\frac{1}{y'} = \frac{y}{x} \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow y\,dy + x\,dx = 0 \qquad y^2 + x^2 = c^2$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول:
الزاماً باید y' را داشته باشد

$F(x, y, y') = 0$

مرتبه اول:

۱- نسبت به مشتق حل می‌شوند $\qquad 4xy' + 3y - 1 = 0$

2- نسبت به مشتق حل نمی‌شوند $\qquad \cos y' + 3xe^{y'} - 2y = 2$

۱- نسبت به مشتق حل می‌شوند:
به فرم زیر است:

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

تابع حاصلضرب دو تابع یکی از x و دیگری از y است $\qquad h(x,y) = h_1(x)\cdot h_2(y)$

$\Rightarrow f_1(x) f_2(y)\,dx + f_3(x) f_4(y)\,dy = 0 \qquad \times \frac{1}{f_2 f_3}$

$H(x)\,dx + G(y)\,dy = 0 \Rightarrow$ معادله تفکیک‌پذیر است

اگر معادله تفکیک پذیر بود آنگاه

$$H(x)dx + G(y)dy = 0$$

$$\int \quad + \int \quad = C$$

-1

$$(1+x^3)\,dy - x^2 y\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2}{1+x^3}dx \Rightarrow \ln y = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + \ln c$$

$$\ln y^3 = \ln(1+x^3) + \ln c \Rightarrow y^3 = c(1+x^3)$$

-2

$$x\frac{dy}{dx} + y^2 = 4 \Rightarrow x\,dy + (y^2-4)\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{(y^2-4)} + \frac{dx}{x} = 0 \qquad \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + \ln x = \ln c$$

$$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + \ln x^4 = \ln c \Rightarrow \frac{y-2}{y+2} = \frac{c}{x^4}$$

-3 حد جواب مسأله زیر وقتی $x \to \infty$ برابر است با:

$$y' = 2x\cos^2 y \qquad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

1- $-\pi$

2- $\frac{\pi}{4}$

3- $\frac{\pi}{2}$ ✓

4- ∞

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = 2x\,dx \qquad \tan y = x^2 + c \quad x=0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow y = \operatorname{Arc}\tan(x^2+1) = \frac{\pi}{2}$$

$x \to \infty$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

4- جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید

$$x(y-1)\frac{dy}{dx}=y \Rightarrow \frac{y-1}{y}dy=\frac{dx}{x}$$

$$y=\ln xy+c$$

معادلاتی به صورت معادله تابعی از یک خط:

$$y'=f(ax+by+c)$$

$$y'=2x+y-1 \quad , y'=\operatorname{tg}(3x+4y)+2 \quad , y'=e^{4x-y+3}+\sqrt{4x-y+3}-1$$

$$u=ax+by+c \quad , y'=f(u)$$

اگر f تابعی از یک خط شد می‌توان خط را به صورت u گرفت و معادله را به معادله تفکیک پذیر تبدیل کرد

5: $y'=(y-4x)^2 \Rightarrow u=y-4x \Rightarrow u'=y'-4$

$$\Rightarrow y'=u^2 \Rightarrow u'+4=u^2 \qquad \frac{du}{u^2-4}=dx$$

$$\frac{1}{4}\ln$$

6: $y'=(x+y)^2 \qquad u=x+y \Rightarrow y'=u'-1$

$$u'-1=u^2 \qquad \frac{du}{u^2+1}=dx \qquad \operatorname{tg}^{-1}u=x+c$$

PAPCO $x+y=\operatorname{tg}(x+c)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y' = e^{2x+y-1} - 2 \Rightarrow u = 2x+y-1 \qquad u' = 2 + y'$$:7

$$u' - \cancel{2} = e^{u} - \cancel{2} \qquad e^{-u}\,du = dx$$

$$-e^{-u} = x + c$$

2: همگن

$$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} h(x, y)$$ ⇐ همگن است

در رابطه $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ اگر دو ضریب P و Q همگن با درجه همگنی مساوی باشند ⇐ معادله ما را همگن است و اگر همگن بود می توان بجای $y = vx$ قرار داد

$$\Rightarrow y = vx \Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$$

:8

$$x\frac{dy}{dx} = x\,tg\left(\frac{y}{x}\right) + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = tg\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$$

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = tg\,v + \cancel{v}$$

$$\cot g\,v\,dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln \sin v = \ln cx$$

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = cx \qquad y = x \sin^{-1}(cx)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۹- همگن درجه صفر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3+y^3}{xy^2} = \frac{2+v^3}{v^2}$$

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \cancel{v} + \frac{2}{v^2} \qquad 2\frac{dx}{x} = v^2 dv$$

$$\frac{1}{3}v^3 = 2\ln x + c \qquad \frac{y^3}{x^3} = 6\ln x + c \Rightarrow y = x\sqrt[3]{\quad}$$

۱۰: همگن از درجه صفر

۱- ۱

۲- ۰ ✓

۳- ∞

۴- موجود نیست

$$y' = \frac{x^2+2y^2}{xy} \quad y = vx \quad = \frac{1+2v^2}{v^2}$$

$$\cancel{v} + xv' = \frac{1+2v^2}{v^2} - v = \frac{1+v^2}{v}$$

$$\frac{v}{1+v^2}dv = \frac{dx}{x} \qquad \ln(1+v^2) = \ln cx^2$$

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = cx^2 \qquad x^2+y^2 = cx^4 \quad \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$$

تمام معادلات به فرم $y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+ey}\right)$ که صورت و مخرج معادله یک خط باشند که از مبدأ بگذرد هر همگن از درجه صفر می باشد.

$$y = \frac{x+3y+1}{2x-y+4}$$ همگن نیست

$$y = \frac{ax+by+c}{ex+hy+n}$$ (همگن نیست)

در این معادله کافیست مبدأ مختصات را به محل تلاقی دو خط منتقل کنیم به شرطیکه دو خط موازی نباشند

Subject:

Year. Month. Date. ( )

الف_ دو خط موازی :

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+n}\right) \qquad u = ax+by$$

با تغییر متغیر u ، y' کاملاً جدا از هم می‌شود

_11

$$y' = \frac{y-x}{y-x-1} \qquad u = y-x \Rightarrow y' = u'+1$$

$$u'+1 = \frac{u}{u-1} \qquad u' = \frac{u}{u-1} - 1 = \frac{1}{u-1} \Rightarrow (u-1)\,du = dx$$

$$(u-1)^2 = 2x + C$$

_12

$$y' = \frac{x-y}{2x-2y+1} \qquad u = x-y \Rightarrow y' = 1-u'$$

$$1-u' = \frac{u}{2u+1} \qquad -u' = \frac{u}{2u+1} - 1 = -\frac{u+1}{2u+1}$$

$$\frac{(2u+1)^{+1-1}}{u+1}\,du = dx \qquad 2u - \ln(u+1) = x + C$$

_13

$$(3y+2x+4)\,dx - (4x+6y+5)\,dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y+4}{4x+6y+5} \qquad u = 2x+3y \Rightarrow y = \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}x$$

$$y' = \frac{1}{3}(u'-2) = \frac{u+4}{2u+5} \Rightarrow \frac{3u+12}{2u+5} = (u'-2)$$

$$u' = \frac{7u+22}{2u+5} \Rightarrow \frac{2u+5}{7u+22}\,du = dx$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

دو خط متقاطع باشند

ب : متقاطع

(x_0, y_0) محل تلاقی

$$a x_0 + b y_0 + c = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = \overset{\text{جدید}}{X} + x_0 \qquad dx = dX$$

$$e x_0 + h y_0 + n = 0 \qquad\qquad y = \overset{\text{جدید}}{Y} + y_0 \qquad dy = dY$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f\left(\frac{ax + by + c}{ex + hy + n}\right)$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{eX + hY}\right) \quad \Rightarrow \quad Y = vX \qquad \text{تغییر متغیر}$$

$$y' = \frac{x - y + 2}{x + y - 1} \qquad -14$$

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad x_0 = -\tfrac{1}{2} \qquad y_0 = \tfrac{3}{2}$$

$$x = X - \frac{1}{2} \quad , \quad y = Y + \frac{3}{2}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y} = \frac{1 - v}{1 + v}$$

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{1 - v}{1 + v} \qquad X\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v}{1 + v} - v = \frac{-v^2 - 2v + 1}{1 + v}$$

$$-\frac{1 + v}{v^2 + 2v - 1}\, dv = \frac{dX}{X}$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

3 - کامل

معادله $p(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را کامل گوییم اگر تابعی مانند $U=U(x,y)$ موجود باشد بطوری که

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q$$

$$dU=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad dU=P\,dx+Q\,dy=0$$

$$\Rightarrow dU=0 \qquad \Rightarrow U=C$$ به عنوان تابعی از x و y ثابت است.

اگر $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ باشد معادله دیفرانسیل کامل می‌شود.

13: جواب معادله که از مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟ $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+y\cos x}{4y^3-\sin x}$

$$(\overset{P}{3x^2+y\cos x})dx+(\overset{Q}{\sin x-4y^3})dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos x \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\cos x \quad \Rightarrow$$ کامل است

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y\cos x \quad \Rightarrow \quad u=x^3+y\sin x+f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\cancel{\sin x}+f'(y)=\cancel{\sin x}-4y^3 \quad \rightarrow f'(y)=-4y^3$$

$$x^3+y\sin x-y^4=C \qquad x=0\,,\,y=0 \Rightarrow C=0$$

مثال 14: a را طوری تعیین کنید تا معادله زیر یک معادله کامل باشد

$$(aye^{xy}+2xy)dx+(xe^{xy}+x^2)dy=0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\partial P}{\partial y} = a e^{xy} + axy e^{xy} \ldots \qquad a e^{xy} = e^{xy} \Rightarrow a = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = e^{xy} + yx e^{xy} \ldots$$

مثال 15: معادله دیفرانسیل کامل است مقدار a کدام است

$$(x^{-1} + y^{-1})dx + a x y^{-2} dy = 0$$

مثال 16: $y'(y^2 - x) = y$ چه جوابی دارد؟

$$y\,dx + (x - y^2)dy = 0$$

$$U = \int y\,dx + f(y) \qquad U = yx + f(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \cancel{x} + f'(y) = \cancel{x} - y^2 \Rightarrow f'(y) = -y^2 \Rightarrow f(y) = -\frac{1}{3}y^3$$

$$U = yx - \frac{1}{3}y^3 = c$$

مثال 17: $(x+y)dx + (x-y)dy = 0 \quad , \; y(1) = 1 \Rightarrow y(0) = ?$

فرض $U = \int (x-y)dy + f(x) \Rightarrow U = xy - \frac{1}{2}y^2 + f(x)$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \cancel{y} + f'(x) = x + \cancel{y} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$U = xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c = 1$$

$$y(0) \Rightarrow \quad y^2 = -2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

اگر دیفرانسیل کامل نشود اصلاً قادر به حل مسأله نیستیم

$x\,dy - y\,dx = 0$ کامل نیست -1 و $+1$

$\frac{1}{xy} \cdots \frac{1}{y}dy - \frac{1}{x}dx = 0$ کامل است 0 و 0

$\frac{1}{x^2} \cdots \frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$ $-\frac{1}{x^2}$ و $-\frac{1}{x^2}$ 〃 〃

$\frac{1}{y^2} \cdots \frac{x}{y^2}dy - \frac{1}{y}dx = 0$ $\frac{1}{y^2}$, $\frac{1}{y^2}$ 〃 〃

عوامل غیر صفری که در یک معادله ناکامل ضرب می‌شوند و معادله را کامل می‌کنند را عامل انتگرال‌ساز گوییم.

فاکتور انتگرال‌ساز $F=F(x,y) \neq 0$ تابعی است از (x,y) (در حالت کلی) مخالف صفر به طوری که اگر در طرفین یک معادلهٔ دیفرانسیل ناکامل ضرب شود دیفرانسیل را کامل کند

$P\,dx + Q\,dy = 0$

$(FP)dx + (FQ)dy = 0 \Rightarrow u = c$

جوابی که از این طریق بدست می‌آید (u) همان جواب مسأله است.

$f_1(x)\,f_2(y)\,dx + f_3(x)\,f_4(y)\,dy = 0$

$\frac{1}{f_2 f_3}$ فاکتور انتگرال معادلات جداپذیر

$\frac{1}{xP+yQ}$ بهتر است از روش قبلی حل شوند   همگن 〃 〃 〃

اگر معادله‌ای جواب داشته باشد حتماً یک و بینهایت فاکتور انتگرال‌ساز دارد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x)$ $\longleftarrow$ $F=e^{\int f(x)\,dx}$

اگر $\frac{-1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(y)$ $\longleftarrow$ $F=e^{\int f(y)\,dy}$

اگر عوامل غیر جبری نباشد مدل ln خوب کار می‌کند $\quad x^{\alpha}y^{\beta}$

مثال 18:

$$(xy+y^2)\,dx-(x^2+xy)\,dy=0$$

1. بیش از یک عامل انتگرال ساز دارد
2. کامل نیست.
3. فقط یک عامل انتگرال ساز تابعی از x دارد غ
4. ~ y ~ ~ ~ ~ ~ ~ غ

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x+2y \qquad \text{کامل نیست} \qquad \text{تفاضل} \quad \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=3(x+y)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x-y$$

$$\frac{3(x+y)}{Q=-x(x+y)}=-\frac{3}{x} \qquad F=e^{-3\int\frac{dx}{x}}=e^{-3\ln x}=\frac{1}{x^3}$$

یا

$$-\frac{3(x+y)}{P=y(x+3)}=-\frac{3}{y} \qquad F=\frac{1}{y^3}$$

یا

$$x^{\alpha}y^{\beta}(xy+y^2)\,dx-x^{\alpha}y^{\beta}(x^2+xy)\,dy=0$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta} + (\beta+2)x^{\alpha}y^{\beta+1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} - (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+1}$$

$$\begin{cases} \beta+1 = -\alpha-2 \\ \beta+2 = -\alpha-1 \end{cases} \Rightarrow$$ جواب می‌دهد پس می‌توانیم از این عامل انتگرال‌ساز استفاده کرد

ولی چون α و β مستقیمی به مقدار استفاده می‌شود $\Rightarrow$ بی‌نهایت جواب دارد $\alpha+\beta=-3$

مثال ۱۹ :

$x^{\alpha}y^{\beta}$ جواب نمی‌دهد

$$(1+x^2)\,dy - (\operatorname{tg}^{-1}x - y)\,dx = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \;,\; \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \quad \text{تفاضل} \Rightarrow 1-2x$$

$$\frac{1-2x}{Q = 1+x^2} = f(x) \qquad e^{\operatorname{tg}^{-1}x - \ln(1+x^2)} \Rightarrow \frac{e^{\operatorname{tg}^{-1}x}}{1+x^2}$$

مثال 20 : عبارت $x^{\alpha}y^{\beta}$ عامل انتگرال‌ساز معادله زیر است $\alpha+\beta$ کدام است

2   1 -1 -2

$$(x^2+xy^2)\,y' - 3xy + 2y^3 = 0$$

$$x^{\alpha}y^{\beta}(2y^3 - 3xy)\,dx + x^{\alpha}y^{\beta}(x^2+xy^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(\beta+3)x^{\alpha}y^{\beta+2} - 3(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} + (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} 2(\beta+3)=\alpha+1 \\ -3(\beta+1)=\alpha+2 \end{cases} \qquad \alpha=1,\quad \beta=-2$$

$$\alpha+\beta=-1$$

مثال 21:

$$2xy\,dx+(4y+3x^2)\,dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=6x \qquad \text{تفاضل}=-4x$$

$$\frac{-4x}{-2xy}=\frac{2}{y} \qquad 2\ln y \Rightarrow F=y^2$$

$$y^2\times(\qquad)=0$$

$$2xy^3\,dx+(4y^3+3x^2y^2)\,dy=0$$

$$u=x^2y^3+f(y) \Rightarrow \cancel{3x^2y^2}+f'(y)=4y^3+\cancel{3x^2y^2}$$

$$f(y)=y^4 \qquad (x^2y^3+y^4=C)$$

مثال 22: عامل انتگرال سازکدام است

$$2\sin y^2\,dx+xy\cos y^2\,dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=4y\cos y^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=y\cos y^2 \qquad \text{تفاضل}=3y\cos y^2$$

$$\frac{3y\cos y^2}{xy\cos y^2}=\frac{3}{x} \Rightarrow F=x^3$$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

23 : فاکتور انتگرال ساز

$$y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dx = 0$$

xe^{2x}

$\frac{e^{2y}}{x}$

$\frac{e^{2y}}{y}$

ye^{2y}

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \qquad \text{تفاضل} = 1-2y$$

$$\frac{1-2y}{-y} = 2 - \frac{1}{y} \qquad 2y - \ln y \qquad F = e^{2y-\ln y}$$

$$F = \frac{e^{2y}}{y}$$

24 :

$$dx + 2xy\,dy = ye^{-y^2}\,dy$$

e^{y^2} ✓

e^{x^2}

e^{-x^2}

e^{-y^2}

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \qquad \text{تفاضل} = -2y$$

$$\frac{-2y}{-1} = 2y \qquad F = e^{y^2}$$

25 : α و β را طوری تعیین کنید که $x^\alpha y^\beta$ یک فاکتور انتگرال برای معادله زیر باشد

$$y\,dx + x(1 - 3x^2y^2)\,dy = 0$$

$$x^\alpha y^{\beta+1}\,dx + x^{\alpha+1}y^\beta(1-3x^2y^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)(x^\alpha y^\beta) + 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+1)x^\alpha y^\beta - 3(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2}$$

$\alpha = \beta = -3$ $\qquad$ $\alpha = -3$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

26: فاکتور انتگرال ساز؟ به y بستگی ندارد

$$x^2 dy - xy\,dx = (x-2)e^{x}dx$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \qquad \text{تفاضل} = -3x$$

$$\frac{-3x}{x^2} = \frac{-3}{x} \qquad F = \frac{1}{x^3}$$

27: جواب عمومی معادله کدام است

$$(1+y^2)dx = (tg^{-1}y - x)dy$$

$$(1+y^2)dx + (x - tg^{-1}y)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \qquad \text{تفاضل} \quad 2y-1$$

$$-\frac{2y-1}{1+y^2} \Rightarrow tg^{-1}y - \ln(1+y^2) \Rightarrow F = \frac{e^{tg^{-1}y}}{1+y^2}$$

$$e^{tg^{-1}y}dx + \underbrace{(x - tg^{-1}y)\cdot\frac{e^{tg^{-1}y}}{1+y^2}}\,dy = 0$$

$$u = xe^{tg^{-1}y} + f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\left(\frac{1}{1+y^2}\right)e^{tg^{-1}y} + f'(y) =$$

$$f(y) = -\int \frac{tg^{-1}y}{1+y^2}e^{tg^{-1}y}dy$$

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$\tan^{-1} y = T \quad \Rightarrow \quad (\tan^{-1} y)' =$

$f_y = -\int T e^{T} dT$

مثال :28

$y(x^2-y)\,dx + x(x^2+3y)\,dy$

$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 - 1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \qquad$ تفاضل $= -1-2x^2$ نتیجه می دهد

$x^{\alpha} y^{\beta+1}(x^2-y)\,dx + x^{\alpha+1} y^{\beta}(x^2+3y)\,dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1) y^{\beta} x^{\alpha+2} - (\beta+2) x^{\alpha} y^{\beta+1}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+3) x^{\alpha+2} y^{\beta} + 3(\alpha+1) x^{\alpha} y^{\beta+1}$

$\beta + 1 = \alpha + 3 \qquad \beta - \alpha = 2 \qquad \alpha = -\frac{7}{4}$

$-(\beta+2) = 3(\alpha+1) \qquad 3\alpha + \beta = -5 \qquad \beta = \frac{1}{4}$

$-\beta - 2 = 3\alpha + 3$

اگر معادله ای به فرم $y' + y f(x) = r(x)$ باشد معادله خطی مرتبه اول می شود

اگر مرتبه خطی بود اینطوری $\qquad (y f(x) - r(x))\,dx + dy = 0$

همگن معادلاتی نیز نیست

$\frac{\partial P}{\partial y} = f(x) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad$ تفاضل $= f(x)$

$\left(F = e^{\int f(x)\,dx} \right)$ عامل انتگرال ساز معادلات خطی ← طول می کشد حفظ شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y' + y f(x) = r(x) \qquad h(x) = \int f(x)\, dx \Rightarrow y = e^{-h(x)} \left[\int r(x) e^{h(x)}\, dx + c \right]$

یا $\dfrac{dx}{dy} + x f(y) = r(y)$ جای x و y در معادله
عوض شود

$y' - y \, tg\, x = 2 \cos x$ مقدار دیگر $= 2$: 28

$\ln \cos x \qquad y = \dfrac{1}{\cos x} \left[\int 2 \cos^2 x \, dx + c \right]$

$x y' - y = x^2 \cos x$: 29

$y' - \dfrac{1}{x} = x \cos x$

$h(x) = -\ln x \qquad y = x \left[\int \dfrac{\cancel{x} \cos x}{\cancel{x}} \, dx + c \right]$

: 30

$dy + (y \cot g\, x - e^{\cos x})\, dx = 0 \quad , \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$

هرگاه y تک در معادله دیده شود باید خطی بودن چک گردد

$\dfrac{dy}{dx} + y \cot g\, x = e^{\cos x}$

$h(x) = + \ln \sin x \qquad y = \dfrac{1}{\sin x} \left[\int \sin x\, e^{\cos x} \, dx + c \right] \qquad c = 2$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

31: جواب معادلهٔ زیر در $x=e$ کدام است. $y(1)=2$ $\quad x>0$

$$x^2y' + xy = 1 \Rightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

$$h(x) = \ln x$$

$$y = \frac{1}{x}\left[\int \frac{1}{x^2}\, x\,dx + c\right]$$

32: $y' - xy - 2x = 0$

33: $xy' + y - x^2 = 0$

34: $xy' - y = 3x^4$

35: $\dfrac{xy' - y}{x^2} + \dfrac{y}{x} = e^{-x}$ $\qquad t = \dfrac{y}{x}$

$$t' + t = e^{-x}$$

$h(x) = x$ $\qquad \Rightarrow \dfrac{y}{x} = e^{-x}\left[\int e^{-x} e^{x}\,dx + c\right]$

36: جواب معادله برحسب $\lambda = \dfrac{1}{\cos y}$ کدام است.

$$\sin y \frac{dy}{dx} = \cos y(1 - x\cos y) \qquad \cos y = \frac{1}{\lambda}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y' \sin y = \frac{1}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dx} \qquad \frac{1}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{d\lambda}{dx} - \lambda = -x$$

$$\lambda = e^{x}\left[\int -x e^{-x}\,dx + c\right]$$

$h(x) = -x$

$$(1+y^2)\,dx = (\operatorname{tg}^{-1} y - x)\,dy \quad : 37$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\operatorname{tg}^{-1} y}{1+y^2}$$

$h(y) = \operatorname{tg}^{-1}(y)$

$$x = e^{-\operatorname{tg}^{-1}(y)}\left[\int \frac{\operatorname{tg}^{-1} y}{1+y^2}\, e^{\operatorname{tg}^{-1} y}\,dy + c\right]$$

$\int u e^{u}\,du$

معادله برنولی:

صورت کلی

$$y' + y\,f(x) = y^{\alpha}\,r(x)$$

برای حل مسأله طرفین را بر y^{α} تقسیم می کنیم سپس تغییر متغیر $u = y^{1-\alpha}$ می گیریم سپس معادله تبدیل به معادله خطی می شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

38: در معادله زیر کدام تغییر متغیر آن را خطی می‌کند.

$y' + y\sin x = y^3\cos x$

39: جواب معادله $y' = xy^2 - y$

y^{-2}

$y' + y = xy^2 \qquad \alpha = 2$

$y'y^{-2} + y^{-1} = x \qquad u = y^{-1} \qquad u' = -y'y^{-2}$

$u' - u = -x$

$h(x) = -x$

$\frac{1}{y} = u = e^{x}\left[\int -xe^{-x}\,dx + c\right]$

40: $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$

$y'y^{-2} + y^{-1} = \cos x - \sin x$

$u = y^{-1} \rightarrow u' = -y'y^{-2}$

$u' - u = \sin x - \cos x$

$h(x) = -x$

$\frac{1}{y} = e^{x}\left[\int \cancel{-x}\,(\sin x - \cos x)e^{-x}\,dx + c\right]$

41: $y' = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$

$y' - \frac{2}{x}y = \frac{x}{y} \qquad \alpha = -1$

$y'y - \frac{2}{x}y^2 = x \qquad u = y^2,\ u' = 2yy'$

$u' - \frac{4}{x}u = 2x$

$h(x) = -4\ln x$

$u = y^2 = x^4\left[\int 2x\,\frac{x}{4}\,dx + c\right]$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y' + y = \frac{x}{y}$$:42

$$y' + y = (x-1)y^2$$:43

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3 \cos x^2}{y}$$:44

$$xy' + y = xy^3$$:45

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3} \qquad \frac{dx}{dy} - xy = \frac{y^3}{x}$$:46

برنولی نسبت به x واضحه

$$x\frac{dx}{dy} - x^2 = y^3 \qquad u = x^2, \quad \frac{du}{dy} = 2x\frac{dx}{dy}$$

$$\frac{du}{dy} - 2yu = 2y^3$$

$$h(y) = -y^2 \qquad u = x^2 = e^{y^2}\left[\int 2y^3 e^{-y^2}\,dy + c\right]$$

$t = y^2$ جزء به جزء

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسیرهای قائم:

$f(x, y, c) = 0$

47: معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم همه دوایری که از مرکز می‌گذرند و مرکز آنها بر روی محور x است کدام است

$(x-c)^2 + y^2 = c^2$

حتی المقدور سعی شود c به یک طرف کشیده شود تا مشتق آن صفر گردد

$x^2+y^2=2cx$

$x+yy'=c$ $\quad$ $x^2+y^2=2x(x+yy')$

$y^2-x^2=2xyy'$ $\quad$ $\frac{-1}{y'}$ $\quad$ $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$ معادله خطوط قائم

48: مسیرهای قائم دسته منحنی $xy=c$ کدام است

$y+xy'=0$

$y+x\left(\frac{-1}{y'}\right)=0$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم $\Rightarrow yy'=x$ $\quad$ $y\,dy=x\,dx$

$y^2-x^2=a$

49. معادله مسیرهای قائم $y=cx^2$ کدام است

$y=cx^2$

$y'=2cx$ $\quad$ $\frac{y}{y'}=\frac{x}{2}$ $\quad$ $\frac{-1}{y'}$ $\quad$ $-yy'=\frac{x}{2}$ $\Rightarrow -2y\,dy=\frac{x}{2}\,dx$

$\frac{1}{2}x^2+y^2=c$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x^3y - xy^3 = c$ -50

$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -51

-52 معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم را بدست آورید $y^2 = cx^3 + x^2 - 1$

$2yy' - 2x = 3cx^2$ $= x\,y^2 - x^2$

$\div$ $y^2 - x^2 + 1 = cx^3$

$= \frac{2yy' - 2x}{y^2 - x^2 + 1} = \frac{3}{x}$ $2xyy' = 3y^2 - x^2 + 3$ $\frac{-1}{y'}$

$y' = \frac{-2xy}{3y^2 - x^2 + 3}$

معادله اصلی منحنی از حذف c بین خودش و معادله دیفرانسیل آن بدست می آید

معادله دیفرانسیل مسیر اصلی

مسیرهای قائم در مختصات قطبی منحنی $f(r, \theta, \frac{dr}{d\theta})$

قائم بر آ $f(r, \theta, -r^2\frac{d\theta}{dr})$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

: 53

$$r = C(1 + \sin\theta)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = C\cos\theta \qquad \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$ معادله دیفرانسیل مسیر اصلی

$$\frac{r}{-r^2\frac{d\theta}{dr}} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم بر منحنی اصلی

$$\frac{-dr}{r} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta \times \frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

$$-\ln r = -\ln k(1-\sin\theta)$$

$$r = k(1-\sin\theta)$$

: 54 معادله مسیرهای قائم

$$r = 2C\cos\theta$$

$$\frac{dr}{d\theta} = -2C\sin\theta \qquad \frac{r}{dr/d\theta} = -\cot\theta$$

$$\frac{r}{-r^2\frac{d\theta}{dr}} = -\cot\theta \qquad \frac{dr}{r} = \cot\theta\,d\theta$$

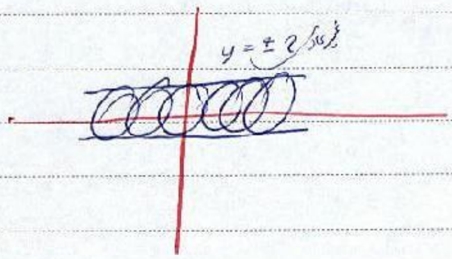
$$\ln r = \ln a\sin\theta \qquad r = a\sin\theta$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جواب غیرعادی

منحنی مماسی آن به کلیه منحنیهای (دسته منحنی) جواب عمومی و به هر کدام در یک نقطه مماس می شود

$$y^2(1+y'^2)=4 \Rightarrow \begin{cases} (x-c)^2+y^2=4 \\ -2(x-c)=0 \quad \text{مشتق نسبت به } c \end{cases}$$



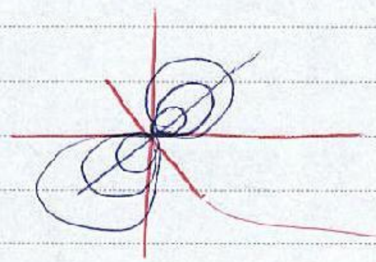
پوش یک دسته منحنی منحنی است که بر کلیه منحنی‌های (دسته منحنی) جواب عمومی و به هر کدام در یک نقطه مماس می شود.

برای بدست آوردن پوش c را بین دسته منحنی و مشتق آن نسبت به c حذف می کنند.

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c}=0 \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دوایری را نشان می دهد که از مرکز می گذرند و مرکزشان $(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$.
روی نیمساز است.

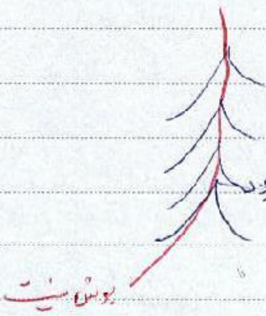


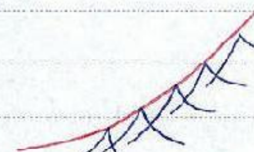
$$(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$$

$$-2(x-c)-2(y-c)=4c$$

$x+y=0$

تمام $x+y=0$ پوش نیست فقط $(0,0)$





برای اینکه نقاط ~~بوجود~~ استثنایی دیگری را بدست آوریم داریم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0 \end{cases}$$

اگر یک دسته منحنی ~~هکلان~~ چنین نقاط استثنایی داشته باشد از رابطه $\frac{\partial F}{\partial c}=0$، $F(x,y,c)=0$
هم بدست می آید که باید جوابهای بدست آمده از رابطه های قبل را از این رابطه ها حذف کرد

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$(\quad) (\quad) = 0$

مثلاً $y = x^n$ d

جواب غیرعادی دیفرانسیل دارد

جواب عمومی نباید حذف شود

وگرنه غلط می‌شود

معادلاتی که نسبت به مشتق حل می‌شوند: $F(x, y, y') = 0$

حالت ۱: $F(y') = 0$ تابع فقط تابعی از y' باشد

$\ln y' - \sin y' = 0$

$y'^7 - 3y'^6 + 4y'^4 - 3y'^2 + y' - 1 = 0$

زمانی می‌توان حل کرد که معادله لااقل دارای یک ریشه حقیقی $y' = k$ باشد

$$\Rightarrow F(k) = 0 \qquad y = kx + c \Rightarrow k = \frac{y - c}{x} \Rightarrow F\left(\frac{y - c}{x}\right) = 0$$

$$y' - 2 = 0 \Rightarrow \frac{y - c}{x} - 2 = 0$$

جمع توابع پیوسته پیوسته است

$\ln y' - \sin y' = 0$

$\pi \quad + \quad + \quad +$ > لااقل یک ریشه حقیقی دارد

$\frac{\pi}{4} \quad -$

$$\Rightarrow \ln \frac{y - c}{x} = \sin \frac{y - c}{x}$$

$$y'^7 - 3y'^6 + 4y'^4 - 3y'^2 + y' - 1 = 0 \qquad \left(\frac{y - c}{x}\right)^7 - 3\left(\quad \right) \cdots - 1 = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$f(x, y, y')$

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c} = 0 \end{cases}$$ جواب عمومی

اگر معادله ای نسبت به مشتق حل شود معمولاً به فرم پارامتری مطرح می‌شود.

حالت اول

$f(y, y') = 0$

$y = f(y')$

$y' = p \Rightarrow dy = p\,dx$

$dy = f'(p)\,dp$

$$p\,dx = f'(p)\,dp \longrightarrow \begin{cases} y = f(p) \\ x = \displaystyle\int \frac{f'(p)}{p}\,dp + c \end{cases}$$

$$y = y'^2 e^{y'}$$

$$y = p^2 e^p \rightarrow p\,dx = e^p (2p + p^2)\,dp \quad , \quad p(\quad) = 0$$

$p = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ در معادله صدق می‌کند و چون y وابسته به c نیست جواب غیرعادی است

$$\begin{cases} y = p^2 e^p \\ x = e^p + p e^p + c \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حالت دوم

$x = f(y')$

$y' = p \rightarrow dx = \frac{1}{p}\,dy$

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int p\, f'(p)\, dp + C \end{cases}$$

$\rightarrow dx = f'(p)\, dp$

$\frac{1}{p}\, dy = f'(p)\, dp$

۱- جواب عمومی کدام است

$x = 2y' + \sin y'$

$$\begin{cases} x = 2p + \sin p \\ y = p^2 + p\sin p + \cos p + C \end{cases}$$

$\frac{1}{p}\, dy = (2 + \cos p)\, dp$

$p \neq 0$

حالت سوم

$x = f(y, y')$

$y' = p \rightarrow dx = \frac{1}{p}\, dy$

$x = f(y, p)$

$x = 4y^2 + e^{y'} - \cos y'$

$\begin{cases} x = 4y^2 + e^{p} - \cos p \\ \textcircled{}\ \leftarrow p \text{ نتیجه حل برای حذف} \end{cases}$

$\frac{1}{p}\, dy = 8y\, dy + (e^{p} + \sin p)\, dp$

$(-\frac{1}{p} + 8y)\, dy + (e^{p} + \sin p)\, dp = 0$ نسبت به مشتق حل می‌شود

حالت چهارم:

$y = f(x, y')$

$y' = p \rightarrow dy = p\, dx$

$\begin{cases} y = f(x, p) \end{cases}$

$y = x^2 y'^2 + y'^3 \rightarrow \begin{cases} y = x^2 p^2 + p^3 \\ p \text{ برای حذف } \text{ وارد شود} \end{cases}$

$p\, dx = 2xp^2\, dx + (2px^2 + 3p^2)\, dp$ نتیجه حل معادله