Subject:
Year. Month. Date. ( )

-۵

$y_1=\sqrt{1-x}$ جواب $\Rightarrow y''+\frac{1}{4(x-1)^2}y=0$

جواب دوم کدام است ؟

حل

$\Rightarrow y_2=u\,y_1 \qquad u=\int \frac{1}{1-x}\,dx$ e^0

حل معادلات با استفاده از سری توانی :

$f(x)$, $x=a$

تابع $f(x)$ در $x=a$ تحلیلی است اگر در $x=a$ دارای بسط تیلور با شعاع همگرایی مثبت باشد

بسط مک لورن $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$

تیلور $(x-c)$

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$

$y''+y'f_1(x)+yf_2(x)=f_3(x)$

اگر سه تابع f_1 و f_2 و f_3 در نقطه a تحلیلی باشند می‌توان بسط تیلور را به کار گرفت

۱- اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر با شرایط اولیه $y(0)=0$ و $y'(0)=1$ باشد مشتق مرتبه سوم در نقطه (0) کدام است

$y(0)=0 \qquad y'(0)=1 \qquad y'''(0)=?$

$e^{-x}y''+xy'+y=3 \qquad y''(0)+0+0=3 \qquad y''(0)=3$

$-e^{-x}y''+e^{-x}y'''+y'+xy''+y'=0 \qquad -3+y'''(0)+1+0+1=0$

$y'''(0)=1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2 - اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر با شروط زیر باشد در بسط تابع $y(x)$ برحسب توانهای صعودی x ضریب x^3 کدام است $y(0)=-2$ و $y'(0)=2$

$y''-(x^2+1)y=0$ $\qquad \frac{y'''}{3!}=?=\frac{1}{3}$

$y'''=2xy+(x^2+1)y'$ $\qquad y'''_{(0)}=2$ [illegible]

3 - ضریب x^3 کدام است

$y''+y'\sin x+ye^x=0$ $\qquad y_{(0)}=y'_{(0)}=1$

$y''_{(0)}=-1$ $\qquad y'''+y''\sin x+y'\cos x+y'e^x+ye^x=0$

$y'''(0)=-1-1-1=-3$ $\qquad \frac{-3}{3!}=-\frac{1}{2}$

4 - هرگاه $y=\Sigma a_n x^n$ جوابی بصورت سری توانی برای معادله $y''-2xy'+8y=0$ و $y'(0)=0$ و $y_{(0)}=12$ باشد آنگاه ضریب a_2 کدام است.

$a_2=\frac{y''_{(0)}}{2!}$ $\qquad y''_{(0)}=-8\times 12$ $\qquad a_2=-48$

5 - 〃 〃 〃 $y''+xy=0$

و $y_{(0)}=y'_{(0)}=1$ ضریب a_3 کدام است

$y''_{(0)}=0$

$y'''_{(0)}+1=0$ $\qquad y'''=-1$ $\qquad a_3=\frac{-1}{6}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$P_1(x)y'' + P_2(x)y' + P_3(x)y = 0$$

در معادله فوق که P_1 و P_2 و P_3 سه تابع چندجمله‌ای هستند (cm. .co نیستند) نقطه $x=a$ را یک نقطه معمولی گوییم اگر $P_1(a)\neq 0$ باشد

• در معادله فوق اگر $x=a$ یک نقطه معمولی باشد آنگاه هر جواب معادله به صورت سری توانی بیان می‌شود.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n + \dots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots$$

$\Rightarrow y = c$ (یک سری توانی برحسب توانی x) $+ C^*$ (یک سری توانی دیگر برحسب توانی x)

1- اگر $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب معادله $y'' - xy' = 0$ باشد آنگاه

4) $a_{n+3} = -$ ″ 3) $a_{n+3} =$ ″ 2) $a_{n+2} = \frac{-n}{(n+1)(n+2)} a_n$ 1) $a_{n+1} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} a_n$ ✓

۲ تابعی که در حل مسأله مشخص نمی‌شوند یا پارامترهای مساله هستند

$$2a_2 + 6a_3 x + \dots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$+ \quad -a_1 x + \dots - n a_n x^n$$ رابطه بازگشتی

$a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = 0 \Rightarrow a_6 = 0$

a_1 و a_0 را پارامتر حساب

$y = a_0 \qquad + a_1\left(x + \frac{1}{6}x^3 \dots\right)$

اگر $a_2 = 0$ نبود یک سری هم با a_0 باز می‌شد

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2 $y''-xy'+y=0$ ساده حل

$$2a_2+6a_3x+\dots+(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\dots$$
$$-a_1x-\dots-na_nx^n\dots$$
$$a_0+a_1x+\dots+a_nx^n\dots$$

$$a_2=-\frac{1}{2}a_0\quad,\ a_3=0$$

if $y''-xy'-y=0$

$$a_{n+2}=\frac{1}{(n+2)}a_n$$

$$-a_0\quad -a_1x\quad\dots-a_nx^n$$

$$a_2=\frac{1}{2}a_0\qquad a_3=\frac{1}{3}a_1$$

$$y=a_0\left(1+\frac{1}{2}x^2+\dots\right)+a_1\left(x+\frac{1}{3}x^3+\dots\right)$$

شعاع همگرایی از رابطه بازگشتی گرفته می شود

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{\text{جمله بعد}}{\text{جمله قبل}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{n+2}=0\quad R=\infty$$

شعاع همگرایی

جمله بعد از a_n می شود a_{n+2}

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله لژاندر: $(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0$ $\quad P_1(a) \neq 0$

نقطه $x=0$ یک نقطه معمولی تلقی می‌شود

$$C_{n+2} = -\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+2)(n+1)} C_n$$ رابطه بازگشتی ⇐ جایگذاری

شعاع همگرایی $R=1$ فاصله همگرایی $[-1,1]$

اگر به n صفر داده شود c_2 و اگر یک داده شود c_3 حساب می‌شود ⇐ c_0 و c_1 قابل محاسبه نیستند.

$$\Rightarrow y = c_0(1 + \square x^2 + \emptyset x^4) + c_1(x + \boxtimes x^3 + \emptyset x^5 + \dots)$$

$C_6 = 0$ if $m(m+1) = 20 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow C_6 = C_{n+2} \Rightarrow n = 4 \Rightarrow (m-n) = 0$

$\Rightarrow C_6 = 0 \Rightarrow C_8 = 0 \Rightarrow \dots$

$m(m+1) = 12 \quad m = 3$

$$y = c_0(1 + \bigcirc x^2 \square x^4 + \dots) + c_1(x + \emptyset x^3)$$

یک چند جمله‌ای از درجه m که فقط زوج است یا فقط فرد حتماً در معادله صدق می‌کند.

فرد $ax^5 + bx^3 + cx \dots$

$m=4 \quad c_0 + c_2x^2 + c_4x^4$ در معادله صدق می‌کند

$$\Rightarrow c_0(1 + \bigcirc x^2 + \square x^4)$$

PAPCO

$$c_{n+2} = -\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+2)(n+1)} c_n \Rightarrow c_n = \frac{\bigcirc}{\square} c_{n+2}$$

$$\Rightarrow c_4 (x^4 + \bigcirc x^2 + \square)$$

اگر c_n را مطابق زیر بگیریم

$$c_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

چندجمله‌ای لژاندر $12x^4 + 8x^2 + 6$ مثلاً جواب مثلاً $\Rightarrow$

چندجمله‌ای لژاندر را با $P_n(x)$ نشان می‌دهند

ضریب $= 20 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow$ جواب $= P_4(x)$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$ لازم نیست حفظ شود

یا $$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$ فرمول رودریگز

یا $$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

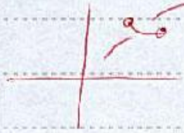
$$x=1 \Rightarrow \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) t^n \Rightarrow P_n(1) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} P_0(x)=1 \\ P_1(x)=x \\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x) \end{array}\right\}$$ حفظ شوند

شرط تعامد P_n ها $\qquad \int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx=0 \qquad m\neq n$

$$\int_{-1}^{1}\left(P_n(x)\right)^2 dx=\frac{2}{2n+1}$$

اگر تابع f در شرایط قضیه دیریکله صدق کند (نقاط انفصال محدود باشد و در نقاط انفصال حد چپ و راست موجود باشد (تابع پیوسته قطعه ای است) «تابع و مشتق آن به طور قطعه ای پیوسته باشد» در این صورت در نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ را می توان به صورت زیر بسط داد:



$$f(x)=\sum_{0} C_n\,P_n(x)$$

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_n(x)\,dx$$

در نقطه ناپیوستگی میانگین حد چپ و راست می شود

Subject.
Year. Month. Date. ( )

1- $\int_{-1}^{1} (\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma)\, P_{2n-1}(x) = 0$

زوج   فرد

2- $P_0(x) = 1$ و $P_1 = x$ و $-1 < x < 1$ و $P_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

مقادیر α و β و γ چگونه باشند که P_0 و P_1 و P_2 یک مجموعه متعامد باشند

β نباید باشد پس $\beta = 0$ $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$\int_{-1}^{1} P_1(x) P_2(x)$ $\int_{-1}^{1} P_0(x) P_2(x)$ $\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\, dx = \frac{2}{2n+1}$

سه معادله سه مجهول

3- $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2)\, P_{2n+1}(x)\, dx = 0$

4- P_2 y_1 جواب و $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ نزدیکتر با لاندا m=2

P_1 y_2 = جواب و $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ نزدیکتر با لاندا 1

$\int_{-1}^{1} x y_1 y_2\, dx = 0$

$\int_{-1}^{1} y_1 y_2\, dx = 0$ ✓

$\int_{-1}^{1} y_1 y_2\, dx = \frac{2}{5}$

$\int_{-1}^{1} y_1 y_2\, dx = \frac{2}{3}$

$$\int_{-1}^{1} x^3 P_2(x)\,dx = 0$$ -5

$$\int_{-1}^{1} (x+1) P_0 \, dx = \qquad P_0 = 1$$ -6

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$P_1(x) y'' + P_2(x) y' + P_3(x) y = 0$$

P_1 و P_2 و P_3 سه تا چندجمله‌ای

اگر $P_1(a)=0$ آنگاه a یک نقطه منفرد است.

~~$P_1(x)$~~ $P_1(a) = 0 \Rightarrow P_1(x) = (x-a)(Q(x))$

$$\Rightarrow y'' + \frac{g(x)}{(x-a)} y' + \frac{h(x)}{(x-a)^2} y = 0$$

$g(x) = \frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$ = گویا   اگر مخرج صفر شود تحلیلی نیست

اگر $g(x)$ و $h(x)$ در $x=a$ تحلیلی باشند آنگاه a را منفرد منظم گویند و اگر لااقل یکی تحلیلی نباشد منفرد نامنظم است.

۱۸ـ در معادله زیر نوع نقاط تکین (منفرد) را تعیین کنید

$$x^2 (x-1)^3 y'' + x(x-1) y' + y = 0$$

نقاط منفرد

$x=0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ تحلیلی

$\Rightarrow x=0$ منفرد منظم

$h(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ تحلیلی

$x=1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ در $x=1$ تحلیلی نیست $\Rightarrow x=1$ منفرد نامنظم

در حالت منفرد نامنظم مسأله حل نمی‌شود

2

$x^2(1-x)y'' + y' - y = 0$ نقاط تکین $0, 1$

$x=0$ $g(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ تحلیلی نیست $\Rightarrow x=0$ نقطه تکین نامنظم

$x=1$ $g(x) = \frac{1}{x^2}$ تحلیلی $\Rightarrow h(x) = -\frac{x-1}{x^2}$

$x=1$ منفرد منظم

فرض شود $x=0$ یک نقطه منفرد منظم باشد

$P_1(x)y'' + P_2(x)y' + P_3(x)y = 0$

$y'' + \frac{g(x)}{x}y' + \frac{h(x)}{x^2}y = 0$

$g(x)$ و $h(x)$ هر دو در $x=0$ تحلیلی باشند.

اگر $x=0$ یک نقطه منفرد منظم برای معادله باشد آنگاه معادله لااقل دارای یک جواب به صورت سری توسعه یافته سری توانی است

$y = x^r \sum a_n x^n , a_0 \neq 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله شاخصی $\Rightarrow r^2 + r(g(0) - 1) + h(0) = 0$ ضریب کمترین توان ها را صفر می گذاریم

1- ریشه های معادله شاخصی معادله زیر کدام است

$$3x(3x+2)y'' - 4y' + 4y = 0$$

ابتدا معادله g و h را تعیین می کنیم

$$g(x) = \frac{-4}{3(3x+2)} \quad , \quad h(x) = \frac{4x}{3(3x+2)}$$

$$r^2 + r\left(-\frac{2}{3} - 1\right) + 0 = 0 \qquad r_1 = 0 \quad r_2 = \frac{5}{3}$$

2- ریشه های معادله شاخصی کدام است

$$x^2 y'' - 3x y' + (x+4)y = 0$$

$$g(x) = -3 \quad , \quad h(x) = x + 4 \qquad \Rightarrow r^2 + r(-3 - 1) + 4 = 0$$

$$r = 2 , 2$$

3- ریشه های معادله شاخصی کدام است

$$x y'' + y' + y = 0 \qquad g(x) = 1 \quad , \quad h(x) = x$$

$$r^2 + r(1 - 1) + 0 = 0 \qquad r_1 = r_2 = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حالت های بررسی

1. معادله شاخص دارای دو ریشه متمایز $r_1 \neq r_2$ و تفاضل ریشه ها عدد صحیح نباشد

$$y_1 = x^{r_1} \sum \cdots$$
$$\Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = x^{r_1 - r_2}(\cdots$$
$$y_2 = x^{r_2} \sum \cdots$$

$$y_1 = x^{r_1} \sum_0 a_n x^n \quad \text{و} \quad y_2 = x^{r_2} \sum_0 b_n x^n$$

2. $\Delta = 0$ و یک ریشه بدست آید: مرادف های خودش می گذاریم

$$y_1 = x^r \sum_0 a_n x^n$$

$$y_2 = u y_1$$ خارج قسمت تابعی از x

$$y_2 = y_1 \ln x + x^r \sum_1 b_n x^n$$

حتما جواب شامل تابع log است

اگر بجای ۱ صفر بگذارند باز گزینه درست است
ولی درست‌تر ۱ است

3. $r_1 > r_2$ و تفاضل ریشه ها عدد صحیح است

جواب اول با r_1 بزرگتر

$$y_1 = x^{r_1} \sum_0 a_n x^n$$

در اکثر مواقع $k=0$ می شود

$$y_2 = k y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_0 b_n x^n$$

Subject:
Year.   Month.   Date.

۱- دوجواب مستقل معادله $3xy'' + 2y' + y = 0$ به چه صورت است

$g(x) = \frac{2}{3}$ $h(x) = \frac{x}{3}$

$r^2 + r(\frac{2}{3} - 1) + 0 = 0$ $r^2 - \frac{1}{3}r = 0$ $r_1 = 0$ و $r_2 = \frac{1}{3}$

$y_1 = x^{\frac{1}{3}} \sum \text{—}$, $y_2 = \sum \text{—}$

$y = C_1 y_1 + C_2 y$

2- جوابهای مستقل

$3x(x+1)y'' + 2(x+1)y' + 4y = 0$

$g(x) = \frac{2(x+1)}{3(x+1)} = \frac{2}{3}$ $h(x) = \frac{4x}{3(x+1)}$

$r^2 + r(\frac{2}{3} - 1) + 0 = 0$ $r_1 = 0$ $r_2 = \frac{1}{3}$

مشابه بالا

3- جواب مستقل قیدشده $x > 0$ $x^2 y'' + 3xy' + (1+x)y = 0$

$g(x) = \frac{3x}{x} = 3$ $h(x) = \frac{x(1+x)}{x}$

$r^2 + 2r + 1 = 0$ $r_1 = r_2 = -1$

$y_1 = x^{-1} \sum a_n x^n$ $y_2 = y_1 \ln x + x^{-1} \sum b_n x^n$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادلهٔ بسل

فرم کلی $\quad x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

می‌بینید جمله‌ای که ضریب y'' در $x=0$ صفر می‌شود (=) $x=0$ منفرد است

$x=0 \Rightarrow g(x)=1 \quad , \quad h(x) = x^2 - \nu^2$

$r_1 = \nu$

$r_2 = -\nu$

اگر ν صحیح باشد حالت سوم
اگر ν صفر باشد حالت دوم

رابطهٔ بازگشتی معادله بسل $\quad c_{n+2} = \dfrac{c_n}{(n+2)(n+2+2\nu)}$

شعاع همگرایی سری بی‌نهایت است و همه جا جواب می‌دهد

r_1 را در مسأله می‌گذاریم تا اگر در حالت سوم است ریشه بزرگتر باشد و اگر حالت دوم و ... است فرقی نمی‌کند

$$d_{n+2} = \frac{d_n}{(n+2)(n+2+2\nu)}$$

ν هر مقداری باشد جواب اول‌ها مثل هم است و اختلاف در جواب دوم است

$y_1 = x^{\nu} a_0 (1 + \bigcirc x^2 + \square x^4 + \dots) = J_\nu(x)$ تابع بسل نوع اول (نیو)

جایگذاری نیو

معادله صادق است به ازای جمیع مقادیر a_0

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}$$

یا $\nu!$

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\, m!\, \Gamma(\nu+m+1)} x^{2m}$$ تابع بسل نوع اول : جواب اول معادله بسل

جدول دارد و تا سه رقم ثبت اعشار حساب شده.

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

حتماً حالت 3 است اگر n صحیح باشد و حتماً n مخالف صفر می‌شود

$$(x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x) \Rightarrow \int x^\nu J_{\nu-1}(x)\,dx = x^\nu J_\nu(x) + C$$

$$(x^{-\nu} J_\nu(x))' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \Rightarrow \int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\,dx = \underset{\text{منفی}}{-}x^{-\nu} J_\nu(x) + C$$

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

$\int J_0\,dx =$ غیرقابل ملاحظه

1- با توجه به فرمول $xJ_n' = -nJ_n + xJ_{n-1}$ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_0^1 x(1-x^2) J_0\,dx = 2J_2(1)$$

$$\int_0^1 x J_0\,dx = x J_1(x)\Big|_0^1 = J_1(1)$$

اگر به فرمول نخورد باید با جزء به جزء مطابق فرمولهای بالا شود

جزء به جزء

$$\int x^2 (x) J_0\,dx = x^2 x J_1 x \Big|_0^1 - 2\int_0^1 x^2 J_1\,dx = J_1(1) - 2x^2 J_2(x)\Big|_0^1$$

$$= 2J_2(1)$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

2 - با توجه به $nJ_n - xJ_{n+1} = -xJ'_n + xJ_{n-1}$ انتگرال را حساب کنید

$$\int_0^1 r^2 J_1(r)\,dr = J_2(1)$$

مثال:

$$\int x^2 J_2(x)\,dx = \int x^3\left(x^{-1} J_2(x)\,dx\right) = -x^3 x^{-1} J_1(x) + 3\int x^2 x^{-1} J_1\,dx$$

$\gamma = 0$

$$\int x J_1\,dx = -x J_0 + \int J_0\,dx$$

جزء به جزء ← [illegible] را می‌گیریم

جوابهای دوم

برای حالت یک

$$y = A J_\nu(x) + B J_{-\nu}(x)$$

جواب دوم را : $J_{-\nu}(x)$ می‌گیریم

برای حالت دو

اگر y_1 و y_2 مستقل باشند هر کدام با ترکیب خطی هر دو مستقل است و ترکیب خطی آنها هم جواب است

[illegible] $y_2 = J_0 \ln x + \sum_1 b_n x^n$

جواب دوم $Y_0 = \underset{\frac{2}{\pi}}{a}\left(J_0 + \underset{\gamma - \ln 2}{b}\, y_2\right)$

Subject:
Year Month Date

وقتی تفاضل عدد صحیح باشد که k صفر نیست

$$y_2 = k\, J_n(x) + x^{-n} \sum_0 b_n x^n$$

حالت 2

$$y = A J_0(x) + B Y_0(x)$$

بعد $\quad Y_n = a\,(J_n + b y_n)$

$$y = A J_n(x) + B Y_n(x)$$

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left(J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)\right)$$ تابع بسل نوع دوم

به ازای این جواب معادله بسل می‌شود

$$y = A J_\nu(x) + B Y_\nu(x)$$ تابع بسل نوع دوم

1- اگر جواب معادله $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$ برابر $y = c_1 y_n + c_2 Y_0$

آنگاه جواب معادله زیر کدام است

$$x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - n^2) y = 0$$

$$y = A J_\nu(\lambda x) + B Y_\nu(\lambda x)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2- جواب معادله زیر کدام است

$$x^2y''+xy'+\left(25x^2-\frac{9}{4}\right)y=0$$

$$z=5x \rightarrow \frac{dz}{dx}=5$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=5\frac{dy}{dz}$$

$$y''=5^2\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$z^2\frac{d^2y}{dz}+z\frac{dy}{dz}+\left(z^2-\frac{9}{4}\right)y=0$$

$$y=A\,J_{3/2}(5x)+B\,Y_{3/2}(5x)$$

-3

$$\cancel{4}x^2y''+\cancel{4}xy'+(\cancel{8}^{\,2}x^2-\tfrac{1}{\cancel{4}})y=0$$

$$y=A\,J_{1/2}(\sqrt{2}\,x)+B\,Y_{1/2}(\sqrt{2}\,x)$$

-4

$$x^2y''+xy'+(9x^2-4)y=0$$

Subject.
Year. Month. Date. ( )

5- جواب معادله کدام است

$xy'' - y' + xy = 0$ فرض مسئله $y = ux$ $\qquad y' = u + xu'$ و $y'' = 2u' + xu''$

$x^2u'' + 2x\cancel{u'} - u - x\cancel{u'} + x\,xu = 0 \Rightarrow x^2u'' + xu' + (x^2-1)u = 0$

$\underbrace{u = AJ_1(x) + BY_1(x)}$ $\qquad y = x(\quad\quad)$

6- سؤال بالا با کدام یک از تغییر متغیرهای زیر تبدیل به بسل می شود

$y = ux$

$xy'' + (1+2\nu)y' + xy = 0$

با تغییر متغیر $y = x^{-\nu}Z$ تبدیل به بسل می شود

7- جواب کدام است

$\cancel{9}x^2y'' + \cancel{9}xy' + 4(9x^4 - \frac{1}{4})y = 0$

$Z = x^2 \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 2x$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dx} = 2x\frac{dy}{dZ}$

$y'' = 2\frac{dy}{dZ} + (2x)^2\frac{d^2y}{dZ^2}$

$\cancel{4}Z^2\frac{d^2y}{dZ^2} + \cancel{4}Z\frac{dy}{dZ} + \cancel{4}(Z^2 - \frac{1}{9})y = 0$ $\qquad$ بسل با اندیس $\frac{1}{3}$

$y = AJ_{1/3}(x^2) + BY_{1/3}(x^2)$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله $x^2y''+xy'+4(x^4-\nu^2)y=0$ با تغییر متغیر $z=x^2$ تبدیل به معادله بسل با اندیس ν می شود

تبدیل لاپلاس:

$$\mathcal{L}(f(t))=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

لاپلاس و لاپلاس معکوس خاصیت خطی دارند

$$\mathcal{L}^{-1}F(s)=f(t)$$

$f(t)$	$F(s)$
k	$\frac{k}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{2}{s^6}=\frac{2}{5!}\mathcal{L}^{-1}\frac{5!}{s^6}=\frac{2}{5!}t^5$$

$\Gamma(\alpha+1)=\alpha!$, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^{3/2}}=\frac{1}{\Gamma(3/2)}\mathcal{L}^{-1}\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}t^{1/2}$$

$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

۱- اگر a یک عدد حقیقی باشد لاپلاس $f(t)=e^{iat}$ کدام است؟

$$= \frac{1}{s-ia}$$

2- $\mathcal{L}^{-1} \dfrac{8-6s}{16s^2+9}$ کدام است؟

$$\frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\frac{8-6s}{s^2+(3/4)^2} = \frac{1}{16}\left(8\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+(3/4)^2} - 6\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+(3/4)^2}\right.$$

$$\frac{1}{16}\left[8\times\frac{4}{3}\sin(\tfrac{3}{4}t) - 6\cos(\tfrac{3}{4}t)\right]$$

3- اگر $\mathcal{L}(f(t))=\dfrac{1}{s^4}$ ، $f(t)=?$ ؟

$$f(t)=\frac{t^3}{6}$$

4- a و b را طوری تعیین کنید که تابع $\dfrac{as+b}{s^2+4}$ تبدیل لاپلاس تابع $2\sin 2t+4\cos 2t$ باشد؟

$a=4$, $b=4$

5- مطلوب است $\mathcal{L}^{-1}\dfrac{4-5s}{s^{3/2}}$

$$=4\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^{3/2}} - 5\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^{1/2}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}}t^{1/2} - \frac{5}{\sqrt{\pi}}t^{-1/2}$$

6- حاصل $\int_0^\infty e^{-2t}\cos t\,dt$ کدام است؟

$$=\mathcal{L}\cos t\Big|_{s=2} = \frac{s}{s^2+1}\Big|_{s=2} = \frac{2}{5}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

7

$$\int_0^\infty e^{-3t} \sin t \cos t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-3t} \sin 2t\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\Big|_{s=3}$$

اگر عامل e نباشد می‌توان s را صفر گرفت. درحقیقت می‌شود انتگرال‌های از این دست را با لاپلاس حل کرد

تبدیل لاپلاس مشتق :

$$\mathcal{L} f'(t) = s\,\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

$$\mathcal{L} f''(t) = s^2 \mathcal{L}(f(t)) - s f(0) - f'(0)$$

1 $f(t) = t \Rightarrow f'(t) = 1 \Rightarrow \frac{1}{s} = s\mathcal{L}(t) - 0 \Rightarrow \mathcal{L}(t) = ?$

2 $f(t) = e^t \Rightarrow f'(t) = e^t \Rightarrow \mathcal{L}(e^t) = s\mathcal{L}(e^t) - 1 \Rightarrow \mathcal{L}(e^t) = ?$

3 $f(t) = t\sin t \Rightarrow f'(t) = \sin t + t\cos t$

$f''(t) = 2\cos t - t\sin t$

$$\Rightarrow \mathcal{L} f'' = \frac{2s}{s^2+1} - \mathcal{L}(t\sin t) = s^2 \mathcal{L}(t\sin t) - 0 - 0 \Rightarrow \mathcal{L}(t\sin t) = ?$$

۱- هرگاه $y'' - y' + y = t$ ، $y(0) = y'(0) = 0$ آنگاه لاپلاس y کدام است =

هرگاه معادله شرایط مرزی در نقطه ۰ داشته باشد از لاپلاس حل شود راحت‌تر است.

$$\mathcal{L}y'' - \mathcal{L}y' + \mathcal{L}y = \mathcal{L}t \qquad s^2 Y - sY + Y = \frac{1}{s^2} \qquad Y = ?$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضایای انتقال:

۱- انتقال بر روی sها:

$$\mathcal{L}\left(e^{at}f(t)\right)=F(s-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}F(s-a)=e^{at}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}F(s)}_{f(t)}$$

۱- تبدیل لاپلاس $2e^{-2t}\sin 2t$ کدام است؟

$$\mathcal{L}\,2e^{-2t}\sin 2t=2\cdot\frac{2}{(s+2)^2+4}$$

2- لاپلاس معادله روبرو کدام است؟ $f(t)=e^{3t}(2\cos 5t-3\sin 5t)$

$$\frac{2s}{s^2+25}-\frac{15}{s^2+25}=\frac{2(s-3)}{(s-3)^2+25}-\frac{15}{(s-3)^2+25}$$

3- لاپلاس $f(t)=e^{-t}\cos t$ کدام است؟

$$=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

4- لاپلاس تابع $f(t)=e^{t}\overbrace{\int_0^t xe^{x}\,dx}^{f_1(t)}$ کدام است؟

$$F(s)=F_1(s-1)$$

$$F_1(s)=\mathcal{L}\int_0^t xe^{x}\,dx=\frac{1}{s}F_2(s)$$

$$F_2(s)=\mathcal{L}(te^{t})=F_3(s-1)$$

$$F_3(s)=\mathcal{L}\,t=\frac{1}{s^2}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

5 - تبدیل معکوس $\frac{1}{\sqrt{9s-1}}$ کدام است؟

$$\frac{1}{3}\, \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{\sqrt{s-\frac{1}{9}}} = \frac{1}{3}\, e^{\frac{t}{9}}\, \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}}_{\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}}$$

6 - تبدیل معکوس $\frac{s-1}{s^2-2s+5}$ کدام است؟ مخرج باید مربع کامل شود .

گام بعد در صورت ها نیز کامل مخرج را می بینیم

$3s+7$

7

$$\frac{s-1}{s^2-2s+5} = \frac{(s-1)}{(s-1)^2+4} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} = e^t\, \mathcal{L}^{-1} \frac{s}{s^2+4} = e^t \cos 2t$$

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2+4} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} = e^t\, \mathcal{L}^{-1} \frac{3s+10}{s^2-4} = e^t(3\cosh 2t + 5\sinh 2t$$

$$\frac{2s+3}{s^2+4s+4} = \frac{2(s-2)+7}{(s-2)^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} = e^{2t}\, \mathcal{L}^{-1} \frac{2s+7}{s^2} = e^{2t}(2+7t)$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

-7

$$\mathcal{L}\{x^3 e^{4x}\} = ? = \frac{6}{(s-4)^4}$$

$$\frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s}$$

8- جواب معادله دیفرانسیل $y''+8y'+16y=0$ و $y(0)=2,\ y'(0)=1$ را

$$\mathcal{L}y'' + \mathcal{L}8y' + 16\mathcal{L}y = 0 \qquad s^2Y - 2s - 1 + 8sY - 16 + 16Y = 0$$

$$Y(s+4)^2 = 2s+17 \Rightarrow Y = \frac{(2s+17)}{(s+4)^2} = \frac{2(s+4)+9}{(s+4)^2}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}Y = e^{-4t}\mathcal{L}^{-1}\frac{2s+9}{s^2} = e^{-4t}(2+9t)$$

-9

$$y'' - 2y' + y = xe^x + 4 \quad , y(0) = y'(0) = 1$$

$$\mathcal{L}y'' - 2\mathcal{L}y' + \mathcal{L}y = \mathcal{L}(xe^x + 4) = \mathcal{L}xe^x + \mathcal{L}4$$

$$s^2\mathcal{L}y - s - 1 - 2sY + 2 + Y = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{s}$$

جزء به جزء

$$Y = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2} + \frac{s-1}{(s-1)^2} \Rightarrow \underset{\mathcal{L}^{-1}Y}{y} = e^t\frac{t^3}{3} + e^t + 4\int_0^t te^t\,dt$$

قضیه دوم انتقال: انتقال بر محور t:

تابع پله‌ای واحد

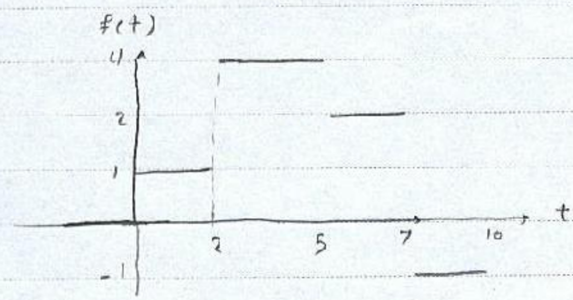
$$U_a(t) = U(t-a) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\int_0^a 0 \cdot e^{-st} dt + \int_a^\infty e^{-st} dt$

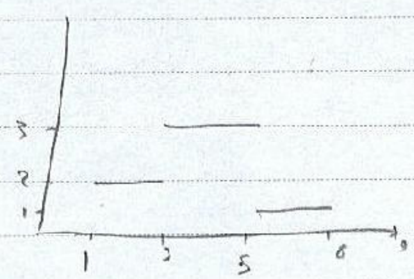
$$\mathcal{L}(U_a(t)) = \int_a^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s} e^{-as}$$

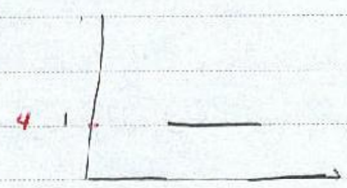
$$\mathcal{L}(U_a(t)) = \frac{1}{s} e^{-as}$$



$$f(t) = U_0(t) + 3U_2(t) - 2U_5(t) - 3U_7(t) + U_{10}(t)$$

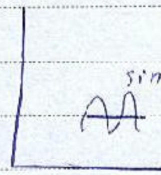
$$2U_1(t) + U_3 - 2U_5 - 3U_8 + 2U_9$$





$$U_a(t) - U_b(t) = \begin{cases} 1 & a < t < b \\ 0 & \text{—} \end{cases}$$

$$f(t) = (U_a(t) - U_b(t))\frac{1}{4}$$



$f(t) = (U_a(t) - U_b(t))\sin t$

$$y'' \_\_\_ = f, \quad f = \begin{cases} t & 0<t<\pi \\ \cos t & \pi<t<2\pi \\ (t^2-1) & t \geq 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = (U_0(t) - U_\pi(t))\,t + (U_\pi(t) - U_{2\pi}(t))\cos t + (t^2-1)U_{2\pi}(t)$$

$$\mathcal{L}(U_a(t)f(t)) = e^{-as}\mathcal{L} f(t+a)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} f(t) = e^{0}\mathcal{L}(t) - e^{-\pi s}\mathcal{L}(t+\pi) + e^{-\pi s}\mathcal{L}\overset{-\cos t}{\overset{\shortparallel}{\cos(t+\pi)}} - e^{-2\pi s}\mathcal{L}\cos(t+2\pi)$$

$$+ e^{-2\pi s}\mathcal{L}((t+2\pi)^2-1) = \frac{1}{s^2} - e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}\right) - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

$$- e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1} - e^{-2\pi s}\left(\frac{2}{s^3} + 4\pi\frac{1}{s^2} + (4\pi^2-1)\frac{1}{s}\right)$$

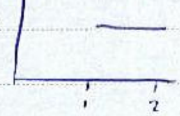
1- تبدیل لاپلاس

$$f(t) = \begin{cases} t & 0<t<2 \\ 2 & t>2 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0<t<2 \\ t & t>0 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 2 & 0<t\leq 1 \\ t & t>1 \end{cases}$$

Subject:
Year. Morth. Date. ( )

2 - تبدیل لاپلاس  کدام است.

حل ۱ قسمت الف:

$$f(t)=\begin{cases} t & 0<t<2 \\ 2 & t>2 \end{cases} = (U_0-U_2)t+2U_2(t)$$

$$\mathcal{L}f(t)=e^{0}\mathcal{L}(t)-e^{-2s}\mathcal{L}(t+2)+2\frac{1}{s}e^{-2s}$$

$$=\frac{1}{s^2}-e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right)+\frac{2}{s}e^{-2s}$$

3 - معادله $y'+2y=f(t)$ و $y_{(0)}=1$ و $f(t)=\begin{cases} 1 & 1<t<2 \\ 0 & \end{cases}$ لاپلاس را کدام است

$\mathcal{L}y=Y$

$$sY-1+2Y=\frac{1}{s}\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)$$

جواب سوال $\checkmark$ $Y=\frac{1}{s+2}+\frac{e^{-s}}{s(s+2)}-\frac{e^{-2s}}{s(s+2)}$

چون معادله:

مهم $\left[\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-as}F(s)\right)=U_a(t)\,f(t-a)\right] \Leftarrow \mathcal{L}(U_a(t)f(t))=e^{-as}\mathcal{L}f(t+a)$

PAPCO

$$f(t) = \int_0^t e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^t = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)$$

$$y = e^{-2t} + U_1(t)\,\frac{1}{2}\left(1 - e^{-2(t-1)}\right) - U_2(t)\,\frac{1}{2}\left(1 - e^{-2(t-2)}\right)$$

۴- تبدیل معکوس $F_s = \dfrac{2e^{-2s}}{s^2+4}$ هرگاه حاصل e^{-2s} آمد باید حتماً از این قضیه استفاده شود (قضیه جابجایی)

$$U_2(t)\sin 2(t-2)$$

سوال بعد

$$\frac{e^{-\pi s}}{(1+s)^2+1} = U_\pi(t)\,\sinh 2(t-2)$$

بعدی

$$\frac{2e^{-2s}}{s^2-4} \qquad F_s = \frac{1}{1+(1+s)^2} \Rightarrow f(t) = e^{-t}\sin t$$

$$\Rightarrow\; = U_\pi(t)\,e^{(t-\pi)}\sin(t-\pi)$$

مشتق گیری از تبدیل لاپلاس

$$\mathcal{L}f(t) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$F'(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left(-t f(t)\right)dt = \mathcal{L}\left(-t f(t)\right) \qquad \text{مشتق نسبت به } s$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left(+t f(t)\right) = -F'(s)$$

مشتق n ام

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left(t^n f(t)\right) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱- حاصل انتگرال کدام است

$$\int_0^\infty t e^{-4t} \cos 2t \, dt$$

$$= L(t\cos 2t)\Big|_{s=4} = -\left(\frac{s}{s^2+4}\right)'\Big|_{s=4} = 0.03 = \frac{3}{100}$$

-2

$$\int_0^\infty x e^{-sx} \cos \beta x \, dx = L(x\cos\beta x) = -\left(\frac{s}{s^2+\beta^2}\right)' = -\frac{s^2+\beta^2-2s^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

$$= \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

-3

$$\int_0^\infty t e^{-2t} \sin t \, dt = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'\Big|_{s=2} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}\Big|_{s=2} = \frac{4}{25}$$

-4

$$L(t^2 e^{-3t}) = \left(\frac{1}{s+3}\right)''$$

با انتقال $\frac{2}{s^2} \to \frac{2}{(s+3)^3}$

-5

$$l(t\cos at)$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

۶- لاپلاس تابع زیر کدام است

$$f(t) = (t-\pi)\, U_{\pi}(t)\, e^{2t} \sin 3t$$

$$= e^{-\pi s} \mathcal{L}\left(t e^{2(t+\pi)} \sin(3t+\pi) \right) = -e^{-\pi s} e^{2\pi} \mathcal{L}\left(e^{2t}\, t \sin 3t\right) \Rightarrow (1)$$

$$\mathcal{L}(t \sin 3t) = -\left(\frac{3}{s^2+9}\right)' = \frac{6s}{(s^2+9)^2}$$

$$(1) \Rightarrow \; = -e^{-\pi(s-2)}\, 6\, \frac{s-2}{((s-2)^2+9)^2}$$

ادامه درس

$$\mathcal{L}(t f(t)) = -F'(s) \qquad \Rightarrow f(t) = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} F'(s)$$

مورد استفاده در توابع ln و Arc می‌باشد.

ا- معکوس F(s) کدام است

$$F(s) = \ln \frac{s-2}{s+2} = \ln(s-2) - \ln(s+2)$$

$$F'(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2} \quad \xrightarrow{\text{معکوس}} \quad e^{2t} - e^{-2t} \quad \ldots -\frac{1}{t}$$

$$f(t) = -\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{t}$$

$$\ln \frac{s}{s-1} = \ln s - \ln(s-1) \qquad \& \quad F'(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} \Rightarrow \text{جواب} : \frac{e^{t}-1}{t}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$F(s) = \ln \frac{(s^2+4\alpha^2)^{1/4}}{s^{1/2}} = \frac{1}{4}\ln(s^2+4\alpha^2) - \frac{1}{2}\ln s$$

$$F'(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+4\alpha^2} - \frac{1}{s}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2t}\,(\cos 2\alpha - 1)$$

ـ۳

$$F(s) = \cot^{-1} s \qquad F'(s) = \frac{-1}{s^2+1} \Rightarrow \text{جواب} : \frac{\sin t}{t}$$

ـ 4

$$\mathcal{L}^{-1}\ \frac{1}{s}\, tg^{-1}\frac{1}{s} = \int_0^t \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$\frac{-1/s^2}{1/s^2+1} = \frac{-1}{s^2+1}$$

5 ـ تبدیل لاپلاس جواب مسأله زیر کدام است.

$$x\ddot{y} + (1-x)y' + y = 0 \qquad y(0)=1 \quad , y'(0) = -1$$

معادله با ضرایب متغیر و قضیه آخر

$$\mathcal{L}\, x\ddot{y} + \mathcal{L}(1-x)y' + \mathcal{L}\, y = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$-(s^2Y - s + 1)' + sY - 1 + (sY - 1)' + Y = 0$$

$$-(2sY + s^2Y' - 1) + sY + \cancel{sY'} - 1 + Y + sY' + Y = 0$$

$$Y'(s - s^2) + Y(2 - s) = 0$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{\cancel{+s+2}}{s(\cancel{+1+s})} - \frac{s-2}{s^2-s} = \frac{-2}{s} + \frac{1}{s-1} \Rightarrow \ln Y = -2\ln s + \ln(s-1)$$

$$= \ln \frac{s-1}{s^2}$$

$$\ln Y = -\frac{1}{2}\ln(s^2 - s) - \frac{3}{2}\ln s + \frac{3}{2}\ln(s-1)$$

$$Y = \frac{s-1}{s^2} \qquad y = 1 - t$$

: 6

$$t\ddot{y} + 2\dot{y} + ty = 0 \qquad \ldots = Y = c - y(0)\,\tan^{-1} s$$

$$L\,t\ddot{y} + 2L\dot{y} + L\,ty = 0$$

$$+(s^2Y - sy(0) - \dot{y}(0))' + 2sY - 2y(0) + Y' = 0$$

$$2sY + s^2Y' - y(0) - 2sY + 2y(0) + Y' = 0$$

$$Y'(s^2 + 1) = -y(0) \qquad Y' = \frac{-y(0)}{(s^2+1)} \Rightarrow Y = -y(0)\tan^{-1}(s) + c$$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس:

اگر $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ موجود باشد آنگاه

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(u)\,du$$

$$\Rightarrow f(t) = t\,\mathcal{L}^{-1} \int_s^\infty F(u)\,du$$

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} \qquad \int F(s) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2+1} \qquad -\frac{1}{2}\sin t$$

$$f(t) = -\frac{t}{s}\sin t$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\, \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = tg^{-1}\alpha$$

$$\|$$

$$\mathcal{L}(\sin\alpha t)/t = \int_s^\infty \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\,ds = tg^{-1}\frac{s}{\alpha}\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - tg^{-1}\frac{s}{\alpha} = tg^{-1}\frac{\alpha}{s}$$

حفظ شود $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2} \quad s=0 \qquad \mathcal{L}\,\frac{\sin t}{t}$

$$\mathcal{L}\,\frac{\sin 2t}{t}$$

PAPCO

در سوال یک بکار رفته $\frac{\pi}{2} - tg^{-1}\frac{1}{\alpha} = tg^{-1}\alpha$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\mathcal{L}\ \dfrac{\sin t}{t}$

$\ln \dfrac{e^{t}}{t}$ حد ندارد و جواب ندارد

$\mathcal{L}\ \dfrac{e^{t}-1}{t} = \int_s^\infty \left(\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{s}\right) ds = \ln(s-1) - \ln s \Big|_s^\infty = \ln\dfrac{s-1}{s}\Big|_s^\infty$

$= \ln \dfrac{s}{s-1}$

قضیه پیچش : (کانولوشن)

کانولوشن

$(f * h)(t) = \int_0^t f(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$

خاصیت جابجایی دارد

$\dfrac{1}{s(s-1)}$ ، $\dfrac{1}{s^3(s^2-1)}$ ، $\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$

$\mathcal{L}^{-1}\ F(s)H(s) = \int_0^t f(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$

$F(s)H(s) = \mathcal{L} \int_0^t f(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s(s-1)} = \int_0^t e^{\lambda}\, d\lambda \qquad (1,\ e^t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2(s^2-1)} = \frac{1}{2}\int_0^t (t-\lambda)^2 \sinh\lambda\, d\lambda \qquad \left(\frac{t^2}{2},\ \sinh t\right)$$

تبدیل به جمع شوند

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2\lambda\, \sin(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s^2+1)^2} = \int_0^t \sin\lambda\, \sin(t-\lambda)\, d\lambda = k(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s^2+1)^3} = \int_0^t k(\lambda)\cos(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s-2)(s+3)^2} = \int_0^t \lambda e^{-3\lambda}\, e^{2(t-\lambda)}\, d\lambda$$

$e^{2t} \cdot te^{-3t}$

۱. جواب $y''+y=f(x),\ y(0)=y'(0)=0$ کدام است

$$s^2Y + Y = F(s)$$

$$Y = \frac{1}{s^2+1}F(s) \Rightarrow y = \int_0^x \sin(x-t)\, f(t)\, dt$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲- جواب معادلهٔ انتگرالی $\varphi(t)=2+\int_0^t e^{t-u}\varphi(u)\,du$ کدام است؟

جواب $=1+e^{2t}$

$\mathcal{L} \quad \mathcal{L}$

$$\Phi(s)=\frac{2}{s}+\Phi(s)\frac{1}{s-1}$$

$$\Phi(s)\left(1-\frac{1}{s-1}\right)=\frac{2}{s} \Rightarrow \Phi(s)=2\frac{s-1}{s(s-2)}$$

$$\frac{s-2}{s-1}$$

$$\varphi(t)=1+e^{2t}$$

۳- جواب معادلهٔ انتگرالی $y(t)=1+\int_0^t y(u)\sin(t-u)\,du$ کدام است؟

جواب $=1+\frac{t^2}{2}$

$\mathcal{L} \quad \mathcal{L}$

$$Y=\frac{1}{s}+\frac{Y}{s^2+1} \Rightarrow Y\left(1-\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{1}{s}$$

$$Y=\frac{s^2+1}{s^3} \Rightarrow 1+\frac{t^2}{2}$$

جابجا

$$f(t)=te^{-t}+\int_0^t \alpha f(t-\alpha)e^{-\alpha}\,d\alpha \Rightarrow \text{جواب}=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)$$

-4

$$F=\frac{1}{(s+1)^2}+F\cdot\frac{1}{(s+1)^2} \qquad F\left((s+1)^2-1\right)=1$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

صرف حاج آقاسی

$$F=\frac{1}{(s+1)^2-1} \Rightarrow f=\frac{e^{-t}}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)$$

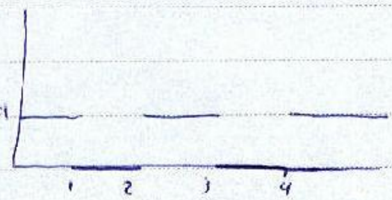
تابع متناوب:

$$f(t+P)=f(P)$$

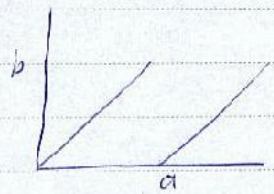
، P کوچکترین عددی باشد که در معادله صدق می کند (دوره تناوب تابع)

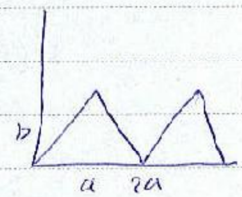
$$\mathcal{L}\, f(t)=\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^{p} e^{-st} f(t)\, dt$$

۱-

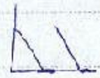


$$\frac{a}{1-e^{-2s}}\int_0^{1} e^{-st}\, dt=\frac{a}{s(1-e^{-s})}$$



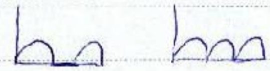


دوره تناوب تعیین می شود

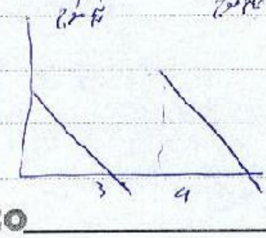


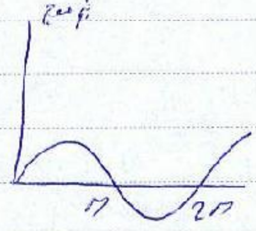
نیم موج

تمام موج



نیم موج





Subject:

Year. Month. Date. ( )