«مقاومت مصالح»

«۱»

«علیرضا جوادیان»

«عمران ۸۲»

علیرضا جوادیان - عمران ۸۲

۸۳/۱۱/۱۲

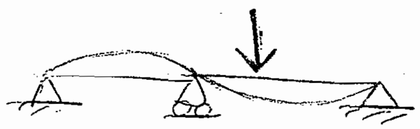
مقاومت مصالح ۱ بنام خدا

میان ترم ۹ خرداد ۸ نمره از ۲۰ نمره

پایان ترم ۲۴ خرداد ۱۰ نمره از ۲۰ نمره

۲ نمره حل تمرین

مسائل نامعین استاتیکی را در مقاومت می توان حل نمود با در نظر گرفتن تغییر شکل اجزای نامعین



مبانی اولیه مقاومت در زمان لئوناردو داوینچی یا گالیله گذاشته شده است :

قبلاً تجربه در مقاومت سازه های تأثیر بود :

به طور تجربی سازه ها را بهبود می بخشیدند .

اولین مواردی که مکتوب وجود دارد در کتاب های مکانیک و فیزیک هست یعنی مقاومت مصالح در درس مکانیک بررسی می شد :

اولین بار در سال ۱۸۲۶ اولین کتاب مقاومت مصالح چاپ شد و از مکانیک جدا شد

* هر سازه ای تا حدی ارتجاعی است یعنی وقتی بار را برداریم به حالت قبل خود برمی گردد نه اینکه حالت الاستیک یا برگشت پذیری گویند ؟ « الاستیک »

کشسان

در مقابل ارتجاعی ؟ غیرارتجاعی یا برگشت ناپذیر یا پلاستیک داریم ؟ « خمیری »

* ارتجاعی ← کشسان
* خمیری یا غیرارتجاعی ← موهسان

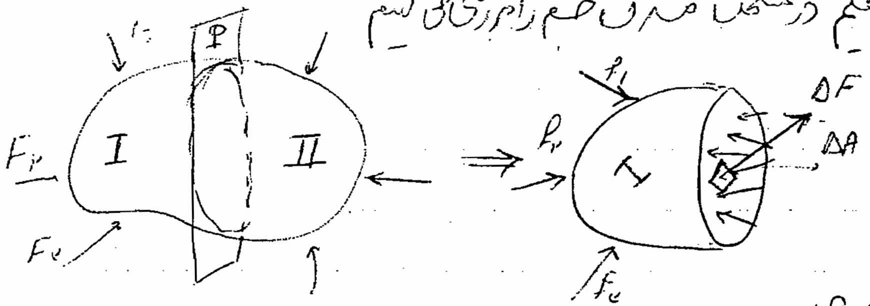
مثلاً هم در مقاومت مصالح پیوستگی سازه است ؟ « همگن »

هیچ ماده‌ای اساساً به خاطر وجود پروتونها و الکترونها

پیوسته نیست ولی عملاً محاسبات انتگرال یا دیفرانسیل اشکالی ایجاد نمی‌کند

در مقاومت ۱ با اجسام ایزوتروپ سرد کار داریم

اگر یک مقطع در جسم بزنیم در قسمت مشترک جسم را بررسی می‌کنیم



در تعادل جسم به جمع نیروها صفر است.

حال جمع نیروهای خارجی دیگر صفر نیست بلکه باید نیروهای سطح مشترک در نظر گرفته شود.
به هر نقطه سطح یک نیرو وارد می‌شود

اگر یک جزء ΔA بگیریم یک نیروی ΔF به این سطح وارد می‌شود:

stress یا تنش $\Rightarrow$ $\boxed{S = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}}$

تعریف تقریباً شبیه فشار است؛ با این تفاوت که فشار همیشه نیروی از یک جسم به طرف جسم دیگر است درحالیکه تنش هم می‌تواند فشاری یا کششی باشد؛ یا باعث نقش روی سطح شود یعنی هر نقطه‌ای در امتداد سطح داشته باشد؛

$\frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}}$ = دیمانسیون

* واحد تنش ← $1\,Pa = \frac{1N}{m^2}$ پاسکال

چون این واحد یک واحد کوچکی است از واحدهای بزرگتر استفاده می‌شود:

$$\begin{cases} 1000\ Pa = 1\ \dfrac{kN}{m^2} = kPa \\ MPa = 10^6\ Pa = 1\ \dfrac{N}{mm^2} \end{cases}$$ واحدهای علمی

واحدهای صنعتی :

واحد نیرو kgf

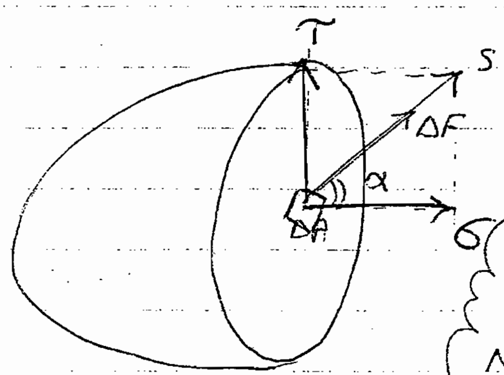
$1\ \dfrac{kgf}{cm^2}$ واحد تنش

یا $1\ \dfrac{kgf}{m^2}$ "

یا $1\ \dfrac{tonf}{m^2}$ "

$$* \quad 1\ \frac{kgf}{cm^2} = \simeq \frac{10\ N}{10^{-4}\ m^2} \simeq 10^5\ \frac{N}{m^2} = 10^5\ Pa$$

$$* \quad 1\ MPa \simeq 10\ \frac{kgf}{cm^2}$$



S در امتداد ΔF است :

S را تجزیه کردیم به دو مؤلفه : σ و τ

σ تنش عمودی $= S \cos\alpha$

Normal stress

درحقیقت مؤلفه عمود بر سطح مقطع است :

تنش قائم غلط است ؛ قائم یعنی عمود بر افق ؛ درحالیکه عمود بر سطح مقطع است ؛
درحالیکه عمود بر سطح مقطع ؛ سطح مقطع می تواند مایل باشد ؛

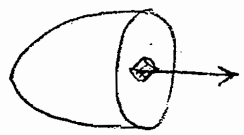
تنش برشی $\tau = S \sin\alpha$
Shear stress

تنش برشی خود می تواند دو مؤلفه شود ؛

مؤلفه ای در سطح واقع می شود تنش برشی است ؛

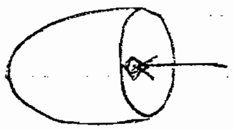
* تنش عمودی دو نوع تعریف می شود :

Tensile stress



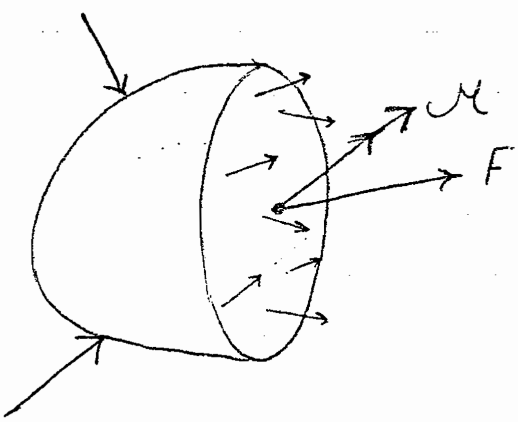
دو قطعه می خواهند → (جهت به بیرون جسم) تنش کششی
از هم دور شوند

Compressive stress



دو قطعه روی هم فشرده → (جهت به داخل جسم) تنش فشاری
می شوند

نیرو در یک جا بیشتر متمرکز شود تنش افزایش می یابد و احتمال خطر گسیختگی است ؛



هدف ما تقریباً تعیین توزیع نیروها در مقطع است ؛
مثلاً فقط می توانیم برآیندشان را تعیین کنیم ؛

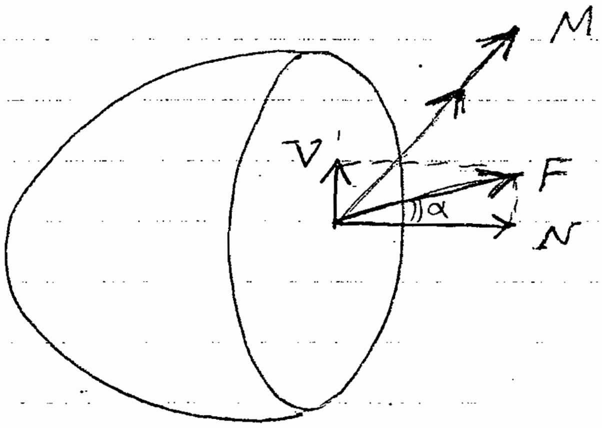
برآیند کلی یک نیرو و یک لنگر است ؛

F ، M را نیروهای داخلی مقطع گویند.

این نیروهای داخلی در استاتیک معین می‌شوند

معادلات تعادل

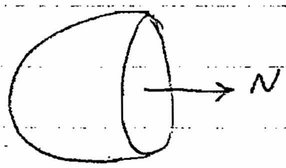
$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 & \text{بدست می‌آید } F \\ \sum \vec{M}_A = 0 & \text{گشتاور } M \text{ بدست می‌آید} \end{cases}$$



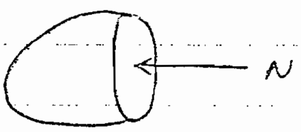
$N = F \cos\alpha \rightarrow$ نیروی عمودی Normal Force

$V = F \sin\alpha \rightarrow$ نیروی برشی shear Force

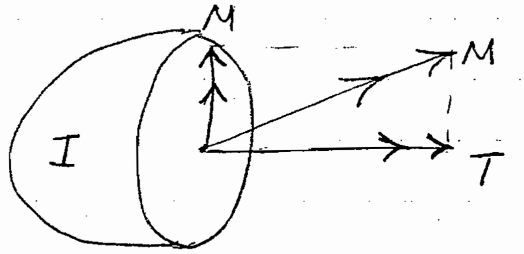
* نیروی عمودی هم می‌تواند فشاری یا کششی باشد 8

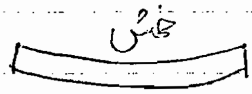


دبیرون مقطع) نیروی کششی



دبه طرف مقطع) نیروی فشاری





M ⟵ لنگر خمشی ⟵ در داخل سطح می‌تواند به ۲ مؤلفه تجزیه شود.

T ⟵ لنگر پیچشی پیچش حول محور لنگر

* نیروی داخلی کلاً ۶ مؤلفه است ⟵ ۲ مؤلفه نیروی برشی Internal Force ⟵ نیروی داخلی*
۲ « لنگر خمشی
۱ مؤلفه لنگر پیچشی
۱ مؤلفه نیروی عمودی

این نیروهای داخلی در مقطع هستند چون نیروهای داخلی دیگری نداریم.

۳ محور نیز یک محور عمود بر سطح و ۲ محور در داخل سطح

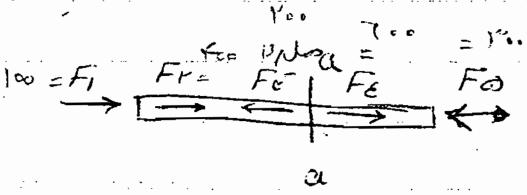
* برای به دست این نیروهای داخلی 8

قسمت I نیز قسمت باقیمانده
قسمت II « « حذف شده

$N = ? \longrightarrow \sum F = 0$
جمع نیروها در امتداد محور عمود بر سطح مقطع

* این $\sum$ فقط برای یک قسمت است نیز قسمت باقیمانده و قسمت حذف شده

مثال:



در مقطع aa، N را بخواهیم:

$F_1 + F_2 - F_3 + N = 0 \Rightarrow N = F_3 - F_1 - F_2$

$\Rightarrow$ * $N = -۱۰۰ \Rightarrow$ N فشاری

* به جای سمت باقیمانده و حذف شده از چپ و راست استفاده می‌کنیم

چپ = باقیمانده
راست = حذف شده

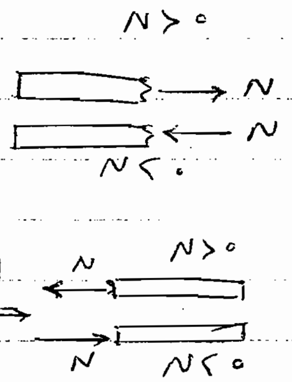
جمع ~~...~~ مؤلفه‌های نیروهای وارد بر سمت چپ در امتداد عمود بر سطح مقطع $+ N = 0$

جمع مؤلفه‌های نیروهای وارد بر سمت راست در امتداد عمود بر سطح مقطع $- N = 0$

$N = -$ (جمع مؤلفه‌های نیروهای وارد بر سمت چپ مقطع در امتداد عمود بر سطح مقطع)

یا

$N =$ (جمع مؤلفه‌های نیروهای وارد بر سمت راست مقطع در امتداد عمود بر مقطع)



همان قبل $\longrightarrow$ $N = -(100 + 400 - 200) = -300$

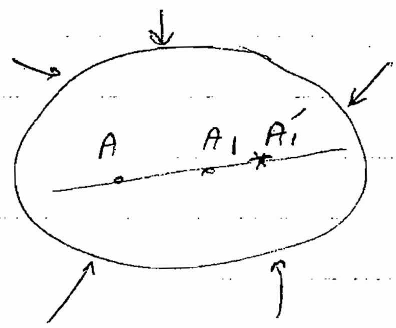
یا $N = (-600 + 300) = -300$

کشش را همیشه مثبت بگیرید و فشار را منفی

* تغییر شکلها :

در مقاومت مصالح نه فقط می خواهیم بدانیم که آیا مثلاً یک میله می تواند یک نیرو را تحمل کند بلکه می خواهیم بدانیم که آیا تغییر شکلی می دهد ؟

برای این کار واحد کمیتی تعریف می کنیم به نام تنجش یا strain :

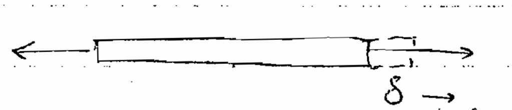


وقتی نیرو به جسم وارد می شود نقطه A_1 به A نزدیک یا دور می شود ممکن است A هم تغییر کند ولی دوباره آن را به جای اصلی منتقل می کنیم

یا تنجش «تعریف»

$$\varepsilon = \lim_{\overline{AA_1} \to 0} \frac{\overline{AA_1'} - \overline{AA_1}}{\overline{AA_1}}$$

چون ممکن است یک جا طول زیاد شود یه جا کم شبیه این ها داریم در یک نقطه تعریف کنیم پس مجبوریم طول را خیلی کوچک بگیریم $\overline{AA_1} \to 0$



«نیرو حتماً در امتداد محور باشد.» در اینجا تنجش در همه نقاط یکی است ؛ چون همه یک تغییر طول می دهند ؛

$$* \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

δ : تغییر طول — L : طول اولیه

ولی همه جا نمی تواند باشد در این حالت ساده فرض را است .

تنجش یا تغییر طول نسبی یا کرنش : «گاهی تنجش خطی هم گفته می شود» ← (linear)

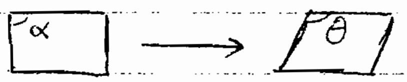
کرنش لغت خوبی نیست :

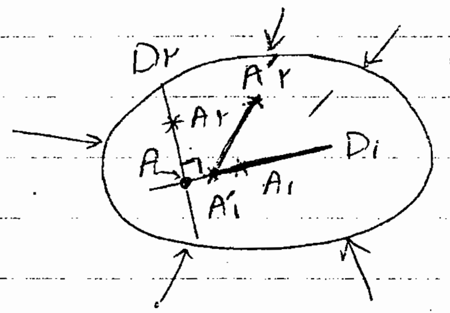
تنجش در فارسی به معنای درهم کشیده شدن و درهم فشرده شدن است :
کرنش به معنای تعظیم است یعنی معنی فیزیکی خوبی ندارد :

تنجش بدون بعد است :

حالت دیگری از تغییر شکل وجود دارد و آن تغییر زاویه است :

قبل





D1 و D2 عمودند :

تغییر زاویه قائم $\gamma = \lim \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{A_1' A' A_2'} \right)$

$\overline{A_1A} \to 0$

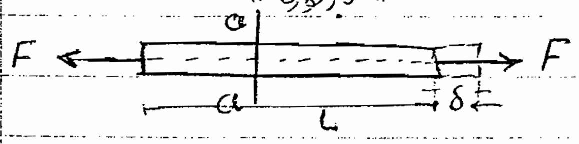
$\overline{A_2A} \to 0$

* γ تنجش برشی shear strain

هم به محل نقطه بستگی دارد هم به امتداد

* بار محوری :

«بار محوری»

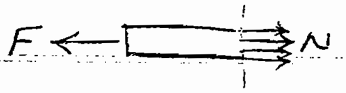


aa : $N = F$

هر چه به طول میله اضافه شود هر یکه آن نیز به همان اندازه طول اضافه می شود.

تنجش $\varepsilon_x = \frac{\delta}{L}$

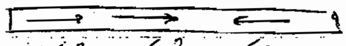
در امتداد x ←



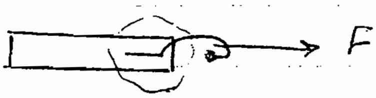
N به طور مساوی در مقطع پخش شده است :

= اگر میله هیچ تغییر مقطعی نداشته باشد :

* تنش $\sigma = \frac{N}{A}$

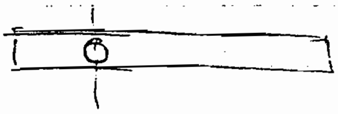


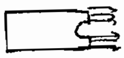
هر تکه زیر اثر یک بار محوری است .



اگر نیرو را توسط قلاب وارد کنیم دیگر تنش در ناحیه قلاب از رابطه بالا تبعیت نمی‌کند

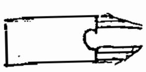
هر تغییری در میله داده شود در حوالی این تغییر این رابطه صادق نیست !





غلط است ← یکنواخت نیست

⇓

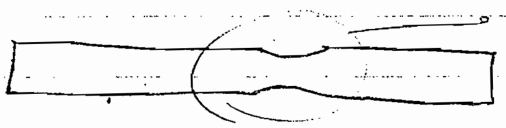


* تنش در نزدیک سوراخ حدود ۳ برابر دو انتها است ؛ ✓

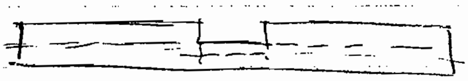
دایره اگر به سمت نزدیک شود وضعیت تمرکز تنش خطرناک‌تر است و خیلی زود در اثر نیروی کششی پاره خواهد شد .

از رابطه بالا نمی‌شود رفت

یا



* از محل تغییر باید به اندازه یک قطر میله دور شویم تا تنش یکنواخت شود ؛ معمول را بپذیریم .
تقریباً



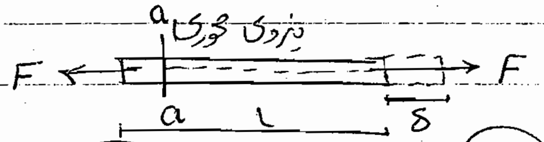
در اینجا محور کلاً تغییر می‌کند محل آن متفاوت است .

این نکته که در حوالی تغییرات تنش زیاد می‌شود به تمرکز تنش یا stress concentration

موسوم است که در تئوری ارتجاعی کارشناسی ارشد یا در سازه های فولادی در کارشناسی بحث می شود (طراحی صحیح)

باید در نظر گرفته شوند .

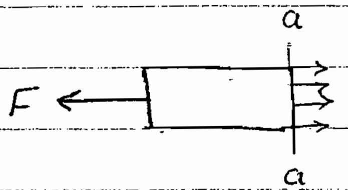
۸۴/۱۱/۲۶ بنام خدا ج ۳



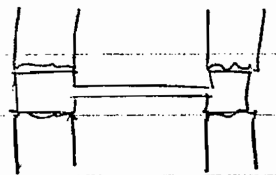
$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L}$$

میله به طور یکنواخت تغییر طول پیدا می کند



یک نمونه داده را می توانیم تحت آزمایش کشش قرار دهیم تا رابطه بین ε_x و σ_x را می یابیم .



نمونه مورد نظر به صورت مقابل در فک کشش قرار می گیرد

یک جفت از فک ها ثابت تغییر مکان ندارند و یک جفت دیگر با سرعت خیلی کمی حرکت می کنند .

دستگاه برای این که این تغییر شکل را ایجاد کند ناچار است نیرویی به میله وارد کند و بدین ترتیب رابطه ای بین نیرو و تغییر طول می یابیم .

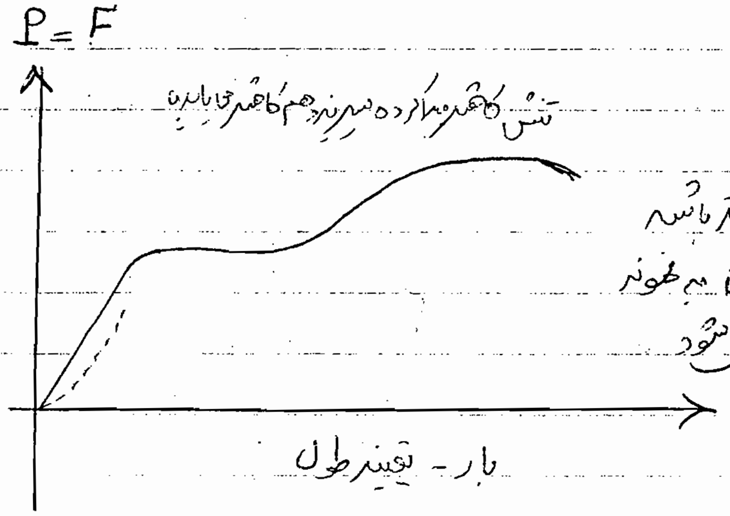
دستگاه های جدید طوری هست که خود دستگاه نیرو و اندازه تغییر را ثبت و رسم می کند و منحنی تغییر طول و نیرو را به ما می دهد .

این منحنی در مواد مختلف متفاوت است .

یکی از مصالح مهم مهندسی فولاد سازه ای است یعنی فولادی که در تیرآهن های I یا میلگردی

که در بتن مورد استفاده قرار میگیرد : « structural steel »

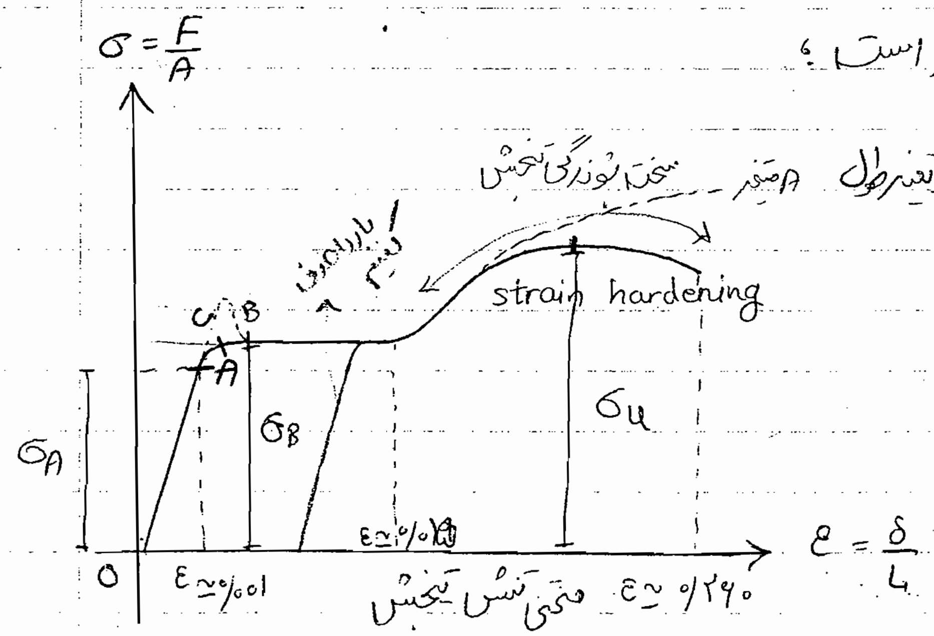
* منحنی برای فولاد سازه ای δ



در ابتدای منحنی ممکن است فرق داشته باشه چون ممکن است در شروع فک ها نتوانند به خوبی بلغزند و این لغزش جزء δ محسوب می شود ولی از آنکه تغییر طول واقعی نیست پس ممکن است یک δ اضافه در ابتدا داشته باشیم

نیرو به سطح مقطع بستگی دارد هرچه سطح مقطع میله بزرگتر باشد این نیرو بیشتر و برعکس اند

هرچه میله بزرگتر باشد δ بزرگتر است ؛



می توانیم با تقسیم F بر A نمودار تغییر طول A متغیر تنش را رسم کنیم .

در ابتدای منحنی یک خط داریم که قسمت خطی منحنی است .

* OA منحنی نسبی یا خطی منحنی تنش - کرنش
رابطه خطی بین این دو وجود دارد یعنی متناسب با هم تغییر می کند

اگر عدم تعادل داشته باشیم منحنی به شکل خط چنین در می آید ؛

نقطه A دارای تنشی است به نام تنش نسبی یا حد نسبی σ_A
یعنی حدی که تا آنجا نسبت برقرار است و بعد از آن رابطه دیگر خطی نیست

* نقطه B دارای تنشی است به نام تنش تسلیم σ_{yp} yield point
نقطه تسلیم «انگلیسی ها»

چون مثل این است که میله در مقابل تغییر طول تسلیم شده است یعنی

دستگاه بدون این نیاز به افزایش نیرو داشته باشد با نیروی ثابت فکها حرکت می کند و تغییر طول

می دهند « مقاومتی در مقابل تغییر طول ایجاد نمی کند »

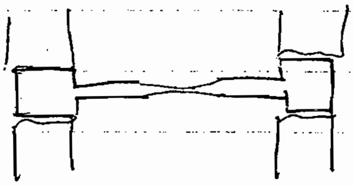
« موسوم است به تنش جاری شدن - تنش سیلان »
* گفت حد تسلیم درست نیست ؛ چون اینجا حدی نیست ؛ حد جاری شدن غلط است ؛

* در سخت شوندگی تنش فرض شده است منحنی مثل یک خم عمل می کند یعنی دوباره باید نیرو وارد کنیم تا تغییر طول داده شود ؛
* max این منحنی از منحنی به نام تنش نهایی یا تاب موسوم است (σ_u)

بعد تنش کم می شود و میله خم می شود ؛

* در تمام این منحنی ها قطر کم می شود ولی با چشم قابل ملاحظه نیست ؛

از شروع سخت شوندگی تغییر قطر به طور واضح اتفاق می افتد.

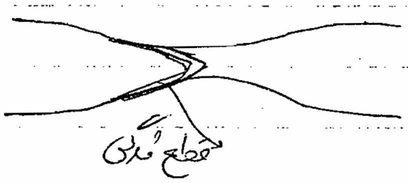


قبلاً می توانستیم این تغییر قطر را ننویسیم شکلی دارد به این که

هسته دارای حباب هوا باشد یا ترک کوچکی باشد از طرفی فولاد ترکیبی است از آهن و کربن و... پس ممکن است خوب مخلوط نشده باشند و این مخلوط در آنجا ضعیف است و شروع به باریک شدن می کند.

علت این که دوباره در انتها تنش کم می شود به این علت است که A را ثابت گرفتیم درحالیکه باید یک تنش جدید تعریف کنیم

اگر بخواهیم سطح جدید را اعمال کنیم منحنی همواره رو به بالا است یعنی فولاد یا میله در بزرگترین تنش قطع خواهد شد.



در هنگام قطع شدن نیرو max نیست.

* الاستیک - ارتجاعی - برگشت پذیر : در جسم پس از حذف نیرو به وضع اول برمی گردد به این خاصیت الاستیسیته یا خاصیت برگشت پذیری یا خاصیت ارتجاعی می گویند.

هر جسمی تا یک حدی این خاصیت را دارد. موم را اگر در نظر بگیریم به ظاهر اصلاً این خاصیت را ندارد اما اگر نیرو فوق العاده کم باشد باز هم الاستیسیته داریم ولی مقدار آن خیلی کم است!

* چنین جسمی مثل موم را پلاستیک یا خمیری گویند و به این خاصیت که جسم پس از حذف نیرو به وضع اولیه برنگردد خاصیت پلاستیسیته یا خمیری گویند.

روی OA هرجا که نیرو را حذف کنیم میله به وضع اولش برمی گردد الاستیک است ؛

اگر از نقطه C رد شویم دیگر میله الاستیک نیست .

* هرجا بار را قطع کنیم بعد از C به صورت شکل قبلی منحنی شروع می شود یعنی تغییر شکل در آن باقی می ماند .
ممکن است هر ۳ نقطه A و B و C را یکی بگیرند

* حد تناسبی فولاد ساختمانی $\simeq 190 - 220$ MPa یا $(1900 - 2200 \ \frac{kgf}{cm^2})$

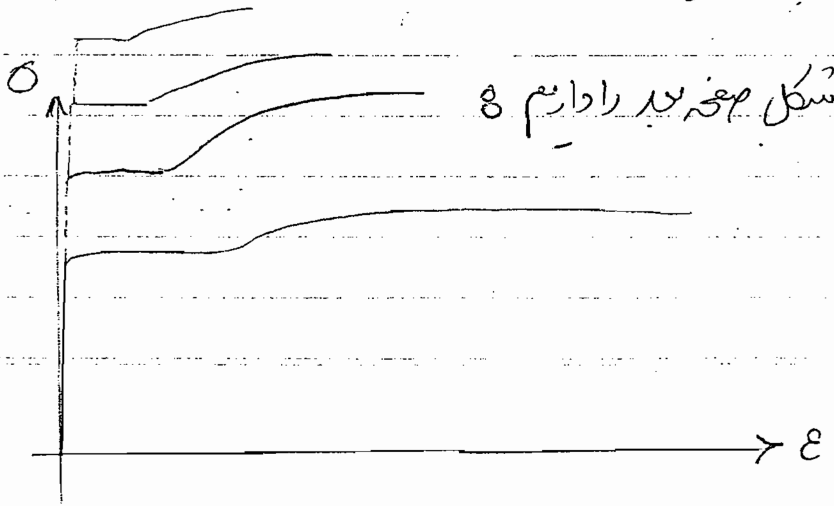
اگر یک میله ای یک cm^2 سطح مقطع داشته حدود ۲۰۰۰kg می تواند تحمل کند تا به این حد برسد .

* تنش تسلیم فولاد $\simeq 220 - 250$ MPa $\longrightarrow$ $(2200 - 2500 \ \frac{kgf}{cm^2})$

* σ_c یا حد الاستیک حد ارتجاعی چون دقیقاً بعد از آن میله
پلاستیک می شود ؛ $200 - 230$ MPa $-$ $(2000 - 2300 \ \frac{kgf}{cm^2})$

* تاب نهایی شکست $\simeq 330 - 390$ MPa $-$ $(3300 - 3900 \ \frac{kgf}{cm^2})$

تغییر طول در انتها خیلی بیشتر از ابتدای منحنی است



اگر منحنی را با اشل رسم کنیم شکل صفحه بعد را داریم ؛

منحنی شودگی خیلی طولانی خواهد بود .

* فولاد در حسب کربن : اگر کربن آن زیاد شود مقاومت اولیه آن بالا می رود

یعنی فولاد می تواند به طور الاستیک مقاومت بیشتری بگیرد ولی تغییر طول در موقع کار کمتر است

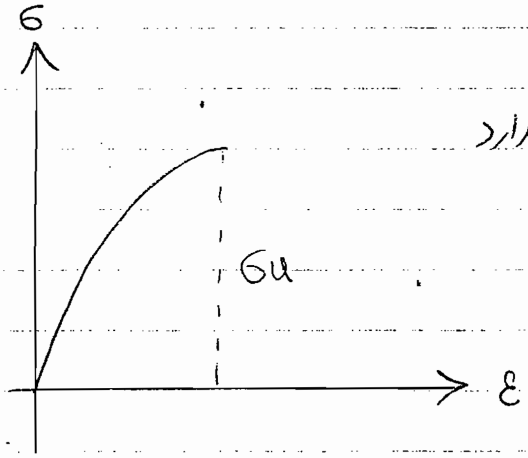
اگر فولاد بخواهد در حالت عادی و بدون ضربه باشد فولادی که مواد ساده دارد خوب است

اگر نیرو ناگهانی وارد شود جسمی بهتر مقاومت می کند که بتواند تغییر طول بیشتری می دهد اگر این تغییر شکل را جسم بتواند تحمل کند گسیخته نمی شود و کشش سخت شوندگی طولانی تر باشد «» .

* در مقابل ضربه با افزایش کربن فولاد شکسته می شود : «فولاد خشک»

امروزه فقط با کربن فولاد را تغییر نمی دهند با نیکل و کروم و ... خواص مختلفی به فولاد می دهند یکی از این خواص در نظر بودن تغییر شکل است .

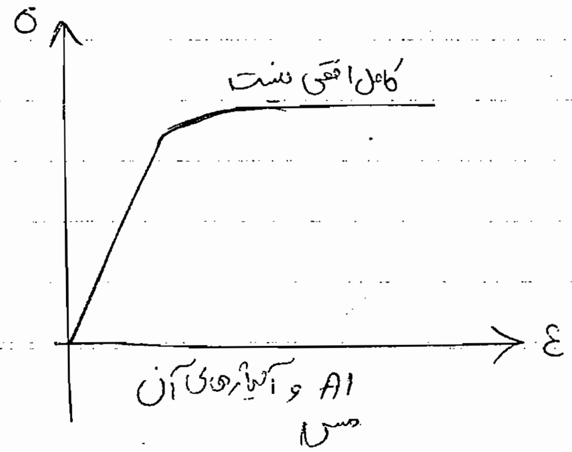
* کربن زیاد در آهن ← چدن



چدن مقاومت بالایی ندارد منحنی افقی و طولانی ندارد

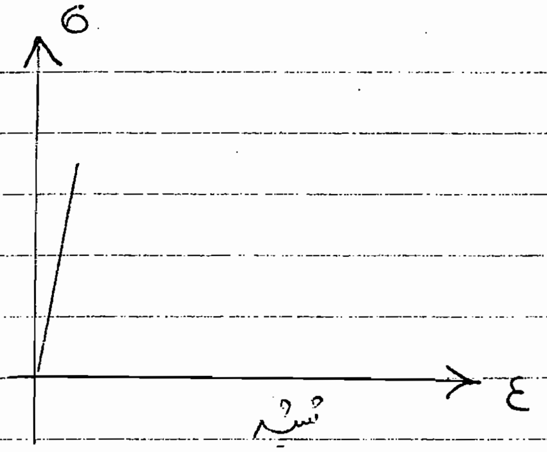
چون منحنی افقی ندارد جسم زود می شکند :

چون ε در موقع پارگی خیلی کم است :

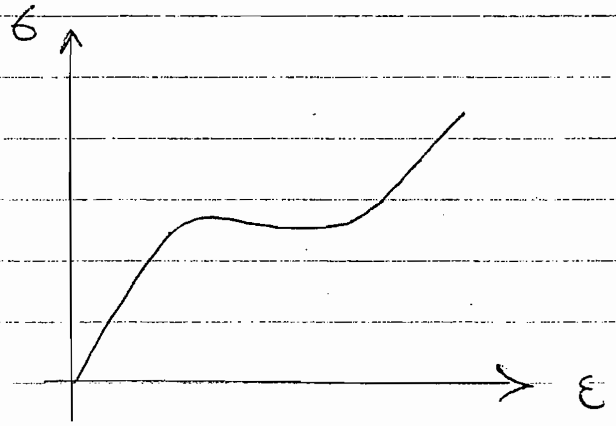


* آلومینیوم شکسته نیست چون افقی دارد :

فولاد کاملترین منحنی را دارد :



* در موقع بارگذاری تنش زیادی نمی تواند تحمل کند
چون ε اولیه آن خیلی کم است



* لاستیک

* تمام این منحنی ها با بارگذاری تدریجی و ناگهانی ؟ رسم می شوند ؛

اگر بارگذاری سریعتر باشد منحنی هایی متفاوت دارند ولی کلی با یه ترم روند ؟

* این منحنی ها در درجات معمولی رسم شدند درجات کم شکنندگی مواد را زیاد می کند یعنی تغییر طول زیاد نمی توانند نشان دهند
در درجات بالا مقاومت کمتری نشان می دهند .

در آتش سوزی ها دیگر فولاد مقاومت معمول خود را ندارد ؛
سازه های فولادی به سرعت فرو می ریزند ؛

* وقتی سازه را طراحی می کنیم باید توجه کنیم که نباید تغییر شکل زیاد در سازه داشته باشیم نباید وارد

قسمت های سخت شوندگی بشویم باید قسمت هایی باشد که تغییر شکل کم است .

یک سقف را برای یک بارگذاری طراحی می کنیم ؛ «شرایط معمولی»
ممکن است در شرایطی بارگذاری بیشتر از حالت معمول روی سقف اعمال شود ؛

* در طراحی باید تنشی را در نظر بگیریم که به آن **تنش مجاز** می گویند که برابر است با 8

allowable or working stress

$$\sigma_w = \frac{\sigma_{yp}}{S.F}$$

safety factor S.F

بعضی مواد تنش تسلیم ندارند مثل چدن ؛ ممکن است یک تنشی را تعریف بکنند
با بستگی به شیب خط مماس در منحنی ؛

در مورد بعضی مصالح مجبوریم از تنش نهایی استفاده کنیم ؛

$$\sigma_w = \frac{\sigma_u}{S.F}$$

تا σ_u سازه گسیخته نمی شود
ممکن هم هست بشود پس
S.F در این مورد از بالایی
باید بزرگتر باشد ؛ چون احتمال
گسیختگی بیشتر است ؛

یک سد خرابی آن باعث خرابی حوزه ی شهری بشود پس S.F خیلی بیشتری باید بکار برد ؛
S.F را محققین هر رشته تعیین می کنند.

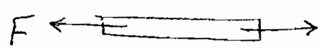
* در کارهای معمول ساختمانی ضریب اطمینان حدود ۱/۶ است ؛

Hooke's law — جزوه ۱۷

* رابطه بین تنش - کرنش 8

$$\sigma = E\varepsilon$$

هر دو در یک راستا اند



$E =$ ضریب ارتجاعی یا ضریب کشسانی یا مدول الاستیسیته

ε بدون بعد

σ بعد فشاری است

E از بعد فشار برابر است ضریب گفته می‌شود در مدول ارتجاعی !!

$$\text{فولاد}\ E = 2\times10^{5}\ MPa \longrightarrow 2\times10^{6}\ \frac{kgf}{cm^2}$$

* E را مدول یانگ هم می‌گویند ((young's Modulus of Elasticity))

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad , \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L} \rightarrow \delta \rightarrow$$

برای یک میله با بار محوری

$$\delta = \frac{FL}{EA}$$

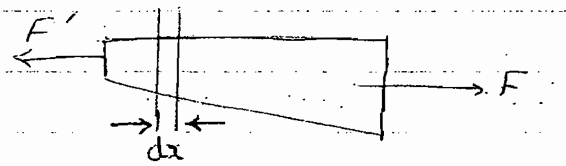
گاهی به این رابطه قانون هوک گفته می‌شود.

* EA را صلبیت محوری گویند هرچه بیشتر باشد تغییر طول کمتر است میله صلب‌تر است؟

* $\frac{EA}{L}$ را سختی محوری گویند ← (axial stiffness) تعبیر سفتی گفته می‌شود که نوعی محوری بوده

نشان می‌دهد مثل فنر است ← $F = k\delta$ نیروی فنری

— اگر میله کمی مخروطی باشد به طوری که تغییر مقطع شبیه هم نباشند δ



تنش فرق می‌کند؟
در هر مقطع سطح خودش را دارد

$$\sigma = \frac{F}{A} \longrightarrow$$ A مربوط به هر مقطع است

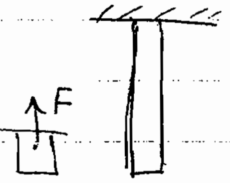
هر تقطع — L

$$d\delta = \frac{F\,dx}{EA}$$

A مربوط به همان تقطع

در طول dx به اندازه $d\delta$ تغییر طول داریم؛ E ثابت است؛

$$\boxed{\delta = \int \frac{F\,dx}{EA}}$$

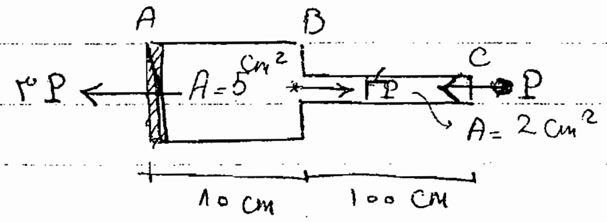


میله ای که تحت اثر وزن خودش آویزان است در مقاطع مختلف نیروی مختلفی دارد

مثال ۸:

$E = ۲\times۱۰^{۵}$ MPa

$\sigma_w = ۱۲۰$ MPa



در شکل بالا؛ مقدار مجاز P را تعیین کنید به شرط اینکه تغییر مکان هیچ کدام از نقاط A، B و C نسبت به همدیگر نخواهیم از 1 mm بیشتر شود؟

σ_w ← هر تکه تنش مجاز آن نباید از ۱۲۰ بیشتر شود.

حل: $A-B$: $N_{AB} = ۳P$ کششی

$N_{BC} = -P$ فشاری

$1\,MPa = 1\,N/mm^2$

$$\sigma_{AB} = \frac{۳P}{۵۰۰}$$

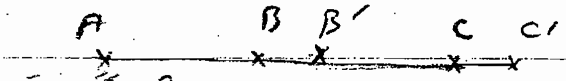
دقت است مساحت بر حسب mm^2 باشد؛ تا MPa تبدیل شود؛

① $\sigma_{AB} \leq ۱۲۰ \Rightarrow P \leq ۲۰۰۰۰\,N = ۲۰\,kN$

② $|\sigma_{BC}| = \left|\frac{-P}{۲۰۰}\right| = \frac{P}{۲۰۰} \leq ۱۲۰ \Rightarrow P \leq ۲۴۰۰۰\,N = ۲۴\,kN$

چون می خواهیم با شدت مقایسه کنیم قدر مطلق می گیریم

$$\delta = \frac{FL}{EA}$$



A را ثابت گرفتیم

$B'C' < BC$ تنش فشاری

$$\delta AB \leqslant 1 \text{ mm}$$

$$|\delta BC| \leqslant 1 \text{ mm}$$

نمی‌دانیم مثبت یا منفی است $|\delta AC| \leqslant 1 \text{ mm}$

$$|\delta AC| = |\delta AB - \delta BC| \leqslant 1 \text{ mm}$$

نیازی به کنترل این آخری نیست؛

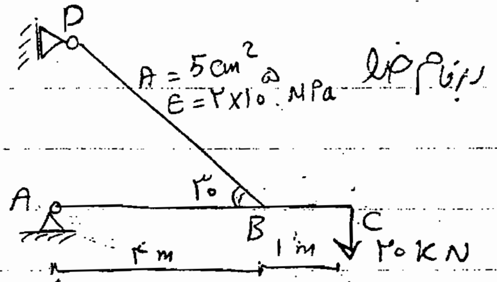
$$\delta AB = \frac{۳P \times ۸۰۰}{۲\times 10^{۵} \times ۵۰۰} \leqslant 1 \Rightarrow P \leqslant \frac{10^{6}}{۲۴} N = ۴۰٫۱ \text{ KN}$$

$$|\delta BC| = \frac{P \times 1000}{۲\times 1۰^{۵} \times ۲۰۰} \leqslant 1 \Rightarrow P \leqslant ۴۰ \text{ KN}$$

$\Longrightarrow$ مجاز $P_w = ۲۰ \text{ KN}$ جوابی که در تمام

آنها صدق کند؛ کمترین مقداری که شرط‌ها را ارضا کند.

12 ۸۳،۱۲،۳

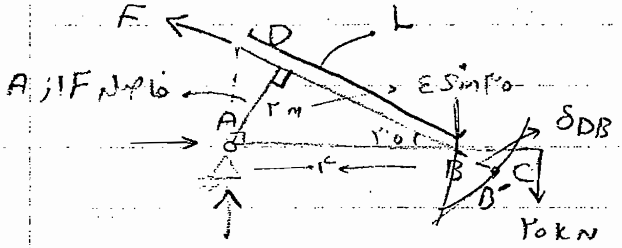


ج ۴

مثال ۸

در شکل روبرو میله ABC صلب است تغییر مکان نقطه C را تعیین کنید؟

صلب است یعنی تغییر شکل ندارد نه طولش عوض می‌شود نه خم می‌شود ولی می‌تواند حول A دوران کند میله DB طولش تغییر می‌کند اگر تحت کشش باشد میله در B به سمت پایین حرکت می‌کند؛
در نتیجه C رو به پایین دوران می‌کند؛



ابتدا باید نیروی محوری را در DB یافت؛ $\sum M_A = 0 \Rightarrow$

$= 20\times5 - F\times2 = 0$

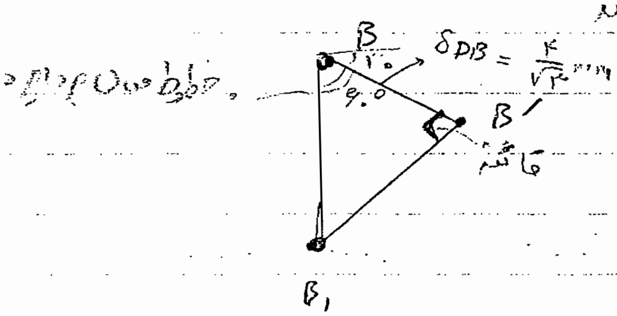
$\Rightarrow \boxed{F = 50\ kN}$

$L = 4/\cos 30$

$$\delta_{DB} = \frac{FL}{EA} = \frac{50\times1000\times\frac{4000\ mm}{\cos30}}{2\times10^5\times500}$$

$$\Rightarrow \delta_{DB} = \frac{4}{\sqrt{3}}\ mm$$

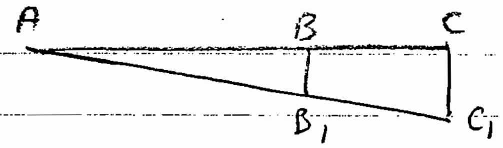
طول AB ثابت است یک دایره به مرکز A به شعاع AB چون صلب است
برای تعیین B' دایره به مرکز D و به شعاع DB' رسم می‌کنیم؛ محل تقاطع محل جدید B یعنی B' است؛ به جای دایره‌ها از خط استفاده می‌کنیم؛ در کلیه مسائل مقاومت مصالح،،
چون تغییر شکل‌ها نسبت به طول‌ها کوچکند



$\Rightarrow \overline{BB_1}\times\cos 60 = \frac{4}{\sqrt{3}}$

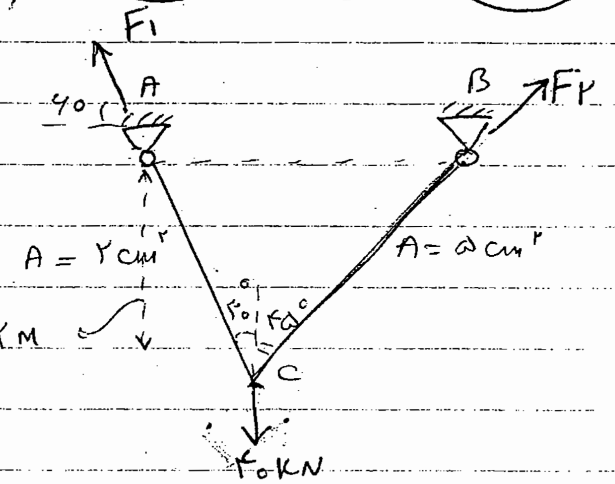
$\Rightarrow \boxed{\overline{BB_1} = \frac{8}{\sqrt{3}}\ mm}$

برای یافتن محل C جدید:



$$\frac{\overline{CC_1}}{\overline{BB_1}} = \frac{5}{4} \Rightarrow \overline{CC_1} = \frac{10}{\sqrt{2}} \text{ mm}$$

مثال ۵: تغییر مکان نقطه C؟



$E = 2 \times 10^5$ MPa

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_1 \times \frac{1}{2} + F_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F_1 = F_2\sqrt{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + F_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 40 = 0 \Rightarrow$$

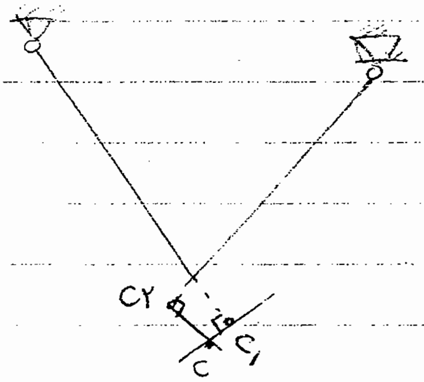
$$\Rightarrow F_2 \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 40$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{80}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 20.71 \text{ kN}$$

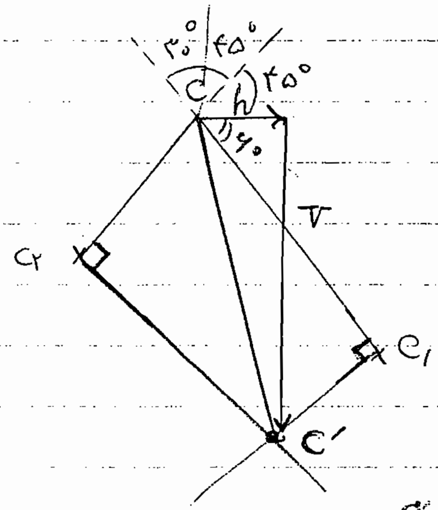
$$\Rightarrow F_1 = 29.28 \text{ kN}$$

$$* \quad \delta_1 = \frac{29280 \times \frac{2000 \times 2}{\sqrt{3}}}{2 \times 10^5 \times 200} = 1.69 \text{ mm}$$

$$* \quad \delta_2 = \frac{20710 \times 2000 \times \sqrt{2}}{2 \times 10^5 \times 500} = 0.59 \text{ mm}$$



به جای دایره خطوط عمود بر شعاع را رسم می کنیم

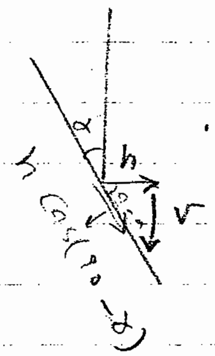


برای یافتن محل C′ ، کافی است h و v نیز نیز مکان افقی و قائم را بیابیم :

مجموع مقادیر h و v یکبار روی ① یکبار روی ② بدست می آوریم

در بار اول مساوی δ۱ و بار دوم مساوی δ۲ است

جهت + نیز جهتی که طول افزایش پیدا کند :



$$h\sin\alpha + v\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad h \times \tfrac{1}{2} + v \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \delta_1 = 1/69$$

$$-h \times \frac{\sqrt{2}}{2} + v \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \delta_2 = 0/59$$

* چون h را در جهت خلاف افزایش طول روی میله ۲ گرفته‌ایم

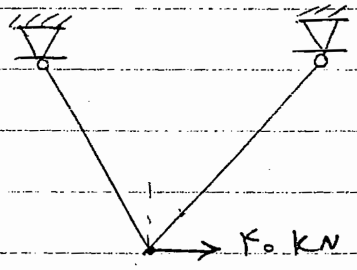
$$\Rightarrow \quad h = 0/71 \longrightarrow$$ سمت راست

$$v = 1/54 \downarrow$$ پایین

اگر مثبت بدست می آمد باید جهت را تغییر دهیم

ممکن است یکی از تغییر طولها منفی باشد؟

مثال:



اگر جهت کاهش طول را منفی بگیریم؛

: کاهش طول را باید — گذاشت

* سازه خطی :

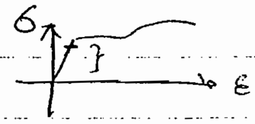
سازه‌هایی که تغییر شکلها کوچکند می‌توان همان هندسه اولیه را در سازه بکار برد:

یعنی مثلاً در مثال قبل اگر نیروی قائم ۴۰ را به ۲۰ یا ۸۰ تبدیل کنیم؛ می‌توانیم بگوییم : ها نصف یا ۲ برابر می‌شوند

* سازه را خطی گویند اگر نیرو را در یک عدد k ضرب کنیم تنش‌ها، تغییر طول‌ها، نیروها هم در k ضرب شوند:

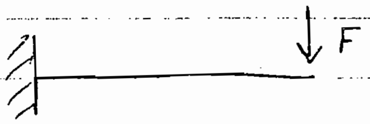
① برای این که این شرط برقرار باشد باید تغییر شکلها کوچک باشند: « از نظر هندسی »

② تنش تغییرشکل در جهت خطی باشد: اگر در جهت‌های دیگر تنشی وارد شود باز هم تنش‌های دیگر از خطی بودن تبعیت نمی‌کنند « از نظر مادی »



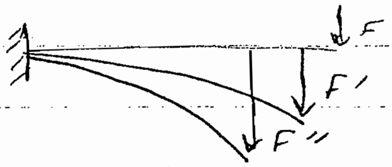
ممکن است یک سازه از نظر مادی خطی باشد ولی از نظر هندسی خطی نباشد؟

مثلاً کش از نظر هندسی دارای تغییر شکلهای بزرگ است ولی از نظر مادی خطی باقی می‌ماند.

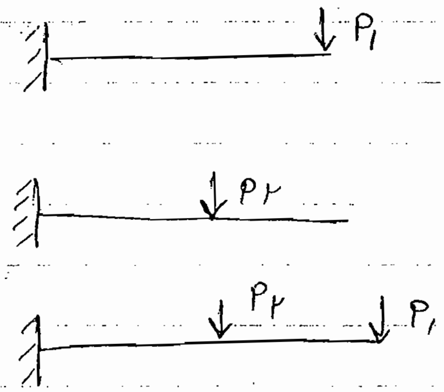


اگر تغییر شکل کم باشد با دو برابر شدن F ، تنش در تکیه گاه دو برابر می شود

ولی اگر تغییر شکل بزرگ باشد دیگر تنش ممکن نیست دو برابر شود بلکه تیر خم می شود .

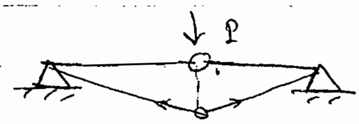


* به طور کلی در سازه خطی روش جمع اثرها برقرار است superposition جمع گذاری



مثلاً اگر حالت اول و دوم را حل کنیم می توانیم بنویسیم که در حالت سوم ، تغییر طول از جمع تغییر طول های دو حالت قبل به دست می آید .

مثال :

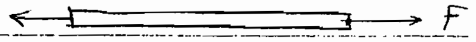


این سازه پایدار نیست پس برای تغییر شکل های کوچک راه حلی برای آن وجود ندارد

زوایا ، زوایای اولیه نیستند ؛ پس سازه خطی نیست .

* ضریب پواسون :

یک میله زیر اثر بار محوری تغییر طول ، تغییر شکل آن را حساب کنیم .



$$\sigma_x = \frac{F}{A} \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\delta}{L}$$

حال می‌خواهیم ببینیم در امتداد y و z چه تغییری داریم؟

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$$ ضریب پواسون

میزان این نسبت برای هر ماده یک مقدار ثابتی دارد.

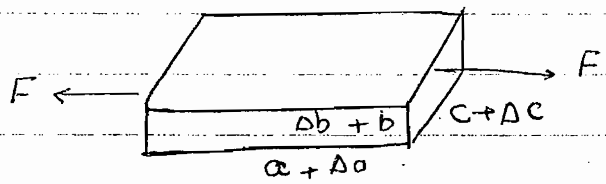
– برای این است چون ν را می‌خواهیم + بدست آوریم (poisson's ratio)

تحت کشش ε_x + است و دیگر کم می‌شود پس ε_y – است؛

هر محوری که در داخل مقطع انتخاب کنیم تغییر در راستای آن محور نسبت به محور x مقدار ثابتی دارد

ضریب پواسون بین صفر و نیم تغییر می‌کند؛ $0 < \nu < 0/5$

برای اثبات حد بالای ضریب پواسون داریم؛



به هر ضلعی a به اندازه Δa و دیگر طول‌ها نیز تغییر کنند؛

① اولیه $V = abc$

$$V + \Delta V = (a+\Delta a)(b+\Delta b)(c+\Delta c)$$

$$= abc + bc\Delta a + ac\Delta b + ab\Delta c + \underbrace{\cancel{c\Delta a\Delta b}\cdots}_{\text{صرف‌نظر}}$$

$$+ \cancel{\Delta a\Delta b\Delta c}$$

بی‌نهایت کوچک‌اند ⇐ صرف‌نظر

$$\Delta V = bc\Delta a + ac\Delta b + ab\Delta c$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}}$$

$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} \longrightarrow$ تنش حجمی $\quad \boxed{\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$

مجموع تنش در ۳ امتداد عمود بر هم

مکعب تحت اثر نیروی F قرار گرفته باشد می توانیم بنویسیم 8

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad , \quad \sigma_x = \frac{F}{A} \Rightarrow \nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x$$

در ε_v می گذاریم

$$\Rightarrow \varepsilon_x - \nu\varepsilon_x - \nu\varepsilon_x = \varepsilon_x(1-2\nu) = \frac{\sigma_x}{E}(1-2\nu)$$

وقتی میله را می کشیم مثلا حجم آن کم نمی شود اگر فشار دهیم حجم آن نباید زیاد شود

$\sigma_x > 0$ اگر $\Rightarrow \varepsilon_v > 0$ کشش $\Rightarrow 1-2\nu \geq 0$

یا $\sigma_x < 0$ اگر $\Rightarrow \varepsilon_v < 0$ فشار $\Rightarrow 1-2\nu \leq 0$ $\quad \Rightarrow \boxed{\nu \leq 1/2}$

صفر ν را هم خودمان انتخاب کردیم با قرار دادن $(-)$

* برای فلزات بین $1/4$ تا $1/3$ $\longleftarrow$ برای فولاد $\simeq 0/3$

برای خاک و بتن حدود $0/2$

* هر چه ضریب پواسن به صفر نزدیکتر باشد تغییر حجم زیادتر است هر چه به $0/5$ نزدیکتر باشد تغییر حجم کمتر

برای موم $\simeq 0/5$

همه این ۵ ها برای قسمت خطی متن ۵ - ۴ است در قسمت افقی متن ۵ هولا مثل دوم

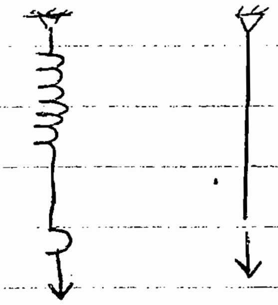
عمل می کند .

انرژی کرنش 8 strain energy

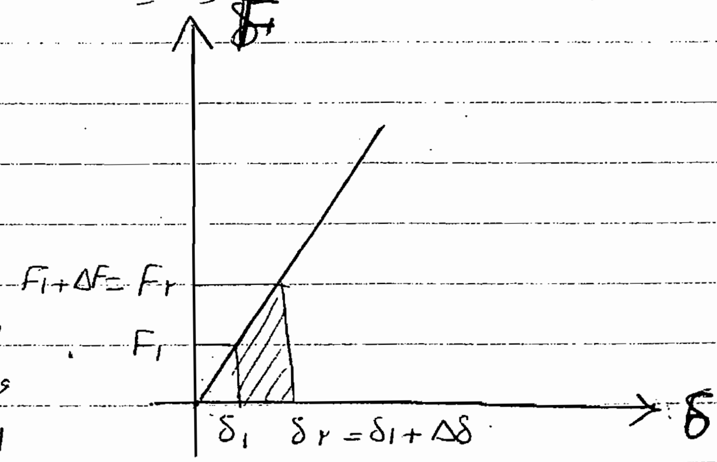
در میله ای که تحت اثر نیرو قرار می گیرد چون نقطه اثر نیرو حرکت می کند کار انجام می شود اگر جسم الاستیک باشد این کار در جسم ذخیره می شود هر عضوی از سازه که تغییر شکل بدهد و در قسمت الاستیک باشد یک مقدار انرژی در آن ذخیره می شود ؛

در گذشته هم بوده مثل ساعتهای کوکی که با انرژی ذخیره شده در فنر کار می کردند ؛

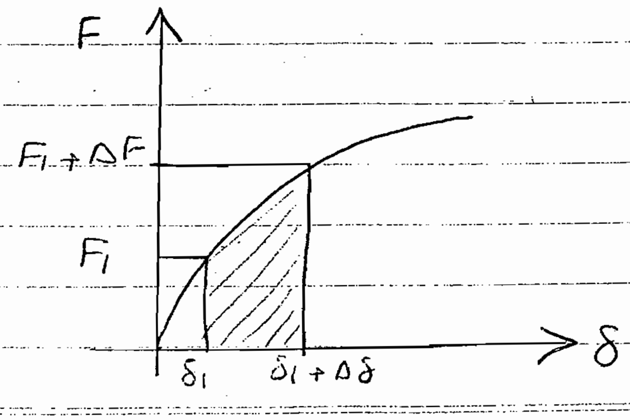
انرژی کرنش از نوع انرژی پتانسیل است چون پتانسیل به محل ماده و فضای شکلی دارد و چون تغییر شکل هم محل ذرات را نسبت به هم عوض کرده است پس این انرژی ، پتانسیل (انرژی) است ؛



میله هم مثل فنر است ولی تغییر طول آن کمتر است ؛



بار را ۱ تا ۱۰۰ افزایش دهیم با افزایش بار تغییر طول هم افزایش می یابد اگر ۱۰۰ را به ۹۹ برسانیم تغییر طول کم می شود قدم ای ها کار را انجام



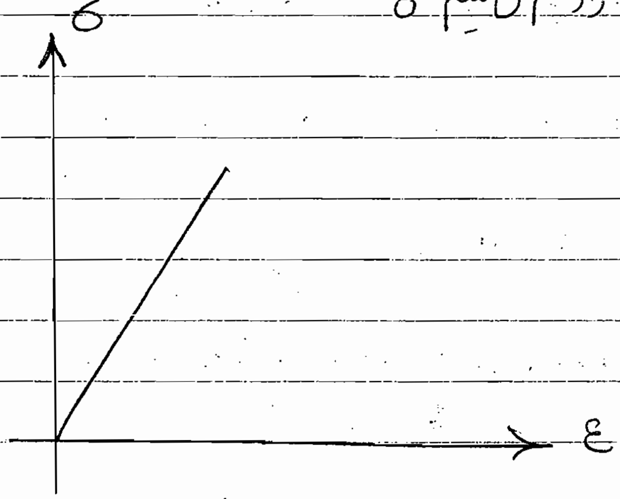
ΔF کار در فاصله $\Rightarrow$ $\Delta W = (F_1 + \Delta F)\Delta\delta = F_1 \Delta\delta$

مساحت زیر منحنی $F - \delta$ ← کار انجام شده یا انرژی ذخیره شده در دستگاه

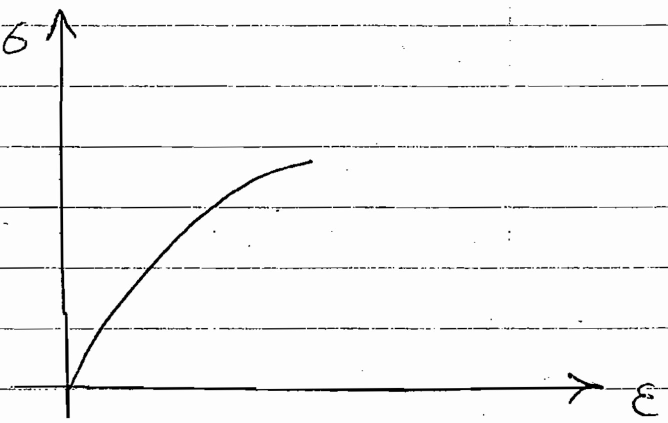
چون اگر الاستیک باشد دوباره روی همین منحنی برمی گردد بنابراین انرژی را پس می دهد «تماما»

$$* \quad W = \int_0^F F \, d\delta$$

به جای $F - \delta$ منحنی $\sigma - \varepsilon$ را رسم می کنیم



مساحت زیر منحنی به یک حجم تقسیم می شود



در اینجا انرژی مخصوص در واحد حجم را خواهیم داشت که با U نشان داده می شود

$$U = \frac{W}{V_{\text{حجم}}}$$

انرژی تنش در واحد حجم $= \frac{W}{AL} = \frac{W}{A.L}$ → U

برای میله

* $\delta = \frac{FL}{EA} \Rightarrow w = \int_0^{\delta} F\,d\delta = \frac{1}{2} F \cdot \delta$

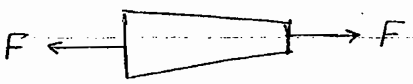
برای حالت خطی

منحنی $\sigma - \varepsilon$

$u =$ سطح زیر منحنی تنش - تنش

$$\boxed{w = \frac{F^2 L}{2EA}}$$

* غیرخطی $\delta = \int \frac{F\,dx}{EA} \Rightarrow \boxed{W \text{ یا } U = \int \frac{F^2\,dx}{2EA}}$



U کار

u تنش واحد حجم

* برای حالت خطی $u = \dfrac{\frac{F^2 L}{2AE}}{\underbrace{AL}_{\text{حجم}}} = \frac{F^2}{2A^2E} = \frac{\sigma^2}{2E}$

$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \left(\frac{\sigma}{E}\right)\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \sigma - \varepsilon$ مساحت زیر منحنی $= \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$

* $u = \frac{\sigma^2}{2E}$

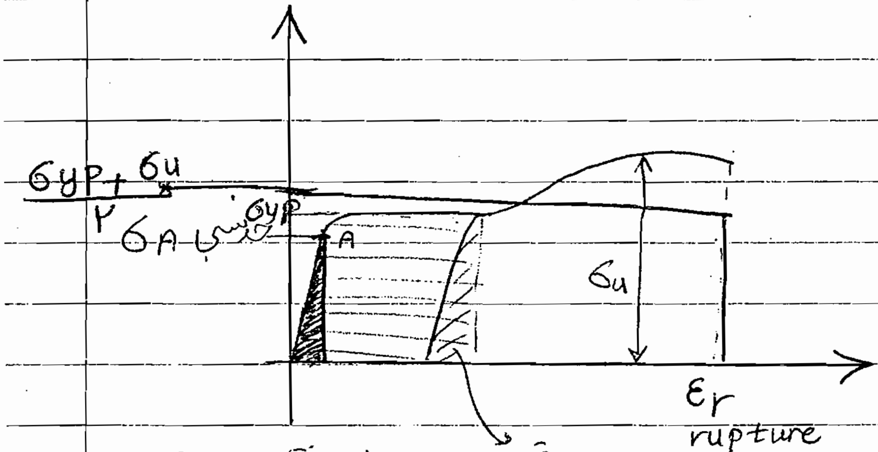
* $u = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$

* $u = \frac{E}{2}\varepsilon^2$

* $U = \frac{F^2 L}{2AE}$

* $U = \frac{1}{2} F\delta$

* $U = \frac{EA\delta^2}{2L}$



وقتی از A رد می شویم و وارد مرحله پلاستیک می شویم دیگر کار حالت فنری ندارد ؟
سطح زیر منحنی کار انجام شده می باشد

* وقتی بار را برمی داریم فقط همین قدر انرژی پس می دهد
درحالیکه به اندازه هاشور مشکی کار انجام داده بودیم
بقیه انرژی به حرارت تبدیل می شود به صورت تغییر شکل دهنده نمی شود که نمایش داده شود.
حرارت در محل قطع شدگی.

مقدار انرژی تا σ_A را ؟

((مقدار انرژی تحت واحد حجم تا رسیدن به حد تناسب را مدول رزیلیانس گویند))

مدول رزیلیانس $= \frac{\sigma_A^2}{2E}$

نشان می دهد چه مقدار انرژی در واحد حجم در حالت الاستیک ذخیره می شود.

حدی و الاستیک تقریباً یکی در نظر گرفته شده است :

* فولاد $\sigma_A \simeq 200\ MPa = 2000\ \frac{kgf}{cm^2}$

$E \simeq 2\times10^5\ MPa = 2\times10^6\ \frac{kgf}{cm^2}$

مدول رزیلیانس فولاد کم کربن $= 0/1\ MPa$

* $\frac{انرژی}{حجم} = \frac{FL}{L^3} = \frac{F}{L^2}$

مدول رزیلیانس $= 1\ \frac{kg}{cm^2}$

* لاستیک معمولی $E \simeq 1\ MPa = 10\ kg/cm^2$

$\sigma_A \simeq 2\ MPa = 20\ kg/cm^2$

مدول رزیلیانس $= 2\ MPa$

انرژی که واحد حجم لاستیک می تواند ذخیره کند و لاستیک بماند ۲۰ برابر فولاد است .

اگر در یک جایی بخواهیم انرژی مستهلک شود مثل نیروی ضربه را در دست داشته باشیم و بخواهیم وارد مراحل خمیری شویم می توانیم از لاستیک استفاده کنیم ؛ در نیروهای سریع از لاستیک !!

* سطح کل زیر منحنی یا کل انرژی که جسم می گیرد :

مدول طاقت

Modulus of toughness

انرژی است که واحد حجم یک جسم می گیرد تا گسیخته شود :

یک ملاکی از شکل پذیری جسم است هرچه این مدول بیشتر باشد جسم شکل پذیرتر است :

سرد کردن فولاد با مقاومت بالا سطح سخت شوندگی کمتر می شود نتیجه شکل پذیری آن بیشتر می شود

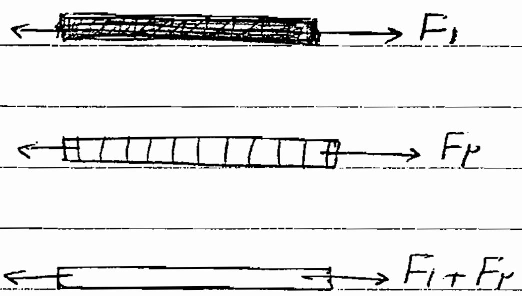
شیشه که اصلاً منحنی ندارد و سطح زیر آن خیلی کم است

برای محاسبه این مدول سطح را به طور تقریبی مساوی یک مستطیل می‌گیرند با طول ε_r و عرض $\frac{\sigma_{yp}+\sigma_u}{2}$

$$\boxed{\text{مدول طاقت} = \frac{\sigma_{yp}+\sigma_u}{2} \cdot \varepsilon_r}$$

* چون نیرو و انرژی خطی نیستند: $U = \frac{F^2 L}{2EA}$

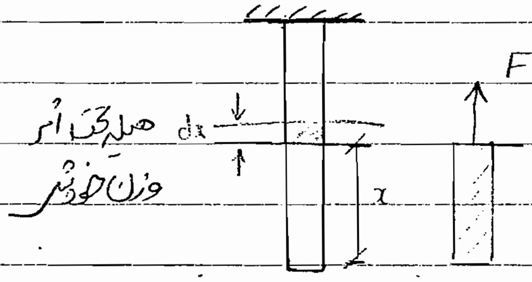
روش جمع اثرها برای محاسبه انرژی درست نیست:



$$U_1 = \frac{F_1^2 L}{2EA}$$

$$U_2 = \frac{F_2^2 L}{2EA}$$

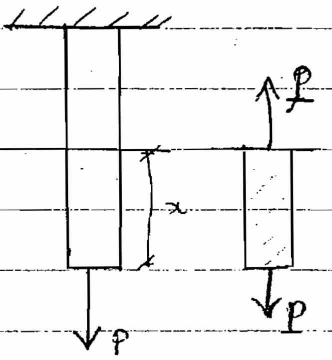
$$U \cancel{= U_1 + U_2} \neq \quad U = \frac{(F_1+F_2)^2 L}{2EA}$$



$$F = \gamma \overset{\text{حجم}}{V_x} = \gamma (Ax)$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \gamma x$$

انرژی در اثر وزن $\quad U_1 = \int_0^L \frac{F^2 dx}{2EA} = \int_0^L \frac{\gamma^2 A^2 x^2 dx}{2EA} = \frac{\gamma^2 A L^3}{6E}$



$$P = \gamma V + P = \gamma A x + P$$

$$\sigma = \gamma x + \frac{P}{A}$$

پس تنش را می‌توان از جمع اثرها به دست آورد

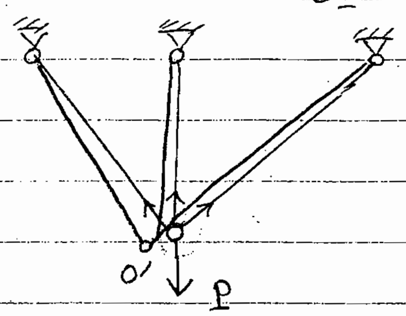
ولی در مورد انرژی [illegible] :

~~P در اثر نیروی~~ $U_2 = \frac{P^2 L}{2EA}$

درحالیکه $\Rightarrow U = \int_0^L \frac{(\gamma A x + P)^2 dx}{2EA}$

$$U \neq U_1 + U_2$$

* مسائل هیپراستاتیک در بار محوری 8 «نامعین استاتیکی»



$\sum F_x = 0$

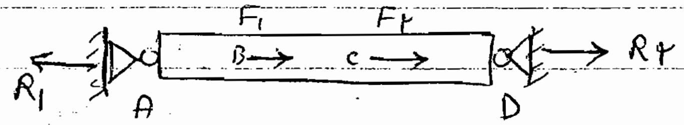
$\sum F_y = 0$

دو معادله داریم و با ۳ مجهول

n میله ← $n-2$ درجه هیپراستاتیکی

میله اول و سوم یک تغییر طول می دهد در نتیجه میله دوم هم باید یک مقدار مشخص تغییر طول بدهد

اگر n میله داشته باشیم $n-2$ رابطه بین تغییر طولها نوشته خواهد شد ؛ ۲ معادله هم که تعادل پس n معادله خواهیم داشت.



$\sum F_x = 0$

یک معادله داریم ؛
با دو مجهول ؛

نیاز به یک معادله دیگر داریم A و D تغییر طول نمی توانند بدهند پس $\delta_{AD} = 0$

این δ را اگر برحسب F ها بنویسیم مجهولات بدست می آیند.

اگر رابطه اضافی پیدا کنیم احتمال اشتباه در آن است ؛ مثلاً $\delta_{AB} = 0$ غلط است زیرا می تواند تغییر طول بدهد.

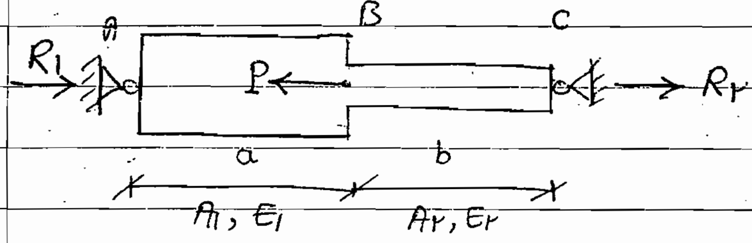
درجه هیپراستاتیکی یا درجه نامعینی

۱ درجه هیپراستاتیکی = ۱ معادله تعادل − دو تا مجهول

پس یک معادله باید از تغییر شکل کمک گرفته شود.

درست به اندازه درجه هیپراستاتیکی باید معادله بنویسیم ؛

مثال 8



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_1 - P + R_2 = 0 \quad ①$$

یکدرجه هم‌استاتیک

$$\delta_{AC} = 0 \Rightarrow \delta_{AB} + \delta_{BC} = 0$$

$$\begin{cases} N_{AB} = -R_1 \\ N_{BC} = -(R_1 - P) = R_2 \quad ① \text{ طبق} \end{cases}$$

$$\delta_{AB} : \frac{-R_1 a}{E_1 A_1}$$

$$\Rightarrow \frac{-R_1 a}{E_1 A_1} \quad \frac{(R_1 - P) b}{E_2 A_2} = 0$$

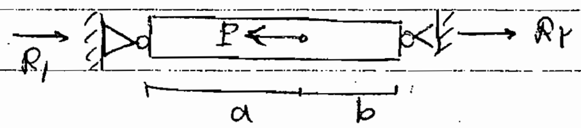
[illegible]

$$\delta_{BC} : \frac{-(R_1 - P) b}{E_2 A_2}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{P \frac{b}{A_2 E_2}}{\frac{a}{E_1 A_1} + \frac{b}{E_2 A_2}}$$

$$R_2 = \frac{P \frac{a}{A_1 E_1}}{\frac{a}{E_1 A_1} + \frac{b}{E_2 A_2}}$$

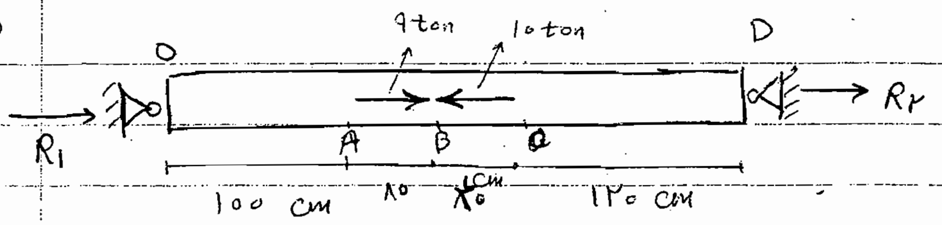
مثال 8



$$R_1 = \frac{Pb}{a+b}$$

$$R_2 = \frac{Pa}{a+b}$$

مثال ؛ R_1, R_2 ؟



در تمام مسائل هیپراستاتیکی هر چیزی که تغییر شکل یا تغییر طول را عوض کند روی جواب مسئله اثر می‌گذارد

تغییر درجه حرارت را می‌توان در مثال قبل در δ_{AC} وارد کرد ؛

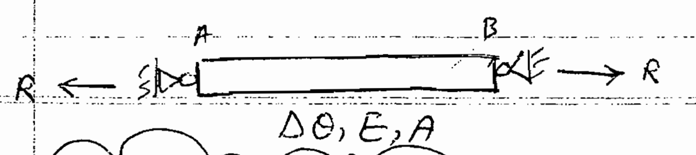
$\delta_{AC} = 0$ چون مهار است

$\delta_{AB} + \delta_{BC} = 0$

$\delta = \frac{FL}{EA} + L\alpha\Delta\theta$ تغییر طول ناشی از حرارت و قانون هوک

دو رابطه باید جداگانه برای AB و BC نوشته شوند . نه برای AC ؛

* اگر میله هیچ نیرویی به آن وارد نشود و درجه حرارت به اندازه $\Delta\theta$ تغییر کند نیروهایی در تکیه‌گاه‌ها ایجاد می‌شود اگر $\Delta\theta$ مثبت باشد میله طول می‌خواهد زیاد شود ولی تکیه‌گاه‌ها نیرویی را وارد می‌کنند تا تغییر طول ندهد مثل ریل آهن ؛ که طول نباید تغییر کند ؟

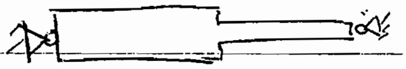


$\delta_{AB} = 0$

$\frac{RL}{EA} + L\alpha\Delta\theta = 0$

$R_1 = -EA\alpha\Delta\theta$

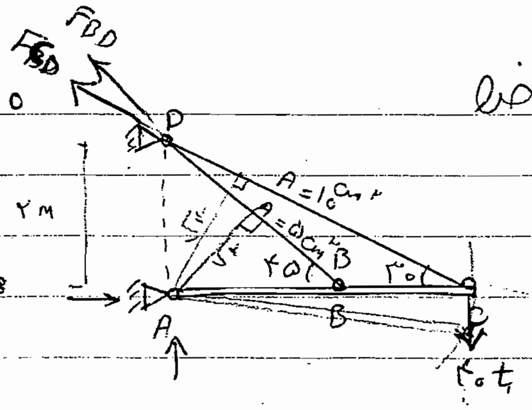
$\sigma = \frac{R}{A} = -E\alpha\Delta\theta$



در اینجا با وجود این که R ها مساوی اند ولی برای محاسبه تنش نمی توان از فرمول $E \alpha \Delta\theta$ استفاده کرد چون سطح آن یکنواخت نیست.

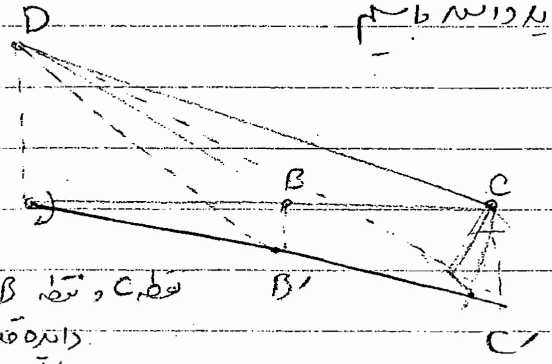
۸۳/۱۱/۱۰ بنام خدا

مثال ۵



— در شکل روبرو تنش لوله‌های BD و CD را تعیین کنید میله افقی ABC صلب است، تمام میله‌ها از یک جنس اند

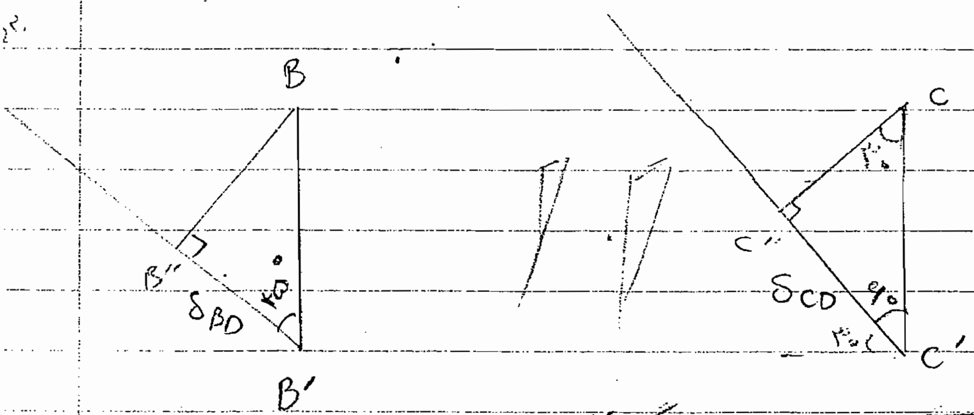
دو میله تحت اثر ۲ نیروی محوری اند ۴ مجهول داریم ۳ معادله تعادل پس ۱ درجه نامعین یا هیپراستاتیک است پس ۱ معادله δ باید داشته باشیم



نقطه C و نقطه B روی یک دایره قرار دارد! همانطور پایین می‌آیند

$$\Rightarrow \frac{CC'}{BB'} = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{CC'}{BB'} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$



$$\begin{cases} \delta_{BD} = \overline{BB'}\cos 45 \\ \delta_{CD} = \overline{CC'} \times \cos 60 \end{cases} \xrightarrow{\text{جاگذاری}} \frac{2\delta_{CD}}{\delta_{BD}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{2\delta_{CD}}{\delta_{BD}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{FL}{EA} \Rightarrow \frac{\dfrac{2 \times F_{CD} \times 400}{E \times 10}}{\dfrac{F_{BD} \times 200\sqrt{2}}{E \times 5}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow F_{DC}\sqrt{2} = F_{BD}\sqrt{3}$$

$$* \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow F_{DC}\sqrt{3} + F_{BD}\sqrt{2} - 40 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 0 \quad (2)$$

(۲) معادله ۲ مجهول $\Rightarrow \quad F_{CD} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, F_{BD}$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) F_{BD} = 80\sqrt{3} \Rightarrow F_{BD} = 16\sqrt{6} \text{ ton}$$

$$F_{CD} = 48 \text{ ton}$$

$$* \quad \sigma_{BD} = \frac{16000\sqrt{6}}{5} = 3200\sqrt{6} = 7838.4 \ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{48000}{10} = 4800 \ \frac{kg}{cm^2}$$

مثال ۸ در مسئله قبل اگر درجه حرارت $20\,^{\circ}C$ افزایش یابد تنش میله‌ها را بیابید؟

فولاد $\alpha = 11 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}C}$ $\quad \Delta\theta = 20\,^{\circ}C$ $\quad E = 2 \times 10^{6} \frac{kg}{cm^2}$

در مسئله اول چون استاتیکی بود تغییر درجه حرارت تاثیر نداشت ولی در اینجا چون یک درجه نامعین است روی جواب تاثیر می‌گذارد

تا نسبت δ ها ، مسئله مثل قبل حل می‌شود ولی در مورد δ :

$$\delta = \frac{FL}{EA} + L\alpha\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \frac{2\delta_{CD}}{\delta_{BD}} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2\left[\frac{F_{CD} \times 400}{2 \times 10^{6} \times 10} + 400 \times 11 \times 10^{-6} \times 20\right]}{\frac{F_{BD} \times 200\sqrt{2}}{2 \times 10^{6} \times 5} + 200\sqrt{2} \times 11 \times 10^{-6} \times 20}$$

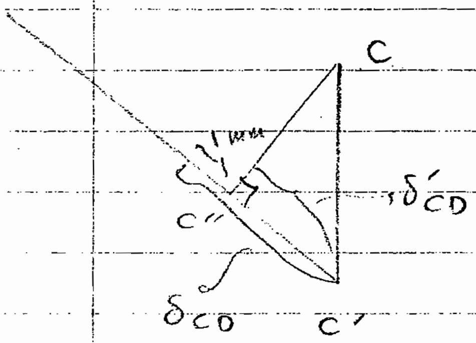
دو معادله دو مجهول را حل می‌کنیم

مسئله را یکبار فقط با درجه حرارت حل کنید یکبار هم با نیرو ، از جمع آنها استفاده کنید .

مثال : در مسئله قبل اگر میله DC از طولی که باید باشد $\underline{1\ mm}$ کوتاه‌تر ساخته شده باشد تنش چقدر خواهد بود ؟ « بدون حرارت »

در اینجا هم Δt و هم 1 mm را در نظر می‌گیریم .

$$\delta = \frac{FL}{EA} + \text{نقص طول}$$



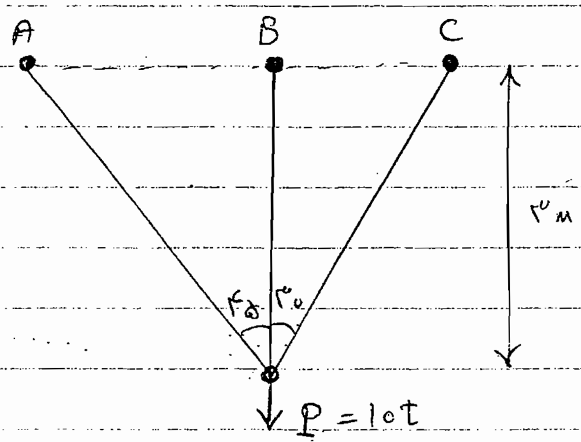
$$\frac{2\delta'_{CD}}{\delta_{BD}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\delta'_{CD}}{\delta_{BD}} = \sqrt{3}$$

$\delta_{CD} - 1\ mm$ کل

جمع جبری !

$$\Rightarrow \frac{2\left(\frac{F_{CD} \times 400}{2 \times 10^6 \times 10} - 0/1\right)}{\frac{F_{BD} \times 200\sqrt{2}}{2 \times 10^6 \times 5}} = \sqrt{3}$$



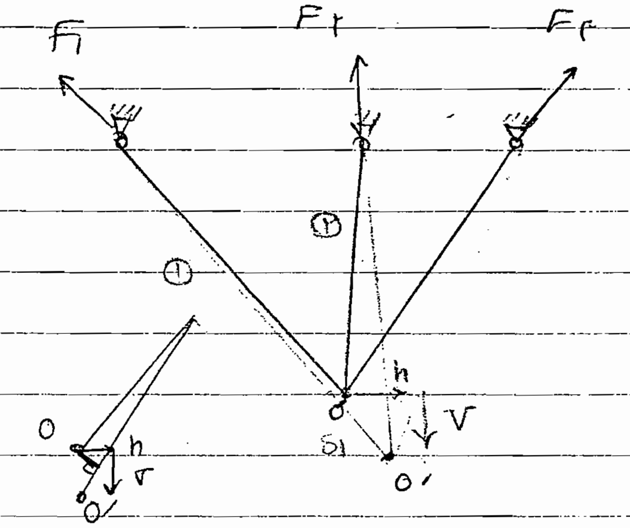
مثال : در شکل روبرو سطح مقطع و جنس هر 3 میله یکسان است نیروی وارد بر هر میله ؟

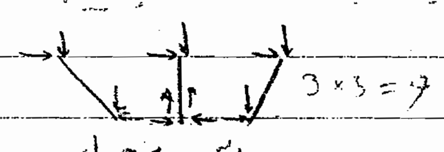
۲ معادله داریم با ۳ مجهول ؛ $\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma F_y = 0$ سازه یک درجه نامعین است !

در این نوع میله های متصل به هم ؛ محل تقاطع نقطه O را به نقطه دیگر مثل O' می بریم

و حرکت افقی و قائم نقطه را h و v می نامیم ؛ هر کدام از میله هایی که تغییر طولش

را برحسب h و v می نویسیم ؛





و سه ۱۰ مجهول

$$h\cos 45 + v\cos 45 = \delta_1$$
$$v = \delta_2$$
$$-h\cos 60 + v\sin 60 = \delta_3$$

$$\frac{F_1 \times 300\sqrt{2}}{EA} = h\frac{\sqrt{2}}{2} + v\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{F_2 \times 300}{EA} = v$$

طول وتر را تقریباً مساوی طول اولیه می گیریم ؛

$$\frac{F_3 \times \frac{300\times 2}{\sqrt{3}}}{EA} = -\frac{h}{2} + v\frac{\sqrt{3}}{2}$$

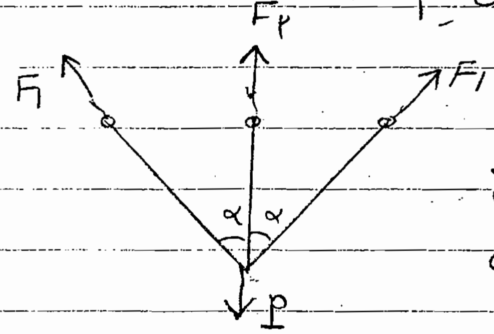
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_1\frac{\sqrt{2}}{2} + F_3 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1\frac{\sqrt{2}}{2} + F_2 + F_3\frac{\sqrt{3}}{2} - 1000 = 0$$

۵ معادله ۵ مجهول ؛

اگر تغییر حرارتی داشته باشیم ؛ جمله $L\alpha\Delta\theta$ اضافه می شود ؛ به سمت راست $h+v=\delta_1+L\alpha\Delta\theta$

اگر میله‌ها تقارن داشتند می‌توانیم با یک مجهول حل کنیم :



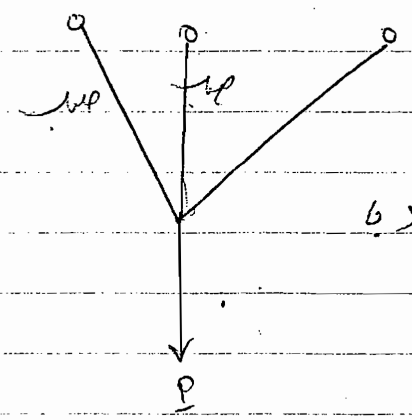
$\Sigma F_y = 0$

دو تا مجهول

تغییر شکل فقط قائم است پس یک مجهول اضافه می‌شود :

اگر میله وسط در مثال قبل صلب بود : $\delta_2 = 0$ می‌شود چون صلب بود ، فقط تغییر مکان افقی داریم :

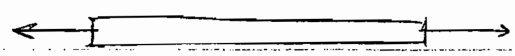
اگر دو میله صلب بود : نقطه O تغییر مکان ندارد پس یک میله الاستیک نیروی آن صفر می‌شود

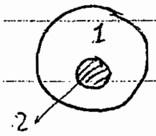


اگر دو تا میله صلب شد نیروی میله سوم صفر است

نیرو فقط در ۲ تا میله صلب وجود دارد :

* یک میله از دو جنس 8



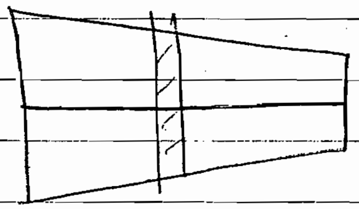


سطح مقطع

این میله از نظر تنش نامعین است مگر این که به تغییر شکل توجه کنیم $\Rightarrow \delta_1 = \delta_2$

چون یک میله است با هم تغییر طول می‌دهند : $\Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ همسازی : ۲

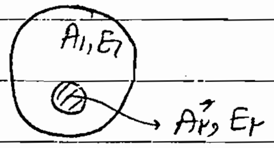
پس تغییر طول‌ها باید مساوی باشد هر کدام جداگانه نمی‌توانند تغییر طول بدهند



میله قرقره (حلقه قرقره)

مساحت ثابتی وارد ولی دومی دارد تغییر سطح می دهد؛ باید بنویسیم در Δx تغییر طول

دو قسمت باهم برابر است؛ بنابراین $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ رابطه بهتری است



$$\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \frac{F_1 \cancel{L}}{E_1 A_1} = \frac{F_2 \cancel{L}}{E_2 A_2}$$ فقط L برابر است

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow \frac{F_1}{E_1 A_1} = \frac{F_2}{E_2 A_2} \qquad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{یا}} \boxed{\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}}$$ نسبت تنش‌ها مثل نسبت مدول است

هر قسمتی از میله که E بیشتر دارد σ بیشتر دارد.

مثلاً اگر Al و فولاد داشته باشیم؛ فولاد مدول الاستیسیته ۳ برابر Al دارد پس تنش آن ۳ برابر است (فولاد)

اگر چند تا جسم هم باشند باز هم n رابطه می توانیم بنویسیم.

مثال (1)

رابطه نیرویی: $F_1 + F_2 = F$ کل نیرو (2)

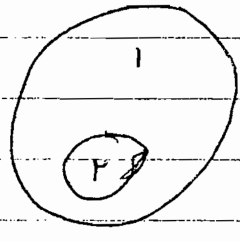
با توجه به (1) و (2) $\Rightarrow$

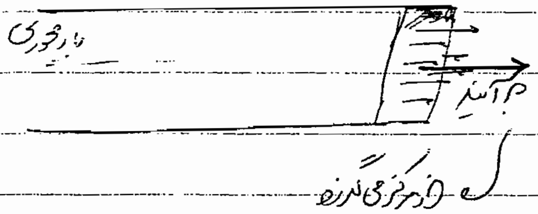
$$* \quad F_1 = F_2 \cdot \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}$$

$$* \quad F_2 = \left(1 + \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}\right) F \qquad \boxed{F_2 = \frac{F}{1 + \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}}}$$

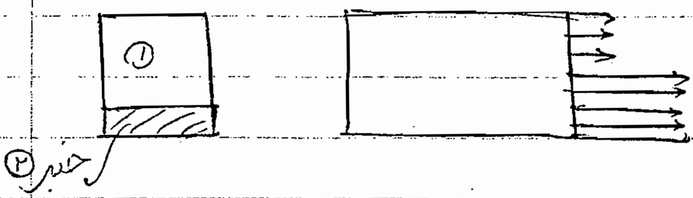
$$* \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{F}{A_2 + \frac{E_1}{E_2} A_1}$$

$$* \quad \sigma_1 = \frac{F}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2}$$





$$\sigma = \frac{F}{A}$$



نیرو بیشتری می گیرد $\Rightarrow$ تنش متفاوت است؛

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int_A x \gamma \, dA}{\int_A \gamma \, dA} \\[2ex] \bar{y} = \dfrac{\int_A y \gamma \, dA}{\int_A \gamma \, dA} \end{cases}$$

مرکز جنس مقطع دو جنس از روابط زیر بدست می آید

$$\bar{x} = \frac{\int x \frac{E_i}{E_1} \, dA}{\int \frac{E_i}{E_1} \, dA}$$

$; \int x \, dA + \int x \frac{E_2}{E_1} dA + \cdots$

$$\bar{y} = \frac{\int y \frac{E_i}{E_1} \, dA}{\int \frac{E_i}{E_1} \, dA}$$

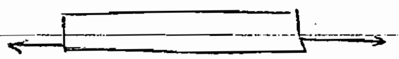
مثلاً دایره

دو دایره هم مرکز

چون متقارن است $\Rightarrow$ مرکز محل اثر نیرو محوری است؛

نا متقارن $\Rightarrow$ مرکز نیرو هم مرکز دایره نیست

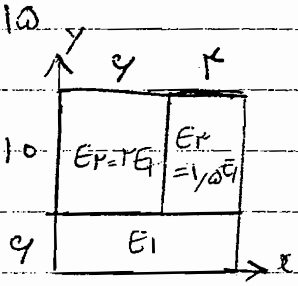
اگر بار محوری نباشد دیگر از این روابط نمی توانیم استفاده کنیم :



محوری نیست

25

۸۴/۱۲/۱۵ بنام خدا



مثال: مقطع یک میله است ، مرکز مقطع را تعیین کنید؟

حل - $\bar{x} = \dfrac{\int_A x \frac{E_i}{E_1} dA}{\int_A \frac{E_i}{E_1} dA}$ $\qquad$ $\bar{y} = \dfrac{\int_A y \frac{E_i}{E_1} dA}{\int_A \frac{E_i}{E_1} dA}$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\overbrace{(6\times10)}^{A_1}\times\overbrace{(5)}^{\bar{x}_1} + 2(6\times10)(3) + \overbrace{(1/5)}^{\frac{E_3}{E_1}}\overbrace{(4\times10)}^{A_3}\overbrace{(8)}^{\bar{x}_3}}{6\times10 + 1/5(4\times10) + 2(6\times10)} = \frac{114}{24} = 4/75^{cm}$$

نکته: $\int_A x\,dA = A\bar{x}$

$$\bar{y} = \frac{(6\times10)(3) + 2(6\times10)(11) + (1/5)(40)(11)}{6\times10 + 1/5(4\times10) + 2(6\times10)} = \frac{216}{24} = 9^{cm}$$

اگر برآیند بار در این نقطه باشد می توانیم از روابط مربوط به تنش حالت محوری استفاده کنیم

مثال: اگر در مسئله قبل نیروی 120 t در مرکز جرم تعیین شده وارد گردد، تنش هر جسم را بیابید؟

حل - $\sigma_1 A_1 = F_1$ $\qquad$ $\dfrac{\sigma_1}{E_1} = \dfrac{\sigma_2}{E_2} = \dfrac{\sigma_3}{E_3}$ ①

$\sigma_2 A_2 = F_2$ $\qquad$ $F_1 + F_2 + F_3 = F = 120000\ kg$

$\sigma_3 A_3 = F_3$ $\qquad$ $\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$ $60\sigma_1 + 60\sigma_2 + 40\sigma_3 = 120000$ ②

$$\begin{cases} E_2 = 2E_1\ ;\ E_3 = 1/5E_1 \\ \Rightarrow \sigma_2 = 2\sigma_1\ ,\ \sigma_3 = 1/5\sigma_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 60\sigma_1 + 120\sigma_1 + 60\sigma_1 = 120000$

$\Rightarrow \sigma_1 = 500\ \frac{kg}{cm^2}$, $\sigma_2 = 1000\ \frac{kg}{cm^2}$, $\sigma_3 = 750\ \frac{kg}{cm^2}$

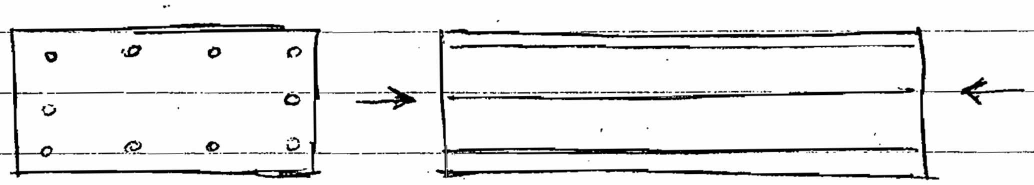
می توانیم سهم تنش را از رابطه زیر بیابیم

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1 + A_2\frac{E_2}{E_1} + A_3\frac{E_3}{E_1}}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{۱۲۰۰۰۰}{۶۰ + ۶۰(۲) + ۴۰(۱/۵)} = ۵۰۰ \ kg/cm^2$$

مثالی که در زمینه عمران اهمیت بیشتری دارد بتن آرمه است.

بتن آرمه عبارت یک مقدار بتن با فولادهایی که داخلش هستند:



هر نیرویی به آن وارد می شود بین این دو سهم تقسیم می شود معمولاً بتن برای فشار محاسبه می شود

معمولاً در محاسبات می گویند بتن کشش را تحمل نمی کند این جور مسئله بیشتر تحت اثر فشار است

مثل ستون های ساختمانهای بتن آرمه. معمولاً متقارن هستند بنابراین مرکز ثقل در مرکز هندسی

است اگر بخواهیم محاسبات را انجام دهیم:

$$\sigma_c = \frac{F}{A_c + A_s\frac{E_s}{E_c}}$$

تنش بتن

$$\sigma_s \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_s}{E_s}} \Rightarrow$$

$$* \quad E_s \simeq ۲\times۱۰^{۵}\ MPa \simeq ۲\times۱۰^{۶}\ \frac{kg}{cm^۲}$$

بتن بسته به مصالحی که در آن ریخته می شود متفاوت است مقدار و جنس سیمان و ... طرز عمل آوری ؛

* E_c عدد ثابتی برای تمام بتن ها نیست . از ۶ تا ۱۲ یا ۱۳ برابر کمتر از فولاد است

بتن خوب ←

مساحت فولاد در حدود ۱ تا ۴ درصد تمام سطح بتن است معمولاً در A_c تمام سطح را می گذاریم بدون فولاد ؛ از طرفی ضریب $\frac{E_s}{E_c}$ نیز دقیق نیست ؛

معمولاً در این قطعات تنش بتن هست که زودتر به مقدار مجازش می رسد مثلاً تنش مجاز بتن ؛

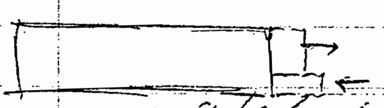
$$* \quad \sigma_{cw} = \underset{\frac{E_s}{E_c}\simeq ۱۲}{50} \longrightarrow \underset{\frac{E_s}{E_c}\simeq ۶}{150}$$

فولاد $\sigma_{yp} = ۳۰۰۰ - ۴۰۰۰$

$$\frac{\sigma_{yp}}{S.F} = ۱۸۰۰ - ۲۴۰۰$$

تنش فولاد در چنین بتنی معمولاً کمتر از تنش مجاز آن است ؛

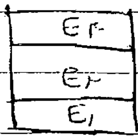
در میله های چند جسمی باید اثر تغییر درجه حرارت را در نظر داشته باشیم گفتیم که هر مسئله ای که هیپراستاتیک باشد با تغییر حرارت نیروهای آن تغییر می کند . در مسئله های این نوع . از نظر تنش نامعین اند ؛

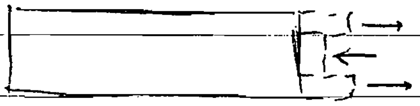


اگر میله متقارن نباشد تغییر حرارت باعث خم شدن میله می شود

یکی تحت کشش یکی تحت فشار باشد
اگر کشش ایجاد شود میله خم می شود .

مثال یک صفحه دو جنسی است که دارای قطع و ورق متصل است و تو می شود که با تغییر درجه حرارت کار می کند:

اگر صفحه متقارن باشد  خم نمی شود ولی تنش هایی در آن ایجاد می شود چون به طریقی

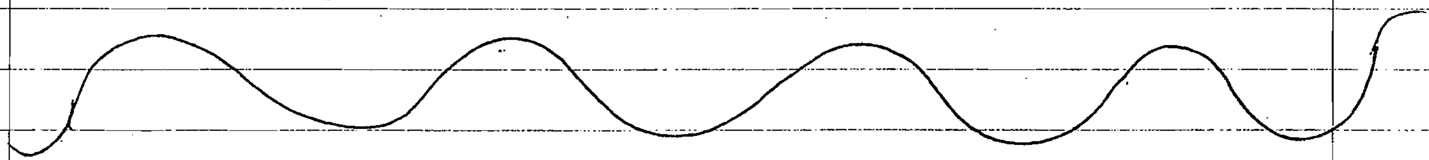


تغییر طول می دهند: به دلیل تعادل نیروها اجازه خم شدن صفحه نمی دهد

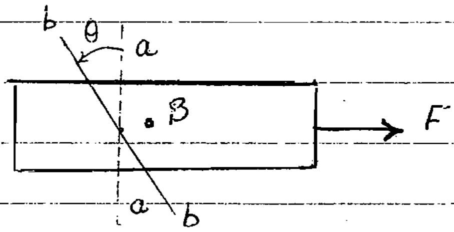
یک نوع کمک می کند ما مسائل زیادی در تنش بتن آرمه نداشته باشیم:

① $\alpha_c \simeq \alpha_s$ تقریباً برابر است

② بتن به آسانی این حرارت را منتقل نمی کند فقط یک قسمت کوچکی از بتن این تغییر را می بیند و در سطح آن است: برخلاف فولاد که زیر آفتاب می تواند تا ۵۰-۶۰ درجه تغییر درجه حرارت داشته باشد:

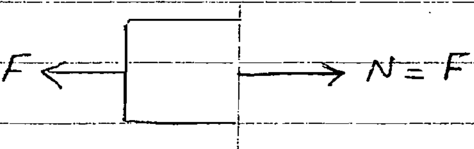


* آنالیز تنش:



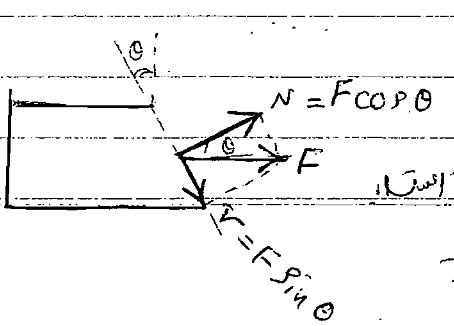
کششی +
فشاری −

مثلثاتی θ +
در جهت حرکت عقربه ساعت −

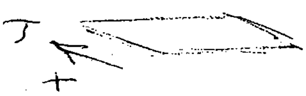


$\sigma_x = \frac{F}{A}$ در نقاط تمام این مقطع در امتداد محور x است

اگر مقطع را با زاویه θ در نظر بگیریم:



در تمام نقاط مقطع b-b یک تنش مربوط به N و یکی مربوط به V است.



تنش عمودی در سطح مقطع { $\sigma_\theta = \frac{N}{A_1} = \frac{F\cos\theta}{A/\cos\theta} = \sigma_x \cdot \cos^2\theta$

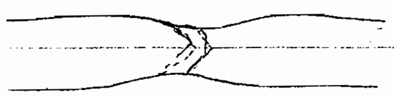
سطح مقطع مورب

برحسب این که این مقطع عوض شود تنش طبق رابطه بالا تغییر می کند

با تغییر امتداد در یک نقطه معین تنش عوض می شود.

تنش برشی $\tau_\theta = \frac{V}{A_1} = \frac{F\sin\theta}{A/\cos\theta} = \sigma_x \sin\theta\cos\theta = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta$

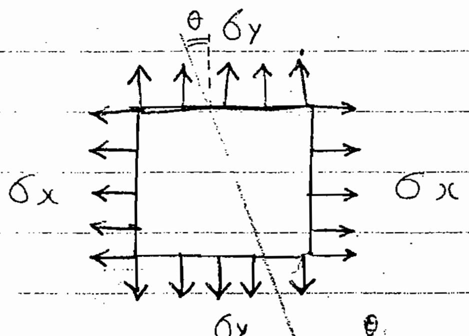
* اگر $\theta = ۴۵$ باشد تنش برشی ماکزیمم یعنی $\frac{\sigma_x}{2}$ است.



میله وقتی باریک شده و قطع می شود به شکل روبرو در می آید
پس فقط تنش عمودی نیست که باعث قطع شدن می گردد
بلکه یک تنش برشی هم در آن نقش دارد.

تنش دو محوری

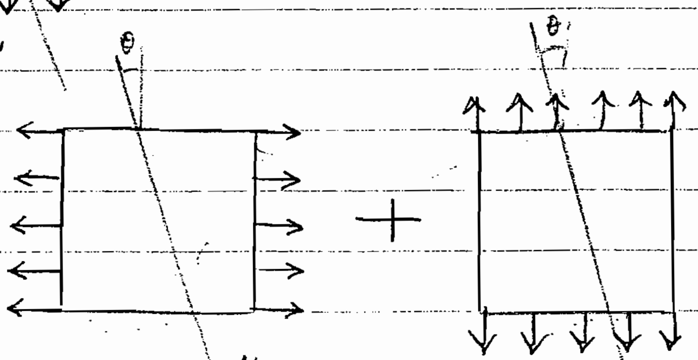
* فرض کنیم یک حجم مکعب مستطیلی داریم «تنش دو محوری»



* $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

* $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\frac{\nu\sigma_x}{E}$

= از ۲ شکل تشکیل شده



مثل یک میله است؟

* $\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta$

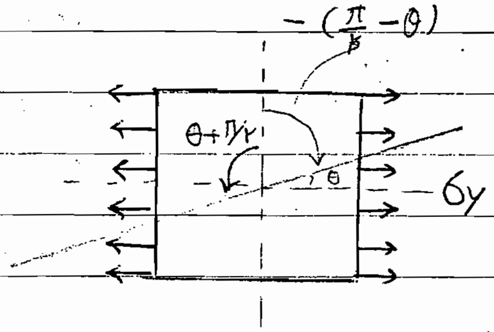
* $\tau_\theta = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta$

* $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

* $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$

* $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$

* $\varepsilon_x = \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$



برای همین تنش برشی در شکل ۲ داریم :

نکته: اگر بردار τ نسبت به قطرهای دو مقطع مماس باشد و نزدیک به مقطع در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد τ مثبت است.

$$* \quad \sigma_\theta = \sigma_y \cos^2(\theta+\pi/2) = \sigma_y \sin^2\theta$$

$$* \quad \tau_\theta = \frac{\sigma_y}{2}\sin[2(\theta+\pi/2)] = -\frac{\sigma_y}{2}\sin 2\theta$$

با توجه به روش جمع آثارها داریم :

$$* \quad \text{کل} \quad \sigma_\theta = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta$$

$$* \quad \tau_\theta = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta$$

$$* \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$* \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

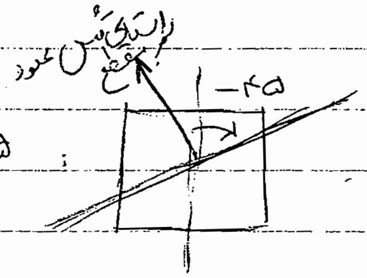
$$* \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

تنش دو محوری با نیز مقدار σ_x، σ_y در هر نقطه داریم :

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

اگر $\theta = 0$ باشد $\sigma_\theta = \sigma_x$

اگر $\theta = 45$ 〃 $\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$



$\theta = -45$

$\theta = 0$ یا $\theta = 90$ تنش برشی صفر است ؛

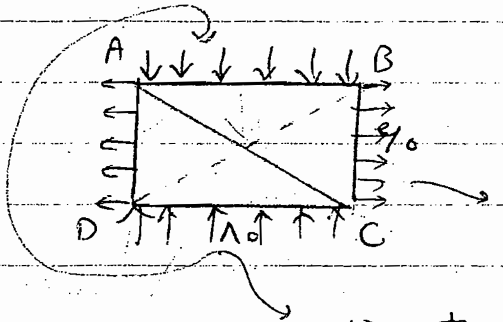
مثال 8 یک مکعب مستطیل

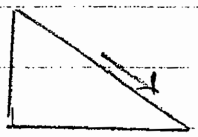
$a = 40\ cm$

تنش در امتداد AC و BD ؟

تغییر ابعاد را هم حساب کنید ؟

$$\begin{cases} E = 2\times10^{6}\ \dfrac{kg}{cm^2} \\ \nu = 0.3 \end{cases}$$





تنش برشی توی مقطع است و در امتداد مقطع ؛

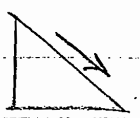
فشاری

$$\sigma_x = \frac{2400000}{60\times \underset{a}{40}} = 1000\ \frac{kg}{cm^2} \qquad \sigma_y = \frac{-1200000}{80\times40} = -500\ \frac{kg}{cm^2}$$

$AC = 100\ cm \qquad \sin\theta = 0.8 \qquad \cos\theta = 0.6$

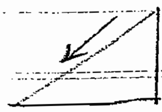
$* \ \sin2\theta = 2\times0.8\times0.6 = 0.96$

$$* \ \underset{\text{امتداد } AC}{\tau_\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin2\theta = \frac{1000+500}{2}\times0.96 = 750\times0.96 = 720\ \frac{kg}{cm^2}$$



چون مثبت است پس ساعتگرد است.

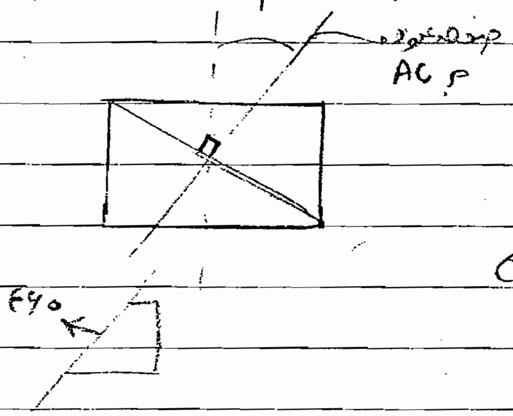
$$* \ \underset{BD}{\tau_\theta} \Rightarrow \sin\theta = -0.8,\ \cos\theta = 0.6,\ \sin2\theta = -0.96 \Rightarrow \tau_{BD} = -720\ kg/cm^2$$



σ_θ در صفحه عمود بر AC از روابط بدست می‌آید اما در این جا تنش را در امتداد AC خواسته است

$$\theta_1 = -\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right)$$

پس θ در صفحه ای عمود بر سطح AC است:



$$\sin\theta_1 = -\cos\theta = -۰/۶$$

$$\cos\theta_1 = \sin\theta = ۰/۸$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^۲\theta_1 + \sigma_y \sin^۲\theta_1$$

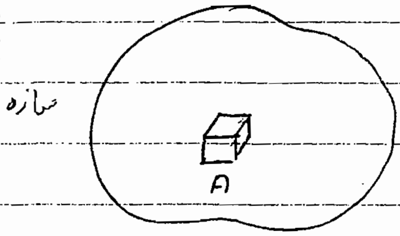
$$= ۱۰۰۰\,(۰/۸)^۲ + (-۵۰۰)(-۰/۶)^۲$$

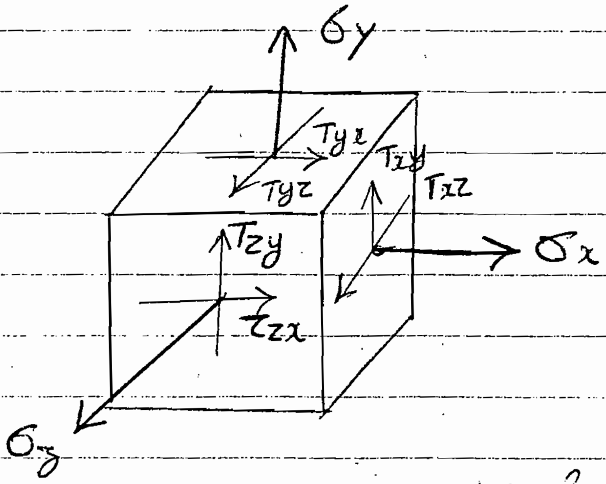
$$= ۶۴۰ - ۱۸۰ = +۴۶۰ \ \mathrm{kg}/\mathrm{cm}^۲$$

$$\varepsilon_x = \frac{۱}{۲\times۱۰^۶}\left[۱۰۰۰ - ۰/۳(-۵۰۰)\right] = \frac{۵۷۵}{۱۰^۶}$$

$$\Delta x = \varepsilon_x \times ۸۰ = \frac{۵۷۵ \times ۸۰}{۱۰^۶} \ \mathrm{cm}$$

- تانسور تنش





۳ تنش عمودی در روی این المان وجود دارد:

هر سطح دو مؤلفه تنش برشی دارد.
در وجوه نامرئی تنش ها را در خلاف جهت این تنش ها داریم:

تنش برشی با دو اندیس نامگذاری می شود اندیس اول صفحه را نشان می دهد (صفحه عمود بر یک محور)
اندیس دوم امتداد خود تنش را نشان می دهد

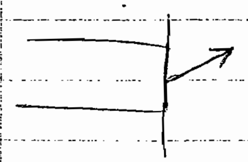
جمعاً ۹ مؤلفه تنش داریم:

کمیت هایی که مؤلفه دارند تانسور گویند

تانسور درجه ۳ مثل درجه حرارت که فقط با یک عدد نشان می دهند

هر چیزی که بشود با بردار نشان داد تانسور درجه یک است

آنهایی که ۹ مؤلفه دارند تانسور درجه دوم گویند پس تنش بردار نیست



اگر مقطع عوض نشود تنش بردار است یعنی آنکه تنش در همان مقطع

اگر یک صفحه دلخواه در این المان بزنیم می توانیم مولفه های تنش را برحسب این مولفه ها بیان کنیم ؛

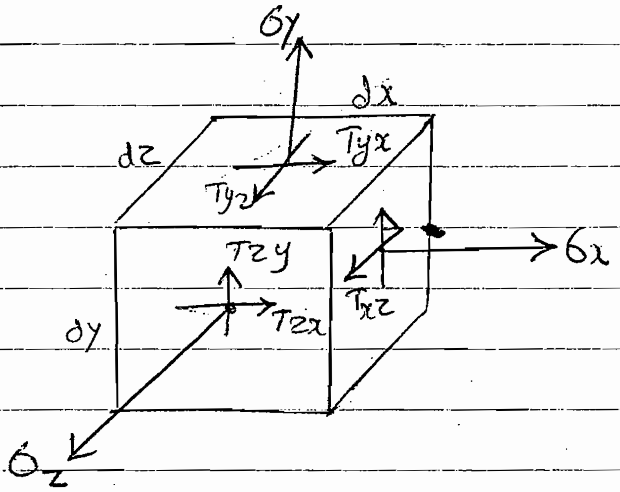
ولی در صفحات دو بعدی می توانیم ؛

تنش های عمودی در این المان هیچ ربطی به هم ندارند

ولی ثابت خواهیم کرد که تنش های برشی دو به دو با هم برابرند « از نظر مقدار »

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$
$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

یعنی از 9 مولفه ، 6 مولفه از نظر مقدار عددی مستقل می شود ؛



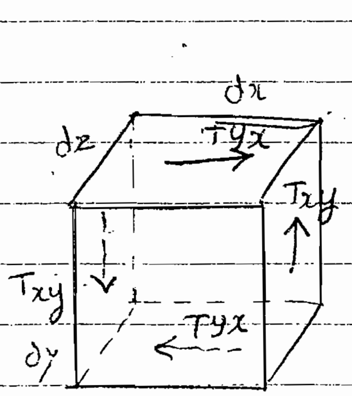
برآیند گشتاور را حول محور z می گیریم ؛

σ_x و σ_y و σ_z گشتاور صفر دارند ؛

τ_{yz}, τ_{xz} موازی محورند ؛

τ_{zx} و τ_{zy} عمود بر محورند گشتاور صفر دارند

7 تا مولفه صفر اند فقط این مولفه ها باقی می مانند ؛



مثل نیرو ← فاصله

$$(\tau_{xy})\overbrace{dydz}^{dA}\ \ \overbrace{dx}^{\text{فاصله}}$$

$$(\tau_{yx})dz\,dx\ \ dy$$

برای این که گشتاور صفر شود باید این دو گشتاور قرینه هم باشند

این دو مقداراً مساوی اند از نظر علامت مخالف هم اند ؛

* $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$

$\Rightarrow$ * $\tau_{yz} = -\tau_{zy}$

* $\tau_{xz} = -\tau_{zx}$

این ۹ تنش به صورت یک ماتریس ۳×۳ نوشته می شوند :

$\sigma_{xx} = \sigma_x$ — تنش عمود بر صفحه (محور) x و در راستای x

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

یا می توانیم تنش را با یک حرف و دو اندیس مشخص کنیم :

xx نیز σ و بقیه نیز τ

یا

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

در ماتریس σ کشش + و فشار منفی است

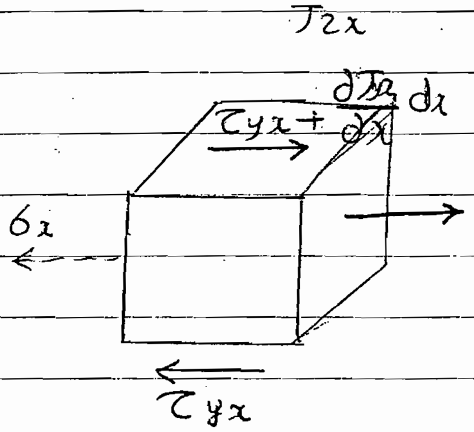
ولی در مورد τ وقتی ماتریسی نشان می دهیم جهت محور را به عنوان جهت τ می گیریم

نه ساعتگرد یا پاد ساعتگرد ؛

ماتریس σ ماتریس متقارن قطری است ؛

تنش در حالت کلی ۹ مؤلفه دارد

اگر بخواهیم روابط بین مشتقات تنش را بنویسیم داریم :



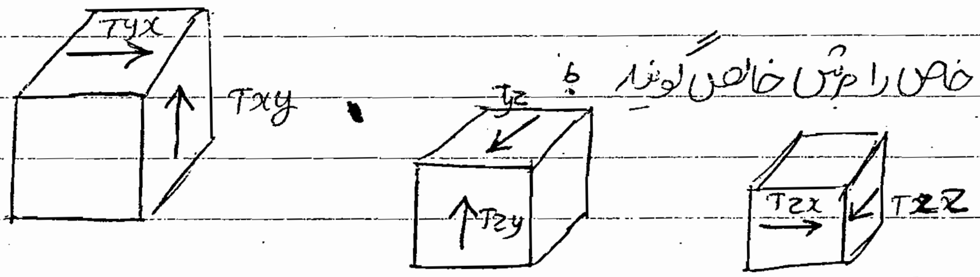
اگر معادله $\sum F_x = 0$ را بنویسیم :

تنش را در dA ضرب کنیم و روابط را پیدا کنیم :

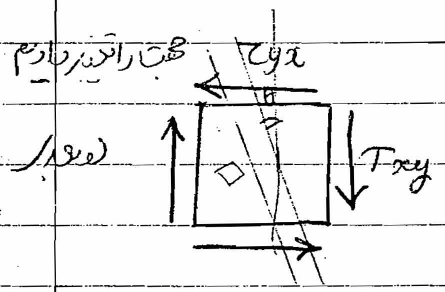
* برش خالص : Pure shear

در بین برش ها ۲ مؤلفه مساوی برش موجودند :

این حالت خاص را برش خالص گویند :



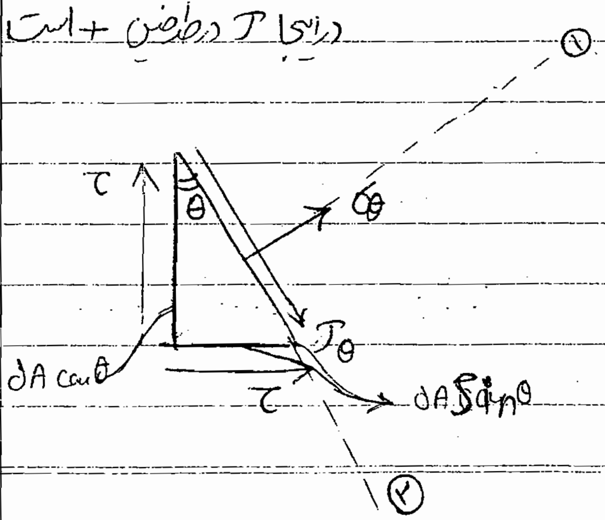
حتماً باید یکی در جهت ساعت و دیگری در خلاف جهت عقربه ها است



* برش خالص نیست

در اینجا τ در ظرف + است

تصویر نیروها در این امتداد را مساوی صفر قرار دادیم



$$\sum F_{①} = 0$$

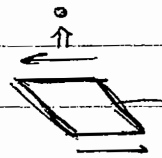
$$\sigma_\theta dA + \tau dA \cos\theta \sin\theta + \tau dA \sin\theta \cos\theta = 0$$

$$\boxed{\sigma_\theta = -2\tau \sin\theta \cos\theta = -\tau \sin 2\theta}$$

$\sum F^{②} = 0 \qquad \tau_\theta dA - \tau dA\cos\theta \cdot \cos\theta + \tau dA\sin\theta \cdot \sin\theta = 0$

$$\tau_\theta = \tau\cos^2\theta - \tau\sin^2\theta = \tau\cos 2\theta$$

در $\theta = 45°$ تنش برشی نداریم .

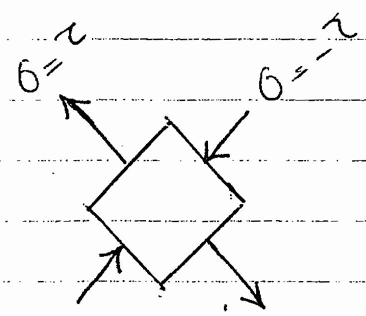


$\theta = 45$

* $\sigma_{45°} = -\tau$
* $\sigma_{-45} = \tau$

$\tau_{\pm 45} = 0$

τ در عقربه ساعت +

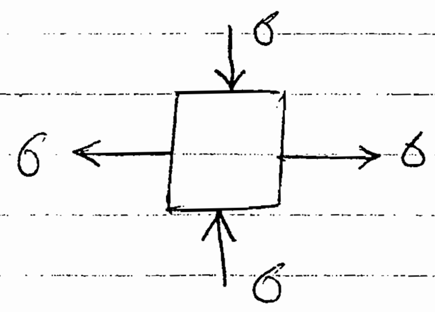


اگر المان را با زاویه ۴۵ درجه بیرون بیاوریم :

یک برش خالص در زاویه‌ای ۴۵° می‌شود یک تنش ۲ محوری

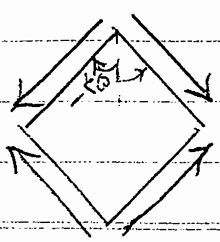
ولی با تنش کششی و فشاری مساوی ؛ تا برش خالص شود

ولی در تنش ۲ محوری در حالت کلی الزاما برش خالص نداریم :



$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta$$

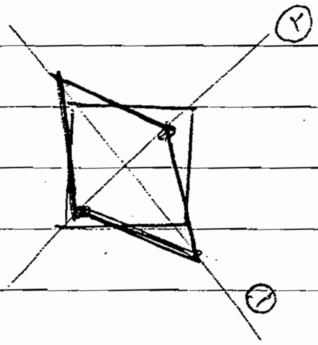


در این حالت

$\sigma_{\pm 45} = 0$

$\tau_{45} = \sigma$

$\tau_{-45} = -\sigma$



یک قطر بزرگتر و یک قطر کوچکتر می شود؟

دو محوری

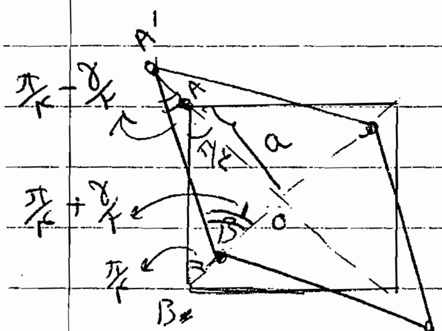
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)$$

در امتداد ①   در امتداد ②

$$* \ \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\tau - \nu(-\tau)\right] = \frac{\tau}{E}(1+\nu) = \varepsilon$$

$$* \ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[-\frac{\tau}{E}(1+\nu)\right] = -\varepsilon$$



$$\overline{OA} = a$$
$$\overline{AA'} = \varepsilon a$$
$$\Rightarrow OA' = (1+\varepsilon)a$$

$$OB = b$$
$$BB' = -\varepsilon a$$
$$OB' = (1-\varepsilon)a$$

زاویه عوض شده پس تنش برشی داریم   کل زاویه می شود $\frac{\pi}{2}+\gamma$ پس زاویه صلبی می شود $\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{OA'}{OB'}$$

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\gamma}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{(1+\varepsilon)a}{(1-\varepsilon)a} \Rightarrow \frac{1+\frac{\gamma}{2}}{1-\frac{\gamma}{2}} = \frac{(1+\varepsilon)\cancel{a}}{(1-\varepsilon)\cancel{a}}$$

$\frac{\gamma}{2}$ کوچک است.

$\gamma/_{2} \quad \varepsilon$ $\qquad$ $\boxed{\gamma = 2\varepsilon = \frac{2\tau}{E}[1+\nu]}$

تغییر برشی در برش خالص از رابطه بالا بدست می آید :

$$\overline{A'B'} = \sqrt{\overline{OA'}^2 + \overline{OB'}^2}$$

$$= \sqrt{(1+\varepsilon)^2 a^2 + (1-\varepsilon)^2 a^2}$$

$$= a\sqrt{(1+\varepsilon)^2 + (1-\varepsilon)^2}$$

$$\boxed{= \underbrace{a\sqrt{2}}_{\text{طول اولیه}} \sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

بسط می ⇒ $\sqrt{1+\varepsilon^2} = (1+\varepsilon^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \cdots$

ε مقدار کوچک دارد پس می توانیم بنویسیم :

$$\sqrt{1+\varepsilon^2} \simeq 1$$

* پس ضلع طولش عوض نمی شود .

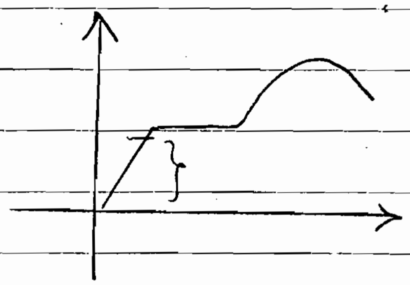
$$\boxed{\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0 \qquad \text{در برش خالص}}$$

مهم

$$\boxed{\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\tau - \tau) = 0}$$

تنش خطی در برش خالص ε ها صفرند ولی تنش برشی داریم :

تمام محاسبات ها مربوط به قسمت خطی منحنی $\sigma - \varepsilon$ بوده است :



و از آنجا نتیجه گرفتیم که γ و τ هم رابطه خطی دارند :

با توجه این رابطه : $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$

می توانیم رابطه زیر را برای γ و τ بنویسیم :

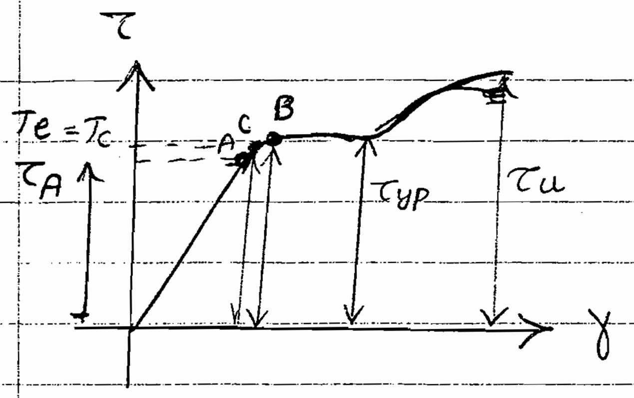
$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

که $\Rightarrow G$ مدول الاستیسیته برشی
ضریب ارتجاعی برشی
مدول یانگ برشی

مثلاً در مورد فولاد : $G \simeq 0/8 \times 10^{5}\ MPa \simeq 0/8 \times 10^{6}\ \dfrac{kg}{cm^2}$

E ، G ، μ همه ثابت مختلف برای مصالح مختلف اند ؛ ولی یک معادله بین این ۳ هست یعنی ۲ تا شون مستقل اند :



منحنی خطی را اثبات کردیم ولی بقیه منحنی
با تجربه ثابت می شود منحنی آخر منحنی
دیگر رو به پایین نداریم رو به بالا است !

* τ_A حد نسبی برشی

* τ_{yp} تنش تسلیم برشی

* τ_u تاب برشی - مقاومت نهایی برشی - تنش نهایی برشی

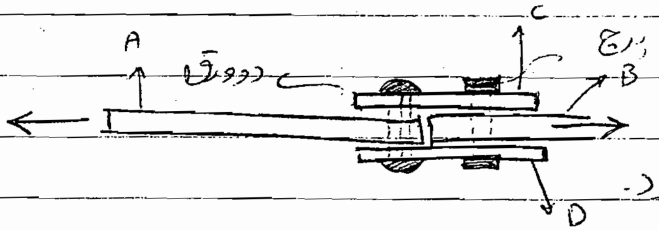
* $\tau_c = \tau_e$ حد الاستیک برشی

* تجربه نشان داده که این مقادیر بین $0/55$ تا $0/6$ مقادیر مربوط به نمودار تنش
محوری هستند

این قسمت
در کتاب
مختلف
متفاوت

پیچ - بد

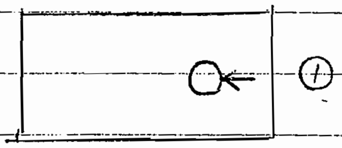
پیچ ها و پرچ ها :



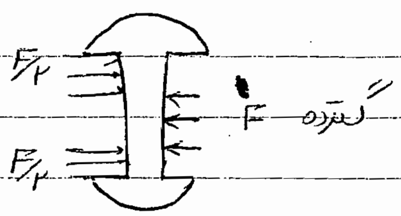
یک صفحه با طول زیاد امکان ندارد که به طور پیوسته ساخته شود باید از اتصال تعداد قطعه ساخته شود.

وقتی نیروی جوری به پرچ ها وارد داریم :

نیرو در پشت پیچ به پیچ وارد می شود :

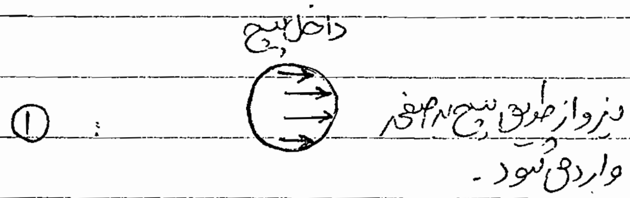


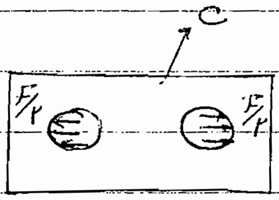
بنابراین مقابله صفحه نیرو نخواهد داشت :



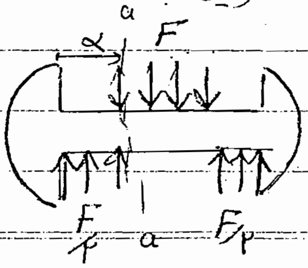
بین صفحه و پیچ همچنین اگر $F/2$ به پیچ وارد شود

به صفحه تکیه همان نیرو در خلاف جهت وارد می شود :



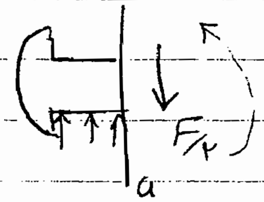


خود پیچ مثل یک تیر عمل می کند که یک مقدار نیرو از بالا و یک مقدار از پایین به آن وارد می شود :



در هر جسم گسترده نیروی برشی داریم :

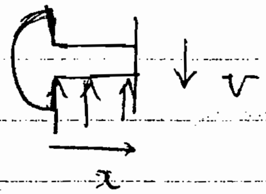
در برش a-a شده نیروی برشی را داریم با اندازه $F/2$



درست در وسط پیچ نیروی برشی صفر می شود چون F ، $F/2$ اثر هم را از بین می برند :

اگر فرض کنیم تنش برشی در مقطع یکنواخت است داریم :
میزان نیروی برشی یکنواخت باشد :

$$\tau = \frac{F/2}{A}$$



$$= V = \frac{x}{a} \cdot \frac{F}{2}$$

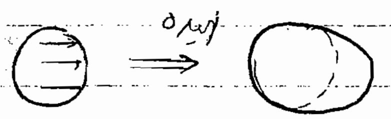
$x = a$ نیروی برشی max است که می شود $F/2$

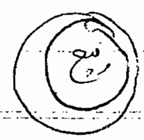
یک نوع تنش در اینجا تنشی است که از پیچ به ورق یا از ورق به پیچ وارد می شود :

این تنش را تنش لهیدگی گویند که بین دو جسم اثر می کند معمولاً از جنس فشاری است تنشی یا برشی نیست : bearing stress

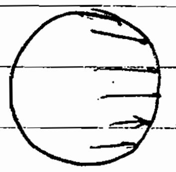
معمولاً جنس ورق نرم تر است بنابراین لهیدگی بیشتر ورق را له می کند مگر اینکه جنس ورق و پیچ یکی باشد :

پیچ های فولادی معمولاً نسبت به فولاد ورق سخت‌ترند.





وقتی قطر پیچ درست مساوی سوراخ نباشد سر یک سوراخ بزرگتر از پیچ :



لهیدگی $\sigma_b = \dfrac{F'}{tD}$

t ضخامت ورق

D قطر دایره.

F' نیروی متناظر با ورق ای است که می خواهیم لهیدگی آن را محاسبه کنیم.

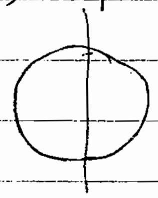
مثلا در مورد ورق B می شود F در مورد دو ورق بالا و پایین می شود $F/2$

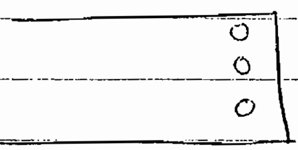
اگر ۳ پیچ داشته باشیم نیروی F تقسیم می شود هر کدام $F/3$ در این صورت نیروها به $F/3$ و $F/6$ و $F/6$ تقسیم می شود

پیچ نباید خیلی نزدیک لبه ورق باشد چون ممکن است باعث ایجاد چین در ورق شود.
آیین نامه آن را تعیین می کند.

تنش لهیدگی یکنواخت نیست غیر یکنواختی آن از تنش برشی بیشتر است.

در تنش لهیدگی مساحت فرضی را در نظر گرفتیم تصویر نیم استوانه را در صفحه قائم در نظر گرفتیم
یک مستطیل ایجاد می شود.





n پیچ یا ۳ تا پیچ $= \tau = \dfrac{F}{2An}$

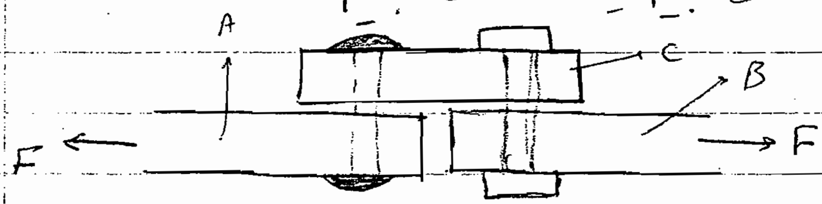
ممکن است در دو ردیف پیچ بگذاریم $V = \dfrac{F}{2n}$

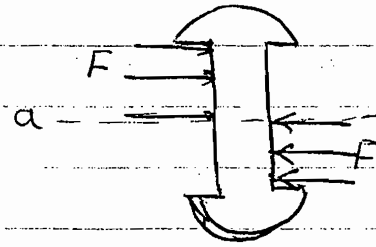
همیشه نصف نیرو در یک مقطع پیچ وارد می شود.

در مثال قبل برای ورق های A, B $\quad F' = F/n$

D, C " $\quad F' = \dfrac{F}{2n}$

ممکن است به جای این که دو طرف ورق بگذاریم یک طرف ورق بگذاریم ؟





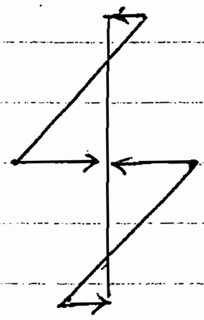
در این مقطع تمام نیرو F را داریم

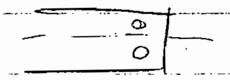
$$\tau = \frac{V}{A}$$

$$\tau = \frac{F}{An}$$

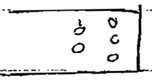
این اتصال ، اتصال خوبی نیست ؛ چون ورق را زیر اثر یک لنگر قرار می دهند ؛ تعادل لنگری ندارد .

بنابراین این توزیع عوض می شود ؛ به صورتی در می آید که توزیع متقارن شود

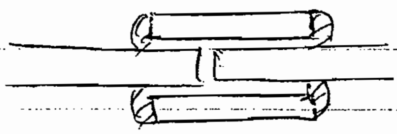




همه این پیچها در حالت متقارن اند .



الزامی نیست که پیچها در یک امتداد باشند .



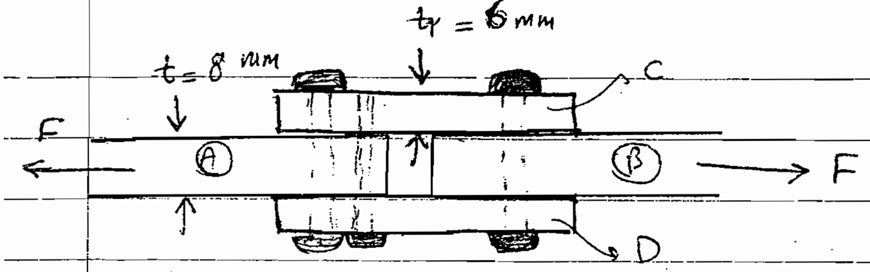
ممکن است به جای پیچ از جوش استفاده شود

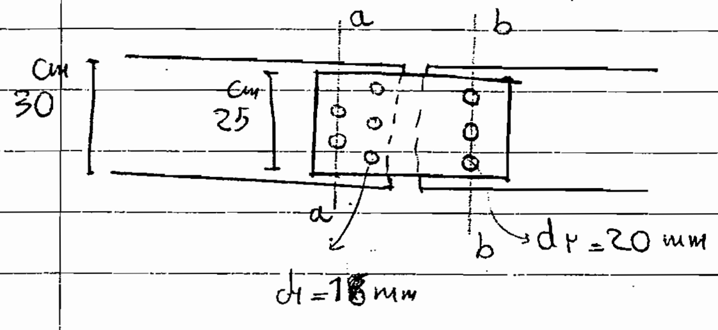
مثال 8 مقدار مجاز F ؟

$\sigma_w = 1500 \ kg/cm^2$ ورقها (مجاز)

$\tau_w = 1200 \ kg/cm^2$ پیچها (مجاز)

$\sigma_{bw} = 1800 \ kg/cm^2$ (لهیدگی مجاز)





حل - A :

اول محاسبه در مورد ورقها :

نیرو بین پیچها تقسیم می شود $\frac{1}{5}$ به هر پیچ

وقتی به دو پیچ می رسیم : $\frac{2}{5}F$ می رود و بقیه $\frac{3}{5}$ بین سه تا پیچ تقسیم می شود :

مقطع a-a خطرناکترین مقطع است :

$$\sigma_w \geq \frac{F}{A}$$

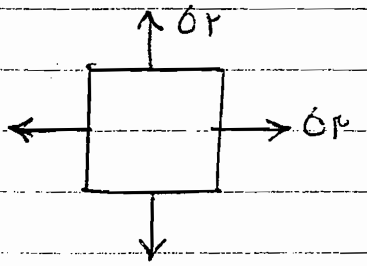
$$1500 \geq \frac{F}{\underbrace{(30 - 2 \times 1/6)}_{\text{مساحت دوتا پیچ}} \times 0/8} \Rightarrow F \leq 32160$$

B
$$1500 \geq \frac{F}{(30 - 3 \times 2) \times 0/8} \Rightarrow F \leq 28800$$

با توجه به محاسبات بالا معلوم می شود که سمت راست اتصال از نظر تنش خطرناکتر است :

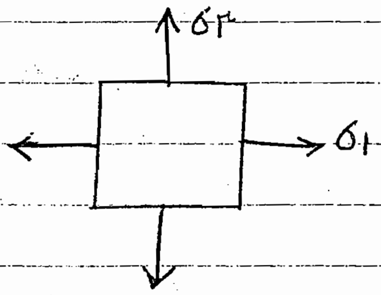
بنابراین سمت راست ورقهای C و D را در نظر می گیریم :

$$1500 \geq \frac{F/2}{(25 - 3 \times 2) \times 0/6} \Rightarrow F \leq 34200$$



C یا $A \,\Big|\, \begin{smallmatrix}\sigma_3\\ 0\end{smallmatrix}$, $B \,\Big|\, \begin{smallmatrix}\sigma_2\\ 0\end{smallmatrix}$

دایره مور آن را می‌کشیم



حال اگر از سوی دیگر به المان نگاه کنیم:

$A \,\Big|\, \begin{smallmatrix}\sigma_1\\ 0\end{smallmatrix}$, $C \,\Big|\, \begin{smallmatrix}\sigma_3\\ 0\end{smallmatrix}$

دایره جدید شامل هر دو دایره است:

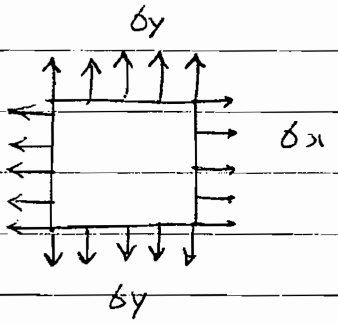
اگر یک صفحه دلخواه عمود بر این صفحه بزنیم تمام تنش های آن روی دایره بزرگ قرار دارد!

اگر یک صفحه ای شامل هر ۳ امتداد باشد نقطه نظیر آن در دایره مورد بحث هاشور خورده خواهد بود:

$$\text{بزرگترین تنش برشی} \quad \tau_{max} = \pm \frac{\text{بزرگترین تنش اصلی} - \text{کوچکترین تنش اصلی}}{2}$$

شعاع دایره بزرگ

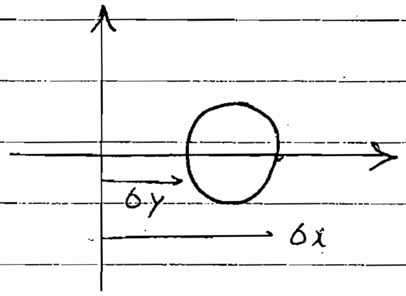
به طور کلی در هر جسمی یا هر المانی که به شکل دو بعدی می‌بینیم در واقع ۳ بعدی است مثلاً در میله دو مولفه تنش صفر است یا در تنش خالص تنش های اصلی را حساب کردیم یک تنش اصلی عمود بر صفحه است که مقدار آن صفر است



یک ورق نازک فولادی
را از دو طرف می‌کشیم

$\sigma_z = 0$

* بزرگترین تنش برشی = $\dfrac{\text{کوچکترین تنش اصلی} - \text{بزرگترین تنش اصلی}}{2}$



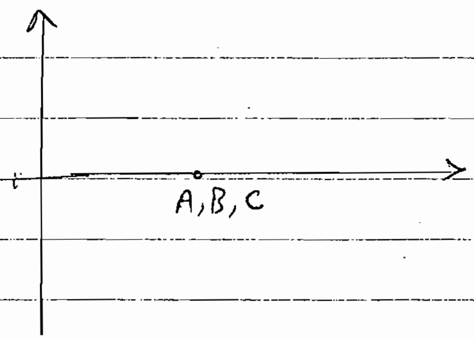
$\sigma_z = 0 \Rightarrow \tau_{max} = \dfrac{\sigma_x - 0}{2}$

حتماً به مؤلفه سوم توجه شود!

تنش کروی:

حالتی که هر ۳ مؤلفه عمودی تنش با هم مساوی باشند:

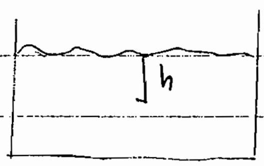
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$



هر صفحه‌ای در این المان بگیریم
τ صفر است:

تنش عمودی در هر صفحه‌ای همان σ است

به این تنش، تنش هیدرواستاتیک هم گفته می‌شود:



فشار = γh

فشار در مایع به امتداد
بستگی ندارد

روابط بین تنش و کرنش در حالت کلی 8

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

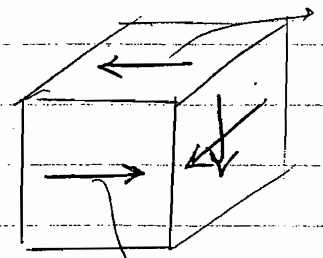
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$



این تنش زاویه قائم را تغییر می دهد

این τ زاویه صفحه خودش را تغییر نمی دهد بلکه زاویه صفحه بالایی را تغییر می دهد.

تنش حجمی

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$$

در تنش سطحی اگر به ۳ بعد
توجه کنیم دو حجم را داریم
کوچکترین را بگیریم تا τ_{max}
بدست آید.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma - \nu(\sigma + \sigma)\right]$$

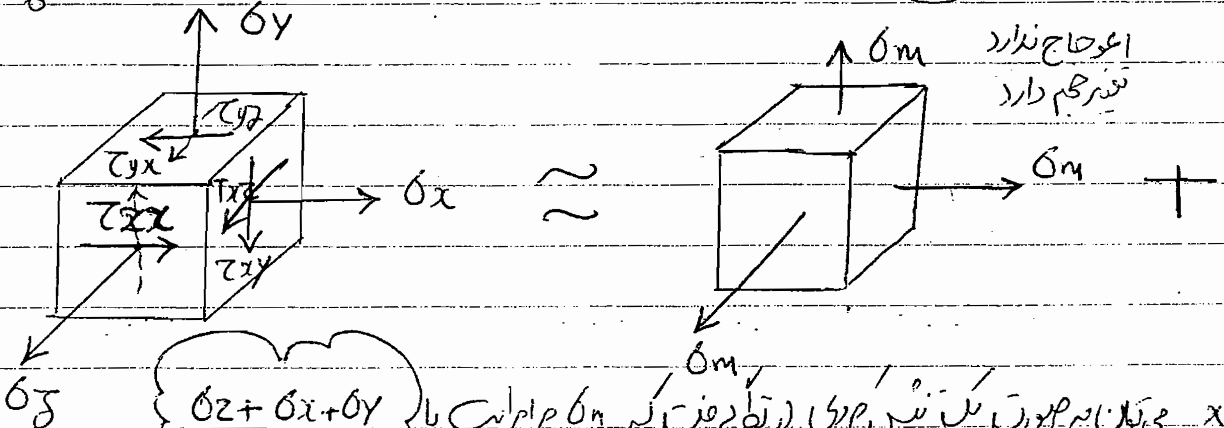
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_x = \frac{\sigma}{E}(1-2\nu)$$

کرنش حجمی $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{3\sigma}{E}(1-2\nu)$ *

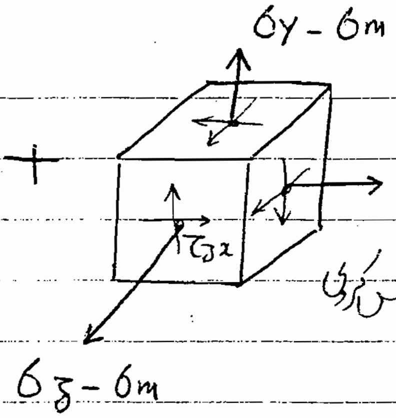
رابطه بین تنش حجمی و کرنش حجمی

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma}{K} \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

* K : مدول ارتجاعی حجمی یا ضریب الاستیسیته حجمی



x می‌توان به صورت یک تنش حجمی در نظر گرفت که σ_m برابر است با $\frac{\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y}{3}$

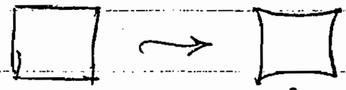


تغییر حجم ندارد
اعوجاج دارد

تنش انحرافی از تنش کروی

* تنش کروی فقط تغییر حجم دارد اعوجاج ندارد ۶

* برای دومی تغییر حجم ندارد و اعوجاج دارد ۶

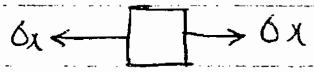


اعوجاج

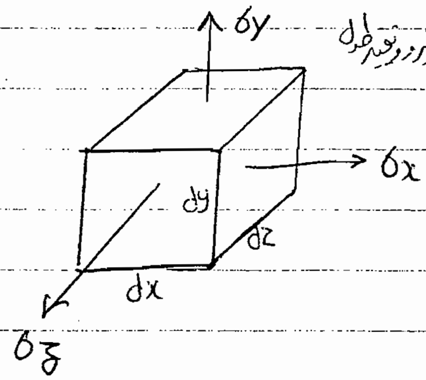
ناشی از تنش برشی است

(Distortion)

انرژی برحسب تنش ها 8



$u = \frac{\sigma_x^2}{2E}$ انرژی تنش واحد حجم



به خاطر خطی بودن نیرو و تغییر طول — نیرو — مقدار تغییر طول

$$\frac{1}{2}\sigma_x (dy\,dz)\times \varepsilon_x\,dx + \frac{1}{2}\sigma_y (dx\,dz)\cdot \varepsilon_y\,dy + \frac{1}{2}\sigma_z (dx\,dy)\cdot \varepsilon_z\,dz = U$$

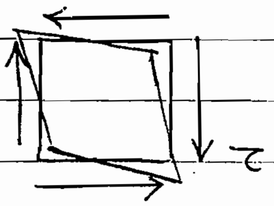
کل انرژی در المان

انرژی در واحد حجم $u = \frac{U}{dx\,dy\,dz} = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z)$

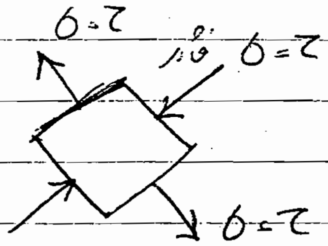
$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)\right]$$

ناشی از تنش عمودی

انرژی ناشی از تنش برشی

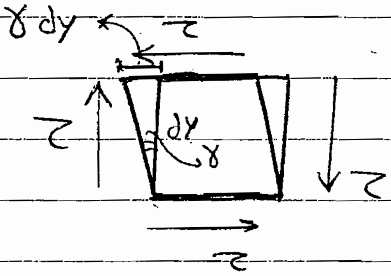


می شود المان ۴۵° در نظر گرفت



با استفاده از فرمول بدست آمده انرژی حاصل محاسبه می شود

در روش دوم شکل تغییر شکل یافته را طوری دوران می دهیم که ضلع پایینی منطبق بر شکل اصلی شود؛



فقط نیروی بالا کار انجام می دهد با اندازه γdy

$$U = \frac{1}{2}(\tau\, dx\, dy)\cdot \gamma\, dy$$

در حالت برش خالص

در واحد حجم $u = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}$ — مدول الاستیسیته برشی

ناشی از ۳ تا تنش برشی $u = \frac{1}{2G}\left[\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right]$

$u_{\text{کل}} = u_1 + u_2$

* فقط تنش عمودی هست که اعوجاج ندارد یعنی حجمی را از ۳ طرف با تنش می کشیم یا فشاریم

در حالتهای بالا فقط در صفحه عمودی اعوجاج نداریم در صفحات دیگر اعوجاج داریم؛

۲۷ر۱ر۸۴ بنام خدا

آنالیز تنش :

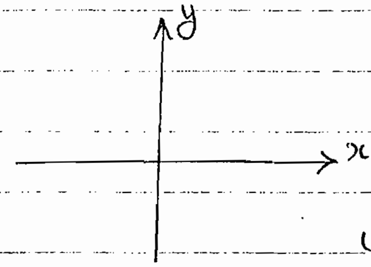
تنش ۹ مؤلفه دارد ۳ تا تنش از نوع خطی : $\varepsilon_x , \varepsilon_y , \varepsilon_z$

۶ تا تنش برشی : $\gamma_{yx} , \gamma_{xy}$

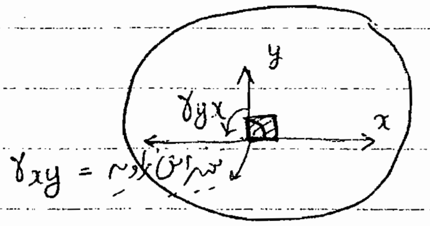
$\gamma_{yz} , \gamma_{zy}$

$\gamma_{zx} , \gamma_{xz}$

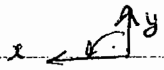
* فرق γ_{xy} , γ_{yx} :

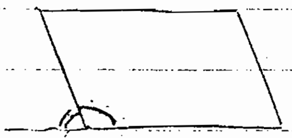


* γ_{xy} تغییر زاویه قائمی که بین امتداد اول x و y است



* γ_{yx} اول محور y بعد محور x را عمود کنیم بر آن در جهت مثلثاتی





این دو زاویه همیشه با هم تغییر می‌کنند پس γ_{yx} و γ_{xy} با هم مساوی ولی در خلاف جهت هم اند

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = -\gamma_{yx} \\ \gamma_{yz} = -\gamma_{zy} \\ \gamma_{zx} = -\gamma_{xz} \end{cases}$$

* محور اول انتخاب می‌شود محور دوم فقط امتداد را نشان می‌دهد به طوریکه از محور اول در جهت مثلثاتی می‌رویم (تا راستا عمود گردد) محور دوم بدست می‌آید؛

می شود ثابت کرد که تنش هم ۳ امتداد اصلی دارد مثل تنش که در آن امتدادها تنش برشی نداریم :

یعنی این ۳ امتداد عمود بر هم تحت هر نوع تغییر شکلی ، زاویه بین آنها تغییر نمی کند

تنش خطی در امتداد یکی از آنها بیشترین و در امتداد یکی دیگر کوچکترین مقدار است .

در حالت کلی امتدادهای اصلی تنش و تنش بر هم منطبق نیستند :

* برای موادی که تنش و تنش خطی دارند در محدوده خطی محورهای اصلی تنش و تنش با هم برابرند :

* تنش مسطح : plane strain

حالتی از تنش است که ε_x , ε_y , γ_{xy} , γ_{yx} داریم :

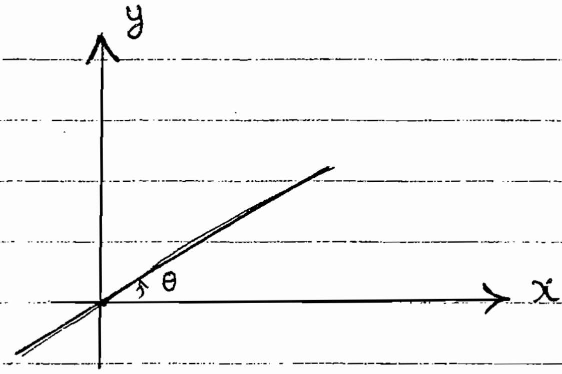
$$\begin{cases} \varepsilon_x , \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} = -\gamma_{yx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{yz} = -\gamma_{zy} = 0 \\ \gamma_{zx} = -\gamma_{xz} = 0 \end{cases}$$

در روابط مربوط به تنش مسطح اگر $\sigma \rightarrow \varepsilon$, $\tau \rightarrow \gamma/2$ تبدیل شود همه

روابط درست خواهند بود

- حالا می‌توانیم در یک امتداد دیگر که با x زاویه θ می‌سازد تنش‌ها را بیابیم:

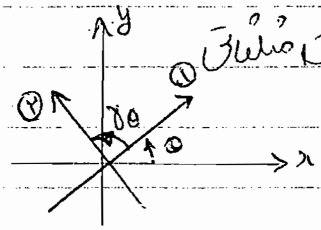


$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

γ_θ یعنی محور اول با زاویه θ انتخاب شده است محور دوم عمود بر آن در جهت مثلثاتی



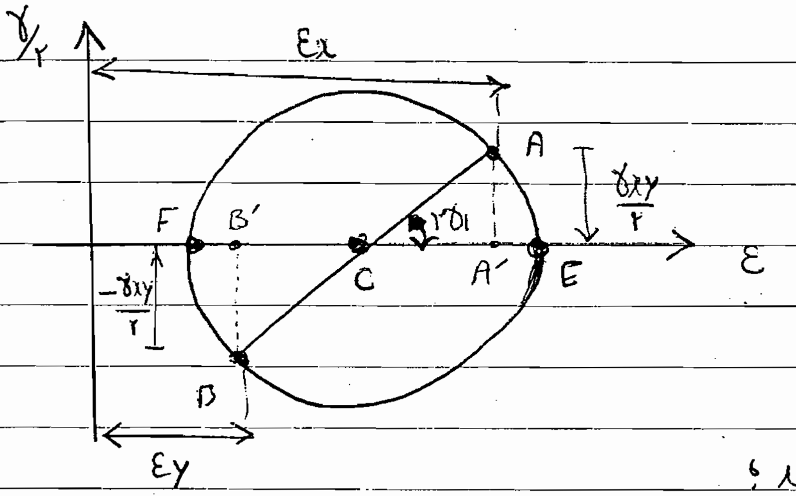
$$\tau \rightarrow \frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{\gamma_\theta}{2} = \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

برای تنش هم می‌توانیم دایره مور داشته باشیم:

$$A\left|\begin{matrix}\sigma_x\\ \tau_{xy}\end{matrix}\right. \quad ; \quad B\left|\begin{matrix}\sigma_y\\ -\tau_{xy}\end{matrix}\right.$$

حال $\Longrightarrow$ $A\left|\begin{matrix}\varepsilon_x\\ \frac{\gamma_{xy}}{2}\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}\varepsilon_y\\ -\frac{\gamma_{xy}}{2}\end{matrix}\right.$



نقاطی که روی دایره اند نظیر محورها هستند :

مرکز دایره $C \left| \begin{array}{l} \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{۲} \\ 0 \end{array} \right.$

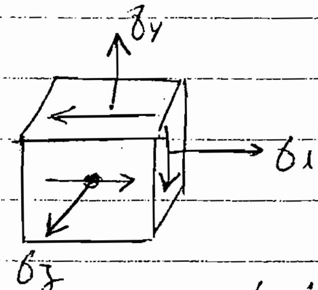
$$R=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{۲}\right)^{۲}+\left(\frac{\gamma_{xy}}{۲}\right)^{۲}}$$

$$\tan ۲\theta_1=\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}$$

$$* \quad \varepsilon_{max}=\overline{OC}+R=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{۲}\right)^{۲}+\left(\frac{\gamma_{xy}}{۲}\right)^{۲}}+\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{۲}$$

$$* \quad \varepsilon_{min}=\overline{OF}=\overline{OC}-R=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{۲}-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{۲}\right)^{۲}+\left(\frac{\gamma_{xy}}{۲}\right)^{۲}}$$

* اگر $\varepsilon_x , \varepsilon_y$ و ε_z را داشته باشیم تنش دارِ سطح نیست ولی می توان روابط را بکار برد $\gamma_{xy} - \gamma_{yz}$



* اندازه گیری تنش «تجربی» تنش سنج (strain guage)

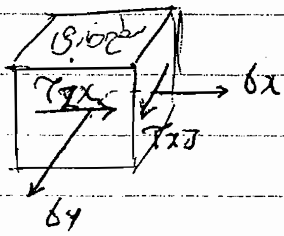
- یک سیم را به جسمی که می خواهیم تنش آن را اندازه بگیریم در همان جهت می چسبانیم وقتی طول زیاد شود مقاومت سیم زیاد و شدت جریان کم می شود طول سیم باید کوچک باشد وگرنه تغییر طول متوسط را به ما می دهد ؛ هنوز دستگاهی اختراع نشده که تنش برشی را اندازه بگیرد ؛

می توانیم ε را در ۳ امتداد اندازه بگیریم ε_x , ε_y و ε_θ را داریم γ_{xy} بدست می آید ؛

معمولاً سیم را روی سطح سازه می گذارند وگرنه باید هنگام ساخته شدن سیم را داخل بگذاریم

جایی که تنش را اندازه می گیریم تنش سطح خواهیم داشت چون سیم را به سطح خارجی وصل می کنیم

و اگر در سطح خارجی نیرویی وارد نشود تنش برشی عمودی در آن صفر است ؛



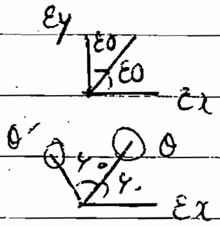
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_z + \sigma_y)\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right)$$

* وقتی تنش سطح باشد تنش سطح هست و برعکس $\quad \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G}$

چون ε_z داریم ؛



تنش‌سنج‌ها را به صورت زاویه ۴۵° یا ۶۰° به هم وصل می‌کنند

در ۴۵ می‌شود یکی را ε_x و ε_y و دیگری را بدست آورد

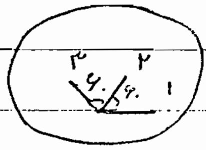
در حالت ۶۰° رابطه را دوبار می‌توان نوشت و ε_y و γ_{xy} را بدست آورد.

مثال: در یک نقطه از سازه‌ای تنش‌ها را در ۳ امتداد با زاویه ۶۰° اندازه گرفتیم و مقادیر زیر بدست آمده است:

$\varepsilon_1 = 200 \times 10^{-6}$ یا ۲۰۰ میکرواسترین   ~~Micro~~ Micro strain $= 10^{-6}$

$\varepsilon_2 = -400 \times 10^{-6}$

$\varepsilon_3 = 300 \times 10^{-6}$



$\begin{cases} E = 2 \times 10^{6} \ \frac{kg}{cm^2} \\ \nu = 0.3 \end{cases}$

حل - تنش‌های اصلی را می‌خواهیم پیدا کنیم؛ و تنش برشی Max ؟

اول باید در دو امتداد x و y تنش‌ها را داشته باشیم تا بتوانیم دایره مور را رسم کنیم:

$\varepsilon_x = \varepsilon_1 = 200 \times 10^{-6}$

دوبار رابطه ε_θ را می‌نویسیم:

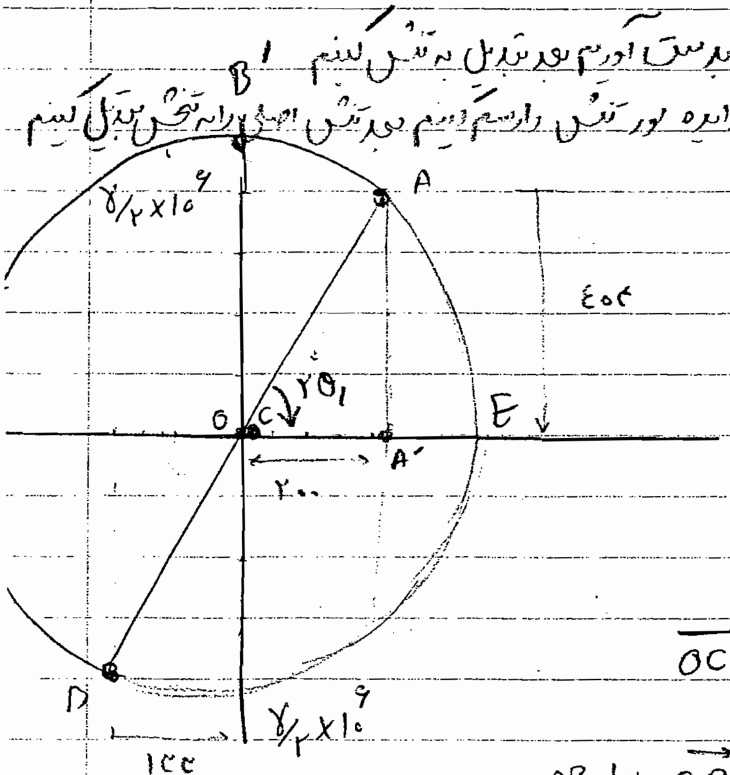
$$\begin{cases} \varepsilon_{60} = \varepsilon_2 = \dfrac{200\times10^{-6} + \varepsilon_y}{2} + \dfrac{200\times10^{-6} - \varepsilon_y}{2}\cos 120 - \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\sin 120 = -400\times10^{-6} \\ \varepsilon_{120} = \varepsilon_3 = \dfrac{200\times10^{-6} + \varepsilon_y}{2} + \dfrac{200\times10^{-6} - \varepsilon_y}{2}\cos 240 - \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\sin 240 = 300\times10^{-6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -400\times10^{-6} = 50\times10^{-6} + \tfrac{3}{4}\varepsilon_y - \tfrac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$

$$300\times10^{-6} = 50\times10^{-6} + \tfrac{3}{4}\varepsilon_y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$

$\varepsilon_y = -133\times10^{-6}$ $\gamma_{xy} = 808\times10^{-6}$

دو راه حل داریم : یکی این که کرنش های اصلی را بدست آوریم بعد تبدیل به تنش کنیم
یا از اول به تنش تبدیل کنیم و دایره مور تنش را رسم کنیم بعد تنش اصلی را به کرنش تبدیل کنیم



نمایش

$A \,|\, 200\times10^{-6} = 200 \quad \varepsilon_x$
$\quad \frac{\gamma_{xy}}{2} = 404 \quad \frac{\gamma_{xy}}{2}$

$B \,|\, -133 \quad \varepsilon_y$
$\quad -404 \quad \frac{\gamma_{yx}}{2}$

* O , C منطبق نیستند :

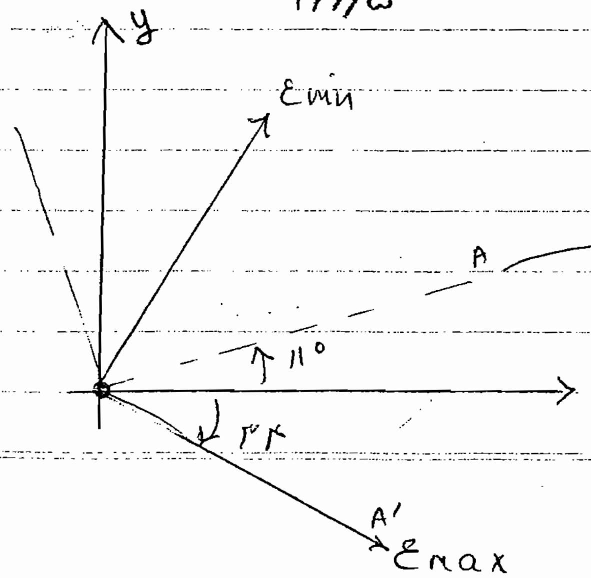
$$\overline{OC} = \frac{200-133}{2} = 33.5$$

$$AB \text{ قطر } \overrightarrow{CA'} = \frac{200+133}{2} = 166.5$$

$$R = \sqrt{\overline{CA'}^2 + \overline{AA'}^2} = \sqrt{166.5^2 + 404^2} = 437$$

$$10^6 \times \varepsilon_{max} = 33.5 + 437 = 470.5$$
$$10^6 \times \varepsilon_{min} = 33.5 - 437 = -403.5$$
$$10^6 \times \frac{\gamma_{max}}{2} = 437 \Rightarrow \gamma_{max} = 874 \times 10^{-6}$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{404}{166.5} \Rightarrow \theta_1 = 34$$



تنش برشی بین دو خط چین max مقدار را دارد

چون A , A' در دایره ۹۰° اختلاف دارند
پس در صفحه ۴۵° پس زاویه مورد نظر می شود

$\Rightarrow 110°$

$\varepsilon_{max} = ۴۷۰٫۵ \times 10^{-6}$

$\varepsilon_{min} = -۴۰۲٫۵ \times 10^{-6}$

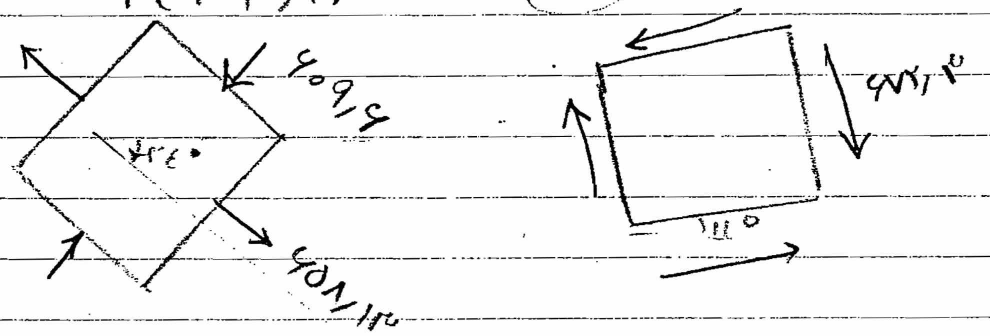
$\gamma_{max} = ۸۷۴ \times 10^{-6}$

داریم $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \Rightarrow ۴۷۰٫۵ \times 10^{-6} \times ۲ \times 10^{6} = \sigma_{max} - ۰٫۳\sigma_{min}$

$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \Rightarrow ۴۰۲٫۵ \times 10^{-6} \times ۲ \times 10^{6} = \sigma_{min} - ۰٫۳\sigma_{max}$

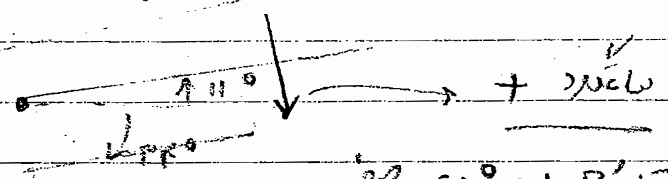
$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}$ که $G = \frac{E}{۲(1+\nu)}$

$\Rightarrow \frac{۸۷۴ \times 10^{-6} \times ۲ \times 10^{6}}{۲(1+۰٫۳)} = \tau_{max}$



از نقطه E تا τ_{max} در دایره 90° پس در المان 45° اختلاف وجود دارد

که در این محور در المان مورد نظر آن تنش برشی + است پس ساعتگرد است ؛



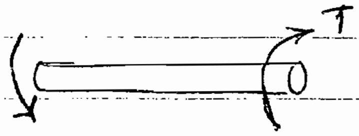
* چون از E تا B' باید 45° در المان

چرخیم پس در المان مورد نظر تنش برشی +

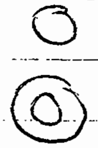
است .

۸۴/۱/۲۹ بنام خدا 14 ج

پیچش Torsion



شرایط مسئله 8



۲ حالت مورد بررسی — دایره توخالی

۱- تغییر شکلها کوچکند

۲- تنش ها و پیچش ها در قسمت خطی منحنی تنش - پیچش قرار دارند

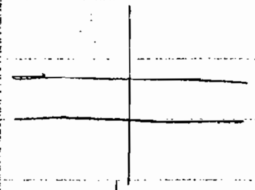
* اگر چنین وضعیتی را داشته باشیم با تجربه و مطالعات دقیق نشان می دهد که 8

۱- محور میله مستقیم باقی می ماند

۲- مقطع میله به صورت مدور باقی می ماند

۳- طول میله تغییر نمی کند

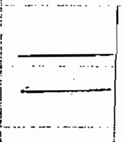
۴- (اندازه قطر) میله تغییر نمی کند



قبل تغییر شکل

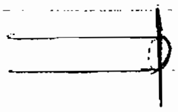
۵- مقاطع اولیه عمود بر محور میله ، مسطح باقی می مانند

* نقاط مختلف مقطع حرکت عمود بر مقطع ندارند



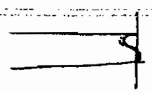
بعد از تغییر شکل warping

تاب برداشتن مقطع
یعنی مقطع از حالت
مسطح خارج می شود



از حالت عمود خارج نشود

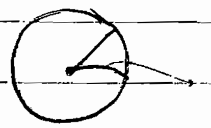
یا



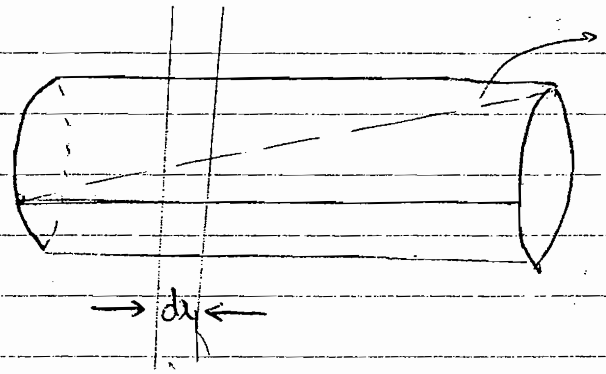
اعوجاج با تاب برداشتن متفاوت است

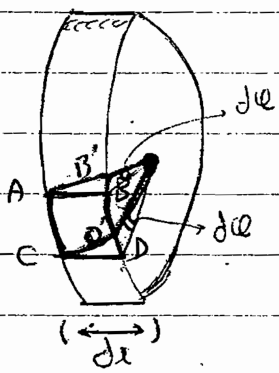
اعوجاج تغییر زاویه قائمه ناشی از تنش برشی است ولی تاب برداشتن فقط مقطع از حالت صفحه خارج می شود

۶ ـ هر قطر یا هر شعاع به صورت شعاع یا قطر باقی می ماند 8



فرض این است که میله از بی نهایت صفحه نازک صلب تشکیل شده که هنگام پیچش این صفحات روی هم دوران می کنند خود صفحات هیچ تغییر شکلی ندارند فقط نسبت به هم دوران می کنند



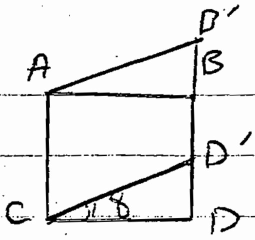


اعمال

اعمال ABCD به صورت AB'D'C
در آمده است

چون صفحه صلب است همه نقاط به صورت
صلب یک دوران dα دارند

$$\overline{BB'} = \overline{DD'} = R\,d\alpha \Longrightarrow \boxed{\overline{B'D'} = \overline{BD}}$$

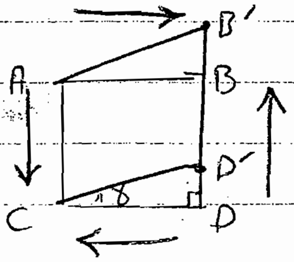


به دلیل کوچکی تغییر شکل‌ها BB' یا DD'
نسبت به DC و BA ؛
زاویه γ زاویه کوچکی خواهد بود پس داریم ؛

$$D'C = DC$$

* یعنی در این المان بعد از تغییر شکل تغییر طولی اتفاق نیفتاده است ؛

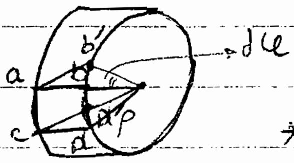
چون فقط تغییر زاویه قائمه داریم و برشی است پس المان تحت برش خالص است ؛



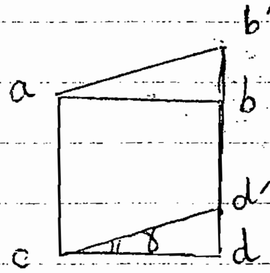
$$\gamma = \frac{DD'}{DC} = \frac{R\,d\varphi}{dx}$$

$\frac{d\varphi}{dx}$ را دوران در واحد طول گویند ؛

* اگر لایه‌های حلقه با شعاع R یک حلقه با شعاع ρ در نظر بگیریم ؛



* $\overline{bb'} = \overline{dd'} = \rho\,d\varphi$
* $\overline{b'd'} = \overline{bd}$
* $cd = cd'$



$$\gamma = \frac{\overline{dd'}}{cd} = \frac{\rho\,d\varphi}{dx}$$

γ با قبلی متفاوت است

باز هم همین دوران در واحد طول بدست آید

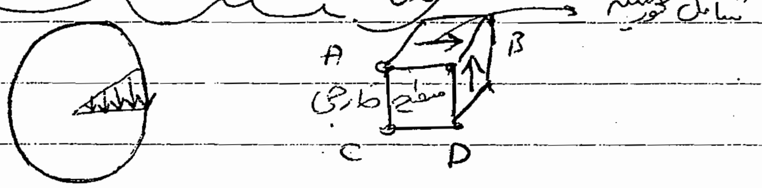
* یعنی مقدار γ در دوران با فاصله از مرکز مقطع متناسب است

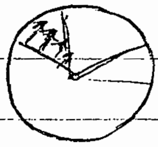
$\frac{d\varphi}{dx}$ برای تمام نقاط مقطع مقدار ثابتی است ؟

تنش برشی در مرکز صفر است هرچه از مرکز دور شویم به طور خطی زیاد می شود

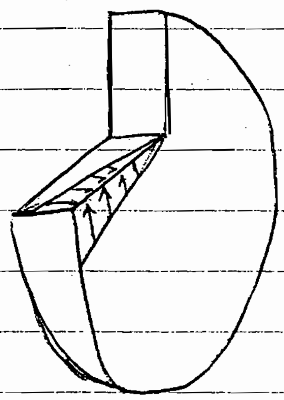
* یعنی وقتی میله را می پیچانیم محور میله تحت تنش قرار نمی گیرد وقتی از محور دور شویم تنش برشی زیاد می شود ؟

* $\boxed{\tau = G\gamma = G\rho\frac{d\varphi}{dx}}$



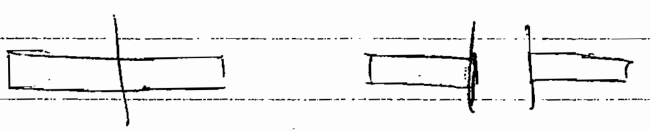


عمود بر شعاعی است که از آن نقطه رد می شود ؟

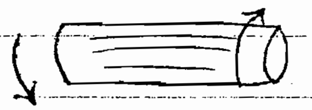


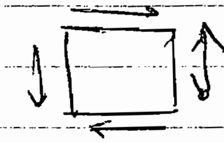
یک مؤلفه در امتداد طول میله
یک مؤلفه عمود بر محور میله

مثلاً در صورتی که تحت پیچش قرار می گیرد با یک مقطع سطح قطع خواهد شد



اگر استوانه چوبی باشد الیاف چوب در امتداد طول مقاومت زیاد دارند ولی پیوستگی در این راستا کمتر است





الیاف از هم جدا می شوند تحت برش بالا و پایین

درزوایای 45° ما کشش max داریم با همان مقدار برش پیچشی

" " " -45 فشار " " " " "

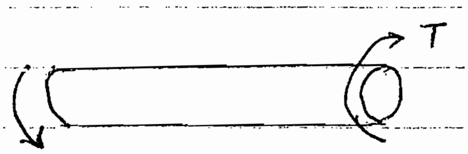
گچ را که در مقابل کشش ضعیف اند یک میله گچی تحت پیچش قاعدتاً باید تحت کشش از بین برود

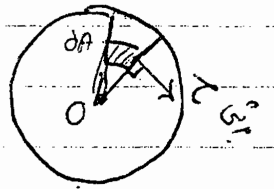
زاویه قطع میله گچی تقریباً 45° خواهد بود چون تحت کشش قطع می شود

در مورد فشار اجسام خیلی نازک فشار را تحمل نمی کنند و تحت فشار خم می شوند

* وقتی حجم قطع یا خراب شد دیگر روابط ما برقرار نخواهد بود !

محاسبه مقدار 8





$$dF = \tau \, dA$$

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

$$dF = G\rho \frac{d\varphi}{dx} \cdot dA$$

حول O: $dM_O = (dF)\rho = G\rho^2 \frac{d\varphi}{dx} dA$

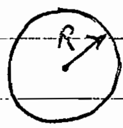
$$T = \int_A dM_O = \int G\rho^2 \frac{d\varphi}{dx} dA = G\frac{d\varphi}{dx}\int_A \underbrace{\rho^2 dA}_{\text{ممان اینرسی}}$$

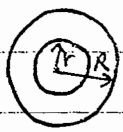
$$I_o \text{ یا } J_o = \int_A \rho^2 dA$$

گشتاور دوم
یا ممان
نسبت به O

$$T = G J_o \frac{d\varphi}{dx} \quad (۳)$$

$$\text{برشی } \tau = \frac{T\rho}{J_o} \quad (۴)$$

توپر  $* \quad J_o = \frac{\pi R^4}{2}$

توخالی  $J_o = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$

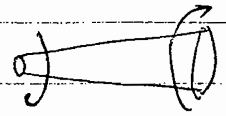
$\tau_{max} = \frac{TR}{J_o}$ $\quad r = R$

✓ تنش توی مقطع است
max که به مقطع نه روی
مقطع

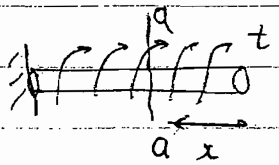
$$* \; d\varphi = \frac{T\,dx}{GJ_0} \Rightarrow \varphi = \int_0^L \frac{T\,dx}{GJ_0} \Rightarrow \varphi = \frac{TL}{GJ_0}$$

فرمول دوران تغییر زاویه

وقتی قطر ثابت باشد یا T ثابت باشد

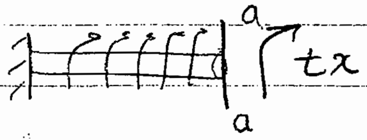


مثل رابطه $\delta = \frac{FL}{EA}$ است

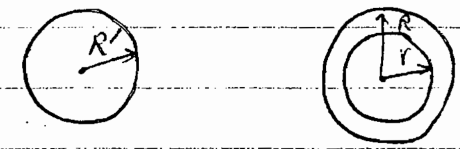


T گسترده دیگر ثابت نیست!

در روابط GJ_0 را صلبیت پیچشی گویند!



یک میله تحت پیچش است کدام مقطع بهتر است



* مساحت یکی دارند

$$A' = A$$

$$\pi R'^2 = \pi(R^2 - r^2) \Rightarrow R' = \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$J_0' = \frac{\pi R'^4}{2}$$

$$J_0 = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$$

$$\tau'_{max} = \frac{TR'}{J_0'}$$

$$\tau_{max} = \frac{TR}{J_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau'_{max}}{\tau_{max}} = \frac{R'}{J_0'} \times \frac{J_0}{R} = \frac{R'(R^4 - r^4)}{R'^4 \cdot R} = \frac{(R^2 - r^2)(R^2 + r^2)}{R'^3 \cdot R} = \frac{R^2 + r^2}{RR'}$$

از رابطه $R' = \sqrt{R^2 - r^2}$ می توان نتیجه گرفت $R > R'$ پس $R^2 > RR'$

پس $\frac{R^2+r^2}{RR'} > 1$ است پس مقطع دوم مقاوم تر است چون تحت T یکسان مقطع دوم τ_{max} کمتری را تحمل می کند؛

$$\varphi = \frac{TL}{GJ_0} \qquad \Rightarrow \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{J_0}{J_0'} \quad \frac{R^4 - r^4}{R'^4} \quad \frac{R^2+r^2}{R'^2} > 1$$

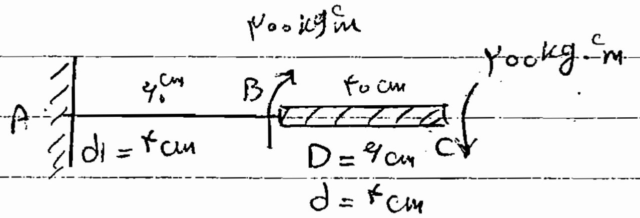
$$\varphi' = \frac{TL}{GJ_0'}$$

* پس میله اول هم تنش برشی دارد پس مقاومت آن کمتر است

* کلاً جسمی که تحت بارگذاری یکسان تنش برشی می گیرد مقاومت آن کمتر است؛

* هر جسمی که تحت اثر بارگذاری یکسان تغییر شکل برشی داشته باشد سختی کمتر است؛

بارگذاری چه محوری باشد چه پیچشی ⟵ تنش محوری در نظر؛



$G = 0/8 \times 10^6$

مثال 8 در شکل زوم و تنش های max

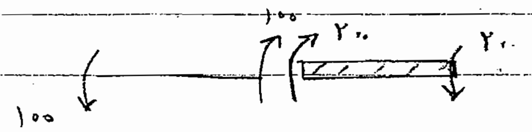
هر قسمت میله را بیابید و دوران

نقاط B, C را بیابید؟

kg, cm

حل - $\tau_{max} = \frac{TR}{J_0} = \frac{(100)(2)\times 100}{\pi/2\,(2)^4} = \frac{2500}{\pi}$ AB

$$\tau_{max} = \frac{200\times 100\times 3}{\pi/2\,(3^4 - 2^4)} = \frac{120000}{65\pi}$$



$$\varphi_{AB} = \frac{TL}{GJ_o} = \frac{100\times 100\times 60}{0/8\times 10^6\times \pi\frac{(24)}{4}} = \frac{3}{32\pi} \approx 0/0298\ Rad$$

برحسب رادیان باید باشد؛

اگر برحسب درجه خواهیم در $\frac{180}{\pi}$ ضرب می‌کنیم.

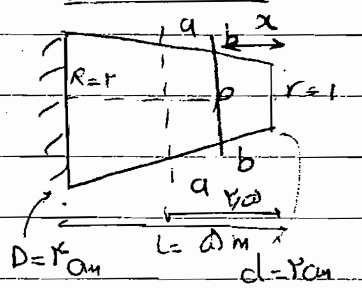
$$\varphi_{BC} = \frac{TL}{GJ_o} = \frac{200\times 100\times 40}{0/8\times 10^6\times \frac{\pi}{2}(3^4-24)} = 9{,}794\times 10^{-4}$$

$\theta_B = \varphi_{AB}$ چون A ثابت است هر قدر میله دوران کند نقطه B هم همان قدر دوران می‌کند

$\theta_C = \varphi_{AB} - \varphi_{BC} =$ چون در جهات مخالف هستند؛ $= 0/02$

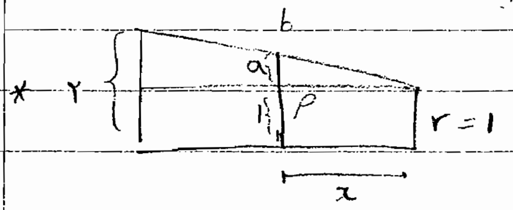
۸۴,۲,۳ $\quad t = ۲۰\ kg\,m/m$

سوال ۵: تنش ماکزیمم bb و دوران میله حول تکیه گاه؟



$G = ۰/۸\ MPa$

$$\begin{cases} T_{bb} = tx = ۲۰\,kg\,m/m = ۲۰\,kg\,cm/cm \\ T_{bb} = ۲۰x \end{cases}$$



$$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{1}{۵۰۰} \Rightarrow a = \frac{x}{۵۰۰} = ۰/۰۰۲x$$

$$\rho = 1 + a = 1 + ۰/۰۰۲x$$

$$J_0 = \frac{\pi \rho^4}{2} = \frac{\pi}{2}(1 + ۰/۰۰۲x)^4$$

$$* \ \tau_{max} = \frac{T\rho}{J_0} = \frac{T\rho}{\frac{\pi\rho^4}{2}} = \frac{2T}{\pi\rho^3} \Rightarrow ①$$

aa مقطع $= * \ \rho = 1 + (۰/۰۰۲)(۲۵۰) = ۱/۵\ cm \Rightarrow \tau_{max} = \dfrac{(۲۰ \times ۲۵۰)(۲)}{\pi(۱/۵)^3} = ۹۴۳/۱$

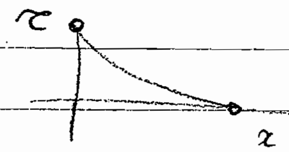
مقطع تکیه گاه $\Rightarrow \rho = ۲\,cm \Rightarrow T = ۲۰ \times ۵۰۰ = 10000$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{۲ \times 10000}{\pi(۲^3)} = ۷۹۵/۷\ kg/cm^2$$

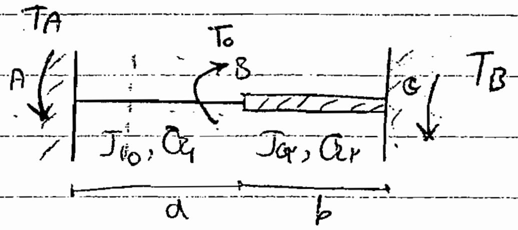
برای بدست آوردن بیشترین τ_{max} در میله باید از رابطه ① نسبت به x مشتق بگیریم

$$\tau_{max} = \frac{2\times 20x}{\pi(1+0.002x)^4} \Rightarrow \tau' = 0$$

ممکن است ماکزیمم جایی نداشته باشیم ولی در اینجا $x=250$ که همان وسطی است !



$$* \quad \varphi = \int_0^{500} \frac{T\,dx}{GJ_0} = \int_0^{500} \frac{20x\,dx}{\frac{\pi}{2}(1+0.002x)^4} \times \frac{1}{G} = 0.24$$



مثال 8

عکس العمل‌ها در A , C بیابید ؟

مثله هیپراستاتیک است بنابراین باید از تغییر شکل برویم :

۱ درجه نامعین است

$$T_A + T_B - T_0 = 0$$

سازگاری : $\varphi_{AB} + \varphi_{BC} = 0$ در جهات مختلف می‌چرخند. پس جمع شد :

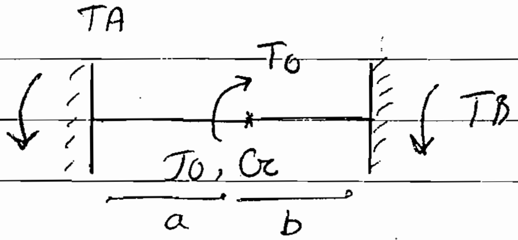
$$\varphi_{AB} = \frac{T_A a}{G_1 J_{10}}$$

$$\varphi_{BC} = \frac{(T_A - T_0)}{G_2 J_{20}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_A a}{G_1 J_{10}} + \frac{(T_A - T_0) b}{G_2 J_{20}} = 0$$

$$\Rightarrow T_A = \frac{T_0 \frac{b}{G_2 J_{20}}}{\frac{a}{G_1 J_{10}} + \frac{b}{G_2 J_{20}}}$$

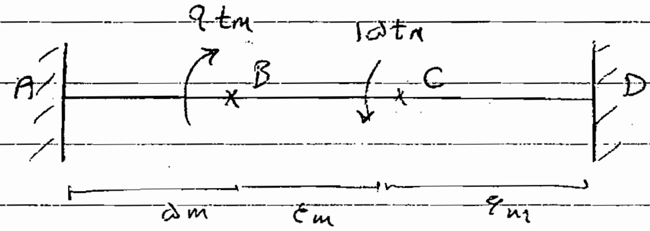
$$TB = \frac{T_0 \dfrac{a}{G_1 J_{10}}}{\dfrac{a}{G_1 J_{10}} + \dfrac{b}{G_2 J_{20}}}$$



$$* \quad TA = \frac{T_0 b}{a+b}$$

$$* \quad TB = \frac{T_0 a}{a+b}$$

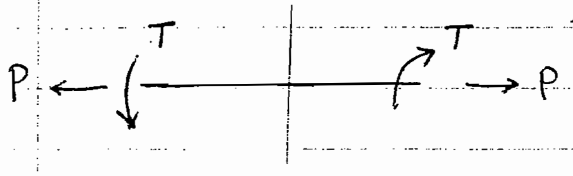
مثال :

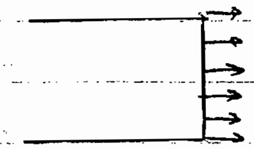


از دو روش یکی با دانستن روابط بالا و یکی با استفاده از جمع آثارها و سازگاری حل کنید؟

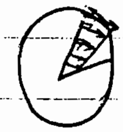
حل -

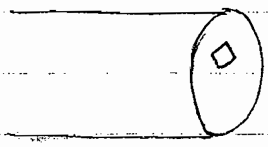
* اگر میله ای تحت اثر پیچش و بار محوری باشد :

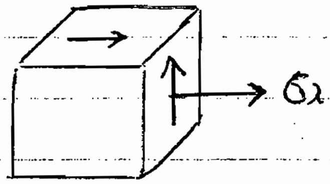


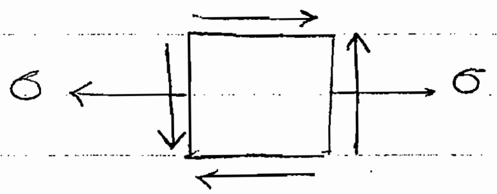


$$\sigma = \frac{P}{A}$$









در اثر بار محوری یک تنش عمودی است ، و در اثر پیچش یک نیروی باعث ایجاد تنش برشی در امتداد طول میله و عمود بر طول می شود

تنش عمودی مقدار ثابت دارد ولی تنش برشی τ تغییر می کند ، روی لبه بیشترین مقدار را دارد

$$\underset{min}{\overset{max}{}}\ \sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

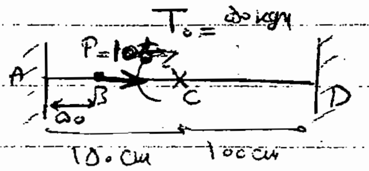
تنش های اصلی

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{(\sigma/2)^2 + \tau^2}$$

به علت وجود نیروی محوری تنش برشی موجود در میله افزایش می یابد

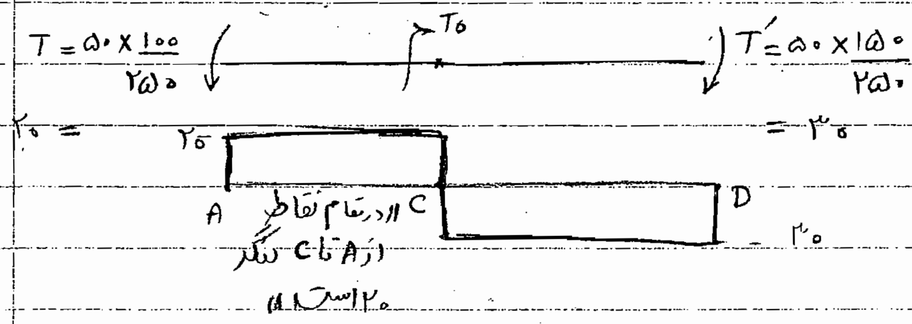
هم چنین به علت وجود پیچش طبق رابطه بالا تنش عمودی اصلی از σ بزرگتر خواهد بود

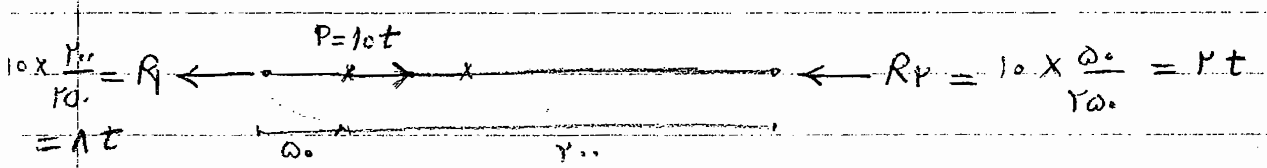
مثال 8



$d = 6\ cm$

بزرگترین تنش برشی و
بزرگترین تنش عمودی P
هم فشاری هم کششی !





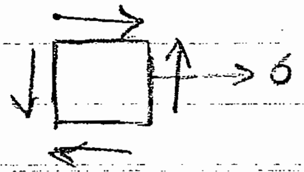
$$R_1 = \frac{Pb}{a+b} \quad , \quad R_2 = \frac{Pa}{a+b}$$

$$\begin{cases} AB: & N = 8\ ton\ , \quad T = 20 \\ BC: & N = -2\ ton\ , \quad T = 20 \\ CD: & N = -2\ ton\ , \quad T = -30 \end{cases}$$

برای تنش T مثبت یا منفی بودن آن تأثیری ندارد ولی در زاویه دوران باید نوشته شود

$$AB: \ \sigma_{\text{عمودی}} = \frac{8000}{\pi (3)^2} = 282.9 \quad kg/cm^2$$

$$\tau_{max\ \text{پیچش}} = \frac{2T}{\pi R^3} = \frac{2 \times 20 \times 100}{\pi (3)^3} = 47.2$$



$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{282.9}{2}\right)^2 + \underbrace{47.2^2}_{\text{جوابی از بخش ۸}}} = 149.1 \ kg/cm^2$$

$$\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix} = \frac{282.9}{2} \pm 149.1 \Rightarrow \begin{matrix}\sigma_1 = \text{کشش} = 290.5 \\ \sigma_2 = \text{فشاری} = -7\end{matrix}$$

$\overline{BC}$:

$$\sigma = \frac{-2000}{\pi(3)^2} = -70.7 \ kg/cm^2$$

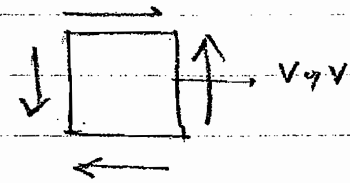
$$\tau = 47.2 \ kg/cm^2$$

$$\Rightarrow \tau_{max} , \begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix} =$$

$\overline{CD}$: محوری $\sigma = \frac{-2000}{\pi(3)^2} = -70.7 \ kg/cm^2$

پیچشی در این قسمت $\tau = \frac{2(30)(100)}{\pi(3^3)} = 70.7$

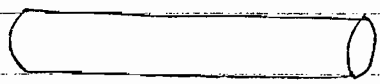
$$\Rightarrow \tau_{max} , \begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix} =$$

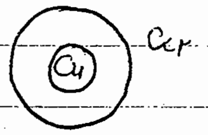


بین فشارهای و کششهای یکی را انتخاب می‌کنیم؛

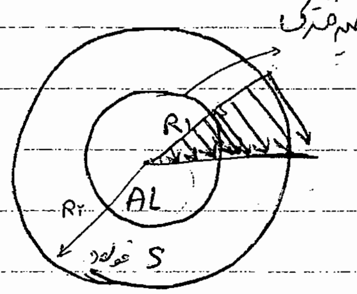
جهت تنش خیلی زیاد مهم نیست

* میله چند جنسی و پیچش 8





هر کدام از میله‌ها در هنگام اعمال پیچش در ناحیه مشترک
بین دو میله تنش‌های یکسانی نیست این حجم مثل تنش عمودی ؛ در ناحیه مشترک تنش‌ها به نسبت Gها
توزیع می‌شوند
ولی تنش جنس دو از ناحیه مشترک تابع تغییرات تنش خطی خواهد بود ؛



مثال : حداکثر گشتاور پیچشی ای را که به میله می‌توان وارد کرد بیابید ؟

$G_S = 3 G_{Al}$

$\tau_{w\,AL} = 500 \ kg/cm^2$

$\tau_{w\,s} = 1000 \ kg/cm^2$

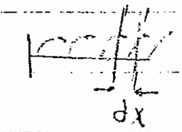
$R_1 = 3 cm$ کوچک

$R_2 = 4 cm$ بزرگ خارجی

$\varphi_{AL} = \varphi_S$ چون با هم دوران می‌کنند

$\frac{TL}{GJ_0}$

$\varphi = \int \frac{T\,dx}{GJ_0} \Leftarrow$ ولی اگر



$$\frac{T_{AL}\,L}{G_{AL}J_{OAL}} = \frac{T_S\,L}{G_S J_{OS}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_a}{G_a J_{oa}} = \frac{T_s}{G_s J_{os}} \Rightarrow \frac{T_a}{\frac{\pi}{2}(3^4)} = \frac{T_S}{3 \times \frac{\pi}{2}(4^4 - 3^4)}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_S = 6/48\ T_a}$$

$\tau_{Al} = 500$ اگر $\Rightarrow$ $\tau_s =$ از ۱۰۰۰ تجاوز می‌کند ؛

بلدم

$\Downarrow$

$$\tau_{al\,max} = \frac{2T_a}{\pi R^3} \Rightarrow 500 = \frac{2T_{al}}{\pi(3^3)} = 6750\pi$$

$$T_s = 137400 \ kg \times cm$$

$$\tau_{s\,max} = \frac{T_s \times \overbrace{R_{max}}^{4}}{\frac{\pi}{2}(4^4 - 3^4)} \cong 2000 \ kg/cm^2$$

که این قابل قبول نیست

چون از تنش مجاز بزرگتر است و قابل قبول نیست ؛

اگر $\tau_{s\,max} = 1000 \Rightarrow T_s = 68700 \ kg\,cm$

$$T_a = 10600 \ kg\,cm$$

$$\Rightarrow T_w = T_s + T_a = 79300 \ kg\,cm$$

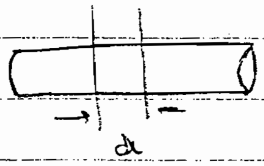
چون دیدیم اگر تنش al را به مقدار مجاز محدود کنیم تنش فولاد از مجاز بیشتر می‌شود

پس آمدیم و تنش مجاز فولاد را به مجاز رساندیم تنش al را حساب کردیم که از مقدار مجاز

کمتر بود پس تنش‌ها را یافتیم ؛

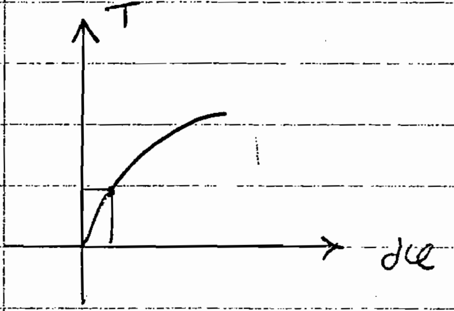
اگر $\tau_{w}^{فولاد} = 2000$ بود $\tau_{s\,max}$ قابل قبول بود و اگر Al را نداشتیم فولاد تنها مقدار گشتاوری را نسبت به این مسئله می‌توانست تحمل کند . فولاد تنها می‌تواند گشتاور بیشتری را تحمل کند

انرژی کرنش پیچش



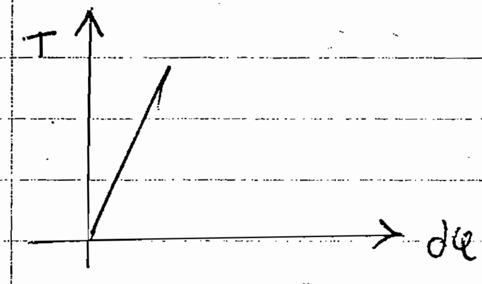
$T \;,\; d\varphi$

$\frac{1}{2} T\, d\varphi$



$$du = \tfrac{1}{2} T\, d\varphi$$

$$U = \int_0^L \tfrac{1}{2} T\, d\varphi$$

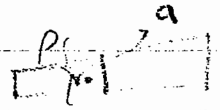


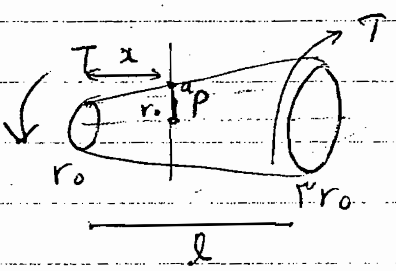
$$d\varphi = \frac{T\,dx}{GJ_0}$$

$$U = \int_0^L \frac{T^2\,dx}{2GJ_0}$$

مواد خطی $\quad U = \dfrac{T^2 L}{2GJ_0}$

مثال ۴





$$\frac{a}{2r_0} = \frac{x}{L} \Rightarrow a = 2r_0\frac{x}{L} \Rightarrow \rho = r_0 + a = r_0\left(1+\frac{2x}{L}\right)$$

$$J_0 = \frac{\pi \rho^4}{2} \Rightarrow J_0 = \frac{\pi r_0^4}{2}\left(1+\frac{2x}{L}\right)^4$$

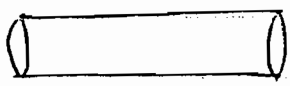
$$u=\int_0^L \frac{T^2dx}{2GJ_0}=\frac{T^2}{2G}\int_0^L\frac{dx}{J_0}=\frac{T^2}{2G}\int_0^L\frac{dx}{\frac{\pi r_0^4(1+\frac{2x}{L})^4}{2}}$$

$$=\frac{T^2}{G\pi r_0^4}\int_0^L\frac{dx}{(1+\frac{2x}{L})^4}=\frac{T^2}{G\pi r_0^4}(1+\frac{2x}{L})^{-3}\times\left(\frac{1}{-3}\times\frac{L}{2}\right)\Big|_0^L$$

$$=\frac{T^2}{G\pi r_0^4}\times\left[\frac{3^{-3}L}{-6}-\frac{1^{-3}L}{(-6)}\right]$$

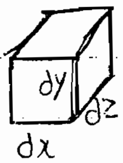
$$=\frac{T^2}{G\pi r_0^4}\left[\frac{-L}{6\times 27}+\frac{L}{6}\right]$$

کل میله را در نظر می‌گیریم :

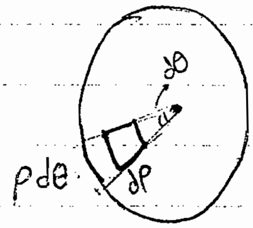


$$\tau=\frac{T\rho}{J_0}$$

المان بیرون آوردیم



$$*du=\frac{\tau^2}{2G}\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV}$$



$$du=\frac{\tau^2}{2G}\rho\,d\rho\,d\theta\,dx$$

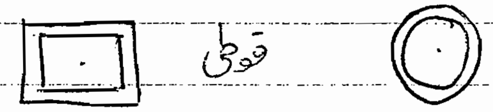
* با انتگرال‌گیری از این du باید به رابطه قبلی برای u برسیم.

* پیچش در مقاطع جدار نازک بسته 8

تا اینجا در مورد مقاطع توپر و توخالی صحبت کردیم با مقطع مدور.

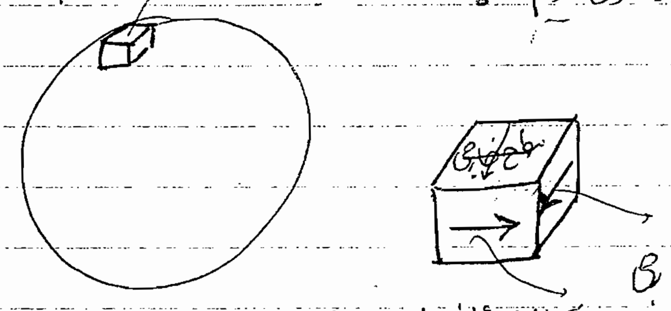
در اینجا مقطع میله می‌تواند هر مقطع نازک باشد که جداره‌اش کوچک باشد.

ضخامت جدار باید کم باشد.

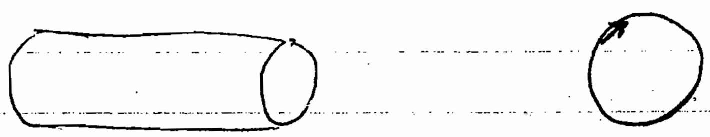


در اینجا نمی‌توانیم بگوییم که تنش با فاصله از مرکز متناسب است برخلاف مقطع مدور که مسطح باقی می‌ماند اینجا اینطور نیست چون مقطع تاب برمی‌دارد ولی مسلماً مقطع مسطح باقی نخواهد ماند.

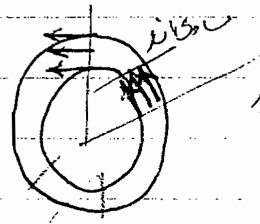
یک المان برای یک حجم کلی در نظر می‌گیریم.



(۲)

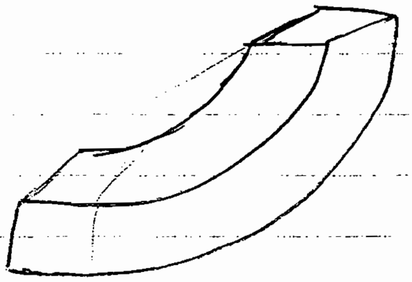


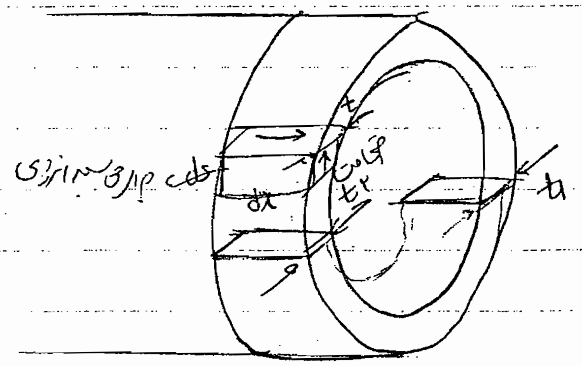
* در مقطع مدور هم اگر تنش برشی باشد باید موازی لبه خارجی باشد.

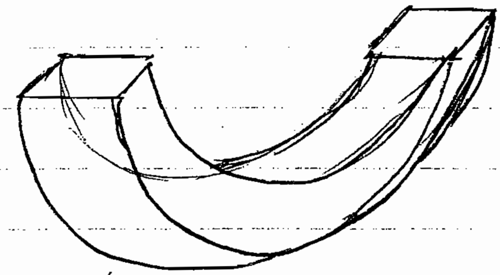


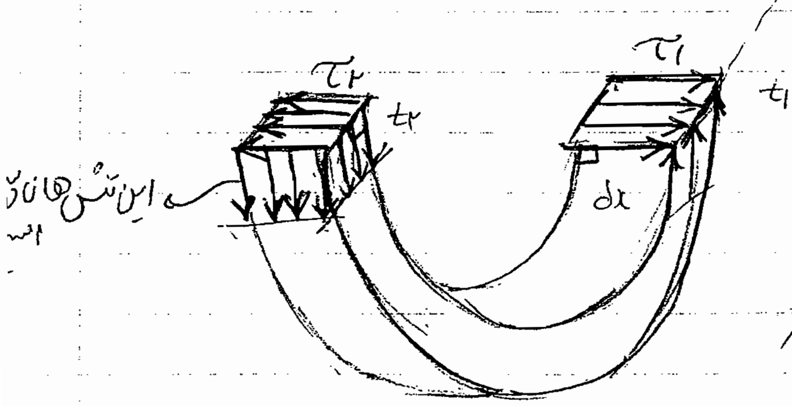
با تقریب نسبتاً خوب می‌توانیم فرض کنیم تنش برشی ثابت می‌ماند و موازی لبه‌هاست.

این فرض خطا دارد









تنش برشی در پیچش هم در امتداد طول میله است هم در مقطع

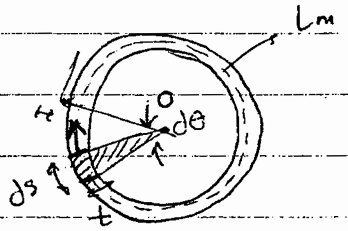
* τ_1 و τ_2 باهم الزاماً مساوی نیستند ولی باهم موازی اند

$$8 \quad \sum F_x = 0 \Rightarrow \tau_1(dx\, t_1) - \tau_2(t_2\, dx) = 0$$

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2$$

می توانیم رابطه را به صورت زیر بنویسیم 8

$$\boxed{\tau t = cte}$$



$$dF = \tau t \, ds$$

$$\int dM_o = \int \tau t \, ds \cdot \overline{OH}$$

$$* \boxed{T = \oint \tau t \, ds \cdot \overline{OH}}$$ برای هر شکل کلی

* $ds \cdot \overline{OH} = 2 \times$ مساحت مثلث هاشور خورده
* $\tau t =$ مقدار ثابتی است

$$T = \tau t \oint ds \cdot \overline{OH}$$

$$= \tau t \cdot 2A_m$$

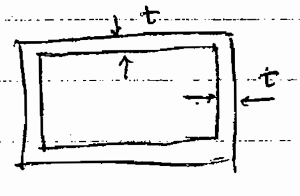
A_m مساحت محصور در خط میانی

A_m مساحت " در جدار نازک

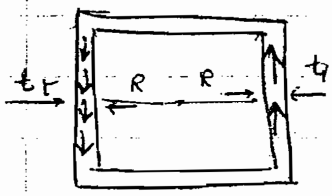
$$\boxed{\tau = \frac{T}{2A_m t}}$$

اگر ضخامت ثابت باشد تنش در همه جا یکی است

ولی اگر یک جدار ضخامت بیشتری داشته باشد تنش کمتر است



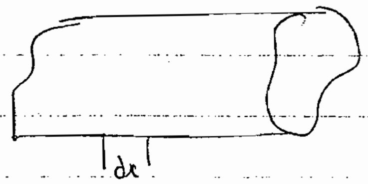
$\int_0^l \frac{T dx}{JG_0}$



$t_1 < t_2$

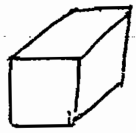
تنش دیگر به فاصله کاری ندارد با وجود این که R ها مساوی اند ولی تنش های ۲ طرف یکی نیستند

$$U = \frac{1}{2} T \varphi$$



$du = \frac{1}{2} T d\varphi$ (1)
برای یک حلقه

du برای جزء کوچک dx



برای یک المان $d(du) = \underbrace{\frac{\tau^2}{2G}}_{\text{در واحد حجم}} \cdot dv$

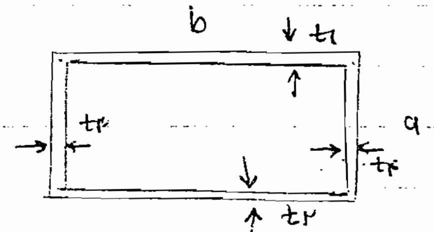
* $d(du) = \frac{\tau^2}{2G} dx \cdot t \cdot ds$ « شکل در صفحات قبلی »

* $du = \oint \frac{\tau^2}{2G} t \, dx \, ds$

$\tau t = cte$

* $du = \frac{\tau^2 t^2}{2G} \oint_s \frac{ds}{t} dx = \frac{\tau^2 t^2 dx}{2G} \oint_s \frac{ds}{t}$

* چون dx برای المان حلقه مقدار ثابتی است ؛



* $\oint \frac{ds}{t} = \frac{b}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{a}{t_3} + \frac{a}{t_4}$

اگر ثابت نباشد تمام محیط را باهم جمع می کنیم ؛

* $dU = \frac{T^2}{4A_m^2 G} dx \oint \frac{ds}{t}$ ②

از ① و ② می توان $d\varphi$ را حساب کرد $\Rightarrow$

$$\boxed{d\varphi = \frac{T\,dx}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t}}$$

در مقطع مدور $d\varphi = \frac{T\,dx}{G J_0}$

در تمام مقاطع دیگر تراشیدگی با فرمول بالا $\boxed{d\varphi = \frac{T\,dx}{G J_t}}$

* ثابت پیچش : J_t

* $$\boxed{J_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}}}$$

$$\boxed{du = \frac{T^2\,dx}{2 G J_t}}$$

* برای همه مقاطع انرژی و دوران از روابط بالا بدست می آید:

اگر t ثابت باشد $\boxed{J_t = \frac{4A_m^2 t}{L_m}}$

طول خط چین یا محیط خط چین

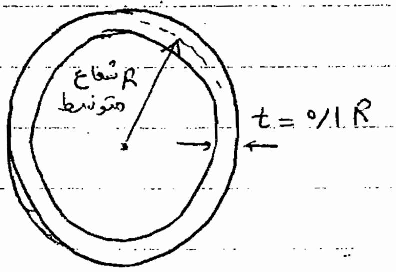
محیط جدار نازک یعنی متوسط آن را یک خط کشیم و محیط آن را حساب کنیم:

$$\varphi = \int_0^L \frac{T\,dx}{GJ_t} \qquad U = \int_0^L \frac{T^2 dx}{2GJ_t}$$

اگر T و J_t هر دو ثابت باشند :

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{TL}{GJ_t} \\ U = \dfrac{T^2 L}{2GJ_t} \end{cases}$$

مثال ۶ فرمولهای دقیق و تقریبی جدار نازک را در مورد مقطع نشان داده شده مقایسه کرده و خطای فرمولهای جدار نازک را تعیین کنید ؟



حل ـ دقیق : $\tau = \dfrac{T\rho_{max}}{J_o}$ که $J_o = \dfrac{\pi}{2}\left((1/05R)^4 - (0/95R)^4\right)$

$$J_o = \frac{\pi}{2} \times 0/401\, R^4$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{T(1/05R)(2)}{\pi \times 0/401\, R^4} \qquad (1)$$

جدار نازک : $\tau' = \dfrac{T}{2A_m t} = \dfrac{T}{2\pi R^2 \times 0/1R} = \dfrac{T}{0/2\pi R^3}$

$$\Rightarrow \frac{\tau'}{\tau} = \frac{\frac{1}{0/2}}{\frac{(1/05)(2)}{0/401}} = 0/954$$

خطا در حدود ۵ ٪ است

در فرمول تقریبی ما تنش را در جدار نازک ثابت گرفتیم ولی در فرمول دقیق تنش در جدار حالت خطی دارد نه ثابت !

بنابراین یک خطایی داریم که در حدود ۵ ٪ است و در کارهای هندسی قابل قبول است

و این ضخامت ۱۰ ٪ قابل قبول است یعنی ضخامت در حدود ۱۰ ٪ شعاع یا حتی کمتر باشد می‌توان

آن را جدار نازک گرفت و از فرمولهای آن استفاده کرد

دیگر قطعی شعاع را باید با نصف ضخامت کمتر مقایسه کرد و ۱۰ ٪ آن را در نظر گرفت؟

ادامه حل:
$$\varphi = \frac{TL}{GJ_0} = \frac{TL}{G} \times \frac{1}{\frac{\pi}{2} \times ۰/۴۰۱ R^4} = \frac{2TL}{\pi G \times ۰/۴۰۱ R^4}$$

جدار نازک
$$\varphi' = \frac{TL}{GJ_t}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{J_0}{J_t} = ?$$

$$J_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4(\pi R^2)^2 \times ۰/۱R}{2\pi R} = ۰/۲\pi R^4$$

ضخامت

L_m محیط دایره متوسط

$$\Rightarrow \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\pi \times ۰/۴۰۱ R^4}{2 \times ۰/۲\pi R^4} = ۱/۰۰۲۵$$

خطا می‌شود ۲/۵ در ۱۰۰۰
که خیلی کم است و فرمول
را می‌شود استفاده کرد

در حالت کلی GJ_t را صلبیت پیچشی گویند

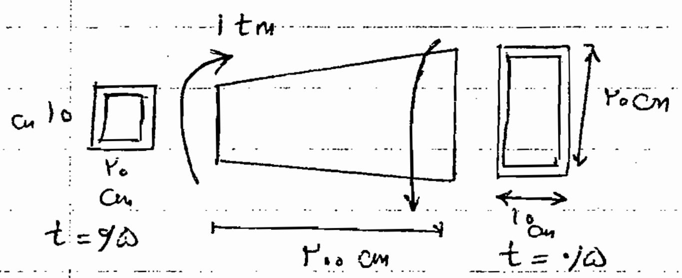
62

$10 + 5x = 20$

$a = 20 + 5x$

0	20	0	10
200	10	200	20

۸۴/۲/۱۰ بنام خدا



$G = 0.8 \times 10^{6}\ kg/cm^{2}$

مثال ؟

شکل روبرو مقطع جدار نازکی را نشان می دهد که ضخامت آن ثابت و مساوی 0.5^{cm} می باشد ابعاد مقطع مطابق شکل به طور خطی تغییر می کنند. بزرگترین تنش برشی و مقدار دوران میله را بیابید ؟

$$\begin{cases} a = 10 + \frac{(20-10)}{200}x = 10 + 0.05x \\ b = 20 - 0.05x \end{cases}$$

مساحت داخل جدار نازک $A_m = ab = (10 + 0.05x)(20 - 0.05x)$

$$\tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{1 \times 10^{3} \times 10^{2}}{2(10+0.05x)(20-0.05x)(0.5)}$$

τ وقتی max است که مخرج min Am کمترین باشد!

$$\frac{dA_m}{dx} = 10 - 0.1x = 0 \Rightarrow x = 100$$

$$\begin{cases} A_m \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow 200$$

$$\begin{cases} A_m \\ x = 100 \end{cases} \Rightarrow 15 \times 15 = 225$$

یعنی در این x مقدار Am ماکزیمم مقدار خود می شود

یعنی کمترین مقدار Am در انتها اتفاق می افتد ؟

$(A_m)_{min} = 200\ cm^{2}$

$$\tau_{max} = \frac{10^{5}}{2 \times 200 \times \frac{1}{2}} = 500\ kg/cm^{2}$$

اگر از τ مشتق می گرفتیم باید مقدار ۲ انتها را نیز کنترل کنیم و کمترین مقدار را ...

$$\varphi = \int_0^L \frac{T\,dx}{G J_t} \qquad J_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \rightarrow$$

$$* \oint \frac{ds}{t} = \frac{2(a+b)}{0.15} = 120$$

t ثابت
ds هم می‌شود
محیط

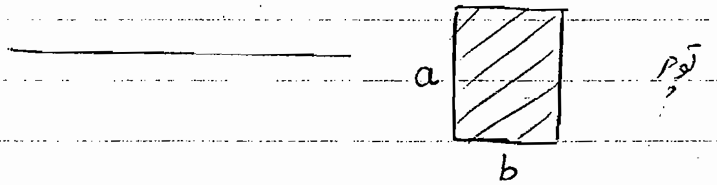
چون جمع a+b مستقل از x می‌شود + و - خنثی می‌شود؛

$$* J_t = \frac{4(10+0.05x)^2(20-0.05x)^2}{120}$$

$$\varphi = \frac{T}{G} \times 30 \int_0^{200} \frac{dx}{(10+0.05x)^2(20-0.05x)^2} = 0.0160$$

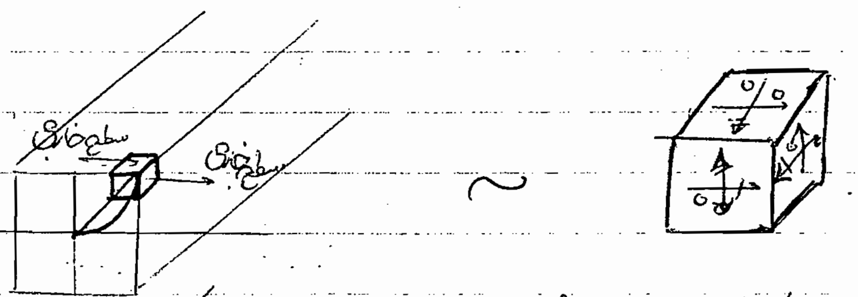
باید ۳ رقم معنی‌دار باشد؛

* مقطع مستطیل 8



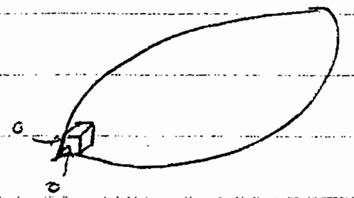
* با توجه به تئوری ارتجاعی مقطع تاب برمی‌دارد بنابراین فرمول مقطع مدور در اینجا صادق نیست؛

کلاً هرجا مقطع تاب بردارد نمی‌توان رابطه تنش با فاصله از مرکز را توجیه کرد؛

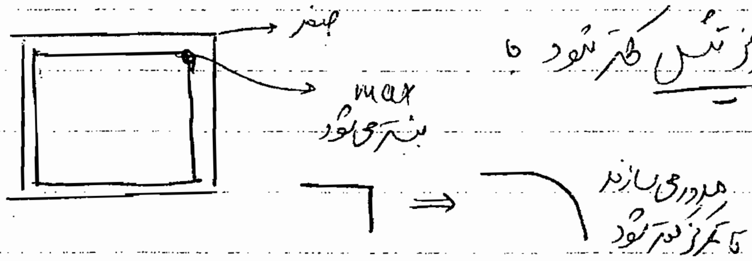


در دورترین نقاط مقطع یعنی گوشه‌ها تنش برشی صفر است برخلاف مدور که مقدار در دورترین نقطه ماکزیمم می‌شود؛

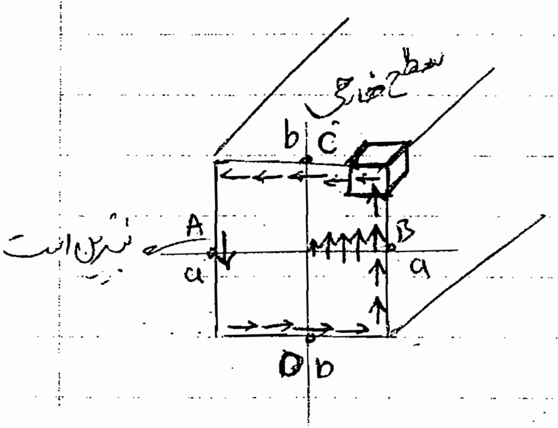
به طور کلی هر جا که تیزی در گوشه داشته باشیم تنش برشی صفر است چون مؤلفه تنش برشی که عمود بر
جدار بود صفر می شد پس دو تا مؤلفه در ۲ امتداد صفر می شود پس حتماً آن هم دارد صفر است ؛
این نکته همیشه صادق است و به پیچش مقطع های مختلف بستگی ندارد



در جدار نازک هم در گوشه های بیرونی تنش برشی صفر است اما در گوشه داخلی تنش برشی max می شود معمولاً
گوشه داخلی را هدوری می کنند تا تمرکز تنش کمتر شود ؛



یعنی بارگذاری دینامیکی باشد چون تنش ها به سرعت عوض می شوند پیچش مرتباً تغییر می کند دیگر فرصت تطبیق
تنش ها با محیط نیست در نتیجه قسمت گوشه خیلی سریع دچار ترک و شکست می شود .



در قطر افقی تنش از مرکز به طرف لبه رو به افزایش است اما مقدار آن خطی تغییر می کند

تکمیل * در قطر عرضی هم این مقدار تنش زیاد می شود اما نه خطی ؛

* بیشترین مقدار تنش در مجاورت ضلع a از همه جا بیشتر است یعنی روی قطر افقی

$$(\tau_{max})_{A,B} = \frac{T}{\alpha\, a b^{2}}$$

$\frac{a}{b}$	α	β	η
۱	۰/۲۰۸	۰/۱۴۱	۱
۱/۵	۰/۲۳۱	۰/۱۹۶	۰/۸۵۹
۲	۰/۲۴۶	۰/۲۲۹	۰/۷۹۵
۳	۰/۲۶۷	۰/۲۶۳	۰/۷۵۳
۴	۰/۲۸۲	۰/۲۸۱	۰/۷۴۵
۶	۰/۲۹۹	۰/۲۹۹	۰/۷۴۳
۸	۰/۳۰۷	۰/۳۰۷	۰/۷۴۲
۱۰	۰/۳۱۳	۰/۳۱۳	″
∞	$\frac{1}{3}$ = ۰/۳۳۳	$\frac{1}{3}$ = ۰/۳۳۳	″

۵ ، $\frac{a}{b}$ از محاسبات مربوط به تئوری ارتجاعی بدست می آید

اگر اعداد بالا نشد باید با درونیابی مقدار مورد نظر را یافت

$$\theta = \int_0^L \frac{T\,dx}{G J_t}$$

$$J_t = \beta a b^{3}$$

β بدون بعد اما با a و b تغییر می کند ؛

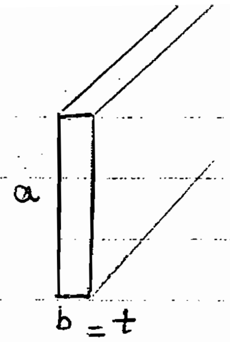
* تنش در نقاط C ، D . 8

$$\tau_{c,d} = \eta\, \tau_{max}$$

η معمولاً از یک کوچکتر است وقتی مقطع مربع باشد

$\eta = 1$ است

$a >> b$

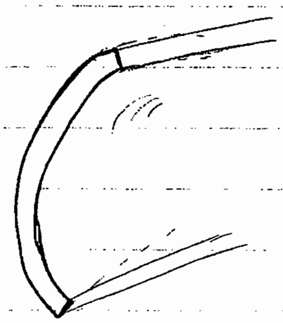


* می‌توانیم b را برابر t بگیریم 8

$$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{1}{3} a t^2}$$

اگر حدود ۱۰ برابر باشد می‌شود از فرمول بالا استفاده کرد و خطا را صرف‌نظر کرد ؛

$$J_t = \frac{1}{3} a t^3$$



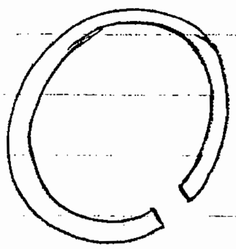
+

برای این مقطع هم می‌شود این فرمول ها را بکار برد

a محیط کمان است ؛

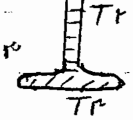
جدار نازک باز

+



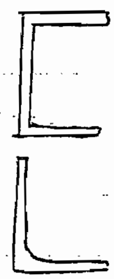
فرمول بالا در این مقطع هم صادق است

تقسیم به مستطیل می‌کنند
جداگانه حساب می‌کنیم
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$



$T = \sum_{i=1}^{3} T_i$

* مقدار تاب خوردن مقاطع جدار نازک باز زیاد است
* هرچه مستطیل باریک‌تر شود b کوچک‌تر شود تاب خوردن بیشتری شود

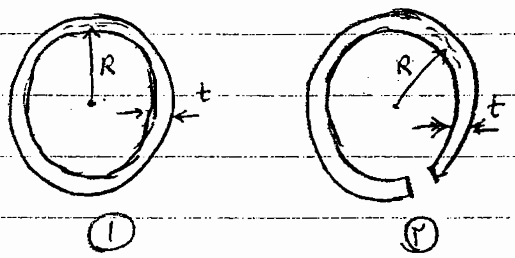


تیرآهن I در مقابل پیچش خیلی سریع از حالت مقطع خارج می‌شود ؛
جایی که پیچش داریم باید مقاطع مدور بکار ببریم یا مقاطع جدار نازک بسته که مقدار تاب برداشتن آن کم است .

فرمول هایی که برای مقاطع I و ... درک کرده‌ایم برای فقط یک حالت خاص است که پیچش در ۲ انتها وارد می‌شود
یعنی پیچش یکنواخت است ؛

uniform torsion

مثال ۸ مقاومت و سختی ۲ لوله جدار نازک را که یکی بسته و یکی باز است مقایسه کنید ؟



تحت پیچش یکسان کدام ضعیف‌تر و کدام یک قوی‌تر است ؟
با تنش ثابت ؛ هر کدام که T بیشتری بگیرد قوی‌تر است و هر کدام که T کوچکتری بگیرد ضعیف‌تر است

$$\tau_1 = \frac{T}{2A_m t} \qquad \tau_2 = \frac{T}{\frac{1}{3} a t^2}$$

$$\frac{\text{مقاومت مقطع ۱}}{\text{۲ '' ''}} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{2A_m t}{\frac{1}{3} a t^2} = \frac{2(\pi R^2)}{\frac{1}{3}(2\pi R) t} = \frac{3R}{t}$$

جدار نازک را معمولاً وقتی می‌گوییم که $\frac{R}{t}$ از ۱۰ بزرگتر باشد ؛

* پس مقطع جدار نازک بسته قوی‌تر از مقطع جدار نازک باز است مثلاً حدود ۳۰ برابر $30 = 3 \times \overset{10}{\frac{R}{t}}$ قوی‌تر است ؛

* $$d\varphi = \frac{T\,dx}{GJt}$$

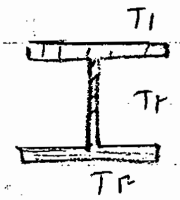
$$\frac{\text{سختی مقطع ۱}}{\text{۲ '' ''}} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{J_1 t}{J_2 t} = \frac{\dfrac{4(\pi R^2)^2}{\dfrac{2\pi R}{t}}}{\frac{1}{3}(2\pi R) t^3} = \frac{3R^2}{t^2}$$

*

* سفتی مقطع ① برای $\frac{R}{t}\approx 10$ حدود ۳۰۰ برابر سخت‌تر از مقطع باز است

یا به عبارتی φ آن کمتر است.

* در مقابل سفتی مقطع باز خیلی ضعیف عمل کرده و خیلی زود زیر اثر لنگر پیچیده می‌شود؟



$$T = T_1 + T_2 + T_3 \qquad ①$$

(n-1) رابطه

$$\underbrace{d\varphi_1 = d\varphi_2 = d\varphi_3 = d\varphi}_{\text{n رابطه n مجهول}} = \frac{T\,dx}{G J_t}$$

$$\boxed{\tau_{i_{max}} = \frac{T\,t_i}{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} a_i t_i^3}}$$

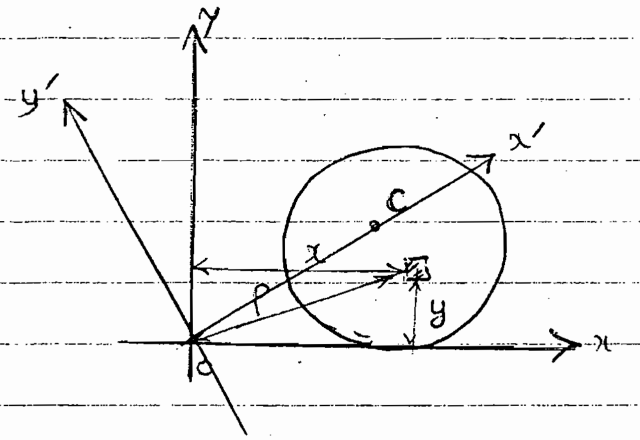
$\varphi \rightarrow$

$$\boxed{J_{t\,\text{کل مقطع}} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} a_i t_i^3}$$

* وقتی در مقطع بسته t متغیر باشد در t بیشتر تنش کمتر داریم ولی در جدار نازک باز t در صورت کسر است یعنی بطوری که t بزرگتر باشد تنش آن جا بیشتر است.

قسمت‌های مقاطع ها... محورهای اصلی ... رسم ... تنش ... منحنی

ممان سطح 8



ممان استاتیک یا گشتاور اول یا گشتاور اول

$\boxed{\text{عزم}}$

* $Q_x = \int_A y\,dA$ ممان استاتیک نسبت به محور x از بعد ^{3}(L)

* $Q_y = \int_A x\,dA$

اگر یک نقطه به مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ به صورت زیر تعیین کنیم

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int x\,dA}{A} \\ \\ \bar{y} = \dfrac{\int y\,dA}{A} \end{cases}$$

این نقطه را مرکز مقطع گویند.

اگر مقطع یک سطح جرم دار یا وزن دار فرض شود با جرم مخصوص یکسان این نقطه همان مرکز جرم یا مرکز ثقل آن است

در غیر این صورت آن را مرکز <u>مقطع</u> می گویند. C

* اگر نیروهای گسترده روی تمام سطح باشد و شدت آن یکسان باشد برآیند این بار از نقطه <u>C</u> عبور می کند.

ممان اینرسی یا گشتاور دوم یا گشتاور مانند 8

* نسبت به محور x $I_x = \int y^2 dA$ (از بعد L^4)

* نسبت به محور y $I_y = \int x^2 dA$

حاصلضرب اینرسی نسبت به محورهای x و y * $I_{xy} = P_{xy} = \int xy\, dA$

ممان اینرسی نسبت به تک نقطه O یا ممان اینرسی قطبی * $\underset{J_o}{I_o} = \int_A \rho^2 dA$

Qx و Qy می‌تواند مثبت یا منفی باشد اما ممان اینرسی ها Ix و Iy و Io همیشه مثبت اند
اما Ixy می‌تواند مثبت یا منفی باشد

* $I_x + I_y = I_o$ ①

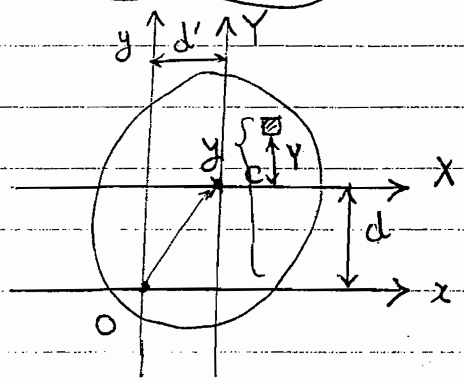
* $I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'}$ برای دو دستگاه که از یک نقطه رد می‌شوند جمع ممان اینرسی ها با هم برابر است

* شعاع گردش یا شعاع ژیراسیون $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ (از بعد L)

* $r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$, $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$, $r_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}}$

باتوجه به ① وتقسیم طرفین به A داریم 8

$$r_x^2 + r_y^2 = r_o^2$$



$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (Y+d)^2 dA = \int_A Y^2 dA + \int_A d^2 \cdot dA + \int_A 2Yd\,dA$$

$$= I_X + d^2 \cdot A + 2d \cancel{\int} Y dA$$

* ممان استاتیک نسبت به محوری که از مرکز (c) عبور می‌کند صفراست چون $\bar{Y} = 0 \Leftarrow \int YdA = 0$

$$* \quad I_x = I_X + A \cdot d^2$$

$$I_y = \int x^2 dA = I_Y + A \cdot d'^2$$

$$* \quad I_y = I_Y + A \cdot d'^2$$

$$* \quad I_o = I_c + \overline{OC}^2 \cdot A$$

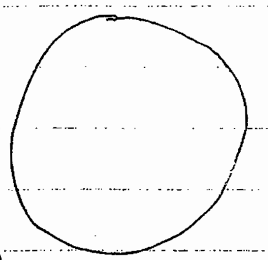
$$* \quad r_x^2 = r_X^2 + d^2$$

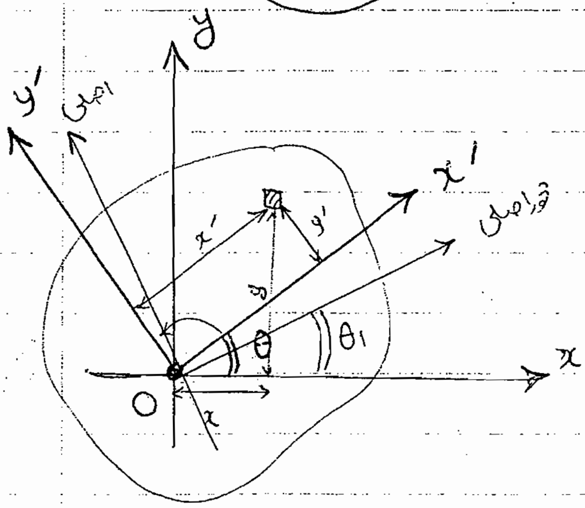
$$* \quad r_y^2 = r_Y^2 + d'^2$$

$$* \quad r_o^2 = r_c^2 + \overline{oc}^2$$

$$P_{xy} = P_{XY} + A \cdot x_c \cdot y_c$$

علامت ورد هم است





* روابط حاصل از دوران شبیه روابط تنش و تنجش اند ؟

با تبدیل

$$\sigma \rightarrow I$$
$$\tau \rightarrow P$$

$$* \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$* \quad \tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$* \quad I_\theta = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - P_{xy} \sin 2\theta = I_{x'}$$

$$* \quad P_\theta = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + P_{xy} \cos 2\theta = P_{x'y'}$$

y بر x' در اول عمود بر آن در جهت مثلثاتی

می‌توان این روابط را به صورت زیر اضافه کرد :

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$I_x = \int y^2 \, dA$$

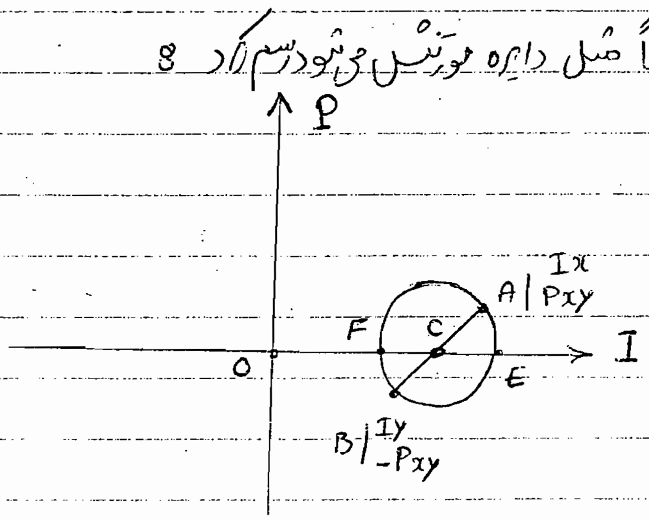
$$I_y = \int x^2 \, dA$$

$$I_{x'} = \int y'^2 \, dA$$

* در اینجا هم دایره مور را عیناً مثل دایره مور تنش می‌شود رسم کرد :

$\sigma \longrightarrow I$

$\tau \longrightarrow P$



I_{max} OE

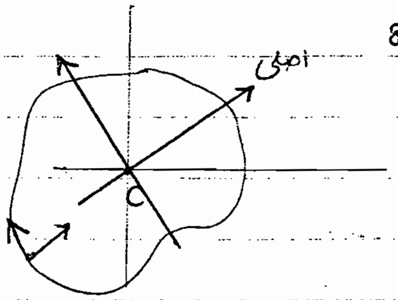
I_{min} OF

* دو تا محور عمود بر هم داریم نسبت به هر نقطه که I حاصلضرب در آن آنجا صفر است یعنی $P_{xy} = 0$:

* $$\tan 2\theta_1 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

* $$\boxed{\tan 2\theta_1 = \frac{-2P_{xy}}{I_x - I_y}}$$ زاویه محورهای اصلی

اگر این محورهای اصلی را نسبت به مرکز سطح تعیین کنیم :

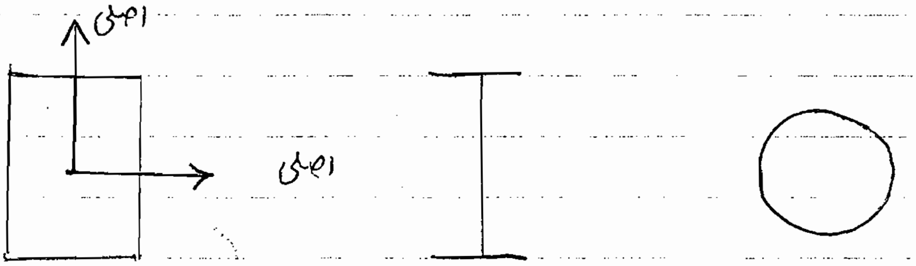


* به این محورها محورهای اصلی مرکزی اینرسی گویند :

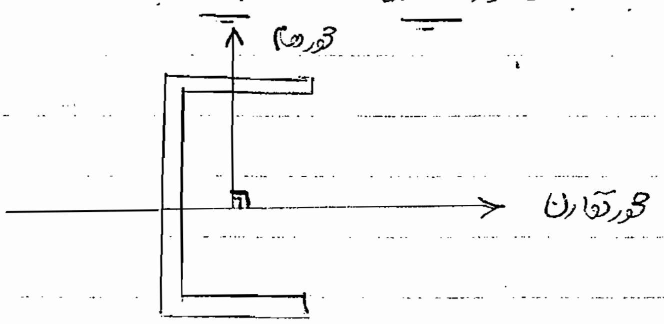
الزاماً با محورهای اصلی دیگر تقاطع موازی نیستند
در هر نقطه امتداد دلخواهی دارند

در حقیقت محورهای اصلی مرکزی اینرسی اهمیت دارند :

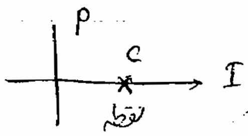
* اگر مقطعی نسبت به هر دو محور قرینه باشد محورهای اصلی مرکزی همان محور تقارن شکل اند :



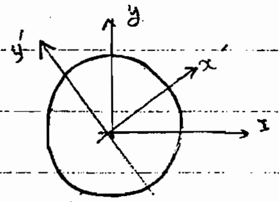
* اگر یک محور تقارن هم داشته باشیم : P_{xy} نسبت به آن محور صفر می‌شود محور دوم عمود بر آن می‌شود :

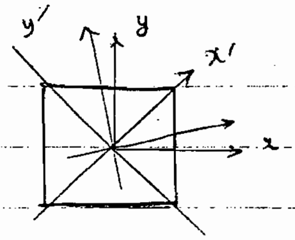


* در یک دایره هر محور آن را می‌شود یک محور تقارن در نظر گرفت همه محورهای آن محور اصلی می‌شوند :



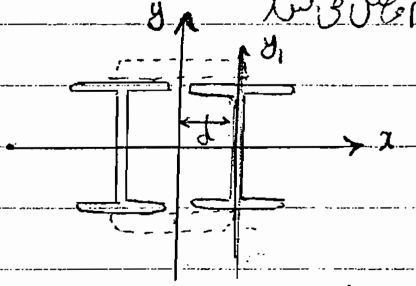
اگر دایره دور یک نقطه شود همه محورها محورهای اصلی می‌شوند





دایره محورآن یک نقطه می‌شود.

در ایران تیرها را از کنار هم قرار دادن دو تیر شبیه هم می‌سازند و به هم وصل می‌کنند



اگر ممان اینرسی یکی را نسبت به محور x داشته باشیم: I_{x_1}

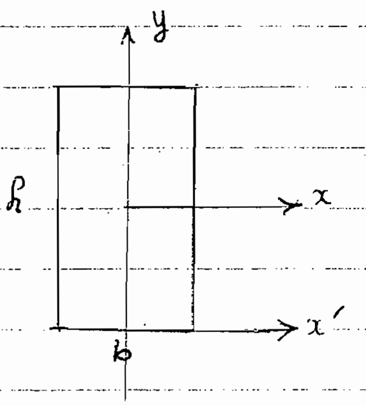
* ممان کل مقطع نسبت به محور x می‌شود: $2I_{x_1}$ *

* ممان یک مقطع از این دو نسبت به محور y می‌شود:

$$I_1y = I_{y_1} + Ad^2$$

* ممان کل نسبت به محور y می‌شود:

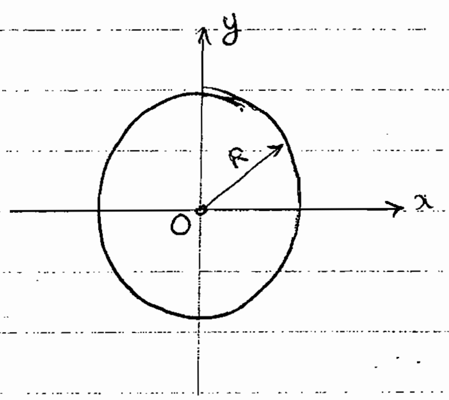
$$* \quad I_y = 2I_1y = 2I_{y_1} + 2A\cdot d^2$$



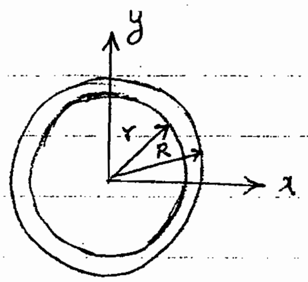
$$* \quad I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad * \quad r_x^2 = \frac{h^2}{12}$$

$$* \quad I_y = \frac{hb^3}{12} \qquad * \quad r_y^2 = \frac{b^2}{12}$$

$$* \quad I_{x'} = \frac{bh^3}{3}$$

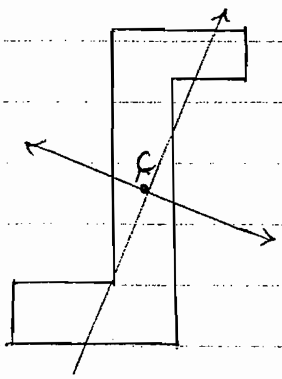


$$* \quad I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} \qquad * \quad r_x^2 = r_y^2 = \frac{R^2}{4}$$



$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$$

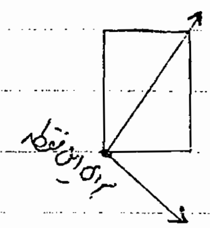
$$* \quad r_x^2 = r_y^2 = \frac{R^2 + r^2}{4}$$



محور اصلی مرکزی

سطوح باید دورترین فاصله

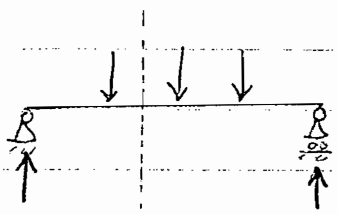
را تا محور داشته باشند

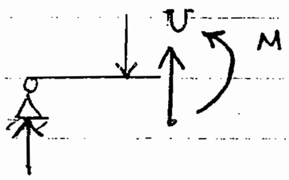


چون نسبت به یک محور ممان max و نسبت به یکی min است پس یک محور باید طوری باشد که تقریبی سطوح‌ها

کمترین فاصله را با آن داشته باشند.

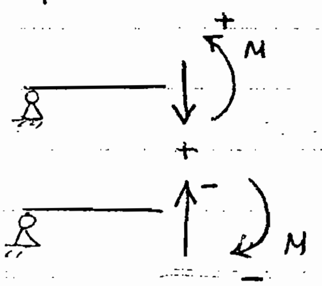
* منحنی های نیروی برشی و لنگر خمشی 8





V نیروی برشی

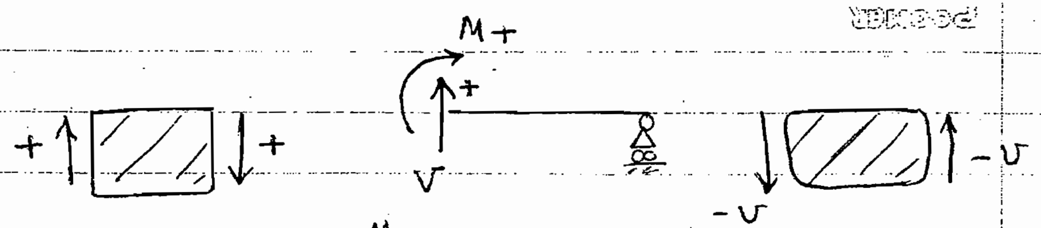
M لنگر خمشی

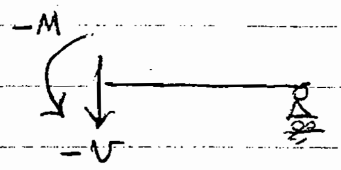


قرارداد علامت V رو به پایین +

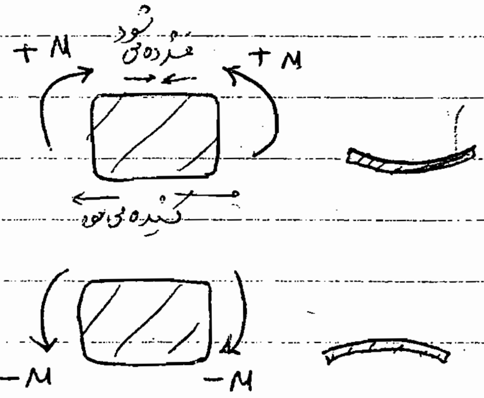
M در جهت مثلثاتی +

یک تکه از تیر را بیرون می‌آوریم



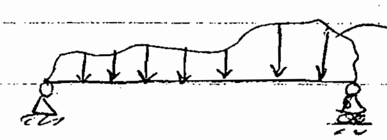


** V در جهت عقربه ساعت +



از راست به چپ گشتر M + است

* گشتر خمشی + بالای تیر را فشرده و پایین تیر را کشیده می‌کند.



معمولتر است

* $\frac{dV}{dx} = q$ ↑+ رو به بالا * $\frac{dV}{dx} = -q$ ↓+ رو به پایین

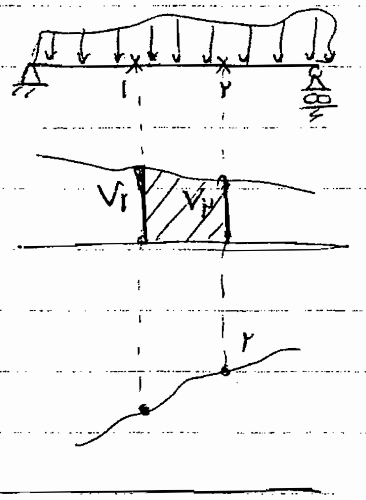
* $\frac{dM}{dx} = V$

* $\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = q$

اگر $q=0$ باشد V مقدار ثابت و M یک خط

" $q = cte$ " V یک خط و M منحنی است

$$* \quad V_2 - V_1 = \int_1^2 q\,dx$$



تغییر نیروی برشی از نقطه ① تا ② = مقدار بار وارده بین دو نقطه ① و ②

$$* \quad M_2 - M_1 = \int_1^2 V\,dx$$

تغییر لنگر خمشی از نقطه ① تا ② = مساحت سطح زیر منحنی نیروی برشی بین ① و ②

$V = +$ (جمع نیروهای سمت چپ) $\uparrow$

$= -$ (جمع نیروی سمت راست) $\uparrow$

جهت V در این حالت رو به پایین است

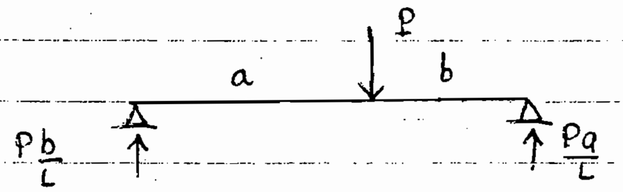
$M = +$ (جمع لنگرهای سمت چپ) $\curvearrowright^{+}$

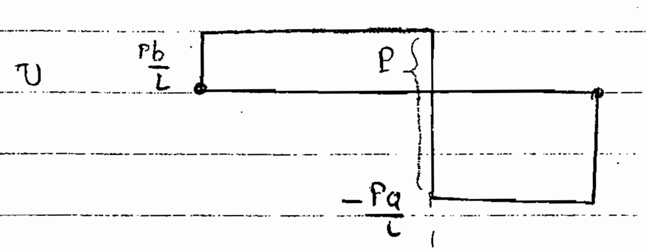
$-$ (جمع لنگرهای سمت راست) $\curvearrowright^{+}$

جمع لنگرهای سمت راست $\curvearrowleft^{+}$

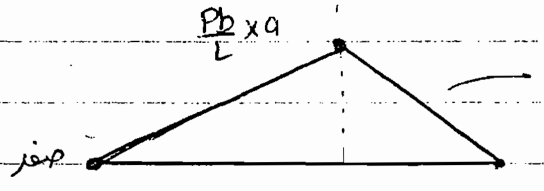
M در جهت مثلثاتی + بدست می آید

مثال 8





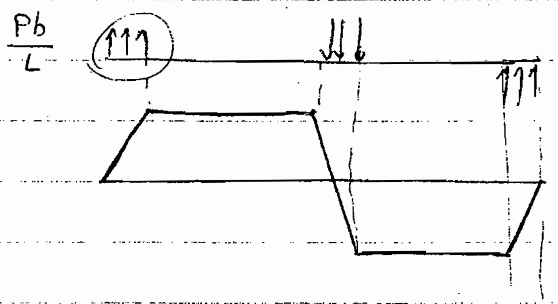
در نقطه P بین dx این طرف و dx در طرف مقابل برابر بار وارده است



تغییر گشتاور برابر مساحت زیر V است

تغییر گشتاور منفی است چون نمودار V زیر محور قرار گرفته

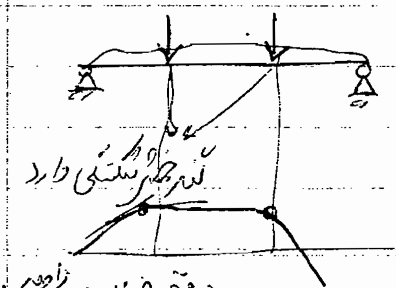
خطوط عمودی نمودار نیروی برشی هستند باید پیوسته باشند روی خط قائم نیروی برشی مبهم است بی‌نهایت نیروی برشی خواهیم داشت



شکل اصلی منحنی باید به این شکل باشد چون امکان ندارد که نیرو دقیقاً در یک نقطه وارد شود بلکه از ابتدا به تدریج نیروی برشی افزایش می‌یابد تا به $\frac{Pb}{L}$ می‌رسد

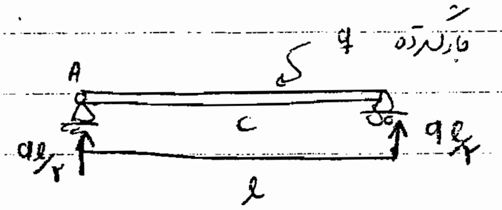
* وقتی بار متمرکز داشته باشیم نیروی برشی به اندازه بار متمرکز تغییر می‌کند

* گشتاور خمشی هم در نقطه بار متمرکز شکستگی دارد

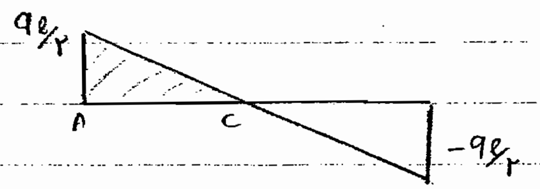


در متمرکز شیب زاویه دو طرف بار متمرکز متفاوت خواهد بود $\Longrightarrow$ شکستگی گشتاور خمشی داریم

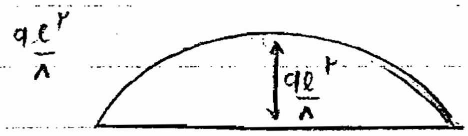
مثال:



شیب = شدت بار
$-ql$



$$A_{A-C} = \frac{1}{2}\,\frac{ql}{2}\,\frac{l}{2} = \frac{ql^2}{8}$$



دوباره به صفر می‌رسد

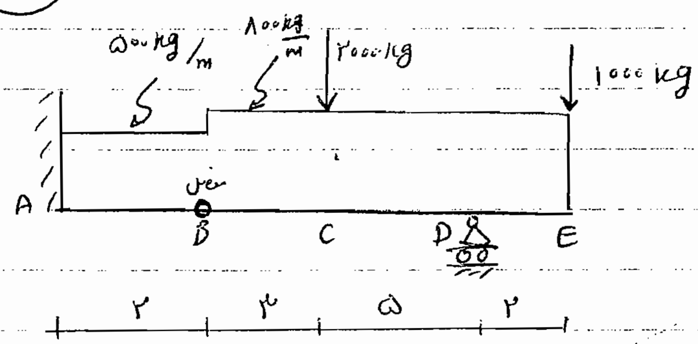
از A تا C به اندازه آن
هر چه سطح بیشتر منحنی اضافه
می‌شود ؟

$$\max V = \frac{ql}{2}$$

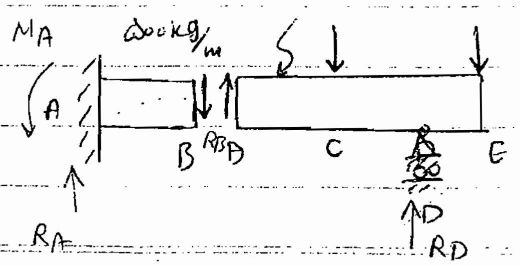
$$\max M = \frac{ql^2}{8}$$

* نتیجه این مثال و مثال قبل را می‌توان در مسائل بکار برد

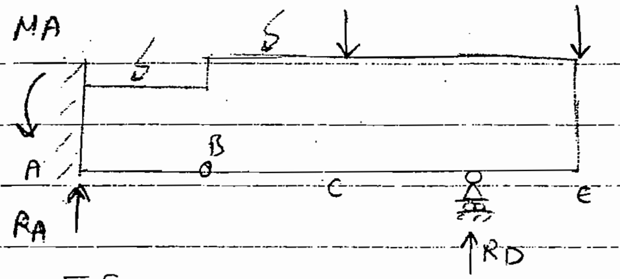
مثال:



می‌شود مسئله را جدا جدا حل کرد با یک برش B



اول باید عکس العمل‌ها را بدست آورد.



در نقطه B ، گیردار صفر است
چون از این طرف به آن طرف
B گیردار مستقل می‌شود

$\sum F_y = 0$

$\sum M = 0$

گیردار $M_B = 0$

$$+ \underset{\text{راست}}{M_B^R} = -1000\times 10 + 8\,R_D - 2000\times 3 - \overset{\text{بار گسترده}}{(800\times 10)(5)} = 0$$

به سمت داخل منفی

6000
10000
16000

$$\Rightarrow \boxed{R_D = 7000\,kg}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - (500\times 2) - (800)(10) - 2000 - 1000 + 7000 = 0$$

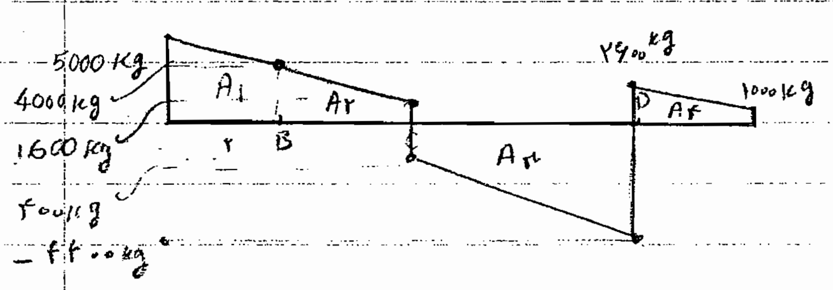
$$\Rightarrow \boxed{R_A = 5000\,kg}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \sum \overset{\text{چپ}}{M_B^L} + \underbrace{\sum \overset{\text{راست}}{M_B^R}}_{} = 0$$

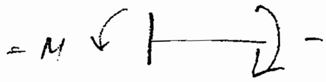
این قسمت قبلاً
صفر قرار داده شده
فقط سمت چپ را داریم :

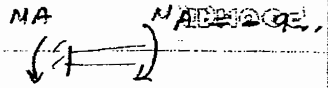
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \sum M_B^L = 0 \Rightarrow M_B^L = 5000\times 2 - M_A - (500\times 2)\overset{\text{فاصله}}{(1)} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_A = 9000\,kg.m}$$



برای برش
از A تا B بار گسترده یکنواخت داریم
پس یک خط داریم با شیب خط = 500
در 2 متر به اندازه 1000 تا کم می‌شود
می‌شود 4000 kg ؛
دوباره یک خط داریم با شیب هم اندازه 2×800 " " کم می‌شود .
از C تا D یک خط با شیب 800− ؛ و همین برش به صفر می‌رسد



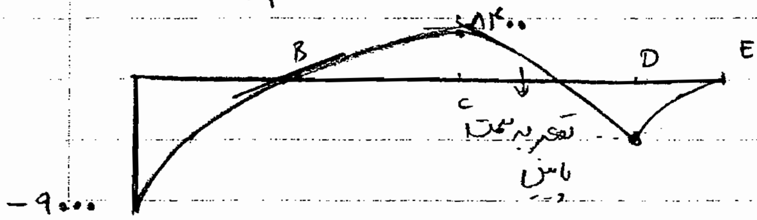


در تکیه گاه یک لنگر متمرکز داریم

با اندازه -9000

$A_1 = \frac{1}{2}(5000+4000)\times 2 = 9000$

$A_2 = \frac{1}{2}(4000+1600)\times 3 = 8400$



در محل B لنگر صفر باید بشود

پس A_1 حتماً باید 9000 در آید؛

تا با -9000 بشود صفر؛

در غیر این صورت اشتباه است.

در نقطه B، شیب منحنی یکسان است

شیب در نقطه B می‌شود ارتفاع منحنی V در آن نقطه؛

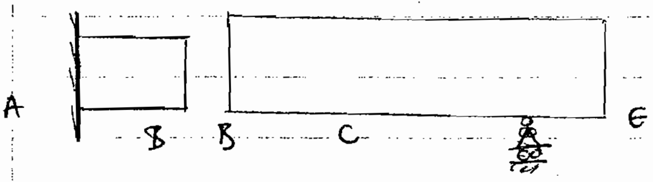
$A_3 = \frac{1}{2}(400+4400)(5) = 12000$

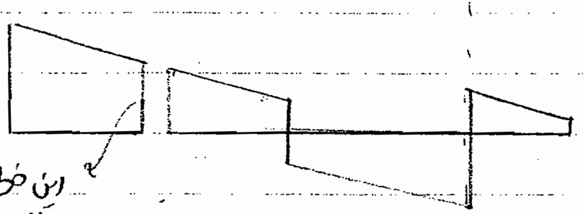
سپس اندازه 12000 از 8400 کم می‌شود؛

در نقطه E شیب منحنی صفر نیست چون نیروی متمرکز داریم؛

$\frac{d^2M}{dx^2} = q$ — تقعر رو به پایین چون مساحت V منفی است، و M در حال کاهش است

چون q منفی است پس تقعر رو به پایین است

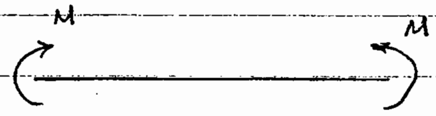




این خط در هنگام رسم دقیق حذف می‌شود

خمش 8 bending

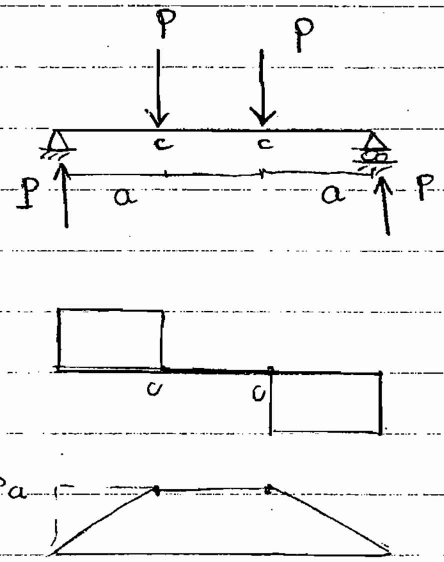
گشتاور پیچشی را بررسی کردیم اکنون به بررسی گشتاور خمشی می‌پردازیم :



« خمش خالص »

« Pure bending »

نیروی برشی اکنون نداریم در هر مقطع فقط گشتاور خمشی داریم :



در قسمت c نیروی برشی صفر است

از طرفی گشتاور خمشی هم ثابت است

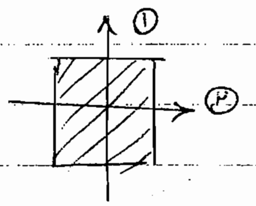
ولی حالت غالب این است که خمش خالص نیست بلکه همراه با نیروی برشی است که به آن خمش ساده یا « simple bending » گویند :

M و V

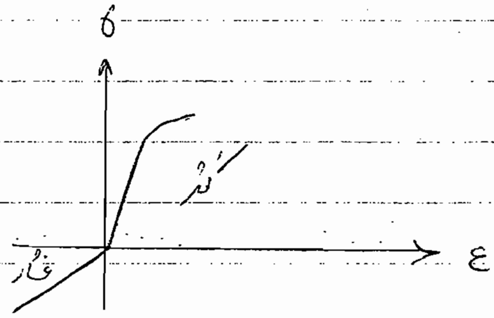
فرض 8

* گشتاور خمشی حول یکی از محورهای اصلی مرکزی اینرسی مقطع باشد :

مثلاً در مقطع مستطیل



گشتاور خمشی حول ① یا ② خواهد بود :

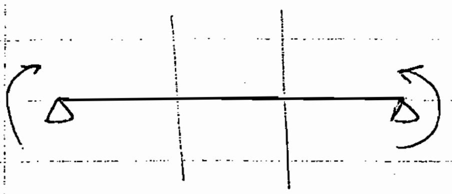


* مدول الاستیسیته در کشش و فشار یکی است

یعنی امکان ممکن است در کشش و فشار نمودار σ-ε آنها متفاوت باشد چون E ضریب زاویه این خط است

* تنش‌ها و کرنش‌ها در قسمت خطی منحنی تنش - کرنش قرار دارند

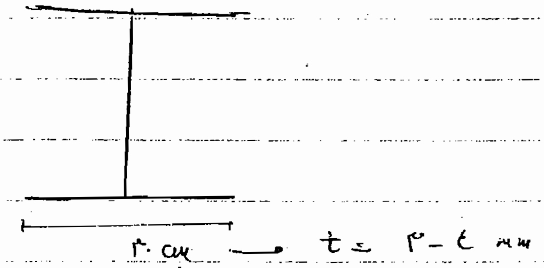
* تغییر شکل‌ها کوچکند

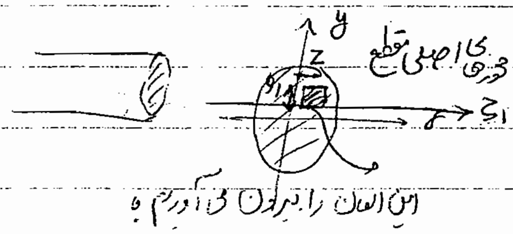


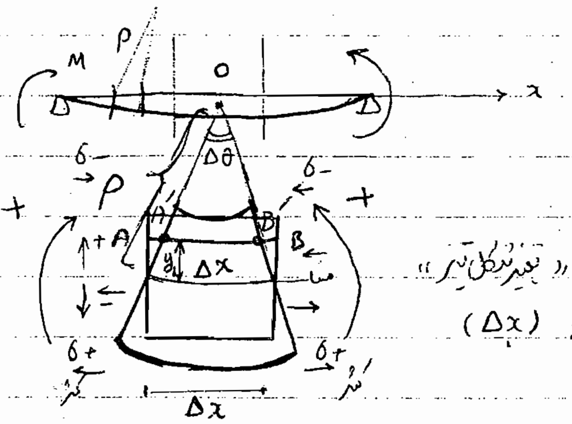
* مقطع در اثر تاب خوردن تاب نمی‌خورد ؛ مقاطع عمود بر محور میله مسطح و عمود بر محور میله باقی می‌مانند ؛

این فرضیه به نام «فرضیه سن ونان» معروف است ؛ Saint Venent

این فرضیه در اکثر موارد درست است مگر این که مقطع جدار نازک خیلی نازک باشد ؛







تیر در اثر خمش خم خواهد شد

«تغییر شکل تیر»

چون تغییر شکل‌ها کوچکند طول قوس و وتر را با طول اولیه یکی می‌گیریم ؛ (Δx)

مثلاً AB طولش از Δx هم $A'B'$ رسیده است ؛

ρ شعاع انحنای منحنی خمشی تیر است ؛

* $\Delta x = \rho \Delta\theta$
* $\overline{A'B'} = (\rho - y_1)\Delta\theta$
* $\varepsilon_x = \dfrac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \dfrac{(\rho - y_1)\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta} = -\dfrac{y_1}{\rho}$

* تغییر کرنش به طور خطی ؛ قدر مطلق مقدارش زیاد می‌شود از بالا که در پایین زیاد می‌شود ؛

* $\varepsilon_x = \dfrac{\sigma}{E} \Rightarrow \sigma_x = E\varepsilon$ پس σ هم به طور خطی تغییر می‌کند

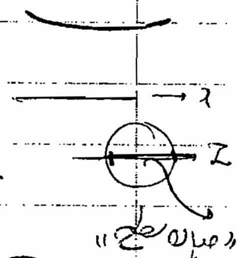
$$\sigma_x = -\frac{E y_1}{\rho}$$

* محور $N = \int \sigma dA = 0$ چون فقط خمش داریم

* $\int -\frac{Ey_1}{\rho} dA = 0 \Rightarrow -\frac{E}{\rho}\int y_i dA = 0$

چون این انتگرال صفر شده پس y_1 باید مختصه c باشد یعنی y_1 باید نسبت به Z که از مرکز مقطع می‌گذرد سنجیده شود؛

در واقع یک سطح است که محور x عمود بر آن است؛ = از این بعد همان بعد Δx است که به صورت یک خط دیده می‌شود؛ = میان تار یا میان سطح



* در واقع سطحی است که از محور z و x تشکیل می‌شود؛

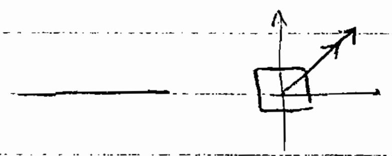
«میان سطح»

* $M_y = \int_A (\sigma dA) Z = 0$

$= \int -\frac{EYz}{\rho} dA = 0 \Rightarrow -\frac{E}{\rho}\int yz\, dA = 0$

چون I حاصلضرب صفر شد پس y و z محورهای اصلی مقطع‌اند

به همین دلیل فرض کردیم که لنگر خمشی حول یکی از محورهای اصلی مرکزی باشد



اگر لنگر حول محور اصلی نباشد در مقاومت (۲) با تجزیه آن روی محورهای اصلی استفاده می‌کنیم

Z حول لنگر $M_z = -\int_A (\sigma dA) y = -\int -\frac{Ey^2}{\rho} dA$ با توجه به شکل $\left\{ \begin{array}{l} -y, +\sigma \\ +y, -\sigma \end{array} \right.$

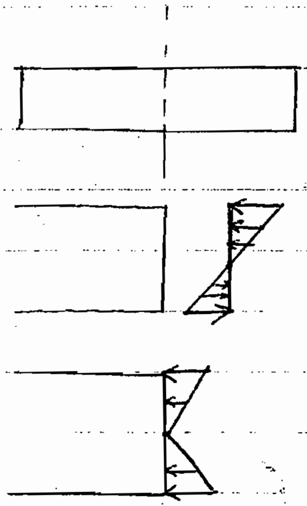
$= +\frac{E}{\rho} \int y^2 dA$

$$\Rightarrow \boxed{M_z = \frac{E I_z}{\rho}}$$

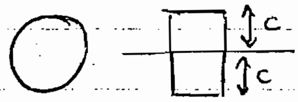
$$* \quad \varepsilon = \frac{-y}{\rho} \qquad * \quad \sigma = \frac{-Ey}{\rho} \qquad * \quad M_z = \frac{EI_z}{\rho}$$

با حذف $\frac{E}{\rho}$ داریم

$$\sigma = \frac{-M_z y}{I_z}$$

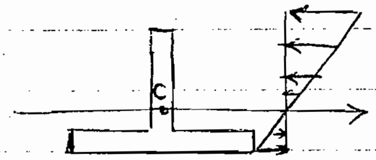


اگر مقطع نسبت به محور z متقارن باشد :



تنش های بالا و پایین با هم برابرند ؟

ولی اگر نامتقارن باشد :



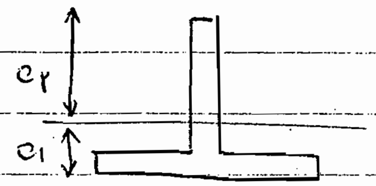
دیگر برابر نخواهد بود

مقطع متقارن

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_z y_{max}}{I_z} = \pm \frac{M_z C}{I_z}$$

اساس مقاومت

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_z}{W_z} \qquad * \quad W_z = \frac{I_z}{c} \quad *$$



مقطع نامتقارن 8 در اینجا ۲ مدول مقطع خواهیم داشت

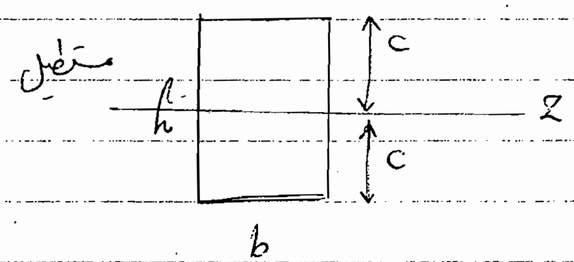
$$W_{1z} = \frac{I_z}{e_1}$$

$$W_{2z} = \frac{I_z}{e_2}$$

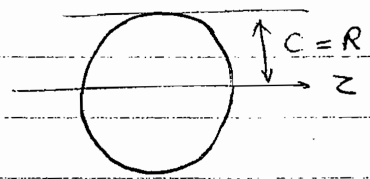
$$\sigma_{1max} = \frac{M_z}{W_{1z}}$$

$$\sigma_{2max} = \frac{M_z}{W_{2z}}$$

اگر جسمی کشش و فشار را یکسان تحمل نکند مثل گچ یا بتن که فشار را به مراتب بهتر تحمل می کند بنابراین اگر مقطع مثل بالا داشته باشیم بهتر است

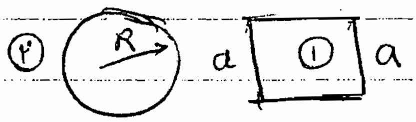


$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$



$$W_z = \frac{\pi R^3}{4}$$

* دو مقطع داریم یکی دایره و یکی مستطیل با مساحت مساوی می خواهیم ببینیم کدام یک مقاومت خمشی بیشتر دارند؟



باید ببینیم کدام یک تنش کمتری دارد ؟

$$A = a^2 = \pi R^2$$

با گشتاور مساوی هر کدام یک W بیشتری داشته باشد تنش کمتر و مقاومت بیشتر دارد ؟

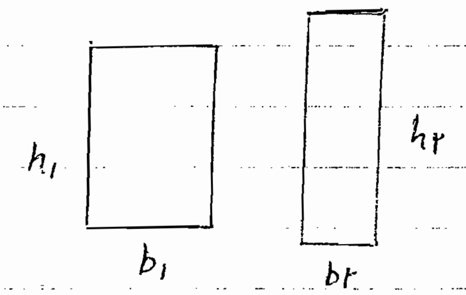
* $a = R\sqrt{\pi}$ $\qquad W_1 Z = \frac{a^3}{6} = \frac{R^3\pi\sqrt{\pi}}{6}$

$$W_2 Z = \frac{\pi R^3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{W_1 Z}{W_2 Z} = \frac{4\sqrt{\pi}}{6} = 1/19$$

* مدول مقطع مربع حدود ۲۰ ٪ بیشتر از مدول مقطع دایره است پس با این که مساوی، مربع برای تحمل تنش بهتر است ؛

* در پیچش برعکس بود مقطع مدور بهتر از مربع بود ؛

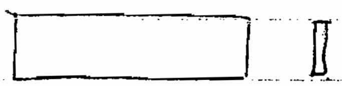


$A = bh = cte$

* $W_Z = \frac{bh^2}{6} = A\frac{h}{6}$

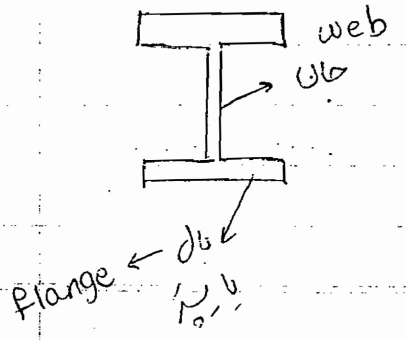
* با مقطع ثابت هرچه ارتفاع بیشتر باشد مدول مقطع بیشتر است یعنی مقطع دوم بهتر است چون $h_2 > h_1$ است

ولی از نظر پایداری حدی دارد ؛



این تیر با این مقطع
نازک از نظر پایداری دچار اشکال است.

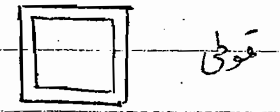
* برای این که این مشکل را حل کنیم مقطعی به شکل زیر ایجاد کنیم ؛



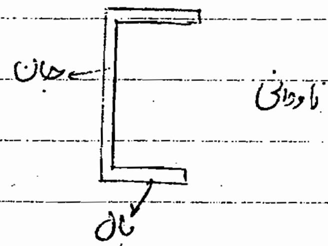
مقطع I

مصالح در بالا و پایین تیراند ؛

چون I_z مقطع زیاد شده w هم اضافه می‌شود.



در اینجا هم مصالح در بالا و پایین اند
ولی از دو طرف به هم وصل شدند
برای تحمل لنگر خمشی مقطع خوبی است

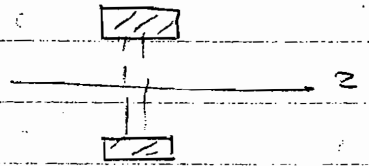


برای تحمل خمش باید مصالح را دور از محور خمش ببریم :

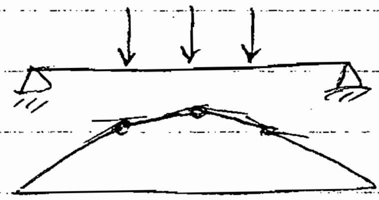
در پیچش امکان پذیر بود که می توانستیم یک لوله درست کنیم

ولی در خمش نمی توان این کار را کرد باید یک اتصالی بین آنها برقرار باشد

نمی شود چون ارتباط ندارند



اگر خمش ساده باشد :

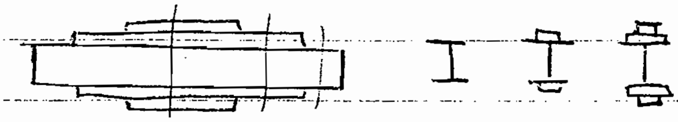


$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_{z\,max}}{W_z}$$

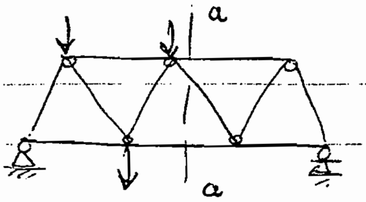
اگر مقطع متغیر باشد W هم متفاوت خواهد بود باید از مشتق گیری استفاده شود .

این فرمولها در حوالی بارهای متمرکز خطا دارد اما قابل صرفنظر کردن است .

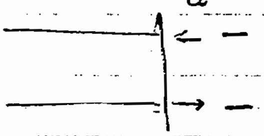
گاهی اوقات یک تیر را در قسمت هایی از آن تقویت می کنند هر جا لنگر خمشی زیاد شود اتصال را زیاد می کنیم
بیشتر از نظر اقتصادی این کار انجام می شود



در بعضی موارد که دهانه خیلی زیاد است از خرپا استفاده می شود :

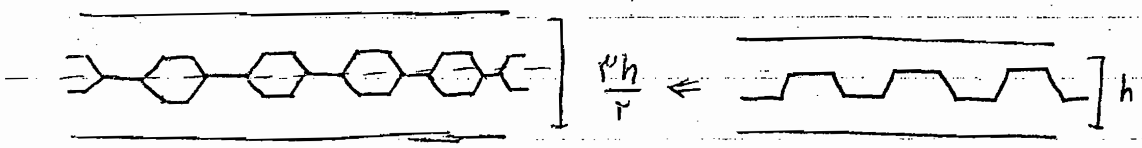


دو قسمت بالا و پایین را با استفاده از اتصالات داخلی به هم متصل می کنند.



اتصال داخلی را دیگر به حساب نمی آوریم فقط بالا و پایین را می گیریم.

* تنش از بالا تا پایین طبق رابطه تنش خطی تغییر می کند



ارتفاع زیادتر می شود پس ممان زیادتر و در نتیجه W زیادتر می شود ولی

نکته این است که فرمول خمش را نباید برای تیرهای لانه زنبوری استفاده کرد.

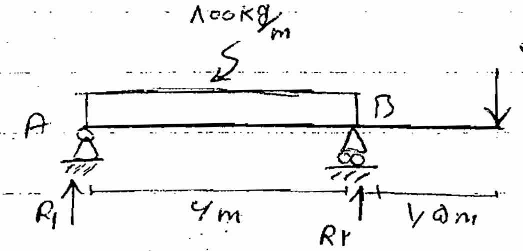
در ساختمان های معمولی بکار بردن لانه زنبوری اشتباه است.

در حالی که حتما استفاده می شود در دهانه کمتر می شود از آن ها استفاده کرد در ساختمان های مسکونی و تالارها حق استفاده را نداریم.

مثال 8

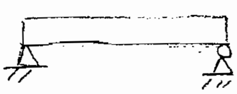
مقدار h را بیابید که

$\sigma_w = 100 \frac{kg}{cm^2}$

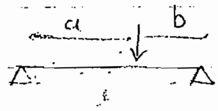


باید گشتاور max تیر را داشته باشیم؛ برای ممان های خطی از قبل می دانیم که

$M = \frac{ql^2}{8}$



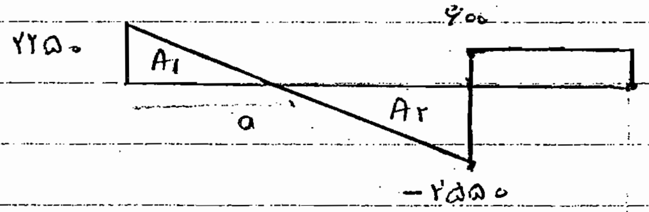
$\frac{ql^2}{8}$



$\frac{Pab}{L}$

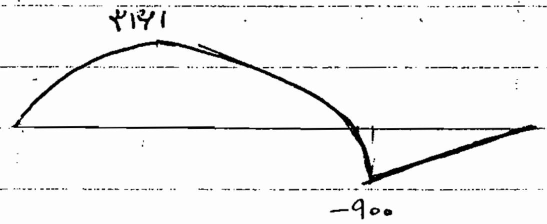
$$* \quad \Sigma M_A = 800 \times 6 \times 3 - 6R_2 + 600(7.5) = 0 \Rightarrow R_2 = 3150\,kg$$

$$* \quad \Sigma F_y = R_1 + 3150 - (800)(6) - (600) = 0 \Rightarrow R_1 = 2250\,kg$$



نیروی برشی

$$a = \frac{2250}{800} = 2.81\,m$$



$$A_1 = \tfrac{1}{2}(2.81)(2250)$$
$$= 3161 \quad kg \cdot m$$

A_2 باید ۹۰۰ تا بیشتر از ۳۱۶۱ باشد؛

اگر max دیگر فرق ندارد که + یا - باشد؛ هرکدام بزرگتر بود از نظر قدر مطلق.

$$\underbrace{\sigma_{max}}_{\sigma_w} = \pm \frac{M_{z\,max}}{W_z} \qquad |\sigma_{max}| \leq \underset{\text{مجاز}}{\sigma_w}$$

$$\overset{kg}{100} \geq \frac{|M_{z\,max}|}{W_z}$$

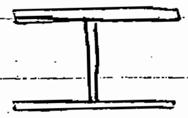
$$100 \geq \frac{3161 \times 100}{W_z} \Rightarrow W_z \geq 3161\,cm^3$$

$$\frac{bh^2}{6} \geq 3161\,cm^3$$

$$\frac{15}{6} h^2 \geq 3161$$

یا این مقدار یا بزرگتر از این مقدار تیر دوام می‌کند

$$\boxed{h \geq 35.6\,cm}$$



ران چین

مثلاً تیر مثال قبل را می‌خواهیم با INP یا IPE طراحی کنیم:

$\sigma_w = 1500 \frac{kg}{cm^2}$

$|M_{max}| = 3161 \times 100 \ kg\text{-}cm$

$$|\sigma_{max}| \leq \sigma_w \Rightarrow 1500 \geq \frac{3161 \times 100}{W_z}$$

$$W_z \geq 211 \ cm^3$$

در جدول نگاه می‌کنیم که W_z کجا ۲۱۱ است که می‌شود INP 200mm $\left\{ \begin{array}{l} 26.2 \ kg/m \\ w = 214 \ cm^3 \end{array} \right.$

برای IPE باید IPE 220 بکار ببریم که $\left\{ \begin{array}{l} 26.2 \ kg/m \\ w = 252 \ cm^3 \end{array} \right.$

* قاعدتاً IPE در خمش بهتر است زیرا هم w IPE بیشتر از w INP است پس بار را به مقدار ناچیزی می‌شود اضافه کرد. مخصوصاً در شماره‌های بالاتر بهتر در برابر خمش عمل می‌کند.

* $$W = \frac{I_{\text{کل}}}{c} = \frac{2 I_{\text{یکی از تیرها}}}{c} = 2W_1$$

تیر در مثال بالا باید W_z را نصف کنیم:

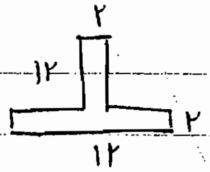
$2I \ 160^{mm} \rightarrow W = 2(117) \ cm^3 \rightarrow q = 17.9 \ kg/m \times 2$

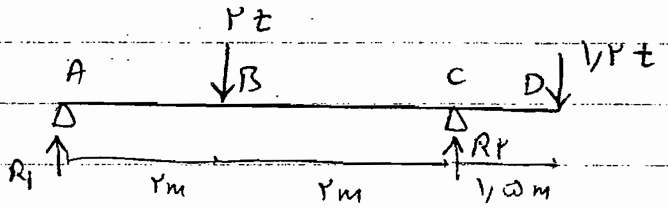
$2 \ IPE \ 160^{mm} \rightarrow W = 2(109) \ cm^3 \rightarrow q = 15.8 \ kg/m \times 2$

بنابراین کاربرد دو تا تیر به صرفه نیست چون وزن بیشتری خواهد داشت.

$\frac{W}{q}$ هر کدام بیشتر بود بهتر است

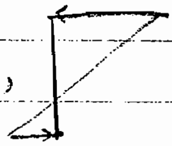
مثال ۴





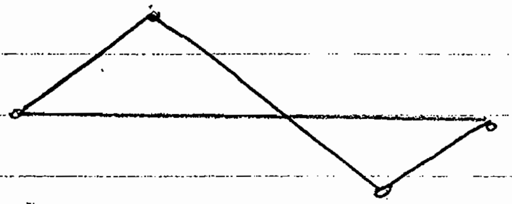
تنش های max کششی و فشاری را بیابید؟

حل - مقطع یک مقطع نامتقارن است؛ اگر تیر هم مثبت باشد خواهیم داشت ولی اینجا هم لنگر + داریم هم - .



در بالا بیشترین کشش را

$$2R_1 = 2(0.55) = 1.1\ t\cdot m$$



$$\sum M_C = 4R_1 - 2\times 2 + 1.2\times 1.5 = 0$$

$$R_1 = 0.55\ t$$

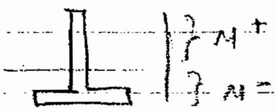
1.2×1.5

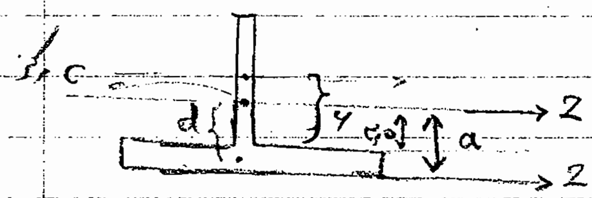
لنگر ۱/۲ حول C

$$M^+_{max} = 1.1\ t\cdot m$$

$$M^-_{max} = 1.8\ t\cdot m$$

مهم * در این مسئله چون نامتقارن است max تنش ممکن است از هر کدام ناشی شود؛ هر دو را باید حساب کرد؛





$$a = \frac{(12\times 2)\times 1 + (12\times 2)\times 8}{(12\times 2)\times 2} = 4.5\ cm$$

می توانستیم بگوییم مقطع قائم مرکزش در ۶ cm مقطع افقی است مقطع پایین در ۱ cm می شود ۳/۵ $= \frac{7}{2}$ که با ۱ جمع شود ۴/۵ cm می آید.

مستطیل پایین $I_z = \frac{(12)(2^3)}{12} + (2\times 12)(3.5)^2$

مستطیل بالا $I_z = \frac{(2)(12)^3}{12} + (2\times 12)(3.5)^2$

$$\Rightarrow I_{z\,کل} = 884\ cm^4$$

بالای مقطع B فشاردار $\sigma = \dfrac{1.1\times10^{5} \times 9.5}{884} = 1182\ kg/cm^{2}$ در بالا B

پایین مقطع C فشاردار $\sigma = \dfrac{1.8\times10^{5} \times 4.5}{884} = \text{—}$

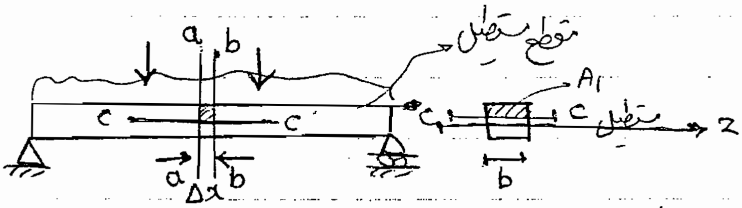
گر مثبت بالای تیر را فشاری کند
گر منفی پایین تیر را فشاری می کند

بالای مقطع C $= \dfrac{1.8\times10^{5} \times 9.5}{884} = 1934.\ \dfrac{kg}{cm^{2}}$

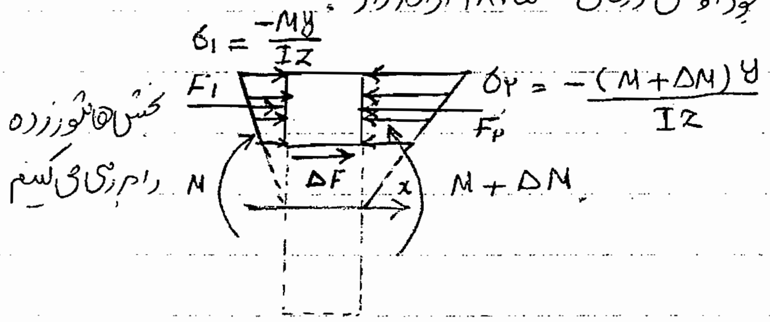
علیرضا جوادیان -

۸۴,۲,۲۴ بنام خدا ج ۲۱

تنش برشی در خمش ساده تیرها :



این روش را اولین بار یک مهندس روسی به نام جوراوسکی در سال ۱۸۷۵ ارائه داد :



به خاطر وجود ممان M تنش عمودی داریم :

$$F_1 = \int_{A_1} \sigma_1 dA \quad ; \quad F_2 = \int_{A_1} \sigma_2 dA$$

* F_1 با F_2 مساوی نیست چون ممان تغییر کرده است بنابراین برای تعادل نیاز به ΔF داریم :

* $$\Delta F = F_2 - F_1$$

* ΔF به صورت یک نیروی برشی در مقطع c-c عمل می کند و یک تنش برشی ایجاد می شود :

* $$\Delta F = \int_{A_1} \frac{-(M+\Delta M)y}{I_z} dA - \int_{A_1} \frac{-My}{I_z} dA$$

* $$\Delta F = \int_{A_1} \frac{-(\Delta M)y}{I_z} dA = \frac{-\Delta M}{I_z} \int_{A_1} y dA = \frac{-\Delta M}{I_z} Q_{1z}$$

مربوط به مقطع A_1 است

* می دانیم $\frac{\Delta M}{\Delta x \to 0} = V$ نیروی برشی

$$\Delta F = \frac{\Delta M Q_{1z}}{I_z}$$

جهت ΔF را از روی شکل بدست می آوریم با توجه به جهت F_1 ، F_2 :

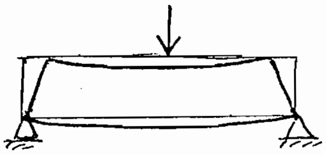
$$\Delta F = \frac{V\,\Delta x}{I_z}\,Q_{1z}$$

مقدار نیروی برشی در واحد طول را شار برشی گویند ؛

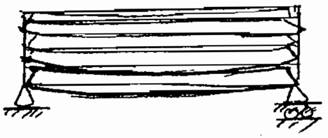
شار برشی برای طول کم

$$q = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{V}{I_z}\,Q_{1z}$$

شدت نیروی برشی است



به صورت تحرتی

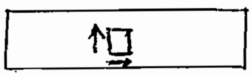


بالای تیر پایینی فشرده و طول آن کم شده و پایین تیر بالایی کشیده و طول آن زیاد شده است پس دو قسمت در تمام لایه ها روی یکدیگر می لغزند اگر آزاد بود حرکت می کرد اما چون یک جسم یکپارچه اند یک نیروی به وجود می آید که نیروی برشی است

تنش برشی افقی و قائم

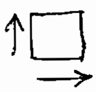
$$\tau = \frac{\Delta F}{b\,\Delta x} = \frac{q}{b} = \frac{V Q_{1z}}{I_z b}$$

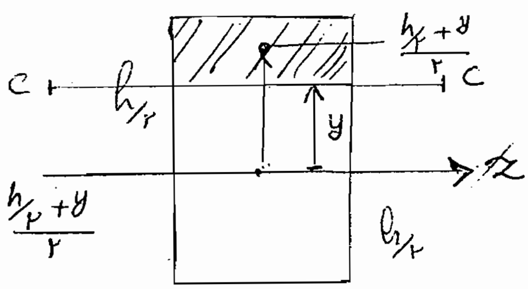
b ؛ $\dfrac{V Q_{1z}}{I_z t}$

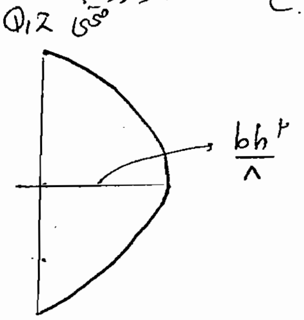


در یک مقطع V ، I ، b ثابت اند فقط Q تغییر می کند که بستگی به مقطع C–C دارد ؛

در یک المان تنش برشی در دو سطح عمود هم با هم برابرند







$$Q_{1z} = b\left(\frac{h}{2} - y\right) \times \frac{\frac{h}{2}+y}{2}$$

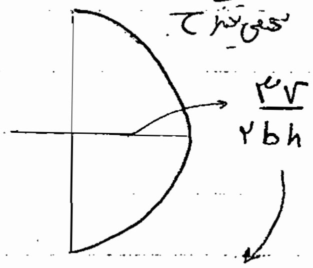
$$* \; Q_{1z} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$\frac{1}{2} \times b \times 2(\frac{h}{2} - y)$
$+2b(\frac{h}{2} - y)(\frac{h}{2}$

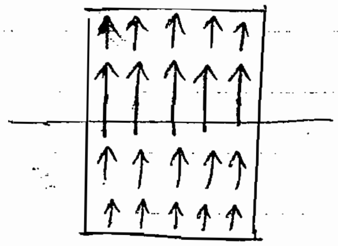
وقتی c-c به محور z می‌رسد بیشترین Q_z را داریم اگر مقطع c-c پایین محور z بیاید قسمت بالایی میان
+ و قسمت پایین میان – دارد که در مجموع Q_z کم می‌شود در پایین هم Q_z صفر می‌شود چون میان نسبت به محور مرکزی صفر است

* در بالا و پایین Q_z صفر است تنش برشی در محور z max است و در بالا و پایین صفر است :

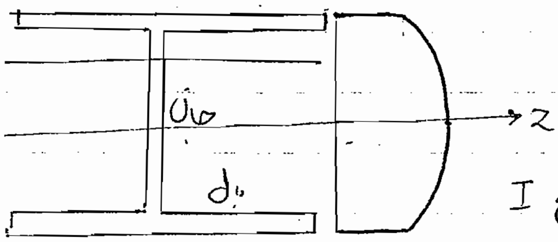
$$\tau = \frac{V \cdot \frac{b}{2} \cdot (\frac{h^2}{4} - y^2)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$



* مقدار max تنش برشی می‌شود = $\frac{3}{2}\tau_m$ متوسط :

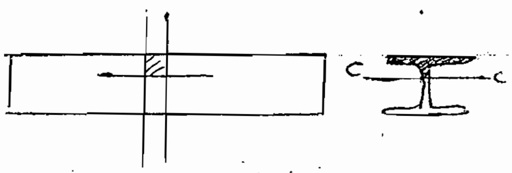


* برای یک مقطع I :

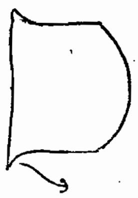


در بال تیر به علت پهنای زیاد نمی‌شود رابطه بالا را بکار برد

اما در جان تیر می‌شود این رابطه را بکار برد برای تیر با مقطع I
سطح A_i می‌شود سطح هاشور زده :

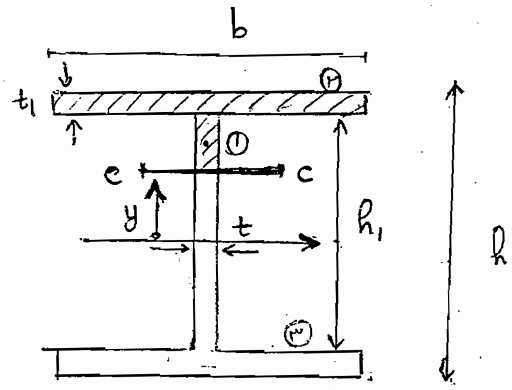


اگر نمودار آن را بکشیم یک منحنی خواهد بود ولی مقدار
آن در بال صفر نخواهد بود :



در محور z ها max است ولی تغییرات آن از بالا تا پایین تیر زیاد نیست

این منحنی درست نیست
چون در بال نمی‌شود منحنی را سهمی
در نظر گرفت



معمولاً $t_1 < t$ است ؛ $t_1 = \frac{h-h_1}{2}$

* معادله تنش برشی تغییرات ① و τ را بیابید ؟

$$① \Rightarrow Q_{1z} = t\left(\frac{h_1}{4}+\frac{y}{2}\right)\left(\frac{h_1}{2}-y\right) = \frac{t}{2}\left(\frac{h_1}{2}+y\right)\left(\frac{h_1}{2}-y\right) = \frac{t}{2}\left(\frac{h_1^2}{4}-y^2\right) *$$

$$② \Rightarrow Q_{2z} = t_1(b)\left(\frac{h_1}{2}+\frac{t_1}{2}\right) \Rightarrow t_1 = \frac{h-h_1}{2}$$

$$\Rightarrow Q_{2z} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2-h_1^2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow Q_t = \frac{t}{2}\left(\frac{h_1^2}{4}-y^2\right) + \frac{b}{8}\left(h^2-h_1^2\right)$$

$$① \quad I_z = \frac{1}{12}(t)(h_1^3)$$

$$③② \quad I_z = 2I_{z2} \Rightarrow I_{z2} = \frac{1}{12}(b)(t_1^3) + (bt_1)\left(\frac{h_1}{2}+\frac{t_1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_{z2} = \frac{1}{12}b\left(\frac{h-h_1}{2}\right)^3 + b\left(\frac{h-h_1}{2}\right)\left(\frac{h_1}{4}+\frac{h}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_{z2} = \frac{b}{32}(h-h_1)\left[\frac{1}{3}[h-h_1]^2 + (h+h_1)^2\right]$$

$$\Rightarrow I_{zt} = I_{z1} + 2I_{z2} = \frac{1}{12}th_1^3 + \frac{b}{16}(h-h_1)\left[\frac{1}{3}(h-h_1)^2 + (h+h_1)^2\right] *$$

* نکته 8

یک تقریب برای محاسبات این است که تنش را یک ارتفاع در نظر گیریم ؛ یعنی تنش برشی در جان یکنواخت است ؛
تقریب دوم این است که بگوییم ۹۰٪ نیروی برشی در جان تیر است ؛ البته بسته به ابعاد مقطع متفاوت است ؛
ما فرض می کنیم که تمام نیروی برشی در جان است ؛

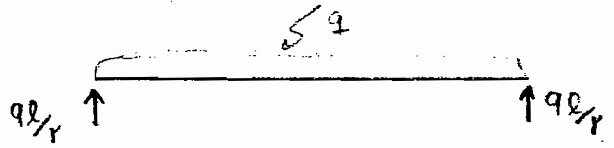
جان → web

* فرمول تقریبی

$$\tau_{web} = \frac{V}{t\,h_1} = \frac{V}{A_{web}}$$

در سازه های فولادی از این رابطه استفاده می شود.

با تقریب خوبی τ_{web} نزدیک به τ_{max} جان در می آید اما خطا دارد و مقدار دقیق نیست ؛



* $V_{max} = \frac{ql}{2}$

در کدام تیر جایی τ لازم است که v هم max باشد

کوتاه تیر : $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V_{max}}{bh} = \frac{3ql}{4bh}$

$\tau_{max} = \tau_w$ «مجاز»

* $M_{max} = \frac{ql^2}{8}$ $\qquad \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{\frac{ql^2}{8}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{3ql^2}{4bh^2}$

$\sigma_{max} = \sigma_w$

نتیجه : $\frac{L}{h} = \frac{\sigma_w}{\tau_w}$

مثلاً فولاد نسبت تنش مجاز عمودی به مجاز برشی آن حدود $\frac{5}{3}$ است

در مقاطع مستطیلی $\qquad \sigma_w = \frac{2}{3}\sigma_{yp}$

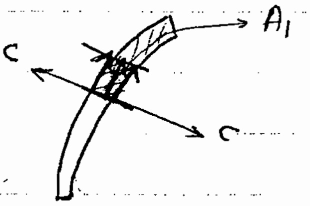
$\tau_w = 0/4\,\sigma_{yp} \qquad \Rightarrow \frac{\sigma_w}{\tau_w} = \frac{5}{3}$

یعنی طول تیر از ۲ برابر ارتفاع کمتر است .

* اگر $\frac{L}{h}$ از مجاز بیشتر باشد ، $\underline{\sigma}$ زودتر به مقدار مجاز می‌رسد چون با توان دوم $\frac{L}{h}$ ارتباط دارد .

معمولاً تیرها با تنش خمشی محاسبه می‌شوند .

به طور کلی اگر یک جدار نازک با زداشته باشیم :



* تنش برشی در هر نقطه در لبه جدار مماس بر جدار است

چون جدار نازک است می توانیم روی ضخامت جدار تنش برشی را یکسان بگیریم :
در مقطع مستطیل هم می توان این فرض را کرد خطایی ایجاد نمی شود

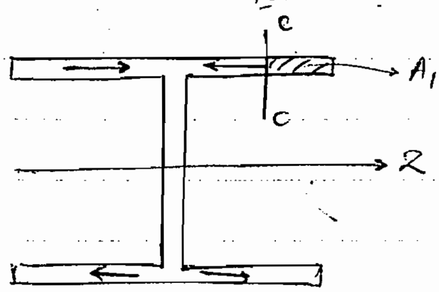
پس داریم

$$\tau = \frac{V \cdot Q_z}{I_z \cdot t}$$

مقطع C-C مایل ولی عمود بر جدار است

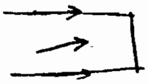
در بال تیر می شود فرمول را بکار برد ولی مقطع C-C به صورت زیر است

A_1 مساحتی که با C-C قطع شده است.



نیز به طور تقریبی تنش برشی را در بال موازی لبه ها می گیریم :

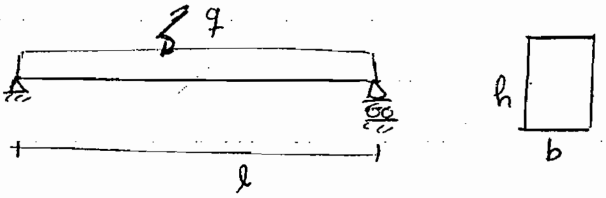
نیز با تغییر مقطع C-C می توانیم تنش برشی را با تقریب در بال حساب کنیم



البته دقیقاً درست نیست چون در مقطع بال ، با تنش های قائم برشی هم می توانیم داشته باشیم ولی با تقریب می توانیم آن را یکنواخت بگیریم

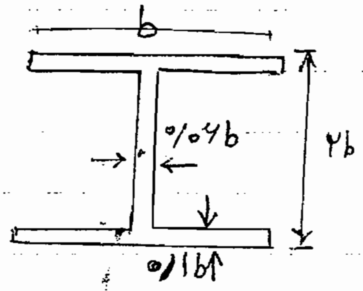
در بال Q_z به صورت خطی خواهد بود چون فاصله مرکز مقطع A_1 تا z تغییر نمی کند بلکه ثابت است

* مثال 8



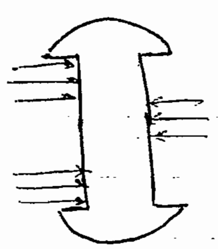
ابعاد تیر چه نسبتی داشته باشند تا تنش خمشی و تنش برشی عمودی هر دو با هم به مقدار ماکزیمم برسند ؟

در مقاطع I با جان نازک «اقتصادی تر» تنش برشی نسبت به مقطع مستطیل خیلی بیشتر می‌شود بنابراین نسبت $\frac{L}{h}$ دیگر $\frac{5}{3}$ نیست تا حدود ۱۰ ادامه می‌شود؛



مثال ۵ $\frac{L}{h}$ ؟ مثل مثال قبل حل شود.

* اگر از ~~[illegible]~~ طول تیر حدود ۱۰ ادامه و بیشتر باشد نسبت به h معمولاً خمش حاکم است برای طراحی تیر ولی کمتر از آن برش حاکم است در نزدیکی ۱۰ هر دو را باید حساب کنیم؛



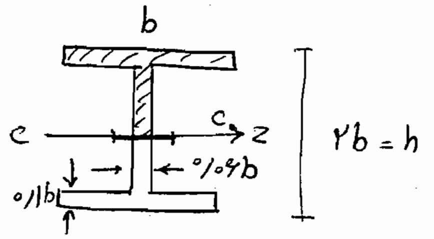
در پیچ‌ها و پرچ‌ها در واقع با یک تیر سروکار داریم که هم تنش خمشی دارد هم تنش برشی!

اگر طول پیچ بزرگتر باشد نسبت به قطر تنش عمودی را باید در نظر گرفت

برای مقاطع I

دقیق جان * $\tau_{max} = \dfrac{VQ_{12}}{I_z . t}$

تقریبی جان * $\tau_{web} = \dfrac{V}{A_w}$



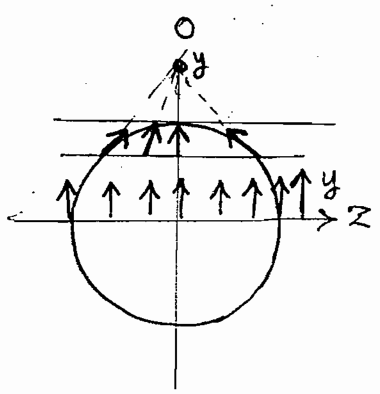
$$* \quad Q_{12} = (b \times 0/1 b)(0/95 b) + (0/06 b)(0/9 b)(0/45 b) = 0/119\, b^3$$

$$* \quad I_z = \frac{b\,(2b)^3}{12} - 2\left(\frac{0/47 b \times (1/8 b)^3}{12}\right) = 0/209\, b^4$$

$$* \quad \tau_{max} = \frac{V \times 0/119\, b^3}{0/209\, b^4 \times 0/06 b} = 9/489\, \frac{V}{b^2}$$

$$* \quad \tau_w = \frac{V}{1/8 b \times 0/06 b} = 9/259\, \frac{V}{b^2}$$

$$\frac{\tau_w}{\tau_{max}} = \frac{9/259}{9/489} = 0/975$$



* مقطع دایره :

روی محور y به علت تقارن تنش برشی باید قائم باشد.

در فرضی که در اینجا می‌شود این است که مؤلفه‌های قائم تنش برشی باید مساوی باشند :

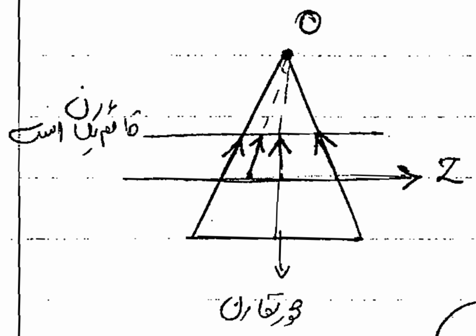
فرض یکنواخت بودن تنش برشی قائم خطا ایجاد می‌کند در روی محور y بیشتر است ولی این تقریب که از آن بدست می‌آورد

برای محاسبه τ در نقطه ا از نقطه O به آن وصل کرده و با خط تنش های قائم تقاطع می دهیم تا هم جهت و هم مقدار آن بدست آید

$$\tau = \frac{V Q_z}{I_z b}$$

* b در اینجا متغیر است ؛

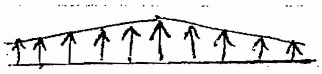
در مقاطع مثلث هم می شود از این روش استفاده کرد ؛



متساوی الساقین

* در مقطع دایره τ_{max} روی محور $\underline{z}$ می شود $\boxed{\frac{4}{3}\tau_m}$ متوسط

تئوری ارتجاعی ولی تنش برشی را یکنواخت نمی داند روی محور z

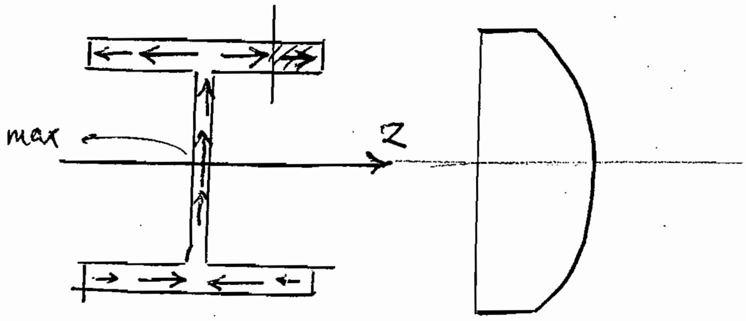


$$\begin{cases} \tau_{max} = ۱٫۳۸\, \tau_m \\ \tau_{\text{لبه}} = ۱٫۲۴\, \tau_m \end{cases}$$

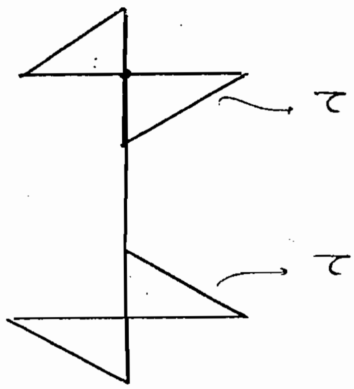
ولی در مقاومت مصالح τ را یکسان می گیرند ؛

* برای max شدن τ باید $\frac{Q_z}{b}$ را حساب کرده مشتق بگیریم و مقدار max را بدست آوریم
مثلاً در مثلث حساب کنید روی محور z نمی شود بلکه بالاتر از محور $\underline{z}$ می شود ؛

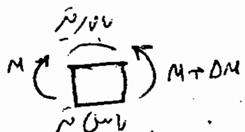
چرا مارها حساسیت بیشتری به زمین لرزه دارند؟



$$\tau_{\text{بال}} = \frac{VQ_z}{t\,I_z}$$

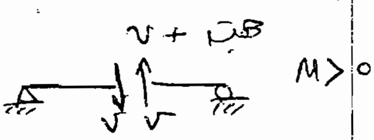


* روی بال به طور خطی از لبه به طرف جان زیاد می‌شوند

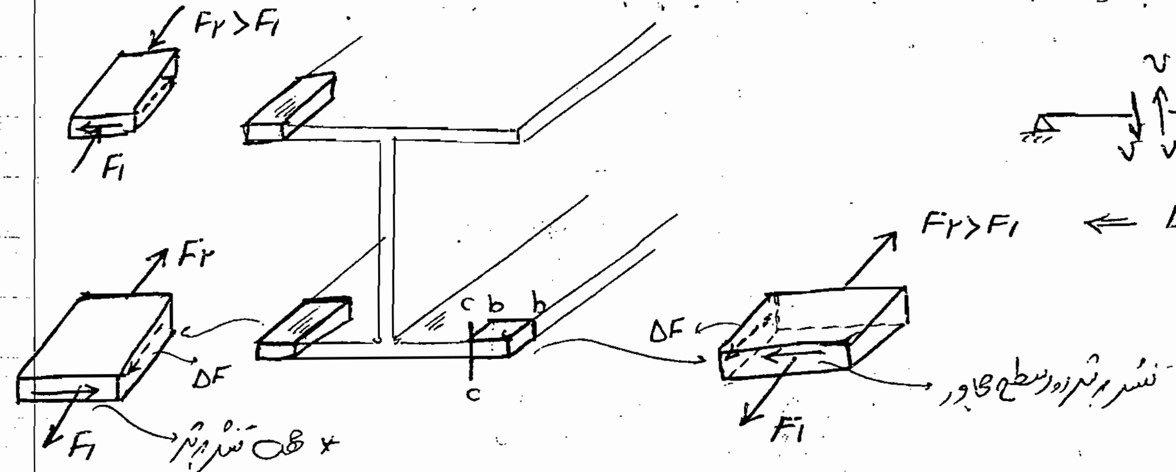


برای تعیین جهت نیروی برشی روی جان اگر V رو به بالا باشد τ رو به بالا خواهد بود

بالای تیر نیروی فشاری دارد

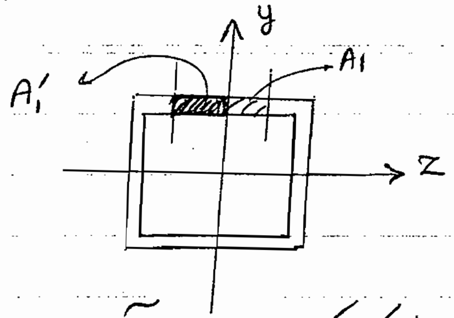


* چون $\Delta M>0 \Leftarrow F_2>F_1$



برای تعادل دو مقطع نزدیک به هم گرفتیم و یک مقطع عمود بر آن گرفتیم در مقطع مستطیل عمود بر دو مقطع a و b می‌شد

در جدارهای نازک τ همیشه موازی جدار است؟



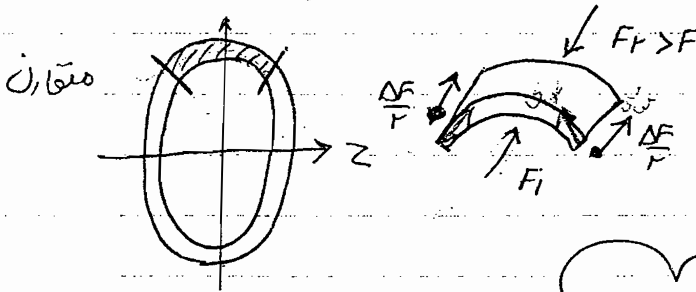
close

* جدار نازک بسته متقارن 8

متقارن نسبت به محور خمش (محور y)

تفاوت جدار نازک بسته و باز در این است که در جدار نازک باز با ۱ مقطع یک تکه از تیر بیرون می آید .

ولی در جدار نازک بسته باید به جای یک مقطع C-C دوتا مقطع بزنیم در این صورت باید بتونیم ΔF را چطور تقسیم کنیم ولی اگر نسبت به محور y متقارن باشد می توانیم ΔF را به طور مساوی تقسیم کنیم .



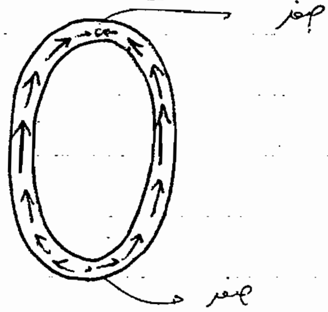
نصف ΔF به هر سطح طرفین می رسد

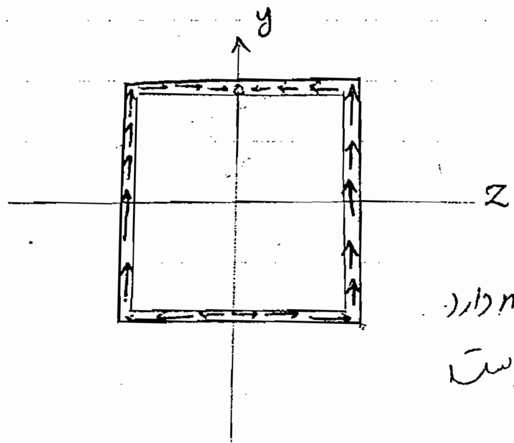
$$\tau = \frac{VQ_z}{2 I_z t}$$

از محور تقارن تا مقطع برش

$Q'_z \longrightarrow$ مربوط به سطح A_1

$$\tau = \frac{VQ'_z}{I_z t}$$

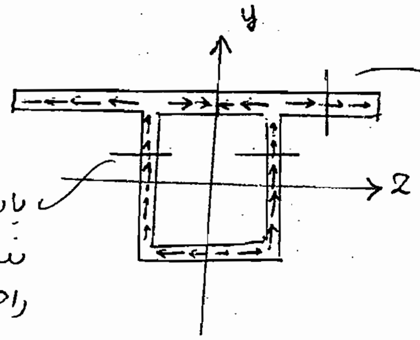




روی محور z مقدار max دارد

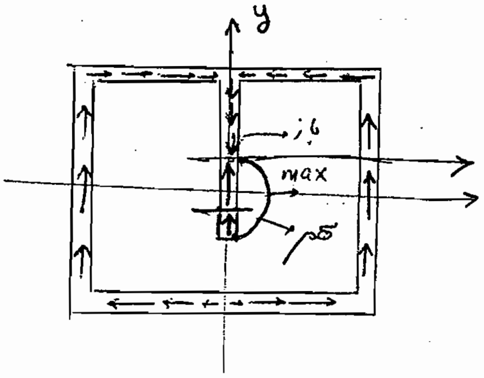
روی محور تقارن τ صفر است

مقاطع مرکب از بسته و باز



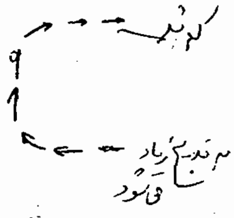
در اینجا جریان باز صادق صادق است با یک مقطع

با دو مقطع می‌زنیم با یک مقطع نسبت به محور تقارن Q آن را حساب می‌کنیم.

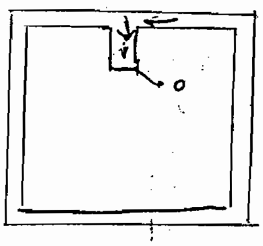


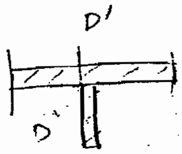
صفر ← نسبت به پایین مقطع متقارن است نیز

برای تعیین جهت می‌توان تجسم کرد که نسبت به محور z ها اگر از دورترین نقاط شروع کنیم شرط شکل جریان یک رود است که از دورترین نقاط جریان به تدریج زیاد می‌شود تا اینکه در انتهای جریان به تدریج مصرف و به صفر می‌رسد.



در مقطع‌های قائم همیشه نمودار τ سهمی می‌شود اگر با محور z تقاطع داشته باشد.





برای محاسبه Q_E یا Q_F باید مقطع T شکل مساحت آن را بیابیم :

$$Q_{zE} = Q_{zF} = \frac{1}{2}\left(1\times 20\times 3/75 + 19\times 1\times 14/25\right) = 172/87$$

$$* \quad \tau_E = \tau_F = 3/443 \times 172/87 = 595/19 \ \frac{kg}{cm^2}$$

$$Q_a = Q_F + (1\times 1\times 14/25) = 172/87 + 14/25 = 187/12$$

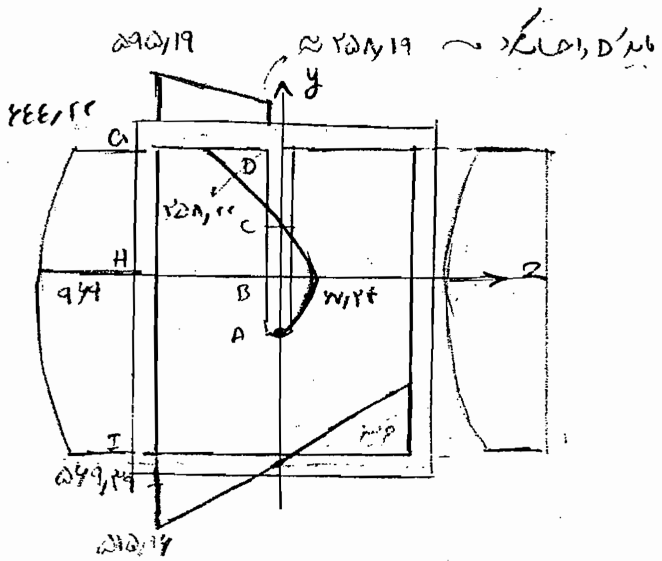
$$* \quad \tau_a = 3/443 \times 187/12 = 644/25 \ \frac{kg}{cm^2}$$

$$* \quad \tau_H = 3/443 \times (Q_a + \underbrace{Q_{aH}}_{\text{اشغال محور طار}}) = 3/443 \times \left[(187/12\times 1) + (13/75)\left(\frac{13/75}{2}\right)\right]$$

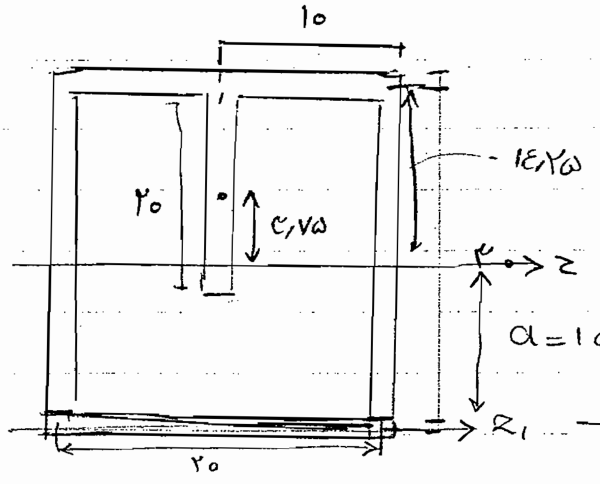
$$= 969/73 \ kg/cm^2$$

$$* \quad \tau_I = 3/443\,(10/5\times 1\times 15/75) = 569/39 \ kg/cm^2$$

$$* \quad \tau_J = 3/443\,(9/5\times 1\times 15/75) = 515/16 \ kg/cm^2$$



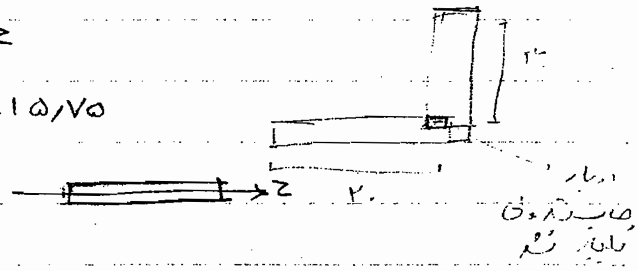
۹۴۷۷/۱۲۵



مثال ۵ توزیع تنش برشی در مقطع؟

$t = 1\ cm$

$V = 50\ t$



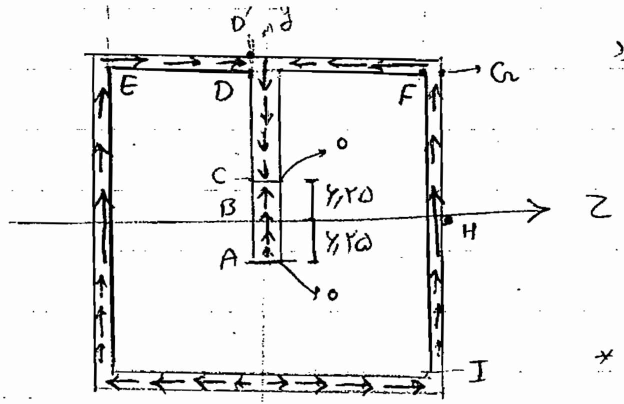
اول باید محور z تعیین شود:

$$* \quad a = \frac{2\times(29\times1)\times15 + (21\times30) + (20\times1\times19.5)}{2\times30 + 2\times20 + 20} = 15.75\ cm$$

$$* \quad I_z = \underbrace{\frac{21\times1^3}{12} + (21\times1)(15.75)^2}_{\text{پایین}} + \underbrace{\frac{21\times1^3}{12} + (21\times1)(14.25)^2}_{\text{بالای}} + \underbrace{2\left[\frac{1\times29^3}{12} + (1\times29\times0.75)^2\right]}_{\text{دیواره‌ها}} + \frac{(1\times20^3)}{12} + (1\times20)(3.75)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{I_z = 14520\ cm^4}$$

شکل‌های پایین را می‌بینید
جهت نظر کرد چون نامتقارن بود



در ۶/۲۵ بالا و پایین τ صفر می‌شود
چون تقارن دارد

$* \quad \tau_A = 0$

$$* \quad \tau = \frac{VQ_z}{I_z\, t} = \frac{50000\, Q_z}{14520\, (t=1)} = 3.443\, Q_z$$

$$q = \tau t = \frac{VQ_z}{I_z}$$

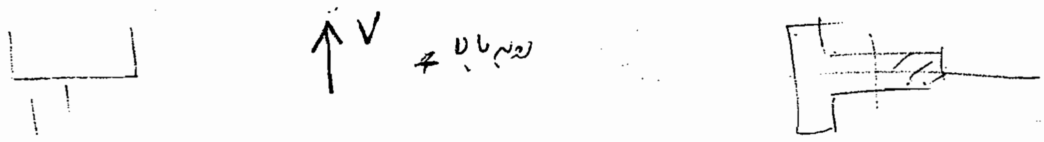
اگر t متغیر باشد؛ باید q شار برش را تعیین کنیم که داریم
در این مثال t ثابت بود

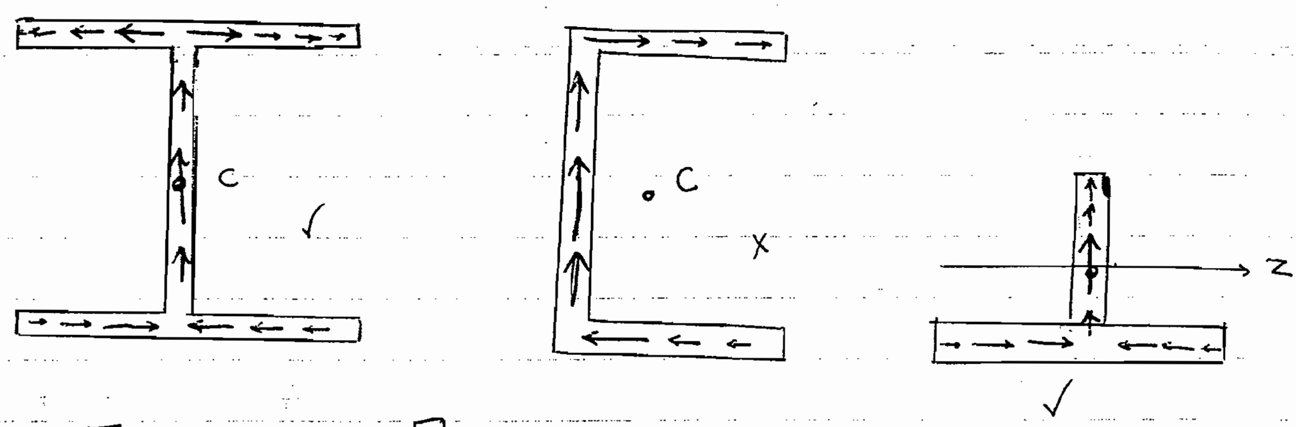
$$* \quad \tau_B = 3.443\,(1\times6.25)\left(\frac{6.25}{2}\right) = 67.44\ \frac{kg}{cm^2}$$

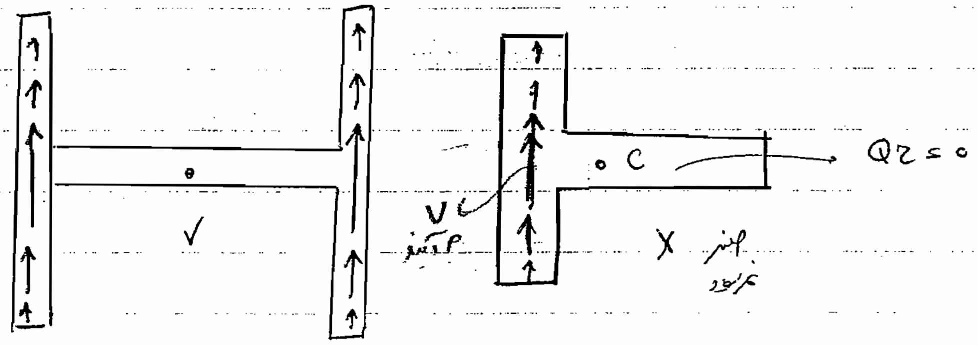
$$* \quad \tau_C = 0$$

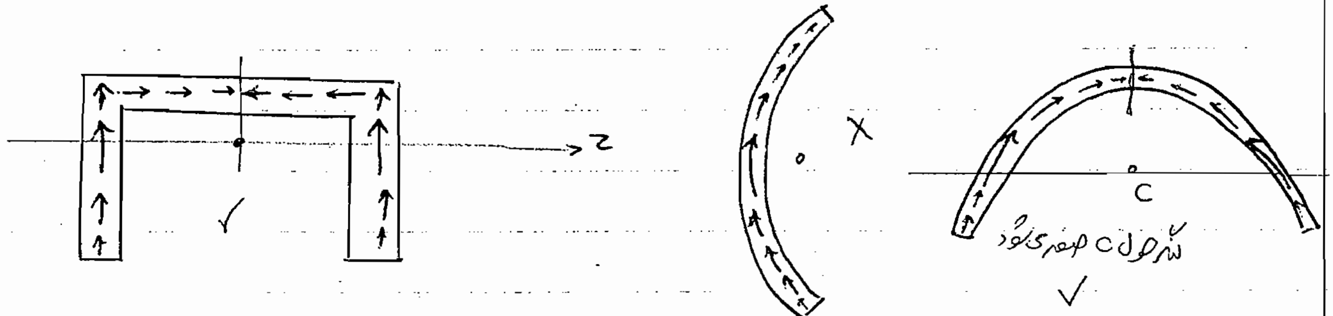
$$* \quad \tau_D = 3.44\times(1\times20)(3.75) = 258.22\ \frac{kg}{cm^2}$$

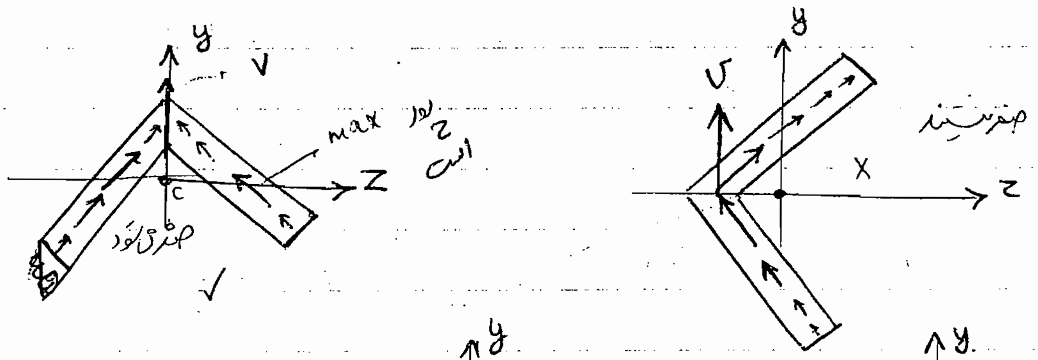
86



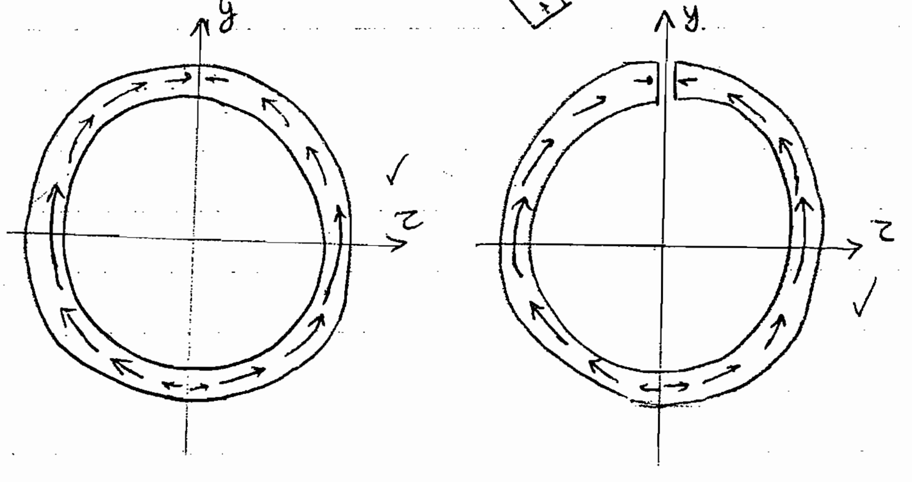




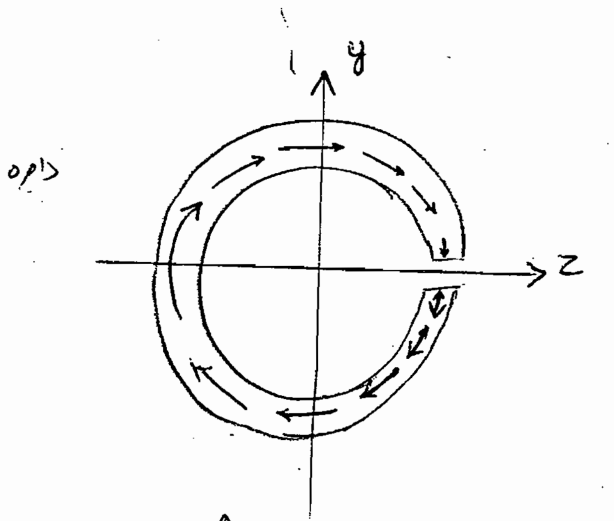


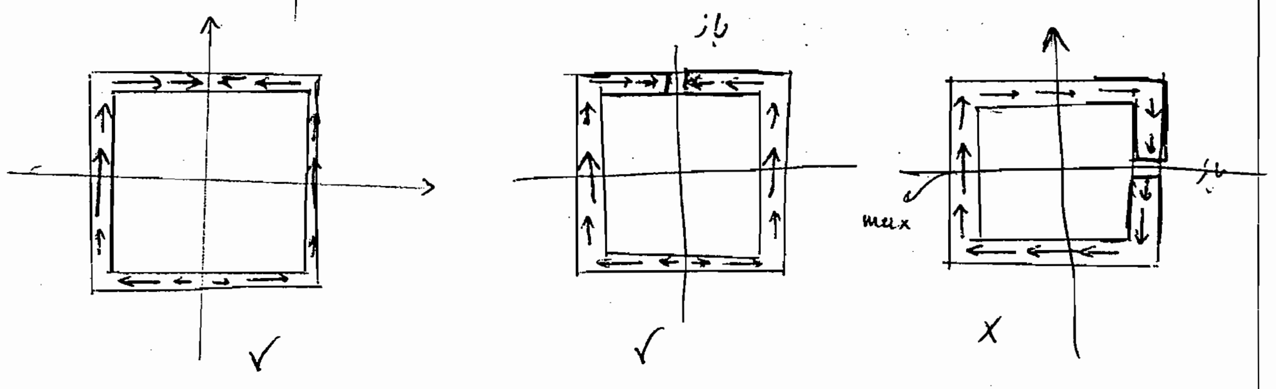


از جمله جدار نازک‌ها:
جایی که جدار نازک است
τ صفر است.



چون محل اندازه‌گیری q
در جدار نازک باز دقیقاً جایی
است که τ صفر شود
پس خود را یکی شد





اشکالی که لنگر آنها حول مرکز سطح صفر می‌شود محور پیچش آنها محور تقارن است ؛

در غیر این صورت بقیه اشکال دارای یک لنگری نسبت به محور c یعنی محور a گذرنده از مرکز سطح هستند

یعنی یک لنگر پیچشی دارند ؛

برآیند نیرو در حالت کلی همه اشکال بالا V است ؛

شارهای یک بار گذارده در سطح اند :

در هر مقطعی اگر برآیند همه نیروهای وارد بر سطح را حساب کنیم همان V خواهد بود لنگر را نسبت به c می‌گیریم

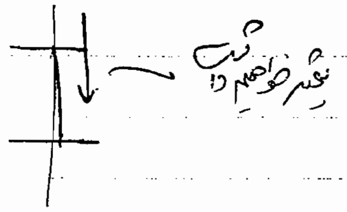
V را در جایی قرار می‌دهیم که همان لنگر را نسبت به c ایجاد کند ؛

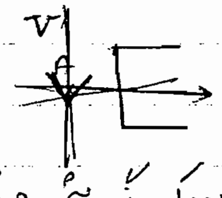
* $M_t = Ve$

فاصله V از مرکز سطح

اگر نیروی برشی هم در مقطع متقارن چه در نا متقارن اگر نیروی برشی از نقطه مورد نظر عبور نکند چه باید بکنیم

در این صورت یک پیچش اضافی در مقطع ایجاد می شود





در اینجا نیروی V باید از A بگذرد ولی نمی گذرد

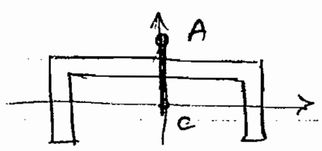
در حالت دیگری می افتد که باعث ایجاد یک گشتاور پیچشی می شود

مرکز برش — shear centre ✓ این عبارت بیشتر بکار می رود

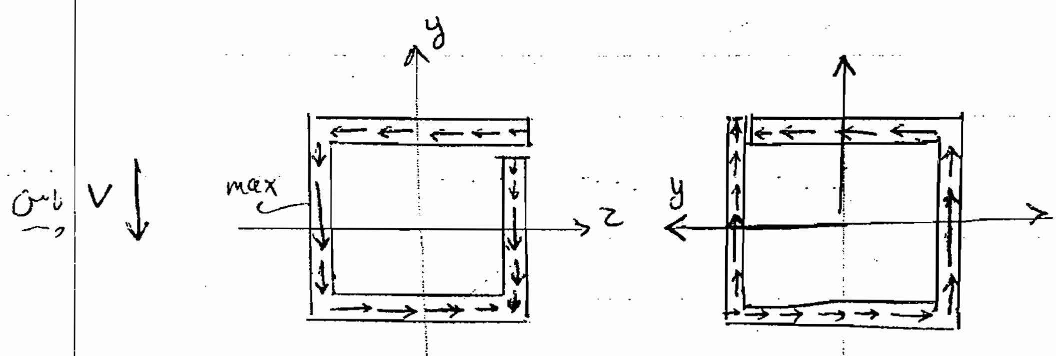
یا مرکز پیچش — centre of twist

تنش های برشی را در مقطع تعیین کردیم مرکز آن را حساب کردیم که اگر مقطع متقارن نباشد هر آنچه از نقطه ای می گذرد که به آن مرکز برش گویند در مقطع متقارن همان C است

نیروی برشی نسبت به نقطه مرکز گشتاور پیچشی تولید نمی کند اما اگر از مرکز برش نگذرد پیچش اضافه داریم.



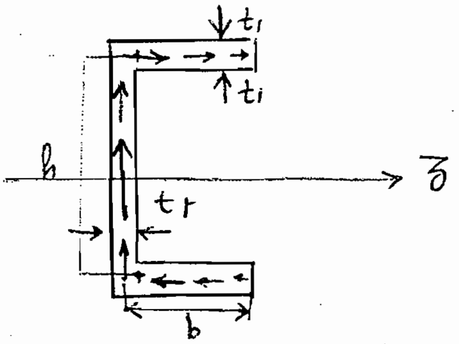
در یک شکل کلی برای محاسبه مرکز برش باید هم نسبت به z و هم به y گشتاور بگیریم تا محل A بدست آید.



چون شکاف روی هیچ کدام از محورها نیست
هیچ کدام محور تقارن نیستند مرکز برش روی
هیچ محوری نیست

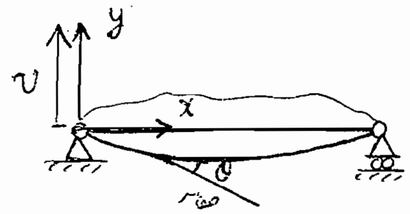
به نام خدا

علیرضا جوادیان
۸۴/۲/۳۱



* در جدارهای نازک می شود مرکز برش را تعیین کرد :

اول باید توزیع تنش های برشی را تعیین کنیم :



تغییر شکل تیر 8

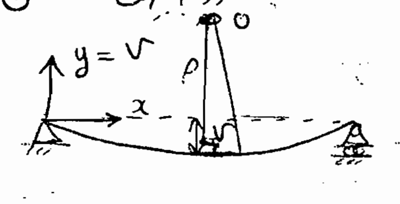
یک تیر زیر اثر بار تغییر شکل می دهد :
تیر در امتداد محور y چه تغییری می کند

محور تغییر شکل را محور v گویند :

$\xrightarrow{x}$ در امتداد تیر

$\uparrow y$ رو به بالا

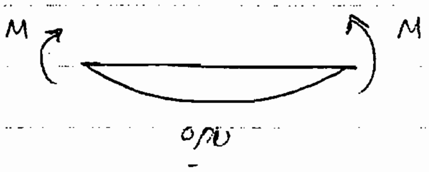
$\odot$ z رو به بیرون



* $\frac{EI}{\rho} = M$ ρ شعاع انحنای منحنی تغییر شکل تیر

* اگر M ثابت باشد ρ هم ثابت خواهد بود یعنی تیر به صورت دایره هم خواهد شد :

$(1+v'^2)^{3/2} \quad 1+\frac{3}{2}v'^2$



یعنی اگر M ثابت باشد ρ هم تغییر خواهد کرد پس
معنی دیگر دایره نخواهد بود .

فرض ما این است که تغییر شکلها کوچک است پس طول قوس با طول تیر یکی است به علت کوچکی V .

$v \rightarrow$ چون که کوچک است طول ۲ ضلع را یکی می‌گیریم .

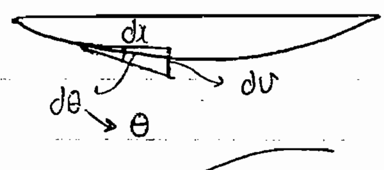
$* \; ds \approx dx$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad , \quad \frac{EI}{\rho} = M$$

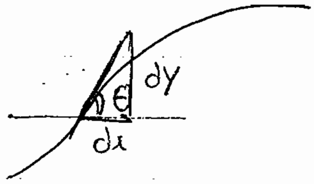
$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}}$$

$$* \quad \frac{EIv''}{(1+v'^2)^{3/2}} = M$$

حل این معادله به این شکل ساده نیست و به انتگرال‌های بیضوی منجر می‌شود چون تغییر شکلها کوچکند , $dx = ds$ داریم $\tan\theta \simeq \theta$



$$\theta \leftarrow d\theta = \frac{dv}{dx} = v'$$



چون v' کوچک است پس از v'^2 در مقابل 1 صرف‌نظر می‌کنیم

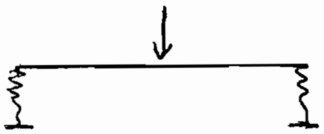
مثلاً اگر $v' = 0/1$ باشد $(1+v'^2)^{3/2} = 1/015$
یعنی خطا 0/015 است .

* پس می‌شود با یک خطای کوچک رابطه زیر را نوشت .

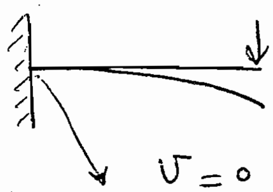
$$* \quad EIv'' = M$$

اگر تیر روی ۲ تکیه گاه باشد تغییر شکل آن یا صفر است یا معلوم است که در انتگرال‌گیری به عنوان مقدار اولیه در نظر گرفته می شود

اگر تکیه گاه فنری داشته باشیم در تکیه گاه ؛ در این صورت در تکیه گاه یک مقدار تغییر شکل به صورت تغییر مکان نقطه ناشی از نیروی فنر داریم که دیگر صفر نیست



اگر تکیه گاه گیردار داشته باشیم مقادیر اولیه به صورت زیرند

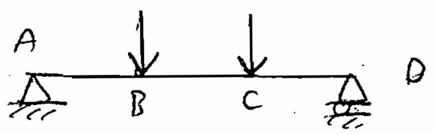


$v = 0$

$\theta = v' = 0$ ← به خاطر کوچکی

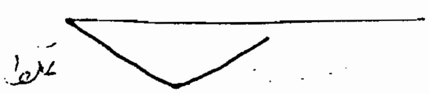
چون این نقطه قید گیردار دارد پس دوران نمی کند

* ممکن است تیر از چند بخش تشکیل شده باشد که برای هر بخش باید رابطه $EIv'' = M$ را حل کرد

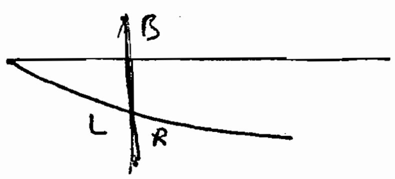


که شامل ۶ مقدار اولیه می شود ؛

برای بدست آوردن آنها باید در نقطه B منحنی تغییر شکل پیوسته باشد



چون در B ؛ نمی توان v' متفاوت داشت



$$\begin{cases} v_L = v_R \\ v'_L = v'_R \end{cases}$$

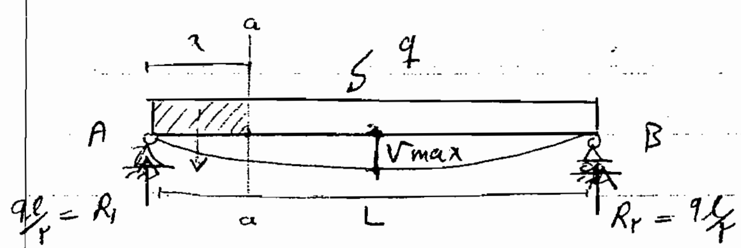
پس برای هر نقطه فصل مشترک ۲ شرط به صورت زیر می شود ایجاد کرد

n بخش باشد $n-1$ نقطه پیوستگی که هر نقطه ۲ رابطه

$2(n-1) + \underset{\text{تکیه گاه}}{2} = 2n$ معادله لازم را می شود نوشت

$2n$ = مجهول

مثال 8



حل _ $$M = \left(\frac{ql}{2}\right)x - (qx)\frac{x}{2}$$ حول مقطع aa

$$EIv'' = \frac{ql}{2}x - \left(\frac{qx^2}{2}\right)$$

$$EIv' = \frac{ql}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + A$$

$$EIv = \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + Ax + B$$

۲ ثابت اولیه داریم که باید از روی تکیه گاه ها استفاده کرد:

① در نقطه A $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow B = 0$

② در نقطه B $\Rightarrow x = l \Rightarrow v = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} + A(L) \Rightarrow A = -\frac{ql^3}{24}$$

معادله منحنی الاستیک : $$EIv = \frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 - \frac{ql^3}{24}x$$

$EIv'' = M$

M = مشتق دوم

V = مشتق ۳

q = مشتق ۴

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M$$

$$V = \frac{dM}{dx} = EI\frac{d^3v}{dx^3}$$

$$q = \frac{dV}{dx} = EI\frac{d^4v}{dx^4}$$

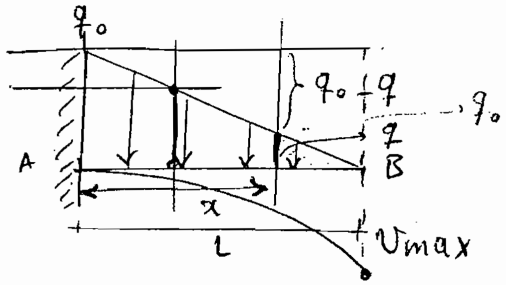
$$\theta = \frac{dv}{dx}$$

محاسبه v_{max} مثال قبل :

$$x=\frac{L}{2} \Rightarrow EIv_{max} = \frac{qL}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{q\left(L/2\right)^4}{24} - \frac{qL^3}{24}\left(L/2\right)$$

$$= -\frac{5qL^4}{384} \Rightarrow v_{max} = -\frac{5qL^4}{384EI}$$

* این v_{max} را می شود برای تیر با بار پیوسته بکار برد قابل قبول است
چون v رو به بالا را مثبت گرفتیم پس منفی می شود پس منفی نشان می دهد که تیر رو به پایین خم شده
است و گر v رو به پایین را منفی می گرفتیم رابطه می شد $EIv'' = -M$ *



مثال 8

حل - $\frac{q}{q_0} = \frac{L-x}{L}$ تشابه در مثلث کوچک یا $\frac{q_0-q}{q_0} = \frac{x}{L}$ تشابه مثلث بالایی

$$q = q_0\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

* $M =$ اگر از سمت چپ برویم باید گشتاور تکیه گاه + گشتاور ناشی از بار عکس العمل A
گشتاور بار (و نقطه ای) را حساب کنیم پس از راست می رویم

$$\Rightarrow M = -\frac{q(L-x)}{2} \times \underbrace{\frac{(L-x)}{3}}$$

نقطه اثر بار مثلثی در $\frac{L}{3}$ است.

$$M = -q_0\frac{(L-x)^3}{6L}$$

$$* \quad EIv'' = -q_0 \frac{(L-x)^3}{6L}$$

انتگرال $$EIv' = +q_0 \frac{(L-x)^4}{24L} + A$$

$$* \quad EIv = \frac{-q_0 (L-x)^5}{120L} + Ax + B$$

$$v' = 0 \quad , \quad v = 0 \quad \text{در } x = 0$$

دوران ندارد ، خیز ندارد

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{-q_0 L^4}{120} + B \Rightarrow B = \frac{q_0 L^4}{120}$$

$$v' = 0 \Rightarrow \quad 0 = \frac{q_0 L^4}{24L} + A \Rightarrow A = -\frac{q_0 L^3}{24}$$

$$\Rightarrow \quad * \; EIv = \frac{-q_0 (L-x)^5}{120L} - \frac{q_0 L^3}{24} x + \frac{q_0 L^4}{120}$$

v_{max} از نظر ریاضی یعنی بلکه بزرگترین مقدار خیز تیر است
چون max تابع وقتی است که مشتق آن صفر شود.

$$* \quad x = L$$

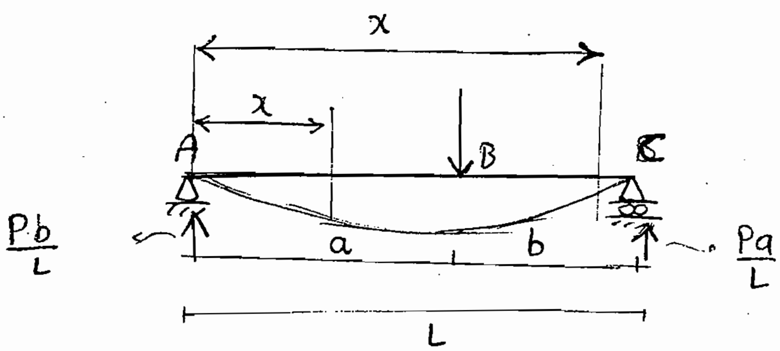
$$\Rightarrow EIv_{max} = -\frac{q_0 L^4}{24} + \frac{q_0 L^4}{120} = -\frac{q_0 L^4}{30}$$

مقدار max θ ؛
با تقسیم EI

$$* \quad x = L$$

$$\Rightarrow \quad EIv'_{max} = A = -\frac{q_0 L^3}{24}$$

مثال 8



حل -

در اینجا ۲ قسمت داریم :

$AB: \quad 0 < x < a$ $\qquad\qquad$ $BC: \quad a \leqslant x \leqslant \underbrace{b+a}_{L}$

$M = (\frac{Pb}{L})x$ $\qquad\qquad$ $M = (\frac{Pb}{L})x - P(x-a)$

$EIV'' = \frac{Pb}{L}x$ $\qquad\qquad$ $EIV'' = \frac{Pb}{L}x - P(x-a)$

$EIV' = \frac{Pb}{2L}x^2 + A_1$ $\qquad\qquad$ $EIV' = \frac{Pb}{2L}x^2 - \frac{P}{2}(x-a)^2 + A_2$

$EIV = \frac{Pb}{6L}x^3 + A_1x + B_1$ $\qquad\qquad$ $EIV = \frac{Pb}{6L}x^3 - \frac{P}{6}(x-a)^3 + A_2x + B_2$

۲ تا شرط مربوط به تکیه‌گاه‌ها است ، ۲ تا معادله با استفاده از مفصل مشترک بدست می‌آید :

شیب نمودار در نقطه B

$* \quad x = a \Rightarrow v'_L = v'_R \Rightarrow A_1 = A_2$

$x = a \Rightarrow v_L = v_R \Rightarrow B_1 = B_2$

مقدار در نقطه B

* در حالتی که ترم پرانتز $(x-a)$ را نباید باز کرد تا باید ترم را همیشه از سمت چپ بنویسیم تا بتوانیم حالات را تکرار کنیم تا حالات قبلی در مفصل مشترک بوجود آید به علاوه حالات اضافه که در مفصل مشترک باید صفر شوند.

اگر حالات عینا حالات قبلی باشد به علاوه حالاتی که در مفصل مشترک صفر شوند دیگر نیاز نیست A_1 و A_2 یا B_1 و B_2 را بدانیم می‌توانیم از اول یک مقدار بگیریم .

$* \quad x = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = B_2 = 0$

با استفاده از معادلات دوم داریم :

$x = L \Rightarrow v = 0 \Rightarrow 0 = \frac{Pb}{6}L^2 - \frac{P}{6}b^3 + A_2L$

$\Rightarrow A_2 = -\frac{Pb}{6L}(L^2 - b^2)$

$* \quad x = a \Rightarrow EIV_B = \frac{Pba^3}{6L} - \frac{Pba(L^2-b^2)}{6L} = -\frac{Pab}{6L}(-a^2 + L^2 - b^2)$

در هر دو معادله مشترک است. با استفاده از معادله یک :

* تغییر شکل نقطه B

* برای محاسبه تغییر شکل max اول مختصات AB را بررسی می‌کنیم؛

$$v' = 0 \Rightarrow \frac{Pb}{2L}x^2 - \frac{Pb}{6L}(L^2-b^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{L^2-b^2}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}} \qquad ①$$

وقتی $a<b$ یا $a\geq b$ هر دو یکی است پس روی $a\geq b$ بحث می‌کنیم؛

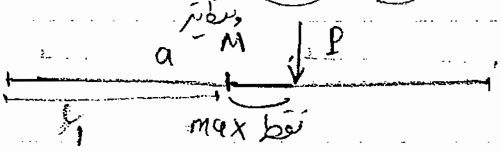
فرض $a \geq b \Rightarrow b \leq L/2 \Rightarrow x > \sqrt{\frac{L^2-(\frac{L}{2})^2}{3}} = \frac{L}{2}$

* اگر $a>b$ باشد $x > \frac{L}{2}$ خواهد بود $x > L/2$

$$x = \sqrt{\frac{(L-b)(L+b)}{3}} = \sqrt{\frac{a(L+b)}{3}}$$

$$x < \sqrt{\frac{a(2a+a)}{3}} = a \qquad \begin{matrix} L=2a \\ b=a \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{2} < x < a$$



نقطه max بین a , $L/2$ خواهد بود

با جایگذاری از ①:
$$EIv_{max} = \frac{Pb}{6L}\left(\frac{L^2-b^2}{3}\right)^{3/2} - \frac{Pb}{6L}(L^2-b^2)\left(\frac{L^2-b^2}{3}\right)^{1/2}$$

$$\text{max تغییر شکل} = \frac{Pb}{6L}(L^2-b^2)^{3/2}\left[\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \frac{-bP}{9\sqrt{3}L}(L^2-b^2)^{3/2}$$

تغییر شکل وسط

* $x = L/2$

* $EIv_M = \frac{Pb}{6}\left(\frac{L^2}{8}\right) - \frac{Pb}{6\times 2}(L^2-b^2) = \frac{Pb}{48}[L^2-4L^2+4b^2]$

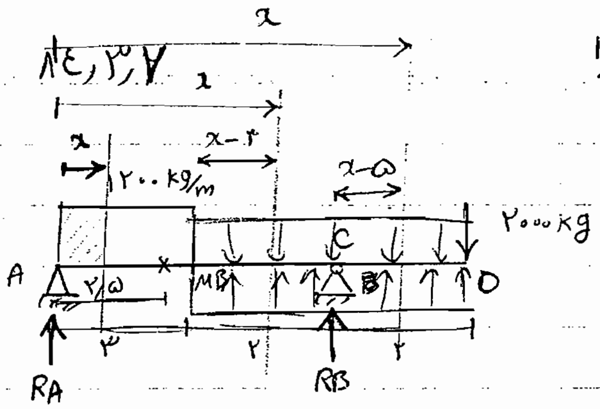
$$\Rightarrow EIv_M = -\frac{Pb}{48}[3L^2-4b^2]$$

* همیشه اختلاف بین تغییر شکل وسط و تغییر شکل max کمتر از ۲/۵ درصد است
حتی برای چندبار هم تغییر شکل وسط را به عنوان تغییر شکل max می پذیرند.

۱۴,۳,۷

به نام خدا

ج ۲۴



AB , BC , CD معادله جدا دارند

مثال: در شکل روبرو خیز مکان نقاط M وسط دهانه تیر و D انتهای آزاد را تعیین کنید

$I = 50000$

$E = 2\times 10^6$

$$* \quad \sum M_A = (1200)(3)(1.5) + (-R_B)(5) + (2000)(7) = 0$$

$$R_B = 3880 \text{ kg}$$

$$* \quad \sum F_y = (R_A) + 3880 - 1200(3) - 2000 = 0$$

$$R_A = 1720 \text{ kg}$$

AB $\quad 0 \leq x \leq 3$

$$M = (1720)x - (1200)(x)(x/2)$$

$$EIV'' = M$$

$$EIV' = 860x^2 - 200x^3 + A$$

$$EIV = \frac{860}{3}x^3 - 50x^4 + Ax + B$$

$$* \begin{cases} x=0 \\ V=0 \end{cases} \Rightarrow B = 0$$

$$\begin{cases} x=5 \\ V=0 \end{cases} \Rightarrow \text{در معادله دوم}$$

BC $\quad 3 \leq x \leq 5$

با بار رو به بالا

$$M = 1720x - 600x^2 + \frac{1200(x-3)^2}{2}$$

$$EIV'' = M$$

$$EIV' = 860x^2 - 200x^3 + 200(x-3)^3 + A$$

$$EIV = \frac{860}{3}x^3 - 50x^4 + 50(x-3)^4 + Ax + B$$

$$0 = \frac{860}{3}(5^3) - 50(625) + 50(16) + A(5) + \cancel{B}$$

$$\Rightarrow A = -1077$$

CD $\quad 5 \leq x \leq 7$

$$M = 1720x - 600x^2 + 600(x-3)^2 + 3880(x-5)$$

$$EIV'' = M$$

$$EIV' = 860x^2 - 200x^3 + 200(x-3)^3 + 1940(x-5)^2 + A$$

$$EIV = \frac{860}{3}x^3 - 50x^4 + 50(x-3)^4 + \frac{1940}{3}(x-5)^3 + Ax + B$$

برای این معادلات اگر کار آسون‌تر شود فرض می‌کنیم بار گسترده تا D ادامه دارد و یک بار گسترده رو به بالا هم اعمال می‌کنیم.

$$M \Rightarrow x = 2.5 \Rightarrow EIV_M = \frac{860}{3}(2.5)^3 - 50(2.5)^4 - 1077(2.5) = -166$$

$$* \quad EI = 2\times 10^6 \times 50000 \text{ kg cm}^2 = 10^6 \text{ kg.m}^2$$

$$* \quad v_M = -0.166 \text{ mm}$$

$x = 7$ معادله سوم $\Rightarrow EIV_D = \frac{860}{3}(7)^3 - 50(7^4) + 50(4^4) + \frac{1940}{3} \times 8 - 10772 \times 7$

$EIV_D = -11289 \Rightarrow V_D = -11/29\ mm$

اشکال این روش این است که مجبوریم برای قسمت های مختلف یک معادله بنویسیم با استفاده از قرارداد که ماکالی پیشنهاد کرد می توان این معادلات را به حداقل رساند

ماکالی

تابعی جدید به صورت $\langle x-a \rangle^n$ تعریف می کنیم :

اگر $x < a$ صفر

اگر $x > a$ $(x-a)^n$

در مثال قبل : می توان معادله سوم را برای همه نقاط تیر بکار برد

چون در $x < 3$ جملات $(x-3)^n$ حذف می شوند

$$* \quad EIV'' = 1720x - 900x^2 + 900\underbrace{\langle x-3 \rangle^2}_{\text{ماکالی}} + 3880\underbrace{\langle x-5 \rangle}_{\text{ماکالی}}$$

صفر $\Leftarrow x < 3$

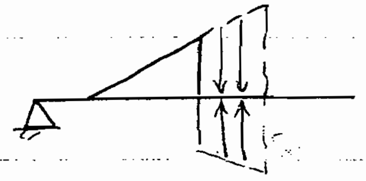
$(x-3)^2 \Leftarrow x > 3$

$*$ تابع اولیه ماکالی : $\frac{1}{n+1}\langle x-a \rangle^{n+1}$

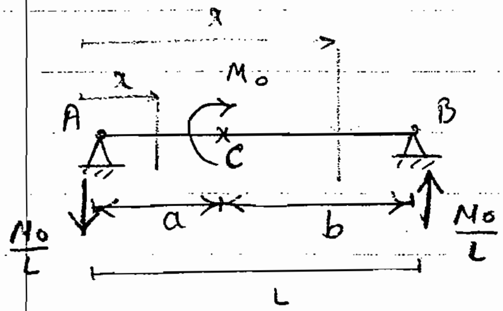
پس از بدست آمدن EIV شرایط مرزی را می نویسیم
اول از همه عکس العمل ها را می نویسیم

$\begin{cases} x = 0 \\ V = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 5 \\ V = 0 \end{cases}$

جمله $\langle x-۳\rangle^{۴}$ و $\langle x-۵\rangle^{۳}$ به ازای $x=۲/۵$ صفر می‌شوند
در $x=۷$ همه جملات حساب می‌شوند



* نیروی بار مثلثی هم برای این که معادلات تکرار شوند بار را ادامه می‌دهیم ؛



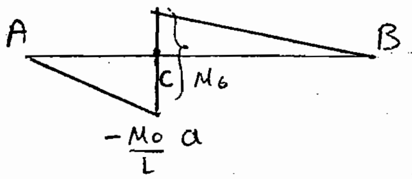
لنگر متمرکز

چون M_o در جهت مثلثاتی است پس نیروی B و A باید در جهت عکس باشند ؛ تا با هم باید کوپل نیرو باشند.

* $M = -\frac{M_o}{L}x \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$

* $M = -\frac{M_o}{L}x + M_o \qquad a \leqslant x \leqslant L$

برای این که جملات تکرار شوند و در شروع هم صفر باشد M را می‌نویسیم



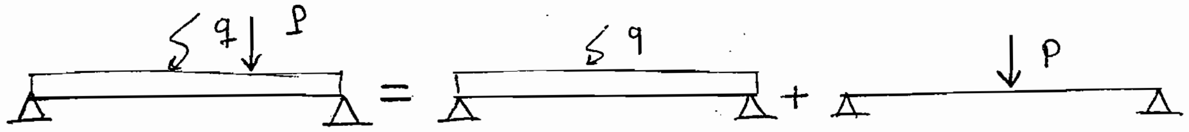
* $M = -\frac{M_o}{L}x + M_o\langle x-a\rangle^0$

برای هر ۲ قسمت درست است

* تابع اولیه .. + $M_o\langle x-a\rangle^1$

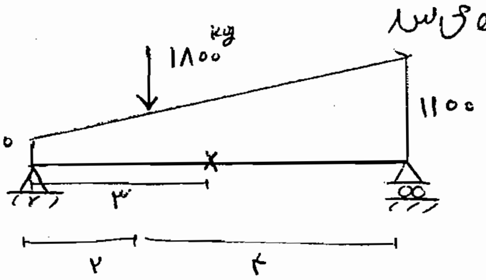
.. + $\frac{M_o}{2}\langle x-a\rangle^2$

روش جمع آثرها 8 Superposition



در این روش حالتهای ساده بارگذاری را از جداول استفاده می کنند

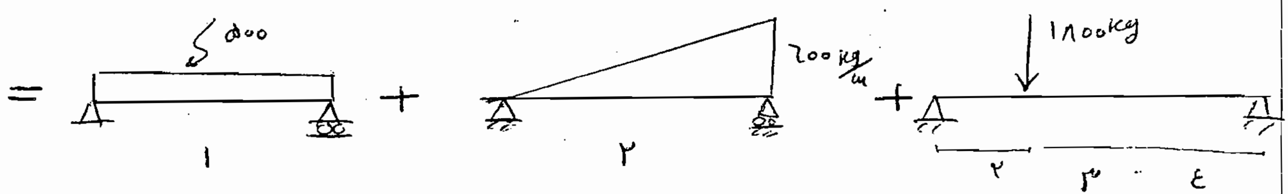
مثال 8



EI 10^6 kgm²

10^{10} kg cm²

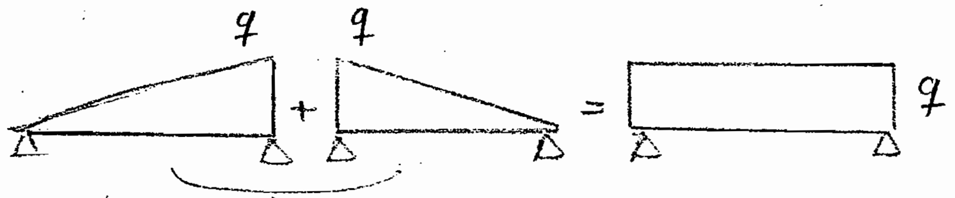
تغییر مکان وسط تیر را بیابید؟



* تغییر مکان هر ۳ را با هم جمع کنیم تغییر مکان وسط تیر را بیابید؟

$$v_{1M} = \frac{5qL^4}{384EI} = \frac{5(500)(6^4)}{384\times10^6} = 8.4375\times10$$

برای ②

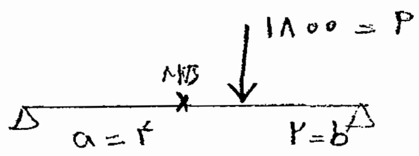


تغییر مکان وسط این دو با هم برابر است

پس تغییر مکان هر یک نصف تغییر مکان v_M است

$$v_{2M} = \frac{5q_2L^4}{768EI} = \frac{5(600)(6^4)}{768\times10^6}$$

③

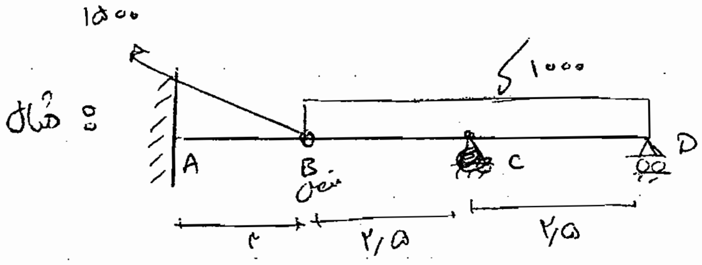


$$a \geq b \Rightarrow v_{3M} = \frac{Pb(3L^2-4b^2)}{48EI}$$

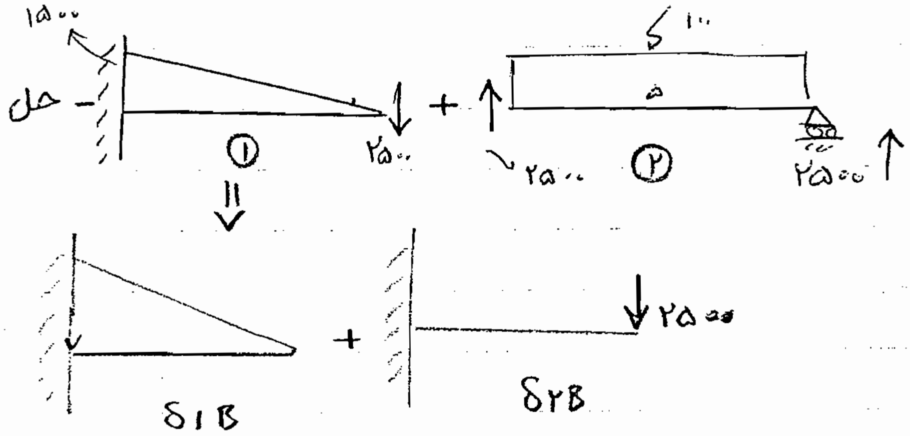
$$= \frac{1800\times2\times(3(36)-4(4))}{48\times10^6}$$

$v_M =$ mm $\longrightarrow \Rightarrow 20.309\times10^{-3}$

مثال :

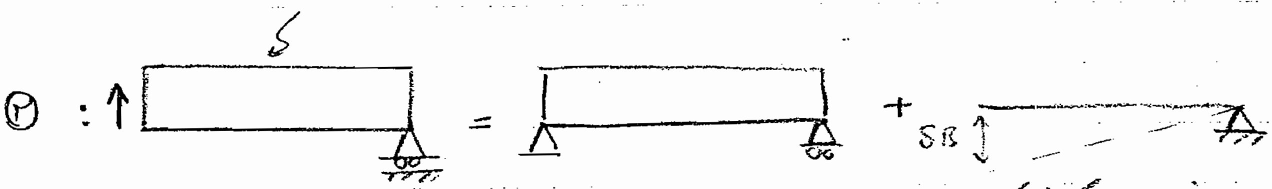


حل -



در مورد ۱ داریم

$$\delta B = \delta_{1B} + \delta_{2B}$$



فرض می‌کنیم که نیرو نداریم
ولی یک تغییر مکان داریم که
در مرحله قبل بدست آمد
از روی این شکل تغییر مکان
تمام نقاط بدست می‌آید.

پیچ ها $\tau_w \geq \frac{V}{A}$

سمت چپ : $1200 \geq \frac{F/10}{(/8)^2\pi} \Rightarrow F \leq ۲۴۱۳۰$

سمت راست : $1200 \geq \frac{F/6}{(1)^2\pi} \Rightarrow F \leq ۲۲۶۲۰$

پارگی :

Ⓐ ورق $1800 \geq \frac{F/5}{/8 \times 1/6} \Rightarrow F \leq 11520$

Ⓑ ورق $1800 \geq \frac{F/3}{/8 \times 2} \Rightarrow F \leq 8640$

ضخامت ورق

سمت چپ D,C : $1800 \geq \frac{F/10}{/6 \times 1/6} \Rightarrow F \leq$

سمت راست D,C $1800 \geq \frac{F/6}{/6 \times 2}$

$\Rightarrow F_w = 8640$ kg

معلوم می شود که ضعف از پارگی است ؛
به طور کلی هر چه قطر پیچ را بزرگتر کنیم ، تعداد کمتر ، قطر زیاد هم باعث می شود که پارگی
و ضعف خطر ناکتری پیدا کند در حالیکه نیرو ... قطر به توان ۲

بهتر است تعداد پیچ ها را زیاد و قطر را کم کنیم ، تا پارگی بیشتر شود ؛

اشکال این اتصال این است که سطح پیچ ها کم است ؛

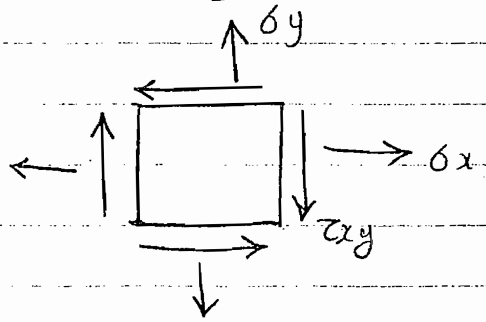
آنالیز تنش در ۳ مورد صورت گرفت :

تنش ناشی از بار محوری
تنش دو محوری
برش خالص

حال به بررسی تنش مسطح می پردازیم :

تنش مسطح

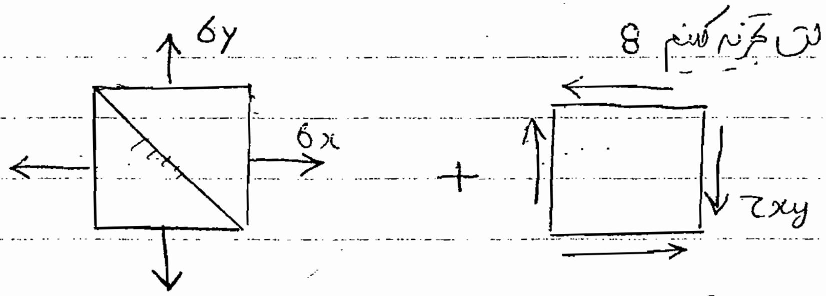
حالتی از تنش است که مؤلفه های تنش در امتداد دو محور هستند تنش هایی که در امتداد سوم هستند صفر می شوند :



σx , σy , $\tau xy = -\tau yx$

$\sigma z = 0$
$\tau xz = -\tau zx = 0$
$\tau yz = -\tau zy = 0$

می توانیم تنش مسطح را به دو حالت تجزیه کنیم :



تنش دو محوری برش خالص

برش خالص

$\varepsilon_x = 0$

$\varepsilon_y = 0$

$\varepsilon_z = 0$

$\gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G}$ *

$\gamma_{yz} = 0$ *

$\gamma_{zx} = 0$ *

تنش دو محوری

$\varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$

$\varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$

$\varepsilon_z = -\dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$

$\gamma_{xy} = 0$

$\gamma_{xz} = 0$ نیز از دید محض نمی‌شود

$\gamma_{zx} = 0$

$\gamma_{xy} = 0$

پس در تنش سطح داریم 8

تنش سطح

$\varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$

$\varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$

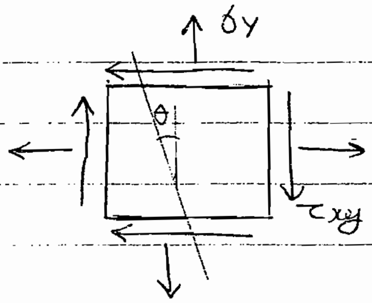
$\varepsilon_z = -\dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$

همه این روابط مربوط به
قسمت خطی منحنی تنش-کرنش است.

$\gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G}$

$\gamma_{yz} = 0$

$\gamma_{zx} = 0$



در این حالت باز هم به دو صورت تجزیه می کنیم :

برش خالص

$$\sigma_\theta = -\tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \tau_{xy} \cos 2\theta$$

تنش دو محوری

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow$$

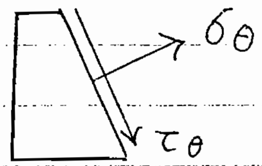
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} \sin 2\theta$$

تنش مسطح

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x \mp \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$



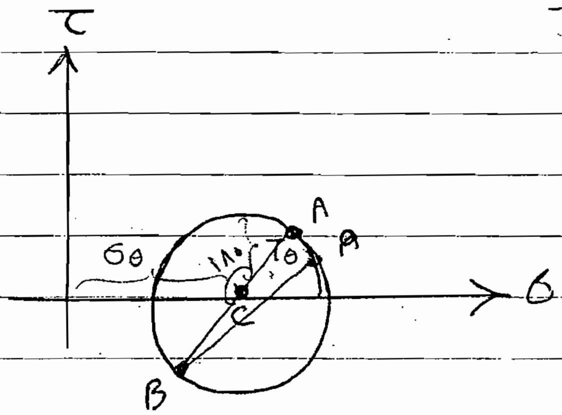
در سطوح خارجی اگر نیروی خارجی وارد نشود تنش مسطح داریم

$$* \quad \left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

این رابطه مستقل از θ است ، در واقع معادله یک دایره است .

$$* \quad (X-\alpha)^2 + Y^2 = R^2$$

پس تنش ها طوری تغییر می کنند که در معادله یک دایره صادق اند 8



مرکز دایره O $\left|\begin{array}{l}\frac{\sigma x+\sigma y}{2}\\ 0\end{array}\right.$

به این دایره دایره مور برای تنش ها Mohr's circle for stresses

مور دانشمند آلمانی است

برای رسم دایره یکبار صفحه قائم و یکبار صفحه افقی را در نظر می گیریم

در صفحه افقی $\theta = 0$ است پس یک نقطه به این صورت است $A \left| \begin{array}{l} \sigma x \\ \tau xy \end{array}\right.$

" " قائم $\theta = 90$ " " " " " " $B \left| \begin{array}{l} \sigma y \\ \tau yx = -\tau xy \end{array}\right.$

$\overline{AB}$ در واقع قطر دایره مور است چون O در وسط AB قرار می گیرد

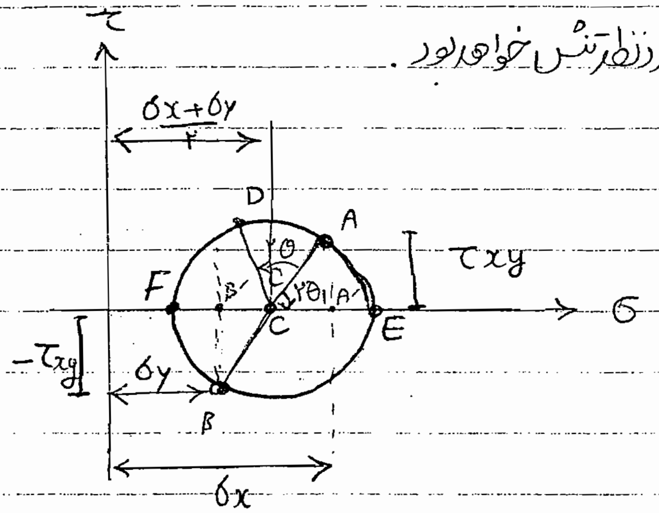
کافی AB را مشخص کرده و به قطر AB یک دایره بزنیم.

دو صفحه در المان به اندازه 90° اختلاف دارند ولی روی دایره مور به اندازه 180°

* به طور کلی اگر زاویه بین دو صفحه α باشد زاویه بین دو نقطه نظیر آنها در دایره 2α خواهد بود.

وقتی دایره مور رسم شد در یک صفحه با زاویه θ می‌خواهیم تنش‌ها را بیابیم از A در دایره مور با اندازه

2θ جدا می‌کنیم نقطه مورد نظر دارای مقادیر مورد نظر تنش خواهد بود.



E و F نقاطی هستند که σ max است و τ_θ نیز صفر است.

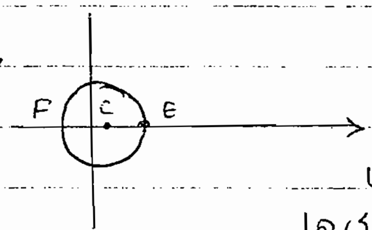
$$B'A' = \sigma x - \sigma y \quad , \quad AA' = \tau xy \Rightarrow AC^2 = CA'^2 + AA'^2 = R^2$$

$$\sigma_{max} = \overline{OC} + R = \frac{\sigma x + \sigma y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma x - \sigma y}{2}\right)^2 + \tau^2 xy}$$

$$\sigma_{min} = \overline{OC} - R = \frac{\sigma x + \sigma y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma x - \sigma y}{2}\right)^2 + \tau^2 xy}$$

تنش‌های اصلی

اگر دایره به صورت روبرو باشد



E دارای کوچکترین تنش فشاری است یعنی تنش منفی است و فشاری و کوچکترین جبری فشاری‌ها

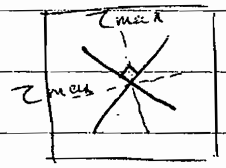
E دارای بزرگترین تنش کششی است

یا همان σ_{max} از نظر جبری؛

جهت در عقربه ساعت $\tan 2\theta_1 = \dfrac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}} = \dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$

با مشخص شدن $2\theta_1$ می توان زاویه بین صفحات را در المان یافت

این صفحات را صفحات اصلی گویند که تنش های اصلی روی آنهاست

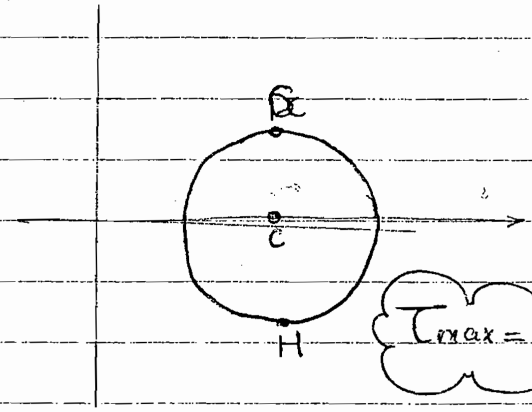


صفحات اصلی ⟶ principal planes

دو صفحه عمود بر هم اند

تنش برشی ندارند E و F

محورهای اصلی در واقع عمود بر صفحات اند یعنی در امتداد دو تنش اصلی اند : principal axes

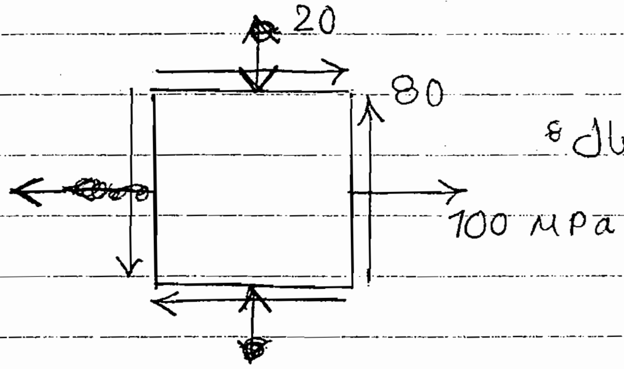


G و H در صفحاتی هستند که تنش برشی max دارند که در واقع صفحات نیمساز صفحات اصلی اند

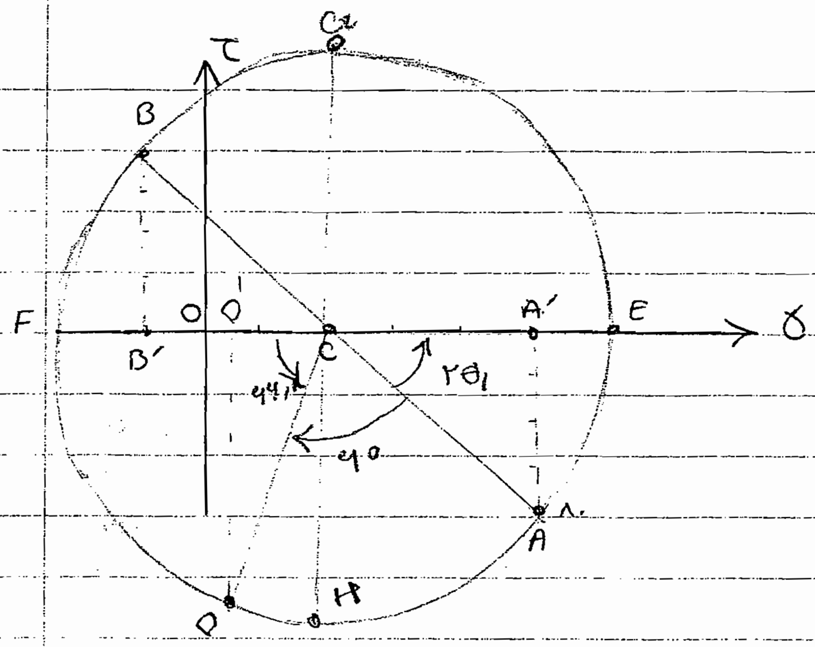
مقدار تنش برشی ماکزیمم برابر شعاع دایره است : $\tau_{max} = \pm R$

مثال :

- در نقطه ای از سازه که تنش مسطح است مولفه های تنش مطابق شکل می باشند اولاً صفحات اصلی و تنش های اصلی را بیابید؟ ثانیاً تنش برشی max و صفحاتی که دارای این تنش اند را معین کنید؟ ثالثاً تنش ها را در صفحه ای که زاویه ۳۰° با جهت عقربه ساعت با صفحه قائم می سازد بیابید؟



حل - A | $100 = \sigma_x$, $-80 = -\tau_{xy}$ B | -20 فشاری , 80 در عقربه ساعت c.w.



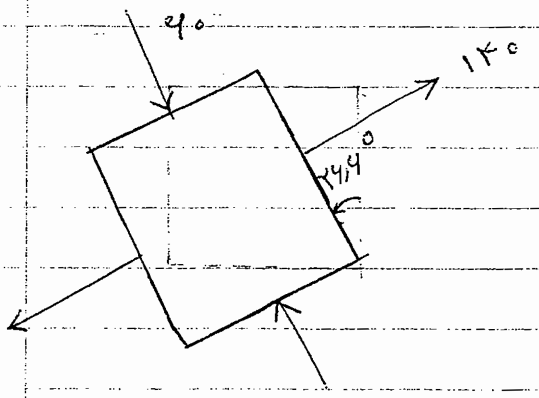
* $\overline{OA'} = 100$
* $\overline{OB'} = 20$
* $\overline{A'B'} = 120$
* $\overline{CA'} = 60$
* $R = \overline{CA} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{AA'}{CA'} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3} \Rightarrow 2\theta_1 = 53.2^\circ$$
$$\Rightarrow \theta_1 = 26.6^\circ$$

* اگر از A که در صفحه قائم است به اندازه 26.6° در جهت مثلثاتی برویم به صفحه اصلی می‌رسیم

$\overline{OE} = \overline{OC} + R = 40 + 100 = 140$ کشش

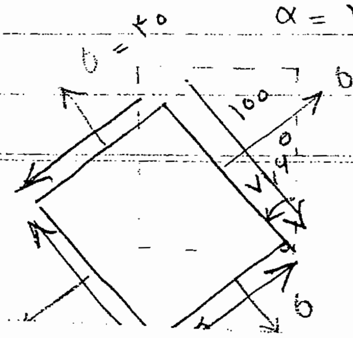
$\overline{OF} = 100 - 40 = 60$ فشار



ب) $\tau_{max} = \pm R = \pm 100$

صفحات آن نیز از صفحات اصلی اند

$\alpha = 26.6^\circ + 45^\circ = 71.6^\circ$



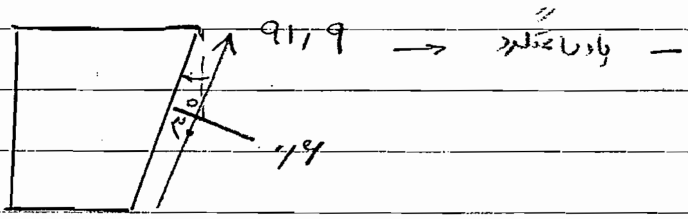
* در این حالت تنش عمودی هم داریم برخلاف حالت قبل؛
جهت τ از نقطه A در صفحه قائم
تعیین شد.

ج ۱

روی دایره از نقطه که نقطه نظیر روی صفحه قائم است
باندازه ۶۰° جدا می کنیم :

$$OD' = OC - CD' = 40 - 100\cos 66.8 = 0.6$$

$$DD' = 100\sin 66.8 = 91.9$$

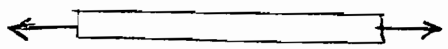


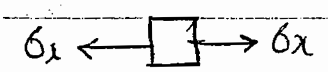
صفحه ای که به صفحه قائم نزدیکتر است تنش آن به تنش صفحه قائم نزدیکتر است
وقتی از فرمول استفاده می کنیم

در تنش برشی هم یک صفحه به قائم نزدیکتر است تنش صفحه ای که به صفحه قائم نزدیکتر است علامت تنش برشی
صفحه قائم را دارد.

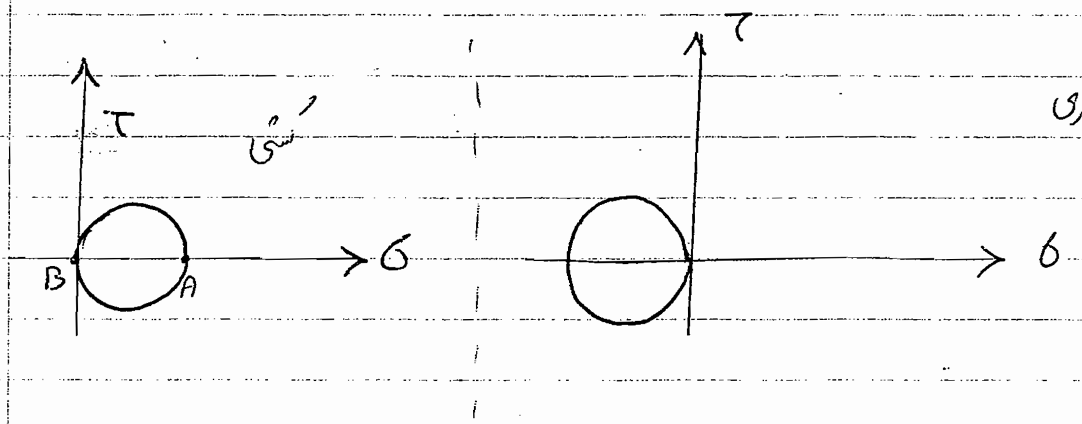
مثال ۱۲٫۲۴-۱۲ از بیر جانستون P

دایره موهر برای یک بار میله ای در یک میله :

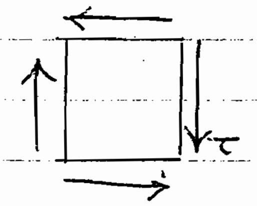




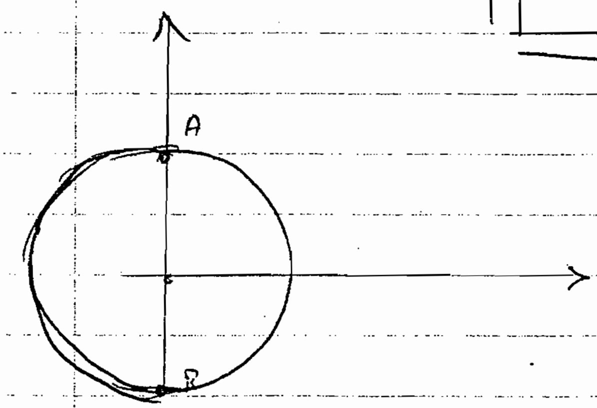
$A \mid \begin{matrix} \sigma_x \\ 0 \end{matrix}$ $B \mid \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$



دایره مور در برش خالص :



$A \mid \begin{matrix} 0 \\ \tau \end{matrix}$ $B \mid \begin{matrix} 0 \\ -\tau \end{matrix}$



$O \mid \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$

اگر مرکز دایره مور در $\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \mid$ باشد حتماً برش خالص داریم

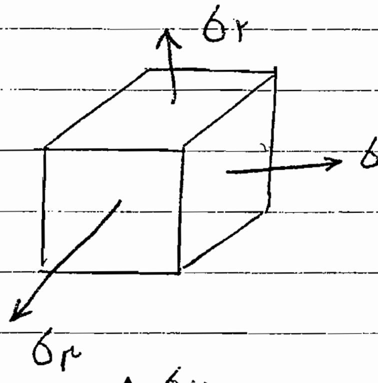
حالت کلی تنش همه مؤلفه‌ها را داریم در تنش مسطح دو صفحه عمود بر هم داشتیم که تنش های max و min روی آنها قرار داشت

در حالت کلی تنش ۳ صفحه عمود بر هم داریم که این صفحات تنش برشی ندارند و یکی بزرگترین تنش دیگری کوچکترین تنش را دارد

این صفحات را صفحات اصلی گویند ۳ صفحه اصلی داریم:

امتداد اصلی تنش با ۳ امتداد داریم: در مسطح ۲ تنش اصلی ۲ صفحه اصلی و ۲ امتداد اصلی داشتیم:

المان از ۳ سوی

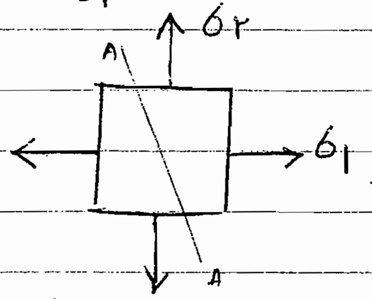


برای هر صفحه المان می توان دایره مور را رسم کرد

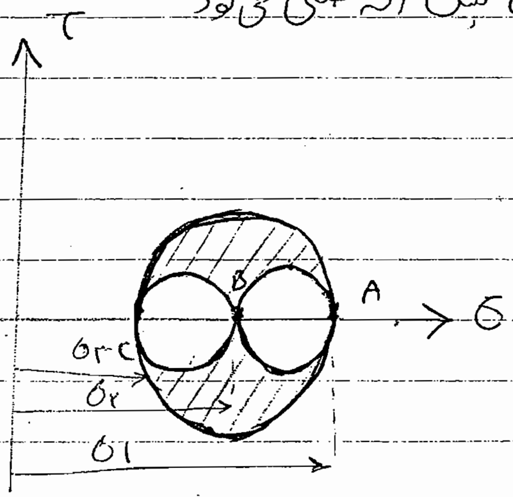
این تنش تنش مسطح نیست چون σ_3 را عمود بر صفحه داریم:

ولی این σ_3 در فرمولهایی که بدست آوردیم اثری ندارد

چون اثر آن با هم پشت صفحه خنثی می شود



$A\left|\begin{matrix}\sigma_1\\0\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}\sigma_2\\0\end{matrix}\right.$



دایره مور برای دو بعد ① و ② است

تنش های صفحه A - A روی این دایره کوچک قرار دارند.