مقاومت مصالح ۲

استاد محترم

جناب آقای دکتر جوهرزاده

علیرضا جوادیان

عمران ۸۲

نیمسال اول ـ ۸۵-۸۴

علیرضا جوادیان - عمران ۸۲

۱

مقاومت مصالح ۲ ج ۱ بنام خدا ۸۴/۶/۲۶

حل تمرین ۲ نمره

میان ترم شنبه ۱۰ دی ماه ۸ نمره

پایان ترم شنبه ۱۷ دی ماه ۱۰ نمره

مباحث مقاومت ۲

۱_ تیر با مقطع متغیر

۲_ تیر از دو یا چند جنس مثل تیر بتن آرمه

M_z , M_y

۳_ خمش و پیچش ، خمش مرکب (نیروی محوری و لنگر خمشی M و N) ، خمش دو جانبه (نسبت به ۲ محور y و z) تیر خمیده

۴_ کمانش

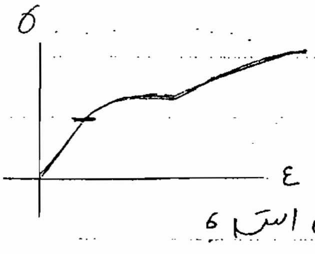
نیروی محوری تحت فشار

میله باید مستقیم بماند اما تجربه نشان می دهد اگر میله نازک باشد خم خواهد شد
از نظر ریاضی هم قابل اثبات است
کمانش یک خاصیت الاستیک است چون بعد از حذف نیرو دوباره به حالت اول برخواهد گشت.

۵_ مخازن جدار نازک

۶_ تئوری های مقاومت عامل تسلیم شدن مواد را بررسی خواهیم کرد

۷_ بار نهایی - طراحی پلاستیک سازه ها



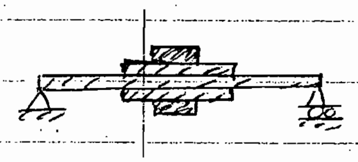
همه بحث ها در قسمت خطی منحنی σ-ε است

اما در بار نهایی وارد قسمت های دیگر خواهیم شد

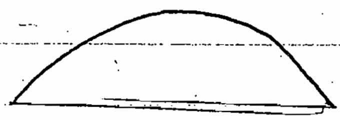
* تیر با مقطع متغیر :

چون لنگر خمشی در تیر ثابت نیست ممکن است مقطع تیر را تغییر بدهند یعنی جایی که لنگر خمشی کوچکتر است مقطع کمتر و جایی که لنگر بیشتر است مقطع بزرگتری داشته باشیم تا مصالح کمتر مصرف شود .

مثلاً در یک تیر فولادی



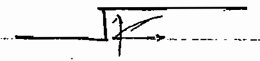
لنگر خمشی



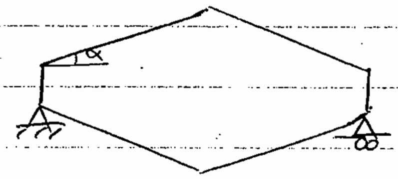
در قسمت وسط مقطع را بزرگتر می کنند

* $\sigma = \frac{-My}{I}$

طبق فرمول تنش در مقطع ملاحظه ای باید تنش ها تغییر زیادی کند اما عملاً این طور نیست



یعنی باید یک مقدار از محل تغییر مقطع دور شویم تا تنش به یک مقدار ثابتی برسد .



* در این جا مقطع پیوسته تغییر می کند
I و M هر دو دارند تغییر می کنند :

در هر مقطع $\sigma_{max} = \pm \frac{MC}{I}$; هر ۳ I, C, M متغیرند باید مشتق گیری کرد

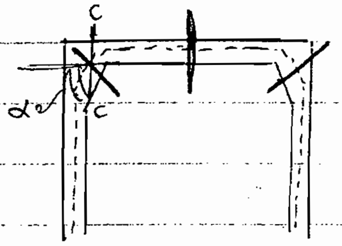
ولی در مقطع ثابت C و I ثابت بودند فقط M تغییر می کرد .

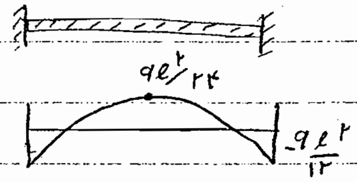
* $EI\frac{d^2v}{dx^2} = M$

در تغییر شکل این تیر I دیگر ثابت نیست

$$\Rightarrow E\frac{d^2v}{dx^2} = M/I$$

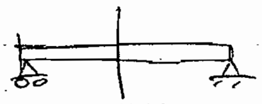
در اینجا فقط از روش انتگرال گیری استفاده می کنیم؛ بقیه روشها در تحلیل سازه مطرح می شوند.





خود تیر مطابق خط چین است
و مقطع باید عمود بر آن باشد ولی
معمولاً به صورت C-C می گیرند و
Icc را محاسبه می کنند و C را نصف
این ارتفاع می گیرند و یک مقدار خطا
ایجاد می شود ولی در تیر متقارن چون متقارن
است خطایی ایجاد نمی شود مقطع عمود بر محور
خواهد بود.

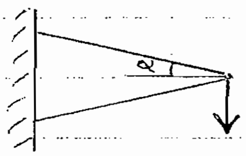
در اینجا در یک تیر بتن آرمه
در گوشه ها تنش خیلی زیاد است
برای همین ارتفاع را زیاد می کنند
از زیر آن نه از بالا.



$\frac{VQ}{Ib} \longrightarrow +$ جدار نازک

این فرمول به کلی تغییر می کند

* در تئوری ارتجاعی شکل زیر مورد مطالعه قرار گرفته است 8



α هرچه کوچکتر باشد خطای روابط $\sigma_{max} = \pm\frac{MC}{I}$ کمتر خواهد بود

تا ۵° درجه خطا حدود ~~...~~ ۰/۹۹۴

۱۰° ″ ″ ″ ۱-۲‰ (دو در هزار) ۰/۹۷۶

۲۰° ″ ″ ″ ۱۰% ۰/۹۰۶

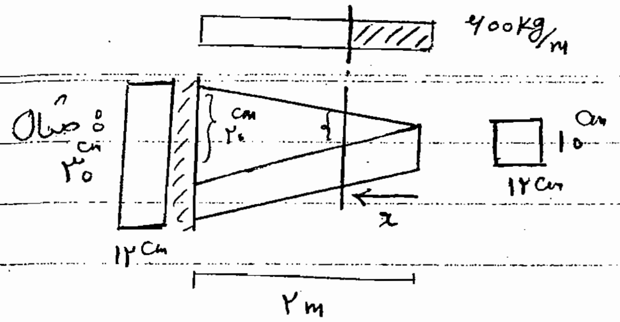
۱۵° ″ ″ ″ ۰/۹۴۶

تغییرات بیشتر از ۲۰° را نمی پذیرند که از این فرمولها استفاده کنیم

در بتن آرمه بالا چون α از یک طرف ~~...~~ اضافه می شود تا حدود ۳۵° می شود از روابط استفاده کرد

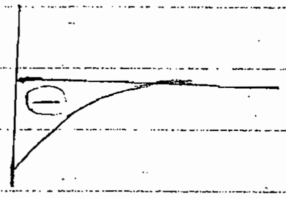
* تنشی که از فرمولها بدست می آوریم زیادتر از مقدار واقعی است پس در جهت اطمینان کار کرده ایم.
پس به نفع ضریب اطمینان

تنش max در تیر را بیابید؟



حل -

لنگر خمشی



* $M = -(600x)(x/2) = -300x^2$

لنگر max منفی * $M_{max} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow M = -1200\ kg\cdot m$

در مقطع $\sigma_{max} = \pm \frac{MC}{I} = \pm \frac{M}{W}$ → مدول مقطع

در مقطع مستطیل $W = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$

* $h^{(cm)} = 10 + (\frac{x}{200})(20) = 10 + \frac{x}{10}$

$W = \frac{(12)(10+0.1x)^2}{6} = 2(10+0.1x)^2$

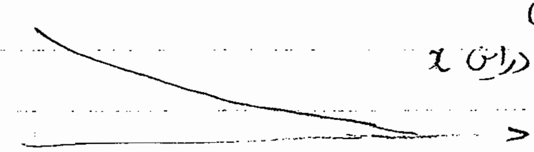
* $\sigma_{max} = \pm \frac{(-300x^2 \times 100)\ kg\,cm}{2(10+0.1x)^2}$ لنگر منفی بالا را کشش می‌کند

* $\sigma_{max} = \mp \frac{15000x^2}{(10+0.1x)^2}$

$\Rightarrow \frac{d(\sigma_{max})}{dx} = 0 \Rightarrow (10+0.1x)(20x+0.2x^2-0.2x^2) = 0$

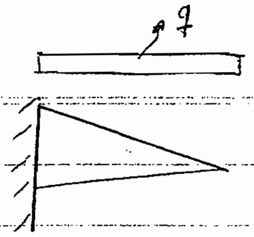
$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

پس مقدار صفری max یا min در این x اتفاق می‌افتد



* اگر ریشه معادله مثل ۱- یا ۴ درآید max جبری در این نقاط وجود دارد (حتماً) باید دو انتها چک شود

۳/



در اینجا تنش همواره ثابت است

$$M = -\frac{qx^2}{2}$$

$$W = \frac{bh^2}{6} \quad , \quad h = (h_0)\frac{x}{l}$$

$$\Rightarrow w = \frac{b\left(\frac{h_0^2 x^2}{l^2}\right)}{6} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{M}{W} = \text{یک مقدار ثابت}$$

ولی در مثال قبل چون h یک مقدار اولیه داشت σ_{max} ثابت نبود

حل قبلی

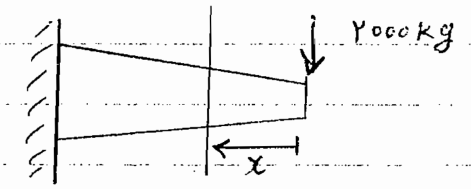
$$\Rightarrow \quad x = 0 \Rightarrow \sigma_{max} = 0$$

$$x = 2^m \text{ یا } x = 200\ cm \Rightarrow \sigma_{max} = \pm \frac{-3x^2}{2(10+0.1x)^2} \quad \text{یا} \quad \pm \frac{-300x^2 \times 100}{2(10+0.1x)^2}$$

بر حسب cm

$$* \quad x = 200^{cm} \Rightarrow \pm \frac{(-3)(4)(10^4)}{2(10+20)^2} = -66.667$$

مثال:



$$* \quad M = 2000\,x \qquad w = 2(10+0.1x)^2 \quad \Rightarrow \sigma_{max} = \pm\frac{2000x}{2(10+0.1x)^2}$$

$$\Rightarrow * \ \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial x} = 0 \Rightarrow x = 100^{cm}$$

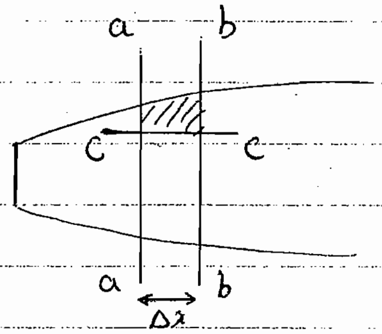
* در اینجا دقیقاً در وسط max σ_{max} بدست آمد البته باید دو انتها را کنترل کرد

اما چون می‌دانیم در $x = 0$ نیز صفر است پس این مقدار max خواهد بود.

۸۴/۷/۲ بنام خدا ج ۲

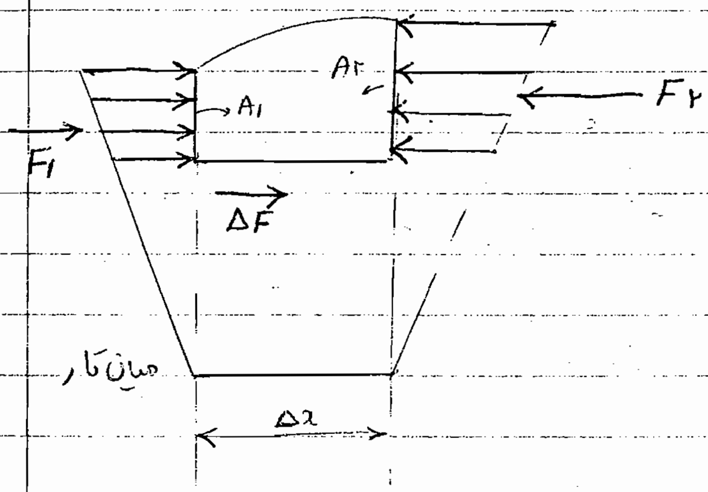
تیر با مقطع متغیر :

تنش برشی :



* موقعی که مقطع ثابت بود :

دو مقطع موازی به فاصله Δx از هم در نظر گرفتیم به علاوه یک مقطع افقی c-c و تعادل آن قسمت را نشان دادیم .



$$F_1 = \int_{A_1} \sigma_1 dA$$

$$F_2 = \int_{A_2} \sigma_2 dA$$

وقتی مقطع ثابت بود A_1 و A_2 یکی بودند :

$$* \quad \Delta F = F_2 - F_1$$

$M_1 + \Delta M$

با مقطع ثابت

$$\Delta F = \int_{A_1} \frac{M_2 y}{I} dA - \int_{A_1} \frac{M_1 y}{I} dA = \frac{1}{I}\int \Delta M y dA$$

$$= \frac{\Delta M}{I} \cdot \int_{A_1} y dA = \frac{\Delta M \cdot Q_{1z}}{I}$$

$$q = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\Delta M}{\Delta x} \cdot \frac{Q_{1z}}{I} = \frac{V Q_{1z}}{I}$$ در موارد ① داشتیم

$$* \; q = \frac{\Delta F}{\Delta x \to 0} = \frac{d}{dx} \int_{A_1} \frac{My}{I} \, dA = \frac{d}{dx} \left(\frac{M Q_{1z}}{I} \right)$$

اگر مقطع ثابت باشد $= \dfrac{V Q_{1z}}{I}$

در مقطع متغیر :

$$q = \frac{d}{dx} \left(\frac{M Q_{1z}}{I} \right)$$

$$= \frac{V Q_{1z}}{I} + \frac{M}{I} \frac{dQ_{1z}}{dx} - \frac{M Q_{1z}}{I^2} \cdot \frac{dI}{dx}$$

$$* \quad q = \frac{V Q_{1z}}{I} + \frac{M}{I} \left(\frac{dQ_{1z}}{dx} - \frac{Q_{1z}}{I} \cdot \frac{dI}{dx} \right)$$

یعنی دیگر با مقطع متغیر از همان روش استفاده نمودیم M ، I و Q تغییر می‌کنند که توانستیم شار برشی را تعیین کنیم.

تنش برشی $\tau = \dfrac{q}{b}$ شار برشی / ضخامت

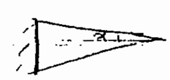
* تنش برشی در مقطع متغیر هم به نیروی برشی هم به لنگر خمشی بستگی دارد.

این رابطه یک رابطه کلی است چه جدار نازک باشد یا توپر و ... کلی است.

* خطای محاسبه σ :

$$\sigma = \beta \left(\frac{-My}{I} \right)$$

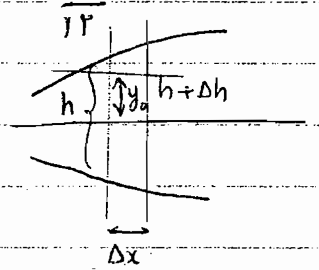
به ازای α



* خطاها مثل همان خطاهای قبلی اند یعنی روش، خطای جدیدی ایجاد نمی کند .

* مقطع مستطیل :

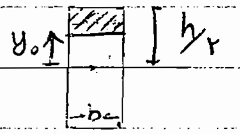
$$I = \frac{bh^3}{12}$$



دو حالت داریم وقتی الف - میان تار افقی باشد :

نسبت به b جداگانه مشتق گیری نمی شود
ولی در I تأثیر دارد

$$dI = \frac{h^3}{12}db + \frac{3bh^2}{12}dh$$



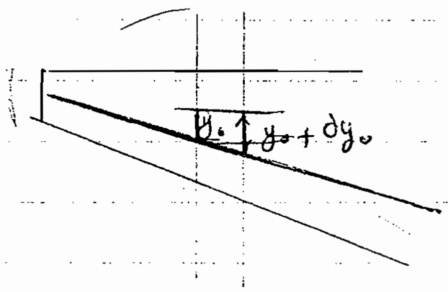
$$Q = b\left(\frac{h}{2} - y_0\right)\frac{\frac{h}{2}+y_0}{2} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right)$$

$$* \quad dQ = \frac{db}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{h\,dh}{2} - y_0^2\right)$$

db ساده می شود .

$$\boxed{\tau = \frac{VQ_z}{Ib} + \frac{Mh}{4I}\left(1 - \frac{Qh}{I}\right)\frac{dh}{dx}}$$

ب - میان تار افقی نباشد : لبه بالا افقی است

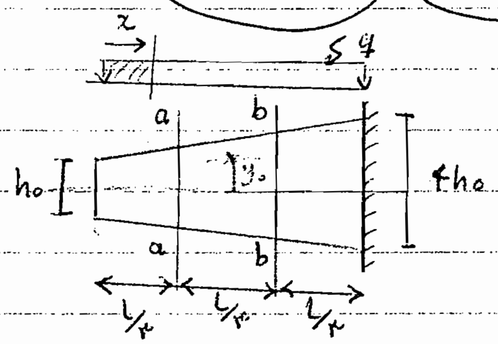


در اینجا y_0 هم تغییر می کند .

۵/

$$\boxed{\tau = \frac{VQ_{1z}}{Ib} + \frac{Mh}{4I}\left(1 - \frac{Qh}{I} - \frac{2y_0}{h}\right)\frac{dh}{dx}}$$

مثال:



حل- $V = -qx$

$M = -\frac{qx^2}{2} = V\left(\frac{x}{2}\right)$

* $h = h_0 + \frac{x}{L}(3h_0)$ خطی اضافه می‌شود:

$\frac{dh}{dx} = \frac{3h_0}{L}$

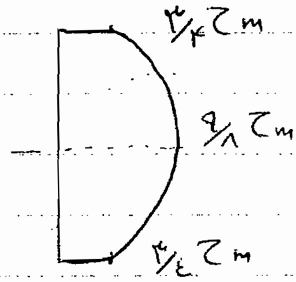
* $Q = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right)$

در مقطع a-a : $x = L/3 \Rightarrow h = 2h_0 \;,\; h_0 = h/2$

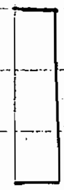
$\Rightarrow \tau_{aa} = \frac{V}{8I}\left(\frac{3h^2}{4} - y_0^2\right)$ که سهمی است:

- اگر مقطع ثابت بود τ_{aa} در بالا و پایین صفر می‌شد ولی در اینجا اگر مقادیر مربوطه را بگذاریم:

$$\begin{cases} \tau_{y_0=0} = \frac{9V}{8bh} \\ \tau_{y_0=\pm h/2} = \frac{3V}{4bh} \end{cases}$$



مقطع bb . $x = \frac{2L}{3}$, $h = 4h_0$, $h_0 = \frac{h}{4}$



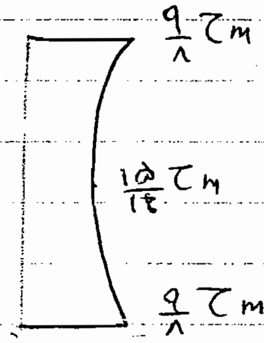
$\tau_{bb} = \frac{V}{bh}$ یعنی در این مقطع از بالا تا پایین τ ثابت است

تکیه‌گاه o : $\tau = \frac{V}{8I}\left(\frac{5h^2}{8} + \frac{y_0^2}{2}\right)$ $\frac{V}{8\frac{bh^3}{12}} \times \left(\frac{5h^2}{8}\right)$

* در اینجا علامت − به + تبدیل شده یعنی روی میان تار تنش کمترین مقدار را دارد.

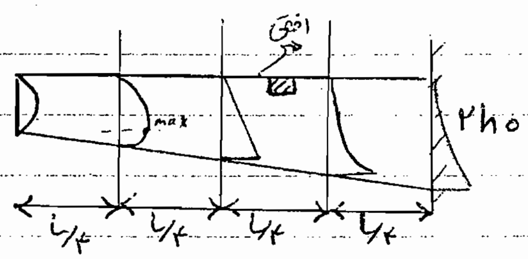
$\tau_{y_0=0} = \frac{15V}{16bh}$

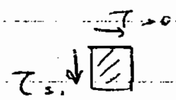
$\tau_{y_0=\pm h/2} = \frac{9V}{8bh}$



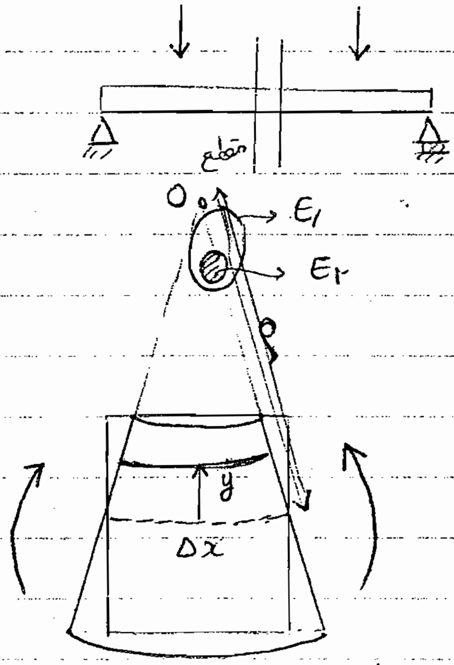
در مقطع ثابت همیشه τ_m روی میان تار قرار دارد.

مثال :





* در سطح خارجی τ صفر است؛
چون که بار افقی است. پس
در همه مقاطع تنش در بالا صفر است
* در پایین $y_0 = h/2$ است
* روی میان تار $y_0 = 0$
بنابراین معادله میان تار نیست



* تیر با دو جنس 8

با خمش خالص است با طول را کوچک می‌گیریم.

$$\text{کرنش}\ \varepsilon = -\frac{y}{\rho}$$

$\rho\, d\theta$ طول اولیه

$(y-\rho)\, d\theta$ طول ثانویه

$$\sigma = \frac{-Ey}{\rho}$$

در اینجا چون دو ماده داریم در هر نقطه داریم

$$\sigma_1 = -\frac{E_1 y}{\rho}$$ جایی که جنس اول است

$$\sigma_2 = -\frac{E_2 y}{\rho}$$

در یک جنس $\int \sigma\, dA = 0$ بود و نتیجه گرفتیم میان تار از وسط مقطع می‌گذرد.

در اینجا چون دو جنس داریم با دو انتگرال بگیریم

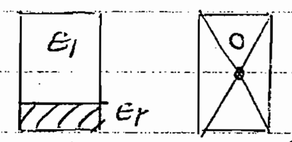
$$* \qquad \int_{A_1} \frac{-E_1 y}{\rho}\, dA + \int_{A_2} -\frac{E_2 y}{\rho}\, dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_{A_1} y\, dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} y\, dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_{A_1} y\left(\frac{E_1}{E_1} dA\right) + \int y\left(\frac{E_2}{E_1} dA\right) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{A} \left(\frac{E_i}{E_1}\right) y\, dA = 0$$ شکل مقاومت ①

* این رابطه نشان می دهد که باز هم همان تار از مرکز جسم می گذرد اما نه وسط بلکه مرکز وزن دار جسم ؟



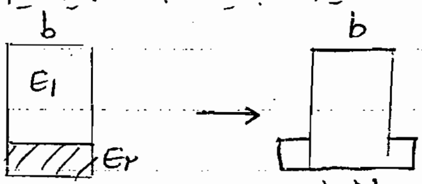
دو جنسی   یک جنسی

O مرکز جسم می شود همان وسط

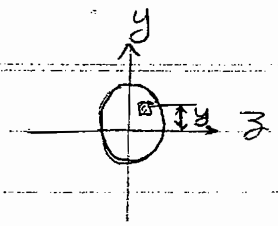
در اینجا دیگر وسط مرکز جسم نمی شود باید از روابط مرکز جسم را بدست آورد.

اگر یک ماده دو جنسی داشتیم می توان پهنا را اضافه کنیم و به یک جنس تبدیل کنیم

اگر $E_2 = \overset{1.5}{2} E_1$



یک جنسی



$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

$$\int (\sigma\, dA)\cdot y = -M$$

گشتاور نسبت به محور z

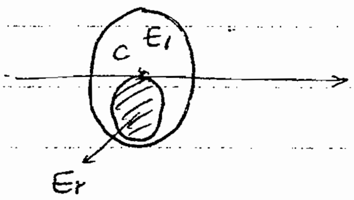
$$\Rightarrow \int_A -\frac{Ey}{\rho}\, dA \cdot y = -M$$

$$-\frac{E}{\rho}\underbrace{\int_A y^2 dA}_{I} = -M \longrightarrow \text{مقایسه با } \quad \sigma = -\frac{Ey}{\rho}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{-My}{I}$$

مقاومت !

8 در اینجا



$$* \quad \int \sigma_1 dA\, y + \int \sigma_2 dA\, y = -M$$

$$\Rightarrow \int \left(-\frac{E_1 y}{\rho}\right) y\, dA + \int \left(-\frac{E_2 y}{\rho}\right) y\, dA = -M$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_1}{\rho}\right)\int y^2 dA + \left(\frac{E_2}{\rho}\right)\int y^2 dA = M$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{\rho}\left[\int_{A_1} y^2 dA + \left(\frac{E_2}{E_1}\right)\int_{A_2} y^2 dA\right] = M$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{\rho}\left[\int \frac{E_1}{E_1} y^2 dA + \int \frac{E_2}{E_1} y^2 dA\right] = M$$

$$\frac{E_1}{\rho}\left[\int \frac{E_i}{E_1}\cdot y^2 dA\right] = M$$

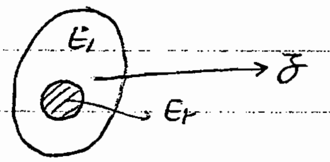
$$* \quad \sigma = \frac{-E_i y}{\rho}$$

$$* \quad \frac{E_1 I}{\rho} = M \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{-E_i M y}{E_1 I}$$

$$I = \int \frac{E_i}{E_1} y^2 dA$$

می توان اینجا هم y را تغییر نداد در عوض E ها را تغییر دهیم و به یک جنس تبدیل کنیم

تیر از دو یا چند جنس

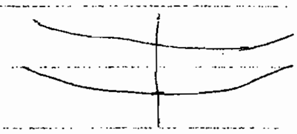


$$\bar{y}_c = \frac{\int_A y\, E_i\, dA}{\int_A E_i\, dA}$$

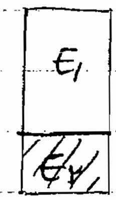
$$I_z = \int \frac{E_i}{E_1}\, y^2\, dA$$

$$\sigma = -\frac{E_i}{E_1} \cdot \frac{My}{I}$$

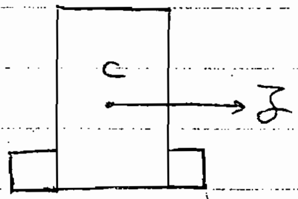
کرنش $\varepsilon = \frac{-y}{\rho}$



خم شدن تیر طوری است که کرنش در ارتفاع تیر خطی تغییر می‌کند و به جنس کار ندارد
وقتی تبدیل به تنش می‌شود چون در E ضرب می‌شود به E_i بستگی پیدا می‌کند



اگر مقطعی به این صورت باشد می‌توان به نسبت $\frac{E_2}{E_1}$ پهنای جنس دوم را زیاد کرد و یک جنس گرفت



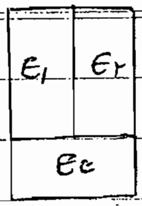
$$\bar{y}_c = \frac{\int_A y\, dA}{\int_A dA}$$

از این روش در جاهایی که متقارن است می‌شود استفاده کرد.

$$I = \int y^2\, dA$$

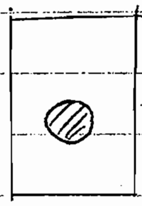
$$\sigma_1 = -\frac{My}{I}$$

$$\sigma_2 = -\frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{My}{I}$$



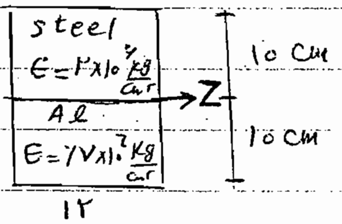
$$\bar{x}_c = \frac{\int_A x E_i \, dA}{\int_A E_i \, dA}$$

معمولاً در این مسائل محورهای اصلی خواسته نخواهد شد.



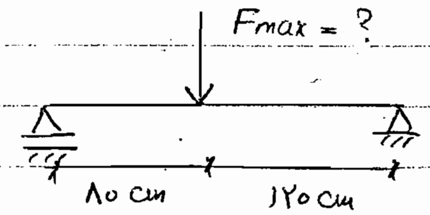
در این حالت دایره به صورت
بیضی در می آید.
بهتر است از همان روش قبلی
استفاده شود.
بیضی ای که فقط پهنای آن
تغییر می کند ارتفاع آن ثابت است

مثال:



$$\sigma_{sw} = 1500 \, kg/cm^2$$

$$\sigma_{aw} = 800 \, \frac{kg}{cm^2}$$



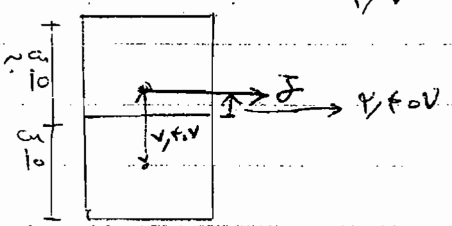
حل – اول مرکز مقطع ⇒ اول نسبت به Z مرکز را تعیین می کنیم

چون زیر محور Z بود ⊖ شد

$$\bar{Y}_c = \frac{+(2\times10^6)(12\times10)(5) - (0.7\times10^6)(12\times10)(5)}{120\times2\times10^6 + 120\times0.7\times10^6}$$

$$= \frac{6.5}{2.7} = 2.407 \text{ cm}$$

که به این شکل در می آید



$$* \quad I_J = \frac{12(10^3)}{12} + 120(7.407)^2 + \frac{2\times10^6}{0.7\times10^6}\left[\frac{12\times10^3}{12} + 120(5-2.407)^2\right] \qquad al \rightarrow E_1$$

$$I_J = 12746 \ cm^4$$

در اینجا هر دو جنس همزمان نمی‌توانند به تنش مجاز برسند.

در اینجا $\sigma \propto \frac{E_i}{E_1}$ همبستگی دارد.

فرض می‌کنم $\Rightarrow \sigma_{st} = 1500 \frac{kg}{cm^2}$

$$y = 10 - 2.407$$

تنش فشاری است با ۱۵۰۰ قرار دارد.
$$-1500 = -\frac{2\times10^6}{0.7\times10^6} \times \frac{M}{I} \times 7.593 \Rightarrow \frac{M}{I} = 69.14$$

$$\sigma_{Al} \Rightarrow \frac{M}{I} \times 12.407 = 857.85 > 800$$ غ‌ق‌ق

چون از مقدار مجاز بیشتر شد.

پس برعکس عمل می‌کنیم:

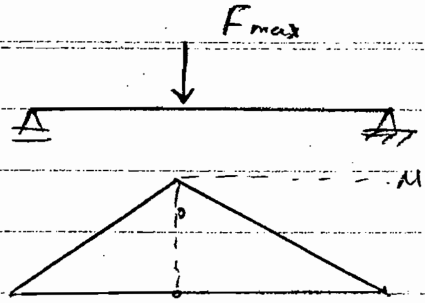
$$\begin{cases} \sigma_a = 800 \frac{kg}{cm^2} \\ \sigma_{st} = 1500 \times \frac{800}{857.85} = 1398.8 < 1500 \frac{kg}{cm^2} \end{cases}$$ قابل قبول

یا
$$\begin{cases} |\sigma_{st}| = \frac{2\times10^6}{0.7\times10^6}\frac{M}{I} \times 7.593 \leq 1500 \Rightarrow \frac{M}{I} \leq 69.14 \\ |\sigma_{al}| = \frac{M}{I} \times 12.407 \leq 800 \Rightarrow \frac{M}{I} \leq 64.47 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{I} = 64.47$$

با داشتن I ، M را حساب می‌کنیم:

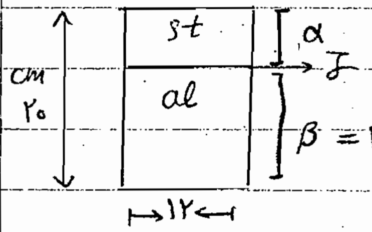
$$\Rightarrow M = 64.47 \times 12746 = 821730 \ kg\,cm$$



$$M_{max} = F_{max}\frac{ab}{L}$$

$$\frac{F_{max} \times ۸۰ \times ۱۲۰}{۲۰۰} = ۸۲۱۷۲۰ \Rightarrow \boxed{F_{max} = ۱۷۱۱۹\ kg}$$

مثال: در مسئله قبل ارتفاع مقطع فولادی و آلومینیومی را طوری تعیین کنید که تار خنثی درست در خط جدایی این دو جنس باشد سپس F_{max} را بیابید؟



$Q_{st} > 0$
$Q_{AL} < 0$

بالا ① $\quad (۱۲\alpha)(۲ \times ۱۰^۶)(\alpha/۲)$

پایین ① $\quad -(۱۲)(۲۰-\alpha)(۰/۷ \times ۱۰^۶)\left(\frac{۲۰-\alpha}{۲}\right)$

$\Rightarrow \quad Q_{\text{بالا}} + Q_{\text{پایین}} = Q_{Z}^{\text{کل}} = ۰$

$\Rightarrow \quad ۲\alpha^۲ - ۰/۷(۲۰-\alpha)^۲ = ۰$

یا $\quad \alpha^۲ = ۰/۳۵(۲۰-\alpha)^۲$

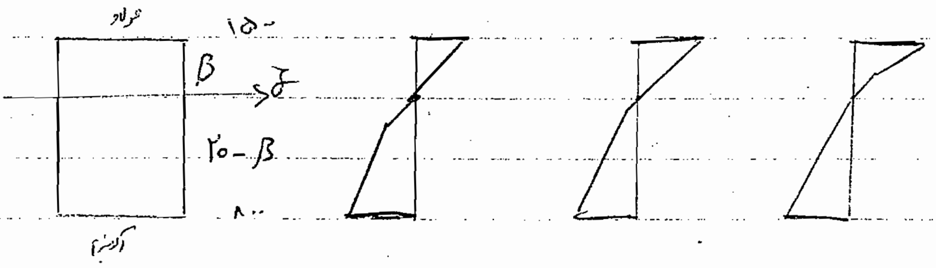
یا $\quad \pm\alpha = \sqrt{۰/۳۵}\,(۲۰-\alpha)$

α مثبت قابل قبول است

$$\begin{cases} \alpha = ۱۱/۸ - ۰/۵۹\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = ۷/۴۲} \\ -\alpha = ۱۱/۸ - ۰/۵۹\alpha \Rightarrow \alpha < ۰ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بقیه را حل کنید ؟

مثال: در مسئله قبل ضخامت α فولاد و آلومینیوم را طوری تعیین کنید که تنش ها هردو باهم به مقدار مجاز برسند



$$\begin{cases} |\sigma_{st}| = 1500 = \dfrac{M}{I}\,\beta \times \dfrac{2\times10^6}{0.7\times10^6} \\ |\sigma_{al}| = 800 = \dfrac{M}{I}\,(20-\beta) \end{cases}$$

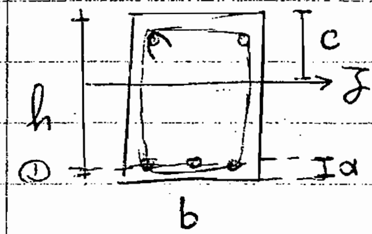
هر دو به مقدار مجاز رسیدند

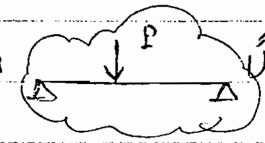
از آنجا β بدست می‌آید یعنی محل تار خنثی معلوم می‌شود.

$$\frac{15}{8} = \frac{\beta \times 2}{(20-\beta)(67)}$$

پس حل مسئله قبل یک ۵ میگیریم برای ضخامت فولاد و ① کل را نسبت به تار خنثی ای که بدست آوردیم صفر قرار می‌دهیم یعنی اول محل تار خنثی را حس کردیم بعد ممان‌ها را چون تار خنثی از اول معلوم نبود کجا بود.

* بتن آرمه 8





بتن فشار را می‌تواند تحمل کند اما کشش را نمی‌تواند تحمل. در این تیر بالا فشاری است پس بتن فشار را تحمل می‌کند اصلاً می‌شود میلگرد نگذاشت

A_s مساحت فولادهای پایینی

– در تیرهای فشاری معمولاً فولادها را در نظر نمی‌گیرند یعنی در بالا

– در تیرهای کششی یعنی پایین فقط فولاد را در محاسبه در نظر می‌گیرند

ممان بالا فشاری — ممان فولادها — ممان پایین کششی = فولاد

مدول ارتجاعی بتن را مبنا قرار دهیم

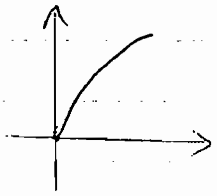
$$Q_z = bc \times E_c \cdot \frac{c}{2} - A_s E_s (h-c-\alpha) = 0$$

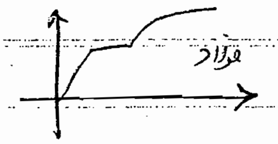
α یک مقدار بتن روی میلگردها می‌ریزند برای جلوگیری از آتش‌سوزی

$$I_z = \frac{bc^3}{3} + A_s \frac{E_s}{E_c}(h-c-\alpha)^2$$

از اثر I محور ① برای فولاد صرف نظر کردیم.

معمولاً بهتر است فولاد به تنش مجاز برسد چون اگر بتن به تنش مجاز برسد ناگهان ترک برمی‌دارد و خراب شود





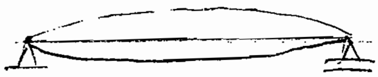
در مقطع بتنی نر باید خطی فولاد قرار داد.

در بتن دیگر این فرمولها صادق نیستند چون الان آیین نامه برای طراحی از بارهای استفاده می کند تا تیر خراب شود.
وقتی از بارهای استفاده می کنیم معلوم نیست که آیا تنش وارد قسمت غیرخطی شده باشد.

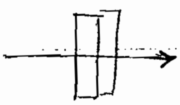
حل این قسمت حل الاستیک تیرهای بتن - آرمه است. در ستونها مقطع متقارن است یعنی فولاد بالا و پایین باهم برابر است. در تیرها این طوری است.

* تغییر درجه حرارت در دو جنس ها :

برابر تغییر حرارت چون جنس ها متفاوت است ضریب انبساط حرارتی متفاوت است

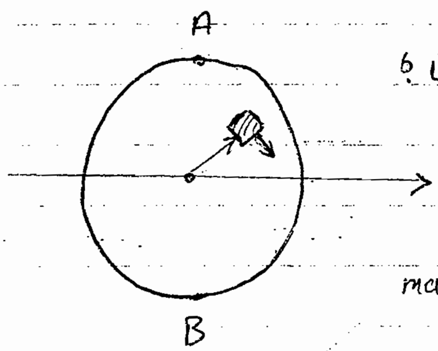


در حالت کلی خم می شوند حتی اگر باری روی آن نباشد



* می توان از دو فلز مختلف ساخته شده که به هم وصل می شوند طوری طراحی می شود که در درجه حرارت زیاد با خم شدن اتصال برقی از بین برود.

* پیچش + خمش :



ساده ترین مقطعی که هر دو را خوب تحمل می کند مقطع دایره است :

پیچش

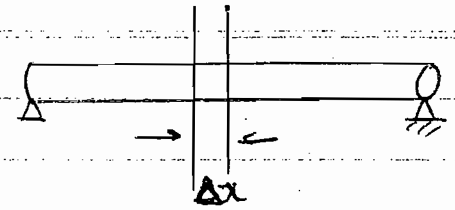
$$\tau = \frac{T\rho}{J_0}$$

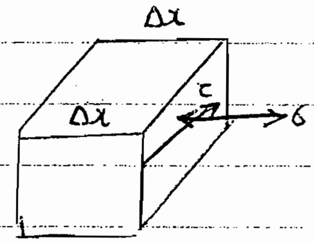
ρ فاصله افقی نسبت به مرکز دایره

* گشتاور پیچشی در تمام دور دایره تنش برشی max ایجاد می کند

* گشتاور خمشی در بالا و پایین تنش محوری max ایجاد می کند.

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$



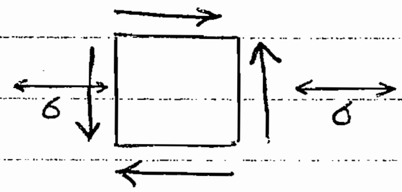


المان

تنش برشی عمود در شعاع

نقاط A و B بیشترین σ و τ را دارند

از بالا به المان نگاه کنیم



* با استفاده از آنالیز تنش تنش عمودی max و تنش برشی max را می یابیم؟

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

در اینجا می شود

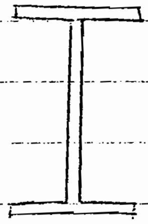
$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

تنش برشی در کل المان بیشتر شده در عین حال تنش عمودی هم بیشتر شده است؟

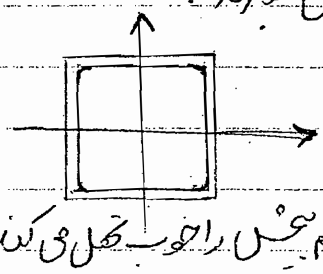
باید المانها را از A و B بگیریم که هم σ و τ بیشتر باشد.

ما پیچش را در همه‌ی مقاطع می‌توانیم حساب کنیم 8



مقطع I در مقابل پیچش ضعیف است

مقاطع بسته در مقابل پیچش بهترند ؛



این مقطع «قوطی» هم پیچش را خوب تحمل می‌کند هم خمش را .

پیچش $\tau = \frac{T}{2tA_m}$

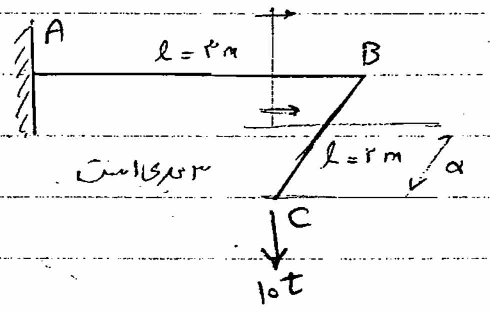
تمام المان‌هایی که در بالا هستند؛
τ همین مقدار را دارد

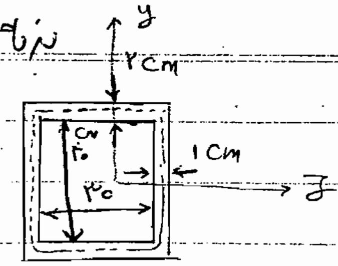
خمش $\sigma = \frac{M}{W}$

کنترل گوشه‌های داخلی الزامی است از طرفی بالا و پایین را هم باید چک کرد چون σ max است در گوشه‌های داخلی هم تنش برشی زیاد می‌شود .

۸۴/۷/۱۲ بنام خدا ج۴

مثال 8





۳ بعدی است

تنش max عمودی و برشی در تمام سازه کجاست ؟

حل –

$0 \leqslant \alpha \leqslant 2$

$$BC:\begin{cases} V_y = 10t \\ M = 10\alpha \\ T = 0 \end{cases} \qquad \text{نقطه } B:\begin{cases} V_y = 10 \\ M = 20\ tm \\ T = 0 \end{cases}$$

$0 \leqslant x \leqslant 3$

$$AB:\begin{cases} V_y = 10t \\ M = -10x \\ T = 10 \times 2 = 20 \end{cases} \qquad \text{نقطه } B\begin{cases} V_y = 10 \\ M = 0 \\ T = 20 \end{cases}$$

در تمام نقاط میله AB یکسان است.

شکل ۳ بعدی است بار ۱۰t در BC نقطه B را خم می کند در حالیکه در قسمت AB بار ۱۰t باعث پیچش نقطه B می شود.

$$A\begin{cases} V = 10 \\ M = 30 \\ T = 20 \end{cases}$$

مقطعی که در آن اثر نیروهای بیشتر است مقطع A است که از همه خطرناکتر است

$$* \underset{\text{در نوارهای بالا و پایین مقطع}}{\tau} = \frac{T}{2tA_m} = \frac{20\times10^5}{2(2)(31\times42)} = 384.\ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\text{نوار قائم } \tau = \frac{20\times10^5}{2(1)(31\times42)} = 768.\ \frac{kg}{cm^2}$$

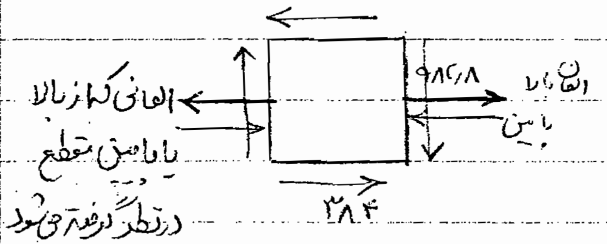
$$* \ I_z = \frac{32(44)^3}{12} - \frac{30(40)^3}{12} = 67150\ cm^4$$

$$* \ \underset{\text{در بالا و پایین مقطع}}{\sigma_1} = \pm\frac{30\times10^5\times22}{67150} = \pm 982/87\ \frac{kg}{cm^2}$$

بالا کشش - پایین فشاری

POOMAR

در تراز اتصال نوارهای افقی و قائم $\sigma_2 = \pm \dfrac{40 \times 10^5 \times 20}{67150} = \pm 894.5 \ \frac{kg}{cm^2}$

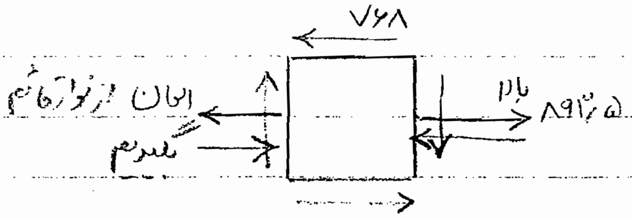


max تنش برشی $\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{982.8}{2}\right)^2 + (384)^2} = 623.6 \ kg/cm^2$

تنش‌های اصلی:

اتصال بالا بگیریم $\sigma_{1,2} = \dfrac{982.8}{2} \pm 623.6 \ \big\langle \begin{smallmatrix} 1115 \\ -132 \end{smallmatrix}$

پایین ← σ فشاری $\sigma_{1,2} = -\dfrac{982.8}{2} \pm 623.6 \ \big\langle \begin{smallmatrix} 132 \\ -1115 \end{smallmatrix}$



$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{894.5}{2}\right)^2 + (768)^2} = 888.5 \ kg/cm^2$

$\sigma_1, \sigma_2 = \dfrac{894.5}{2} \pm 888.5 \ \big\langle \begin{smallmatrix} 1335.2 \\ -441.7 \end{smallmatrix}$

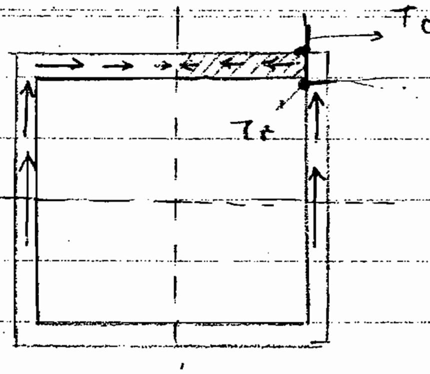
$\sigma_1, \sigma_2 = -\dfrac{894.5}{2} \pm 888.5 \ \big\langle \begin{smallmatrix} -1335.2 \\ 441.7 \end{smallmatrix}$

بیشترین برش در نوار قائم

بزرگترین کشش را در بالا داریم ۱۱۱۵

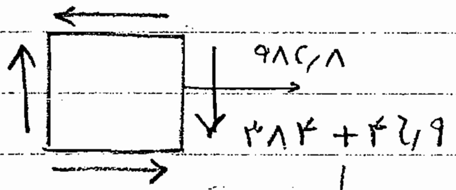
بزرگترین فشار را در پایین داریم ۱۱۱۵

تنش برشی ناشی از پیچش



$$\tau_2 = \frac{VQ}{It} = \frac{10000\,(2\times15)(21)}{67150\times 2} = 46.9\ \frac{kg}{cm^2}$$

تنش برشی لازم ناشی از پیچش در نوار بالا



در این المان اعمال قبلی را دوباره تکرار می‌کنیم

نیز τ_{max} را دوباره می‌یابیم

چرا جمع شد ؟

چون به هر حال در ۲ تا از گوشه‌ها τ ناشی از پیچش و برش

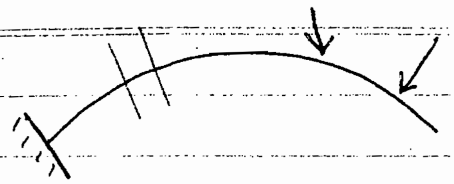
با هم هم جهت می‌شوند !

پیچش

چون تنش های برشی ناشی از پیچش همه در یک جهت اند

$$\tau_4 = \frac{10000\times(2\times16)(21)}{67150\times1} = 100.1\ \frac{kg}{cm^2}$$

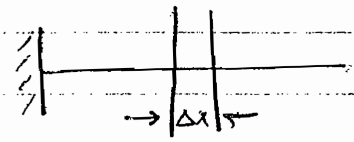
τ_4 را در المان قائم می‌گذاریم



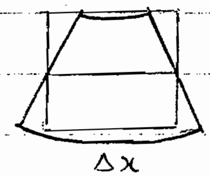
در هر مقطع اگر بخواهیم تنش های عمودی

را حساب کنیم با فرمول $\sigma = -\frac{My}{I}$

اختلاف داریم ؟

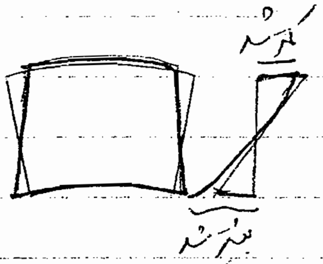


در تیر مستقیم دو مقطع به فاصله Δx می گرفتیم



ε خطی تغییر می کند $\qquad \varepsilon = -\frac{y}{\rho}$

اما در مقطع قوسی داریم که از ابتدا خود المان به حالت خمیده هست



$\varepsilon = \frac{\text{تغییر طول}}{\text{طول اولیه}}$

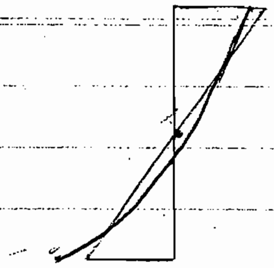
در اینجا ε دیگر خطی نخواهد بود
چون طول اولیه خودش تغییر
می کند

* خارج قوس طول های اولیه بزرگتر است پس تنش ها **کمترند** و درون قوس هم چون طول اولیه
کمتر است پس تنش بیشتر از حالت خطی است

* تنش هم به همین صورت است

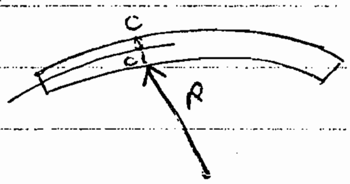
وقتی تنش خطی بود داشتیم $\qquad \int \sigma \, dA = 0$

و از آن نتیجه گرفتیم که تار خنثی در مرکز است اما در اینجا دیگر تار خنثی بر مرکز منطبق نیست



تا رخنثی پایین‌تر آمده است چون باید
جمع رو نیروی بالا و پایین باید صفر شود،
پس اندکی پایین می‌آید.

تار خنثی همیشه پایین‌تر می‌آید.



R شعاع قوس

c y_{max} است

$\frac{R}{c}$ $1/2$ قوسی که خیلی خمیده شده است

$$\sigma = -K\frac{My}{I}$$

K inside , K oatsid

داده شده است

* هر چه $\frac{R}{c}$ بزرگتر باشد K خارج و داخل به هم نزدیکتر می‌شوند

برای قوسهای سنگی معمولاً $\frac{R}{c} \simeq$ ۵ تا ۶ است که قابل ملاحظه است

در قوس بتن آرمه و فولادی $\frac{R}{c}$ تا ۳۰، ۴۰ هم می‌رسد که خطا آنقدر کم می‌شود که اصلاً دخالت

داده نمی‌شود.

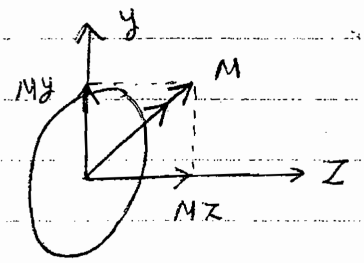
خمش دوجانبه :

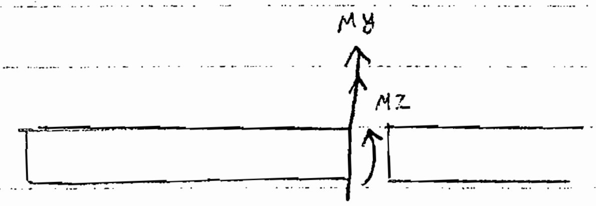
خمش خالص : فقط حول یک محور M_z یا M_y داریم ؟

خمش ساده : M_z, V_y یا M_y, V_z داریم ؟

اما در خمش دوجانبه هم M_z داریم هم M_y که می‌تواند خالص هم باشد ؛ یعنی V ندارد!

خمش مرکب : که هم M دارد و هم N > N, M_z / N, M_y, M_z





هرکدام یک تنش دارند که

$$\sigma_1 = \frac{-M_z y}{I_z}$$

چون محورهای z، y را محور خانیم

$$\sigma_2 = \frac{+M_y z}{I_y}$$

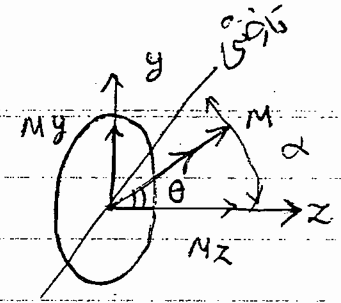
ناشی از هر دو

$$\sigma = \frac{-M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

* تار خنثی وقتی است که تنش ها صفر باشند :

$$0 = \frac{-M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

اگر فقط یکی از M ها باشد تار خنثی منطبق بر محور دیگر است در غیر این صورت تار خنثی محور دیگر نمی‌شود.



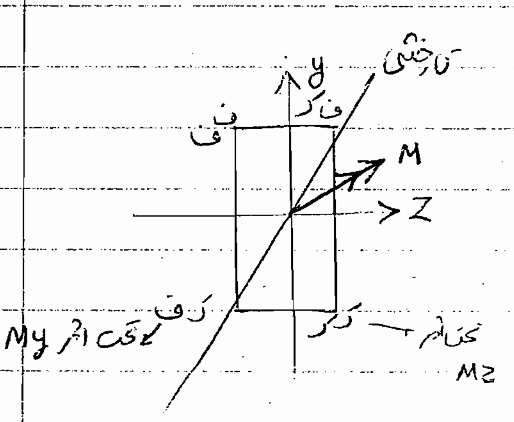
$$\begin{cases} M_z = M\cos\theta \\ M_y = M\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{-M\cos\theta\, y}{I_z} + \frac{M\sin\theta\, z}{I_y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta$$

$$\tan\alpha = \frac{I_z}{I_y} \times \tan\theta$$

α وقتی با θ برابر است که $I_z = I_y$ باشد



$I_y < I_z$ است

اگر یک M داشته باشم

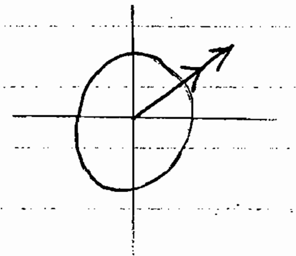
تار خنثی به سمت y متمایل

می شود

* در اینجا هم تنش با فاصله از محور متناسب است هر چه از تار خنثی دور شویم σ ها زیاد می شوند

مثلاً در مقطع مستطیلی یکی از گوشه ها بزرگترین تنش را خواهد داشت ؛

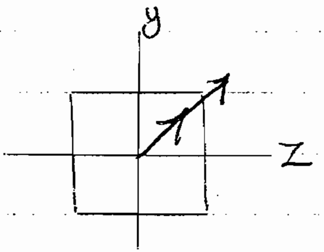
دایره



برای مقطع 8

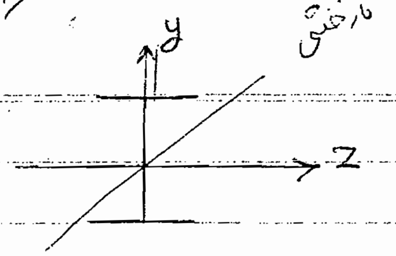
خمش : خمش ساده می شود $I_z = I_y$

تار خنثی منطبق بر محور خود M است .



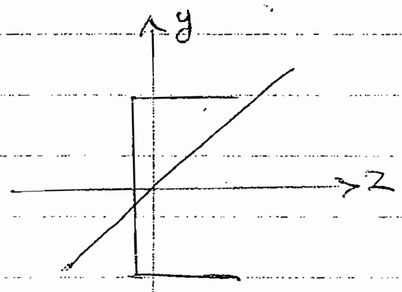
تار خنثی بر M منطبق است $\quad I_z = I_y$

۱۶/



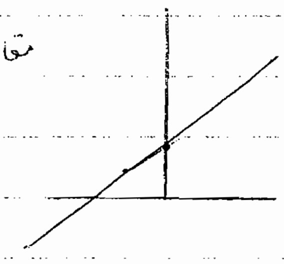
$$\left|\sigma_{max}\right| = \left|\frac{M_z}{W_z}\right| + \left|\frac{M_y}{W_y}\right|$$

در یک مقطع منتظمی 8
با I شکل یا II
می‌توان تنش‌های max
را با هم جمع کرد

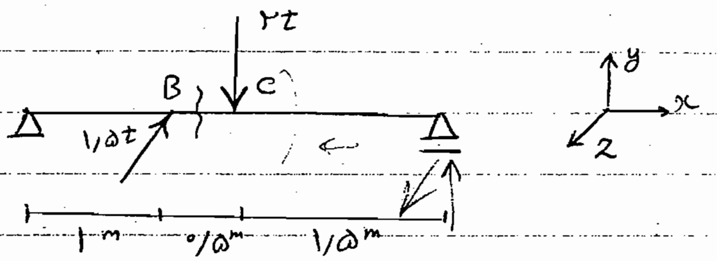


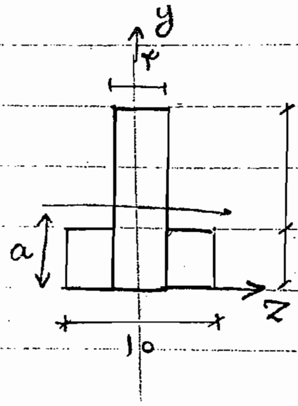
در این جا باید دورترین
نقاط را معین کنیم و تنش‌ها
را در آن جا بیابیم و کشش فشاری
را مشخص کنیم

مقاطع شکسته



در این مقطع می‌توان تنش‌ها را در
تمام گوشه‌ها یافت و بالاخره به مقدار
max تنش فشاری و کششی می‌رسیم





مثال ۶

تنش خمشی max را بیابید ؟

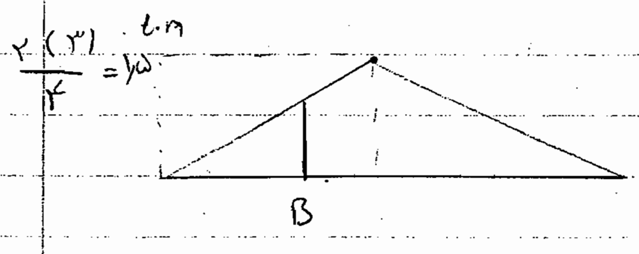
اول تار خنثی $\Rightarrow \quad a = \dfrac{(۱۰\times۳)(۱/۵)+(۲۰\times۳)(۱۳)}{۱۰\times۳+۲۰\times۳} = \dfrac{۲۷/۵}{۳} = ۹/۱۶۷ \ cm$

مستطیل پایین $\quad I_z = \dfrac{۱۰(۳)^۳}{۱۲} + (۱۰\times۳)(۹/۱۶۷-۱/۵)^۲$

" بالا $\quad I_z = \dfrac{۳(۲۰)^۳}{۱۲} + (۳\times۲۰)(۱۳-۹/۱۶۷)^۲$

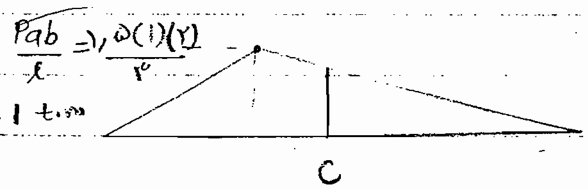
$\Rightarrow I_{tz} = ۴۶۶۷ \ cm^۴$

$I_y = \dfrac{۳(۱۰)^۳}{۱۲} + \dfrac{۲۰(۳)^۳}{۱۲} = ۲۹۵ \ cm^۴$



: Mz

با ۱/۵t را در نظر نمی‌گیریم .

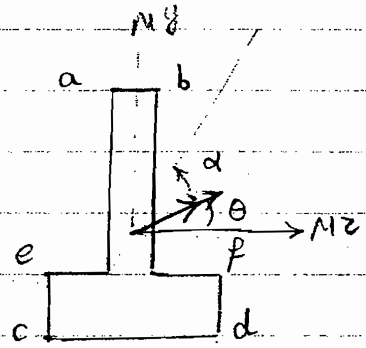


: My

در مقطع B $\quad M_z = \dfrac{۱}{۱/۵} \times ۱/۵ = ۱ \ t.m$

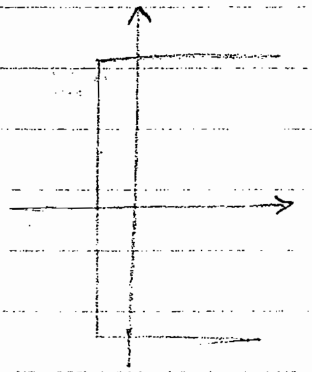
۱۷/

M_y در مقطع c : $= \frac{1/5}{2} \times 1 = 0/75 \; t.m$



تار خنثی می تواند در مقاطع مختلف شکل های مختلفی بگیرد .

نقاط a و b ، c و d می توانند بیشترین تنش را داشته باشند
باید بررسی کنیم که چون نقاطی ممکن است دورترین نقاط قرار بگیرند
که تعداد نقاط زیاد باشد بهتر است تار خنثی را بیابیم ؛



در یاد داشتن
باید نقاط گوشه را
با تنش max
حساب کنیم نه max
ها با هم جمع شوند ؛

مقطع B : $tg\alpha = \tan\theta \cdot \frac{I_z}{I_y}$ θ : زاویه گشتاورها

$\tan\theta = 1 \Leftarrow M_z = M_y$ *

$\Rightarrow \tan\alpha = 1 \times \frac{4667}{295} \Rightarrow tg\alpha = 15/82^{\circ}$

پس دورترین نقاط عبارتند از ؛ d , e

σ کل $= -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$

* $\sigma_d = \frac{-10^5 \times (-9/127)}{4667} + \frac{10^5 (5)}{295} = 1891/2$

فشاری

$$* \quad \sigma_e = \frac{-10^5(-6.127)}{4667} + \frac{10^5(-5)}{295} = -1562.8 \ \frac{kg}{cm^2}$$

مقطع C :

$$M_z = 1.5$$
$$M_y = 0.75$$

$$\tan\alpha = \frac{0.75}{1.5} \times \frac{4667}{295} \Rightarrow tg\alpha = 781$$ شیب زیاد

دورترین نقاط e و d :

$$\sigma_d = \frac{-1.5\times10^5(-9.127)}{4667} + \frac{0.75\times10^5(5)}{295}$$

$$\Rightarrow \sigma_d = 1565.8 \ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_e = \frac{-1.5\times10^5(-6.127)}{4667} + \frac{0.75\times10^5(-5)}{295}$$

$$\Rightarrow \sigma_e = -1073 \ \frac{kg}{cm^2}$$

از A تا D هر دو تنش زیاد می‌شوند پس c هم حتماً بیشتر می‌شوند و مقطع خطرناک همان B
است در ناحیه CD هم بیشترین مقطع مربوط به C است
بین B و C باید چک شود چون یکی زیاد می‌شود یکی کم.
تغییرات تنش خطی است پس داریم:

$$\sigma_e = f(x)$$ تابعی از x می‌شود که خطی است

چون خطی است یا به تدریج زیاد می‌شود یا به تدریج کم می‌شود

پس باید در مقطع B است یا در C ؛

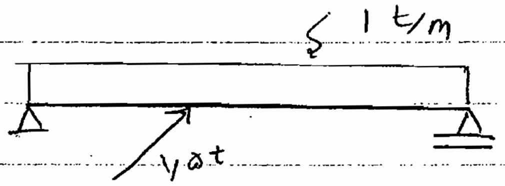
اگر تابع خطی نباشد باید تابع تنش را بنویسیم و مشتق گیری کنیم

مقطع B

$\sigma d = ۱۸۹۱/۴$

$\sigma e = -۱۵۲۳/۸$

مثال :



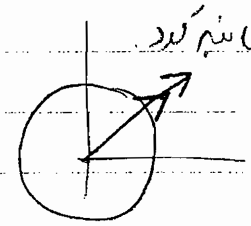
$d = ۲۰\ cm$

اگر مقطع دایره باشد

$* \quad I = \frac{\pi R^۴}{۴} = \frac{\pi (۱۰)^۴}{۴} = ۷۸۵۴\ cm^۴$

مقطع B

در مقطع دایره همیشه خمش را می توان یکجا بررسی کرد



$Mz = My = ۱$

$M = \sqrt{Mz^۲ + My^۲} = \sqrt{۲}$

$\sigma max = \pm \frac{MR}{I} = \pm \frac{\sqrt{۲} \times ۱۰^۵ \times ۱۰}{۷۸۵۴} = \pm ۱۸۰/۶ \ \frac{kg}{cm^۲}$

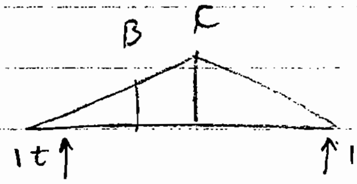
مقطع C

$Mz = ۱/۵ \ , \ My = ۰/۷۵$

$\Rightarrow M = \sqrt{۱/۵^۲ + ۰/۷۵^۲} = ۱/۶۸\ t.m$

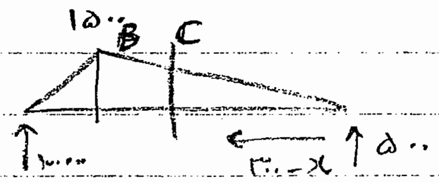
$\Rightarrow \sigma max = \pm \frac{MR}{I} = \pm \frac{۱/۶۸ \times ۱۰^۵ \times ۱۰}{۷۸۵۴} = \pm ۲۱۳/۹ \ \frac{kg}{cm^۲}$

از نقطه B به C می رویم محل σ_{max} تغییر می کند ؛ باید مشتق گیری کرد :



$$M_x = \sqrt{M_Z^2 + M_y^2}$$

$$M_Z = (1000\,x)\,kg.cm$$



$$\Rightarrow M_x = 500\sqrt{5x^2 - 600x + 90000}$$

$$M_y = 500\,(300 - x)$$

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{500\,(10x - 600)}{\bigcirc} = 0$$

$$x = 60$$

* چون x در فاصله $100 < x < 150$ باید قرار بگیرد ؛ پس قابل قبول نیست ؛

اگر عدد در محدوده قرار نگیرد باید M را بررسی کنیم .

* خمش مرکب 8

نیز همراه لنگر نیروی محوری هم داریم ؛

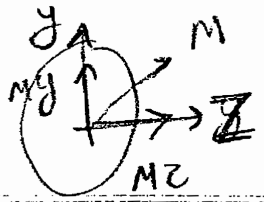
$$\text{یا} \begin{cases} M_Z, N \\ M_y, M_Z, N \end{cases}$$

8 M_Z, N

$$\sigma_1 = \frac{-M_Z\,y}{I_Z}$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A}$$

$$+\frac{M_z y}{I_z} \quad -\frac{M_y z}{I_y}$$



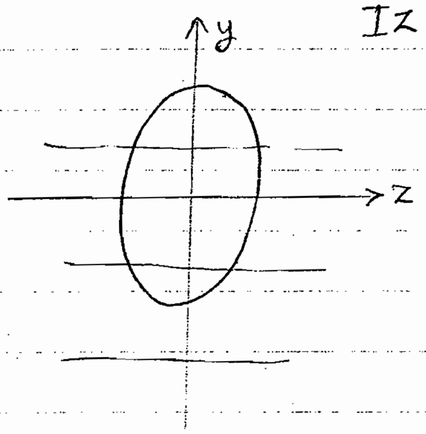
$$* \quad \sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{N}{A}$$

$\colon N, M_z, M_y$

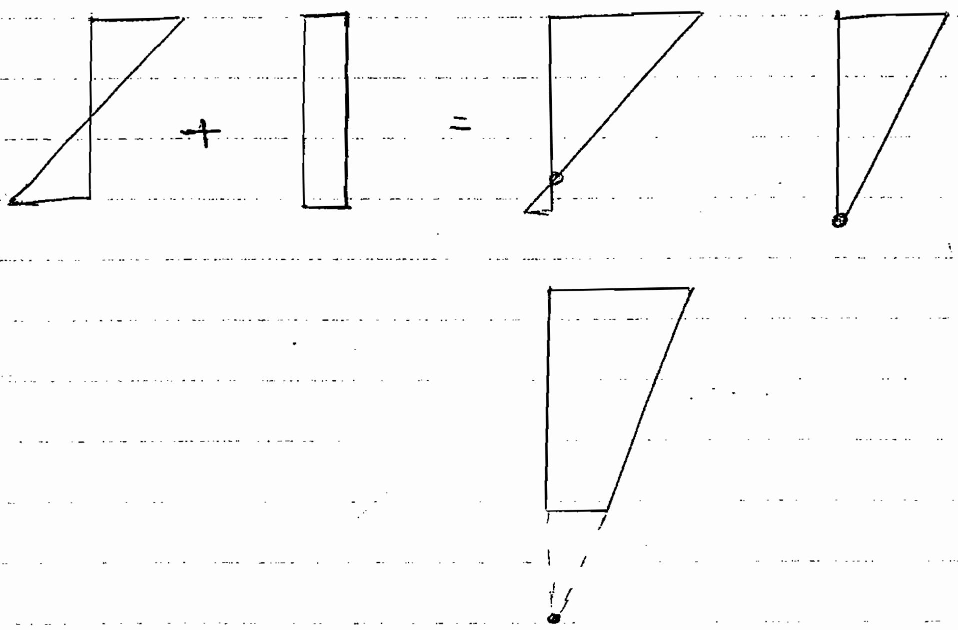
$$* \quad \sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{N}{A}$$

* حالت اول :

$$0 = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{N}{A}$$



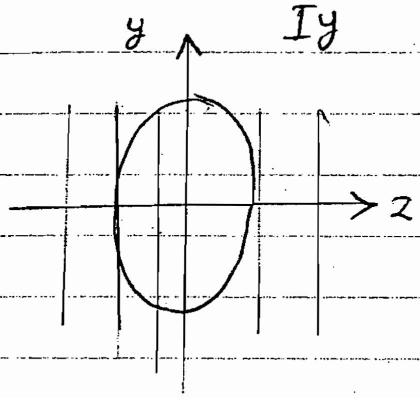
* ((تار خنثی خطی است موازی محور z ها .))
ممکن است بالا یا پایین یا حتی مقطع را
قطع نکند . یا مماس بر مقطع باشد .



POOMAR

8 M_y, N

$$\sigma = \frac{M_y Z}{I_y} + \frac{N}{A}$$



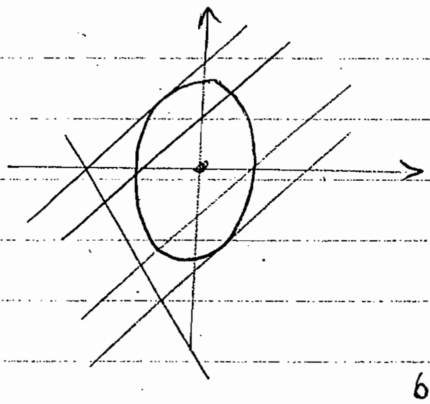
"تار خنثی خطی است موازی محور y"

M_z, M_y و N

$$\sigma = \frac{-M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{N}{A}$$

$$0 = ay + bz + c$$

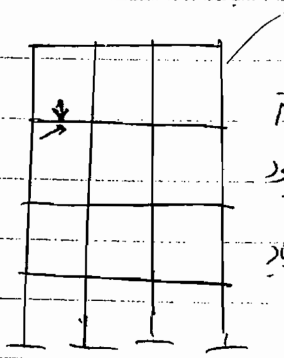
تار خنثی یک خط است



از مرکز نمی‌گذرد چون N داریم

* تنش باز هم با فاصله از تار خنثی متناسب است؟

بزرگترین تنش‌ها مربوط هستند به دورترین نقاط از تار خنثی



اگر تغییر درجه حرارت داشته باشیم نیروی محوری ایجاد می‌شود

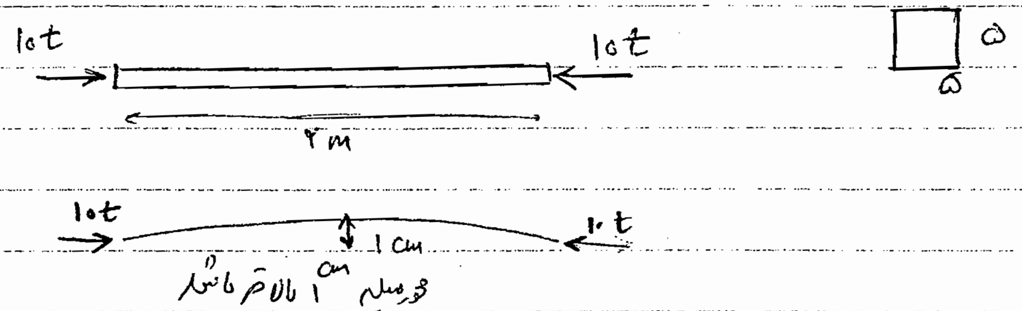
یا در اثر زلزله نیروی محوری ایجاد می‌شود.

معمولاً ستون‌ها زیر خمش مرکب‌اند

در حالت کلی اعضای سازه زیر خمش مرکب‌اند

خمش دوجانبه ، خمش مورب ، خمش مایل ، خمش اریب

مثال



حل - σ_1 فقط فشار از نیروی محور $= \frac{-10000}{25} = -400 \ \frac{kg}{cm^2}$

اما 1cm نیز مکان محور در وسط میله باعث می‌شود که نیروی محور از وسط نگذرد

$$M = 10^{t} \times 1^{cm} = 10\ t.cm$$

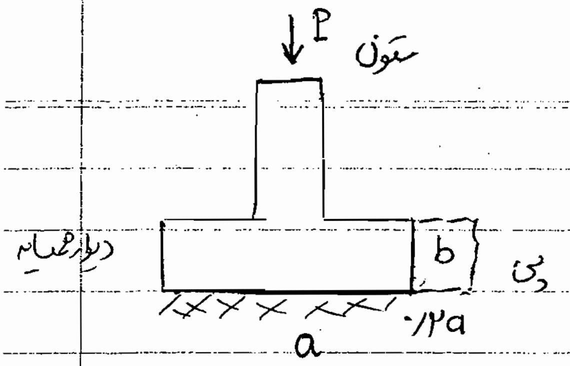
$$\sigma_{max} = -\left|\frac{M}{W}\right| + \frac{N}{A}$$

از نظر فشاری
چون فشار بیشترین
تنش را ایجاد می‌کند.

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{5\times 5^2}{6} = 20.83$$

$$\Rightarrow \underset{\text{فشار}}{\sigma_{max}} = -\frac{10000}{20.83} - 400 = -880.1 \ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\underset{\text{کشش}}{\sigma_{max}} = 480.1 - 400 = 80.1 \ \frac{kg}{cm^2}$$



حالت اول $\dfrac{P}{ab}$

حالت دوم
$$\begin{cases} M = P(0.1a) = 0.1Pa \\ N = P \end{cases}$$

محور با اندازه 0.1a جابجا شده است

$$\sigma = \frac{P}{(1.2a)b} + \frac{(0.1)Pa}{\frac{b(1.2a)^2}{6}}$$

تنش اعمال شده به خاک اگر بیشتر از تنش خاک باشد می‌خواهیم طول خاک را زیادتر کنیم

$$= \frac{P}{1.2ab} + \frac{P}{2.4ab} = \frac{3P}{2.4ab}$$

پس نباید با متقارن مقطع را زیاد کرد

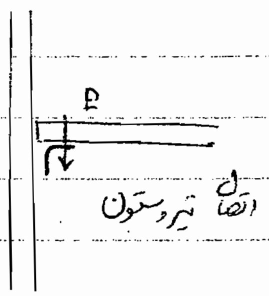
$$= \frac{P}{0.8ab}$$

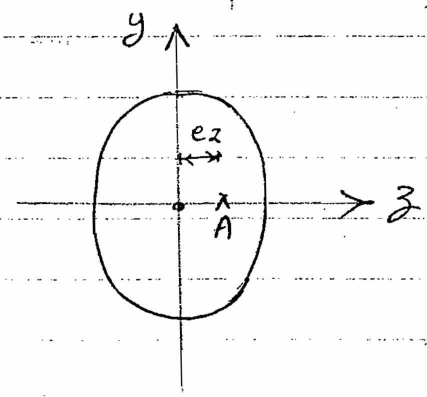
پس اگر پی را بزرگ کنیم به این معنا نیست که تنش را کمتر کردیم بلکه وضع را بدتر کردیم

خمش مرکب :

وقتی بار خارج از محور باشد :

نیرو باعث ایجاد خمش مرکب می شود

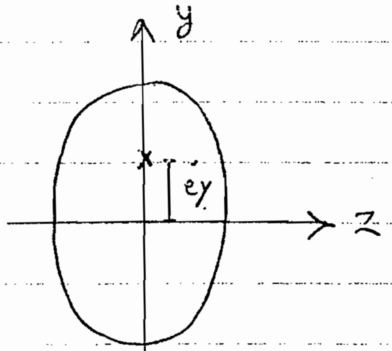


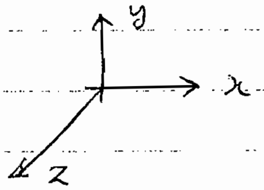


$$\begin{cases} N = P \\ M_y = P\,e_z \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P e_z . Z}{I_y}$$

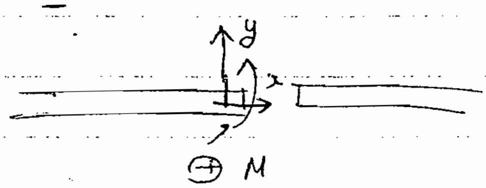
P کششی





$$M_z = -P e_y$$

لنگر خمشی ⊕ x را روی y می برد ؛



$$\sigma = \frac{P}{A} - \frac{(-Pe_y)(y)}{I_z} = \frac{P}{A} + \frac{(Pe_y)y}{I_z}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{(Pe_z)(Z)}{I_y}$$

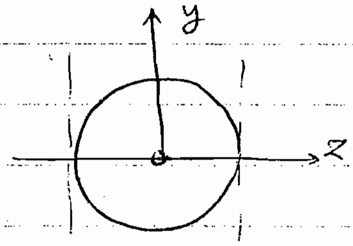
تار خنثی $\quad \frac{P}{A} + \frac{(Pe_z)Z}{\underbrace{I_y}_{A r_y^2}} = 0 \Rightarrow \frac{P}{A}\left(1 + \frac{e_z Z}{r_y^2}\right) = 0$

$$Z = -\frac{r_y^2}{e_z}$$

* اگر e_z مثبت باشد تار خنثی در طرف مقابل قرار می‌گیرد

تار خنثی همیشه یک طرف آن کششی است یک طرف آن فشاری

اگر یک تکه فشاری بتن در دست داشته باشیم و فرض کنیم که اصلاً کشش تحمل نمی‌کند باید بار در جایی قرار گیرد که تار خنثی مقطع را قطع نکند.



اگر بار در مرکز وارد شود تار خنثی در ∞ قرار می‌گیرد چون $e_z=0$ است

هر چه از مرکز دور شویم $|Z|$ کمتر می‌شود

تا جایی که مماس بر مقطع شود از این بیشتر نباید بار را بیرون ببریم چون در این صورت تار خنثی مقطع را قطع می‌کند و مقطع ترک می‌خورد.

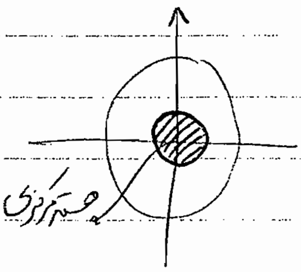
برای مختصات y تار خنثی داریم:

$$y = -\frac{r_z^2}{e_y}$$

در مورد ۲ هم شکل z جهت y کنیم یعنی بار را طوری تغییر می دهیم که تار خنثی مماس بر مقطع شود.

اگر نسبت به هر دو محور خروج از مرکز داشته باشیم:

$$* \quad \sigma = \frac{P}{A} + \frac{(Pe_z)Z}{I_y} + \frac{(Pe_y)Y}{I_z}$$

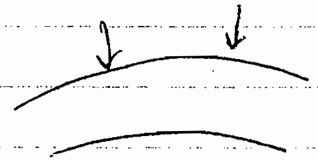


هسته مرکزی

تار خنثی $\quad \frac{P}{A}\left(1+\frac{e_z Z}{r_y^2}+\frac{e_y Y}{r_z^2}\right)=0$

در این حالت تار خنثی یک خط است که امتداد آن را می توان تغییر داد بنابراین بار وارد نقطه اثر آن باید روی دایره کوچک یا روی محیط آن باشد و از آن بیرون نرود این سطح را هسته مرکزی مقطع kern of section می گویند

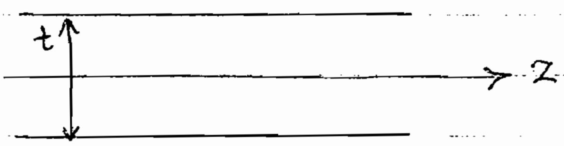
قسمتی از مقطع که نقطه اثر بار اگر در آن قسمت باشد تار خنثی مقطع را قطع نمی کند و روی محیط آن تار خنثی مماس می شود. بار باید فشاری باشد تا تنش فشاری ایجاد کند.



مثلاً در یک قوس، همه مقاطع فشرده می شوند

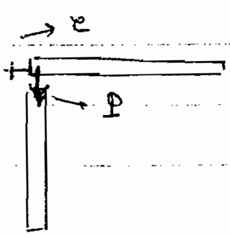
بار باید طوری باشد که نقطه اثر نیرو از هسته مرکزی نگذرد

حالت اول:



طول e دارد

بار روی آن قرار دارد

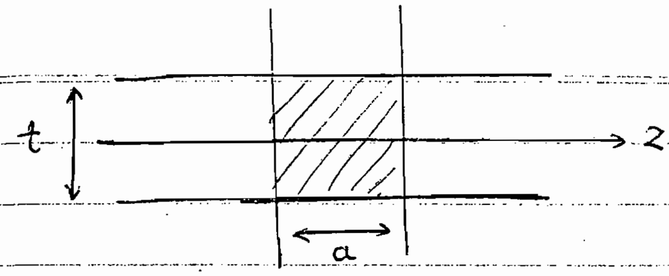


مثلاً دیوار آجری

در نظر بگیرید که تیر آهن بالای روی

آن تکیه گاه رفته است ... روی استون ... یک مقدار عکس العمل ایجاد می کند [illegible]

$$\frac{p}{n} = \frac{2h}{c}$$



$$y = -\frac{r_z^2}{e_y}$$

تار خنثی موازی محور Z است

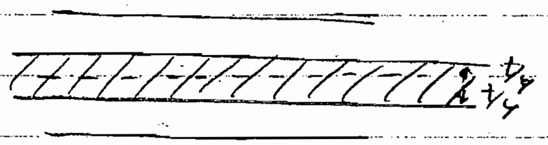
می‌خواهیم مماس بر دیوار شود

یعنی می‌خواهیم y برابر $\pm \frac{t}{2}$ شود

$$\begin{cases} r_z^2 = \dfrac{I_z}{A} = \dfrac{at^3/12}{at} = \dfrac{t^2}{12} \\ y = \pm \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

$$\pm t/2 = -\frac{t^2/12}{e_y} \Rightarrow \boxed{e_y = \mp (t/6)}$$

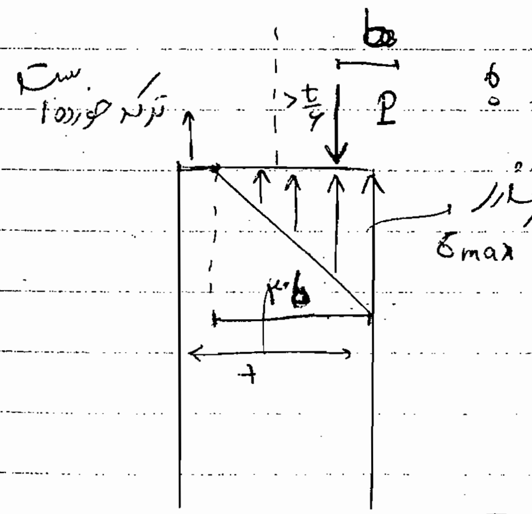
نیرو حداکثر تا $\frac{t}{6}$ می‌توانیم از محور دیوار فاصله بگیریم!



هسته مرکزی یک دیوار می‌شود ۱/۳ وسط آن؟

نیرو باید آن قدر نیرو را حرکت داد تا در آنجا در هسته قرار بگیرد. نیرو را تا آنجا روی دیوار قرار می‌دهند (با لحاظ اقتصادی!)

اگر بار خارج از هسته مرکزی بود آیا دیوار خراب نمی‌شود؟



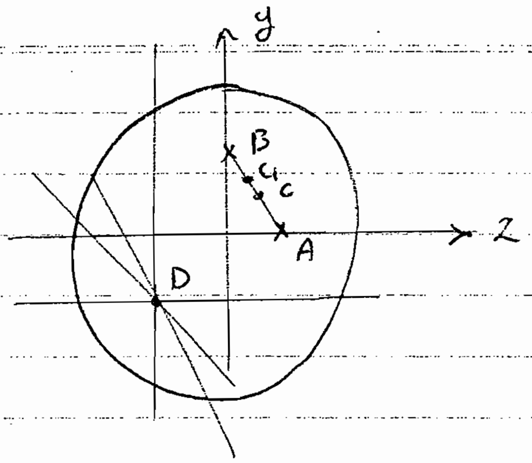
* یک طرف دیوار تحت کشش قرار می‌گیرد و ترک می‌خورد

« وزن را صرف‌نظر کردیم »

چون بار P باید مثلث را ارضا کند پس باید در ۱/۳ مثلث اعمال شود. پس طول مثلث ۳a می‌شود.

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{2P}{a \cdot 3b} < \sigma_{cw}}$$

مقدار max ۲ برابر متوسط است



اگر بار در نقطه B باشد تار خنثی موازی z است

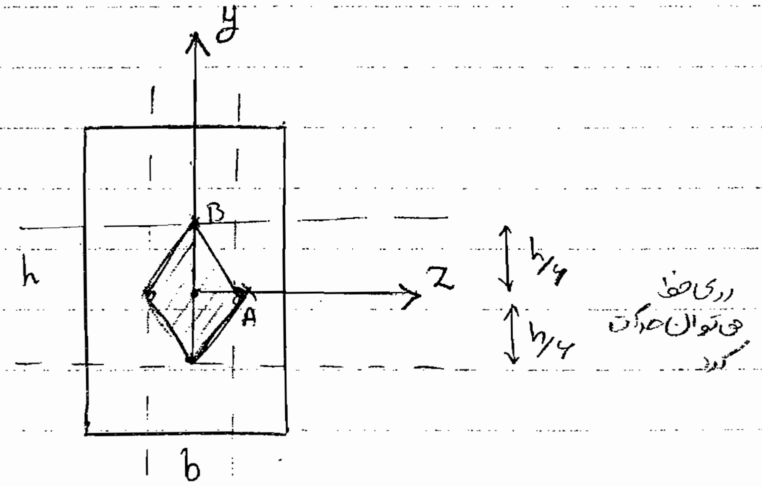
، در نقطه A موازی y است

اگر بار در نقطه C باشد حاصل تقسیم بر دو بار
در A و B است

در نقطه D اگر بار P را در C بگذاریم تنش صفر خواهد بود

اگر بار در C_1 هم بگذاریم باز هم D تنش صفر دارد و D یک نقطه از هسته مرکزی است و تار خنثی

همیشه از D می‌گذرد اما با زوایای مختلف



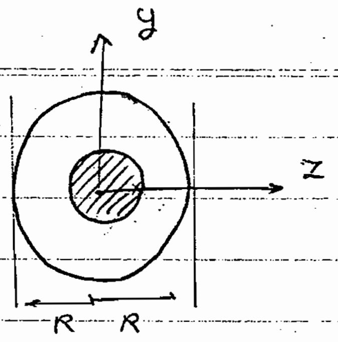
اگر بار را در نقطه A بگذاریم شکل
محاسبات مربوط به دیوار حداکثر تغییر مکان
A در $\pm b/6$ خواهد بود.

$$B \begin{cases} r_z^2 = \dfrac{h^2}{12} \\ y = -\dfrac{r_z^2}{e_y} \end{cases} \Rightarrow \pm h/2 = -\dfrac{h^2/12}{e_z} \Rightarrow \boxed{e_z = \mp h/6}$$

$$A : \{ e_{\cancel{z}} = \mp b/6$$

* یک لوزی درست می‌آید به قطرهای $h/3$ و $b/3$ *

روی اضلاع
لوزی حرکت کنیم تار خنثی دائماً بر رئوس می‌شود



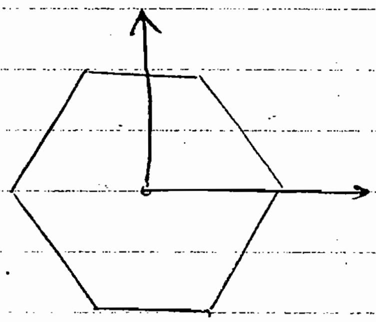
هسته مرکزی دایره 8

$$r_y^2 = \frac{R^2}{4}$$

$$z = -\frac{r_y^2}{e_z}$$

$$\pm R = -\frac{R^2/4}{e_z}$$

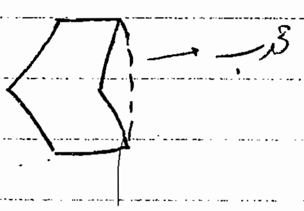
$$\boxed{e_z = \mp R/4}$$

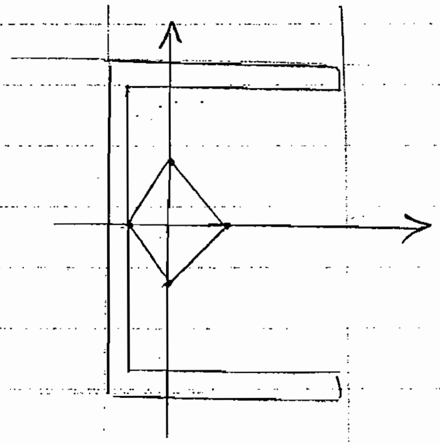


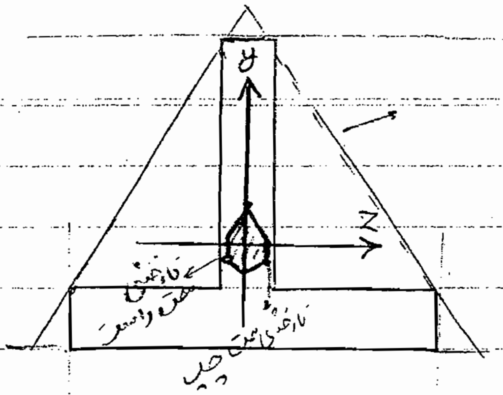
برای بدست آوردن تار خنثی باید ۶ بار تار خنثی را مماس فرض کنیم و یکسری نقاط بدست آوریم

اما اگر سطح مقعر باشد تار خنثی را مماس بر ضلع بدیم

در این صورت سطح را قطع می‌کند و باید طوری محاسبه کنیم که به سطح محدب مماس شدن آن کنیم







باید یک سطح محدب بگیریم مثلاً ۶ ضلع هسته ما خواهد
شد. باید طوری انتخاب شوند که بر شکل ما محیط باشند

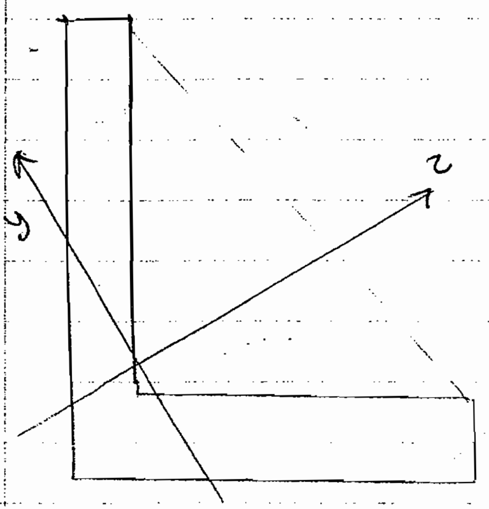
معادله خط مورب را هم با دانستن ابعاد مقطع
می توان نوشت

* وقتی هر دو لنگر باشند

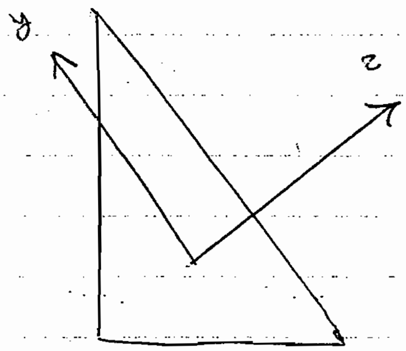
$$
\begin{cases}
* \quad 1 + \dfrac{e_y y}{r_z^2} + \dfrac{e_z z}{r_y^2} = 0 \\
* \quad ay + bz + c = 0
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \boxed{\frac{\frac{e_y}{r_z^2}}{a} = \frac{\frac{e_z}{r_y^2}}{b} = \frac{1}{c}}
$$

همیشه باید سطح را محدب بگیریم و از طرفی هسته مرکزی که بدست می آورید محدب است.

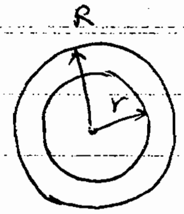


۶ ضلع



در این شکل اول محورهای اصلی باید محاسبه
شوند

مثال:



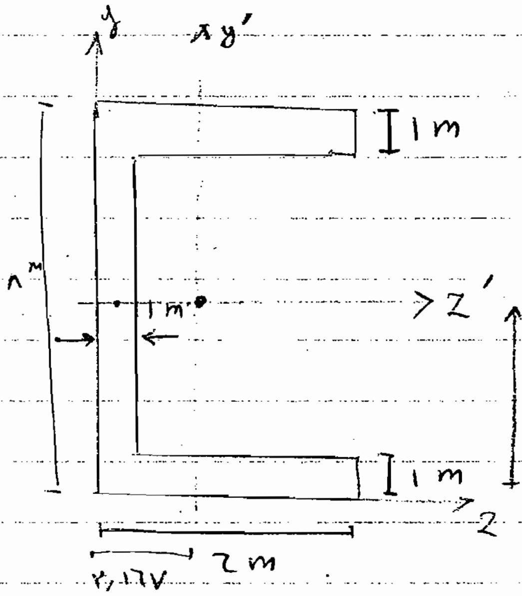
$$I = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$$

$$r^2 = \frac{\frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)}{\pi(R^2 - r^2)} = \frac{1}{4}(R^2 + r^2)$$

$$e = ? \Rightarrow \pm R = \frac{\frac{1}{4}(R^2 + r^2)}{e_y}$$

$$e_z = e_y \Rightarrow e_y = \pm \frac{R^2 + r^2}{4R}$$

مثال:



$$\bar{y} = 4 \text{ cm}$$

$$\bar{z} = \frac{(1\times6)(3)(2) + (1\times6)(\frac{1}{2})}{2(1\times6) + (1\times6)}$$

$$= 2.167 \text{ cm}$$

$$I_{z'} = 2(1\times6)(3.5)^2 + 2(\tfrac{1}{12})(6)(1^3) + \frac{1}{12}(1)(6^3) = 166 \text{ cm}^4$$

$$I_{y'} = 2(\tfrac{1}{12})(1)(6^3) + (2)(1\times6)(0.833)^2 + (\tfrac{1}{12})(6)(1^3) + (6\times1)(1.667)^2$$

$$\Rightarrow I_{y'} = 61.5 \text{ cm}^4$$

$$r_z^2 = \frac{I_{z'}}{A} = \frac{166}{18} = 9.22 \text{ cm}^2$$

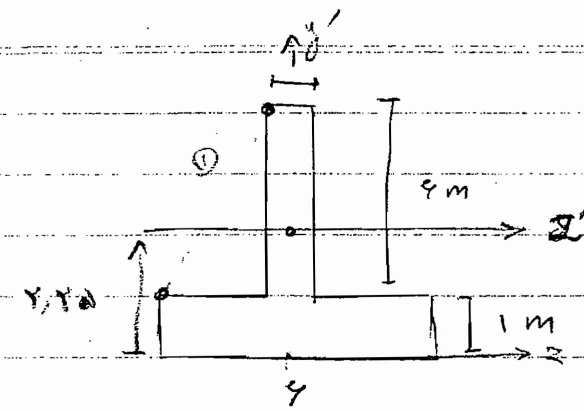
$$r_y^2 = \frac{I_{y'}}{A} = \frac{61.5}{18} = 3.42 \text{ cm}^2$$

$$z = -2.167 \Rightarrow -2.167 = -\frac{3.42}{e_z} \Rightarrow e_z = 1.58$$

$$z = 3.833 \Rightarrow 3.833 = -\frac{3.42}{e_z} \Rightarrow e_z = 0.89$$

$$y = 4 \Rightarrow 4 = -\frac{9.22}{e_y} \Rightarrow e_y = -2.305$$

$$y = -4 \Rightarrow -4 = -\frac{9.22}{e_y} \Rightarrow e_y = 2.305$$



$$\bar{y} = \frac{(۶)(۱)(۴)+(۶\times۱)(۱/۲)}{۱۲} = ۲٫۲۵$$

$$I_{z'} = (۱/۱۲)(۶)(۱)+(۶)(۱٫۷۵)^۲ + (\frac{۱}{۱۲})(۱)(۶^۳)+(۶)(۱٫۷۵)^۲ = ۵۵٫۲۵ \ cm^۴$$

$$A = (۱\times۶)+(۶\times۱) = ۱۲$$

$$I_{y'} = (\frac{۱}{۱۲})(۶)(۱)+(\frac{۱}{۱۲})(۱)(۶^۳) = ۱۸٫۵ \ cm^۴$$

$$\begin{cases} r_z^۲ = \frac{۵۵٫۲۵}{۱۲} = ۴٫۶ \\ r_y^۲ = \frac{۱۸٫۵}{۱۲} = ۱٫۵۴ \end{cases}$$

① نقطه $\Rightarrow \begin{array}{c|c|c} z & -۱/۲ & -۳ \\ y & ۴٫۷۵ & -۱٫۲۵ \end{array} \Rightarrow y' = ۲٫۴ z' + ۰٫۹۵$ یا $y' - ۲٫۴ z' - ۰٫۹۵ = ۰$

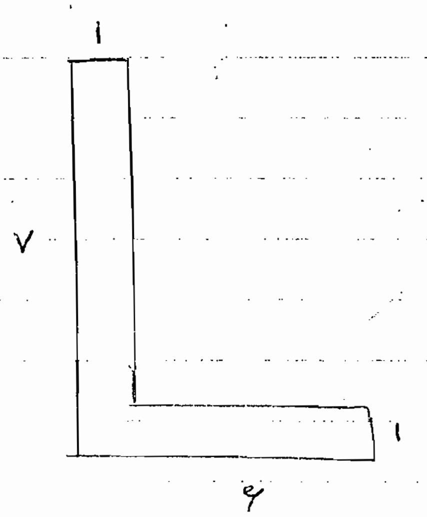
$$1 + \frac{e_y (y')}{۴٫۶} + \frac{(e_z)(z')}{۱٫۵۴} = ۰$$

$$-۰٫۹۵ + y' - ۲٫۴ z' = ۰$$

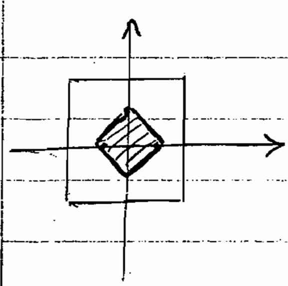
$$\Rightarrow \frac{۱}{-۰٫۹۵} = \frac{e_y}{۴٫۶} = \frac{e_z}{۱٫۵۴(-۲٫۴)}$$

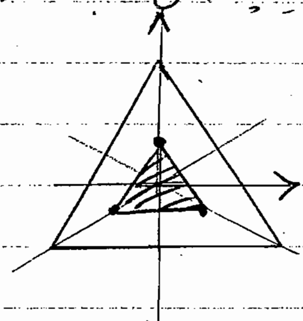
$$\Rightarrow e_y = -۰/۷۷$$

$$* \ e_z = ۰/۶۲$$



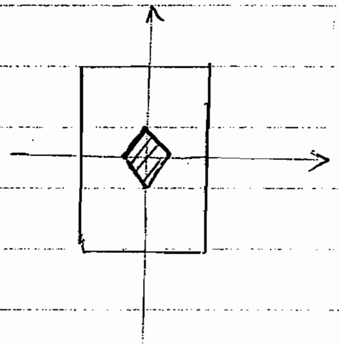
هسته مرکزی یک چند ضلعی محدب همواره یک چند ضلعی محدب است ؟



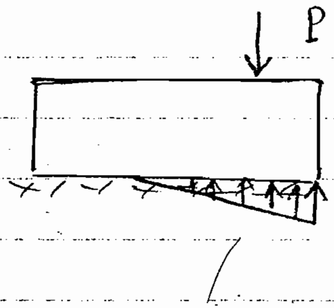


* ۵ ضلعی منتظم هسته مرکزی آن یک ۵ ضلعی منتظم می شود که اضلاع آن موازی اضلاع شکل اولند

* ۶ " " اضلاع هسته مرکزی آن ۴۵° می چرخند.



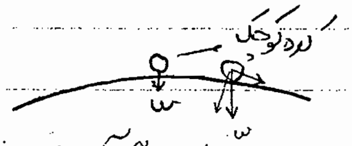
بار روی هسته مرکزی نباشد
مقطع کششی ترک می خورد یا
مقطع فشاری ممکن است تنش
آن از مقدار مجاز کمتر باشد
در این موارد از آزمون و خطا استفاده می کنیم
درب ها یا در دیوارها بیشتر این اتفاق می افتد.



برای پی می توان راحت ترسیم کرد
مثل دیوار

۸۴/۸/۷ به نام خدا ج ۷

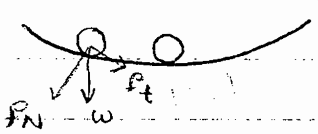
پایداری تعادل - کمانش 8 buckling - stability



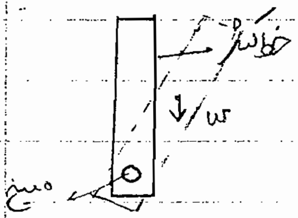
سطح کروی

نیروی مماسی آن را از وضع تعادل دور می کند

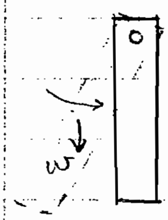
بالای یک سطح کروی یک کره کوچک قرار دادیم تعادل دارد اما پایدار نیست چون یک نیروی افقی می تواند آن را حرکت دهد



در اینجا تعادل پایدار است چون نیروی مماسی ناشی از وزن آن را به حالت اولیه بر می گرداند

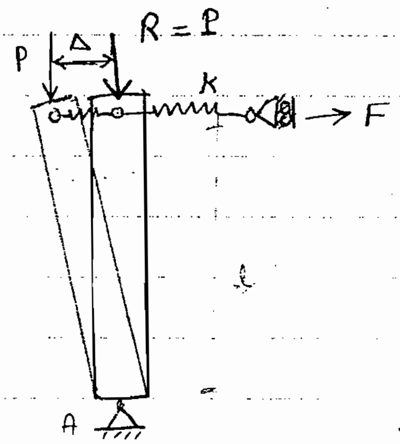


نیروی وزن یک گشتاوری ایجاد می کند حول میخ که باعث می شود از وضعیت تعادل دور شود



نیروی وزن جسم را به حالت اولیه میل می دهد. پس تعادل پایدار است.

مثال 8



باید آن را اندکی از وضع تعادل دور کنیم سپس آن را رها کنیم.

فنر یک افزایش طولی خواهد داشت پس یک F داریم

$$\Sigma M_A = P\Delta - Fl$$

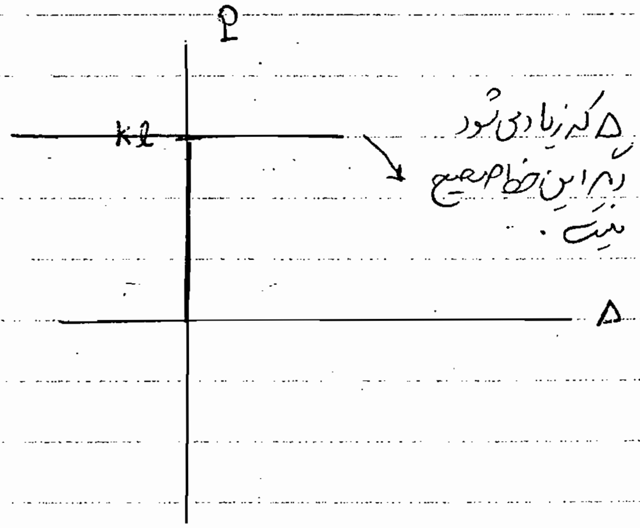
$$= P\Delta - (K\Delta)l$$

اگر لنگر مثبت باشد باعث می شود که از وضعیت اولیه دور شود اما اگر لنگر منفی باشد به حالت اولیه میل می کند و تعادل پایدار است .

* $P > Kl$ تعادل ناپایدار

* $P < Kl$ تعادل پایدار می‌شود دوباره به حالت اولیه برمی‌گردد $\Delta = 0$ می‌شود

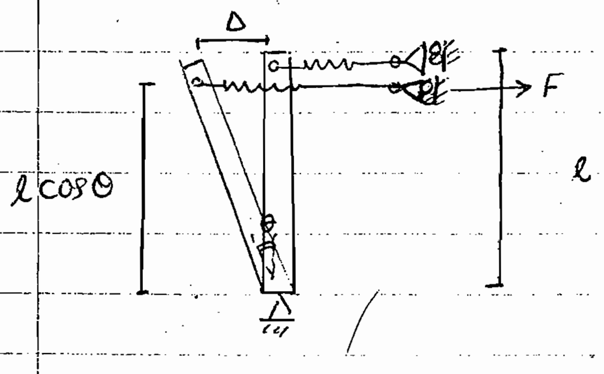
* $P = kl$ تعادل خنثی است یعنی در همین شکل باقی می‌ماند



$P = Kl$ با هر Δ ای می توان تعادل داشت

فرض کردیم که δ یا Δ کوچک باشد .

اگر تغییر مکان Δ کوچک نباشد :



* $\Sigma M_A = P\Delta - (K\Delta)\, l\cos\theta$

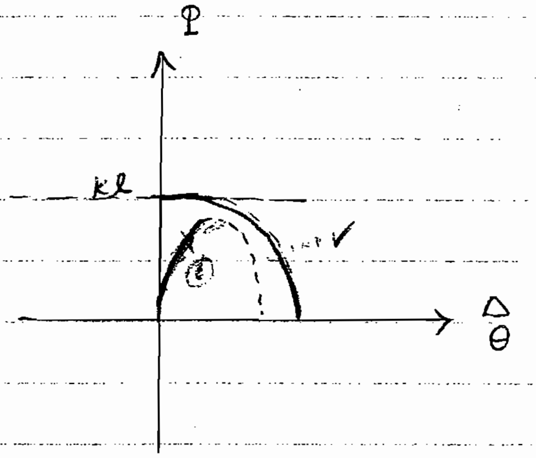
; $\sin\theta = \dfrac{\Delta}{l}$

$P = kl\cos\theta$ تعادل خنثی

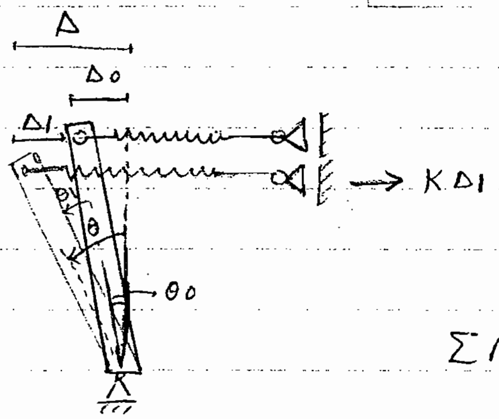
$P > kl\cos\theta$ ناپایدار

$P < Kl\cos\theta$ پایدار

در اینجا تعادل به مقدار θ هم بستگی دارد



P در اینجا از KL کوچکتر است.

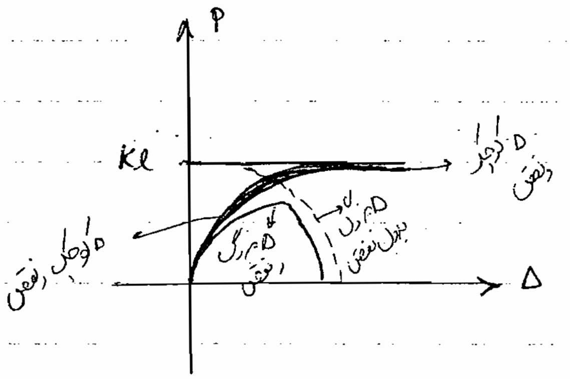


* ممکن است میله از اول با یک نقص ساخته شده باشد

ΣM_A

$$\Sigma M_A = P(\Delta_1 + \Delta_0) - (K\Delta_1)l = 0$$

* $P = Kl\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_0}\right)$ درجه اول از δ کوچک می‌باشد



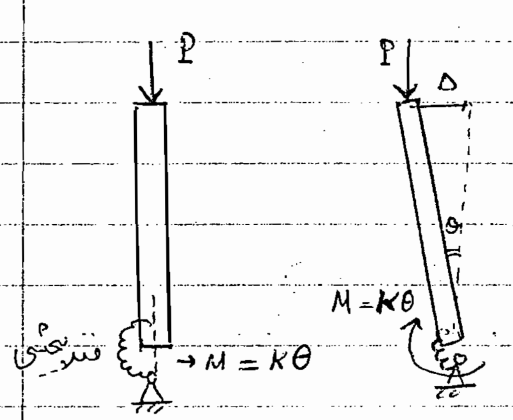
Δ بزرگ باشد

$$\Sigma M_A = P(\Delta_1 + \Delta_0) - K\Delta_1 \, l \cos\overline{\theta} = 0 \qquad \overline{\theta} = \theta_0 + \theta_1$$

کمترین حالت

$$* \quad P = Kl \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_0}\right) \cos\theta$$

P همیشه از خط چین کوچکتر است و همیشه زیر منحنی جا بندار قرار می‌گیرند



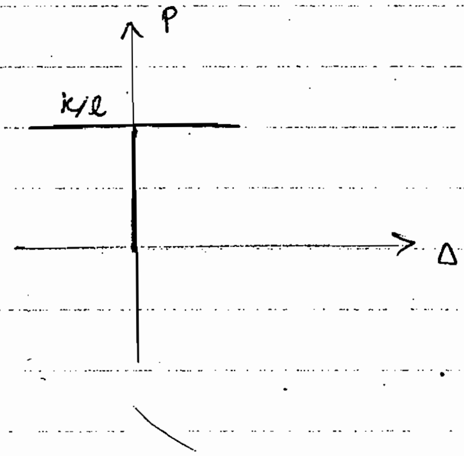
تغییر شکل کوچک :

$$\Sigma M_A = P\Delta - \underbrace{M}_{K\theta} = 0$$

$$; \quad \theta = \frac{\Delta}{l}$$

$$\Sigma M_A = P\Delta - K\frac{\Delta}{l} = 0$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{K}{l}$$

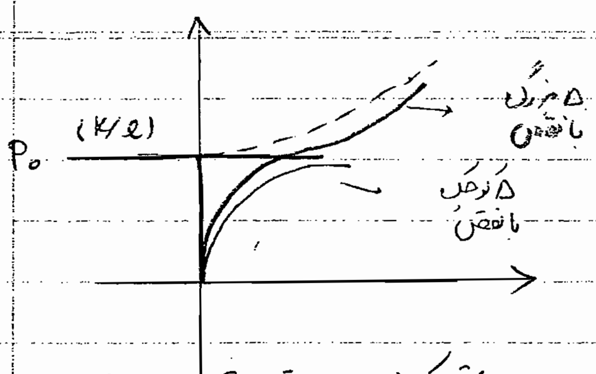


درجه دوم :

$$\Sigma M_A = P\Delta - K\theta = 0$$

$$= P\Delta - K \operatorname{ArcSin}\frac{\Delta}{L} = 0$$

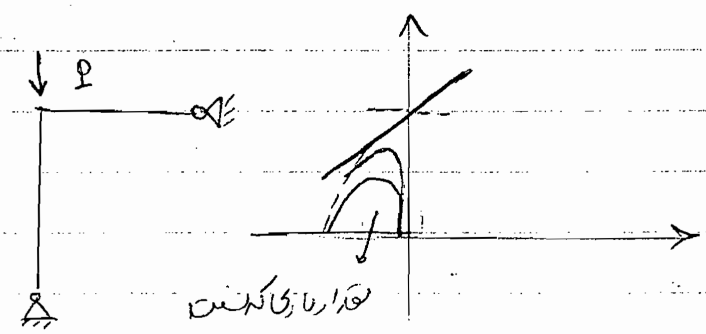
$$* \quad P = \frac{K}{l} \cdot \operatorname{ArcSin}\frac{\Delta}{l} \cdot \frac{l}{\Delta} = \frac{K}{l} \cdot \frac{\operatorname{ArcSin}\Delta/l}{\frac{\Delta}{l}}$$



چون توان از P_{in} آن بزرگتر است

در اینجا سازه زیاد خطرناک نیست

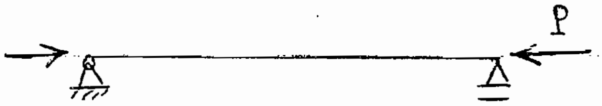
چون می‌تواند بدون نقص بیشتر از P_0
را هم تحمل کند اگر نقص هم داشته باشد می‌تواند بیشتر از P_0 را هم تحمل کند اما سازه‌ای که مقدار P از P_0
کمتر بود پس خطرناک بود.



به P_0 تحمل می‌کند خیلی کمتر است
و خطرناکتر است.

خیلی از سازه‌هایی که ناگهان خراب می‌شوند ممکن است بررسی‌های لازم صورت نگرفته باشد

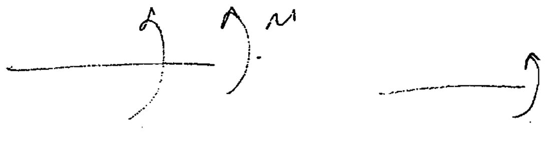
وقتی معادلات تغییر شکل کوچک را می‌نویسیم به مقدار P_0 به درستی رسیدیم ولی به خط افقی نمی‌توان اعتماد کرد



* ستون فشاری 8 کاملاً ایده‌آل

نقص‌های هم یک ستون فشاری 8

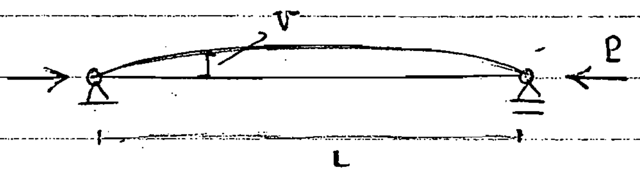
- بار P از محور ستون نگذرد «محوری نباشد»
- ستون کاملاً مستقیم نباشد
- اگر تنش‌های پسماند یعنی بدون این که به ستون نیرو وارد کنیم تنش داشته باشیم



ایده‌آل نیز نقص نداریم و تغییر شکلها کوچکند :

* $EIv'' = M$ تغییر شکل کوچک

* $\frac{EI}{\rho} = M$ تغییر شکل بزرگ



میله‌های قبلی صلب بودند
ولی اینجا این طور نیست

تغییر شکلی برای آن در نظر گرفتیم

* $M = -Pv$

* $EIv'' = -Pv$

* $EIv'' + Pv = 0$

* $v'' + \mu^2 v = 0$

$$\mu^2 = \frac{P}{EI}$$

* $v = c_1 \sin\mu x + c_2 \cos\mu x$

$\begin{cases} x = 0 \\ v = 0 \end{cases}$ $c_2 = 0$

$\begin{cases} x = l \\ v = 0 \end{cases}$ $c_1 \sin\mu l = 0 \Rightarrow \sin\mu l \neq 0 \Rightarrow c_1 = 0$. if

* اگر $c_1 = 0$ باشد یعنی $v = 0$ است یعنی دیگر نیروهای داخلی آن را به وضع مستقیم می‌گرداند

if, $\sin\mu l = 0 \Rightarrow c_1 =$ مجهول

* یعنی c_1 مجهول است پس v هر مقداری می‌تواند بگیرد و وضع خمیده را خواهیم داشت ؟

$\sin \mu l \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow P = 0$ جواب غیرقابل قبول است

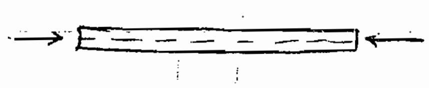
چون بار صفر میله را خم نمی کند

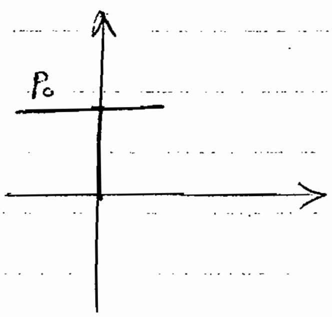
$\sin \mu L = 0 \Rightarrow \mu L = \pi \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = \pi$

$$\Rightarrow \boxed{P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

اگر بار این مقدار باشد میله کمانه می کند و از وضع مستقیم خارج می شود

* اگر بار را ایده آل طوری بگذاریم و میله کاملاً مستقیم باشد بازای مقدار بالا میله کمانه می کند .





در P_0 کمانش اتفاق می افتد اما وقتی اتفاق افتاد چه خواهد شد

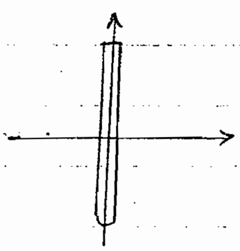
با معادلات تغییر شکل کوچک نمی توان انجام داد چون خطر برای تغییر شکلهای بزرگ مربوط می شود .

این محاسبات را اولین بار اویلر در سال ۱۷۸۳ انجام داد و این بار را بار اویلر می نامند .

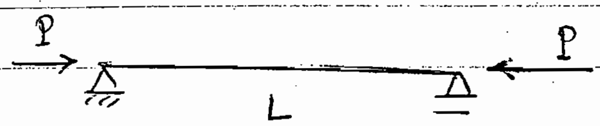
هرچه I کمتر باشد این اتفاق زودتر می افتد یعنی هرچه ستون نازکتر باشد این اتفاق زودتر می افتد

مثلاً یک خط کش نازک خیلی زود کمانه می کند نسبت به خط کش ضخیم

مقطع مستطیل



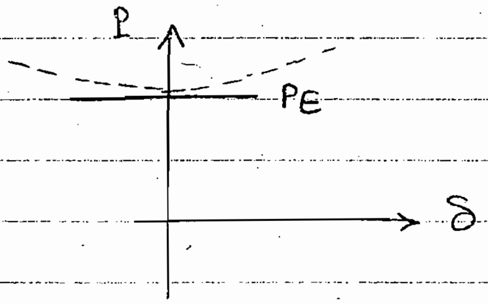
I را نسبت به محور y
باید قرار داد که کمتر است



$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

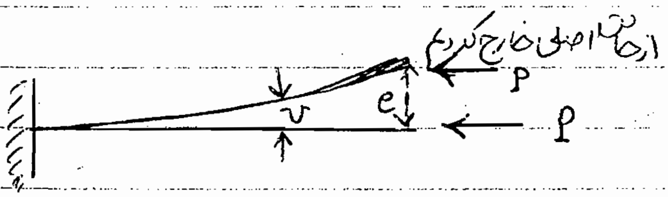
$$EIv'' = M$$

$$\frac{EI}{\rho} = M$$



اگر بار را در حالت
تغییر شکل کوچک
اعمال کنیم
از معادله اول
استفاده می کنیم
اگر تغییر شکل بزرگ را در نظر بگیریم
معادله دوم قابل استفاده خواهد بود
که در این صورت P_E به تدریج زیاد خواهد شد اما مقدار زیاد کردن نیرو ناچیز است

در معادلات معمولی سازه ها می پذیریم که P_E بزرگترین مقداری است که می تواند تحمل کند



$$M = P(e-v)$$

$$EIv'' = P(e-v) \Rightarrow EIv'' + Pv = Pe$$

$$\mu = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$*$ $v = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x$

$v = e$ جواب خصوصی

$$v = c_1 \sin \mu x + c_2 \cos \mu x + e$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = c_1(0) + c_2 + e \Rightarrow c_2 = -e$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ v' = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \mu c_1 - \mu c_2(0) \Rightarrow c_1 = 0$$

$$* \; v' = \mu c_1 \cos \mu x - \mu c_2 \sin \mu x$$

* مقدار e باید در معادله خود تیر صدق کند ؛

$$\begin{cases} x = L \\ v = e \end{cases} \quad * \; e = -e \cos \mu L + e$$

$$\Rightarrow -e \cos \mu L = 0$$

① $\cos \mu L \neq 0 \Rightarrow e = 0$ در این صورت تمام ضرایب صفر می‌شوند و v صفر خواهد شد و تغییر شکل به صفر بر خواهد گشت

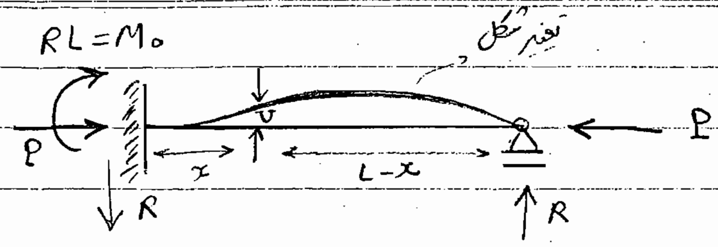
② $\cos \mu L = 0$

$e = ?$ هر مقداری می‌تواند بگیرد

$$\Rightarrow \mu L = \pi/2$$

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \, L = \pi/2 \Rightarrow P_E = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$ بار اویلر

مقدار بار اویلر در این حالت $1/4$ تیر قبلی بود.



$* \quad M_0 = RL$

در اینجا مسئله هیپراستاتیک است
زیرا عکس العملها معلوم نیستند زیرا طرفین
R و M_0 هست اما مقدار آنها معلوم نیست

از چپ

حول برش $EIv'' = M_0 - Pv - Rx$

v ندیدیم؛ $\quad \parallel \; = -Pv + R(L-x)$

از سمت چپ و راست فرقی ندارد.

$$EIv'' = M_0 - Pv - Rx$$
$$EIv'' + Pv = M_0 - Rx$$
$$EIv'' + Pv = RL - Rx$$

$$\begin{cases} v = c_1 \sin \mu x + c_2 \cos \mu x \\ v = \dfrac{RL}{P} - \dfrac{Rx}{P} \quad \text{جواب خصوصی} \end{cases}$$

$$v = c_1 \sin \mu x + c_2 \cos \mu x + \frac{RL}{P} - \frac{Rx}{P}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ v=0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = c_2 + \frac{RL}{P} \Rightarrow \boxed{c_2 = -\frac{RL}{P}} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x=0 \\ v'=0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = c_1 \mu - \frac{R}{P} \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{R}{P\mu}} \qquad (2)$$

$$* \quad v' = c_1 \mu \cos \mu x - c_2 \mu \sin \mu x - \frac{R}{P}$$

$$\begin{cases} x=L \\ v=0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = c_1 \sin \mu L + c_2 \cos \mu L + \frac{RL}{P} - \frac{RL}{P} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R}{\mu P} \sin \mu L - \frac{RL}{P} \cos \mu L = 0$$

$$\frac{R}{P}\left(\frac{\sin\mu L}{\mu} - L\cos\mu L\right) = 0$$

* $\tan\mu L = \mu L$

$\mu = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ چون $\mu L = 0 \Rightarrow P = 0$

* تجربه نشان می‌دهد که $P = 0$ کمانش اتفاق نمی‌افتد.

$$\boxed{\mu L \cong 4.49 \text{ rad}}$$

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\, L = 4.49$$

$$\boxed{P_E \simeq \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}}$$

$$\begin{cases} ① & \text{- - - - - -} = 0 \\ ② & \text{- - - - - -} = 0 \\ ③ & \text{- - - - - -} = 0 \end{cases}$$

* درصورتی جواب غیرصفر داریم که دترمینان ضرایب صفر باشد

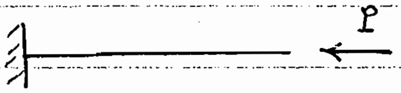
اگر درجایی نتوانستیم معادلات را ساده کنیم باید به صورت دستگاه معادلات بنویسیم :

دترمینان

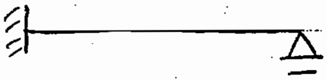
$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & R \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{L}{P} \\ \mu & 0 & -\frac{1}{P} \\ \sin\mu L & \cos\mu L & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\mu L}{P}\cos\mu L - \frac{1}{P}\sin\mu L = 0$$

$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ $\quad K=1$, $le = L$



$P_E = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$ $\quad k=2$, $le = 2L$



$P_E = \frac{\pi^2 EI}{(0/7L)^2}$ $\quad k = 0/7$, $le = 0/7l$

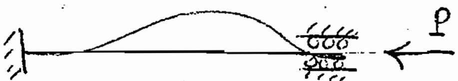
بار بحرانی $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl)^2}$

$le = kl \longrightarrow$ طول مؤثر در کمانش

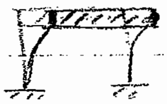
$k \longrightarrow$ ضریب کمانش

یعنی تیر اولی فصل یک پایه است بقیه از روی آن بدست می آید

باید امکان تغییر طول وجود داشته باشد تا کمانش رخ دهد

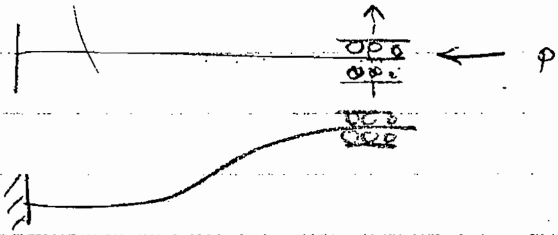


$K = 0/5$



می تواند تغییر مکان افقی دهد ولی ناچیز است،

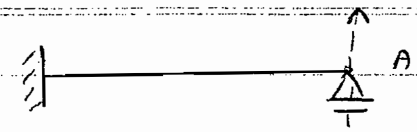
نصف یک منحنی کامل است $\Rightarrow K = 1/2$



حرکت قائم رو به بالا

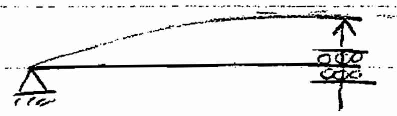
$K = 1$

POOMAR



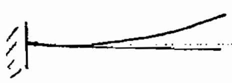
$K = 2$ مثل یک سر آزاد است

حتی در جهت قائم می‌تواند حرکت کند دیگر عکس العمل قائم را نمی‌گذاریم.



$K = 2$ مثل بالایی است.

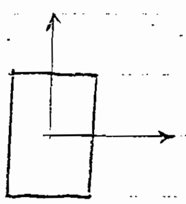
K برابر است با تعداد نیم منحنی sin یا cos که در تغییر شکل ایجاد وجود دارد



تنش بحرانی $\sigma_c = \frac{P_c}{A} = \frac{\pi^2 E I}{(kl)^2 A} = \frac{\pi^2 E r^2}{(kl)^2} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{kL}{r})^2}$

* $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$

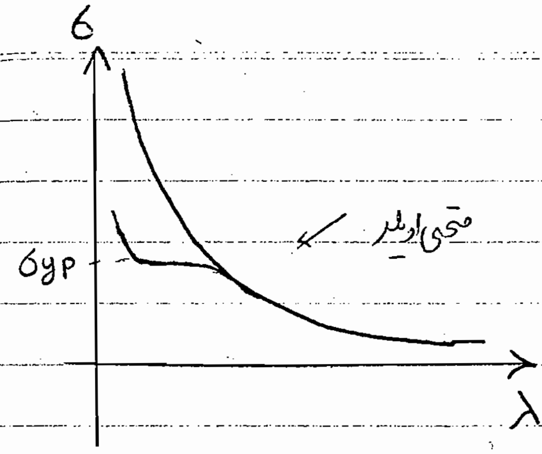
$\Rightarrow \sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ $\lambda = \frac{kL}{r}$ ضریب لاغری



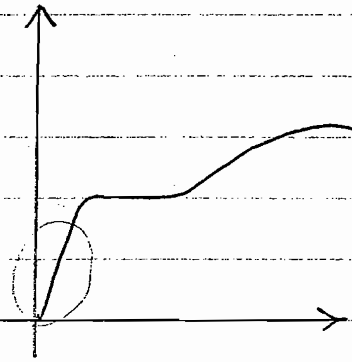
شکل مقطع از یک ستون از اطراف ممکن است k مختلفی داشته باشد یعنی نسبت به دو محور در مقطع دو k و r مختلف داریم.

هر طرف که $\frac{kL}{r}$ بیشتر بود آن طرف بحرانی‌تر است یعنی σ_c کمتر خواهد بود.

λ صفر شود σ بی نهایت می شود.



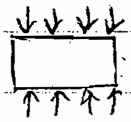
در مقادیر بزرگ λ ، σ خیلی کوچک خواهد بود



در منحنی $\sigma - \varepsilon$ در قسمت خطی
اگر با شیب σ تا بی نهایت می تواند برود
ولی ما یک مقدار حداکثری داریم .

وقتی وارد قسمت تسلیم شد در برابر کمانش
نمی تواند مقاومت بکند

λ که کوچک شود تنش در مقادیر تنش تسلیم محاسبه می شود

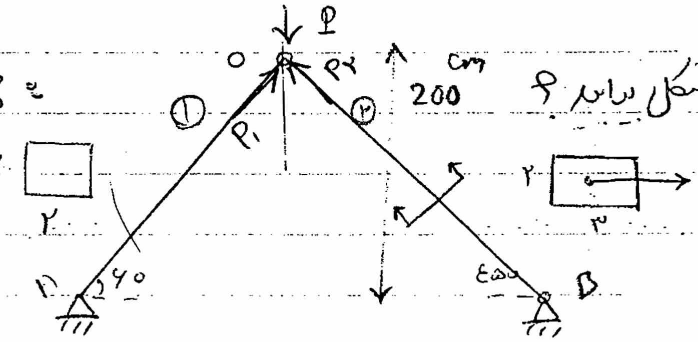


طول باید خیلی کوتاه باشد تا بتوانیم از تنش تسلیم رد شویم

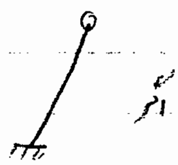
مثال :

بار بحرانی سازه روبرو را در داخل صفحه شکل بیابید ؟

$E = 2 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}$



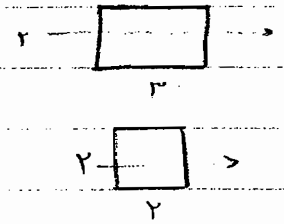
در خرپا برای هر میله $K = 1$
می گیریم با اینکه تکیه گاه ها
واقعاً مفصل نیست .



$K = 0/7$ می گیریم

POOMAR

کمانش در راستای محور z و در صفحه صورت می‌گیرد در جهت عمود بر صفحه کمانش نمی‌کند



$$I = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad r^2 = \frac{h^2}{12}$$

$$\Rightarrow r^2 = 1/3$$

$$\begin{cases} L_{AO} = \dfrac{200}{\cos 30} = 231\ \text{cm} \\[2ex] \lambda_1 = \dfrac{231}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 400\ \text{cm} \qquad K = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_{BO} = 200\sqrt{2} = 280\ \text{cm} \\[2ex] \lambda_2 = \dfrac{200\sqrt{2}}{1/\sqrt{3}} = 490 \end{cases}$$

$$\sigma_{1c} = \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^6}{(400)^2} = 123.4\ \text{kg/cm}^2$$

$$\sigma_{2c} = \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^6}{(490)^2} = 82.2\ \text{kg/cm}^2$$

این تنش‌ها خطی نمی‌کند :

* هرچه طول را کمتر کنیم نیرویی که می‌گیرد بیشتر خواهد بود ؛

$$P_{1c} = 123.4 \times 4 = 493.6$$
$$P_{2c} = 82.2 \times 6 = 493.2$$

نیروی P را به دو نیرو تجزیه می کنیم .

$$\sum F_x = P_1\left(\tfrac{1}{2}\right) - P_2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$P_1 = P_2\sqrt{2}$$

$$\sum F_y = P_1\frac{\sqrt{3}}{2} + P_2\frac{\sqrt{2}}{2} + P = 0$$

$$P_2 = \frac{2P}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \qquad P_1 = \frac{2P}{\sqrt{3}+1}$$

با P_{1C} و P_{2C} مقایسه می کنیم

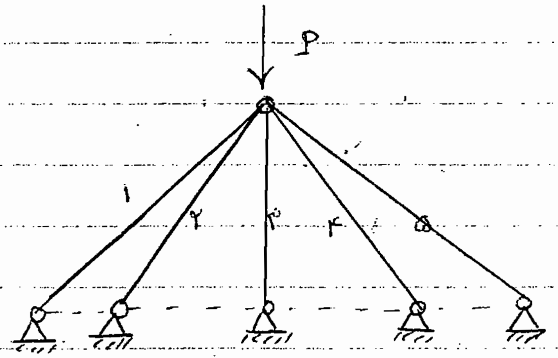
* $\dfrac{2P}{\sqrt{3}+1} \leqslant 493/6$ $\qquad P \leqslant 674/4$ kg

* $\dfrac{2P}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \leqslant 493/2$ $\qquad P \leqslant 952/8$ kg

پس P_c برابر $674/4$ kg است ؛

در حالت دوم صفحه اگر بخواهیم P_c را بیابیم فقط λ_2 عوض می شود ؛ $r = \frac{9}{12}$

۸۴/۸/۲۸ به نام خدا ۹۶



* بار بحرانی سازه روبرو را بیابید ؟

اولاً باید نیروهای میله‌ها تعیین شود ؛ که در مقاومت ۱ بررسی کردیم ؛

پس ؛

۱- بار بحرانی هر میله تعیین شود

۲- نیروی P بین میله‌ها تقسیم شود

۳- با زیاد کردن P کدام میله به مقدار بحرانی خودش می‌رسد که در آن مقدار برای P آن میله کمانش

می‌یابد ؛ یکی از میله‌ها کمانه کرد $P = \alpha$

از این به بعد که نیرو را اضافه

می‌کنیم از α بیشتر شود میله‌ای که کمانه کرده بار نمی‌گیرد

۴- پس وقتی بار از α زیادتر شود بار بین ۴ میله دیگر تقسیم می‌گردد تا میله دیگری کمانش کند ؛

در اینجا چون سازه هیپراستاتیک است سازه خراب نمی‌شود بلکه میله‌های دیگر بار تحمل می‌کنند

تا جایی که ؛

۵- فقط یک میله باقی بماند که در این صورت سازه به مقدار بار بحرانی رسیده است ؛

اگر بخواهیم به این نحو مسئله را حل کنیم مسئله طولانی خواهد شد چون تقسیم بار به ۵ میله و ۴ میله و...

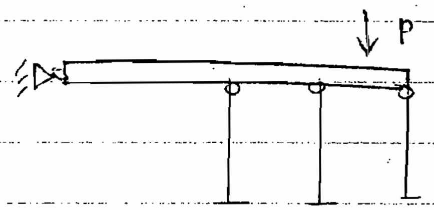
دشوار و طولانی است :

– در حل نهایی ما باید چه چیزهایی را داشته باشیم ؟

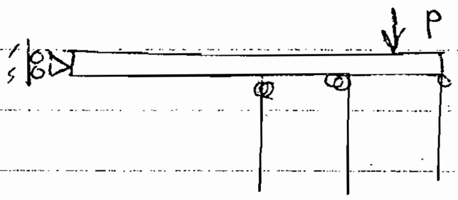
در حل نهایی باید ۲ میله کمانش کرده باشد و فقط یک میله الاستیک باقی بماند ؟

۱ـ شرط خرابی (کمانش سازه) :

* کافی نیست که فقط یک میله کمانش کند بلکه باید از n تا میله چند تا کمانش کند به خرابی میله



در این سازه اگر بخواهیم خراب شود
هر ۳ تا میله باید کمانش کنند



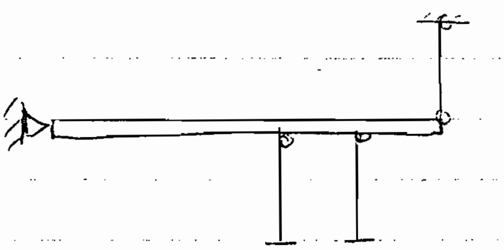
در اینجا ۲ میله کمانش کند یعنی یک
میله باقی بماند سازه خراب می شود.
چون با ۲ میله و تکیه سازه تعادل
دارد ۲ میله که کمانش کنند سازه دیگر تعادل نخواهد شد

یعنی در هر سازه باید شرط تعادل برقرار شود

۲ـ شرط تعادل :

در حالت خراب شدن : معادلات تعادل باید برقرار باشند در هر حالتی ؛

۳ـ شرط تغییر شکل :

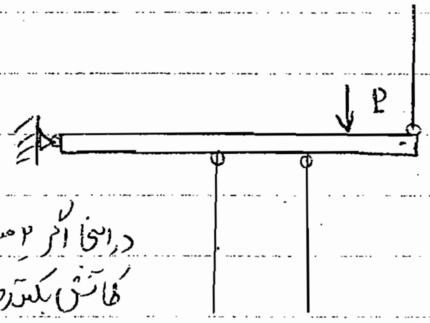


باید در هنگام خرابی به تغییر شکل توجه کرد

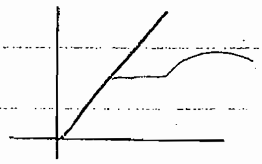
مثلاً اگر میله ⑤ بخواهد الاستیک باقی بماند باید نقطه P روی دایره ای به شعاع AP حرکت کند
۴ میله دیگر می تواند کاهش کند

اگر میله ③ بخواهد الاستیک بماند در این صورت ۲ میله سمت راستی افزایش طول می دهند و می توانند تحت کاهش قرار بگیرند چون طولشان می تواند کم شود.

— فقط میله اولی و آخری هستند که می توانند الاستیک باقی بمانند ، و کاهش نکنند ① و ⑤



میله الاستیک بماند یعنی ۴-۵ خطی تا آخر باشد.

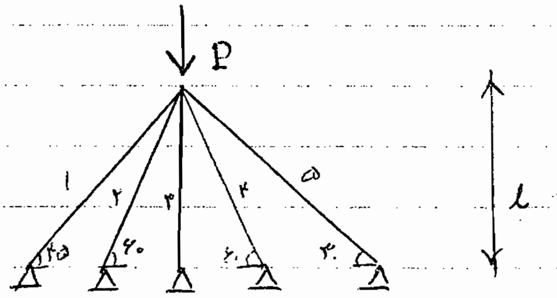


در اینجا اگر ۲ میله هم کاهش بکنند چون میله سوم بخواهد الاستیک بماند خراب خواهد شد

۳- اضافه نشدن بار از مقدار بحرانی هر میله ؟

— هر میله زمانی کاهش نکرده که بارش از مقدار بار بحرانی تجاوز نکرده باشد ؟

مثال ؟



بار بحرانی میله سوم $P_3 = P_E$

$$* \quad P_E = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

بار بحرانی هر میله قابل محاسبه است ؛ $\Longrightarrow$ $l_1 = l\sqrt{2}$

$$* \quad P_{1E} = \frac{\pi^2 EI}{2l^2} = \frac{P_E}{2}$$

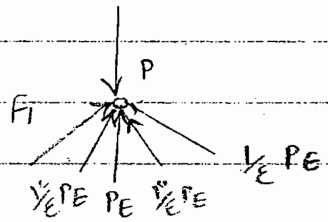
$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}$ ✓

* $P_{2E}=P_{4E}=\frac{\pi^2 EI}{(\frac{2l}{\sqrt{3}})^2}=\frac{3}{4}P_E$

* $P_{5E}=\frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}=\frac{1}{4}P_E$

برای سادگی کار یکی را P_E در نظر گرفتیم بقیه را بر اساس آن محاسبه کردیم؛

در این نوع میله ها یا باید میله ① با ق کار کند یا میله ⑤؛



شرط تغییر شکل را در نظر گرفتیم؛ شکل ①

تعادل : $\Sigma f_x = F_1\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{P_E}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

$\Rightarrow F_1=\frac{\sqrt{6}}{8}P_E < P_{1E}=\frac{P_E}{2}$ ق ق ق است؛

چون شرط ۴ برقرار شده است؛

نیازی نیست که معادله دوم را در میله ۵ بررسی کنیم چون حتماً یکی برقرار می‌شود نه هر دو؛

میله ۵ : $\frac{P_E}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-F_5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

$\Rightarrow F_5=\frac{P_E\sqrt{6}}{6} > \underbrace{\frac{P_E}{4}}_{P_{5E}}$ ق ق ع

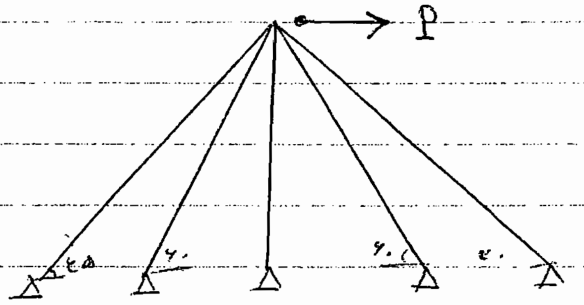
در میله ① تعادل ΣF_y را بررسی می‌کنیم؛ شکل ①

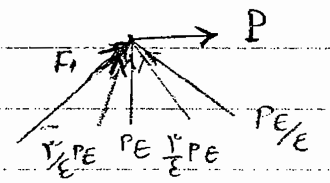
$\Sigma F_y = \frac{P_E\sqrt{6}}{8}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2\times\frac{3P_E}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+P_E\times\frac{1}{2}-P=0$

مقدار بار بحرانی $\Rightarrow$ $P=2.96\,P_E$

در هم مسائل ما باید شرط تغییر شکل را در نظر بگیریم :

مثال :





F_1 باید حتماً کششی باشد تا P در تعادل $\sum F_x$ برقرار باشد :

عضو ① را الاستیک فرض کردیم

در این قسمت حل مثل مسئله قبل است : $P_3 = P_E$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\times\frac{3}{4}P_E\frac{\sqrt{3}}{2} + P_E + \frac{P_E}{4}\times\frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow F_1 = -3.43\,P_E$$

یعنی F_1 کششی است دقیق است.

$$\sum F_x = -3.43\,P_E\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{P_E}{2} = 0$$

$$P = 2.64\,P_E$$

برای میله ۵ حل کنیم :

در این حالت F_5 حتماً کششی خواهد بود درصورتیکه امکان ندارد ؛ چون تحت فشار است.

⇒ شرط تغییر شکل برقرار نخواهد بود چون نیروی P به سمت راست است و تغییر مکان باید به آن سمت باشد در حالیکه چون F_5 کششی است تغییر مکان به چپ خواهد بود

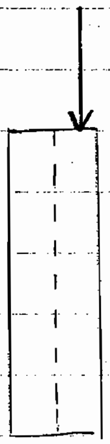
- شرط خرابی (کمانش سازه)

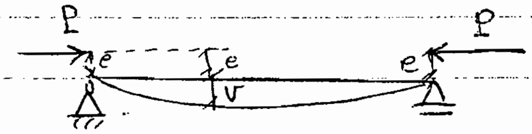
- شرط تعادل

- شرط تغییر شکل

- شرط اضافه نشدن بار از مقدار بحرانی

* نقص های ستونها : میله های فشاری





بار از محور میله نگذرد

وقتی نقص داریم از همان اول تغییر شکل داریم :

میله مستقیم باقی نمی ماند بلکه از همان ابتدا خم می شود

$$EIv'' = M = P(e-v)$$ v منفی است

* $$EIv'' + Pv = Pe$$; $\mu = \sqrt{\frac{P}{EI}}$

* $$v = \underbrace{c_1 \sin\mu x + c_2 \cos\mu x}_{\text{عمومی}} + e$$

$x=0$, $v=0$: $$0 = c_1(0) + c_2(1) + e \Rightarrow c_2 = -e$$

$x=l$, $v=0$: $$0 = c_1 \sin\mu l - e\cos\mu l + e$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{-e(1-\cos\mu l)}{\sin\mu l} = \frac{-e\left(2\sin^2\frac{\mu l}{2}\right)}{2\sin\frac{\mu l}{2}\cos\frac{\mu l}{2}}$$

$$\Rightarrow c_1 = -e\tan\frac{\mu l}{2}$$

اگر $\sin \mu l = 0$ باشد دوباره به بار بحرانی می‌رسیم در حالیکه اینجا نقص را می‌خواهیم ؛

$$\Rightarrow \quad v = -e\tan\frac{\mu l}{2}\sin\mu x - e\cos\mu x + e$$

$$\begin{cases} x = \frac{l}{2} \\ \delta = v_{max} = -e\tan\frac{\mu l}{2}\sin\frac{\mu l}{2} - e\cos\frac{\mu l}{2} + e \end{cases}$$

$$= \frac{-e}{\cos\frac{\mu l}{2}}\left(\sin^2\frac{\mu l}{2} + \cos^2\frac{\mu l}{2}\right) + e$$

$$\boxed{v_{max} = \frac{-e\left(1-\cos\frac{\mu l}{2}\right)}{\cos\frac{\mu l}{2}}}$$

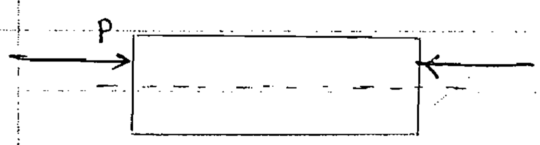
$$M_{max} = P\left(e - v_{max}\right) = P\left(\frac{e + e\left(1-\cos\frac{\mu l}{2}\right)}{\cos\frac{\mu l}{2}}\right)$$

$$\boxed{M_{max} = P\frac{e}{\cos\frac{\mu l}{2}}}$$

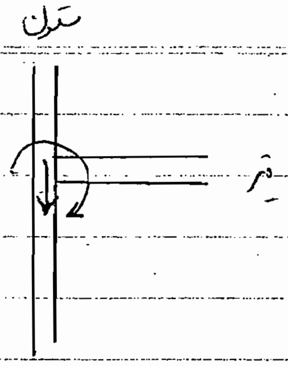
* اگر تیر حتی با ابعاد بزرگ داشته باشیم با فشاری که بر آن وارد کنیم $\cos\frac{\mu l}{2}$ با تقریب خوبی یک است

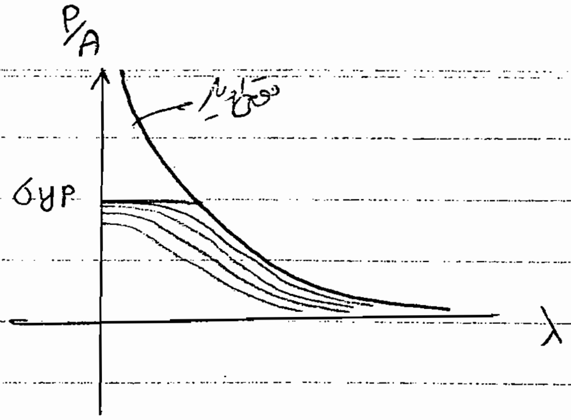
یعنی $M_{max} = Pe$

هرچه این تیر لاغرتر باشد خیلی بیشتر خم می‌شود و لنگر زیادتر می‌شود



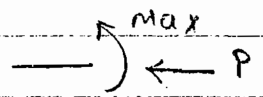
به هر حال در ستونها یک مقدار نقص داریم





اگر نقص صفر باشد دقیقاً روی منحنی هستیم ؛ اما اگر نقص داشته باشیم هر چه e زیادتر باشد

خراب شدن ستون پایین تر از σ_{yp} است



$$* \quad \sigma_{max} = \frac{P}{A} + (M_{max})\frac{C}{I}$$

فشار ⊕ گرفتیم

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe \cdot C}{I \cos \frac{\mu l}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{e \cdot c}{r^2 \cos\left[\sqrt{\frac{P}{EA}} \cdot \frac{l}{2r}\right]}\right]$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{e \cdot c}{r^2 \cos\left[\sqrt{\frac{P}{EA}} \cdot \frac{l}{2r}\right]}\right]$$

فرمول سکانت

* خطی شدن

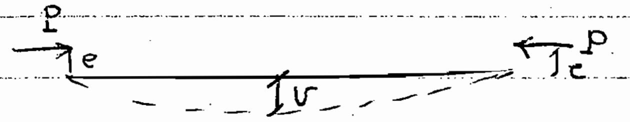
اگر P زیاد شود مثلاً α برابر شود تنش بیشتر از α افزایش می‌یابد چون تیر بیشتر خم می‌شود؛

با این فرمول می‌توان P را بازای σ_{yp} یافت.

* A-Javadian

از جلسه آینده ۱۰ صبح

۸۴/۹/۵ — به نام خدا — ج ۱۵



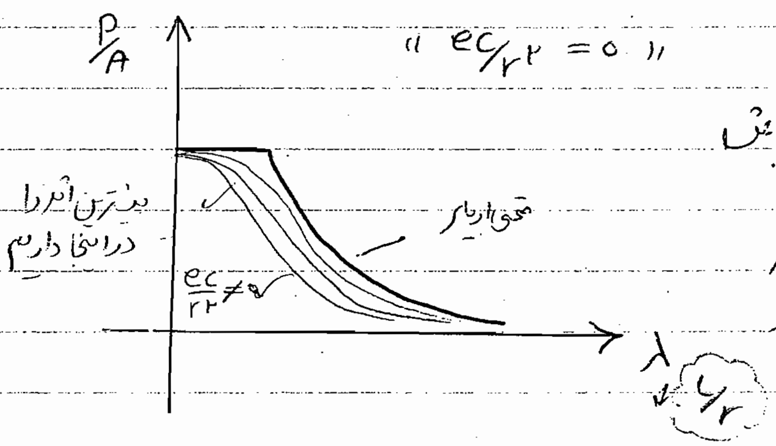
فرمول سکانت ؛

$$* \quad \sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1+\frac{ec}{r^2\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EA}}\cdot\frac{L}{2r}\right)}\right]$$

از نظر هندسی

σ-ε غیرخطی است

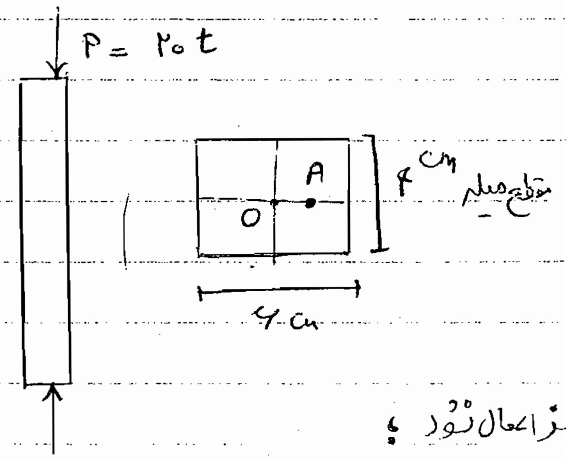
* اگر بخواهیم با فرمول اویلر مقایسه کنیم به جای σ_{max} ، σ_{yp} می‌گذاریم ؛



در مقادیر کم λ تنش تسلیم باعث خرابی خواهد شد

اما در مقادیر بزرگ λ هلیه کمانه می‌کند در نتیجه لنگر و بالطبع e ازدیاد می‌شود .

$ec/r^2 = 0 \Rightarrow \sigma_{yp} = P/A$ کمانه نمی‌کند



مثال ؛ بار در A وارد می‌شود ؛

OA = 0/5 cm

L = 1 m

L = 2 m

L = 5 m

طول در میله تنش ستگی دارد وقتی بار در مرکز اعمال نشود ؛

$e = 0/5$ cm

$P < P_E$ باید باشد . اگر $P > P_E$ باشد تنش ∞ خواهد شد ؛

POOMAR

درهرحالت P_E را می‌یابیم : $P_E = \frac{\pi^2 E I}{l^2}$ برای

$P_E = 20$ قرار می‌دهیم تا حداکثر L را بیابیم؛

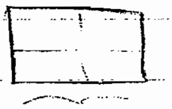
$$20000 = \frac{\pi(2\times10^6)(6\times\frac{4^3}{12})}{l} \Rightarrow l = 177.7\,cm$$

پس $L = 2$, $L = 5$ نمی‌تواند اتفاق بیفتد؛ چون در این دو حالت میله کمانش می‌کند و نمی‌تواند این بار را تحمل کند؛

$$\Rightarrow L = 1 \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{20000}{24} \times \Big[1 + (0.5)($$

$* \ r = \sqrt{h^2/12}$ r را باید نسبت به محوری بگیریم که خمش اتفاق می‌افتد؛

$$\Rightarrow r = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$



$h = 6$

رادیان

$$\Rightarrow \cos\left(\sqrt{\frac{2\times10^4}{2\times10^6\times24}} \cdot \frac{100}{2\sqrt{3}}\right) = 0.83$$

پس اول میله به خمش می‌افتد سپس به ازای بار اویلر به کمانش می‌افتد (در حالت عمودی)؛ برعکس

حول محور خمش

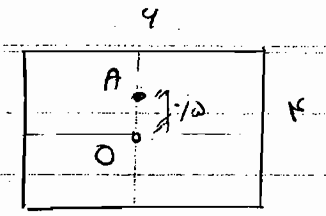
$$\Rightarrow \sigma_{max} = \frac{2\times10^4}{24}\left[1 + \frac{(0.5)(3)}{3} \cdot \frac{1}{0.83}\right] = 1165 \ \frac{Kg}{cm^2}$$

* اگر L کمتر باشد σ_{max} کمتر خواهد بود؛

اگر به طول توجه نداشتیم؛ $L = 200$ می‌گذاشتیم؛

$$\Rightarrow \cos\sqrt{\frac{2\times10^4}{2\times10^6\times24}} \cdot \frac{200}{2\sqrt{3}} = 0.7$$

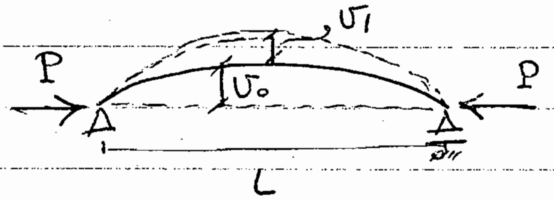
برای σ_{max} یک عدد کمتری از ۸۳٪ بدست می‌آید درحالیکه کمانش اتفاق افتاده است؛



$\cos$ اگر منفی باشد یعنی زاویه از $\frac{\pi}{2}$ بیشتر است یعنی کاهش اتفاق افتاده که در واقع ما به دنبال آن نیستیم!

* حالت دیگر نقص

چون میله مستقیم نباشد :



اگر بار به این میله وارد شود باعث می‌شود که میله بیشتر خم شود اما اگر نیرو کششی بود میله می‌کوشد به حالت مستقیم درآید.

$$v_0 = a_0 \sin \frac{\pi x}{l}$$

بعد از وارد کردن بار v_0 بیشتر می‌شود

$$* \quad v = v_0 + v_1$$

$$* \quad M = -Pv$$ در هر مقطع

* تغییری که در اثر کاهش به وجود می‌آید ناشی از v_1 است :

$$* \quad EIv_1'' = M = -P(v_0 + v_1)$$

$$* \quad EIv_1'' + Pv_1 = -Pv_0$$

v_0 سینوسی است $\Rightarrow \quad v_1 = a_1 \sin \frac{\pi x}{L}$

$$v_1'' = -a_1 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

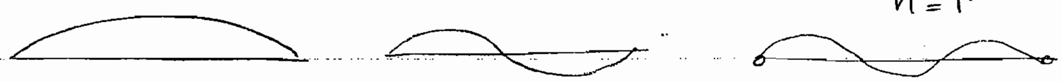
$$\Rightarrow -\frac{a_1\pi^2}{L^2} EI \sin\frac{\pi x}{L} + P a_1 \sin\frac{\pi x}{L} = -P a_0 \sin\frac{\pi x}{L}$$

$$* \quad a_1 = \frac{-P a_0}{-\frac{\pi^2 EI}{L^2} + P} = \frac{Pa}{P_E - P}$$

اگر بخواهیم دقیق‌تر باشیم باید v_0 را به صورت بسط فوریه بنویسیم

$$* \quad v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L} + \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{n\pi x}{L}}$$

cos اول و آخر صفر است.



یعنی این خمیدگی می‌تواند مجموع بی‌نهایت sin ها باشد

$$* \quad v = v_0 + v_1$$
$$M = -P(v_0 + v_1)$$

$$* \quad EI v_1'' = M = -P(v_0 + v_1)$$

$$EI v_1'' + P v_1 = -P v_0$$

جمله‌ای که اضافه می‌شود $v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$

$$v_1'' = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n n^2 \pi^2}{L^2} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cdot \frac{n^2 \pi^2}{L^2} EI \sin\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} P b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} P a_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

چون x متغیر است باید رابطه بازای هر n برقرار باشد تا طرفین $\sin n\pi$ بتواند ساده شود ؛

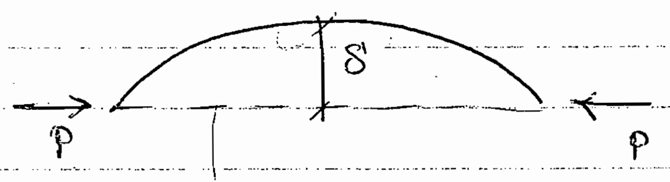
$$* \quad b_n = \frac{P a_n}{n^2 P_E - P} = \frac{P/P_E \cdot a_n}{n^2 - P/P_E}$$

وقتی بار زیاد می‌شود جمله اول بازای $n=1$ ، b_1 به سمت ∞ میل می‌کند جمله ای است

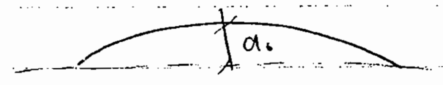
که برای ما مهم است

اگر میله ای خمیدگی داشته باشد وقتی بار را زیاد می‌کنیم و بار به سمت بار کمانی میل می‌کند

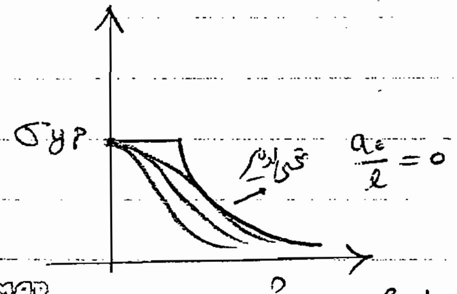
تغییر شکل به سمت $\sin$ ای میل می‌کند



خطا



$\frac{a_0}{L}$



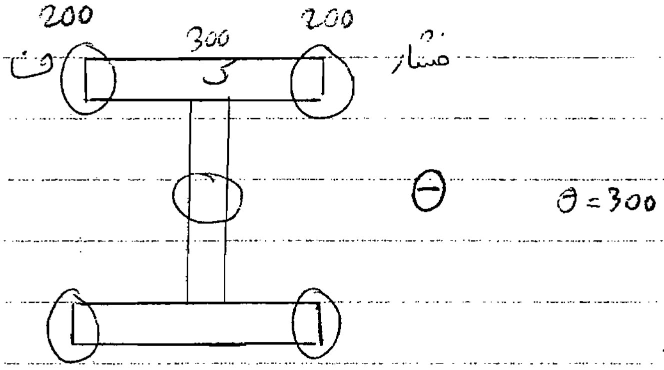
اگر $\frac{a_0}{l}$ را زیاد کنیم « خطای نقص »

منحنی های حاصل نشان می‌دهد که کی تنش به تنش تسلیم می‌رسد .

اگر $a_0 = 0$ باشد خمیدگی اولیه معنی ندارد پس همه از یک نقطه شروع می‌شوند .

یعنی ابتدا اگر $l = 0$ باشد $\frac{P}{A}$ باید به تنش تسلیم برسد ؟

* تنش های پسماند :



وقتی فولاد سرد می شود اول گوشه ها سرد می شوند و وسط مقطع.

فولاد در یک درجه حرارتی مذاب است از آن به بعد با تغییر درجه حرارت اگر طول ثابت باشد تنش در آن ایجاد می شود.

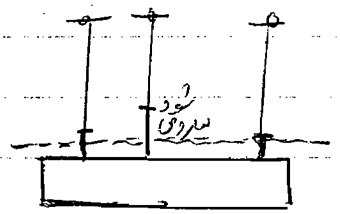
چون با ضربه می توان شکل فولاد را عوض کرد پس تنشی در آن ایجاد می شود یا در یک حالت نیمه جامد را داشته باشد یعنی به یک درجه حرارتی می رسد که تغییر طول آن آزاد باشد اگر آزاد نباشد تنش ایجاد می شود.

بالاتر از θ مذاب است پایین تر از آن مذاب نیست

نقاط ضعیف شده زودتر از θ پایین می آیند

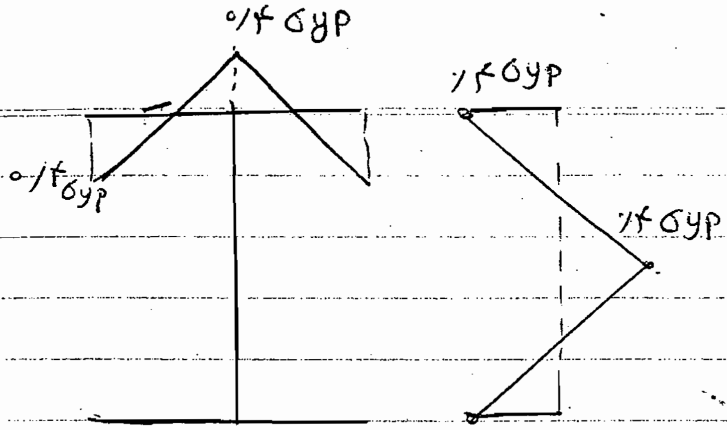
در یک حالتی که همه از θ کمتر شدند از این به بعد همه نقاط یا باید به یک اندازه درجه حرارتشان کم شود که

در این صورت تنش ایجاد می شود



کرنش متعادل باید ایجاد شود چون تیر صلب است.

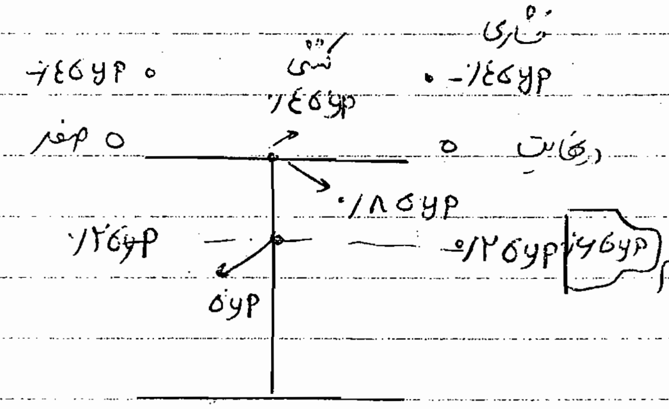
در حالتی که مقطع سرد شده و شکل به ۲۰°c رسیده است گوشه تحت اثر فشار است و وسط تحت کشش ؟



جان و بال
توزیع I

- این انتگرال صفر خواهد بود چون هیچ نیرویی نداریم.

$$\int_A \sigma \, dA = 0$$



فرض کنیم ٪۴σyp داشته باشیم

اگر تنش را به اندازه $\underline{\sigma yp}$ از کششی زیاد کنیم $\boxed{٪۶\sigma yp}$

تا ٪۴σyp تنش را اضافه کنیم

در گوشه تنش صفر می‌شود.

$F = ٪۶\sigma yp$

در کتاب‌های مختلف ممکن است به جای ۰/۴ ، ۰/۳ باشد

یا شکل توزیع سهموی باشد.

وقتی به σyp برسیم بدون اعمال نیرو می‌توان تغییر طول ایجاد کرد یعنی اگر (٪۶σypA) نیرو اعمال کنیم وسط به تنش تسلیم رسیده است از این به بعد با افزایش نیرو دیگر گوشه‌ها تنش نمی‌گیرند بلکه فقط وسط تنش آن تغییر می‌کند یعنی تنش‌ها به جاهایی می‌روند که تنش کمتر است

مثلاً $F = ٪۷\sigma yA$ باعث می‌شود که فقط وسط تنش آن تغییر می‌کند.

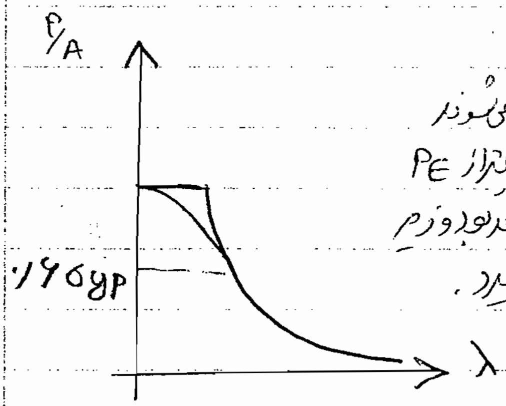
اگر تنش های فشاری اعمال کنیم :

	$-0/4\sigma_{yp}$	
$0/3\sigma_{yp}$	$-0/5\sigma_{yp}$	فشاری $F_1 = -0/1\sigma_{yp} \cdot A$
0	$-0/8\sigma_{yp}$	$F_2 = -0/4\sigma_{yp} \cdot A$
$-0/2\sigma_{yp}$	$-\sigma_{yp}$	$F_3 = -0/6\sigma_{yp} \cdot A$

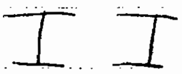
اما اگر طول زیاد باشد و کمانش مطرح باشد

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

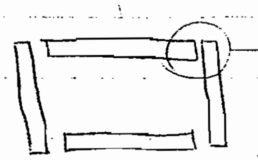
هرچه l کوچکتر باشد مقدار بار بحرانی افزایش می یابد.



می توان بار بیشتر اعمال کرد این بار اعمالی به همه جا اضافه نمی شود به
جوی که بیشتر اضافه می شود. با اعمال این یک سمت های در محاسبه I خارج می شوند
پس P_E کوچکتر از P_E
حقیقی خواهد بود و زیر P_E قرار می گیرد.

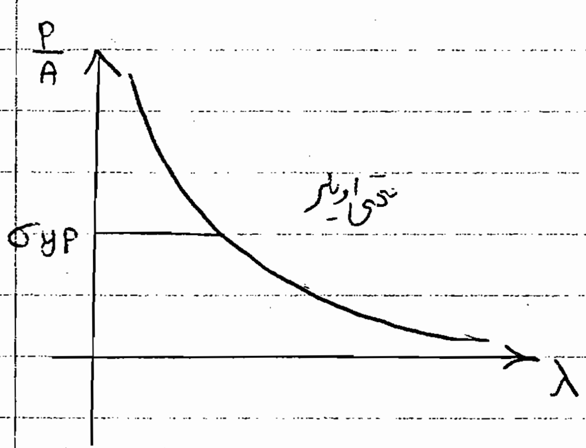


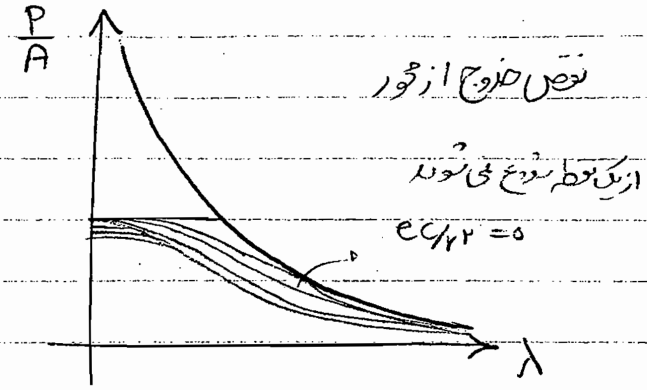
اگر دو I را به هم متصل کنیم اندیس باند با I فرق دارد.



چون در این حالت جوش داده می شود
تنش پسماندها ممکن است به تنش σ_{yp}
برسد

۸۴٫۹٫۱۲ به نام خدا ج ۱۱

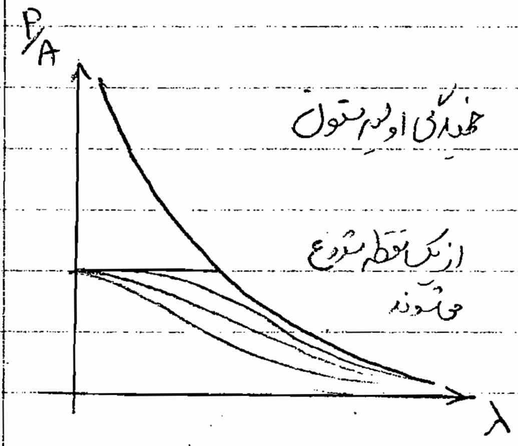




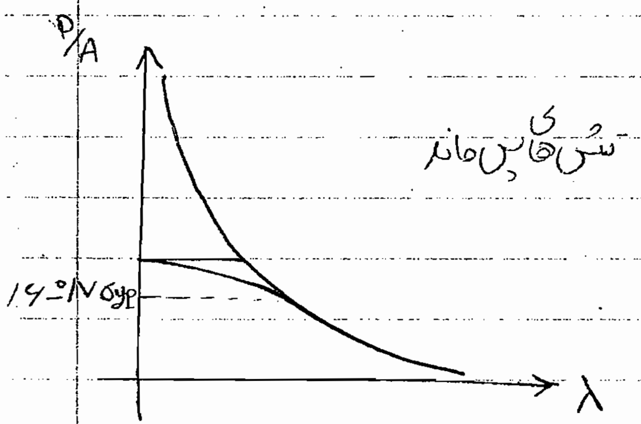
$\frac{ec}{r^2}$ e مقدار واقعی خروج از مرکز

c فاصله از مرکز مقطع در خمش

r شعاع ژیراسیون

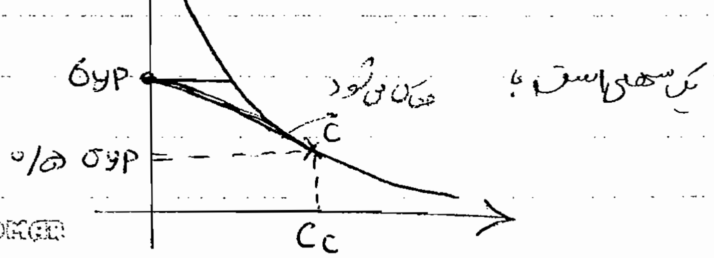


$\frac{a}{l}$ a مقدار δ در وسط تیر



هر چه قدر خروج از محور را بخواهید صفر کنید صفر نمی شود باید یک مقداری در نظر بگیرید

آیین نامه آمریکا که آیین نامه ایران از روی آن است به صورت زیر است؟



آیین نامه آمریکا اثرات مجموع نقص‌ها و تنش‌های پسماند را باهم بررسی کرده و مقدار $0/5\sigma_{yp}$ را درنظر گرفتند.

فرمول منحنی اویلر $* \; \sigma = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \dfrac{P}{A}$

معادله منحنی $* \; \sigma = A - B\lambda^2$

$\lambda = 0 \Rightarrow A = \sigma_{yp}$

$C \,\Big|\, \begin{array}{l} C_c \\ 0/5\sigma_{yp} \end{array}$

c هم روی منحنی اویلر است
هم روی منحنی آیین نامه.

$0/5\sigma_{yp} = \dfrac{\pi^2 E}{C_c^2} \Rightarrow C_c = \sqrt{\dfrac{2\pi^2 E}{\sigma_{yp}}}$

این منحنی می تواند بکار برود اما یک ضریب اطمینان باید بکار برده شود:

درمنحنی منحنی اویلرسی از نقطه c ضریب اطمینان $\frac{23}{12}$

در $\lambda = 0$ ضریب اطمینان $\frac{5}{3}$ حمل کشش است

از 0 تا نقطه c ضریب اطمینان از $\frac{5}{3}$ تا $\frac{23}{12}$ تغییر می کند به صورت زیر:

$$S.F = \frac{5}{3} + \frac{3\lambda}{8C_c} - \frac{\lambda^3}{8C_c^3}$$

به تدریج که λ زیاد می شود SF زیاد می شود:

$\lambda = C_c \qquad SF = \dfrac{23}{12}$

« آیین نامه ایران - آمریکا »

حالت کششی

برای مقادیر مختلف λ، ضریب $SF = \frac{5}{3}$ بود

درحالت فشاری هرچه λ بیشتر می شود احتمال نقص بیشتر است پس ضریب اطمینان زیادتر شده است.

از نقطه C به بعد خطاها به مقدار max خود رسیده از این ضریب اطمینان ثابت می شود

در فشار خراب شدن در طول های کم با تسلیم است و در طول زیاد با کمانش هرچه طول زیادتر باشد

کمانش بیشتر است.

در همین مورد نظر تنش های پسماند بیشترین اثر را دارند

برای هر λ می توان یک تنش مجاز بدست آورد اول σcr مربوط به آن λ را می یابیم بر ضریب

اطمینان تقسیم می کنیم تا σa بدست آید

این منحنی بر اساس مقطع I بدست آمده و آیین نامه آمریکا می گوید همه مقاطع دیگر را از روی این منحنی

بیابید درحالیکه درست نیست

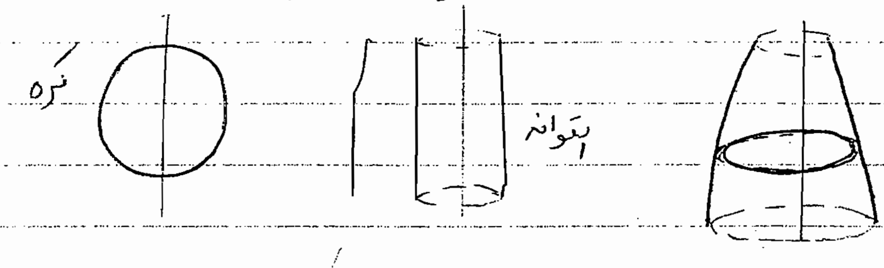
در آیین نامه آلمان $\sigma a \geq \omega \frac{P}{A}$ باید این رابطه برقرار باشد درحالیکه $\omega \geq 1$ است یعنی

σa را از یاد می کنند P را از روی آن می یابند.

مخازن جدار نازک مدور :

هم بارگذاری و هم شکل مخزن طوری باشد که نسبت به یک محور قرینه باشد

کره



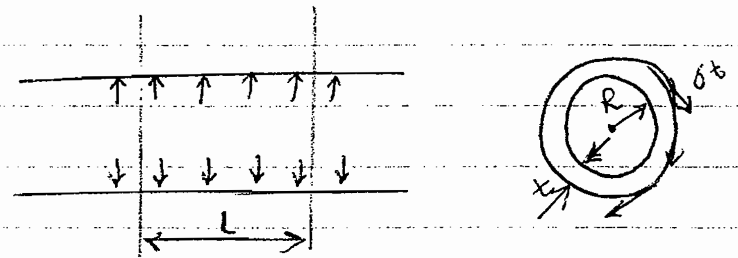
استوانه

در حالت کلی یک تاقی دور محور چرخد

بارگذاری هم باید مدور باشد. تا تقارن از بین نرود

حالت های ساده تر استوانه و کره را ابتدا بررسی می کنیم :

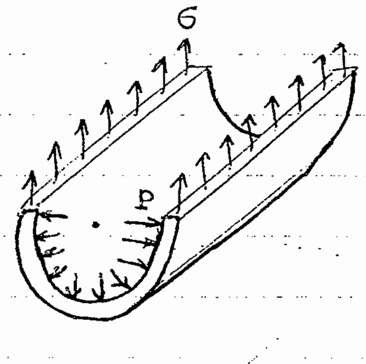
یک استوانه طولانی داریم



فرض کنیم فشار ثابت P در تمام نقاط داریم

مثلاً یک لوله گاز مستقیم

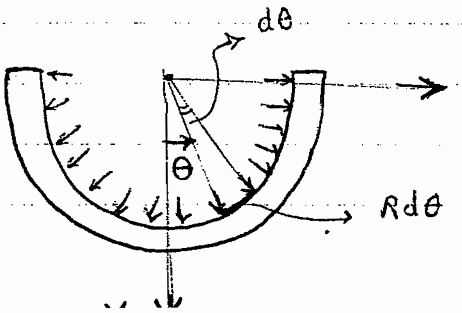
می توانیم فقط قسمتی از استوانه را به طول واحد یا طول L در نظر بگیریم ؛



از طرفی می توان آن را به دو نیم استوانه تبدیل کرد ؛

فشار سیال عمود بر جدار است

اگر استوانه کامل بود تقارن برقرار بود اما اینجا نیم استوانه است .



$$\Rightarrow \quad dF = P(Rd\theta)L$$

$$dF_y = P(Rd\theta)L.\cos\theta$$

$$F_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} PRL \cos\theta \, d\theta$$

چون متقارن است $\Sigma F_x = 0$ است

$$= PRL . \sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$F_y = 2PRL$$

می‌توانستیم با تصور P عمود بر محور هم F_y را بیابیم که می‌شود P ضرب در مساحت یک مستطیل به طول L و عرض $2R$

برای حفظ تعادل σ در سطح جدار نازک داریم:

$$\sigma = \frac{2PRL}{\underbrace{2tL}_{\text{مساحت مستطیل‌ها}}}$$

$$\sigma_t = \frac{PR}{t}$$

در هر نقطه این تنش مماس بر محیط جدار نازک است

این تنش را تنش مماسی یا تنش محیطی یا تنش حلقوی می‌گویند

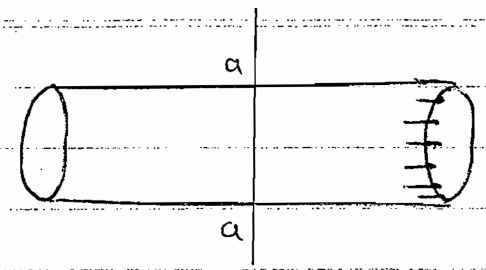
مماسی tangential stress

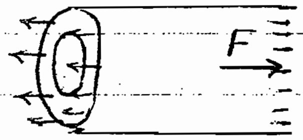
محیطی Circumferential "

حلقوی Hoop "

اگر طول استوانه را ∞ نگیریم یعنی استوانه از انتها بسته است به ته استوانه فشار وارد می‌شود

این فشارها در هر مقطعی که استوانه را قطع می‌کنیم باید در حال تعادل باشند:





$$F = P \cdot \pi R^2$$

جدار نازک $A = 2\pi R \cdot t$ R متوسط

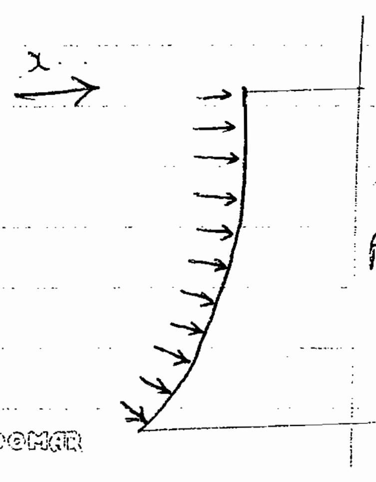
$$\sigma = \frac{\pi R^2 P}{2\pi R t}$$

تنش طولی چون در امتداد طول استوانه است $\sigma_l = \dfrac{PR}{2t}$

* تنش طولی در استوانه‌ها نصف تنش محیطی است ؛

اگر یک لوله را زیر آب ببریم اگر فشار آب دور لوله تقریباً ثابت باشد از همین رابطه استفاده می‌شود ولی تنش‌ها فشاری خواهند بود ؛

همیشه از R متوسط استفاده کنید ؛

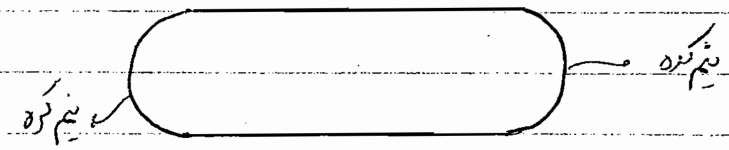


این که ته استوانه چطور بسته باشد فرقی ندارد ؛

مثلاً اگر بخواهیم نیروها را در جهت x بیابیم سطح را در جهت عمود بر x تصویر می‌کنیم

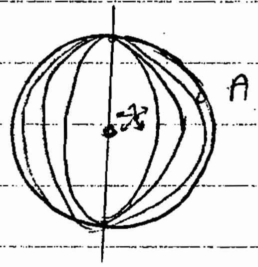
$$F_x = P.A$$

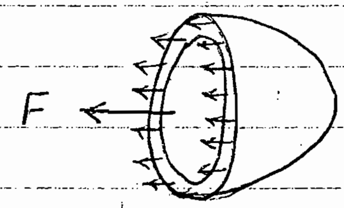
مثال :



هر چه طول استوانه را کم کنید باز هم تنش طولی را به همان مقدار خواهید داشت

تا جایی که به یک کره تبدیل کنید ؟





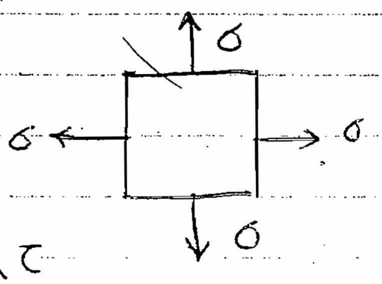
$$F = P.\pi R^2$$

$$\sigma = \frac{P.\pi R^2}{2\pi R t}$$

$$\sigma = \frac{PR}{2t}$$

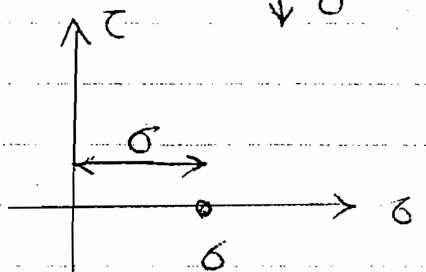
در کره تنشی که داریم با تنش طولی استوانه برابر است ؟

در نقطه ای مثل A تنش در همه جهات وجود دارد چون در نقطه روی کره می توان در هر جهتی یک مقطع زد و کره را به دو نیم کره تقسیم کرد .



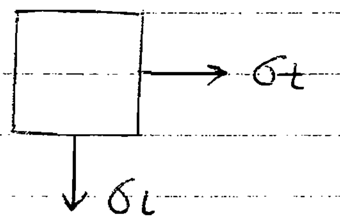
$A \,\Big|\, \begin{matrix}\sigma\\ \sigma\end{matrix}$

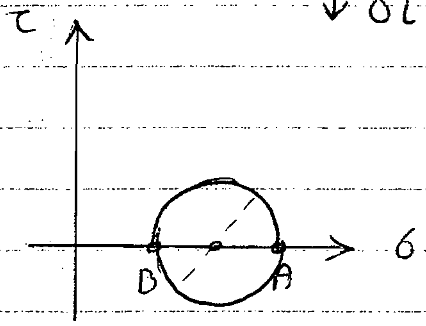
$B \,\Big|\, \begin{matrix}\sigma\\ \sigma\end{matrix}$



دایره مور یک نقطه می شود

در استوانه





در صفحات مایل هم تنش عمودی
داریم هم تنش برشی.

در مخزن جدار نازک به هر حال نه آن بسته است به هر نحوی پس هر دو تنش را داریم σ_t ، σ_l

دیگر این دو تنش وجود دارند ولی مقدار آن با مقدار تنش طولی استوانه برابر است در کتاب جابه

نام تنش محاسبه اسم گذاشته می شود.

به خاطر وجود تنش ها ε داریم

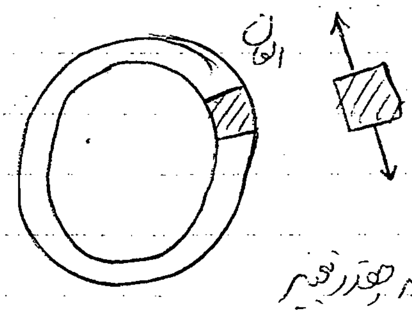
در استوانه داریم

$$* \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu \sigma_l)$$

تنش طولی

$$* \quad \varepsilon_l = \frac{1}{E}(\sigma_l - \nu \sigma_t)$$

$$; \quad \varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l}$$



$* \ \varepsilon_t \ 8$

وقتی تغییر طول‌ها در این حالت
جمع می شود معلوم می شود که محیط استوانه چقدر تغییر
کرده است.

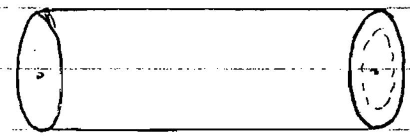
$$* \quad \varepsilon_t = \frac{\Delta(2\pi R)}{2\pi R} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta D}{D}$$

درکره داریم :

$$* \quad \varepsilon = \frac{1}{E}(\sigma - \nu\sigma) = \frac{\sigma}{E}(1-\nu)$$

$$* \quad \varepsilon = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta D}{D}$$

مثال :



$L = 10\,m$
$R = 2\,m$
$t = 3\,cm$
$E = 2\times10^{6}\ kg/cm^2$
$\nu = 0/3$

فشار گاز داخل برابر است با $15\ \frac{kg}{cm^2}$.

اولاً تنش های طولی و محاسبه؟ ثانیاً تغییر ابعاد مخزن؟

$$* \quad \sigma_t = \frac{PR}{t} = \frac{15\times200}{3} = 1000\ kg/cm^2$$

$$\sigma_l = \frac{PR}{2t} = 500$$

$$* \quad \varepsilon_t = \frac{1}{2\times10^{6}}\left(1000 - 0/3(500)\right) = 425\times10^{-6}\ cm$$

$$* \quad \Delta R = R(\varepsilon_t) = 200(425\times10^{-6}) = 0/085$$ تغییر شعاع

$$* \quad \varepsilon_l = \frac{1}{2\times10^{6}}\left(500 - 0/3(1000)\right) = 10^{-4}$$

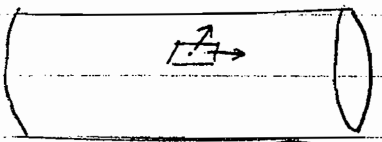
$$* \quad \Delta l = \varepsilon_l \cdot l = 1000\times10^{-4} = 10^{-1}\ cm = 1\ mm$$ تغییر طول

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta R}{2R} + \frac{\Delta l}{l}$$

تغییر حجم $\Rightarrow V = \pi R^2 l$

$$\Delta V = 2\pi R(\Delta R)L + \pi R^2 \Delta l$$

تنش حجمی $\varepsilon_V = \underbrace{\varepsilon_1}_{\varepsilon_t} + \underbrace{\varepsilon_2}_{\varepsilon_l} + \varepsilon_3 \quad *$



$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

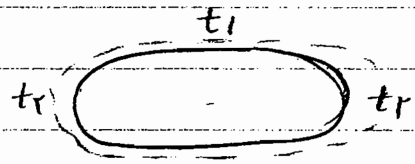
$$\varepsilon_3 = -\frac{0/3}{2\times10^{7}}(\varepsilon_t + \varepsilon_l) = -225\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_t + \varepsilon_l + \varepsilon_3$$

ε_V که بدست آوردیم تغییر حجم مصالح بکار رفته را به ما می دهد نه حجم فضای درونی را

درحالیکه ΔV که بدست آوردیم تغییر حجم خود گاز درون ظرف است.

مثال: در شکل نسبت $\frac{t_1}{t_2}$ را چنان بیابید که در محل اتصال تنش اضافی ایجاد نشود؟



دو قسمت نیمکره و یک قسمت استوانه‌ای داریم.

استوانه $\varepsilon_t = \frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_l)$

کره $\varepsilon = \frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{E}(\sigma - \nu\sigma) = \frac{\sigma}{E}(1-\nu)$

$$\varepsilon_t = \varepsilon$$

$$\sigma_t - \nu\sigma_l = \sigma(1-\nu)$$

$$\frac{PR}{t_1} - \nu\frac{PR}{2t_1} = \frac{PR}{2t_2}(1-\nu)$$

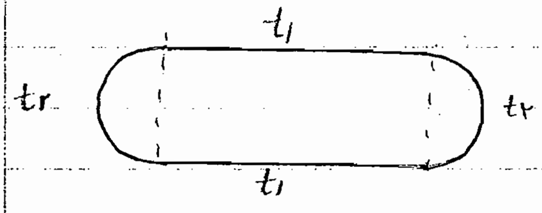
$$\frac{2-\nu}{2t_1} = \frac{1-\nu}{2t_2} \Rightarrow \boxed{\frac{t_2}{t_1} = \frac{1-\nu}{2-\nu}}$$

باید همزمان با هم تغییر حجم بدهند.

اگر ضخامت همه جا یکسان باشد حتماً در حوالی محل اتصال تنش ها از این فرمول ها تبعیت نمی‌کند

و تنش های خمشی یا کششی با فرمولها جمع می‌شود.

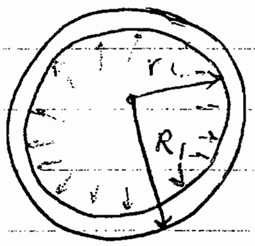
مثال: مخزنی مطابق شکل با ورق هایی به ضخامت $t_1 = 17^{mm}$, $t_2 = 7\,mm$ و طول $L = 30\,m$ و $D = 20\,m$



اگر داخل استوانه را پر از آب با فشار معمول کنیم و بعد از آن مقداری آب اضافی پمپ کنیم تا فشار $10\frac{kg}{cm^2}$ اضافه شود چقدر آب به داخل آن پمپ خواهد شد؟

ضریب تراکم آب $= 10^{-4}$

به درد مدل آب طب خواهد شد کلی به خاطر تغییر حجم استوانه و کره
دوم به خاطر این که آب تراکم پذیر است ؛



مثال : حلقه فولادی ① که شعاع داخلی آن کوچکتر از شعاع داخلی حلقه ②
است می خواهیم روی حلقه ② قرار دهیم و این کار را با
حرارت انجام می دهیم

$r_1 = 20^{cm}$

$R_2 = 20/01^{cm}$

وقتی مجموعه سرد می شود تنش هایی در حلقه‌ها ایجاد می شود
و فشاری بین آنها رد و بدل می شود .

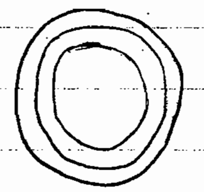
$t_1 = 1^{mm}$

$t_2 = 2^{mm}$ $\qquad E = 2 \times 10^6 \; Kg/cm^2$

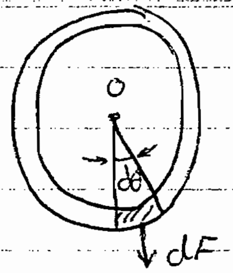
یعنی به حلقه ① فشارهائی ایجاد می شود تا شعاع آن بزرگتر شود ؛
در نهایت شعاع ها باید برابر شوند ؛ cm

$|\Delta R_1| + |\Delta R_2| = 0/01$

$\Rightarrow \Delta R_1 - \Delta R_2 = 0/01^{cm}$ $\qquad R_1$ زیاد می‌شود ، R_2 کم



مثال ۴ دو حلقه از دو جنس متفاوت
روی هم قرار بگیرند
مثلاً Al، St چون Al ضریب انبساط
بزرگتری دارد وقتی گرم می‌شوند Al بیشتر تغییر قطر
می‌دهند، باید در این حالت ΔR ها مساوی
باشند که در این حالت ΔR های یکی ناشی از فشار داخلی است یکی ناشی از حرارت



اگر یک حلقه‌ای داشته باشیم و حلقه حول محوری عمود بر
صفحه شکل دوران کند در اثر این دوران نیروی گریز از مرکز
به ذرات آن وارد می‌شود که می‌خواهد قطر آن را زیاد کند
مثل این است که یک فشاری از داخل به آن اثر می‌کند.

ω سرعت زاویه‌ای

$$dF = dm\,(\omega^2 R)$$

$$* \quad dm = \rho\, \underbrace{dV}_{\text{حجم}}$$

$$* \quad dF = \rho\, dV\,(\omega^2 R)$$

$$= \rho\,(L.t.R\,d\theta)\,\omega^2 R$$

$$dF = \rho L t R^2 \omega^2 d\theta$$

فشار ایجاد کننده $$P = \frac{dF}{\underbrace{L.R\,d\theta}_{dA}} = \rho t R \omega^2$$

$$\sigma_t = \frac{PR}{t} = \rho R^2 \omega^2$$ تنش مماسی

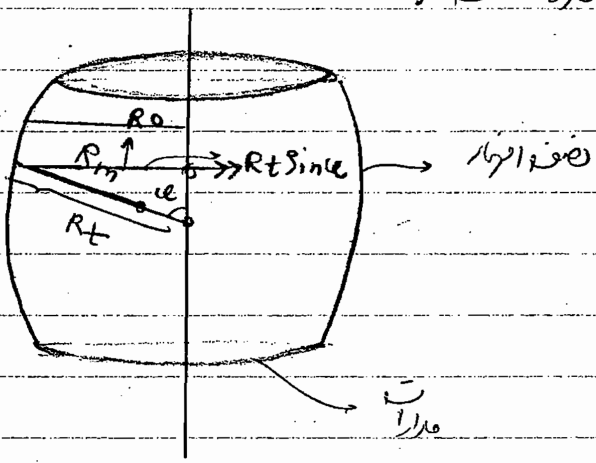
$$\sigma_t = \frac{\gamma}{g} R^2 \omega^2$$

$$R^2\omega^2 = \underbrace{v^2}_{\text{سرعت خطی}} \quad *$$

حجم

حالت کلی 8

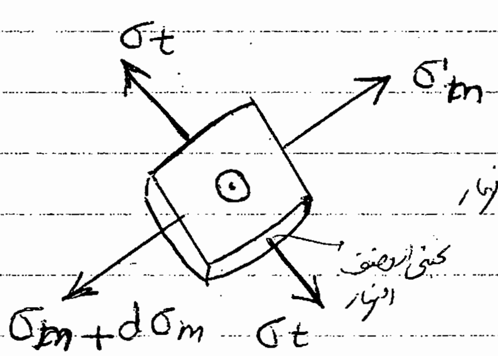
یک مخزن از دوران یک منحنی حول یک محور ایجاد شده است :



R_m شعاع انحنای صفحه انحنا

R_0 شعاع مدار

اگر تعادل یک المان از این مخزن را در نظر بگیریم



σ_m مماس بر صفحه انحنا (σ_l)

σ_t عمود بر صفحه انحنا

$\odot$ فشار عمود بر المان از داخل

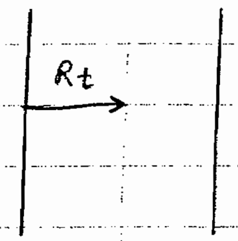
$$\boxed{\frac{\sigma_t}{R_t} + \frac{\sigma_m}{R_m} = \frac{P}{t}}$$

σ_t ها در بالا و پایین مستقیم
با هم زاویه خیلی کوچکی می سازند.

σ_m ها در بالا و پایین المان
متفاوت اند ؛ ولی برآیند
آنها در جهت امتداد P می افتد.

* σ_m معمولاً از تعادل نیروها در امتداد محور دوران بدست می آید :

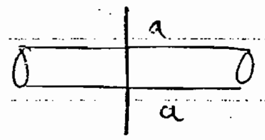
استوانه



$R_m = \infty$

$\sigma_m = \sigma_l$

برای بدست آوردن σ_m باید استوانه را قطع کنیم

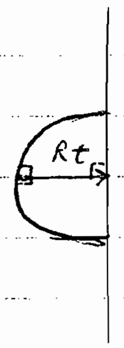


σ_m همان σ_l است.

$$\Rightarrow R_m = \infty \qquad \frac{\sigma_m}{R_m} = 0$$

$$* \quad \frac{\sigma_t}{R_t} = \frac{P}{t} \Rightarrow \sigma_t = \frac{PR_t}{t} = \frac{PR}{t}$$

* برای یک کره :



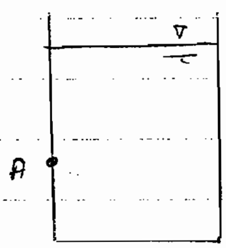
$R_t = R_m = R$

کره را از هر جهت قطع کنیم

یک شکل دارد به عبارتی شکل کره در همه جهات یکی است

پس $\sigma_m = \sigma_t$ است

$$* \quad \frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R} = \frac{P}{t} \Rightarrow \sigma = \frac{PR}{2t}$$



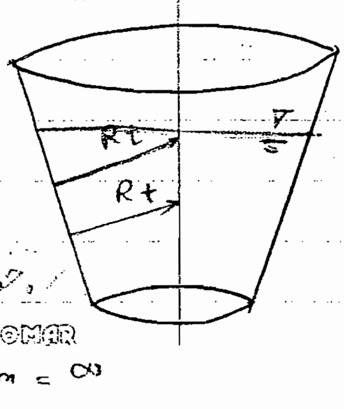
در نقطه A

با داشتن P

می توان σ را یافت

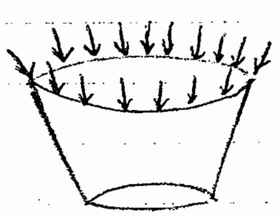
بارگذاری روی مخزن حتماً باید دوار باشد

اگر استوانه به طور افقی باشد نمی توان از این روش رفت

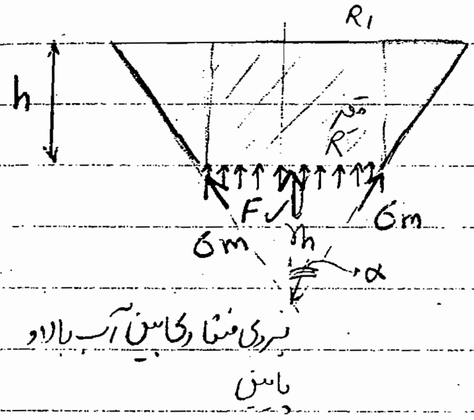


دوار

$R_m = \infty$



σ_m را از روی تعادل می یابیم؟



$$P = \gamma h$$

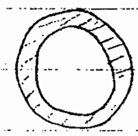
$$W_{\text{آب}} = V\gamma = (A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})\frac{h}{3}$$

$$= (\pi R_1^2 + \pi R^2 + \pi R_1 R)\frac{h}{3}\gamma$$

$$F = \pi R^2 h \gamma$$ وزن آب بالای این مقطع

$$* \int_0^{2\pi} \sigma_m \cdot tRd\theta \cos\alpha =$$ تصویر کردیم همراه در جهت y

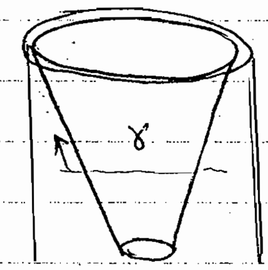
$$= \sigma_m t R(2\pi)\cos\alpha$$

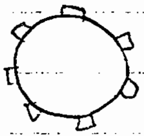


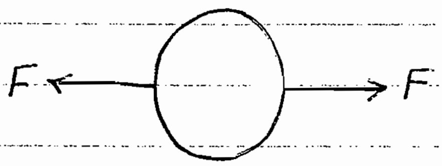
$$W - F = \sigma_m t (2\pi R)\cos\alpha$$

مثال :

از بالا نگاه کنیم

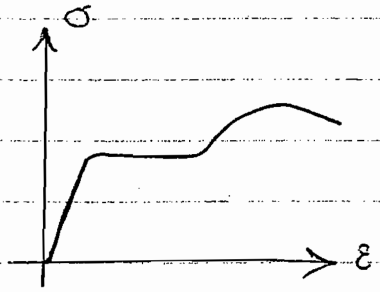






?

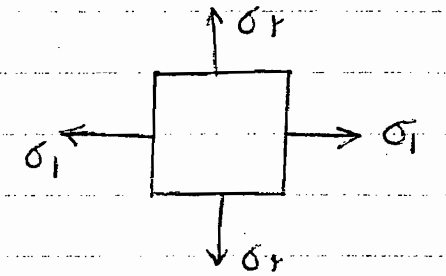
* تئوری های مقاومت 8

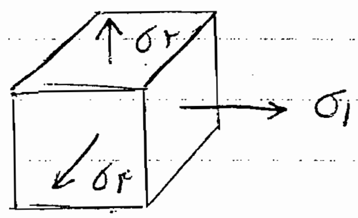


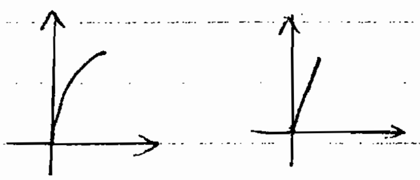
این نمودار را در مقاومت (۱) بررسی کردیم.

مقاومت در مقابل خرابی به چه چیزی بستگی دارد

می خواهیم ببینیم در حالتهای دو بعدی و ۳ بعدی خرابی در کجاست؟







در جاهایی که مثل فولاد تسلیم دارند خرابی را با تسلیم یکی می گیرند

اما جاهایی مثل بتن و شیشه که تسلیم ندارند خرابی آنها را با گسیختگی یکی می گیرند؟

از این به بعد σ_o را در نظر می گیریم اگر جسم تسلیم داشته باشد $\sigma_o = \sigma_{yp}$ در غیر این صورت $\sigma_o = \sigma_u$

* σ_o را حد مقاومت می گویند؟

فرضیه های زیادی ارائه شده است بعضی از این فرضیه ها امروزه رد شده اند اما از نظر تاریخی مهمترین فرضیه ها را بحث می کنیم

* فرضیه اول :

در حالتهای ۲ بعدی و ۳ بعدی هر وقت بزرگترین تنش بین σ_1 و σ_2 و σ_3 به تنش تسلیم رسید

تسلیم اتفاق می افتد اگر به تاب رسید جسم به تنش نهایی می رسد

این فرضیه ساده ترین فرضیه ای است که به ذهن می آید

این فرضیه را فرضیه تنش عمودی ماکزیمم یا فرضیه رانکین می گویند

در یک المان تنش های برشی هم داریم در این فرضیه تنش های اصلی را در نظر می گیرند

این فرضیه بعضی جاها جواب می دهد مثلاً در مورد شیشه و چدن نتایج نسبتاً قابل قبولی می دهد

آنجایی که σ_u دارند بهتر جواب می دهد

* فرضیه دوم : فرضیه پواسون

این فرضیه را فرضیه کرنش خطی ماکزیمم می گویند :

حالت ۳ بعدی

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

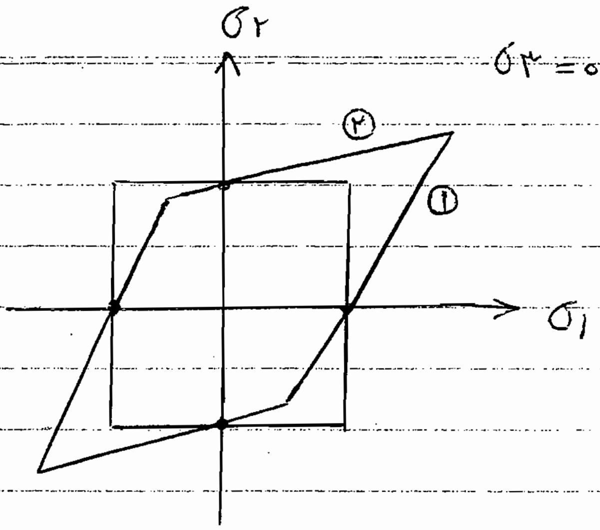
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)\right]$$

بزرگترین تنش بین این ۳ را از روی بزرگترین کرنش در نظر می گیریم

ε معیار را از روی تنش معیار بدست می آورند یعنی $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$

$\sigma_3 = 0$



هرکدام از تنش ها که با σ_0 برابر شد در آن تنش خراب می شود؛ یعنی σ ای را می تواند بپذیرد که داخل شکل باشد.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \qquad \text{if } \sigma_1 > \sigma_2 > 0$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)$$

① $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ $\quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \Rightarrow * \ \sigma_1 - \nu\sigma_2 = \sigma_0$ خط ①

هرچه σ_1 بزرگتر باشد خط از σ_0 دورتر می شود؛

② if $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ $\quad \varepsilon_2 > \varepsilon_1$

$* \ \sigma_2 - \nu\sigma_1 = \sigma_0$ خط ②

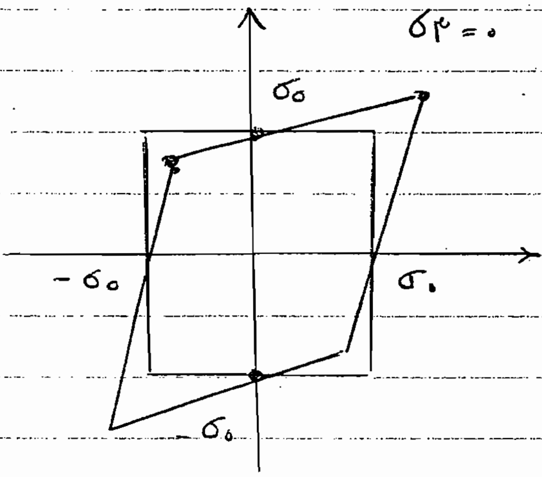
③ $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$ $\quad$ if $|\sigma_1| > \sigma_2$ $\quad \sigma_1 - \nu\sigma_2 = -\sigma_0$

در جاهایی که تنش ها هم علامت اند تنش های بیشتری را می توان اعمال کرد یعنی به فرضیه اول؛

این فرضیه پواسن در خیلی جاها جواب درست نمی دهد؛ نتیجه خوبی ندارد.

فرضیه های مقاومت :

۱ـ فرضیه تنش عمودی ماگزیمم (رانکین)
۲ـ " تغییر شکل خطی ماگزیمم (پواسن)
۳ـ " برش ماگزیمم

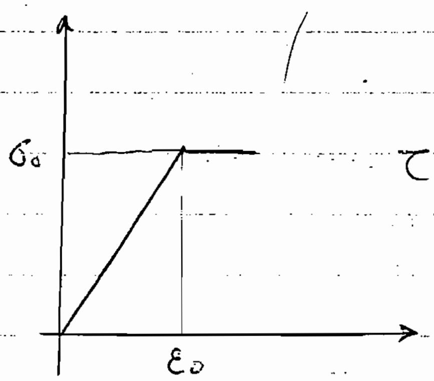


برش max : در این فرضیه برش را ملاک عمل قرار می دهد در رسیدن به حد مقاومت

یا فرضیه کولن ـ ترسکا

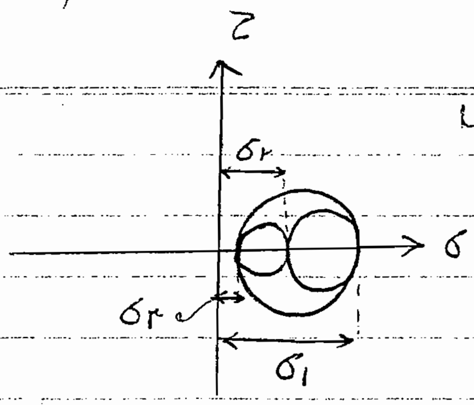
ـ در این فرضیه تنش و تغییر شکل با هم متناسبند :

در برش τ_{xy} دارای γ_{xy} , τ_{xz} دارای γ_{xz} است صفحات عمود بر آن روی γ این صفحه اثر ندارند



$\tau_{max} = \frac{\sigma_0}{2}$

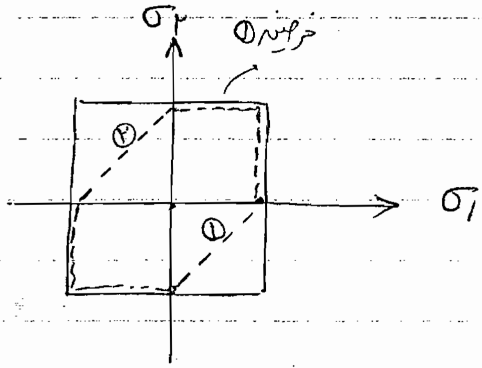
هر جا تنش برشی ماگزیمم به این مقدار برسد تسلیم داریم



در حالت ۳ بعدی

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

– اگر $\sigma_3 = 0$ باشد و $\sigma_1 > \sigma_2$ و هردو مثبت باشند بزرگترین تنش اصلی σ_1 و کوچکترین تنش اصلی σ_3 پس $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - 0}{2}$ و باید با $\frac{\sigma_0}{2}$ برابر باشد پس $\sigma_1 = \sigma_0$



– اگر $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ پس $\tau_{max} = \frac{\sigma_2 - 0}{2}$ و $\tau_{max} = \frac{\sigma_0}{2}$ $\Leftarrow$ $\sigma_2 = \sigma_0$

– $\sigma_1 < \sigma_2 < 0$ $\Leftarrow$ $\tau_{max} = \frac{0 - \sigma_1}{2}$ و $\tau_{max} = \frac{\sigma_0}{2}$ $\Leftarrow$ $\sigma_1 = -\sigma_0$

پس در این ۴ منطقه فرضیه اول برقرار است؟

اگر $\sigma_1 > 0$ و $\sigma_2 < 0$ باشد

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_0}{2}$$

خط ① : $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_0$ خط داریم به معادله

اگر $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$ باشد

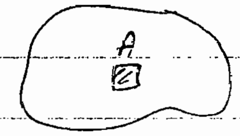
$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} = \frac{\sigma_0}{2} \quad ②$$

این فرضیه برای مصالحی که تسلیم دارند فرضیه خوبی است .

« به شکل ۶ ضلعی است »

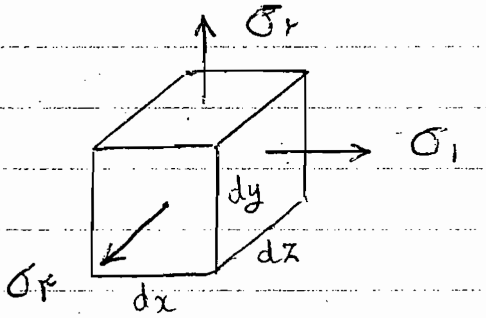
۴- فرضیه انرژی کرنش واحد حجم : « بلترامی »

اگر یک نقطه بخواهد به تسلیم برسد انرژی در واحد حجم المان باید به معیار مورد نظر برسد ؟



معیار $u = \frac{\sigma_0^2}{2E}$

در هر حالتی انرژی به این مقدار که برسد به تسلیم رسیده ایم



$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \upsilon(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \upsilon(\sigma_3 + \sigma_1)\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \upsilon(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$$

$$* \quad \overbrace{U}^{\text{کل انرژی}} = (\overbrace{\sigma_1 dy dz}^{\text{نیرو}}) \cdot (\overbrace{\varepsilon_x dx}^{\text{تغییر مکان}\ \varepsilon_1})(1/2) + 1/2(\sigma_2 dx dz)\cdot(\overbrace{\varepsilon_y dy}^{\varepsilon_2})$$
$$+ 1/2(\sigma_3 dx dy)\cdot(\overbrace{\varepsilon_z dz}^{\varepsilon_3})$$

واحد حجم $u = \frac{U}{V} = 1/2(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)$

$$\text{با جاگذاری مقادیر} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\right]$$

$$u=\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\right]$$

که باید با $\frac{\sigma_0^2}{2E}$ برابر شود:

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)=\sigma_0^2$$

معادله یک بیضی گون است

در حالت ۲ بعدی معادله یک بیضی است: $\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\nu\sigma_1\sigma_2=\sigma_0^2$

روی یک خط با زاویه ۴۵° حرکت کردیم پس $\sigma_1=\sigma_2$ است.

در نقاط گوشه در ربع اول مختصات

$$* \quad \sigma'^2+\sigma'^2-2\nu\sigma'^2=\sigma_0^2$$

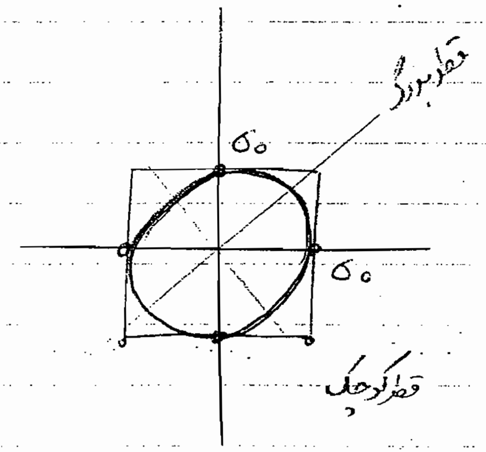
$$* \quad \sigma'^2=\frac{\sigma_0^2}{2(1-\nu)}$$

$$\Rightarrow \sigma'=\frac{\sigma_0}{\sqrt{2(1-\nu)}}$$

$$1-\nu>\tfrac{1}{2} \Rightarrow 2(1-\nu)>1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2(1-\nu)}>1$$

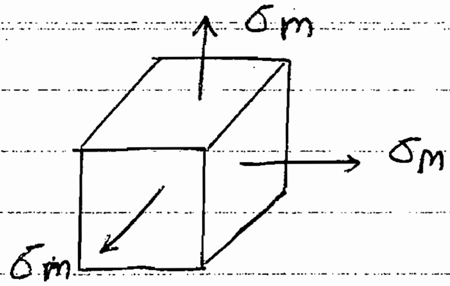
$$\Rightarrow \sigma'<\sigma_0$$



این فرضیه هم تقریباً با هیچ جسمی جور در نمی آید

اما این فرضیه باعث شد تا فرضیه مهم و خوب دیگری با نام فرضیه انرژی پخش اعوجاج واحد حجم ارائه شد

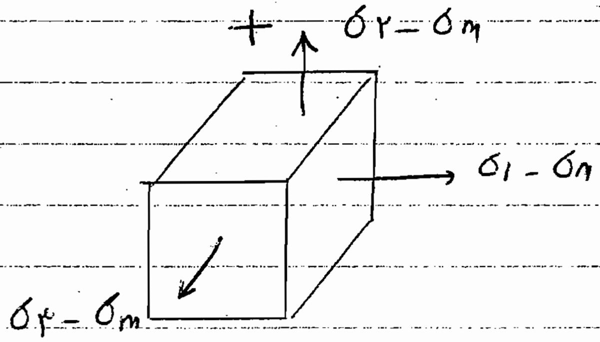
۵ - انرژی تنش اعوجاج واحد حجم 8



$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

✓ این شکل اعوجاج ندارد چون برش نداریم
فقط تغییر حجم داریم

+

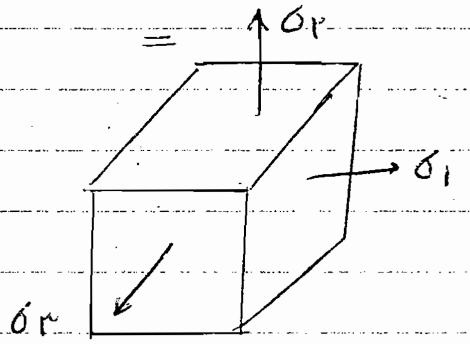


✓ این شکل تغییر حجم ندارد اگر ε_v را حساب کنیم

$$\varepsilon_v = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \Rightarrow \varepsilon_v = 0$$

فقط اعوجاج دارد

=



فرضیه هوبر هنکی فون میسس

اگر یک تنش کروی داشته باشیم و از همه طرف حجم را تحت اثر تنش های مساوی قرار بدهیم اعوجاج نداریم پس انرژی تنش اعوجاج ندارد پس طبق این فرضیه به تنش کروی هیچ وقت به تسلیم نمی رسد ؟

این فرضیه نسبت به فرضیه های دیگر قابل قبول تر است ؟

distortion اعوجاج

$$* \quad U_d = \frac{1}{2E}\Big[(\sigma_1-\sigma_m)^2 + (\sigma_2-\sigma_m)^2 + (\sigma_3-\sigma_m)^2 - 2\nu\big[(\sigma_1-\sigma_m)(\sigma_2-\sigma_m) + (\sigma_2-\sigma_m)(\sigma_3-\sigma_m) + (\sigma_3-\sigma_m)(\sigma_1-\sigma_m)\big]\Big]$$

$$u_d \; \frac{1}{2E} \quad \sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+3\sigma_m^2-2\sigma_m(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

$$+\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-3\sigma_m^2$$

$$\frac{2\sigma_1^2}{3}+\frac{2}{3}\sigma_2^2+\frac{2}{3}\sigma_3^2-\frac{2}{3}(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)$$

$$-2\nu\left[\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1+3\sigma_m^2-2\sigma_m(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\right]$$

$$+2\nu\left[-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1+3\sigma_m^2\right]$$

$$+2\nu\left[\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}{3}-\frac{\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1}{3}\right]$$

$$u_d=\frac{1}{3E}(1+\nu)\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3)\right]$$

$$\sigma_2=\sigma_3=0 \Rightarrow u_d=\frac{\sigma_0^2(1+\nu)}{3E}$$

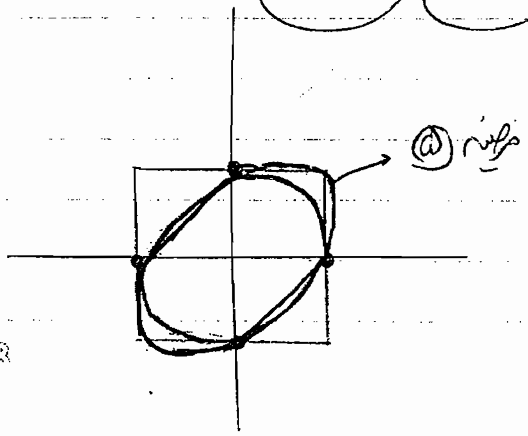
رابطه کلی

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\left[\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right]=\sigma_0^2$$

در فرضیه ④ ضریب 2ν داشتیم اما در اینجا نداریم ؟

دو بعدی :

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2=\sigma_0^2$$



بیضی کشیده است
از داخل بیضی فرضیه ④ می گذرد

در واقع یک استوانه است که تا ∞ ادامه دارد

ولی فرضیه ۴ یک سطحی گون است

فرضیه ۳ یک منشور است که محور آن همان محور استوانه است با هر ۳ محور زاویه های مساوی دارد

مقطع این فرضیه در حالت ۳ بعدی با صفحه یک شکل ۶ ضلعی است که تا ∞ ادامه دارد

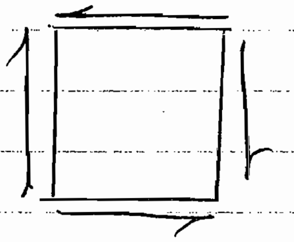
فرضیه یک مکعب است که محدود است تا ∞ نمی روند پس دارای اشکال است

مثلاً مواد در تنش کروی فشاری خراب نمی شود به تسلیم نمی رسد .

فرضیه دوم یک شکل متوازی السطوح است که حجم محدود دارد

۶ـ فرضیه مور بعداً توضیح داده می شود .

اگر حد مقاومت را بخواهیم بیابیم



$\sigma_1 = \tau$

$\sigma_2 = -\tau$

$\sigma_3 = 0$

خط با زاویه ۴۵° داریم

در پیچش خالص

فرضیه ۱ بیشترین مقاومت را دارد

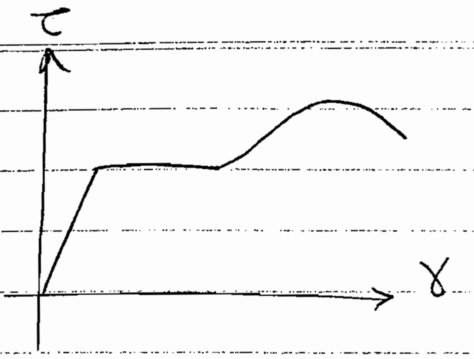
فرضیه ۳ از همه کمتر مقاومت دارد ۱۰ ٪ حق خودار

فرضیه ۳ مقدار ماکزیمم را $\frac{\sigma_0}{2}$ می دهد

فرضیه فون ـ میسز :

$$3\tau^2 = \sigma_0^2 \Rightarrow \tau = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\tau = 0/577\,\sigma_0}$$



مقادیر مربوط به γ-τ تا حدود ۵۵-۶۰ درصد

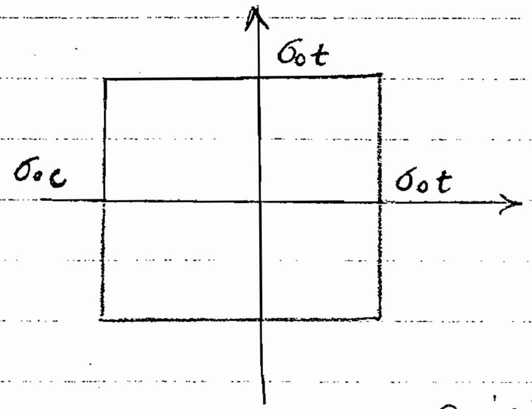
مقادیر مربوط به ٤-٥ هستند

به عبارتی فرضیه فوق بیشترین عددی است که
با تجربه هم صادق است

* به عبارتی برای اجسامی که تسلیم دارند فرضیه ۵ بهترین فرضیه است؛

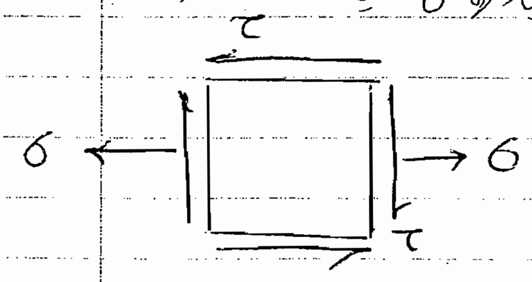
فرضیه ۳ و فرضیه ۵ این عیب را دارند که بین فشار و کشش تفاوت نمی‌گذارند «تقارن دارند»

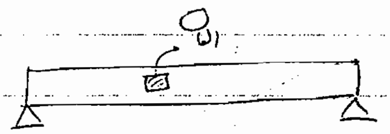
مثلاً فرضیه ۱ را می‌شود اصلاح کرد



در بعضی اجسام مثل مصالح بنایی که فشار را خوب تحمل می‌کنند این فرضیه ① می‌شود مورد استفاده قرار بگیرد.

خیلی وقتها تنش ها این حالت را دارند





دو فرضیه مهمی که باید بدانید ۳ و ۵ اند.

برای این اعمال این فرضیه ها را می‌نویسیم :

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_y = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}}$$

$$\sigma_{1,2} \quad \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \dots$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \end{cases}$$ تنش های اصلی

* فرضیه ترسکا : تنش max

$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} = \frac{\sigma_0}{2}$$

$$\boxed{\sigma^2 + 4\tau^2 = \sigma_0^2}$$ برای یک تیر صادق است

* فرضیه فون میسس :

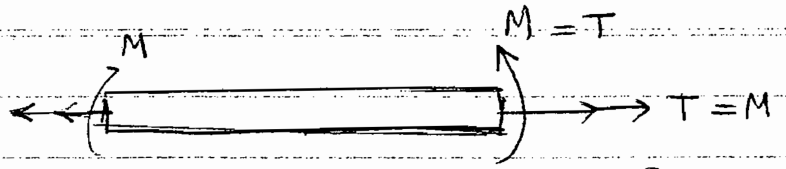
$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_0^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}\right)^2 + \left[\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}\right]^2 -$$

$$-\left(\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}\right)\left(\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}\right) = \sigma_0^2$$

$$\frac{\sigma^2}{4} + 3\left(\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2\right) = \sigma_0^2$$

$$\boxed{\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_0^2}$$



مثال ۴ میله‌ای داریم

طبق فرضیه ۳ و ۵ چه مقدار M و T داریم؟

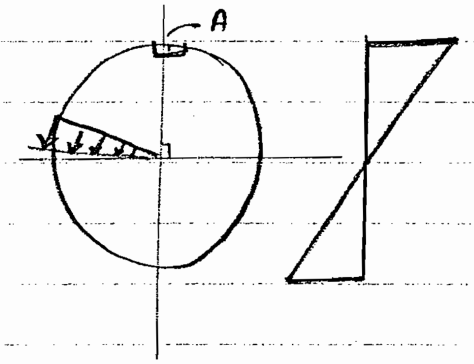
تا به مرحله تسلیم برسیم

$\sigma_{yp} = 2400 \ kg/cm^2$

قطر میله $D = 4 cm$

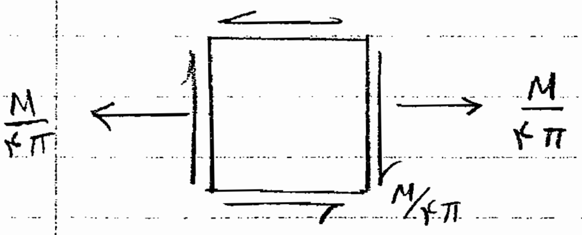
خمشی $\sigma_{max} = \frac{M}{W} = \frac{M}{\frac{\pi R^3}{4}} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{M}{2\pi}$

پیچشی $\tau_{max} = \frac{2T}{\pi R^3} = \frac{2T}{\pi (2)^3} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{T}{4\pi} = \frac{M}{4\pi}$



یعنی اگر یک المان A بیرون بیاوریم

هم σ max است هم τ



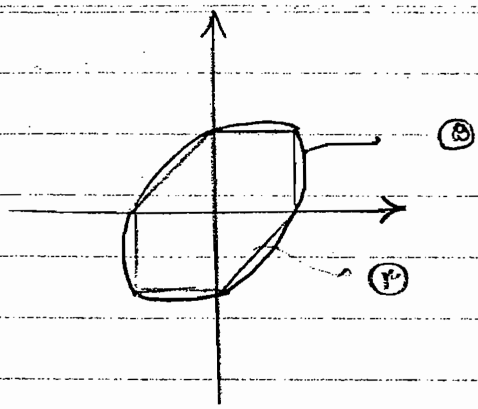
فرضیه ۳ :
$$\left(\frac{M}{4\pi}\right)^2 + 4\left(\frac{M}{4\pi}\right)^2 = (2400)^2$$

$$\frac{M^2}{4\pi^2} + \frac{M^2}{4\pi^2} = (2400)^2$$

$$M^2 = (2400)^2 \times 2\pi^2$$

$$M = 2400\pi\sqrt{2} \ kg.cm$$

$$M = 10663$$



* همیشه فون میسز تنش های بیشتری را تحمل می کند

اگر ترسکا بدست آوردید اشتباه کردید !

$$\left(\frac{M}{2\pi}\right)^2 + 3\left(\frac{M}{4\pi}\right)^2 = (2400)^2$$

$$\frac{M^2}{4\pi^2} + \frac{3M^2}{16\pi^2} = (2400)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{M = 11399 \; kg \cdot cm}$$

ممکن بود نیروها را بدهند و ضریب اطمینان را بخواهند در این صورت هر M و T را در یک K ضرب می کردیم و در رابطه بکار می بردیم

مثال: استوانه جدار نازک (بسته) زیر اثر فشار داخلی $20 \, kg/cm^2$ قرار دارد.

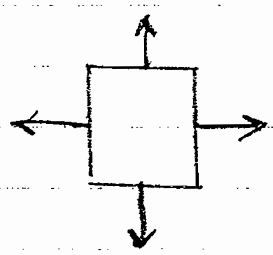
ضریب اطمینان را تا خرابی بیابید ؟ $\sigma_0 = 2400 \, kg/cm^2$

$D = 4 \, (m)$ استوانه

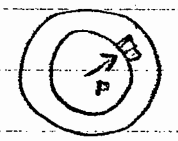
$t = 5 \, (cm)$

$P = 20 \, \frac{kg}{cm^2}$

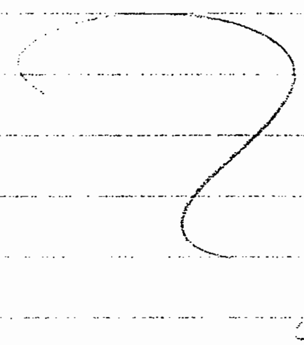
در استوانه جدار نازک دو تا تنش داریم طولی و محیطی

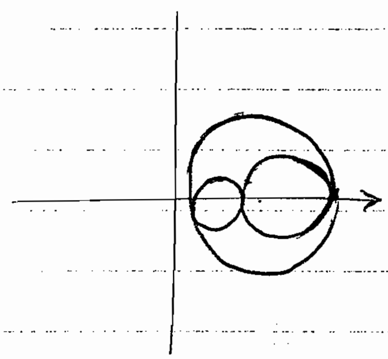


مسئله کافی است همین دو تنش را بگذاریم ولی گاهی اوقات اینها را ۳ بعدی می‌گیرند.



تنش P را هم در نظر می‌گیرند

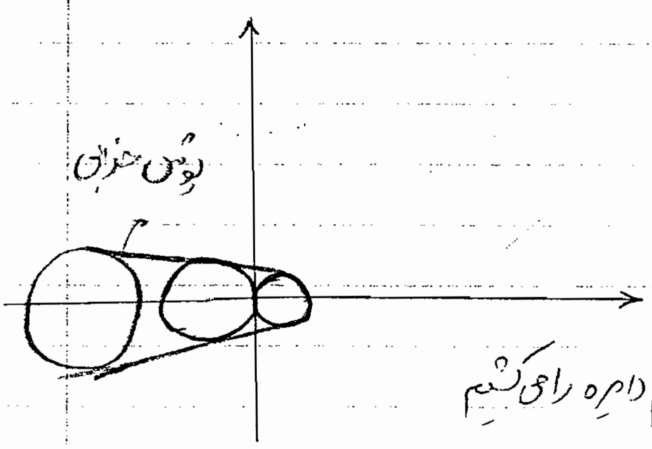




۶_ فرضیه مور ؟

فرضیه مور بیان می‌کند که دایره بزرگ عامل
خرابی است

هر نقطه روی دایره بزرگ نظیر یک صفحه است
این فرضیه بیشتر در بتن و خاک استفاده می‌شود

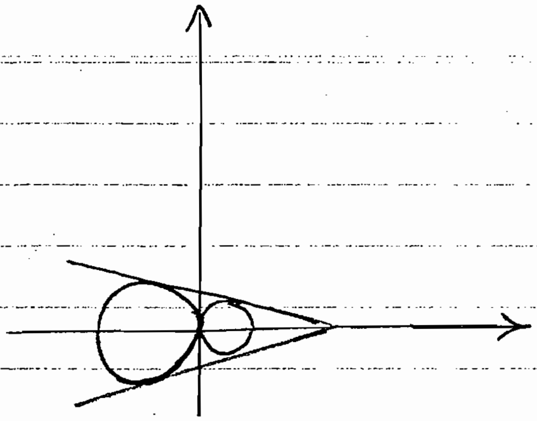


خاک که خراب می‌شود صفحه آن معلوم است ؟

خرابی در جایی است که پوشش مماس است

برای تعیین پوشش باید یک منحنی را مراحل دوایر
مماس کرد. در حالت‌های بعدی که تنش‌ها را اضافه می‌کنیم دایره را می‌کشیم
اگر مماس شد خرابی اتفاق می‌افتد اگر مماس نشد خیر.

* حالت ساده این است که پوشش را یک خط بگیریم



برای خاک و بتن فرضیه خیلی خوبی است اما برای فولاد بکار نمی رود

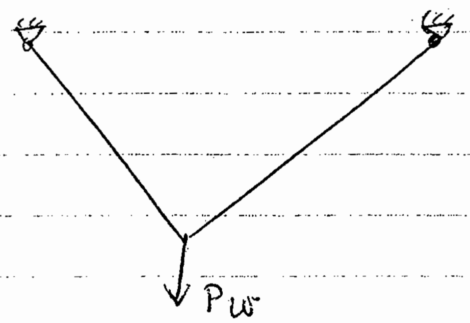
اگر خاک را نگذاریم از یک طرف منبسط شود بیشتر تنش می توان به آن وارد کرد

بار نهائی 8

حداکثر باری که یک سازه می تواند تحمل کند

به نظر می آید که باید ضریب اطمینان باید عددی باشد که اگر در بار مجاز ضرب شود می شود بار نهائی اما خواهیم

دید که در تمام سازه ها این طور نیست



یکی از میله ها تنش آن با تنش مجاز مساوی می شود

$\sigma = \sigma_w$ در یکی از میله ها

اگر بار P_w را در ضریب اطمینان ضرب کنیم تنش در همان میله ای که تنش آن با مقدار مجاز برابر بود

می شود $k\sigma_w$ از طرفی $k\sigma_w$ می شود σ_{yp} ؟

وقتی که یکی از میله ها به تنش تسلیم می رسد

$$P \to \overset{S.F}{k} P_w$$
$$\sigma \to k\sigma_w = \sigma_{yp}$$

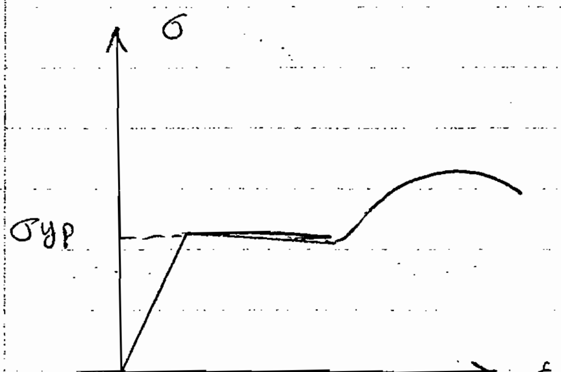
اگر بار را بخواهیم اندکی بیشتر کنیم تنش نمی تواند

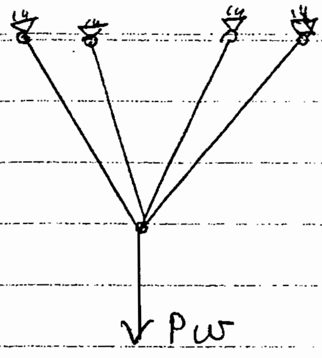
زیاد شود و ε بدون افزایش تنش زیاد می شود

و تغییر طول زیاد داریم به عبارتی خراب می شود

چون تغییر شکل هایی داریم که بدون افزایش

نیرو به وجود می آیند





این سازه هیپراستاتیک است

باز هم تنش یکی از میله‌ها با تنش مجاز برابر خواهد بود

و اگر بار را در k ضرب کنیم تنش همان میله k برابر

می‌شود که با تنش تسلیم برابر می‌شود؛

$P_w \rightarrow P_w k$

$\sigma = \sigma_w$ یکی از میله‌ها

$\sigma = k\sigma_w = \sigma_{yp}$

میله‌ای که به تنش تسلیم رسید دیگر بار آن اضافه نمی‌شود

در سازه معین میله‌ای که به تنش تسلیم رسید باعث می‌شود که نتوان بار را اضافه کرد

اما در سازه نامعین میله‌ای که به تنش تسلیم رسید دیگر بار اضافی نمی‌گیرد اما بقیه میله‌ها بار می‌توانند بگیرند

تا موقعی که فقط یک میله باقی بماند که به تسلیم نرسیده است

پس بارهای ما باید بزرگتر از $P_w k$ باشد

$P_u \geq P_w k$

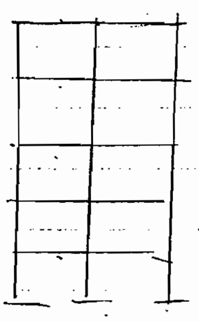
در حالت خاص مساوی است
ممکن است در حالت اول به جای این
که یک میله به تنش مجاز برسد ۳ میله
با هم به مجاز برسند پس ۳ میله با هم
به تسلیم می‌رسند و بارهای همان بار مجاز
می‌شود

ولی در سازه معین $P_u = P_w k$

در سازه نامعین در مورد ضریب اطمینان نمی‌توان نظر داد

پس در طراحی‌ها ما را دچار شک و تردید می‌کند که نتوانیم یک ساختمان

را با یک ساختمان دیگر مقایسه کنیم؛



حداقل یک نقطه هست
که در بارهای معمولی
به تنش مجاز رسیده است
وقتی در ضریب اطمینان
ضرب می‌شود به تسلیم می‌رسد
ولی اگر یک نقطه به تسلیم برسد دلیل بر خرابی نیست

یعنی شده که آیین نامه‌ها به طرف طراحی بابار نهایی می‌روند یعنی اول می‌بینیم که چقدر بار می‌تواند تحمل کند

بعد ضریب اطمینان را تعیین کنیم یا اگر بار را داریم P آن را در ضریب اطمینان دلخواه ضرب می‌کنیم

در این صورت سازه را برای بار نهایی KP طراحی می‌کنیم.

به این روش طرح خمیری یا طرح پلاستیک می‌گویند که برعکس طرح تنش مجاز است.

آیین نامه‌های الان یعنی به چند سال پیش دیگر طرح با تنش مجاز را قبول ندارند از این روش استفاده می‌کنند

در بتن آرمه در مقاومت ۲ از روش تنش مجاز استفاده کردیم اما در درس بتن آرمه از طرح پلاستیک استفاده

می‌کنند روش طرح خمیری اولین بار در سال ۱۹۵۶ برای سازه‌های فلزی مطرح شد ولی برای سازه‌های

بتن آرمه زودتر بکار رفت الان در طرح سازه‌های فولادی روش خمیری و تعدیل شده خمیری داریم که

به آن LRFD می‌گویند.

تا چند سال پیش یعنی سازه‌ها را اجازه می‌دادند با تنش مجاز حل کنیم اما امروزه از طرح خمیری استفاده

می‌کنیم.

برای حل برعکس عمل می‌کنیم می‌نویسیم که یک میله باید الاستیک بماند اگر هم کمانش مدنظر ما باشد و هم تسلیم باید

۳ میله حذف شوند.

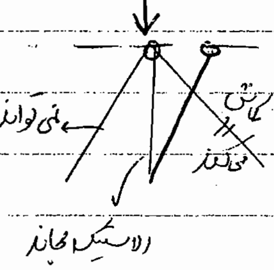
۱- شرط مکانیزم یعنی به تعداد کافی میله به تسلیم رسیده باشد و از پایداری خارج شود

* مکانیزم به سیستمی که حرکت داشته باشد گویند.

۲ - شرط تعادل

۳ - شرط تسلیم (یا کمانش)   یعنی تنش را بالاتر از تنش تسلیم بدست نیاوریم یا بار بیشتری از کمانش بدست نیاوریم در هر میله.

۴ - شرط تغییر شکل ها   باید هم کشش را در نظر بگیریم هم فشار

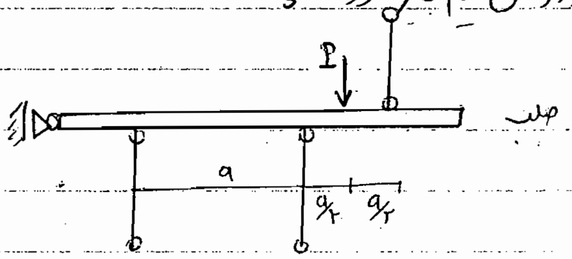


شرط کمانش در این مثال مهم نیست ولی شرط تسلیم می تواند مهم باشد

برای فشار دو نکته است یکی رسیدن به کمانش یکی تسلیم
در کشش فقط تسلیم مطرح است

* میله ای که الاستیک در نظر گرفتیم تنش آن نباید از تنش تسلیم بیشتر شود؟

مثال:



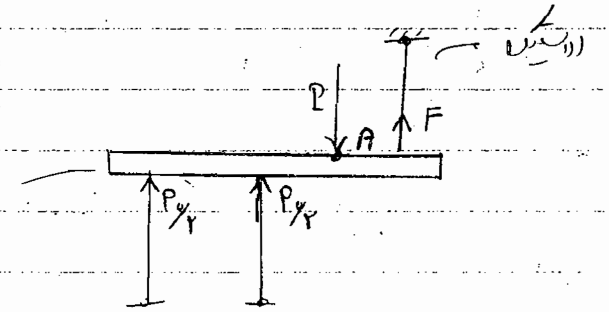
در کشش تسلیم تمام میله ها P_0 باشد
و فشار

در کمانش «فشار» $P_E = P_0/2$

با این فرض در فشار همه میله کمانش می کند چون بار کمانشی از بار تسلیم فشاری کمتر است؛
و تسلیم در کشش اتفاق می افتد و نه در فشار.

باید حداقل ۲ میله به تسلیم یا کمانش برسد؟

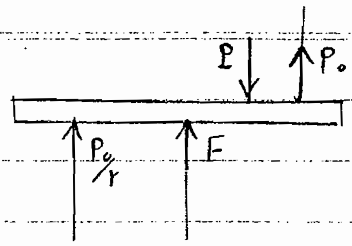
دو میله باقی را فرض کنیم کمانش کنند؛



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 0.5 Fa = \frac{P_0}{2} a + \frac{3P_0}{2} a \Rightarrow \boxed{F = 2P_0}$$

در این میله نیرویی داریم که از P_0 بیشتر است پس ناقض شرط تسلیم است؛
شرط مکانیزم رعایت شده چون یک میله الاستیک داریم

(۲)



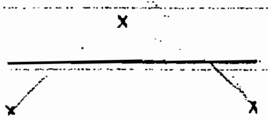
F را الاستیک گرفتیم؛

$$\Sigma M_A=0 \Rightarrow F\frac{a}{2}+\frac{3}{4}P_0 a = P_0\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow F=-\frac{P_0}{2}$$

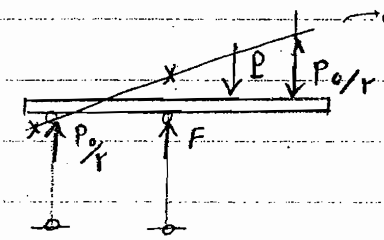
پس F کششی است؛

اما از نظر تغییر شکل ناسازگار است؛



صلب است
نمی‌تواند خم شود

(۳)



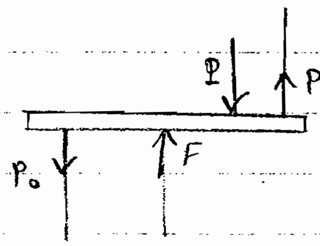
$$\Sigma M_A=0 \Rightarrow F\frac{a}{2}+P_0\left(\frac{3}{4}\right)a+\frac{P_0}{2}\left(\frac{1}{2}a\right)=0$$

$$\Rightarrow F=-2P_0$$

باز هم تسلیم برقرار نیست

اما شرط تغییر شکل برقرار است

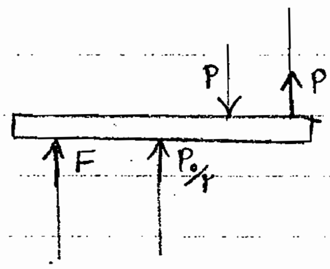
(۴)



$$\Sigma M_A=0 \Rightarrow F\frac{a}{2}-\frac{3}{2}P_0 a = P_0\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow F=4P_0>\frac{P_0}{2}$$

برقرار نیست

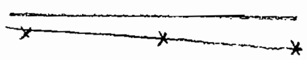


$$\Sigma M_A=0 \Rightarrow \frac{P_0}{2}a-\frac{P_0}{2}\frac{a}{2}-F\left(\frac{3}{2}a\right)=0$$

$$F=\frac{P_0}{6}<\frac{P_0}{2}$$

F هم فشاری است هم از بار کششی کمتر است شرط‌ها قابل قبول است

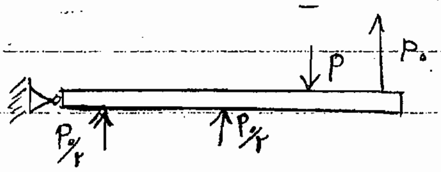
۱- مکانیزم ✓
۲- تعادل ✓
۳- شرط تسلیم $\frac{P_0}{6}$
۴- « تغییر شکل



تغییر شکل

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{P_0}{4} + \frac{P_0}{2} - P + P_0 = 0 \Rightarrow \boxed{P_u = \frac{5P_0}{4}}$$

اگر به جای شکل مفصل بود چون نیرو را به سمت پایین داشتیم مسئله خیلی راحت‌تر حل می‌شد



چون در فشار کمانش زودتر اتفاق می‌افتد میله‌های فشاری را حذف برای کمانش محاسبه می‌کنیم:

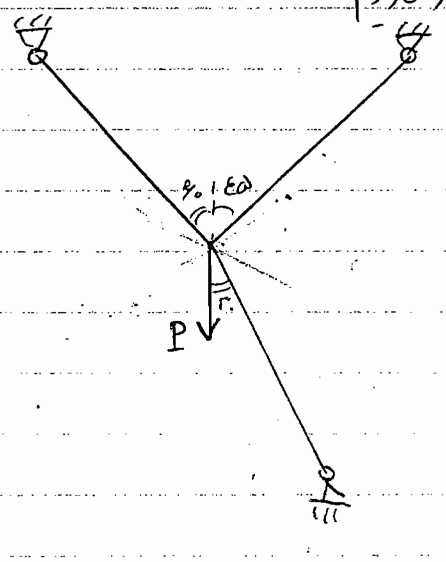
در حالت کلی مسئله بیشتر از یک جواب ندارد

* اگر در یک شکل شرط مکانیزم و تعادل را رعایت کردیم P ای که از این دو شرط بدست می‌آید ممکن است $P \geq P_u$ (نهایی) باشد شرط تغییر شکل را می‌توان رعایت کرد یا نه کرد علامت تساوی برای وقتی است که شاید دو شرط دیگر را رعایت نکرده باشند

* اگر شرط تعادل و تسلیم را رعایت کردیم مکانیزم رعایت نشود P بدست آمده از P_u کوچکتر است

اگر ندانیم مکانیزم شده یا نشده $P = P_u$ است

ولی وقتی هر ۴ شرط را رعایت می‌کنیم یک جواب بیشتر نداریم



* تسلیم ← P_0
کمانش ← $\frac{P_0}{2}$

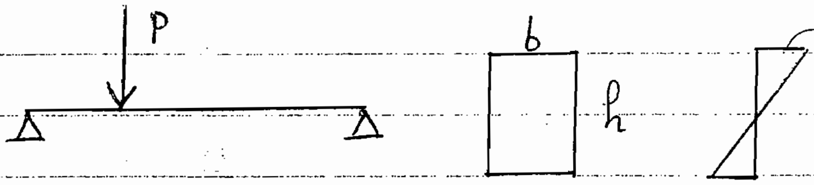
کشش: تسلیم ← P_0
کمانش ← $1.5P_0$

در حالت نهایی همه به تسلیم می‌رسند

- در واقع مثل این است که از کمانش صرف نظر می‌شود.

* خمش 8

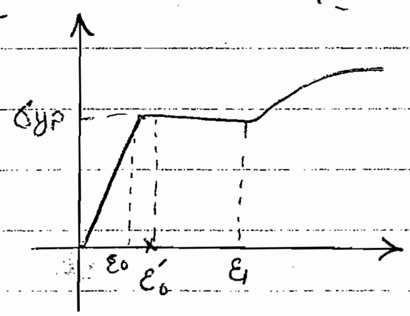
خمش مهمترین عامل در طراحی سازه‌هاست



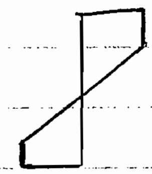
$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{w}$

$w = \frac{bh^2}{6}$

تا وقتی این رابطه خطی را می‌توان نوشت که حتی σ-ε را خطی بگیریم و تنش max از تنش تسلیم بیشتر نشود

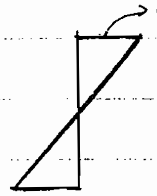


تنش همیشه از بالا به پایین یا پایین به بالا خطی است
مثلاً اگر به ε_0 رسیدیم تنش همان تسلیم است
تا جایی که به ε_1 برسیم



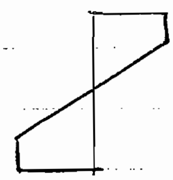
در سازه‌های خطی تا وقتی بارها کم‌اند تنش خطی است

اما اگر $\sigma_{yp} = \frac{M_{max}}{\frac{bh^2}{6}}$ برابر شد اگر $M_{max} = \sigma_{yp}\frac{1}{6}bh^2$ باشد تنش در بالا می‌شود تنش تسلیم یعنی باری

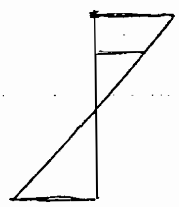


این لنگر در لبه مرز هستیم

اما اگر $M > \sigma_{yp}.\frac{bh^2}{6}$ باشد σ



ε

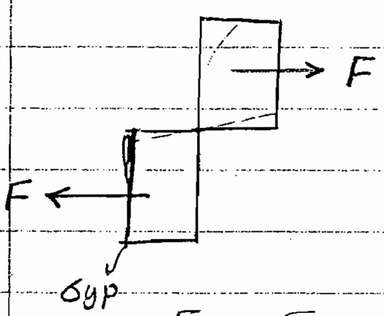


چون تیر که خم می‌شود در هر حال تنش خطی است

* $\varepsilon = \frac{-y}{\rho}$

این رابطه به پلاستیک شدن مقطع کاری ندارد

$$* \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{yp}}{E}$$



وقتی بار زیاد می‌شود در نهایتاً بیشترین تنشی که می‌گیرد این حالت است

$$F = \sigma_{yp} \cdot \frac{bh}{2}$$

مساحت تنش ها

$$M_F = \sigma_{yp} \cdot \frac{bh^2}{4}$$

بیشترین تنشی است که می‌شود تصور کرد مقطع می‌تواند داشته باشد.

این لنگر را لنگر پلاستیک - خمیری کامل گویند

یعنی اگر خمیری شود حداکثر لنگر در این مقدار است.

M_F ۱/۵ برابر M_{max} شده

یعنی از وقتی مقطع شروع به پلاستیک شدن کرده M_0 برابر $\sigma_{yp} \frac{bh^2}{6}$ بود وقتی پلاستیک کامل شد $M_p = \sigma_{yp} \frac{bh^2}{4}$

لنگر پلاستیک $M_p = \sigma_{yp} \frac{bh^2}{4}$

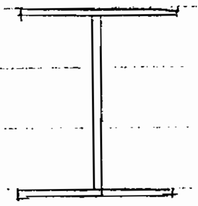
$\frac{bh^2}{4} = W_p$

مدول پلاستیک مقطع

ضریب شکل $\nu = \frac{M_p}{M_0}$

ν به شکل مقطع بستگی دارد

ν مستطیل $= ۱/۵$



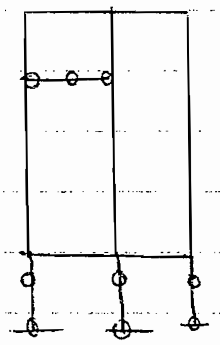
* υ = ۱/۱ حدود

یعنی خیلی سریع تر تمام مقطع پلاستیک می شود

در $\xrightarrow{\text{کشش}}$ تنش مجاز $= \frac{۳}{۵}$ تنش تسلیم

در خمش $\rightarrow \sigma_w = \frac{۲}{۳} \sigma_{yp}$ تنش تسلیم

در آیین نامه ها معیار خمیری را هم در نظر می گیرند.



اگر در این مفصل ها
سازه به حالت پلاستیک
برسد این سقف خراب
می شود.
سعی می شود که یک سری تنش های
مجاز را تغییر می دهند در نتیجه
ضریب اطمینان در خمش با برش
یا کشش فرق می کند.