SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

۲۶۱۱۳ حل تمرین (۲۰۴)

شنبه ۳، ۹۳/۱/۷

مهسا محمدی

مقاومت مصالح ۱

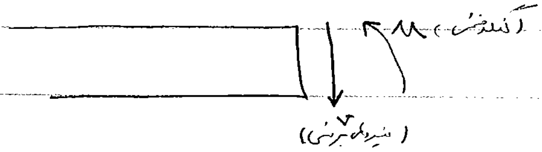
استاد سیروس غلامپور

دانشگاه صنعتی شریف

STAEDTLER

چپ به راست

در تیر :



بازو = سطح مقطع مستطیلی

میله = سطح مقطع دایره‌ای

بارگذاری محوری = یعنی در امتداد یک محور نیرو وارد شود [مثلاً فقط در امتداد محور x ها به سازه نیرو وارد شود]

بارگذاری چندمحوری = یعنی در امتداد چند محور نیرو وارد شود [مثلاً در امتداد هر سه محور مختصات به سازه نیرو وارد شود]

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

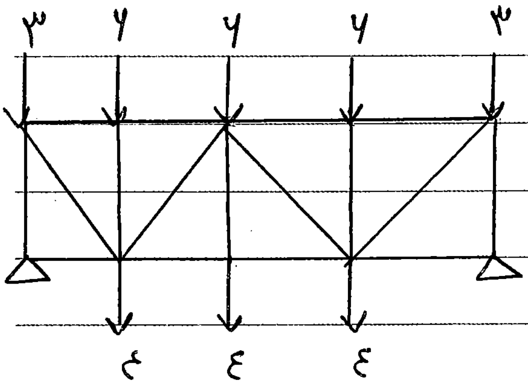
۱) بارگذاری (لنگر و نیرو): تعیین کنیم بار خارجی که بر سازه وارد می شود
به کجا وارد می شود و مقدار آن چقدر است [یعنی تعیین نیروها و لنگرهای
خارجی وارد بر سازه] ← [بارگذاری، مهندسی زلزله، پل سازی ....]

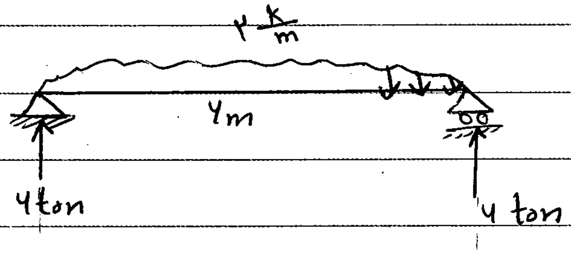
الف) محاسبات سازه

۲) تحلیل (استاتیک ـ تحلیل سازه های ۱ و ۲): (نیروی داخلی را
تعیین سازه های معین   تعیین سازه های نامعین
بدست می آوریم) تعیین نیروها و لنگرهای داخلی وارد بر سازه

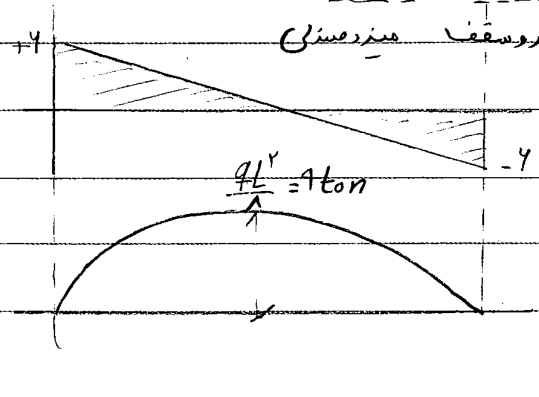
۳) طراحی: مقاومت مصالح ۱ و ۲ (طراحی سازه) ـ طراحی سازه های
به مقاومت مصالح بستگی دارد
فولادی ۱ و ۲ ـ طراحی سازه های بتن آرمه ۱ و ۲

ب) اجراء





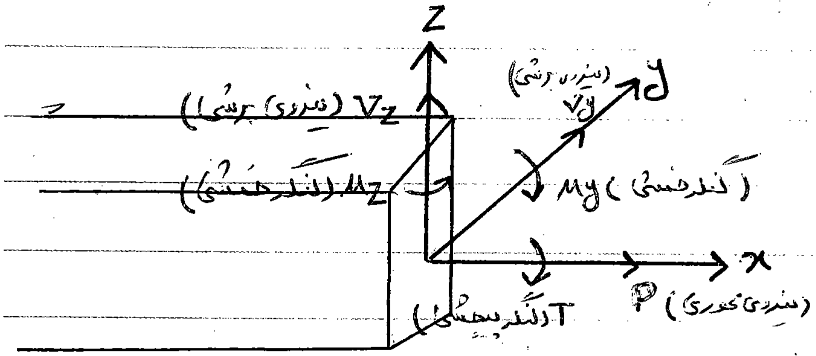
بارگذاری: بار ثقلی یا بار عمودی ـ بار جانبی یا افقی
(بار مرده و بار زنده)   (زلزله ـ باد ـ ...)
دیوار و سقف   میز و صندلی



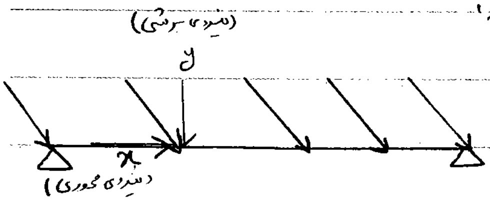
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

تیر مقطع: ۳ نیرو و ۳ لنگر دارد.



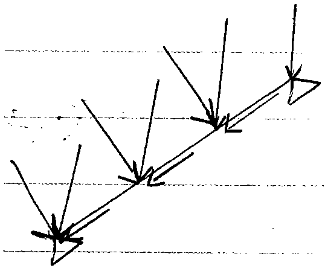
در خرپا فقط نیروی محوری داریم چون عضو دو نیرویی دارد.
P



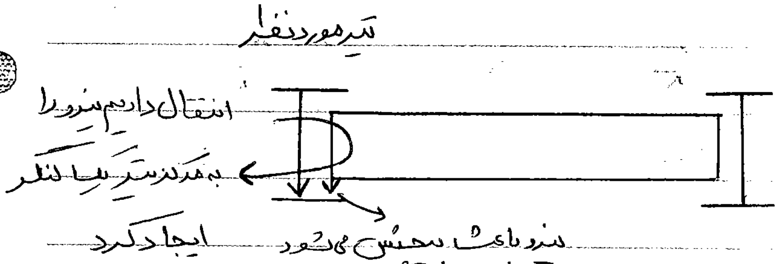
در تیر: حتماً نیروی برشی و لنگر خمشی هست

نیروی محوری هم در تیر می‌تواند وجود داشته باشد مانند: تیرهای مورب که

تیر سقف راه پله



تیر می‌تواند پیچش هم داشته باشد



نکته:

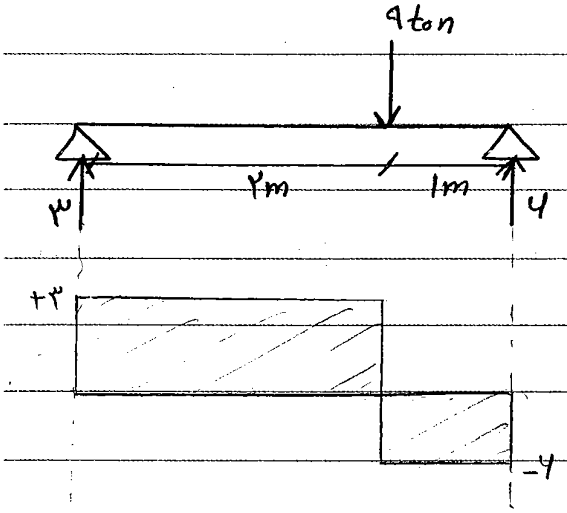
بارگذاری برای تحلیل مهم است ــ برای طراحی، تحلیل مهم است

در نیروی محوری، علامت مهم است. چون مقاومت مصالح در کشش و فشار با هم فرق می‌کند

رفتار مصالح در کشش و فشار با هم فرق دارد.

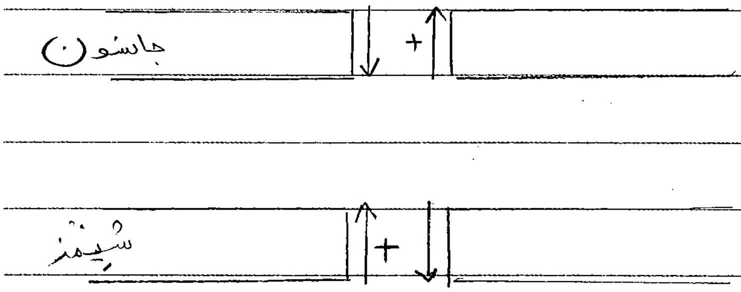
نتیجه: در طراحی می‌خواهیم انجام دهیم علامت مهم است

مقاومت برشی مصالح در مثبت و منفی فرقی ندارد.



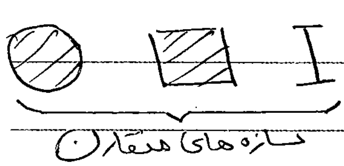
این تیر باید تحمل ۶ton برش را داشته باشد علامت مهم نیست

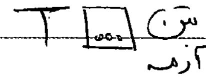
نکته:



نکته: نمودار پیچشی هم در علامت فرق ندارد اما نمودار خمشی در علامت مهم است

فقط برای سازه‌های متقارن علامت در نمودار خمشی مهم نیست!



اما برای سازه‌های غیرمتقارن مانند: بتن آرمه  علامت مهم است.

در نمودار خمشی و نیروی محوری علامت مهم است ولی در نیروی برشی و نمودار پیچشی علامت مهم نیست و قراردادی است.

نکته: نیرو و لنگر برای مقطع است = استاتیک
تنش برای نقطه است = مقاومت مصالح
و برای رسیدن به نقطه باید مقطع بزنیم

«فصل اول»

« stress مفهوم تنش »

تنش: نیروی وارد بر واحد سطح

محوری (نیروی داخلی) — برشی (نیروی داخلی)

نیروی محوری همواره در راستای محور عضو و عمود بر مقطع می‌باشد

$$\sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$$

سیگما — تنش قائم — نیروی محوری — مساحت مقطع

تنش قائم (محوری): نیروی محوری وارد بر واحد سطح

نیروی برشی مماس بر مقطع و عمود بر محور عضو است

نیروی برشی به ... توزیع تنش ...

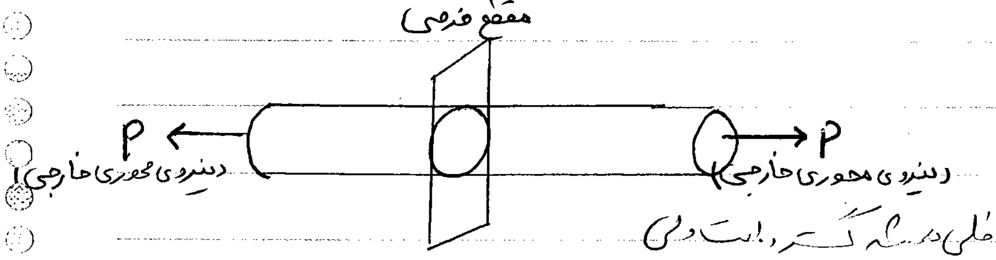
$$\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$$

تاو — تنش برشی — نیروی برشی — سطح مقطع

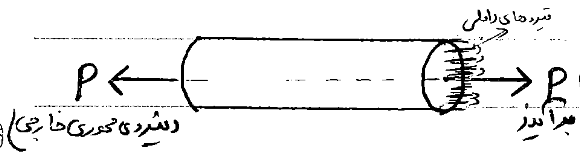
تنش برشی: نیروی برشی وارد بر واحد سطح

$\sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$ و $\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$ یعنی مقدار میانگین تنش روی مقطع است

به جای این که تنش در نقطه‌ای به خصوص از سطح مقطع باشد

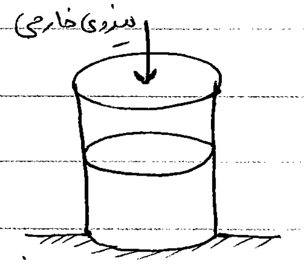


نکته: وقتی برش می‌زنیم نیروهای داخلی در مقطع گسترده است ولی نیروی خارجی هم متمرکز و هم گسترده می‌تواند باشد.



نکته: اگر بار یا نیروهای خارجی گسترده باشند توزیع تنش یکنواخت است
اگر بار یا نیروی خارجی متمرکز باشد توزیع تنش بعد از مقطع [illegible] یکسان نیست و تنش در مرکز بیشتر است.

- نیروی متمرکز یا نقطه‌ای بر سطحی وارد می‌شود که در مقایسه با سطح کل بسیار ناچیز است.



- نیروی داخلی همیشه گسترده است.

- نیروی خارجی می‌تواند هم گسترده، هم نقطه‌ای باشد.

σ تنش محوری یا قائم $= \frac{P}{A}$

$10^3 \frac{kg}{cm^2} = 1 \frac{ton}{cm^2}$

$psi = \frac{lb}{in^2}$

$ksi = \frac{kLb}{in^2}$ (کیلو)

1 میلیون (10^6) $pa = 1\, Mpa$ (مگا) $= \frac{N}{mm^2}$

$pa = \frac{N}{m^2}$

SUBJECT :

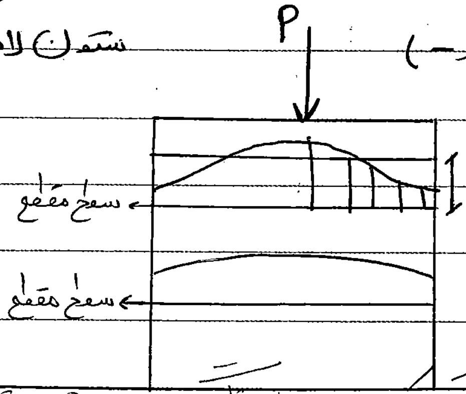
Year ( ) Month ( ) Date ( )

نکته: علامت تنش همیشه به علامت نیرو بستگی دارد (نیروی کششی مثبت است)

اگر نیروی محوری کششی (+) ⟵ تنش کششی (+)

اگر نیروی محوری فشاری (−) ⟵ تنش فشاری (−)

ستون لاستیکی

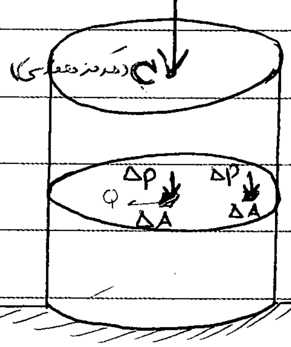


$$\sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$$

هرچه فاصله بیشتر شود، تنش یکنواخت‌تر شد.

پس تنش به فاصله و جنس مصالح بستگی دارد.

برای تعریف تنش در نقطه‌ی مفروض Q از مقطع عرضی، ما باید یک سطح کوچک ΔA را در نظر بگیریم. با تقسیم مقدار ΔP بر ΔA مقدار میانگین تنش روی ΔA را به دست آوریم. با میل دادن $\Delta A \to 0$ تنش در نقطه‌ی Q را به دست می‌آوریم.



$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA}$$

صحیح جا شود ①

$$dP = \sigma \cdot dA \Rightarrow \boxed{P = \int \sigma \cdot dA}$$

برآیند نیروهای داخلی کشیده.

اگر σ ثابت باشد یا ثابت فرض شود ⟵ $P = \sigma \cdot A$ یا $\sigma = \frac{P}{A}$

یعنی توزیع تنش یکنواخت باشد.

هرجا σ بود منظور σ_{Ave} است.

تنش قائم
- تنش موجود (ما به دست می‌آوریم)
- تنش مجاز (صورت مسئله می‌دهد) که در آزمایشگاه به دست می‌آید.

کنترل

تنش مجاز > تنش موجود ⟵ شکستگی اتفاق نمی‌افتد

تنش مجاز

نوشتن مجاز

STAEDTLER

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

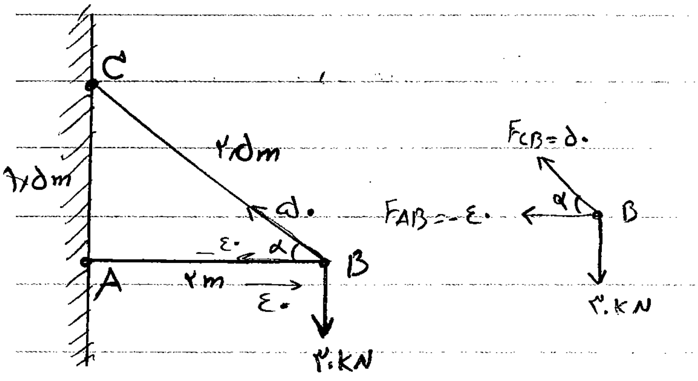
کنترل :

$$\sigma_{\text{موجود}} = \frac{P_{\text{موجود}}}{A_{\text{موجود}}} \leq \sigma_{\text{مجاز}} \quad okk ✓$$

درغیر این صورت یا باید سطح را قوی‌تر کرد یا جنس را قوی‌تر کرد.

مثال: الف) میله‌ی BC به قطر ۲۰mm و از فولاد با $\sigma = 140\ Mpa$ کنترل نمایید

سطح مقطع دایره‌ای



تحلیل:

$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma F_x = 0$

$F_{BC} = 50$ کششی

$F_{AB} = -40$ فشاری

$\alpha = Arc\tan \frac{1.5}{2} \Rightarrow \alpha = 37°$

طراحی:

$$140\ Mpa = \frac{N}{mm^2} \qquad \sigma_{\text{موجود}} = \frac{50 \times 10^3\ N}{\pi (10)^2\ mm^2} = 159 \frac{N}{mm^2} \text{ یا } Mpa \leq 140\ Mpa \quad okk✓$$

طرح اقتصادی است

$$\boxed{\sigma_{\text{مجاز}} = \frac{\sigma_{\text{نهایی یا تسلیم}}}{\underset{S.F}{\text{ضریب اطمینان}}} = \frac{240\ Mpa}{1.5} = 140\ Mpa}$$

چون σ نهایی ۲۴۰ بوده چون ما به ۱٫۵ تقسیم کرده‌ایم در امان

چون بارگذاری، تحلیل، طراحی با خطا و تقریب است از ضریب اطمینان استفاده می‌کنیم و بیشتر ضریب اطمینان برای آن به کار می‌رود که در اجرا امکان خطا وجود دارد و ضریب اطمینان بستگی به دقیق بودن محاسبه و اجرا دارد و بستگی به نوع سازه دارد که چی می‌خواهیم بسازیم

- ظرفیت باربری: $\underset{\text{حداکثر مجاز}}{P} = \sigma_{\text{مجاز}} \cdot A_{\text{موجود}}$ به سمت پایین رند می‌شود

- طراحی: $\underset{\text{حداقل مورد نیاز}}{A} = \frac{P_{\text{موجود}}}{\sigma_{\text{مجاز}}}$ به سمت بالا رند می‌شود

ب) قطر میله BC از آلومینیوم با $\sigma_{\text{مجاز}} = 100\ Mpa$ را طراحی نمایید.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{\overbrace{50\times10^{3}}^{F_{BC}}}{100} = 500\ mm^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

قطر لازم $d = 25.2\ mm$

طراحی $\boxed{d = 24\ mm}$

یادآوری:

تنش قائم (محوری): نیروی محوری وارد بر واحد سطح

$$\underset{\text{سیگما}}{\sigma_{Ave}} = \frac{P^{\text{نیروی محوری}}}{A_{\text{مساحت مقطع}}}$$

تنش برشی: نیروی برشی وارد بر واحد سطح

$$\underset{\text{تاو یا تو}}{\tau_{Ave}} = \frac{V^{\text{نیروی برشی}}}{A_{\text{مساحت مقطع}}}$$

نیروی برشی یعنی عمود وارد شود

+ یا - منفی بودن تنش قائم به P بستگی دارد و + یا - تنش برشی به V بستگی دارد.

تنش برشی + با تنش برشی - فرقی ندارد.

اگر در صورت مسئله نیروی محوری کششی بود برای کنترل باید این صورتی عمل کنیم

$$\sigma_{\text{موجود کششی}} = \frac{P_{\text{موجود کششی}}}{A_{\text{موجود}}} \le \sigma_{\text{مجاز کششی}}$$

" " " " " " " فشاری بود " " " " " "

$$\sigma_{\text{موجود فشاری}} = \frac{P_{\text{موجود فشاری}}}{A_{\text{موجود}}} \le \sigma_{\text{مجاز فشاری}}$$

پس نیروی کششی و فشاری (-) (+) با هم فرق دارند اما نیروی برشی (+) یا (-) فرق نمی‌کند.

STAEDTLER

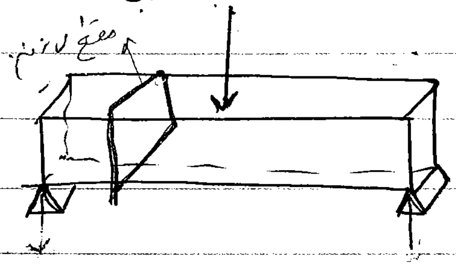
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

نکته: معمولاً تنش های برشی در پیچ ها، پین ها و میخ پرچ ها، که برای اتصال عضوهای مختلف سازه ها و اجزای ماشین به کار می‌روند، یافت می‌شوند

مثال: تیر چوبی

بار خارجی = 10 (t)

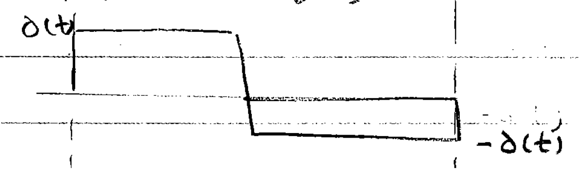


(مثال برای تنش برشی)

نیروی داخلی در مقطع ماشین از برش است:

5(t)   5(t)

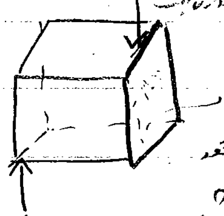
بار خارجی = کل الف و نیروی تکیه گاهی



دیاگرام مقطع:

داخلی $V = 5(t)$

چون V با مقطع آن کاملاً موازی است برشی است



$\tau_{Ave} = \frac{V}{A} < \tau_{مجاز}$

متوسط تنش

خارجی = 5(t)

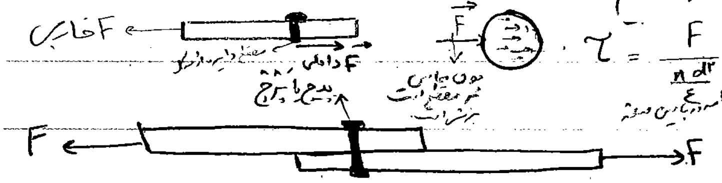
در اصل باید $\tau_{max} < \tau_{مجاز}$ باشد

(بعداً خوانده می‌شود)

* در اینجا τ مثبت است چون در این دیاگرام نیروی برشی 5(t)+ است طبق نمودار نیروی برشی *

دیاگرام مقطع دایره‌ای شکل

مثال: فرض کنیم دو ورق را با پرچ کنیم و با نیروی F بکشیم

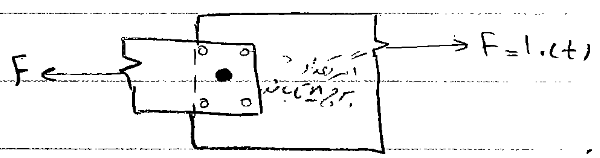


$\tau = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}}$ ①

ادامه در پایین صفحه

برای دایره (مساحت $\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$) شعاع

دیاگرام وقتی از بالا به آن نگاه می‌کنیم:



نکته: اگر مقطعی که می‌سنجیم عمود بر F باشد تنش قائم و اگر مماس بر آن باشد تنش برشی است. (با موازی)

ادامه ①: $\tau = \frac{F_{داخلی}}{n\times\frac{\pi d^2}{4}} < \tau_{مجاز\ پیچ\ یا\ پرچ}$ در صورتی که همه پیچ ها مثل هم باشند (از نظر قطر، جنس) (اگر تعداد پیچ n تا بود) ***

n ← تعداد پیچ یا پرچ

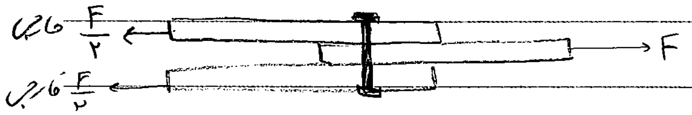
مثلاً اگر پیچ ها از نظر قطرها فرق داشتند (مثلاً یکی قطرش 2mm و ۴ تا دیگر 3mm باشد) آنگاه:

$$\tau = \frac{F}{1\times\frac{\pi(2)^2}{4} + 4\times\frac{\pi(3)^2}{4}}$$

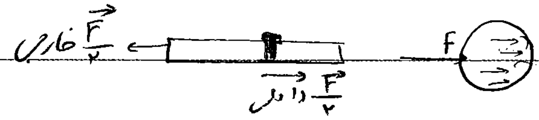
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اگر اتصال دو برشی باشد یعنی برای جدا کردن اتصال به ۲ برش داشته باشیم



مثلا در شکل (الف) ساده: اگر ۳ تا ورق داشتیم ۲ برش می‌شود. اگر ۴ تا ورق داشته ۳ برش می‌شود



$$\tau = \frac{\frac{F}{2}}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

دیاگرام ورق بالایی :

کنترل :

$$\tau = \frac{F}{n.m.\frac{\pi d^2}{4}} \le \tau_{\text{مجاز پیچ یا پرچ}}$$

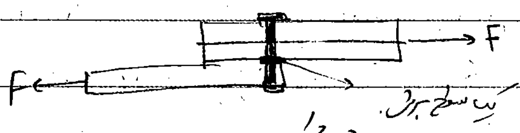
n ← تعداد پیچ یا پرچ

m ← تعداد سطوح برشی هر پیچ

مساحت پرچ‌ها = $n.m.\frac{\pi d^2}{4}$

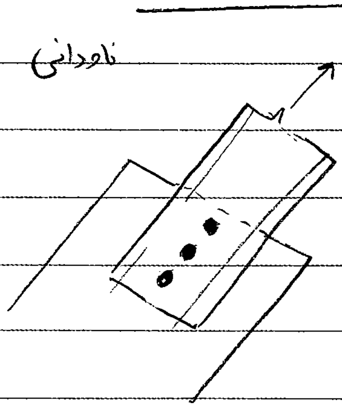
$\boxed{n.m = \text{تعداد سطوح برش}}$

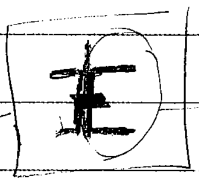
(الف) زمانی می‌توانیم بگوییم که تعداد سطوح برشی یکی از تعداد ورق‌ها کمتر است که تعداد ورق‌های میانی در خلاف جهت هم باشند

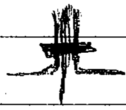


(شکل الف)

ناودانی







اتصال ایرانی که ۲ تا پیچ دارد و ۱ سطح برش.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

- کنترل : $\tau_{موجود} = \frac{V_{موجود}}{A_{موجود}} \le \tau_{مجاز}$

- ظرفیت باربری (به سمت پایین روند شود) : $\underbrace{V_{مجاز}}_{حداکثر} = \tau_{مجاز} \times A_{موجود}$

- طراحی : (به سمت بالا روند شود) (d را به سمت بالا روند می‌کنیم) $\underbrace{A_{لازم}}_{حداقل} = \frac{V_{موجود}}{\tau_{مجاز}}$

در طراحی F موجود معلوم است و A مجهول است.

نکته : (یک معادله ۲ مجهول بی‌نهایت جواب دارد) مثل : $2x+3y=10$

در جوش مساحت جوش برابر است : تعداد جوش × طول جوش × ضخامت جوش (در مقاومت مصالح هست)

تنش لهیدگی (تکیه‌گاهی) :

$$\sigma_B = \frac{P}{A} \le \sigma_{B\,مجاز}$$

تنش لهیدگی مجاز

$\sigma_{B\,مجاز}$ = براساس جنس معلوم است

از آیین‌نامه ... را با کمترین آن دو جسم مجاز

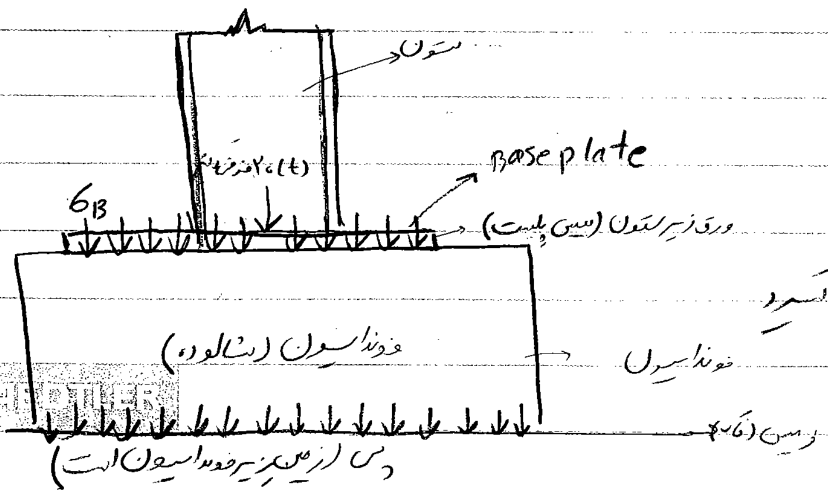
(حالت خاصی از تنش قائم است.)

و فرق آن با تنش قائم این است که اگر دو جسم را به‌طور تکیه‌گاهی به هم وصل کنیم امکان دارد یکی له شود (آن که σ کمتری دارد = ضعیف‌تر است له می‌شود)، به هم فشار وارد می‌کنند و له می‌شود.

تنش لهیدگی (تکیه‌گاهی) بین ۲ دو جسم است و تنها نیرویی که مبادله می‌شود فشاری است و (خارجی است)

اما تنش قائم داخل جسم است و نیروها هم کششی می‌توانند باشند و هم فشاری.

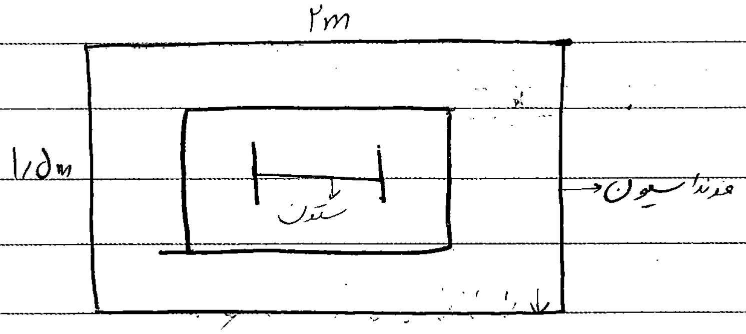
ستون فولادی



σ_B = تنش لهیدگی

کنترل : $\sigma_B = \frac{P}{A} \le \sigma_{B\,مجاز}$

پس : خاک به بارهای روی آن فشار وارد می‌کند



از بالا به شکل صفحه مقابل نگاه بکنیم

چند جا ممکن است له‌شدگی اتفاق بیفتد (بین هر ۲ جسم) =

جسم دوم بین فونداسیون را در نظر می‌گیریم (کنترل می‌کنیم) باید $A=۲/۵\times۱/۵$ و P آن هم می‌شود ۲۰t به علاوه‌ی
مساحت فونداسیون
وزن فونداسیون که:

$$\frac{۲۰t+w}{۲/۵\times۱/۵} \le \sigma_{B\,\text{خاک (بتن)}}$$

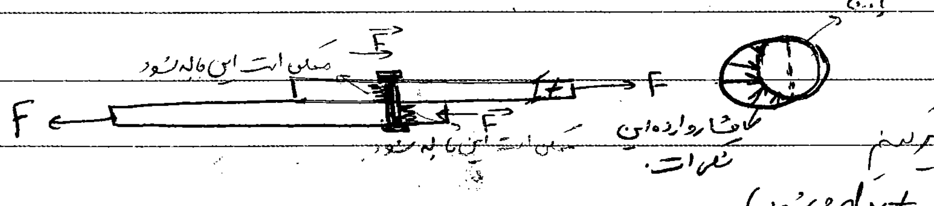
خاک را در نظر می‌گیریم چون ضعیف‌تر است.

بین فونداسیون و بیس پلیت هم تنش له‌شدگی وجود دارد:

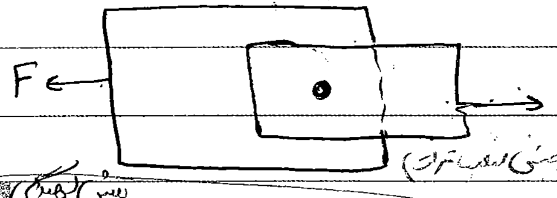
$P=۲۰t+w$
وزن بیس پلیت

برای سطح مقطع اتصال مشترک (همیشه اونی را می‌گیریم که سطح مقطع کمتری دارد)

بین بیس پلیت و ستون تنش به همان اندازه که کدام ضعیف‌تر و قوی‌تر است.



اگر سطح استوانه را تصویر کنیم
یک مستطیل به ابعاد $d\times t$ می‌شود)



$$\sigma_B=\frac{F}{t\cdot d}\le \sigma_{B\,\text{مجاز}}$$

اونی که ضعیف‌تر است را قرار می‌دهیم
بستگی به جنس دارد (اونی را که از نظر جنس ضعیف‌تر است)
را قرار می‌دهیم

تنش له‌شدگی

$$\sigma_B=\frac{F}{n\cdot t_{min}\cdot d}\le \sigma_{B\,\text{مجاز}}$$

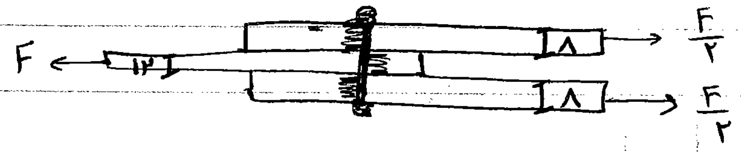
تعداد پیچ یا پرچ
مینیمم ضخامت ورق
قطر پیچ یا پرچ

STAEDTLER

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

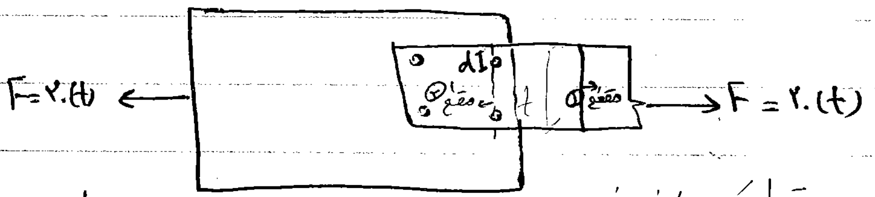
۲ـ برشی

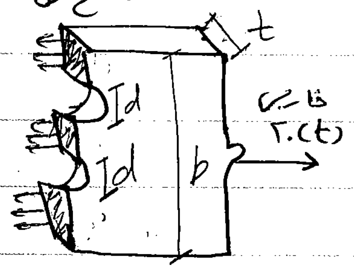


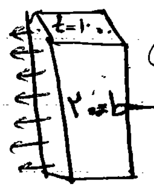
اگر ۱ برش بود t_{min} ورق نازک‌تر را بست را در نظر بگیریم

اگر ۲ برش بود متفاوت ۱ ورق را با مجموع ضخامت ۲ ورق دیگر در نظر می‌گیریم و آن که کوچکتر است را در نظر می‌گیریم

اگر ۳ برش بود مجموع ۲ تا ورق را با مجموع ۲ تا ورق دیگر بررسی می‌کنیم و آن که کوچکتر است را در نظر می‌گیریم







اگر F فشاری باشد در مقطع ۱ سوراخ نیست

فقط جهت نیروها عوض می‌شود اما در کل سوراخ خارجی

هم جهت برش نیرو و هم در داخل

خود سوراخ نیرو وجود دارد

$$\sigma = \frac{20}{1\times 20} = 1 \ \frac{(t)}{cm^2}$$

(تعداد سوراخ‌ها مهم است)

مقطع ۱ $b\times t$

بیشترین تنش

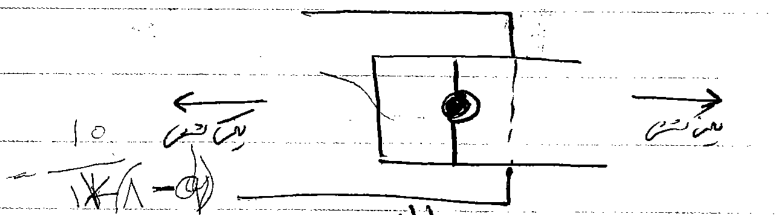
$$\sigma_{max} = \frac{P}{A_n} = \frac{P}{t(b-2d)}$$

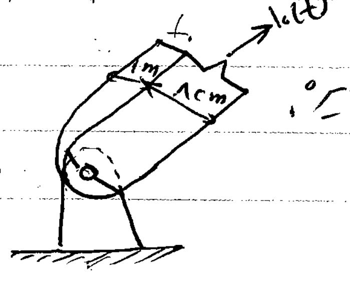
سطح مقطع خالص

که در این حالت یک مستطیل کامل

منهای ۲ مستطیل کوچک

$$\sigma = \frac{20}{1(20-2\times2)} = 1.25$$





سطح مقطع = ۸cm×۱cm منهای مقطع دایره

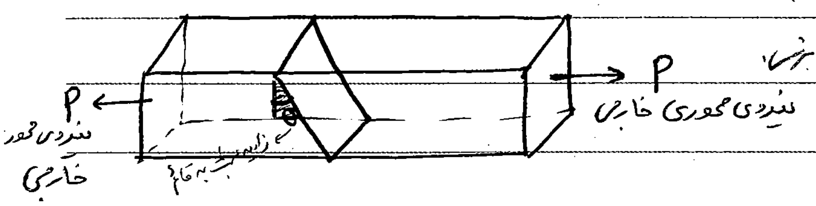
حتی اگر فشاری هم بود سطح مقطع منفی نمی‌گردد

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

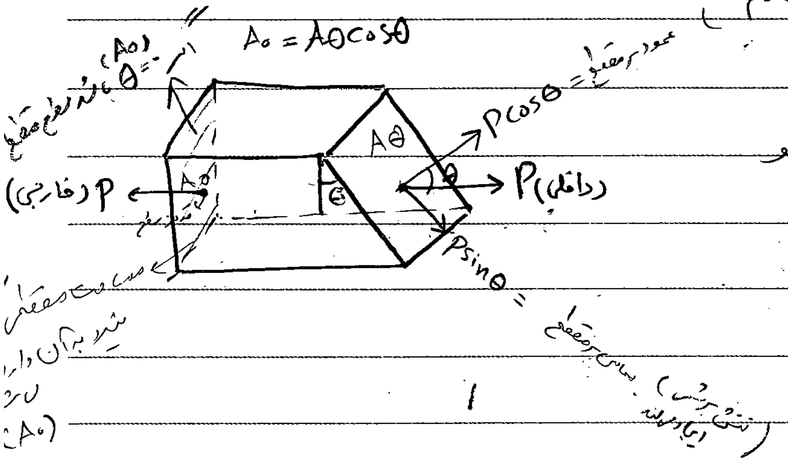
تنش در مقاطع مورب (مایل) تحت بار محوری :

پس در مقاطع مورب در واقع تنش داریم { تنش قائم / تنش برشی

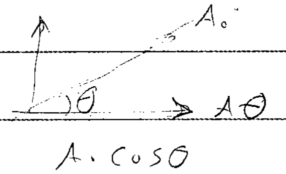


θ = زاویه‌ای است که سطح مورب با عمود بر شیء مورب می‌سازد (تنش قائم)

$A_0 = A_\theta \cos\theta$



A_0 = مساحت سطح مقطع عمود بر عضو



حال برای ... با توجه به شکل بالا

$$\sigma_\theta = \frac{P\cos\theta}{A_\theta} = \frac{P\cos\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \le \bar{\sigma} \quad ①$$

تنش قائم — مجاز چسب یا جوش

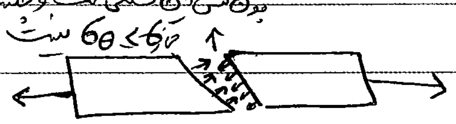
اگر θ=0 باشد آن سطح مقطع ما باشد در دو تای اول است

$$\tau = \frac{P\sin\theta}{A_\theta} = \frac{P\sin\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} = \frac{P}{A_0}\sin\theta\cdot\cos\theta = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta \le \bar{\tau} \quad ②$$

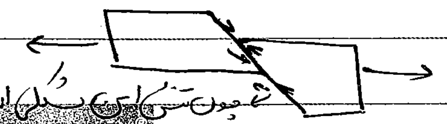
تنش برشی — مجاز چسب یا جوش

اگر ① و ② برقرار نباشد :

چون تنش این شکلی است و چسب کنده شده پس $\sigma_\theta > \bar{\sigma}$ است



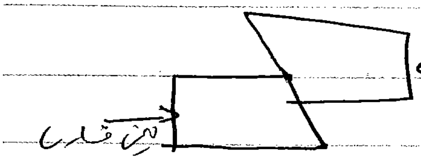
اگر ① و ② برقرار باشد پس هیچ اتفاقی در چسب یا جوش یا ... اتفاق نمی‌افتد



چون تنش این شکلی است و چسب بریده شده پس $\tau > \bar{\tau}$ مجاز

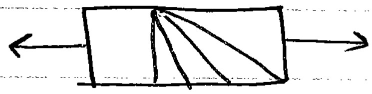
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



این با هم برش است
اما نیرو فشاری است
به صورت شده ها قه به شود

اگر بخواهند دو تا چوب را به هم بچسبونیم بهترین زاویه کدام است؟
اگر یک مقطعی یا پارچه یا چوب در اختیار داشته باشیم.



** 45° بیشترین تنش برشی را دارا است **
هر عضوی که تحت کشش یا فشار باشد باید کنترل شود
یعنی هر عضوی یا پارچه که داشتیم باید از معادله تنش مشتق بگیریم و max و min آن را بدست آوریم.

$$\sigma_\theta = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \qquad \frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{P}{A_0} \leqslant \sigma} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma_{min} = 0 \end{cases}$$

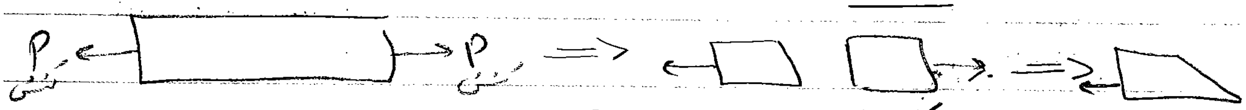
مجاز چسب یا فولاد

$$\tau_\theta = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta \qquad \frac{d\tau_\theta}{d\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \frac{P}{2A_0} \leqslant \tau} \\ \theta = 0 \text{ یا } \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tau_{min} = 0 \end{cases}$$

مجاز چسب یا فولاد

- اگر یک عضو یا پارچه تحت کشش یا فشار بود در صورتی تنش ماکزیمم دارد که $\theta = 0$ باشد و $\sigma_{max} = \frac{P}{A_0} \leqslant \sigma$
مجاز چسب یا فولاد یا در بعضی کتب

اگر عضو یا پارچه ای را بخواهیم بچسبانیم در صورتی بریده می‌شود که $\theta = \frac{\pi}{4}$ باشد. و در صورتی کنده می‌شود که $\theta = 0$ باشد



کنده شد یعنی $\sigma_{max} \leq \sigma$ نیست

بریده شده
یعنی $\tau_{max} < \tau$ نیست

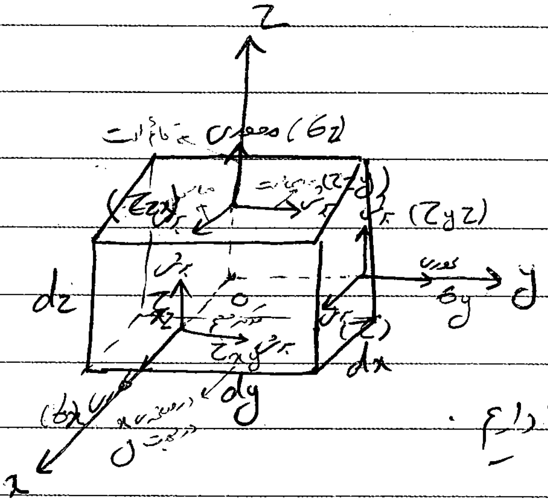
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

اگر صفحه‌ای با پیچ‌دار نشیع و $\sigma_{max}=\frac{P}{A_0} < \sigma_{مجاز}$ و $\tau_\theta=\frac{P}{2A_0} < \tau_{مجاز}$ را استدلال کنیم دیگر لازم
یعنی شیب و جوشی نداشتیم

اگر صفحه پیچ بشود و شیب و جوش داشت بعد از این که ۲ فرمول $\sigma_{max}=\frac{P}{A_0}\cos^2\theta < \sigma$ و $\tau_{max}=\frac{P}{2A_0}\sin 2\theta \le \tau$ را استدلال کردیم باید ۲ فرمول بالایی برای پیچ‌ها هم استدلال کنیم

مولفه‌های تنش:



یک المان است.

در هر مقطع یک تنش عمودی و دو تا تنش برشی داریم.

پس همیشه در هر سطح دلخواهی یک σ و دو تا τ داریم.

بنابراین:

σ_x و σ_y ، σ_z

$$\begin{cases} \tau_{xy}=\tau_{yx} \\ \tau_{xz}=\tau_{zx} \\ \tau_{zy}=\tau_{yz} \end{cases}$$

پس به جای ۹ تا مجهول ۶ تا مجهول داریم

نتیجه:
۱) در تنش برشی جای اندیس‌ها را می‌توان عوض کرد
۲) و در دو سطح عمود بر هم تنش‌های برشی هم‌مقدار هستند با هم برابرند

اثبات:

اگر $\sum M_z=0$ باشد آن گاه اثبات می‌شود که $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ و اگر $\sum M_y=0$

باشد آن گاه $\tau_{xz}=\tau_{zx}$ اثبات می‌شود و اگر $\sum M_x=0$ باشد $\tau_{zy}=\tau_{yz}$ اثبات می‌شود

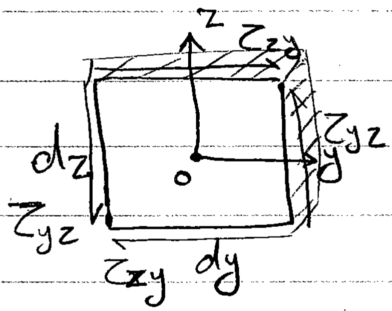
STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اثبات : $\tau_{zy} = \tau_{yz}$:

صفحه zy را در نظر می‌گیریم : $\tau = \frac{P}{A}$



ثابت شد

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow \tau_{zy}\underbrace{(dx \times dy)}_{\text{نیرو}} \times \underbrace{dz}_{\text{فاصله}} = \tau_{yz}\underbrace{(dx \times dz)}_{\text{نیرو}}\underbrace{dy}_{\text{فاصله}} \Rightarrow \boxed{\tau_{zy} = \tau_{yz}}$$

این تنش ها با هم برابرند

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

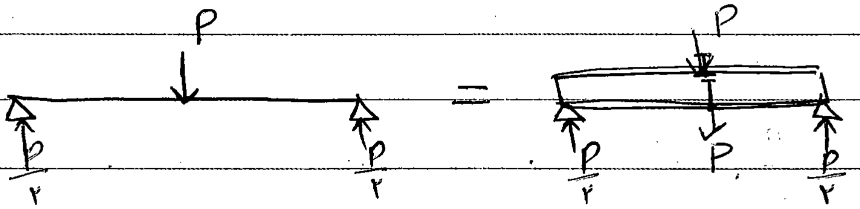
قطر اصلی تنش ها

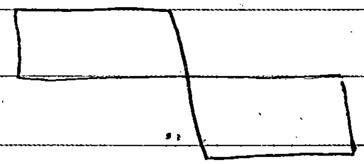
می‌توان این تنش‌ها را به صورت ماتریس متقارن نشان داد.

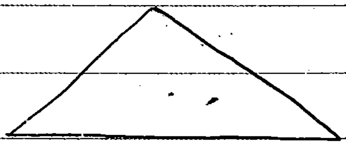
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

«فصل دوم» «رابطه‌ی تنش ـ تنجش و تغییر طول اعضا تحت بار محوری»







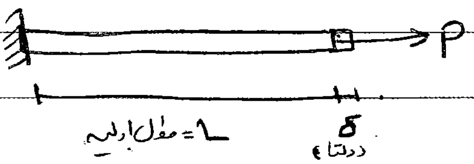
برای یک سازه آهنی عملاً فرقی نمی‌کند بار روی کجای آن باشد یا داخل آن باشد اما در استاتیک فرق می‌کرد چون ما اجسام را صلب فرض می‌کردیم. وقتی در استاتیک صلب فرض می‌کردیم که فرض دقیقی نیست اما با این وجود به محاسبات استاتیک لطمه وارد نمی‌کرد چون در نهایت عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی که ما در استاتیک می‌خواستیم درست بدست می‌آمد (صلب = تغییر شکل ندهد)

در این فصل منظور از تغییر شکل تغییر طول است که اگر نیرو + باشد (کششی) افزایش طول داریم و اگر نیرو − باشد (فشاری) کاهش طول داریم

stress (تنش): نیروی وارد بر واحد سطح $\sigma = \frac{P}{A}$ تنش قائم یا محوری

میله‌ی الاستیکی

این میله تحت کشش است



دلتا

$\delta =$ تغییر طول

تغییر طول نسبی

ε واحد ندارد یعنی بدون بعد است

$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ تغییر طول

L = طول اولیه

: تغییر طول واحد طول

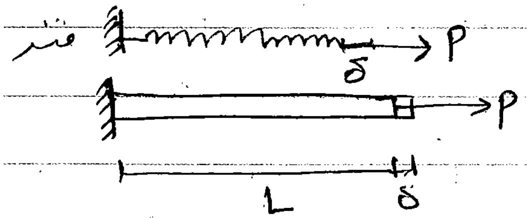
(تغییر طول نسبی / کرنش / تنجش) strain

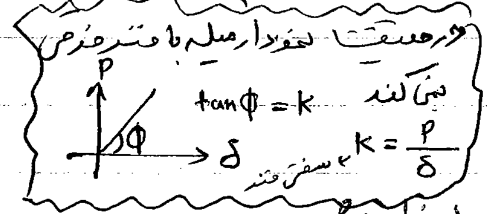
L همیشه مثبت است بنابراین علامت ε به δ بستگی دارد که اگر δ + باشد (کششی) ε هم مثبت است

* ε تغییر طول واحد طول را می‌دهد یعنی مثلا تغییر طول 1m یا 1mm یا 1in و ... را می‌دهد *

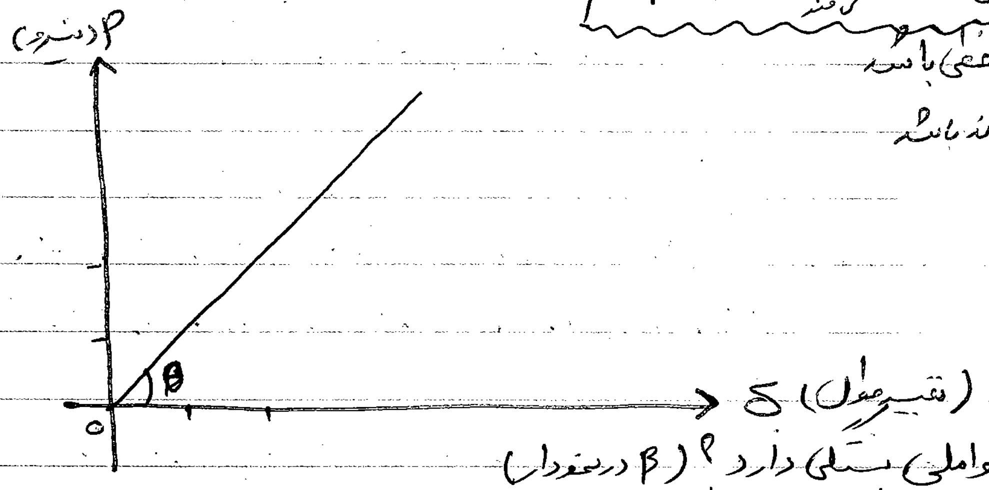
مثلا اگر $\delta = 2mm$ و $L = 200mm$ باشد $\varepsilon = \frac{2}{200} = 0.01$ می‌شود یعنی 1mm ، 0.01 تغییر طول دارد.

قطعاً بین تنش و تنجش رابطه وجود دارد یعنی طبق رابطه‌ی $\sigma = \frac{P}{A}$ هرچه P بیشتر باشد σ بیشتر می‌شود و در نهایت طبق رابطه‌ی $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ هرچه δ بیشتر باشد ε هم بیشتر می‌شود طبق شکل صفحه‌ی قبل (میله‌ی آلومینیومی)





فرض می‌کنیم رابطه خطی باشد
ولی منحنی هم می‌تواند باشد



شیب نمودار به چه عواملی بستگی دارد؟ (β در نمودار)

δ به 4 عامل بستگی دارد P ، L ، E و A طبق رابطه‌ی

$$\overset{\text{تغییر طول}}{\delta} = \frac{PL}{EA}$$

بعدا اثبات می‌شود

سختی (هرچه ماده قوی‌تر باشد تغییر طولش کمتر می‌شود)

مساحت

شیب نمودار؟

$$\tan\theta = \frac{P}{\delta} = \frac{EA}{L}$$

شیب نمودار

در حقیقت نقش k در فنر را بازی می‌کند

SUBJECT :
Year (   ) Month (   ) Date (   )

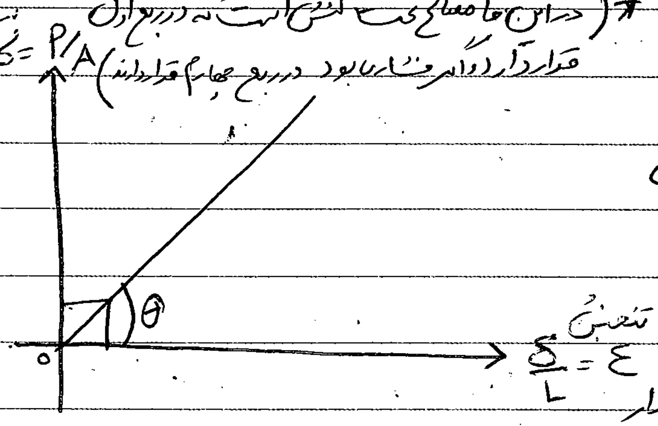
پس نمودار نیرو ـ تغییر طول به عوامل زیر بستگی دارد: (در حقیقت شیب نمودار هم به عوامل زیر بستگی دارد)

۱ـ جنس مصالح (آلومینیوم ـ فولاد ـ ...)   ۲ـ مساحت مقطع   ۳ـ طول عضو

* و هر وقت می‌خواهیم نمودار نیرو ـ تغییر طول را معرفی کنیم برای یک شیء باید هر سه (یعنی جنس مصالح ـ مساحت مقطع و طول عضو را بدهیم) * = این نمودار زیاد در مقاومت کاربرد ندارد.

** ما در حقیقت نموداری را می‌خواهیم که فقط به جنس مصالح بستگی دارد یعنی ما نمودار تنش ـ تغییر را می‌خواهیم **

*(در این جا مصالح کششی است که در ربع اول قرار دارد و اگر فشاری بود در ربع چهارم قرار داشت)



(این نمودار فقط به جنس مصالح بستگی دارد و این نمودار برای ما مهم است)

اگر ما در این نمودار شیب را بدانیم این نمودار تعریف می‌شود پس برای ما $\tan\theta$ مهم است

$(1-1)\ \tan\theta = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E$ (واحد E هم واحد σ است چون ε واحد ندارد)

(همان جنس مصالح که قبلاً مطرح شد) مدول الاستیسیته (ضریب ارتجاعی) (مدول یانگ)

نکته: σ و ε هر دو در هر تنشی متغیر هستند اما این نتیجه می‌شود که E همواره ثابت است

ـ رابطه‌ی 1-1 معمولاً به صورت: $\boxed{\sigma = E.\varepsilon}$ کاربرد بیشتری دارد که به قانون هوک معروف می‌باشد.

E در صورت مسئله داده می‌شود.

نکته: E مثل K در فنر برای هر ماده ثابت است مثلاً:

$E_{st} = 2.1\times10^{6}\ \frac{kg}{cm^2} = 2.1\times10^{5}\ \frac{N}{mm^2} =$ (فولاد)

[redacted] $\times10^{6}\ \frac{Lb}{in^2}$ (پوند)

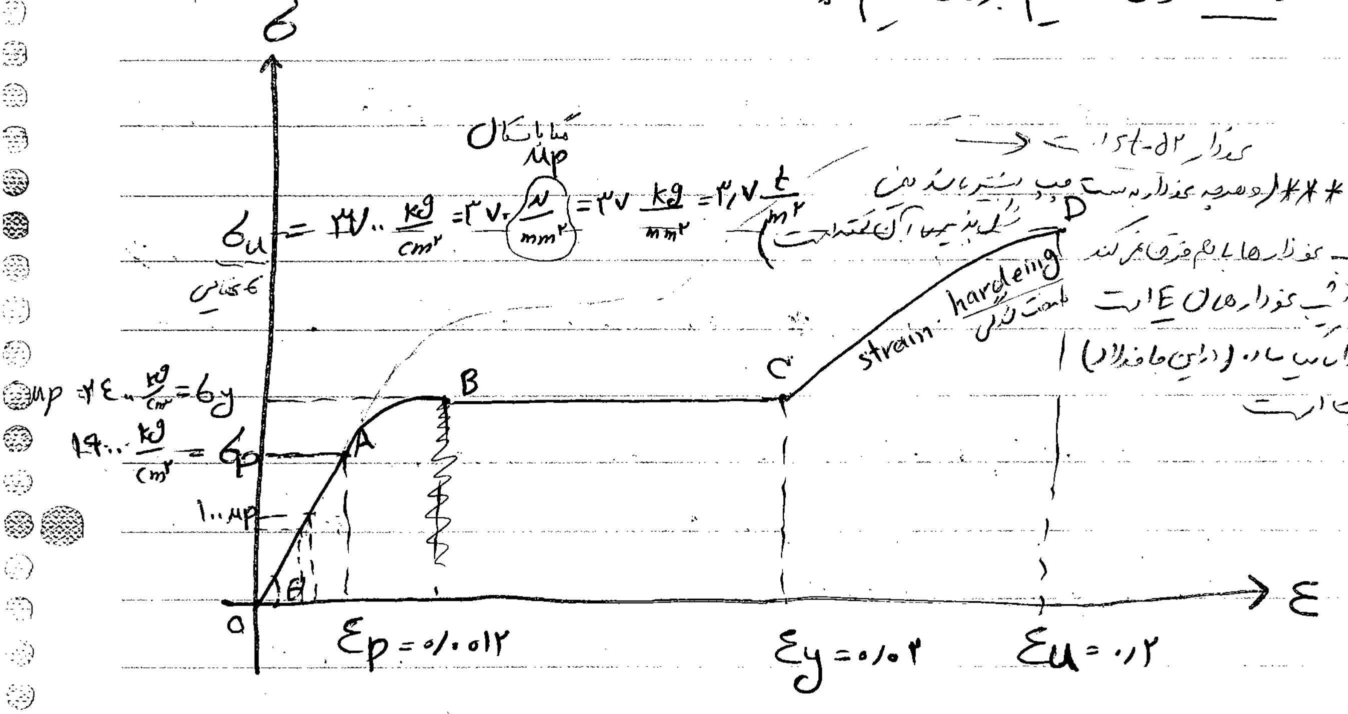
$E_{al} = 0.7\times10^{6}\ \frac{kg}{cm^2}$ (آلومینیوم)

$E_{c} = (0.26$ تا $0.35)\times10^{6}\ \frac{kg}{cm^2}$ (سنگ)

SUBJECT :

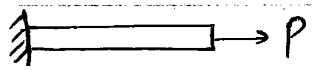
Year ( ) Month ( ) Date ( )

نمودار فولاد را می‌خواهیم بررسی کنیم :



** هر چه نمودار به سمت چپ بیشتر باشد یعنی ... شکل نمودارها با هم فرق می‌کند زیرا شیب نمودارها E است

E برای یک ماده (مانند فولاد) ثابت است



اگر یک میله فولادی تحت کشش باشد و ما بخواهیم نمودار تنش - تغییر شکل آن را رسم کنیم طبق نمودار بالا می‌شود.

الاستیک مثل فنر = یعنی اگر عضو تغییر شکل داد آن را ول کنیم به حالت اولیه برمی‌گردد

با توجه به نمودار بالا : (یعنی منحنی است (از صفر در نمودار))

OA = منطقه الاستیک خطی
یعنی برگشت پذیر است ارتجاعی یا کشسان (از صفر در نمودار)

AB : منطقه الاستیک غیر خطی

BC : (منطقه پلاستیک) تغییر شکل افزایش است ولی تنش ثابت است
و الاستیک و ارتجاعی نیست

CD : منطقه سخت شدگی مجدد تنش

و نقطه D، نقطه گسیختگی (پاره شدن) فولاد است.

$\frac{15}{100} \times 5$

SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)

— st به معنای فولاد است

مثلاً st37 یعنی فولادی که نقطه‌ی گسیختگی آن ۳۷ $\frac{kg}{mm^2}$ است

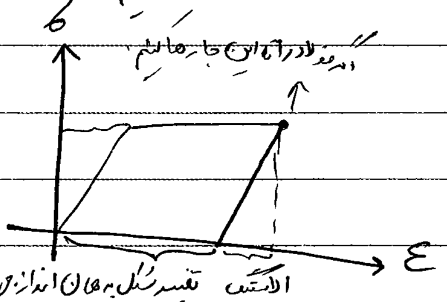
نکته در مورد نمودار صفحه‌ی قبل:

— در عمل و در اجرا از منحنی AB (الاستیک غیرخطی) صرف‌نظر می‌کنند [اما در تئوری باید باشد]

— و در عمل ملاک ما ۳۷۰ Mp نیست بلکه ۲۴۰ Mp است. فرض اگر تنش بیش از ۲۴۰ باشد تغییر شکل خیلی زیاد می‌شود.

[برای شکل‌پذیری به ε و برای سختی به σ توجه می‌کنیم]

فرض می‌کنیم که فولاد تا ۲۴۰ تحمل می‌کند و ضریب اطمینان را ۲۴۰ قرار می‌دهیم.



(معمولاً نمودار فولاد را تا همین جا رسم می‌کنند)

اثبات $\delta = \frac{PL}{EA}$:

قانون هوک: $\sigma = E \cdot \varepsilon$

تغییر طول در اثر کشش یا فشار

$$\frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L} \Rightarrow (I)\ \boxed{\delta = \frac{PL}{EA}}$$

علامت δ به P بستگی دارد. طول و E و A همواره مثبت هستند.

الف) برای استفاده از فرمول (I) باید در تمام طول عضو (L) سه شرط زیر برقرار باشد:

۱) عضو دو نیرویی باشد (P ثابت باشد)

۲) همگن باشد و E ثابت باشد

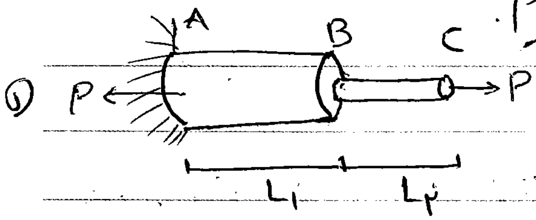
۳) مقطع عضو یکنواخت باشد (A ثابت باشد)

در صورت برقراری این شروط از فرمول I استفاده می‌کنیم.

SUBJECT :

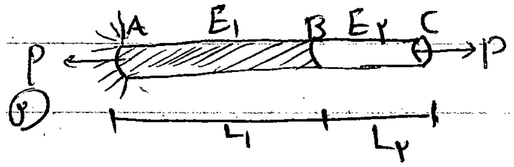
Year ( ) Month ( ) Date ( )

ب) اگر در طول عضو نیرو (P) یا جنس (E) یا مساحت مقطع (A) به طور ناگهانی یا غیر تدریجی تغییر نماید، عضو را به چند قسمت مجزا تقسیم می‌کنیم که هر قسمت آن به طور مجزا ۳ شرط صفحه قبل را دارا باشد و از فرمول زیر تغییر طول کل عضو را بدست می‌آوریم:



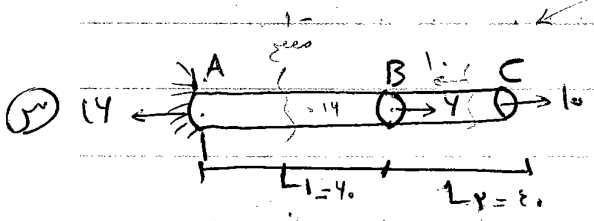
① A ثابت است

$$\boxed{\delta=\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_iL_i}{E_iA_i}}\quad (II)$$



② E ثابت است

$P+4-16=0$

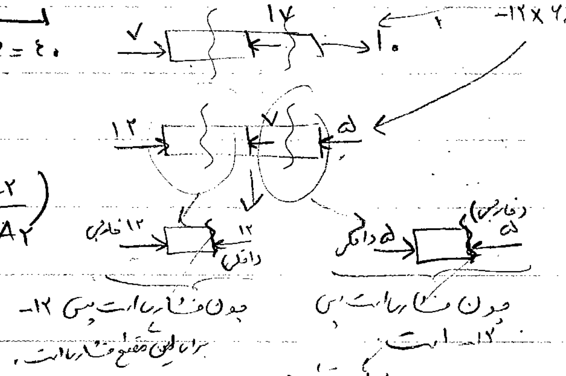


③ P ثابت است

$$\delta=\frac{1}{EA}(P_1L_1+P_2L_2)$$

$12\times 40 \quad 10\times 40$

$-12\times 40 \quad -5\times 40$



برای شکل ①:

اینها که ثابت است را بیرون

$$\delta=\frac{P}{E}\left(\frac{L_1}{A_1}+\frac{L_2}{A_2}\right)$$

برای شکل ②:

$$\delta=\frac{P}{A}\left(\frac{L_1}{E_1}+\frac{L_2}{E_2}\right)$$

برای شکل ③:

$$\delta=\frac{1}{EA}(P_1L_1+P_2L_2)$$

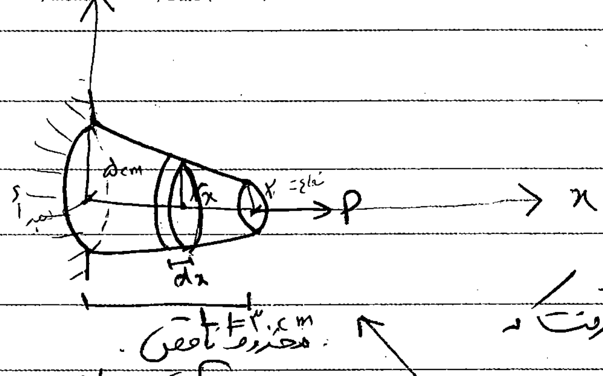
ج) اما اگر نیرو (P) و جنس (E) و یا مساحت (A) در طول عضو به طور تدریجی تغییر نماید از فرمول انتگرالی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{\delta=\int_0^L\frac{P_x\,dx}{E_xA_x}}\quad (III)$$

تابعی بر حسب x

تابعی بر حسب x

SUBJECT : (۲ دشتاد)
Year (   ) Month (   ) Date (   )



تغییر طول این المان برابر است با:

$$\delta = \frac{P\,dx}{E \cdot A}$$

اما برای کل شکل باید از این المان انتگرال گرفت که برابر می‌شود با فرمول زیر.

مخروط ناقص

مساحت آن به طور تدریجی تغییر کرده

$$\boxed{\delta = \frac{P}{E}\int_0^L \frac{dx}{A_x}} \longrightarrow \frac{P}{E}\int_0^{30} \frac{dx}{\pi r_x^2}$$

$r = ax + b$

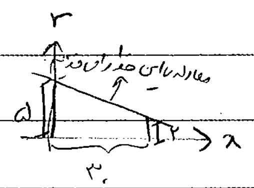
$\begin{cases} x = 0 \to r = ? \\ x = L \to r = ? \end{cases}$

مثلاً در مثال زیر:

$r = ax + b$

$r_x = 5 - 0.1x$

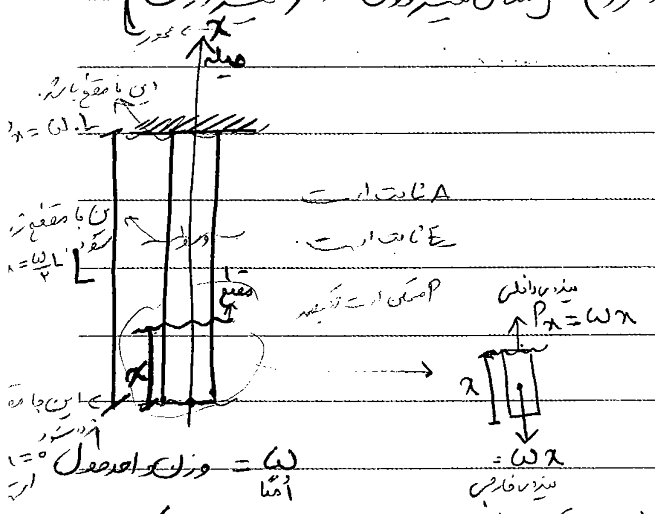
$\begin{cases} x = 0 \to r = 5 \\ x = 30 \to r = 2 \end{cases}$



$$\delta = \frac{P}{E}\int_0^{30} \frac{dx}{\pi(5 - 0.1x)^2}$$

برای وقتی که مساحت تدریجی تغییر کند

~~مثال برای این که P تدریجی تغییر کند~~ و مثال‌ها ربط دارد) [مثال تغییر طول در اثر تغییر وزن]



$$\delta = \frac{1}{EA}\int_0^L P_x\,dx = \frac{1}{EA}\int_0^L \omega \cdot x\,dx \Rightarrow$$

A ثابت است

E ثابت است

P متغیر است با ارتفاع

$$\Rightarrow \delta = \frac{\omega}{EA}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^L\right] = \frac{\overbrace{\omega L}^{W = \omega \cdot L}{}^2}{2E \cdot A} \Rightarrow$$

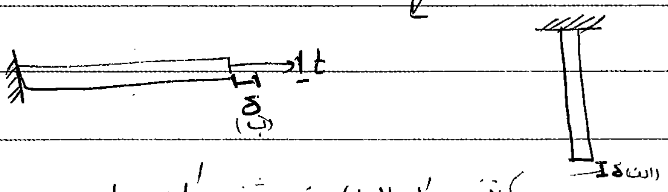
$$\boxed{\delta = \frac{W \cdot L}{2EA}}$$

این فرمول $\frac{1}{2}$ برابر فرمول (I) است.

ω = وزن واحد طول

$W = \omega \cdot L$ = وزن کل میله

نکته: نیروی داخلی در جایی که مقطع زده می‌شود وارد می‌شود.



$\delta = ?$

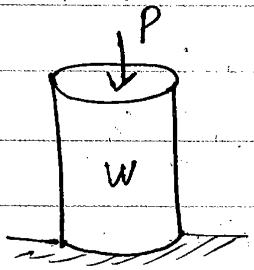
تغییر طول الف نصف تغییر طول ب است.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

نتیجه مهم: تغییر طول ناشی از وزن نصف تغییر طول ناشی از کشیدن است

مثال: ستون است که کاهش طول ناشی از:

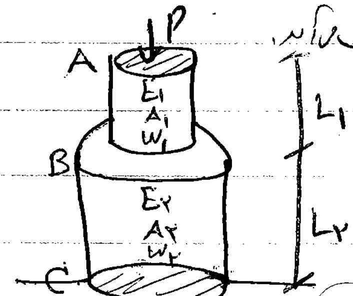


الف) مقدار کاهش طول $\frac{WL}{2EA} + \frac{PL}{EA}$ + ج) .... +

ب) .... + ... د) .... ✓ تغییر طول خواسته شده

مثال: مقدار کاهش ارتفاع کل ستون ؟؟

تغییر ارتفاع کل ستون یعنی تغییر ارتفاع AC که از جمع $AB + BC$ بدست می‌آید

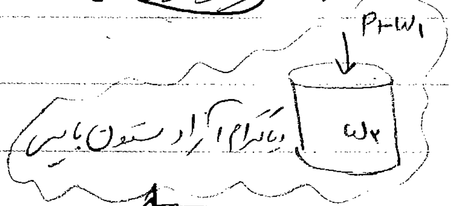


$\delta_1 + \delta_2$

ستون بالایی

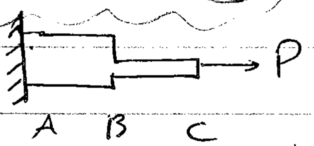
$$\delta_{AC} = \delta_{AB} + \delta_{BC} = \left[\frac{PL_1}{E_1A_1} + \frac{W_1L_1}{2E_1A_1}\right] + \left[\frac{(P+W_1)L_2}{E_2A_2} + \frac{W_2L_2}{2E_2A_2}\right]$$

با فرمول قبل هم استفاده کنیم نیازی به انتگرال گیری نیست چون



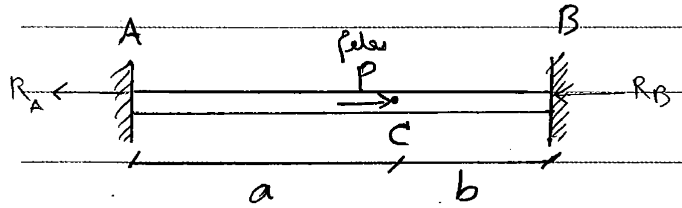
نکته:

تغییر مکان (جابجایی) نقطه C = ؟؟



δ_C (تغییر مکان (جابجایی) نقطه C) $= \delta_{AC}$

حل مسائل نامعین استاتیکی :

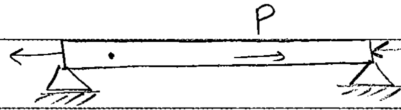


اگر نیروی P عمودی بود هر تکیه‌گاه ۳ عکس‌العمل داشت، ولی چون نیرو افقی است هر تکیه‌گاه یک عکس‌العمل دارد

معادله تعادل : $\Sigma F_x = 0$ $\boxed{R_A + R_B = \overset{\text{معلوم}}{P}}$ (1)

معادله‌ی سازگاری : تغییر شکل‌ها
تغییر طول‌ها
(در مقاومت)

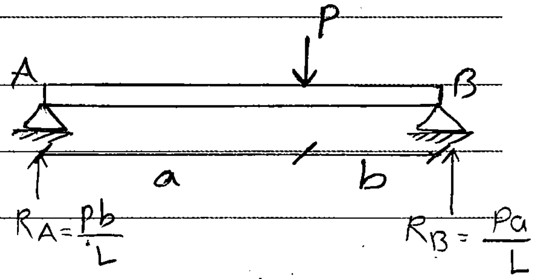
$\delta_{AB} = 0 \Longrightarrow$ یا



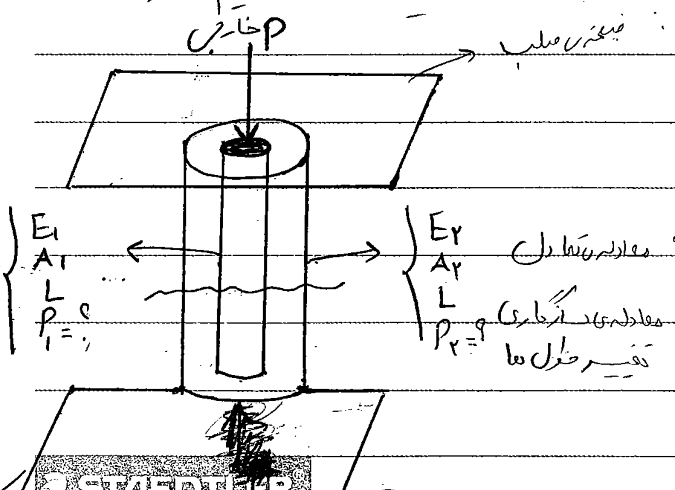
$\delta_{AC} + \delta_{BC} = 0$

$\boxed{\delta = \frac{PL}{EA}}$ $\boxed{\frac{\overset{\text{کششی}}{R_A \cdot a}}{E \cdot A} + \frac{\overset{\text{فشاری}}{-R_B \cdot b}}{EA} = 0}$ (2)

$$\Longrightarrow \begin{cases} R_A = P\dfrac{b}{L} \\ R_B = P\dfrac{a}{L} \end{cases}$$



** در استاتیک معین در تیرها می‌گفتیم و این جوری حل می‌کردیم که
** با حل در مقاومت نامعین در تیرها هم برابر بود **



مثال: نیروی میله و لوله را بدست آورید.

الف) $\Sigma F_y = 0$

معادله‌ی تعادل : $\boxed{P_1 + P_2 = P \text{ معلوم}}$ (1)

معادله‌ی سازگاری
تغییر طول‌ها

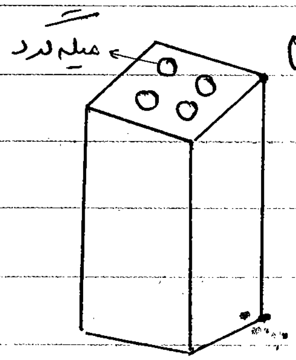
$\delta_1 = \delta_2$ تغییر طول در لوله و میله یکسان است، به خاطر وجود صفحه‌ی صلب

$\boxed{\frac{P_1 L}{E_1 A_1} = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}}$

الف) میله‌ی فولادی داخل لوله‌ای می‌شود که بین صفحه‌ی صلب زیر و دست صفحه‌ی صلب روی قرار دارد، با نیروی گسترده P به آن اعمال شده که آن نشان داده شده است.

$$\begin{cases} P_1 = P\dfrac{E_1A_1}{E_1A_1+E_2A_2} \\ P_2 = P\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1+E_2A_2} \end{cases}$$

می توانیم از فرمول بالا استفاده کنیم؟



$$\begin{cases} P_1 = P\dfrac{E_1A_1}{E_1A_1+E_2A_2} \\ P_2 = P\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1+E_2A_2} \end{cases} \Longrightarrow$$

در ستون شکل مقابل سهم بتن نسبت به فولاد؟ $\dfrac{P_1}{P_2} = ?$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{E_1A_1}{E_2A_2}$$ (این نسبت صلبیت محوری)

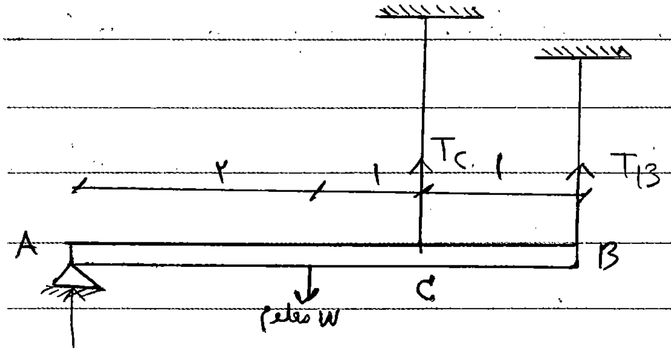
ب) تنش در هر کدام را بدست آورید؟

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{P_1}{A_1} = P\dfrac{E_1}{\Sigma EA} \\ \sigma_2 = \dfrac{P_2}{A_2} = P\dfrac{E_2}{\Sigma EA} \end{cases} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2}$$

به نسبت (مدول الاستیسیته)

ج)
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E_1} = \dfrac{P}{\Sigma EA} \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E_2} = \dfrac{P}{\Sigma EA} \end{cases} \qquad \boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

د)
$$\begin{cases} \delta_1 = \varepsilon_1 L = \boxed{\dfrac{PL}{\Sigma EA}} \\ \delta_2 = \varepsilon_2 L = \dfrac{PL}{\Sigma EA} \end{cases}$$

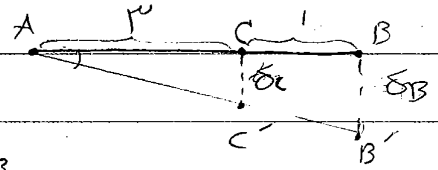


با وجود نیروی W میله حول نقطه A که ثابت است می‌چرخد و در کابل‌ها تغییر طول ایجاد می‌شود.

معادلات تعادل

$$R_A + T_B + T_C = W_{\text{معلوم}}$$

گشتاور حول A : $4T_B + 3T_C = 2W$

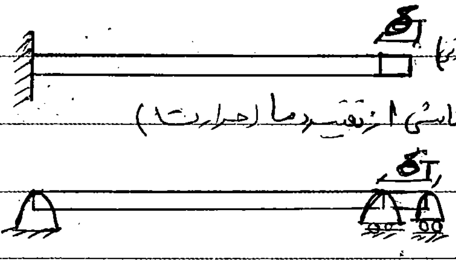


معادلات سازگاری تغییر طول‌ها :

$$\frac{\delta_C}{\delta_B} = \frac{3}{4} \rightarrow \delta_C = \frac{3}{4}\delta_B$$

$$\frac{T_C \cdot L_C}{E_C \cdot A_C} = \frac{3}{4}\,\frac{T_B \cdot L_B}{E_B \cdot A_B}$$

اثرات تغییر دما : (در اثر دما تغییر طول می‌بینیم)



(تغییر طول حرارتی)

تغییر طول ناشی از تغییر دما (حرارت)

$$\boxed{\delta_T = \alpha \cdot L \cdot \Delta T}$$

(mm) ، $\frac{1}{°C}$ ، (mm) ، (°C) ، $(T_2 - T_1)$

ضریب انبساط طول حرارتی ، طول ، تغییر دما

به مساحت بستگی ندارد

$$\boxed{\delta = \frac{PL}{EA}}$$

تغییر طول در اثر کشش است.

کرنش حرارتی $\boxed{\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha \cdot \Delta T}$

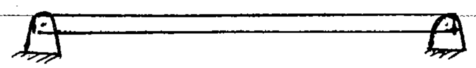
میله ای را گرم کنیم و افزایش طول دهد یا سرد کنیم و کاهش طول دهد تنش صفر است. تنش $\sigma_T = 0$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

- اگر تغییر دما بر میله هایی که می توانند تغییر طول داشته باشند (یک سر میله آزاد است)

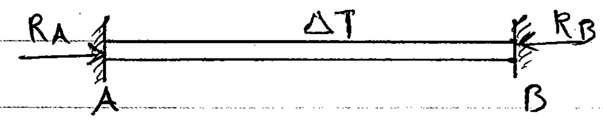
- اگر تغییر دما بر میله هایی که نمی توانند تغییر طول داشته باشند ؟



δ تغییر طول $= 0$

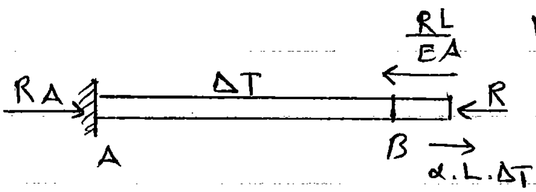
$\varepsilon = 0$

σ تنش $= ?$



معادله ی تعادل : $\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow R_A = R_B = R$

فرض: اگر تکیه گاه B نبود؟



معادله ی سازگاری تغییر طول ها : $\delta_{AB} = 0$

$$(\alpha . L . \Delta T) + \left(\frac{RL}{EA}\right) = 0$$

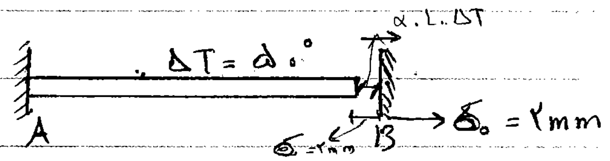
عکس العمل $\boxed{R = -EA . \alpha . \Delta T}$

اگر سرد کنیم $\Delta T \leftarrow - \leftarrow +R$

اگر گرم کنیم $\Delta T \leftarrow + \leftarrow -R$

$$\sigma_{\text{تنش}} = \frac{R}{A} = -E . \alpha . \Delta T$$

مثال: σ تنش $= ?$



δ_T تغییر طول $= \underbrace{\alpha . L . \Delta T}_{5}$

$5 \leq \underset{2}{\delta_0}$ نمی خورد به تکیه گاه B

$5 > \underset{2}{\delta_0}$ می خورد به تکیه گاه B

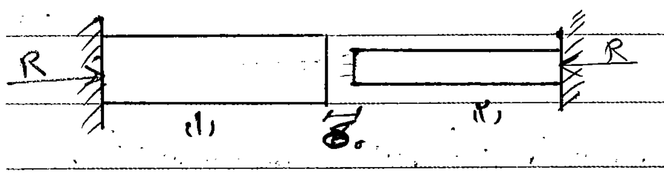
معادله ی سازگاری : $\delta_{AB} = 2mm$

$$\underbrace{\alpha . L \Delta T}_{5} + \underbrace{\frac{R . L}{E . A}}_{-3} = 2 \longrightarrow \boxed{R = 2}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال: $R = ?$



معادله سازگاری: $\delta_1 + \delta_2 = \delta_0$ معلوم

$$\left(\alpha_1 \cdot L_1 \cdot \Delta T + \frac{R \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1}\right) + \left(\alpha_2 \cdot L_2 \cdot \Delta T + \frac{R L_2}{E_2 A_2}\right) = \delta_0$$

اگر دو میله ی بالا به هم چسبیده بود و تنش را می خواست: $\delta_0 = 0$ می گذاریم در معادله ی بالا

نسبت پواسون (ضریب پواسون): ص ۵۲ کتاب

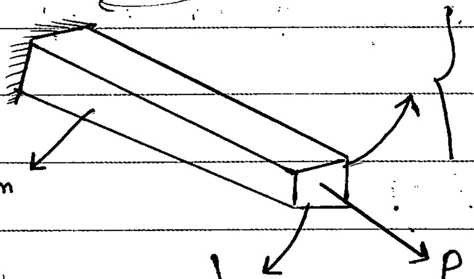
فرض: یک میله ی فولادی را در آزمایشگاه تحت کشش قرار می دهیم می بینیم به طول آن 1mm

$\sigma_x = \frac{P}{A}$

اضافه شده اما تغییر طول در راستای Z و y کمتر می شود. $\sigma_y = \sigma_z = 0$ اما $\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$

$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ ← مدول کشسانی



$L_z = 20mm$

$\delta z = -0.006mm$

$\varepsilon_z = -0.0003mm$

$L_x = 1000 mm$

$\delta x = 1mm$

$\varepsilon_x = 0.001 \quad \frac{\delta}{L}$

$L_y = 30mm$

$\delta y = -0.009 mm$

$\varepsilon_y = -0.0003$

$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{L_x}$

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

(برای مواد ایزوتروپ)

$$\underset{\text{(نسبت پواسون)}}{\overset{\text{نیو}}{\nu}} = \left|\frac{\text{تغییر طول نسبی جانبی}}{\text{تغییر طول نسبی محوری}}\right| = \frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{-\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \text{ یا } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\varepsilon_y = \varepsilon_z}_{\text{کرنش های جانبی}} = -\nu \underbrace{\varepsilon_x}_{\text{کرنش محوری}}} \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \text{ ← مدول الاستیسیته} \qquad \sigma_x = \frac{P}{A}$$

همگن: خواص ماده در تمام نقاط ماده یکسان و ثابت باشد. (خواص عددی) یا ایزوتروپ

STAEDTLER

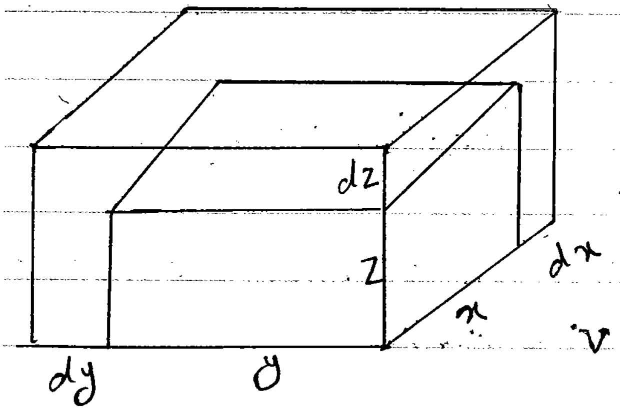
ایزوتروپیا: ماده‌ای ایزوتروپ است که کلیه‌ی خواص آن در تمام جهات یکسان باشد

مثال: مثلاً اگر یک مکعب فولادی را در آب جوش بیندازیم به همان شکل مکعب می‌ماند چون تغییر طول در تمام بعدها یکسان است.

$v' - v$ تغییر حجم

تغییر حجم نسبی

تغییر حجم نسبی: $\left(\varepsilon_v = \dfrac{\delta_v}{v}\right)$



$$V = x.y.z$$

حجم ثانویه $V' = [(x+dx)(y+dy)](z+dz)$

$$[xy + xdy + ydx](z+dz)$$

$$V' = xyz + yzdx + xzdy + xydz$$

$$\varepsilon_v = \frac{yzdx + xzdy + xydz}{xyz}$$

$$\boxed{\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$ (I) فرمول کلی

** اگر حجمی به هر دلیلی تغییر کرد [نیرو یا گرما]، تغییر حجم نسبی برابر است با مجموع سه تغییر طول نسبی **

کاربرد فرمول: الف) تغییر حجم نسبی ناشی از تغییر دما.

ب) تغییر حجم نسبی ناشی از نیروی محوری. (تغییر نیرو)

SUBJECT :

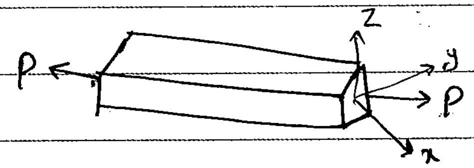
Year ( ) Month ( ) Date ( )

الف) تغییر حجم نسبی ناشی از تغییر دما:

$$\varepsilon_v = \underbrace{\varepsilon_x}_{\alpha\Delta T} + \underbrace{\varepsilon_y}_{\alpha\Delta T} + \underbrace{\varepsilon_z}_{\alpha\Delta T} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_v = 3\alpha\cdot\Delta T} \quad (III)$$

ضریب انبساط حجمی حرارتی

ب) تغییر حجم نسبی ناشی از نیروی محوری:



$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \underbrace{\varepsilon_y}_{-\nu\varepsilon_x} + \underbrace{\varepsilon_z}_{-\nu\varepsilon_x} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_v = \varepsilon_x(1-2\nu)} \quad (III)$$

اگر $\nu = 0 \Rightarrow \varepsilon_v = \varepsilon_x$

اگر $\nu = 0.5 \Rightarrow \varepsilon_v = 0$

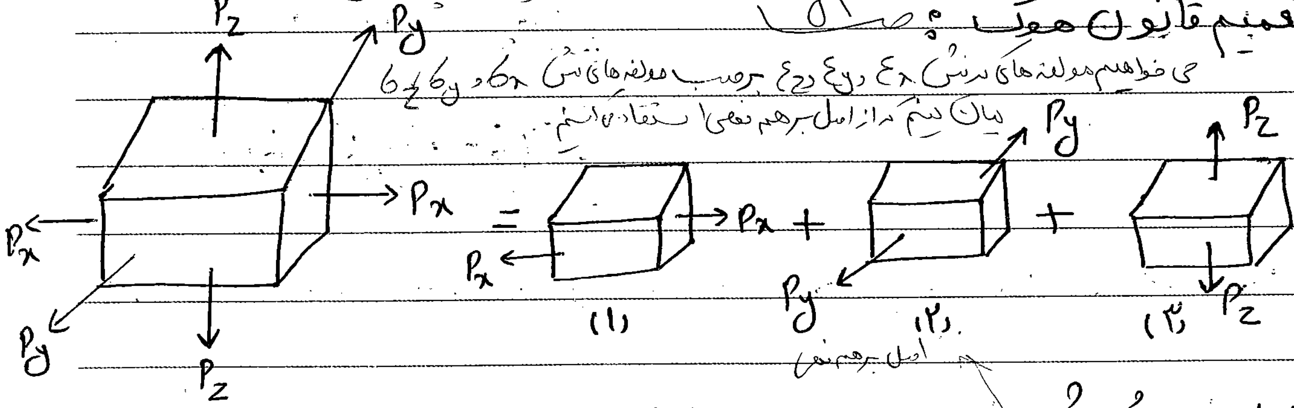
$\Rightarrow \boxed{0 < \nu < 0.5}$

نتیجه: ν بین ۰ تا ۰٫۵ است ν برابر صفر وجود ندارد $\nu = 0.5$ با شک امکان ندارد.

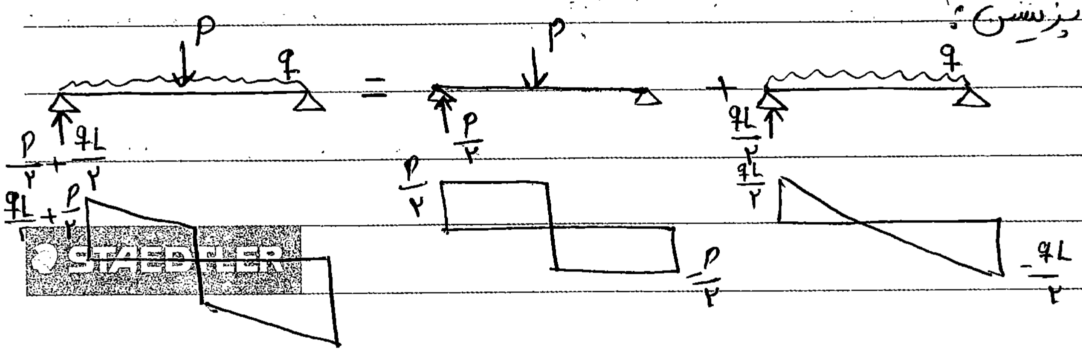
بارگذاری چند محوری

تعمیم قانون هوک: ص ۵۳

می خواهیم مولفه های کرنش ε_x و ε_y و ε_z را برحسب مولفه های تنش σ_x و σ_y و σ_z بیان کنیم که از اصل برهم نهی استفاده می کنیم.



اصل سوپر پوزیشن:

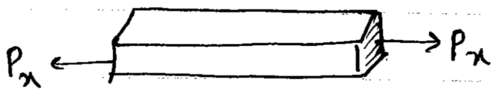


SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

هوک : $\sigma_x = E\varepsilon_x$

پواسون : $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

تحت کشش

$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = +\dfrac{\sigma_x}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_y}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\[2ex] \varepsilon_y = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} & +\dfrac{\sigma_y}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\[2ex] \varepsilon_z = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_y}{E} & +\dfrac{\sigma_z}{E} \end{cases}$$

بارگذاری در امتداد x   بارگذاری در امتداد y   بارگذاری در امتداد z

(۱)   (۲)   (۳)

اگر از دو یا ۳ جهت نیرو وارد شود (کلاً اگر از تمام وجه ها تحت تنش باشد)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = +\dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} - \nu\dfrac{\sigma_z}{E} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y+\sigma_z)\right] + \alpha\Delta T \\[2ex] \varepsilon_y = \text{------} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x+\sigma_z)\right] + \alpha\Delta T \\[2ex] \varepsilon_z = \text{------} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x+\sigma_y)\right] + \alpha\Delta T \end{cases}$$

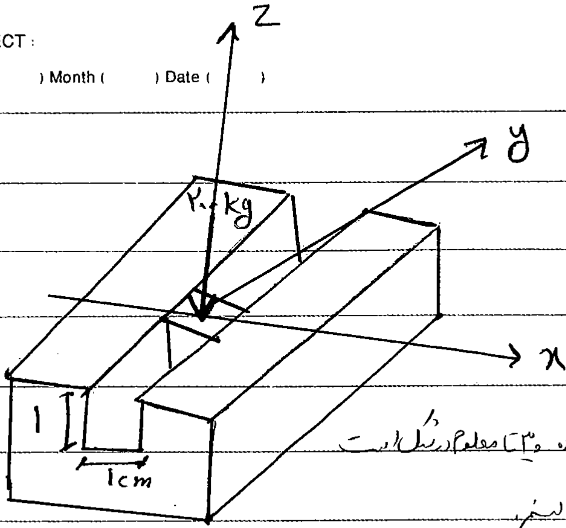
اگر علاوه بر اعمال نیرو در هر سه جهت دما را نیز تغییر دهیم

مثال: قطعه ی صلب فولادی، یک شیار به عمق و عرض ۱ cm و یک قطعه ی لاستیکی به ابعاد ۱cm در داخل

صلب

شیار کاملاً فیت شده است و یک فشار ۲۰۰kg به لاستیک اعمال شده به لاستیک را تحت فشار

قرار داده و E و ν لاستیک معلوم می باشد.



$\cancel{\varepsilon_x}$ ε_y ε_z

σ_x $\cancel{\sigma_y}$ $\sigma_z \rightarrow -۲۰۰ \frac{kg}{cm^۲}$ فشاری

نیروی وارد بر همه محور تنش آن وجه محسوب می‌شود.

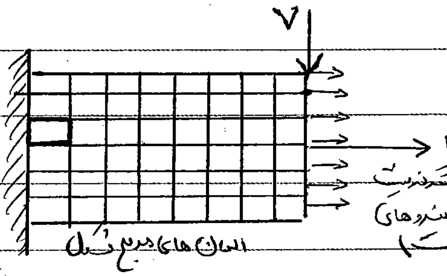
۳ تا مجهول داریم ۲ تا معلوم و مسئله داده و ۳ تا معلوم در شکل است

حال در ۳ معادله‌ی بالا قرار داده و حل می‌کنیم.

ε_z صفر است چون دقیقاً داخل شیار است و ε نداریم، σ_y نداریم چون ε_y آن آزاد است و هیچ نیرویی به آن وارد نمی‌شود.

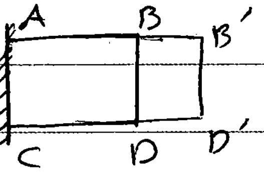
مگر $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$ ؟؟ پس پواسون کجا؟ ... است.

قانون هوک برای تنش‌ها و تغییر شکل‌های (کرنش‌های) برشی :

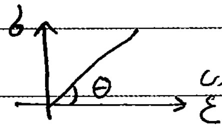


تحت کشش قرار می‌دهیم

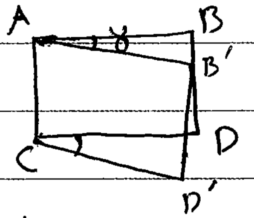
در اثر کشش مربع به مستطیل می‌شود
در اثر برش مربع به متوازی الاضلاع می‌شود



$\varepsilon = \frac{BB'}{AB}$ تغییر شکل محوری

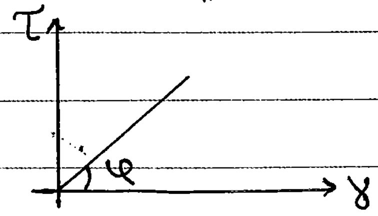


$\tan\theta = E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ (σ: تنش محوری؛ ε: تغییر شکل محوری؛ E: مدول الاستیسیته‌ی محوری)



$\tan\gamma = \gamma = \frac{BB'}{AB}$

γ: تغییر شکل برشی



$\tan\varphi = G = \frac{\tau}{\gamma}$ (τ: تنش برشی؛ γ: تغییر شکل برشی؛ G: مدل الاستیسیته‌ی برشی)

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

تنش محوری $\sigma = E \cdot \varepsilon$ تغییر شکل محوری

مدول الاستیسیته

تنش برشی $\tau = G \cdot \gamma$ تغییر شکل برشی

مدول برشی — زاویه برشی هم هست

اگر دو تا را داشته باشیم سومی بدست می‌آید.

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

مثال! $G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \frac{E}{G} = 2(1+\underset{0.5}{\overset{0}{\nu}}) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 < \frac{E}{G} < 3$

الف) $1 < \frac{E}{G} < 2$

ب) $2 < \frac{E}{G} < 3$ ✓

ج) $3 < \frac{E}{G} < 4$

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

فصل سوم : پیچش :

پیچش مقاطع مدور :

ما تا اینجا P (نیروی محوری)، V (نیروی برشی)، T (گشتاور پیچشی) و M (گشتاور خمشی) را بدست می‌آوردیم.

در مقاومت می‌خواهیم ببینیم که P، V، T و M چه نتیجه‌ای می‌دهند (چه تنشی می‌دهند)

نیروی محوری P $\Rightarrow$ $\sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$ تنش محوری نتیجه می‌دهد و $\underset{\text{تغییر طول}}{\delta} = \frac{PL}{E \cdot A}$ $\Leftarrow$ برای تغییر شکل

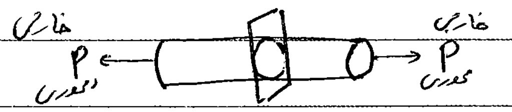
نیروی برشی V $\Rightarrow$ $\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$ تنش برشی نتیجه می‌دهد

گشتاور پیچشی T $\Rightarrow$ $\tau = ?$ و $\phi = ?$ $\Leftarrow$ برای تغییر شکل (تغییر زاویه)

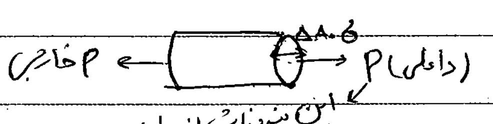
ما تیر را بپیچانیم تا جایی که از تحمل آن خارج شود بریده می‌شود و بنابراین تنش برشی ایجاد می‌کند

گشتاور خمشی M $\Rightarrow$ $\sigma = ?$ در فصل چهارم خوانده می‌شود

ما تیر را خم کنیم



این میله در حال تعادل است پس هر مقطعی از آن هم باید تعادل داشته باشد.

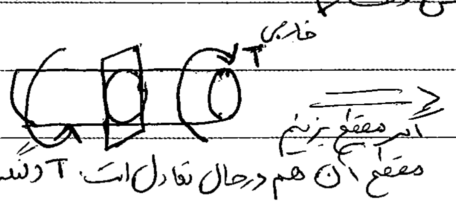


این نیرو ناشی از سطح است.

$$P = \int \sigma \cdot dA$$

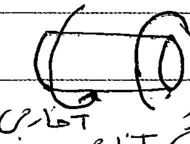
فرض: میله‌ی مدور داریم که تحت پیچش است (نه کشش و فشار)

چون مماس بر سطح است τ ایجاد کننده σ.



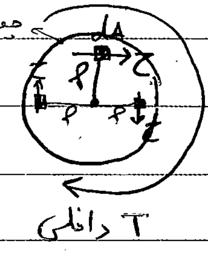
اگر مقطع بزنیم

مقطع آن هم در حال تعادل است. T گشتاور پیچشی خارجی



برای اینکه تعادل داشته باشد گشتاور پیچشی عکس T خارجی به وجود آمد

که گشتاور داخلی ناشی از تنش است اما گشتاور خارجی این طور است



تنش در تمام نقاط بر ρ عمود است

$$\underset{\text{نیرو شکل}}{\tau dA} \cdot \underset{\text{فاصله}}{\rho} = \underset{\text{گشتاور}}{T} \Longrightarrow$$

$P = \int \sigma dA \Leftarrow$

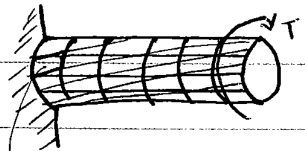
$P = \sigma \cdot A$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$\boxed{T = \int_A \rho \tau \, dA}$ گشتاوری که به مقطع وارد می‌شود (این فرمول کاربردی نیست)

فرض: اگر این میله تحت گشتاور T قرار گیرد خطوط افقی مورب می‌شود و خطوط عمود بر افق دور محورش دوران کند و شکل آن تغییر می‌کند:



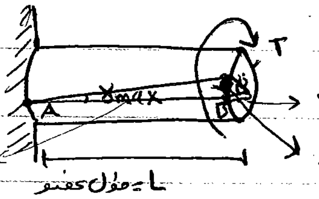
نتیجه: طول تغییر می‌کند (پس تنش برشی است) و زاویه ایجاد می‌شود.

هر تغییر طول ناشی از کشش و فشار است $\sigma = E \cdot \varepsilon$

ما تغییر زاویه ناشی از پیچش است $\tau = G\gamma$

به شبه متوازی الاضلاع شد. پس برشی است.

* فرض:



وقتی میله تحت گشتاور پیچشی T قرار گیرد نقطه B تبدیل به B' می‌شود و زاویه γ ایجاد شود که بی‌نهایت کوچک است (شعاع r)

(حفظ شده است در فصل قبلی) یا زاویه پیچشی = φ

γای که روی میله است ماکزیمم max است. هرچه داخل‌تر برود γ کوچکتر شود.

می‌خواهیم رابطه‌ای بین γ و φ بنویسیم (هرچه γ بیشتر شود φ هم بیشتر می‌شود)

* برای این که بین γ و φ رابطه داشته باشیم باید فصل مشترک آن‌ها که قوس BB' است را در نظر بگیریم.

$$\begin{cases} \overset{\text{کمان}}{BB'} = r\varphi \\ BB' = L\gamma_{max} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\gamma_{max} = r\frac{\varphi}{L}}$$

اگر بی‌نهایت کوچک باشد کمان BB' مانند خط راست شود

پس اگر میله‌ای فرض در داخل میله‌ی اصلی بگیریم φ تغییر نمی‌کند اما γ تغییر می‌کند. پس γای که روی میله اتفاق افتد:

$$\gamma_{max} = r\frac{\phi}{L}$$

شعاع میله کامل

ولی γای که داخل‌تر اتفاق می‌افتد:

$$\gamma = \rho\frac{\phi}{L}$$

شعاع میله‌ی داخلی

اگر کل پیچش شعاع r بعدی ... متمرکز شود

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

در پیچش :

(۱) $\boxed{T = \int_A \rho \tau \, dA}$

(۲) $\boxed{\gamma = \rho \frac{\phi}{L}}$

γ به صورت خطی برحسب ρ تغییر می‌کند.

(۳) $\boxed{\gamma_{max} = r \frac{\phi}{L}}$

(۴) $\boxed{\gamma = \frac{\rho}{r} \gamma_{max}}$

با توجه به قانون هوک $\tau = G\gamma$ اگر طرفین رابطه ۲ را در G ضرب کنیم تنش برشی ایجاد می‌شود.

$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{\phi}{L}$$

اگر طرفین رابطه ۳ را در G ضرب کنیم تنش برشی max ایجاد می‌شود.

$$\tau_{max} = G\gamma_{max} = G r \frac{\phi}{L}$$

پس τ_{max} در دورترین نقاط از مرکز ایجاد می‌شود.

* بیشترین تنش در دورترین نقاط از مرکز ایجاد می‌شود *

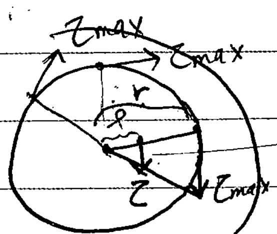
$$\frac{\tau}{\tau_{max}} = \frac{\rho}{r} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{max}} \quad (5)$$

اگر طرفین رابطه (۴) را در G ضرب کنیم

$$G\gamma = \frac{\rho}{r} G\gamma_{max} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{max}} \quad (6)$$

کاربردی

مهم.



با توجه به شکل مهم به رابطه بین τ و τmax و r و ρ خطی است. یعنی:

$$\frac{\tau}{\tau_{max}} = \frac{\rho}{r}$$

T

مقطع تحت تنش پیچشی قرار گرفته.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

نتیجه‌ی مهم: تنش خطی تغییر می‌کند و به فاصله بستگی دارد [دورترین فاصله (از مرکز) بیشترین تنش]

طبق رابطه‌ی ۵ و ۱: ۵ را داخل ۱ می‌گذاریم.

$$①,⑤ \Rightarrow T=\int_A \rho\left(\frac{\rho}{r}\tau_{max}\right)dA \Rightarrow$$

حل انتگرال در صفحه‌ی الف

$$T=\frac{\tau_{max}}{r}\underbrace{\int_A \rho^2\,dA}_{J}$$

ممان اینرسی

$$\Rightarrow \boxed{T=\frac{\tau_{max}\cdot J}{r}} \quad (6) \Rightarrow \boxed{T_{\text{مجاز}} = \frac{\tau_{\text{مجاز}}\cdot J}{r}}$$

ظرفیت باربری (حداکثر)

مهم‌ترین فرمول

با کنترل فضای پیچشی

$$\boxed{\tau_{max}=\frac{Tr}{J}} \le \tau \quad (7)$$

موجود — فرمول کنترل — مجاز

مثال مهم کاربردی

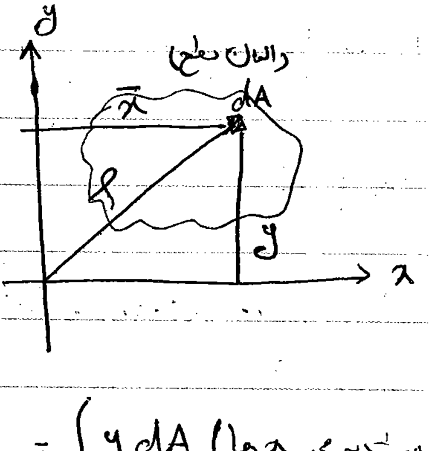
$$\boxed{\tau=\frac{T\rho}{J}} \quad (8)$$

مثال مهم کاربردی

شعاع داخلی (فاصله از مرکز) از نقطه‌ای که می‌خواهیم تنش را در آن به دست آوریم

* بار یعنی نیرو یا گشتاور خارجی وارد بر سازه
پس ظرفیت باربری در مقطع یعنی یک عضو چقدر نیرو را تحمل می‌کند (P) *

یادآوری استاتیک (ممان اینرسی):



فاصله x هر چیز = گشتاور هر چیز

ساعت
نیرو

$$Q_x=\int y\,dA$$ (ممان استاتیک نسبت به محور x ها) (گشتاور اول سطح نسبت به محورها) یا گشتاور سطح — کاربردی

$$\boxed{\bar{y}=\frac{\int y\,dA}{A}}$$ مختصات y مرکز سطح

اگر این رابطه را بر A تقسیم کنیم $\bar{y}$ به دست آید یعنی.

$$\boxed{\bar{x}=\frac{\int x\,dA}{A}}$$ مختصات x مرکز سطح

$$\boxed{Q_y=\int x\,dA}$$ کاربردی

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

مرکز جرم:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{m} \quad (dm = \rho\,dv) \Rightarrow \text{ممان مرتبه اول}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dm}{m}$$

مرکز ثقل:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dw}{w} \quad (dw = g\,dm,\ w = mg) \quad \text{ممان مرتبه اول}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dw}{w}$$

مرکز حجم:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dv}{v}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dv}{v}$$

درصورتی که جسم همگن باشد مرکز جرم همان مرکز حجم است

و درصورتی که g ثابت باشد مرکز ثقل و مرکز جرم برابر است.

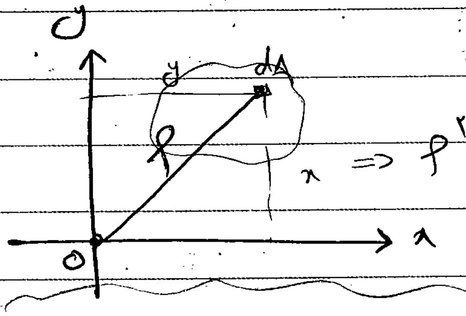
$$I_x = \int y^2\,dA$$ (ممان اینرسی نسبت به x) (گشتاور دوم سطح نسبت به محور xها)

$$I_y = \int x^2\,dA$$ (گشتاور دوم سطح نسبت به محور yها)

ممان اینرسی قطبی

$$J = \int \rho^2\,dA \xrightarrow[\rho^2 = x^2+y^2]{I_x + I_y = J}$$

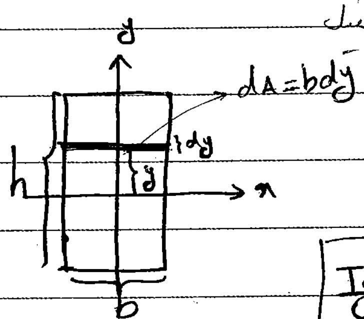
فاصله از محور zها یعنی فاصله از محور xها و yها باشد یا فاصله از نقطه O



$$\Rightarrow \rho^2 = x^2 + y^2$$

نکته: برای مقاطع مدور بیشتر می‌خواهیم (دایره، نیم‌دایره) و مستطیل

مستطیل:



$$I_x = \int y^2\,dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 (b\,dy) = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$ حفظ شود.

$$\boxed{I_y = \frac{hb^3}{12}}$$ حفظ شود.

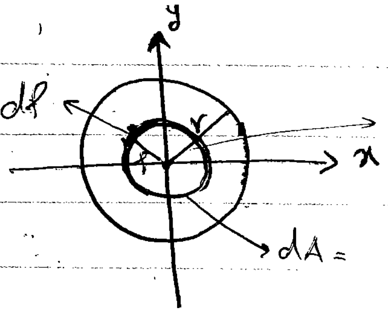
$$J = I_x + I_y = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12}$$ برای مستطیل

صفحه الف

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

دایره :



⇒ تبدیل به مستطیل می‌شود $\frac{2\pi\rho}{d\rho}$

$dA = 2\pi\rho\, d\rho$

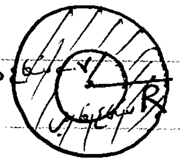
$$J = \int \rho^2 dA = \int_0^r \rho^2 (2\pi\rho\, d\rho) = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^r \Rightarrow \boxed{J = \frac{\pi r^4}{2}}$$

برای دایره

برای دایره $\Rightarrow$ $\boxed{I_x = I_y = \frac{J}{2} = \frac{\pi r^4}{4}}$

$$\begin{cases} I_x + I_y = J \\ I_x = I_y \\ I_x + I_x = J \Rightarrow I_x = I_y = \frac{J}{2} \end{cases}$$

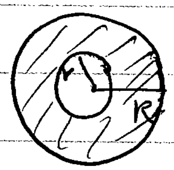
سوال: $J = ?$



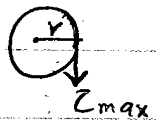
$J = \left(\frac{\pi R^4}{2}\right) - \left(\frac{\pi r^4}{2}\right)$ لوله‌ی توخالی

هاشور زده — دایره خارجی — دایره داخل

حالا صحبت : میله‌ی توخالی (لوله‌ی توخالی)



$$J = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$$



$J = \frac{\pi r^4}{2}$ میله‌ی توپر

برای میله‌ی توپر :

کنترل : $\tau_{max} = \frac{Tr}{J} \xrightarrow[\text{برای توپر}]{J = \frac{\pi r^4}{2}} \tau_{max} = \frac{2T_{\text{موجود}}}{\pi r^3} \le \tau_{\text{مجاز}}$

در کنترل τ_{max} را حساب

ظرفیت باربری : $T_{\text{حداکثر مجاز}} = \frac{\tau_{\text{مجاز}} J}{r} = \tau_{\text{مجاز}} \times \frac{\pi r^3}{2}$

به سمت پایین رند شود

طراحی : $r_{\text{لازم}}^{\text{حداقل}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times T_{\text{موجود}}}{\tau_{\text{مجاز}} \times \pi}}$

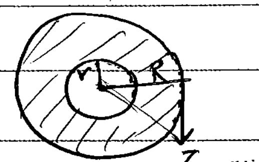
در رند کردن به سمت بالا رند شود

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

در مقطع توپر τ_{min} صفر است یعنی تنش در مرکز صفر است.

برای لوله ها:



τ_{max}

کنترل: $\tau_{max} = \dfrac{T_{موجود} \times R}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \le \tau_{مجاز}$

ظرفیت باربری: $\underset{حداکثر}{T_{مجاز}} = \dfrac{\tau_{مجاز} \times \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)}{R}$

به سمت پایین رند شود.

در طراحی چون بی نهایت جواب داریم یعنی ۱ معادله و ۲ مجهول می شود: طراحی (جواب های متفاوتی داریم) که در طراحی یا r یا R مجهول است و یا نسبت $\frac{R}{r}$ یا $\frac{r}{R}$ را می دهند یا مثلاً ضخامت لوله را به ما می دهند ... یعنی اختلاف R و r ضخامت ورق را می دهد.

(۷) $\Rightarrow \tau_{max} = \dfrac{Tr}{J}$

هوک: $\gamma_{max} = \dfrac{\tau_{max}}{G}$

$\boxed{\gamma_{max} = \dfrac{Tr}{Gj}}$ (۹) کاربردی نیست

(۳): $\gamma_{max} = r\dfrac{\phi}{L}$

(۹): $\gamma_{max} = \dfrac{Tr}{Gj}$

$\cancel{r}\dfrac{\phi}{L} = \dfrac{T\cancel{r}}{Gj} \Rightarrow \boxed{\phi = \dfrac{TL}{Gj}}$ (۱۰) خیلی مهم و کاربردی است.

در محوری $\sigma = \dfrac{P}{A} \le \sigma_{مجاز}$ $\tau_{max} = \dfrac{Tr}{J} \le \tau_{مجاز}$

ادامه در صفحه بعد

$\delta = \dfrac{PL}{EA}$ $\phi = \dfrac{TL}{Gj}$

دلتا تغییر شکل محوری (تغییر طول) صلبیت محوری - سختی

زاویه پیچش (تغییر زاویه پیچش) صلبیت پیچشی پیچیدن

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

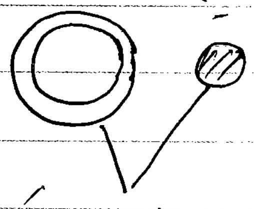
در کشش فشار مساحت مهم است اما در پیچش G مهم است.
در برش هم مساحت مهم است.

$$\delta_{(mm)} = \frac{P_{(N)} L_{(mm)}}{E_{(N/mm^2)} A_{(mm^2)}}$$

رادیان (بدون بعد)

$$\phi = \frac{T_{(N.mm)} L_{(mm)}}{G_{(N/mm^2)} J_{(mm^4)}}$$

چند درجه می‌پیچد $x^\circ = \frac{\pi}{180} \times x$



~~مقاومت کششی~~

$P = \sigma_{مجاز} \times A$ معمود مجاز

جنس و مساحت یکسان

چون جنس و مساحت یکسان است طبق رابطهٔ $P = \sigma \times A$ پس هر دو در مقابل کشش و فشار گنجایش دارند.

فرق در هم: قوی‌ترین بودن $\tau_{مجاز}$ بیشتر در مقابل کشش و فشار
صلب‌تر بودن $\phi_{مجاز}$ کمتر

تغییر شکل نده

صلبیت پیچشی به J بستگی دارد.

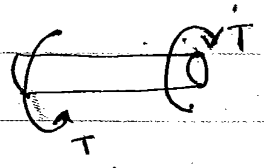
صلبیت محوری به EA بستگی دارد چون در این شکل جنس و مساحت یکسان است پس صلبیت محوری یکسان است.

$$\varphi = \Phi = \frac{TL}{GJ}$$

کاربرد فرمول شماره ۱۰؟

الف) برای به کار بردن فرمول ۱۰ در تمام طول L باید ۳ شرط زیر برقرار باشد:

شرط اول: گشتاور پیچشی (T) فقط در ۲ سر عضو اعمال شود (T ثابت باشد)



شرط دوم: همگن باشد (G ثابت باشد)

شرط سوم: مقطع یکنواخت باشد (J ثابت باشد)

همه جا ثابت است و ۲ تا T اعمال شده است.

SUBJECT :

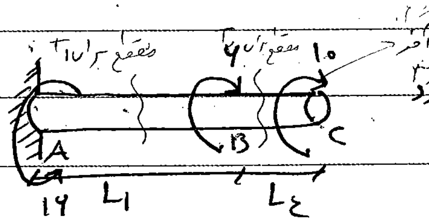
Year (   ) Month (   ) Date (   )

$x^{\circ} = \frac{\pi}{180} \times \pi$

ب) اگر T ، G یا J در طول عضو به طور ناگهانی (غیر تدریجی) تغییر کند زاویه ی پیچش

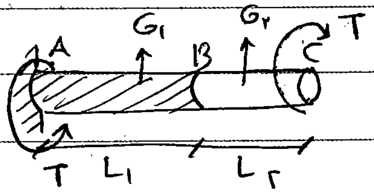
کلی میله [یعنی در کل میله چقدر می پیچد] از مجموع زیر به دست می آید:

$$\varphi = \phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$



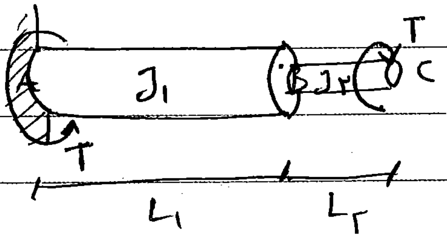
T تغییر کرده

$$\varphi = \frac{1}{GJ}(T_1 L_1 + T_2 L_2)$$



جنس تغییر کرده (G)

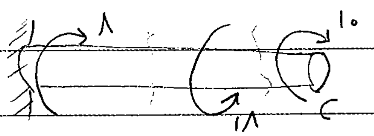
$$\varphi = \frac{T}{J}\left(\frac{L_1}{G_1} + \frac{L_2}{G_2}\right)$$



J تغییر کرده

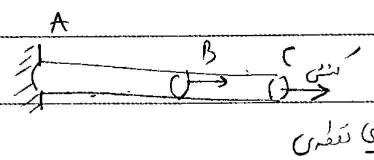
$$\varphi = \frac{T}{G}\left(\frac{L_1}{J_1} + \frac{L_2}{J_2}\right)$$

سوال:



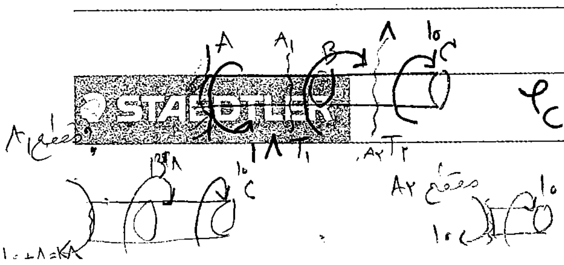
$$\varphi = \frac{1}{GJ}(T_1 L_1 + T_2 L_2)$$

سوال:



$$\delta_C = \delta_{AC} = \delta_{AB} + \delta_{BC} = \delta_{CA} = \delta_{BA} + \delta_{CB}$$

اما در پیچش این صورت نیست: $\varphi_{AB} \neq \varphi_{BA}$



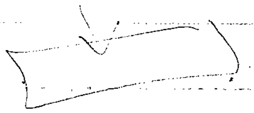
$$\varphi_C = \varphi_{AC} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} \neq \varphi_{AB} + \varphi_{CB}$$

$\varphi_{CB} \neq \varphi_{BC}$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

ج) اگر T، G و J در طول عضو به طور تدریجی تغییر کنند، از فرمول انتگرالی زیر زاویه ی φ را

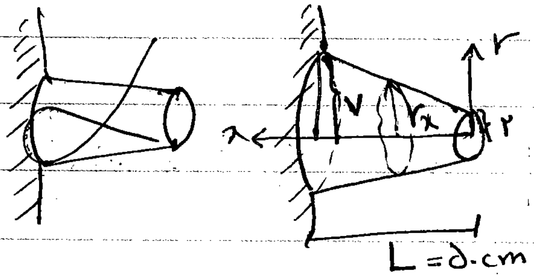


بدست می آوریم:

$$\varphi = \int_0^L \frac{T_x\,dx}{G_x J_x}$$

که این فرمول سه حالت دارد یعنی J تدریجی تغییر کند

تبدیل به مخروط ناقص می شود:



$$\varphi = \frac{T}{G}\int_0^L \frac{dx}{J_x} = \frac{T}{G}\int_0^L \frac{dx}{\frac{\pi}{2}\underbrace{r_x^4}_{\text{معادله ی خط است}}}$$

$$\boxed{r_x = 2 + 0.1x}$$

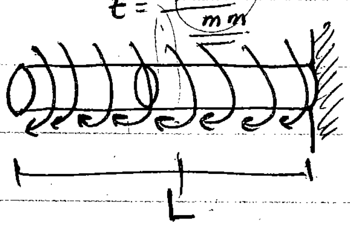
برای این که G تدریجی تغییر کند (چنین تدریجی تغییر کند نداریم)

کل گشتاور پیچشی $\leftarrow T = t \cdot L$ (N.mm)

یعنی هر 1mm چقدر گشتاور تحمل می کند

$t = \frac{N.mm}{mm}$

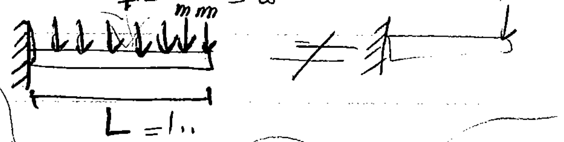
** ـ حالت سوم گشتاور تدریجی تغییر کند (از همه مهم تر است):

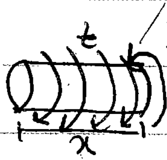


شبیه $\Rightarrow$

$P = q \cdot L$

$q = \frac{N}{mm} = 5$





$T_x = t \cdot x$ $\quad \varphi = \frac{1}{GJ}\int_0^L T_x\,dx = \frac{1}{GJ}\int_0^L t \cdot x\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{t}{GJ}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{tL^2}{2GJ} = \boxed{\frac{T \cdot L}{2GJ}}$$

(یعنی: اگر میله ای را به طور گسترده بپیچانیم زاویه ی پیچشی آن برابر است با نصف حالتی که یک گشتاور در وسط میله داشته باشیم و بپیچانیم): جواب

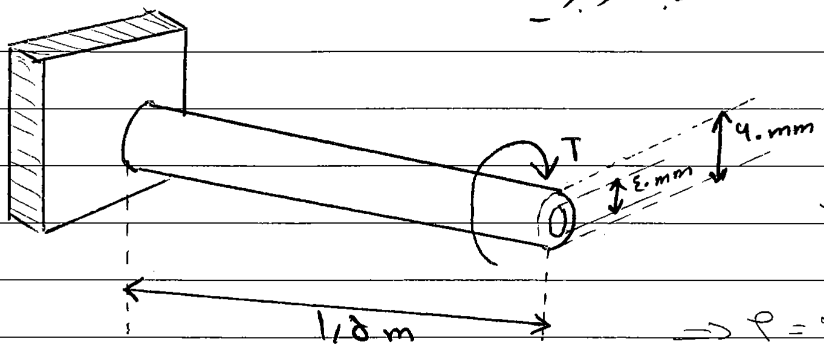
مثلاً دو تا فرمول:

$\tau_{max} = \frac{Tr}{J}$ و $\varphi = \frac{TL}{GJ}$ } که برای دایره هستند

مثال ۲.۳ ص ۹۲ :

چه گشتاوری باید بر انتهای میل گردان وارد کرد تا پیچشی برابر با ۲° ایجاد شود؟ برای مد

صلابت فولاد مقدار $G = 77\,Gpa$ را به کار برید



$T = ?$

$\varphi = 2^\circ = \frac{\pi}{180} \times 2 = 0.03491 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = 34.9 \times 10^{-3}\ rad$

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow T = \frac{\varphi G J}{L} = \frac{34.9 \times 10^{-3} \times 77 \times 10^{9} \times \frac{\pi}{2}\left((30 \times 10^{-3})^4 - (20 \times 10^{-3})^4\right)}{1.5} = 1.830\ kN.m$$

* مثال ۳.۳ ص ۹۲ :

تنش برشی $70\,Mpa$ بر سطح داخلی میل گردان های فولادی توخالی مثال قبل چه زاویه ی پیچ

چون تنش در سطح داخلی را داده، یعنی ما دیگر به شعاع خارجی احتیاج نداریم. و همه جا شعاع دا

می گذاریم

را ایجاد می کند؟

$\varphi = ?\quad \tau = 70 \times 10^{6}\ pa \qquad \varphi = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow \tau = \frac{TR}{J}$

$$T = \frac{\tau \cdot \frac{\pi}{2}(r^4)}{r} = \frac{70 \times 10^{6} \times \frac{\pi}{2}(20 \times 10^{-3})^4}{\underbrace{1319.46891}\ 20 \times 10^{-3}} = 879.64\ (N.m)$$

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{879.64 \times 1.5}{77 \times 10^{9} \times \frac{\pi}{2}(20 \times 10^{-3})^4} = 0.06818 = 68.18 \times 10^{-3}\ rad$$

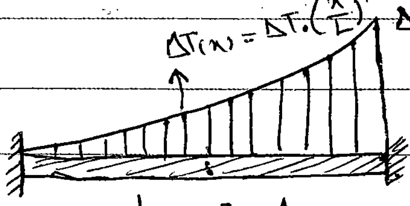
$$\boxed{\varphi^\circ = 68.18 \times 10^{-3} \times \frac{180}{\pi} = 3.91^\circ}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

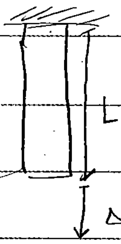
حل تمرین : مقاومت ۱

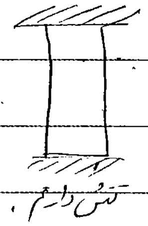
$F_{محوری} = 0$



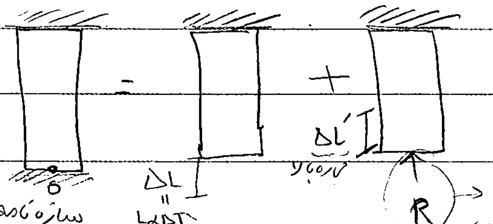
$\Delta L = L\alpha\Delta T$ تغییر طول

تنش مقاومت در برابر تغییر شکل





چون که سازه آن آزاد است تنش $\sigma = 0$ است چون هرچقدر دما به آن اعمال شود طول آن افزایش می‌یابد ولی اگر آن را با زارت ببندیم در این صورت تنش داریم.



اصل برهم نهی

$$\Delta L' = \frac{RL}{EA}$$

چون کاهش طول است ⊖ می‌گیریم

چون افزایش طول است ⊕ می‌گیریم

طبق اصل سازگاری

$$\Delta L + \Delta L' = 0$$

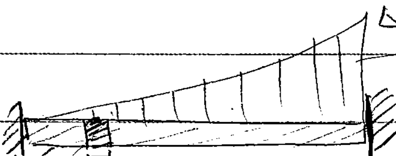
$$L\alpha\Delta t - \frac{RL}{EA} = 0$$

$$L\alpha\Delta T = \frac{RL}{EA} \Longrightarrow \boxed{R = E \cdot A \cdot \alpha\Delta T}$$

اگر تنش را می‌خواست با توجه به اعمال

$$\sigma = \frac{E \cdot A \cdot \alpha\Delta T}{A} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \Longleftarrow \sigma = \frac{P}{A}$$

اگر نیروی داخلی را هم خواست همان R که بدست آوردیم می‌شود



چون دما به صورت متغیر است تغییر طول به راحتی بدست نمی‌آید تا تغییر طول یک جزء از آن را در نظر بگیریم که مثل طول قبل است و از آن

یک المان از آن را

حل مسئله :

$$\Delta_{dx} = L \times \alpha \cdot \Delta T = dx \times \alpha \times \Delta T$$ تغییر طول المان — انتگرال می‌گیریم

تغییر طول کل میله ناشی از دما

$$\Delta = \int_0^L \alpha\Delta T dx = \int_0^L \alpha\left(\Delta T_0 \frac{(x)^2}{L^2}\right) dx = \frac{RL}{EA} \Longrightarrow \frac{\alpha\Delta T_0}{L^2}\int_0^L x^2 dx = \frac{RL}{E}$$

$$R = \frac{E \times \alpha \times A \times \Delta T_0}{3} \qquad \sigma = \frac{E\alpha\Delta T_0}{3}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

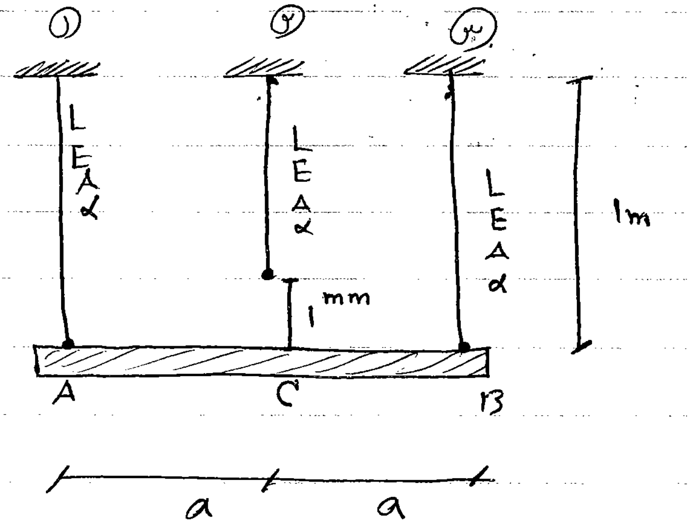
مثلی مهم (امتحانی)

مثال: در شکل مقابل میله‌ی وسط را کشیده و به وسط قطعه‌ی صلب AB (نقطه‌ی C) متصل
میله‌ی ۲

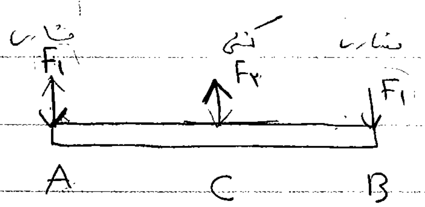
می‌کنیم سپس ۳ میله را به اندازه‌ی $\Delta T = 50^\circ C$ گرم می‌کنیم، تنش در ۳ میله را بدست آورید.

جدول الاستیسیته

$$\begin{cases} E = 2\times10^{5}\ (\frac{N}{mm^2}) \\ A = 300\ mm^2 \\ \alpha = 1.2\times10^{-5}\ \frac{1}{C^\circ} \\ L = 1m \end{cases}$$



وقتی میله‌ی وسط کشیده می‌شود میله‌های کناری فشرده می‌شوند. یعنی در میله‌ی ۱ و ۳ تنش فشاری داریم و در میله‌ی ۲ تنش کششی داریم.



سه تا نیرو و سه تا مجهول داریم، و چون طبق استاتیک می‌دانیم اگر از نقطه‌ی وسط (C) گشتاور بگیریم آنگاه $F_1 = F_3$ برابر می‌شوند که ما F_1 می‌گیریم. پس کلاً دو نیروی مجهول داریم.

افزایش طول میله‌ی میانی + کاهش طول میله‌های کناری $= 1^{mm}$

تعادل در راستای قائم: $F_2 - 2F_1 = 0 \Longrightarrow F_2 = 2F_1$

افزایش طول میله‌ی میانی $= L\alpha\Delta T + \frac{2F_1L}{EA}$

کاهش طول میله‌های کناری $= L\alpha\Delta T - \frac{F_1L}{EA}$ ← چون فشاری است برای میله‌ی کناری منفی است

$$\Longrightarrow \left(L\alpha\Delta T + \frac{2F_1L}{EA}\right) + \left(L\alpha\Delta T - \frac{F_1L}{EA}\right) = 1$$

$$\Longrightarrow F_1 = \frac{\overset{2\times10^5}{E}\times \overset{300}{A}\times 1}{3\underset{1000\,mm}{L}} = \boxed{20000\,(N)} = 20kN$$

$$\boxed{F_2 = 40000} = 40kN$$

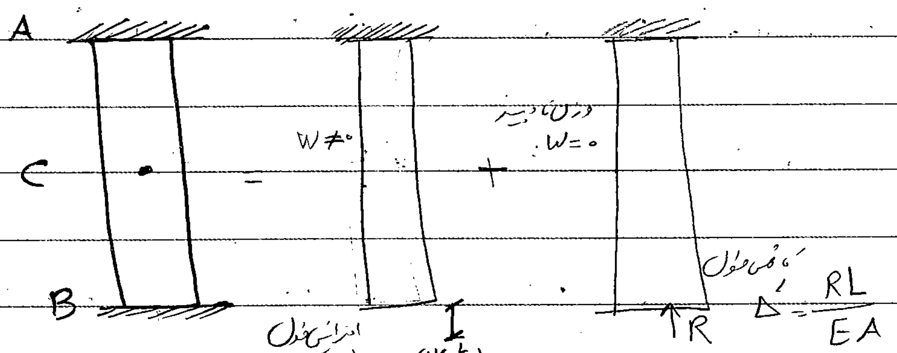
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\sigma_{①} = \frac{F_1}{A} = \frac{2000}{300}$$

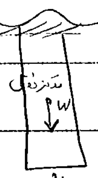
$$\sigma_{②} = \frac{4000}{300} \qquad \sigma_{③} = \frac{2000}{300}$$

مثال: میله‌ای با مشخصات داده شده (E و A و L و $\overset{\text{وزن میله}}{W}$) مطابق شکل به دو تکیه‌گاه صلب A و B متصل شده است. تنش را در نقاط A و B و C (وسط میله) تعیین نمایید.



افزایش طول $\Delta = \frac{w(\frac{L}{2})}{EA}$ کاهش طول $\Delta = \frac{RL}{EA}$

نکته:



$\Delta L = \frac{W \times \frac{L}{2}}{EA}$ تغییر طول میله تحت تأثیر وزن خود

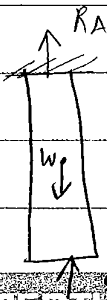
وقتی وزن ناچیز نباشد وزن را باید در مرکز ثقل آن قرار داد که در این صورت L تبدیل به $\frac{L}{2}$ می‌شود.

اما

$\Delta L = \frac{PL}{EA}$ تغییر طول میله تحت نیروی خارجی

معادله سازگاری: $|\Delta| = |\Delta'| \Longrightarrow \frac{wL}{2EA} = \frac{RL}{EA} \Longrightarrow \boxed{R = \frac{w}{2}}$

$R_A = \frac{w}{2} \longrightarrow \boxed{\sigma_A = \frac{w}{2A}}$



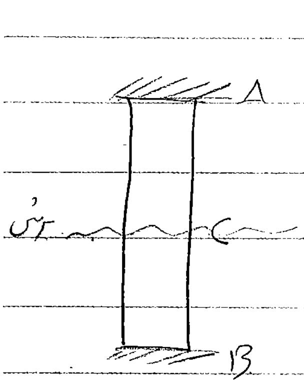
$R_B = \frac{w}{2} \longrightarrow \boxed{\sigma_B = \frac{w}{2A}}$

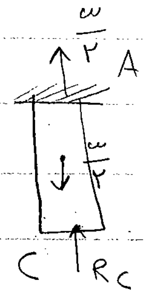
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

تنش در نقطه‌ی C :

در هر نقطه‌ای تنش می‌خواهیم باید برش بزنیم .





$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{R_C = 0} \rightarrow \boxed{\sigma_C = 0}$

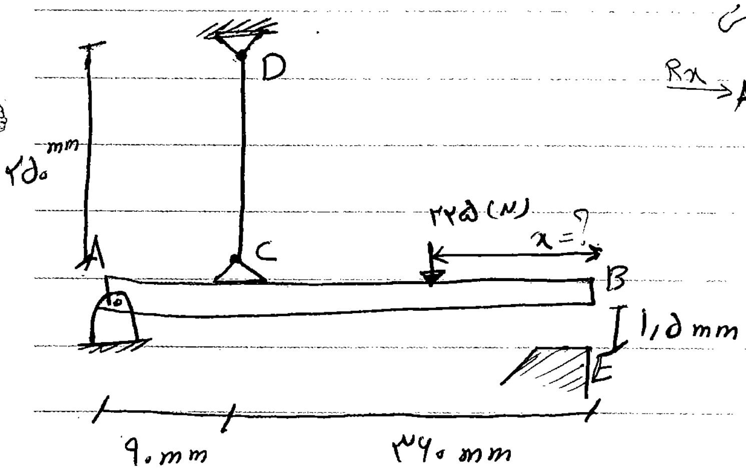
مثال: طول سیم فولادی CD به قطر 2mm طوری تنظیم شده است بدون این که باری

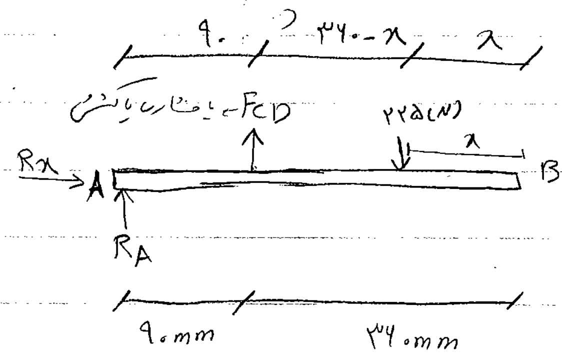
بر آن وارد شود بین نقطه‌ی B (انتهای تیر صلب AB) و تکیه‌گاه E فاصله‌ی 1,5mm

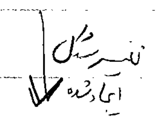
وجود داشته باشد. با دانستن $E = 200$ GPa (گیگا) برای سیم فولادی که تعیین نمایید در چه نقطه‌ای

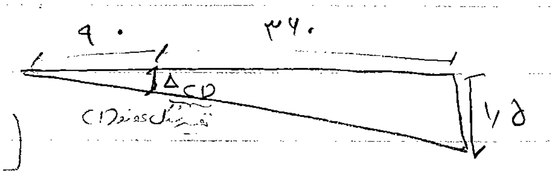
بار 225 (N) را باید بر تیر وارد کرد تا بین نقاط B و E تماس حاصل شود؟

در محل تماس B و E شرط عکس‌العمل نداریم چون فقط در حد تماس است









تالس (تشابه مثلث): $\frac{\Delta}{1,5} = \frac{90}{360} \Rightarrow \boxed{\Delta = 0,3\ mm}$

$\Delta_{CD} = \frac{F_{CD} L}{EA} \Rightarrow 10^{-3} \times 0,3 = \frac{F_{CD} \times 250 \times \cancel{10^{-3}}}{200 \times 10^{9} \times \pi (10^{-3})^2} \Rightarrow \boxed{F_{CD} = 754\ N}$

قطر = 2mm
شعاع = 1mm

جهت F_{CD} درست است
نشان مثبت (+) درآمده

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اگر حول نقطه‌ی A گشتاور بگیریم x بدست می‌آید:

$\sum M_A = 0 \Rightarrow \boxed{x = 141.4\,mm}$

مثال: صفحه‌ی آلومینیومی به ابعاد ~~۲۰mm~~ $20\,mm \times 150\,mm \times 200\,mm$ مطابق شکل تحت تنش $\sigma_y = -90\,MPa$ و $\sigma_x = 120\,MPa$ واقع شده است درصورتی که داشته باشیم

$E = 7 \times 10^4\,MPa$

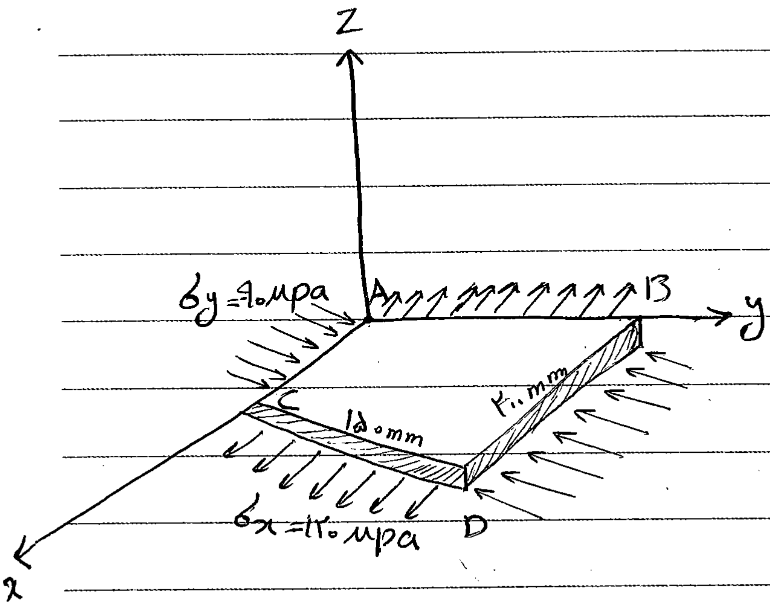
$\underbrace{\nu}_{\text{ضریب پواسون}} = \frac{1}{3}$

پس از اعمال تنش‌های فوق مطلوب است:

الف) طول قطر AC

ب) ضخامت صفحه

ج) حجم صفحه



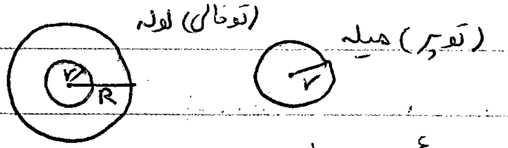
STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

یادآوری: فقط برای مقاطع مدور:

$$\tau = \frac{Tr}{J} \quad و \quad \varphi = \frac{TL}{GJ}$$



$$J = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) \qquad J = \frac{\pi}{2} r^4$$

این فرمول ها چه جداره نازک باشد
چه نباشد کاربرد دارد

$$\tau_{max} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \qquad \tau_{max} = \frac{T}{\frac{\pi}{2} r^3}$$

$$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \qquad \varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2} r^4}$$

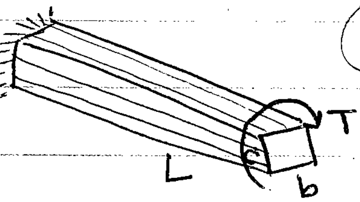
پیچش مقاطع مستطیلی توپر: (یعنی میله‌ای که مقطع آن مستطیل است)

* $b > c$ حتما باید

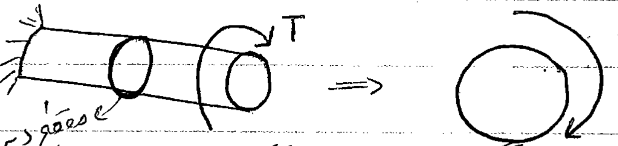
$b =$ طول مقطع مستطیلی شکل

$c =$ عرض مقطع

$L =$ طول میله

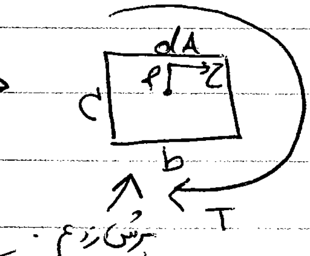


مثلاً برای دایره:



$T = \int$

T را باید گشتاوری در خلاف جهت گشتاور اصلی اعمال کنیم



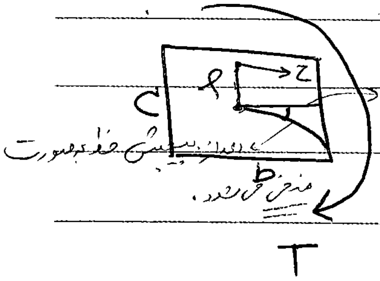
$$\boxed{T = \int \rho \tau \, dA}$$

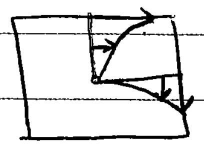
* این قانون که اساس آن بعد از گشتاور، خطوط موازی می‌مانند
فقط برای دایره صادق است *

یعنی در این جا برای مستطیل خطوط موازی که روی مستطیل تصویر کشیده شده اگر تحت گشتاور T قرار
بگیرد خطوط آن موازی نمی‌مانند

SUBJECT :

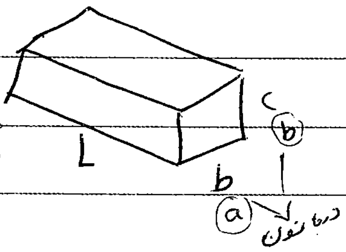
Year (   ) Month (   ) Date (   )





توزیع تنش به این صورت است :

در مقطع مستطیلی اگر فرض کنیم ابعاد مقطع b و c باشد و طول یا L باشد تحت پیچش قرار بگیرد آن گاه :



$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2}$$ ابتدا تنش گفته می شود

$$\varphi = \frac{TL}{G \beta b c^3}$$ ابتدا زاویه گفته می شود

$\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{c}$	۱	۲	۳	.....	۱۰	$>$۱۰ (∞)
C_1 α	۰/۲۰۸	۰/۲۱۹			0.۳۱۲	0.333
C_2 β	۰/۱۴۰۶				0.۳۱۲	0.333

← یا همان کسر ۱/۳ است

α و β را باید از جدول بیابیم

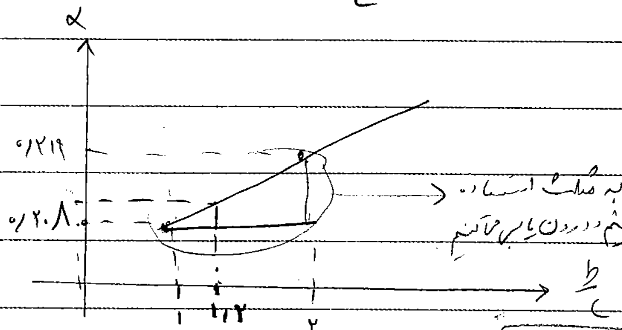
نباید حفظ کنیم

α و β به $\frac{b}{c}$ بستگی دارد.

(α و β داده می شود یا از طریق جدول داده می شود)

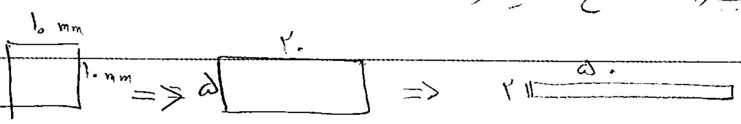
if $\frac{b}{c} = 1 \xrightarrow{\text{یعنی}}$ مقطع مربع است

درون یابی :



بهترین مقطع مستطیلی مربع است. یعنی $\frac{b}{c}$ ۱ است

هر چه نسبت $\frac{b}{c}$ بیشتر باشد مقطع ضعیف تر است.



$\frac{b}{c} = 1$ مثلا

راحت تر از همه می پیچد.

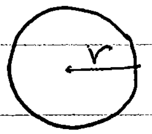
راحت تر از قبلی پیچش می کند $\frac{b}{c} = 4$

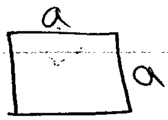
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

سؤال امتحانی: میله ی توپر به شعاع r (سؤال مفهومی)

مربع به اضلاع a





$$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{\pi}{2}r^3} < \tau_{مجاز} \xrightarrow{\text{مقایسه}} \tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2} = \frac{T}{0.208\,a^3} < \tau_{مجاز}$$

$$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2}r^4} \xrightarrow{\text{مقایسه}} \varphi = \frac{TL}{G\beta b c^3} = \frac{TL}{G(0.1406)a^4}$$

الف) درصورتیکه جنس و مساحت یکسان باشد — باید نسبت بزرگتر از ۱ باشد؟

نسبت گشتاورهای مجاز

$$\frac{T_1 \text{ دایره مجاز}}{T_2 \text{ مربع مجاز}} = ?$$

نسبت قدرت باربری

وقتی جنس ها برابرند یعنی G و وزن مخصوص و τ مجاز یکسان — مربع بیشتر بود

چون مساحت یکسان است پس داریم: $\pi r^2 = a^2$ ← باید r^3 و a^3 را داشته باشیم

طرفین را به توان $\frac{3}{2}$ می رسانیم $\pi\sqrt{\pi}\,r^3 = a^3$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\tau_{مجاز} \times \frac{\pi}{2}r^3}{\tau_{مجاز} \times (0.208)a^3} = \frac{\frac{\pi}{2}r^3}{(0.208)(\pi\sqrt{\pi}\,r^3)} = 1.356 > 1$$

درصورتیکه جنس و مساحت یکسان باشد

هر دایره از هر مربع ۳۶٪ قوی تر است

یعنی یک میله ی دایره ای از یک میله ی مربع شکل گشتاور بیشتری تحمل می کند

ب) درصورتیکه طول یکسان باشد و تحت گشتاور پیچشی یکسان قرار گیرد (یعنی علاوه بر شرایط فوق) — میخواهیم ببینیم کدام φ کمتر دارد

مساحت یکسان: $(\pi r^2 = a^2)^2$ باید r^4 و a^4 داشته باشیم، به توان ۲ می رسانیم

$$\pi^2 r^4 = a^4$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = ? \quad \text{باید کمتر از ۱ باشد}$$

$$\frac{\varphi_{1\,دایره}}{\varphi_{2\,مربع}} = \frac{\frac{\cancel{TL}}{\cancel{G}\frac{\pi}{2}r^4}}{\frac{\cancel{TL}}{\cancel{G}(0.1406)\underbrace{a^4}_{\pi^2 r^4}}} = 0.88 < 1$$

دایره از مربع ۱۲٪ کمتر می پیچد

یعنی دایره مناسب تر است — کمتر در آن دوران می کند (می پیچد)

به طور کلی در n ضلعی هرچه تعداد n ها بیشتر باشد بهتر است پس با فرض جنس و مساحت یکسان بهترین دایره است (چون $n=\infty$) و بدترین مثلث است

از نظر مقاومت پیچشی

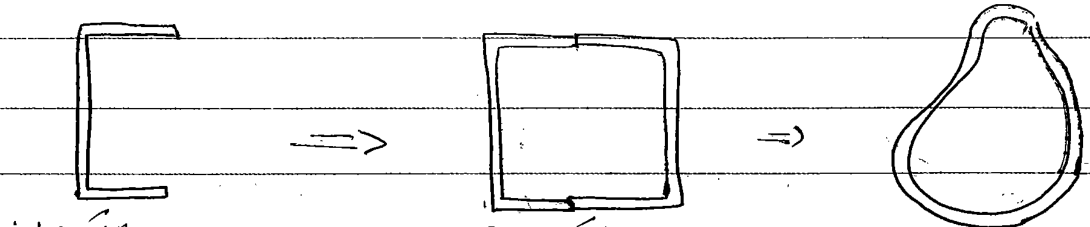
هرچه T بزرگتر و φ کمتر باشد از نظر پیچش بهتر است

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

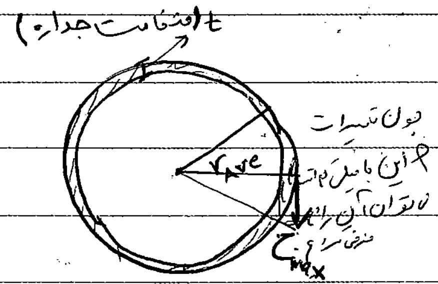
پیچش مقاطع جدار نازک بسته [جدار نازک توخالی]:

ضخامت جداره کم باشد.



این نوع مقاطع به ۲ دسته تقسیم می‌شوند: مقاطع مدور _ مقاطع کلی

پیچش مقاطع مدور جدار نازک بسته:



$$J=\int \underbrace{\rho}_{r_{Ave}}{}^2 dA \simeq r_{Ave}^2 \times A = r_{Ave}^2 \times (2\pi r_{Ave} \times t) = 2\pi r_{Ave}^3 t$$

فرمول

چون دایره است پس تنش برابر است $\Rightarrow \tau_{max} = \frac{T r_{Ave}}{J} = \frac{T r_{Ave}}{2\pi r_{Ave}^3 \times t} = \frac{T}{2\pi r_{Ave}^2 t} \le \tau_{مجاز}$

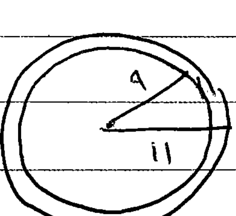
کنترل:

$$\boxed{\text{تنش} \quad \tau_{max} = \frac{T}{2\pi r_{Ave}^2 \times t}}$$

برای جدار نازک

اگر مقطع دایره کامل داشته باشد نباید از این فرمول استفاده کرد. چون دیگر جدار نازک نیست.

مثلاً

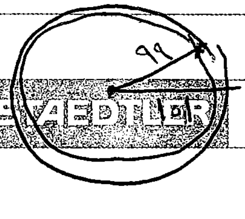


$J_{دقیق} = \frac{\pi}{2}(11^4 - 9^4)$

$J_{تقریبی} = 2\pi (\underbrace{10}_{r_{Ave}})^3 \times 2$

نکته مهم است: if $\frac{r_{Ave}}{t} \ge 10$ یا $\frac{t}{r_{Ave}} \le \frac{1}{10}$ پس

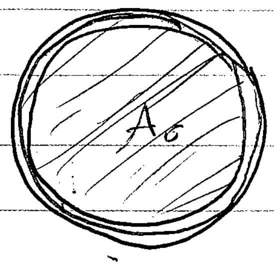
آن‌گاه جداره نازک است



$J_{دقیق} = \frac{\pi}{2}(101^4 - 99^4)$

$J_{تقریبی} = 2\pi (100)^3 \times 2$

بخش مقاطع کلی جدار نازک است :

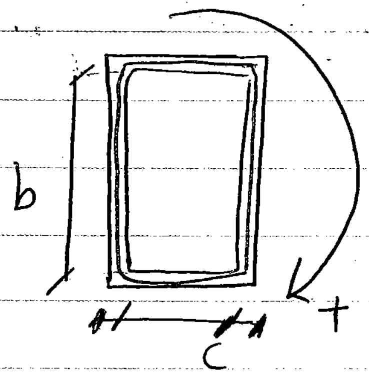


$$A_0 = \pi r_{Ave}^2$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T}{2A_0 t_{min}}}$$ فرمول کلی

A_0 می تواند هر چیزی باشد

فرمول خیلی کاربردی است برای جدار نازک

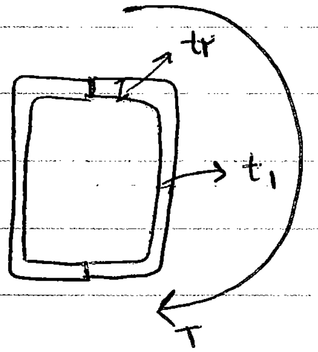


$$\tau_{max} = \frac{T}{2\underbrace{bc}_{A_0}t} \leq \tau_{مجاز}$$

$A_0 = b \times c$

$$\varphi = \frac{\tau_{max}\,[2(b+c)] \times L}{2bcG}$$

← با توجه به فرمول صفحه بعد



برای مقاطع مدور :

می دانیم : $\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{\tau_{max} \times 2\pi r_{Ave}^2 t \times L}{G \times 2\pi r_{Ave}^3 t} =$

$$\Longrightarrow \boxed{\varphi = \frac{\tau_{max} \times L}{G \times r_{Ave}}}$$

برای مقاطع مدور جدار نازک

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

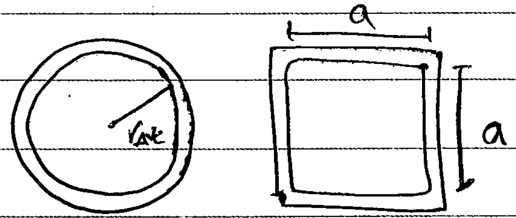
برای مقاطع کلی : $r \times t$ را از صورت و مخرج باهم ساده می‌کنیم.

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{\tau_{max} \times 2\pi r_{Ave}^2 t \times L}{G \times 2\pi r_{Ave}^3 t} =$$

$$= \frac{\overbrace{2\pi r_{Ave}}^{S = \text{محیط}} \times \tau_{max} \times L}{\underbrace{2\pi r_{Ave}^2}_{\text{مساحت} = A_0} \times G} \Longrightarrow \boxed{\varphi = \frac{\tau_{max} \cdot S \cdot L}{\cancel{G \times r_{Ave}}\ 2A_0 G}}$$

فرمول برای مقاطع کلی جدار نازک

مثال: سؤال امتحان:



① ②

الف) درصورتیکه مساحت $(t.S)$ و ضخامت یعنی A_0 ثابت ... اگر هر دو شکل را باز کنیم ... یکسان باشد.

$$\frac{T_1 \ \text{حالت}}{T_2 \ \text{حالت}} = ? \qquad \frac{T_1 \ \text{دایره}}{T_2 \ \text{مربع}} = \frac{\cancel{\tau} \times \cancel{2}\pi r_{Ave}^2 \cancel{t}}{\cancel{\tau} \times \cancel{2} \underbrace{a^2}_{\frac{\pi^2 r^2}{4}} \times \cancel{t}} =$$

محیط یکسان: $2\pi r = 4a$

$\pi r = 2a$ به توان ۲ می‌رسانیم

$\pi^2 r^2 = 4a^2$

$$= \frac{4}{\pi} = 1.27 > 1$$

با شرایط یکسان ظرفیت تحمل گشتاور لوله از مربع گشتاور بیشتر است

ب) درصورتیکه طول یکسان و گشتاور یکسان قرار بگیرد.

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = ?$$

بدون τ_{max} استفاده می‌کنیم

از رابطه $\frac{TL}{GJ}$ استفاده نمی‌کنیم بجای آن از

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\frac{\tau_1 \cancel{S} \cancel{L}}{2A_{01}\cancel{G}}}{\frac{\tau_2 \cdot \cancel{S} \cdot \cancel{L}}{2A_{02}\cancel{G}}} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \times \frac{(A_{02})}{(A_{01})} = \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16} = 0.61 < 1$$

$$\frac{(A_0)_2}{(A_0)_1} = \frac{a^2}{\pi r_{Ave}^2} = \frac{\frac{\pi^2 r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4}$$

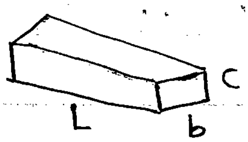
در این جا هم برای مقطع دایره از نظر دوران بهتر است (مقاطع لوله‌ای بهتر است)

$$\frac{(\tau_1)_{max}}{(\tau_2)_{max}} = \frac{\frac{\cancel{T}}{2A_{01}\cancel{t}}}{\frac{\cancel{T}}{2A_{02}\cancel{t}}} = \frac{\pi}{4}$$

خلاصه :

در این جا می خواهیم تنش را در یک نقطه دلخواه که در فاصله ρ از مرکز قرار دارد به دست آوریم

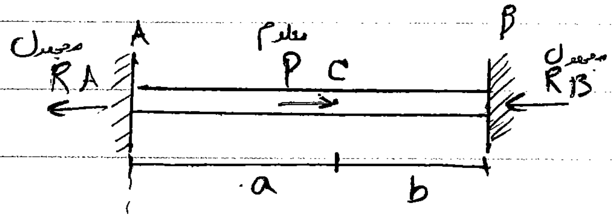
$\tau = \frac{T\rho}{J}$ تنش در هر نقطه دلخواه

پیچش مقاطع جدار نازک بسته (جدار نازک توخالی) — کلی	پیچش مقاطع جدار نازک بسته — مدور	پیچش مقاطع مستطیل توپر	پیچش مقاطع مدور — لوله	پیچش مقاطع مدور — میله
کلی	مدور		$\tau_{max} = \frac{Tr}{J}$ و $\varphi = \frac{TL}{GJ}$	
$\tau_{max} = \frac{T}{2A_0 t_{min}}$	$\tau_{max} = \frac{T}{2\pi r_{Ave}^2 t}$	$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2}$	$J = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$	$J = \frac{\pi}{2} r^4$
$\varphi = \frac{\tau_{max} \cdot s \cdot L}{2A_0 G}$	$\varphi = \frac{\tau_{max} \times L}{G \times r_{Ave}}$	$\varphi = \frac{TL}{G\beta b c^3}$	$\tau_{max} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)}$	$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{\pi}{2} r^3}$
			$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)}$	$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2} r^4}$

حل مسائل نامعین : تعداد مجهولات > تعداد معادلات = نامعین از نظر استاتیکی

در میله ی دو سر گیردار :

یادآوری :



$$\begin{cases} R_A = P\frac{b}{L} \\ R_B = P\frac{a}{L} \end{cases}$$

در حالت خاص اگر P در وسط وارد شود $\Longrightarrow R_A = R_B$

SUBJECT :

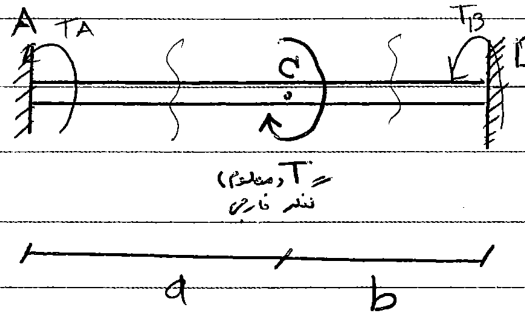
Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال: حل مسائل نامعین:

میله‌ی دو سر گیردار

جهت نگاه

$T_A = ?$ $T_B = ?$



وقتی T به آن وارد شود دو عکس‌العمل T_A و T_B به وجود می‌آیند که هر دو با آن مخالف است.

معادله‌ی تعادل: $\sum M_x = 0 \Rightarrow \boxed{T_A + T_B = T_{\text{معلوم}}}$

معادله‌ی سازگاری تغییر شکل: $\varphi_{AB} = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_{AC} + \varphi_{CB} = 0}$ معادله‌ی سازگاری

$\frac{TL}{GJ}$ $\frac{TL}{GJ}$

یعنی بین CA مقطع برش بزنیم گشتاور برابر با T_A است.

بین C تا B برش بزنیم

$$\frac{T_A \cdot a}{G \cdot J} + \frac{(T_A - T) \cdot b}{GJ} = 0$$

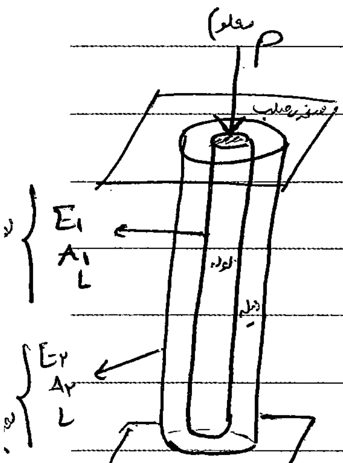
معادله‌ی یک مجهولی (T_A مجهول است)، T معلوم است.

$$T_A = T\frac{b}{L}$$

$$T_B = T\frac{a}{L}$$

گشتاور را هر میله‌ای که طول بیشتری دارد سهم آن میله که از لحاظ طول دوری و دورانی بیشتر می‌شود.

مثال: برای یادآوری:



معادله‌ی تعادل: $P_1 + P_2 = P$

معادله‌ی سازگاری: $\delta_1 = \delta_2$

تغییر طول

سختی محوری

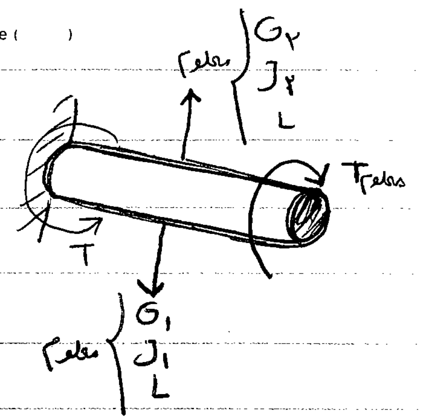
$$P_1 = P\frac{E_1 \cdot A_1}{\sum EA}$$

$$P_2 = P\frac{E_2 \cdot A_2}{\sum EA}$$

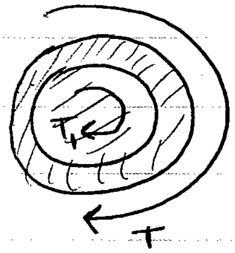
حال می‌خواهیم این میله و لوله را با هم بپیچانیم (یعنی میله و لوله با هم درگیر باشند) یعنی شکل صفحه بعد.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



مقطع مرکب است یعنی میله و لوله با هم جفت هستند (روی هم لحیم هستند) فرض کنیم تحت پیچش قرار گیرد.



معادله‌ی تعادل : $\underbrace{T_1 + T_2 = \overset{\text{معلوم}}{T}}$

معادله دو مجهول پس معادله سازگاری می‌خواهد.

معادله‌ی سازگاری : $\varphi_1 = \varphi_2$

$$\downarrow$$

$$\frac{T_1 \cancel{L}}{G_1 J_1} = \frac{T_2 \cancel{L}}{G_2 J_2} \Longrightarrow$$ از این رابطه T_1 برحسب T_2 بدست می‌آید یعنی ...

چه درصد از T سهم T_1 است.

و اگر T_1 را در معادله‌ی تعادل قرار دهیم از آن T_2 بدست می‌آید

$$\begin{cases} T_1 = T \dfrac{G_1 J_1}{\Sigma G J} \\ T_2 = T \dfrac{G_2 J_2}{\Sigma G J} \end{cases} \Longrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{G_1 J_1}{G_2 J_2}$$

صلابت پیچشی

نکته : σ ، ε ← طراحی

تحلیل < معین ← استاتیک ← معادله‌ی تعادل
نامعین ← مقاومت ← معادله‌ی سازگاری

تعیین تنش‌ها
و کنترل‌ها با زاویه

بارگذاری
تعیین تنش‌های خارجی

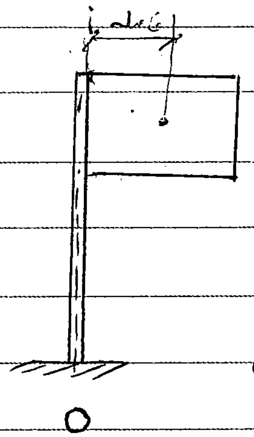
$$\begin{cases} (\tau_1)_{max} = \dfrac{T_1 \overset{\text{شعاع میله}}{r_1}}{J_1} \le \tau_{\text{مجاز}} & J_1 \Rightarrow \dfrac{\pi r^4}{2} \\ (\tau_2)_{max} = \dfrac{T_2 \overset{\text{شعاع خارجی}}{r_2}}{\underbrace{J_2}_{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)}} \le \tau_{\text{مجاز}} \end{cases}$$

نکته: هر مسئله‌ی نامعین را اول باید نامعینی‌اش را ازبین ببریم یعنی معادله‌ی سازگاری می‌خواهیم

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

سوال امتحان ۳ یک تابلوی تبلیغاتی:



فشار باد داده شده است

$\frac{N}{mm^2}$ یا $\frac{N}{km^2}$

مساحت تابلو × فشار باد = نیرو ← این نیرو باعث گشتاور پیچشی می‌شود.

این نیرو که برآیند نیروهاست در وسط تابلو وارد می‌شود.

فاصله × نیرو = گشتاور پیچشی

طول محور لوله

استاتیک: مساحت تابلو × فشار باد = F نیرو

T گشتاور $= F \times e$

فاصله نیرو

اگر مقدار مجاز بیشتر نبود

$$\tau_{max} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \le \tau_{\text{مجاز}}$$

$$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2}} \le \varphi_{\text{مجاز}}$$

تبدیل درجه به رادیان

$$3^\circ = \frac{\pi}{180} \times 3$$

وقتی φ را بدست آوردیم از مقدار مجاز باید کمتر باشد یعنی φ مجاز را به ما داده

نکته: لوله‌ها دو تا مجهول دارند یا R و r و یا t و r_{Ave}

تمام مسائل طراحی یکی از ۴ حالت زیر است:

① یک معادله یک مجهول

- $r_{Ave} = ?$ و t معلوم
- $t = ?$ r_{Ave} = معلوم

در هر کدام

② دو معادله دو مجهول $t = ?$ و $r_{Ave} = ?$

τ از τ مجاز بیشتر شود

φ از φ مجاز بیشتر شود

۲ معادله

τ = مقدار = فرمول

ϕ = مقدار = فرمول

③ یک معادله دو مجهول ⟸ بی‌نهایت جواب دارد (در امتحان نمی‌آید)

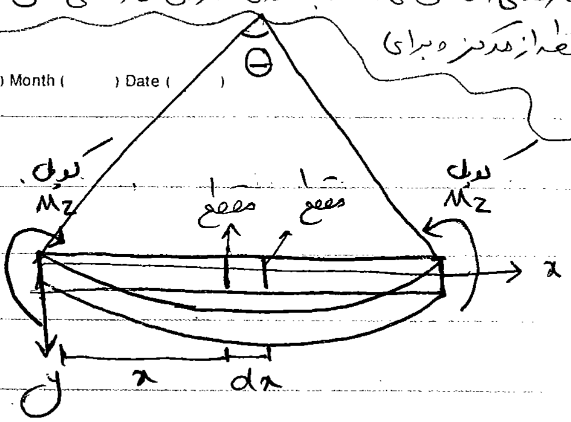
④ دو معادله یک مجهول ⟸ r_{Ave} = معلوم دو جواب بدست می‌آید که آن که بزرگتر است را انتخاب می‌کنیم ولی اگر مقدار t را باید ۲ تا t بدست می‌آید و یا ۲ تا r_{Ave} بدست می‌آید که ما بزرگترین را باید در اینجا انتخاب کنیم.

ولی اگر شعاع خارجی‌ها بدست می‌آید باید کوچکتره را انتخاب کنیم. یعنی شعاع داخلی را اگر بدست آمده باید شعاع داخلی کوچکتره را انتخاب کنیم

نکته: در بحث خمش بیشترین تنش در دورترین نقطه از تار خنثی اتفاق می افتد به طوری که روی تار خنثی تنش صفر است
اما در بحث پیچش برای مقاطع مدور بیشترین تنش در دورترین نقطه از مرکز و برای مقاطع مستطیلی در نزدیکترین نقطه به مرکز اتفاق می افتد

SUBJECT :
Year ( ) Month ( ) Date ( )

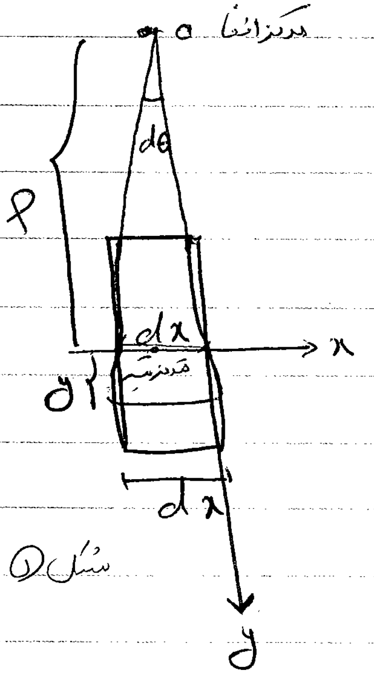
فصل ۴: خمش



وقتی تیر تغییر شکل می دهد انحنا پیدا می کند
در مرکز انحنا همه مقاطع را قطع می کنند

برای پیدا کردن مرکز انحنا به فاصله ی x یک مقطع می زنیم و مقطع بعدی به فاصله ی dx می زنیم این دو مقطع را امتداد می دهیم

شعاع انحنا
$\rho =$ فاصله ی مرکز انحنا تا مرکز تیر

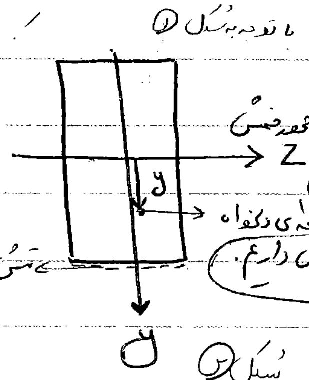


بعد از تغییر شکل طول در بالا از dx کمتر است و در پایین طول از dx بیشتر است در واقع فقط وسط dx است.

طبق شکل: $dx = \rho\, d\theta$

قبل از لنگر (شکل تیر خودکار آبی)
بعد از لنگر (شکل تیر خودکار قرمز)

مقطع تیر است (طول تیر نیست) که در این جا محور x دیده نمی شود: (برش از طول تیر)



تنش در این جا Max است

y زیر تار خنثی + است
پس زیر تار خنثی افزایش طول داریم.
یعنی کشش است

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}} \quad (1)$$

یک نقطه ی دلخواه در این مقطع به فاصله ی y از محور y ها در نظر می گیریم و هدف به دست آوردن تنش در این نقطه ی دلخواه است.

$\sigma = E\varepsilon$ برای پیدا کردن تنش در این جا از قدم اول ثابت می کنیم طبق قانون هوک

ε ← تغییر نسبی (تغییر طول نسبی)

جمع‌بندی
نکته: زیر تار خنثی ← $y>0$ ← افزایش طول ← کشش ← کشیده شدن و ترک خوردن
بالای تار خنثی ← $y<0$ ← کاهش طول ← فشار ← خطر کمانش و خرد شدن

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

طول اولیه تار $= dx = \rho\, d\theta$

طول ثانویه $= (\rho + y)\, d\theta = (1 + \frac{y}{\rho})\, \rho\, d\theta = dx + \frac{y}{\rho}\, dx$

تغییر طول $= \delta = \frac{y}{\rho}\, dx$

تغییر طول نسبی $\varepsilon = \frac{\delta}{dx} = \frac{y}{\rho}$

نقطه‌ای که می‌خواهیم تنش در آن را بدست آوریم

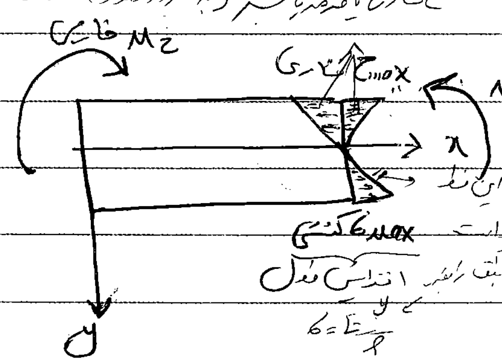
فاصله عمودی نقطه دلخواه از تار خنثی

$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}$ پس: ② $\boxed{\varepsilon = \frac{y}{\rho}}$ و $\boxed{\sigma = E\frac{y}{\rho}}$ ③

ρ به سادگی در مسائل بدست نمی‌آید

علامت ε به y بستگی دارد (چون ρ همیشه + است) [زیر تار خنثی $y > 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$ و برعکس]

در فرمول ② y و ε با هم به صورت خطی ارتباط دارند و (σ و ε) با هم رابطه خطی دارند



(لنگر داخلی ناشی از تنش است) پس باید تنش وجود داشته باشد

برآیند نیروهای کششی پایین و برآیند $\frac{E}{\rho}$ است

شدن فشاری بالا با هم یک لنگر ایجاد مطابق رابطه انتهای طول

$\sigma = E\frac{y}{\rho}$

می‌کنند که همان M داخلی است)

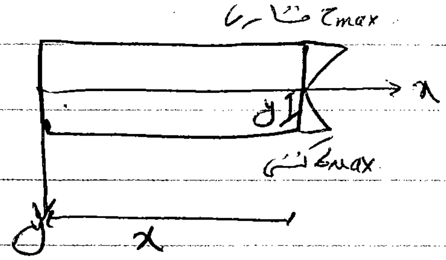
(مقدار نیرویی که به سطح کششی وارد می‌شود باید با مقدار نیرویی که به سطح فشاری وارد می‌شود برابر باشد تا تعادل داشته باشد)

نکته: اگر شکل متقارن باشد تار خنثی از وسط شکل عبور می‌کند ولی اگر نامتقارن باشد باید مرکز سطح را بدست آوریم (همگن)

STAEDTLER

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



در معادله تعادل می‌نویسیم.

اولین معادله تعادل $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$ چون نیروی خارجی در راستای x نداریم باید نیروی داخلی در راستای x برابر صفر شود

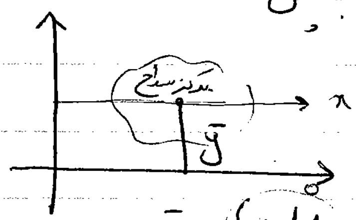
نیروی خارجی که نداریم پس صفر است

و برآیند نیروهای داخلی هم صفر می‌شود $\int \sigma \, dA$

$$\Rightarrow 0 = \int_A \overbrace{\sigma \, dA}^{\text{نیرو}} = \int_A \frac{Ey}{\rho} \, dA = \frac{E}{\rho} \boxed{\int y \, dA = 0} \quad (4)$$

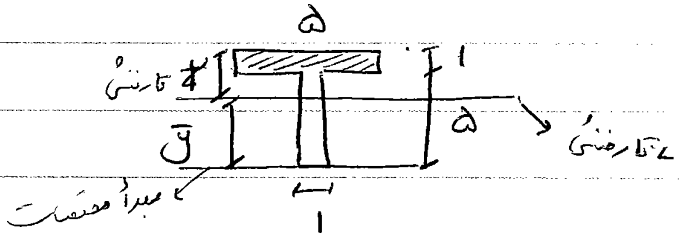
یعنی تار خنثی از مرکز سطح عبور می‌کند

پس: $\boxed{\int y \, dA = 0}$ گشتاور اول سطح نسبت به محورها صفر است یعنی مرکز سطح روی محورها قرار دارد.



$$\bar{y} = \frac{\int y \, dA}{A} = 0$$

مثلاً: برای شکل زیر



$$\bar{y} = \frac{(5 \times 5.5) + (5 \times 2.5)}{10} = 4 \text{ cm}$$

دومین معادله تعادل $\Sigma M_z = 0 \Rightarrow M_z = \int_A \underbrace{\underbrace{y}_{\text{فاصله}} \times \underbrace{\sigma \, dA}_{\text{نیرو}}}_{\text{گشتاور}} = \int_A y \left(E \frac{y}{\rho} \right) dA =$

گشتاور دوم سطح نسبت به محورها که در اینجا محور z ها است (با توجه به تار خنثی)

$$\Rightarrow \boxed{M_z = \frac{E}{\rho} \underbrace{\int_A y^2 \, dA}_{I_z = \text{ممان اینرسی}}} \quad (5) \quad \text{یا} \quad \boxed{M_z = \frac{E I_z}{\rho}} \quad (5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{\underbrace{EI}_{\text{صلبیت خمشی}}}} \quad (6)$$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از محور z ها (محور خمش)

③ و ④ $\Longrightarrow$ $\boxed{\sigma = \frac{M_z y}{I_z}}$ ⑦

③ : $\sigma = E\frac{y}{\rho}$

④ : $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

تنش در هر نقطه‌ی دلخواه ناشی از خمش

مهم‌ترین فرمول (که فرمول شماره‌ی 3 کاربرد ندارد چون ρ)

ممان اینرسی نسبت به محور خمش می‌خواهد

تنش در هر نقطه‌ی دلخواه ناشی از پیچش $\tau = \frac{T\rho}{J}$ → $\tau_{max} = \frac{T_{max} \times r}{J}$ همان ρ_{max} است

فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از مرکز (محور پیچشی)

ممان اینرسی نسبت به محور z ها (ممان اینرسی قطبی) (محور پیچشی)

$J = \int \rho^2 dA$

همان y_{max} است

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot c}{I} < \sigma_{\text{مجاز}}$$

این را min می‌خواهیم

حالا M_{max} را پیدا کنیم؟؟

مثلاً:

q

L

M_{max}

$M_{max} = \frac{qL^2}{8}$

** M_{max} را باید با رسم دیاگرام لنگر بدست آوریم **

یادآوری:

صلبیت محوری EA $\Longrightarrow$ $\delta = \frac{PL}{EA}$

صلبیت برشی GA

صلبیت پیچشی GJ $\Longrightarrow$ $\varphi = \frac{TL}{GJ}$

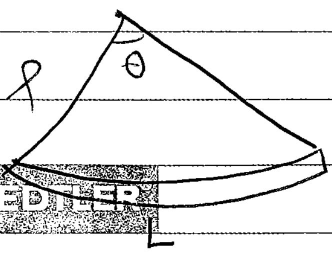
صلبیت خمشی EI $\Longrightarrow$ $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

** آنچه که در این فرمول‌ها مهم است خاصیت هندسی آن‌هاست. اگر مقطع را بکشیم یا فشار دهیم یا برش بزنیم A (مساحت) مهم است. و اگر مقطع را بپیچانیم J مهم است. و اگر خم شود I مهم است. **

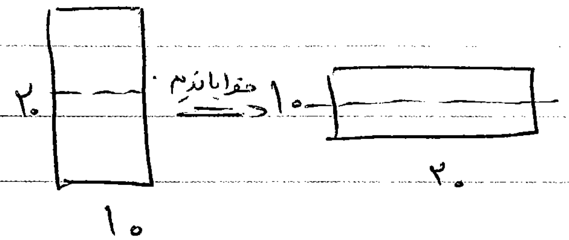
از طرفی می‌خواهد در برابر خمش مقاوم شود باید I را زیاد کنیم یعنی کمترین در صورت ρ زیاد شود. هر چقدر I را زیاد کنیم تنش کمتر می‌شود

$\sigma = \frac{Mc}{I}$ $\quad$ $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

(هر چه قدر ρ بیشتر باشد یعنی کمتر خم شده است)



مثلاً تیر چوبی با ابعاد ۲۰×۱۰ داریم می‌خواهیم آن را چطور بخوابانیم.



$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{10(20)^3}{12} > I=\frac{20\times(10)^3}{12} \longrightarrow$$

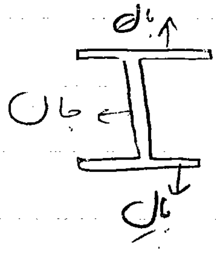
هرچه I بزرگتر باشد σ کمتر می‌شود و P بیشتر می‌شود.

$$I=\int y^2\,dA$$

فاصله از محور خنثی

در خمش همیشه باید I را زیاد کنیم یعنی y را زیاد کنیم طبق:

در تیر I شکل:



~~تا آنجا که ممکن است جان را نازک می‌گیریم و~~
زیاد جان را نازک می‌گیریم و زیاد ارتفاع آن را هم افزایش می‌دهیم

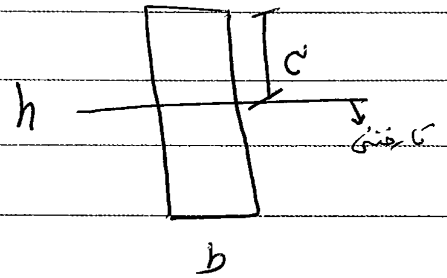
نکته: به نسبت $\frac{I}{c}$، S هم گفته می‌شود که مدول مقطع (اساس مقطع) نام دارد.

$$\frac{I}{c}=S \quad (cm^3 - mm^3)$$

مدول مقطع (اساس مقطع)

$$\boxed{\sigma_{max}=\frac{M_{max}\cdot c}{I}=\frac{M_{max}}{S}\le\sigma_{\text{مجاز}}}$$

۸ در واقع فرمول کنترل است.



$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$ حفظ شود.

کنترل: $\sigma_{max_{\text{موجود}}} = \frac{M_{max_{\text{موجود}}} \times c}{I_{\text{موجود}}} = \frac{M_{max}}{S} \le \sigma_{\text{مجاز}}$

اگر شکل متقارن نبود باید σ کششی و σ فشاری را جداگانه بررسی کنیم.

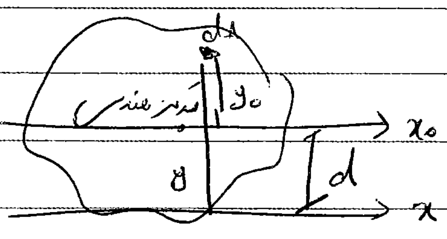
ظرفیت باربری: $M_{\text{مجاز}}$ حداکثر (به سمت پایین) $= \sigma_{\text{مجاز}} \times \frac{I_{\text{موجود}}}{c} = \sigma_{\text{مجاز}} \times S_{\text{موجود}}$

در حقیقت برای طراحی ما I را می‌خواهیم، اما اگر I را می‌خواستیم آن گاه h هم مجهول بود پس در این جا برای طراحی ما S را می‌خواهیم.

طراحی: $S_{\text{لازم}}$ حداقل (به سمت بالا) $= \frac{M_{max_{\text{موجود}}}}{\sigma_{\text{مجاز}}}$

مقاطع ساده‌ی تیر مستطیلی $I = \frac{bh^3}{12}$ و $M_{max} = \frac{qL^2}{8}$ ، $S = \frac{bh^2}{6}$ است.

اما در مقاطع مرکب I را بیابید.



I_{x_0} = معلوم $\quad I_x$ = مجهول

ممان اینرسی نسبت به سطح

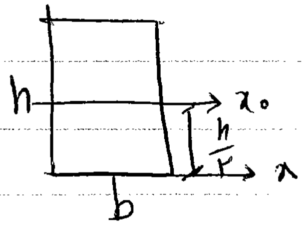
$$\boxed{I_x = I_{x_0} + Ad^2}$$

اثبات:

ممان استاتیک نسبت به سطح صفر

$$I_x = \int y^2 dA = \int (y_0+d)^2 dA = \underbrace{\int y_0^2 dA}_{I_{x_0}} + \underbrace{d^2 \int dA}_{Ad^2} + 2d\cancel{\int y_0 dA}$$

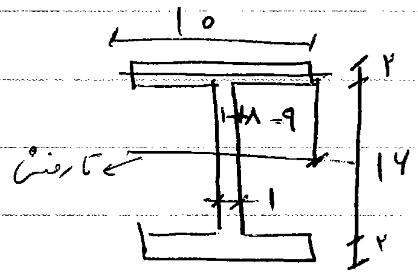
مثال:



$$I_x = \frac{bh^3}{12} + \overbrace{(bh)}^{A}\overbrace{\left(\frac{h}{2}\right)^2}^{d^2} = \frac{bh^3}{3}$$

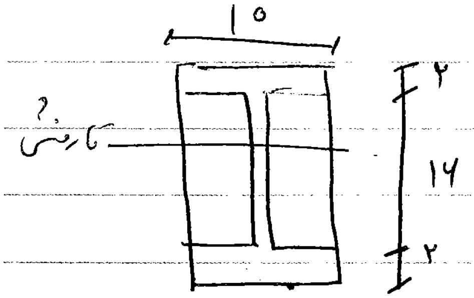
(دایره به درد پیچش می‌خورد اما مستطیل به درد خمش می‌خورد)

مثال ۲:

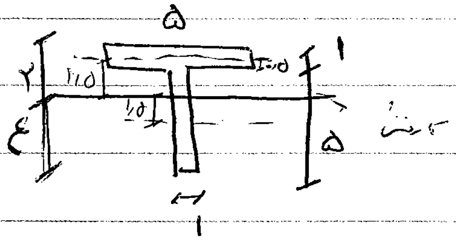


$$I_{\text{کل شکل}} = I_{\text{جان}} + 2I_{\text{بال}}$$

$$\left[\frac{1(14)^3}{12}\right] + 2\left[\frac{10(2)^3}{12} + (10\times 2)(9)^2\right]$$



$$I = \frac{10(20)^3}{12} - 2\left[\frac{4.5(14)^3}{12}\right] =$$

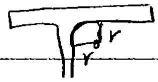


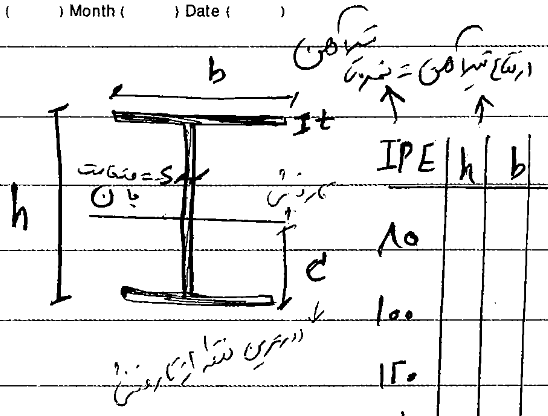
$$I = I_{\text{بال}} + I_{\text{جان}}$$

$$\left[\frac{5(1)^3}{12} + \underbrace{5(1.5)^2}_{Ad^2}\right] + \left[\frac{1(5)^3}{12} + 5(1.5)^2\right]$$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



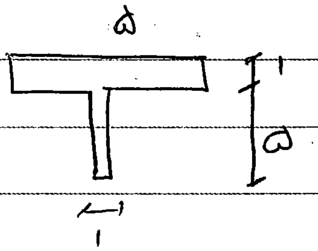


X — اساس مقطع در محور اینرسی

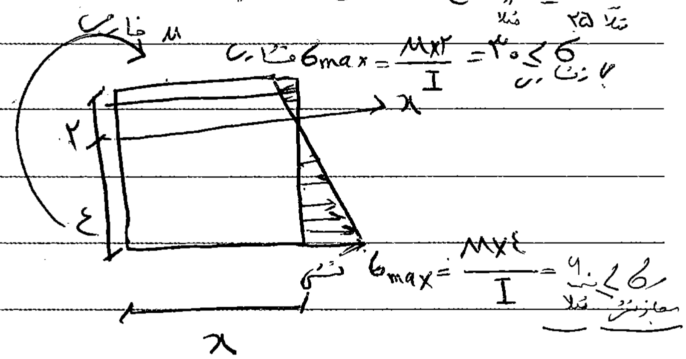
y

IPE	h	b	t	s	r	A	G	I	S		
۸۰											
۱۰۰											
۱۲۰											
⋮											
۶۰۰											

سومین مقطع ، مقطع جدول های استاندارد (کارخانه ای)



مقطع نازک



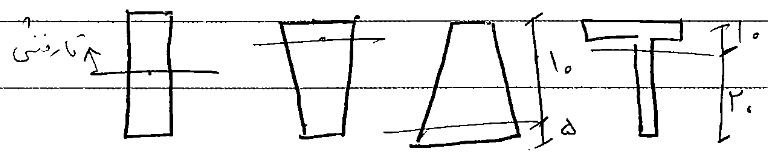
$\sigma_{max} = \frac{M \times 2}{I} = 30 \le \sigma$ فشاری — مثلاً ۳۵ ، مجاز

$\sigma_{max} = \frac{M \times 4}{I} = 60 \le \sigma$ کششی — مجاز ، مثلاً

سازه نامتقارن

مثال : مساحت ها مساوی اگر

برای چون کدام مناسب است .



جایی فشار را بیشتر تحمل می کند

الف ب ج د

برای متقارن ها مناسب است .

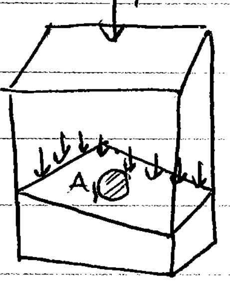
اگر کشش ... باشد (ج) درست است

ولی اگر کشش ... باشد ب و د درست است

SUBJECT :

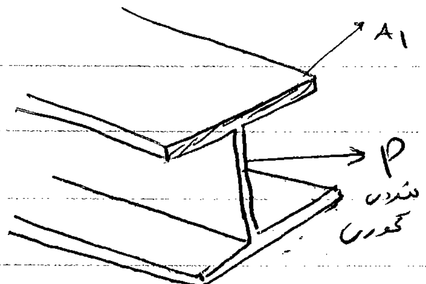
Year (   ) Month (   ) Date (   )

نکته ۱: اگر عضوی تحت کشش باشد (منظور تحت نیروی محوری باشد) و به صورت شکل سطح A باشد و اگر بخواهید یک بخش از این سطح مثلاً سطح A_1 چقدر نیرو تحمل کند



با فرض این که تنش یکنواخت باشد (یعنی تنش ثابت است از انتگرال بیرون می‌آید) نیرو به نسبت مساحت توزیع برای یک بخش بدست می‌آید

سهم A_1 از کل نیروی محوری برابر است با:



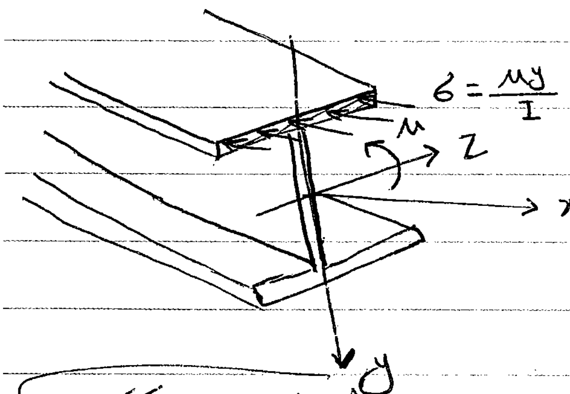
$$P_1=\int_{A_1}\sigma\, dA=\frac{P}{A}\underbrace{\int_{A_1} dA}_{A_1}=\boxed{P\frac{A_1}{A}}$$

نتیجه‌ی خیلی مهم

↑ می‌خواهیم ببینیم P_1 چند درصد P است

سهم نیروی ناشی از نیرو

نکته‌ی ۲:



چقدر از لنگر را سطح A_1 تحمل می‌کند؟

$$M_1=\int_{A_1} y\,\sigma\, dA=\int_{A_1} y\left(\frac{My}{I}\right)dA=$$

$$=\boxed{\frac{M}{I}\underbrace{\int_{A_1} y^2 dA}_{I_1}=M\frac{I_1}{I}}$$

نتیجه‌ی خیلی مهم

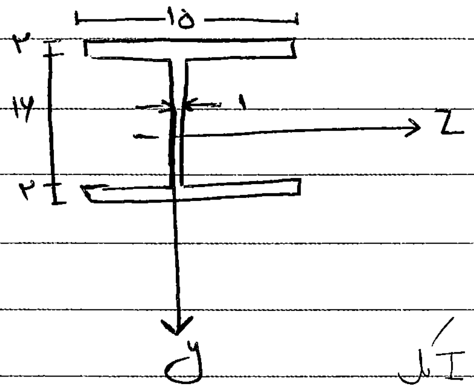
سهم لنگر ناشی از لنگر

اگر عضوی تحت خمش قرار بگیرد و بخشی از آن چند درصد لنگر را تحمل می‌کند به نسبت ممان اینرسی است ولی برای نیرو (مثلاً سطح A_1) به نسبت مساحت ماست.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال برای نکته ی ۲: تیرآهن



سؤال: چند درصد لنگر را بال و چند درصد را جان تحمل می کنند؟

وقتی می گوییم چند درصد یعنی نسبت $\frac{I_1}{I}$ را می خواهیم و M را هم بخواهیم اشکال ندارد

I کل را باید با جمع ۳ مستطیل بدست آوریم

$I_{کل} = I_{جان} + 2 I_{بال}$

چند درصد را جان تحمل می کند $= \frac{I_{جان}}{I_{کل}}$

هر چه مساحت دورتر از تار خنثی باشد تأثیرش بیشتر است

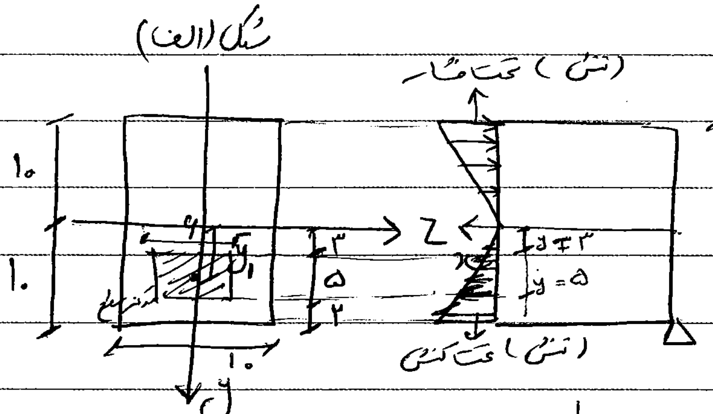
چند درصد را بال ها تحمل می کنند $= \frac{2 I_{بال}}{I_{کل}}$

نکته ی ۳:

وقتی تحت لنگر قرار است نیرویی به بال وارد شود چقدر است؟

$\sigma = \frac{My}{I}$

کشش در پایین بیشتر است



مقطع ۱ (برش زدیم = مقطع مساحت راست را گرفتیم)

چون نکته ی ۳ مثل نکته ی ۲ (دارای یا نیرویی که در اثر لنگر ایجاد می شود)

سهم نیروی ناشی از لنگر

بهترین روش ⇐ روش اول

لنگری که به مقطع وارد می شود

$$F_1 = \int_{A_1} \sigma\, dA = \int_{A_1} \left(\frac{My}{I}\right) dA = \frac{M}{I}\int_{A_1} y\, dA = \frac{MQ}{I}$$

نیرویی که به سطح ها شود وارد می شود

ناشی از لنگر است یعنی در اثر لنگر به وجود آمده

Q = ممان استاتیک A_1 نسبت به تار خنثی

ممان اینرسی کل مقطع نسبت به تار خنثی

ممان استاتیک سطح های ... نسبت به تار خنثی

اگر در مقطعی داریم و لنگر تحت لنگر است چه نیرویی به آن مقطع وارد می شود باید از فرمول $\frac{MQ}{I}$ استفاده می شود.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

روش دیگر

$\bar{y}_1$: فاصله‌ی مرکز سطح سطح هاشور خورده از تار خنثی

$$F_1 = \frac{M}{I}\underbrace{(\bar{y}_1 A_1)}_{Q_1} = \underbrace{\left(\frac{M\bar{y}_1}{I}\right)}_{\text{تنش در مرکز سطح هاشور خورده}} \cdot A_1$$

تنش مرکز سطح هاشور خورده

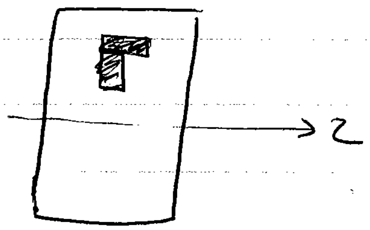
(این تنش در یک نقطه است در یک مقطع)

(مثلاً برای مثلث این مورد [illegible]) تنش مرکز سطح برای این مقطع به مستطیل شکل [illegible]

(با توجه به شکل الف $\bar{y}_1$ در شکل نشان داده شده)

روش سوم: $F_1 = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} \cdot A_1$

= تنش مرکز سطح [ابتدا تنش در بالای مقطع (σ_1) و تنش در پایین مقطع (σ_2) را بدست آوریم و تقسیم بر ۲ می‌کنیم]

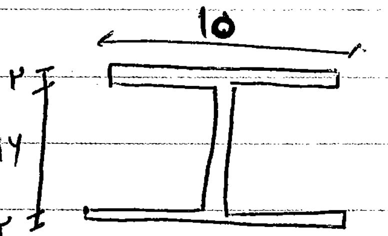


مثال: Q_s سطح هاشور خورده برابر است با جمع Q در مستطیل.

مدول الاستیسیته ی مثلاً فولاد

مثال: M و I و ابعاد مقطع و E و ν = معلومات مسئله، ν = ضریب پواسون

الف) عرض بال فوقانی = ? مجهول (بعد از اعمال لنگر)



یعنی باید δ_z را بدست آوریم

تغییر طول در جهت z

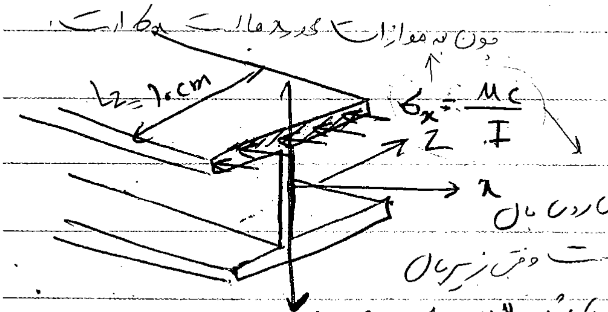
چون فشاری است باید منفی بگذاریم ← $\frac{Mc}{I}$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\cancel{\sigma_z} - \nu(\sigma_x + \cancel{\sigma_y})\right] =$$

جواب + بدست می‌آید یعنی افزایش پیدا می‌کند

$$\delta_z = \varepsilon_z \cdot L_z$$

در این جا 1cm



ب) ضخامت بال فوقانی = ?

یعنی اول باید δ_y را بدست آوریم

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

جواب + است یعنی ضخامت بال هم زیاد می‌شود، فشاری است

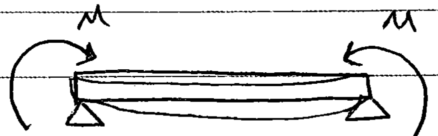
$$\delta_y = \varepsilon_y \times L_y = \varepsilon_y \times 2\,cm$$

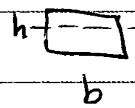
$$\sigma_x = -\frac{M\times 9}{I}$$

(پس در کل طول بال کم می‌شود ولی عرض بال و ضخامت بال زیاد می‌شود)

مثال: تیر چوبی:

حالت اول: یک تیر چوبی





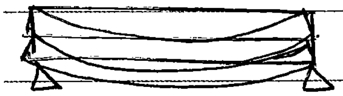
$$M_{مجاز} = \sigma_{مجاز\ چوب} \times S_{1\ موجود} = \sigma_{مجاز} \times \frac{bh^2}{6}$$

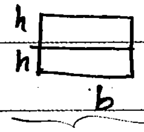
حالت دوم:

تار خنثی

دو تیر چوبی شبیه هم را روی هم می‌گذاریم (بدون اتصال) (بدون جوش = بدون چسب)

وقتی آن‌ها را خم می‌کنیم روی هم می‌لغزند.





$$\sigma = \frac{MC}{I} = \frac{M}{S} < \sigma_{مجاز}$$

$$M_{مجاز} = \sigma_{مجاز} \cdot S_{موجود}$$

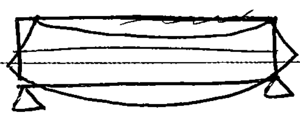
$$S_{لازم} = \frac{M}{\sigma}$$

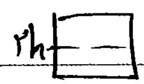
$$S_{مستطیل} = \frac{I}{C} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$

دو تار خنثی داریم چون شکل مرکب نیست و هر کدام از تیرها جداگانه در پایین افزایش طول و در بالا کاهش طول دارند.

$$M_{مجاز} = 2M_{مجاز} = 2\sigma_{مجاز} \times \frac{bh^2}{6}$$

حالت سوم: دو تیر را آن‌ها را به هم بچسبانیم (در واقع یک تیر داریم):





چون با چسب به هم متصل کردیم دیگر روی هم نمی‌لغزند یعنی چسب جلوی این کار را گرفته است (تنش برشی)

که صرفه‌تر از حالت قبلی است.

$$M_{مجاز} = \sigma \times S_{موجود} = \sigma_{مجاز} \times \frac{b(2h)^2}{6} = 4M_{1\ مجاز}$$

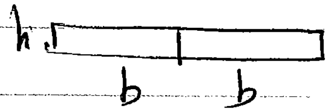
وقتی روی این تیر بار بیاید یک پارچه تغییر شکل می‌دهد (چون در واقع یک تیر است)

** نکته: در خمش ملاک اساس مقطع است (S) و یا I ممان اینرسی است)

SUBJECT :

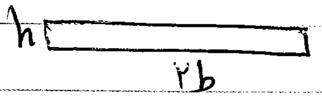
Year ( ) Month ( ) Date ( )

حالت چهارم:



کنار هم هستند (بدون اتصال)

$\underset{\text{کل}}{M} = 2\underset{\text{تک}}{M_1}$



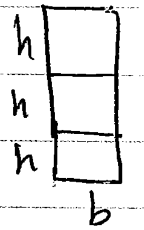
کنار هم جوش کردیم:

$\underset{\text{کل}}{M} = \underset{\text{کل}}{\sigma} \times S = \underset{\text{کل}}{\sigma} \times \frac{(2b)h^2}{6} = 2\underset{\text{تک}}{M_1}$

پس اگر دو تیر کنار هم باشند [چه جوش کنیم چه نکنیم ظرفیت خمشی آن‌ها یکسان است]

ولی اگر روی هم بگذاریم [جوش کنیم (برای مستطیل) ۴ برابر می‌شود و اگر جوش نکنیم (برای مستطیل) ۲ برابر می‌شود]

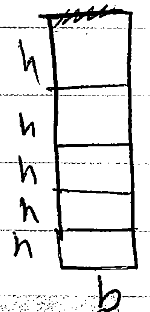
وقتی می‌گوییم وقتی روی هم بگذاریم جوش کردن مهم است با فرض این که بار از بالا به آن وارد می‌شود (بار ثقلی وارد شود) وقتی اگر بار افقی وارد شود جای h و b عوض می‌شود: $S=\frac{hb^2}{6}$



تست کنکوری: سه تیر می‌خواهیم آن‌ها را بچسبانیم ظرفیت چند برابر حالتی است که نچسبانیم

چسباندن = $\underset{\text{برابر تکی}}{9} \times M_1$

نچسباندن = $\underset{\text{برابر تکی}}{3 \times M_1}$



بچسبونیم = $5M_1$

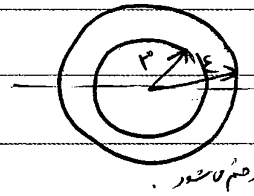
تیرها هم افقی بود:

SUBJECT :

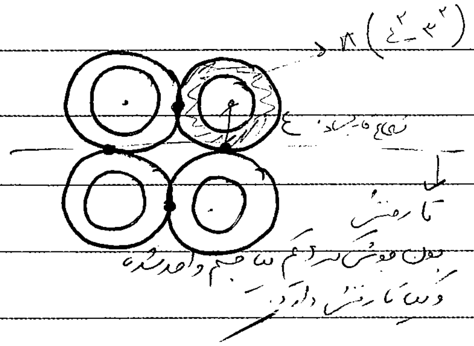
Year (   ) Month (   ) Date (   )

مثال:

لوله‌ی فولادی به شعاع داخلی ۳ و شعاع خارجی ۴ داریم حول محور رنگ قرمز خم می‌شود



اگر ۴ تا از این لوله‌ها را استفاده می‌کنیم



لذا M_1 پیدا برابر می‌شود

$$S_1 = \frac{I_1}{c} = \frac{\frac{\pi}{4}(4^4-3^4)}{4}$$

c = دورترین نقطه از تار خنثی

الف) اگر این ۴ تا را جوش ندهیم $\Rightarrow 4M_1$ جا

ب) اگر جوش دهیم $\Rightarrow$ باید ممان اینرسی را حساب کنیم یعنی باید $\frac{I}{c}$ را حساب کنیم (برای مستطیل فقط هم که $\frac{bh^2}{6}$ حساب می‌شود)

برای ۴ تا لوله‌ی متصل شده

$$I = 4\left[I_1 + A_1 d^2\right] = 4\left[\frac{\pi}{4}(4^4-3^4) + \pi(4^2-3^2)(4)^2\right]$$

$$S = \frac{I}{c} = \frac{I}{8}$$

$$\boxed{\frac{S}{S_1} = 7.2}$$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

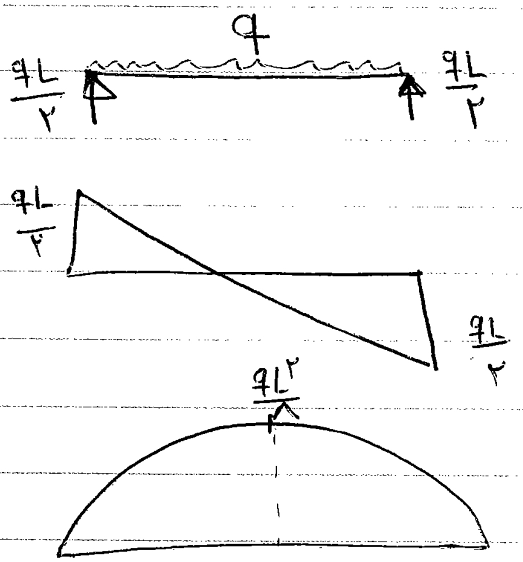
«فصل پنجم» «تنش برشی در تیرها»

در تیر یکی تنش برشی باید کنترل شود و دیگری تنش خمشی باید کنترل شود
یعنی باید کنترل کنیم تیر جوابگو است یا نه

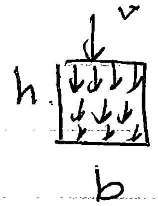
معمولاً در امتحان فصل ۴ و ۵ با هم می‌آید یعنی هم تنش برشی و هم تنش خمشی کنترل شود.

$$\sigma = M\frac{c}{I} \le \sigma_{مجاز}$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} < \tau_{مجاز}$$



مقطع

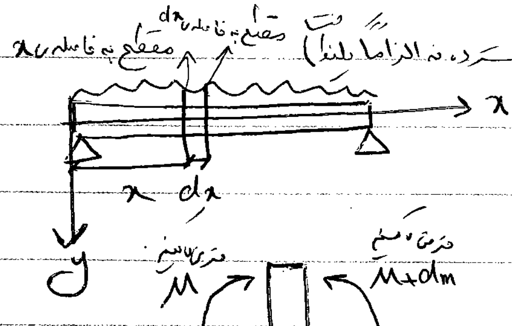


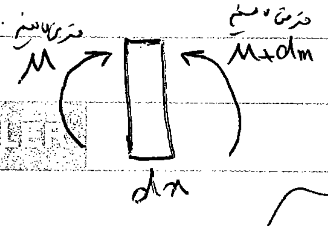
$$\tau_{Ave} = \frac{V}{A} \le \tau_{مجاز}$$

اگر توزیع تنش یکنواخت باشد.

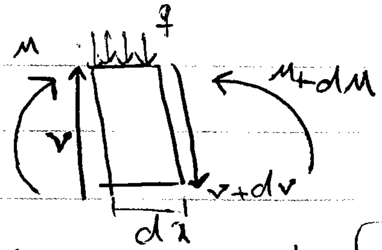
در فصل اول گفتیم $\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$ اگر این را
کمتر از $\tau_{مجاز}$ باشد مطمئن نیستیم که تیر گسیخته نمی‌شود باید $\tau_{مجاز} > \tau_{max}$ باشد.

تیر را در نظر می‌گیریم که تحت بار است: (تحت بار گسترده، نه الزاماً یکنواخت)





یادآوری از استاتیک: $V = \frac{dM}{dx}$



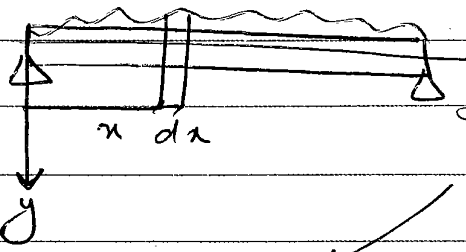
معادلات تعادل: $\sum F_y = 0 \Rightarrow V = q\,dx + V + dV \Rightarrow \boxed{q = -\frac{dV}{dx}}$

$\sum M = 0 \Rightarrow M + V\,dx = q\,dx\left(\frac{dx}{2}\right) + M + dM \Rightarrow \boxed{V = \frac{dM}{dx}}$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

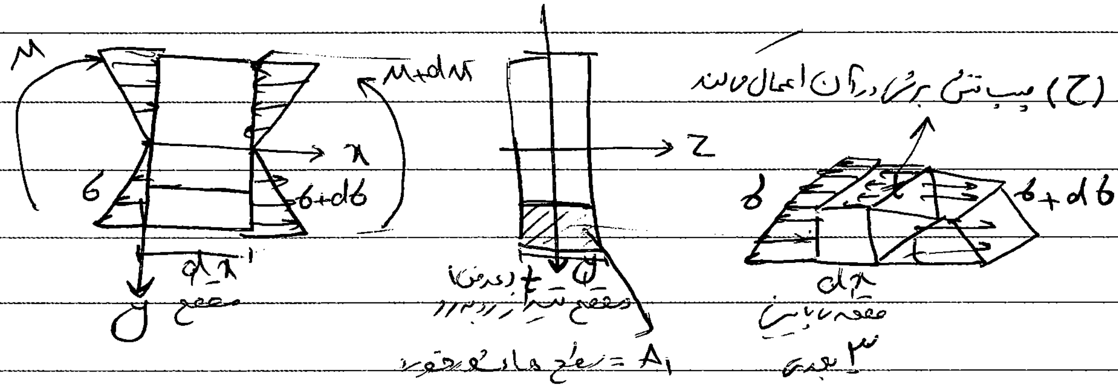
پس:
$$M=\int V\,dx \longleftarrow V=\frac{dM}{dx}$$



M باعث تنش فشاری در بالا و تنش کششی در پایین می‌شود

چون تکیه داخلی ناشی از تنش است

پس تنش به وجود می‌آید



(τ) سبب تنش برشی در آن اعمال می‌کنند

$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow \underbrace{\int_{A_1}\sigma\,dA}_{\text{نیرو از راست سبب}}+\tau t\,dx=\int_{A_1}(\sigma+d\sigma)\,dA$$

$$\int_{A_1}\frac{My}{I}\,dA+\tau t\,dx=\int_{A_1}\frac{(M+dM)y}{I}\,dA$$

$$\tau t\,dx=\frac{dM}{I}\underbrace{\int_{A_1}y\,dA}_{Q} \Rightarrow$$

ممان استاتیک مقطع جدا شده نسبت به تارش

(سطح هاشور خورده) سطحی که از سبب نیرو جدا می‌شود

(در نظر بگیریم اینجا V_{max}) نیروی برشی

$$\Rightarrow \tau=\underbrace{\frac{dM}{dx}}_{V}\cdot\frac{Q}{It} \Rightarrow \boxed{\tau=\frac{VQ}{It}}$$

← مهم

(فرمول دقیق برشی)

مهم‌ترین فرمول حل مسائل برشی

فرمول حل مسئله

فرمول تقریبی برشی: $\tau=\frac{V}{A}$

تنش برشی در هر نقطه باشد

ضخامت مقطع مورد نظر

ممان اینرسی مقطع مورد نظر نسبت به تار خنثی

SUBJECT

Year ( ) Month ( ) Date ( )

لنگر خمشی در مقطع مورد نظر

(برای تیر)

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

تنش قائم در نقطه‌ی مورد نظر (ناشی از خمش)

فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از تار خنثی — خیلی مهم

ممان اینرسی کل مقطع یا ممان اینرسی مقطع مورد نظر

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

نیروی برشی در مقطع مورد نظر

ممان استاتیک مقطع جدا شده در نقطه‌ی مورد نظر

ضخامت مقطع در نقطه‌ی مورد نظر

تنش برشی در نقطه‌ی مورد نظر [در تیر]

ممان اینرسی مقطع مورد نظر

نتیجه:

نقطه‌ی مورد نظر: مثلاً نقطه‌ای که حساب شود

نیرو و لنگر برای مقطع است ⇐ در استاتیک باید بدست آورد

و تنش برای نقطه است ⇐ در مقاومت مصالح

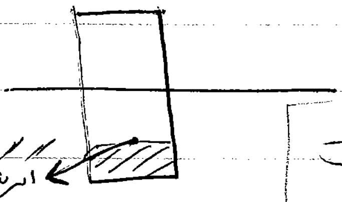
مهم

نکته: طبق فرمول $\tau_{max} = \frac{V \cdot Q_{max}}{I\, t_{min}}$ ، Q_{max} و t_{min} باشد بدترین نقطه یعنی بیشترین تنش

برای رسیدن به نقطه باید اول مقطع معلوم شود. یعنی مقدار M.

(چه در خمش چه در برش ممان اینرسی مقطع مورد نظر را می‌خواهیم)

نکته:

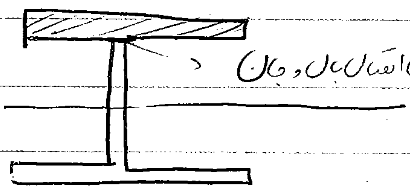


اگر بخواهیم تنش در این نقطه Q می‌شود سطح هاشور خورده را ...

Q_{max} در تار خنثی اتفاق می‌افتد یعنی در تار خنثی τ ماکزیمم است

نکته: ممان استاتیک بخشی از مقطع با بقیه‌ی مقطع همیشه برابر است.

مثال: تنش برشی را در محل اتصال بال به جان پیدا کنید



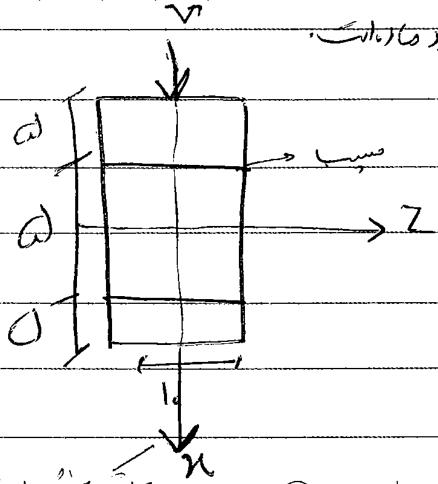
t = ضخامت جان می‌شود

ممان استاتیک کل سطح صفر است.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

فقط برای چسب نیست برای خود ماده است.



$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{مجاز چسب}}$ چسب = جایی که چسب خورده.

$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{مجاز چوب}}$ چوب = تار خنثی

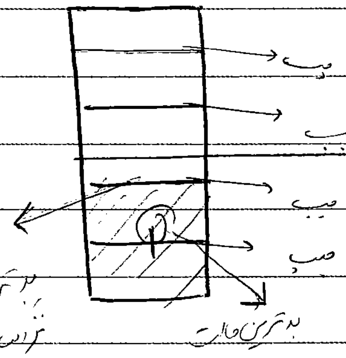
باید هر دو تا را کنترل کنیم (مثل جمع)

در این فرمول V از روی دیاگرام برش بدست می‌آید، t = عرض چسب است، Q = ممان استاتیک بخشی از مقطع است

به تار خنثی یا ممان استاتیک بخش مقطع آن برابر است

هر چه چسب به تار خنثی نزدیکتر باشد Q

بزرگتر است (وصله بحرانی‌تر است).



$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{مجاز چسب}}$

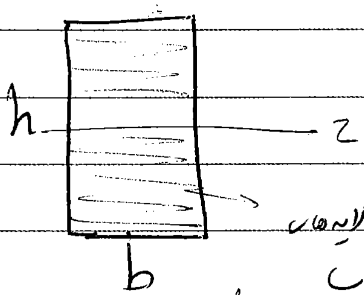
این چسب بحرانی‌تر است چون به تار خنثی نزدیک‌تر است

بدترین حالت

کنترل چسب اگر چند لایه بود

باید کدام را کنترل کنیم کدام به تار خنثی نزدیکتر است.

اگر تیر چوبی یکپارچه به عرض b و ارتفاع h داشتیم



تک تک لایه‌ها ممکن است روی لایه‌ی بالایی یا پایینی بلغزند.

برای تیر چوبی که یکپارچه است فقط V باید $\tau \le \tau_{\text{مجاز چوب}}$ باشد.

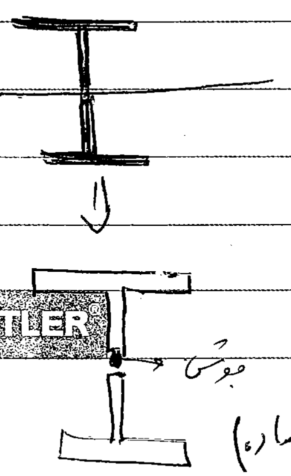
اما برای تیری که واقعاً چسب خورده $\tau \le \tau_{\text{مجاز چسب}}$ در نزدیکترین نقطه‌ای که چسب خورده

برای مقاومت لایه‌های چوب $\tau \le \tau_{\text{مجاز چوب}}$ نزدیکترین به تار خنثی

اگر تعداد چسب بیشتر باشد به تعداد مقطع‌ها رج شوند ...

$\tau_{\text{چوب}} =$

مثال: یک تیر I شکل داریم (جوش داده‌ایم)



فرض شعله

ضخامت جان mm

ضخامت جوش mm

mm = STAEDTLER

جوش

در فولاد mm = ... قرار دهیم

$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{مجاز جوش}}$ t: ضخامت جوش

$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{مجاز فولاد}}$

باید Q مربوط به تار خنثی را بگذاریم (برای کنترل خود ماده)

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date (

(نیروی برشی در مقطع مورد نظر) تابعی از x است

ممان استاتیک مقطع جدا شده در نقطه‌ی مورد نظر نسبت به تار خنثی

τ تنش برشی در تیر

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad *$$

ضخامت مقطع در نقطه‌ی مورد نظر (در مستطیل ضخامت ثابت است و در I متغیر است)

ممان اینرسی مقطع مورد نظر نسبت به تار خنثی

(گشتاور خمشی در مقطع مورد نظر) تابعی از x است

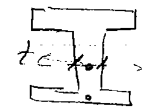
σ تنش قائم در تیر

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad *$$

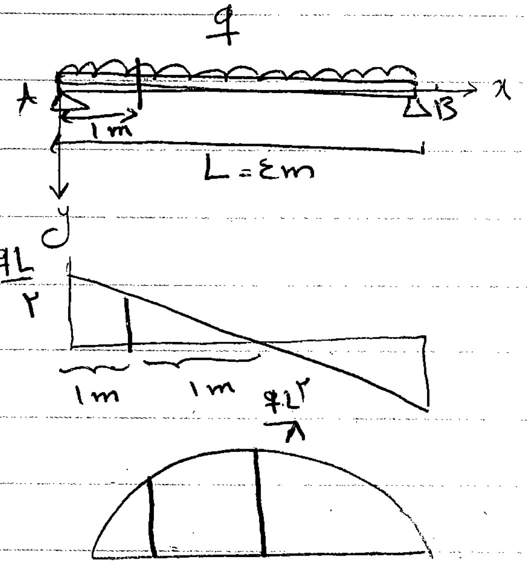
فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از تار خنثی

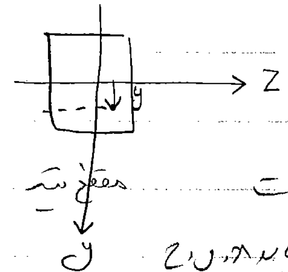
ممان اینرسی مقطع مورد نظر نسبت به تار خنثی

یادآوری: برای ضخامت بستگی به شکل دارد که آن نقطه دارد



مثال: (یعنی تیر را باید خمش و برش با هم کنترل کرد = فصل ۵ و ۶)





منظور از تنش قائم در تیر باید در یک نقطه‌ی مشخص باشد. نقطه‌ی مشخص دارای مشخصاتی است که ما باید آن نقطه را پیدا کنیم یعنی باید x و y آن نقطه را بشناسیم یعنی x و y آن کجاست

یعنی مقطع (یعنی وقتی گفتند در ۱ متری باید در ۱ متری تکیه‌گاه A مقطع را بزنیم)

y = فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از تار خنثی (یعنی نقطه را باید در مقطعی که در ۱ متری تکیه‌گاه A زدیم پیدا کنیم که x آن ۱ متر است ولی y آن در مقطع تیر مشخص شد)

* { تنش برشی به V ربط دارد که با V بیشتر است (که V_{max} از روی دیاگرام برشی بدست می‌آید به عنوان بحرانی‌ترین)

* { در مورد σ_{max} باید هم مقطع بحرانی و هم نقطه‌ی بحرانی را پیدا کنیم (M_{max} = از روی دیاگرام خمشی و $y_{max} = c$)

Q همیشه در تار خنثی max است و هرچه از تار خنثی دورتر شویم کمتر است و بیشترین مقطع در تار خنثی است

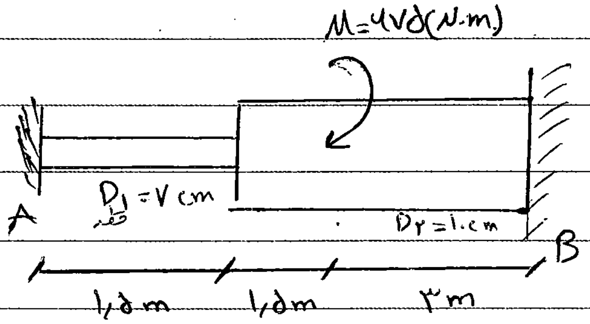
کمتر؟!

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

حل تمرین مقاومت

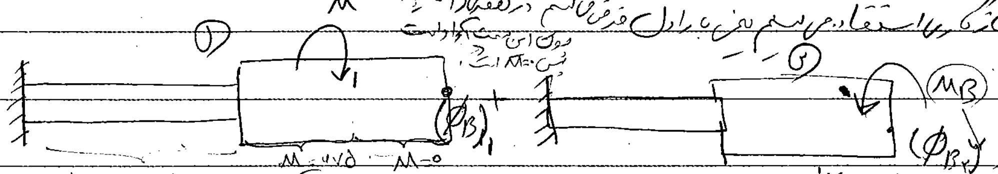
تمرین ۱) مثال: در شکل مقابل در صورتی که جنس میله ی AB یکنواخت باشد گشتاورهای پیچشی تکیه گاهی را در A و B بدست آورید.



دو مقطع متفاوت داریم (پس نامعین است)

عکس العمل ها ناشی از M است از جنس چرخشی هستند گشتاور هستند

از اصل جمع آثار استفاده می کنیم یعنی با رادل فرض می کنیم در نقطه B تکیه گاه نداریم



$$\phi_{B_1} = \frac{475\times1.5}{G\left(\frac{\pi(0.035)^4}{2}\right)} + \frac{475\times1.5}{G\left(\frac{\pi(0.05)^4}{2}\right)} + 0$$

عکس العمل در نقطه B

$$\frac{(M_B)(4.5)}{G\left(\frac{\pi(0.035)^4}{2}\right)} + \frac{(M_B)(1.5)}{G\left(\frac{\pi(0.05)^4}{2}\right)}$$

چون می دانیم $\phi_B = 0$ است پس در B تکیه گاه گیردار است پس در دو شکل بالا باید برابر باشد ϕ_B ها

$$|\phi_{B_1}| = |\phi_{B_2}|$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \qquad J = \frac{\pi R^4}{2}$$

باید از این فرمول استفاده کنیم یعنی باز بنویسیم

در شکل 1 ⟸ T=M است (در شکل 1 G ثابت است)

در شکل 2 ⟸ $T=M_B$ است (در شکل 2 G ثابت است)

$|(\phi_B)_1| = |(\phi_B)_2| \longrightarrow M_B = ?$ بدست می آید (حساب شود)

و M_A هم وقتی برآیند گشتاور حول نقطه A بگیریم بدست می آید.

$M_A = 475 - M_B =$ بدست آید

اگر در صورت سوال گفته می شد ϕ_{O} را بدست آورید؟

باید در نقطه O برش بزنیم و تکیه گاه O در نقطه B را حذف می کنیم و به جایش M_B قرار می دهیم

و در نقطه O و $\tau_{max} = \frac{TR}{J}$ باید از این فرمول

(البته اول باید تکیه گاه را در نقطه B بدست آوریم بعد برش بزنیم) عکس العمل

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال مهم

مثال: ستون بتنی به طول $1,2m$ توسط ۴ میله گرد به قطر $19mm$ تقویت شده است

مدول الاستیسیته فولاد

اگر داشته باشیم $\alpha_s = 11.7\times10^{-6}\ \frac{1}{^\circ C}$ و $\alpha_c = 9.9\times10^{-6}\ \frac{1}{^\circ C}$ و

ضریب انبساط فولاد حرارتی

$$\begin{cases} E_s = 200\,GPa \\ E_c = 25\,GPa \end{cases}$$

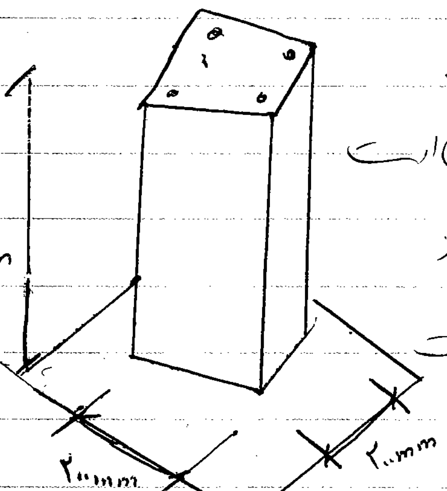
ضریب انبساط حرارتی بتن

وقتی ستون را به اندازه‌ی $45^\circ C$ حرارت می‌دهیم تنش را در فولاد و بتن بدست آورید.

تنش ناشی از افزایش حرارت که باعث افزایش طول می‌شود.

$\Delta\theta = 45^\circ$ ↑

افزایش حرارت



فولاد و بتن را به صورت مجزا در نظر بگیریم طول اولیه هر دو یکسان است

و ΔT ایشان ها $\Delta L = L.\alpha.\Delta T$

افزایش طول ناشی از افزایش حرارت

هم یکسان و فقط α آن‌ها فرق می‌کند

چون فولاد α بزرگتری دارد افزایش طول آن بیشتر است

وقتی در مصالح به صورت همگن داخل هم قرار گرفته‌اند.

پس شرط سازگاری را باید بگذاریم $\Delta L_{فولاد} = \Delta L_{بتن}$

چون میله‌گرد تمایل به افزایش طول بیشتری دارد و بتن تمایل دارد که فولاد را به سمت خودش بکشد (مقاومت می‌کند) و فولاد تمایل دارد که دور برود (عمل و عکس العمل). فولاد فشاری و در بتن کششی است.

تنش در

عامل ایجاد تغییر طول در فولاد یکی افزایش حرارت است و فاکتور دیگر تغییر طول تنش فشاری ایجاد شده است

که تنش فشاری، نیروی فشاری هم می‌خواهد.

P_s = نیروی فشاری (کاهنده −) $\qquad$ P_c = نیروی کششی (افزاینده +)

$$\Delta L_{فولاد} = \Delta L_{بتن}$$

در راستای قائم نیروی کششی به بتن وارد می‌شود. و نیروی فشاری که به فولاد وارد می‌شود

ناشی از حرارت

$$(L.\alpha_s.\Delta T) - \frac{P_s L}{E_s} = (L.\alpha_c.\Delta T) + \frac{P_c.L}{E_c A_c} \qquad \sum F_y = 0 \Rightarrow P_s = P_c = P$$

کاهنده — ناشی از تنش — افزاینده — مجهول حل می‌کنیم

یک معادله دو مجهول است (P_s و P_c) که ما P_s و P_c را از روابط استاتیک $\sum F_y = 0$ بدست می‌آوریم که مساوی آن P است

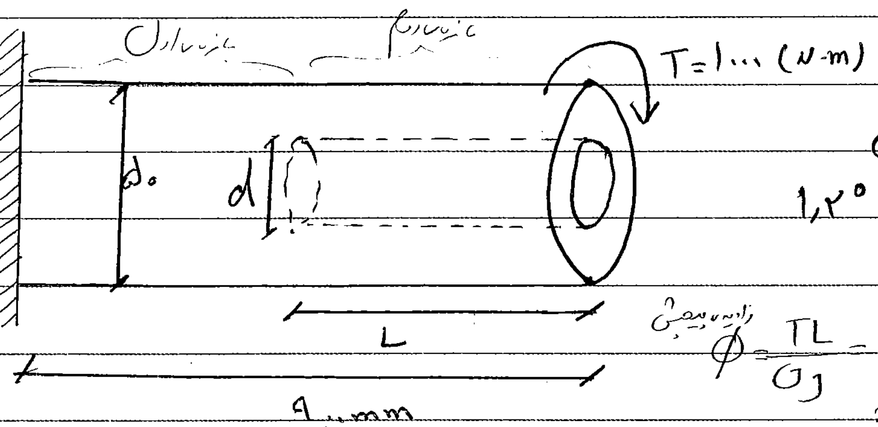
حل:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_S = P_C = P \Rightarrow P = 14895\ N$

$$\begin{cases} \sigma_S = \dfrac{14895}{\pi (19)^2} = 13.13\ MPa & \text{فشاری} \\ \sigma_C = \dfrac{14895}{\pi (20.2^2 - 19^2)} = 383\ MPa & \text{کششی} \end{cases}$$

مثال: یک محور استوانه‌ای به قطر ۵۰mm و طول ۹۰۰mm مطابق شکل تحت گشتاور پیچشی معادل ۱۰۰۰ N.m قرار دارد. در صورتیکه داشته باشیم $G = 0.84\times10^5\ \frac{N}{mm^2}$، مقدار d و طول L سوراخ ایجاد شده را چنان بیابید که اولاً تنش برشی حداکثر در محور داده شده از 54 MPa تجاوز نکند. و ثانیاً حداکثر زاویه پیچش کل محور از 1.2° بیشتر نشود.

$T = 1000\ N.m$



زاویه پیچش $\phi = \dfrac{TL}{GJ}$ = رادیان ؛ باید درجه به رادیان تبدیل شود. $x^\circ \times \dfrac{\pi}{180}$

$\tau_{max} = 54\ MPa$

تعیین کل تنش برشی: $\tau = \dfrac{T\rho}{J}$ در مقطع‌ها T ثابت است و ρ هم باید تبدیل به R شود (دورترین فاصله) که در اینجا T و R ثابت است پس تنها تغییر J است و به ازای J کمتر τ max می‌شود:

$\tau = \dfrac{TR}{J}$ ← max می‌شود

$\tau_{max} = \dfrac{1000\times10^3\times25}{\frac{\pi}{2}(25^4 - r^4)} = 54 \longrightarrow r = 18\ mm$

$\boxed{D = 36\ mm}$

سپس ϕ هر لبه‌ی بازه مربوط به خودش را حساب می‌کنیم و مجموع زاویه پیچش در مقطع انتهای را می‌نویسیم.

مجموع ϕ دو بازه

$\phi_{\text{انتهای میله}} = \sum \dfrac{TL}{GJ} = \dfrac{10^6 \times L}{0.84\times10^5\times\frac{\pi}{2}(25^4 - 18^4)} + \dfrac{10^6(900 - L)}{0.84\times10^5\times\frac{\pi}{2}(25)^4} = 1.2\times\dfrac{\pi}{180} \Rightarrow \boxed{L = 488.6\ mm}$

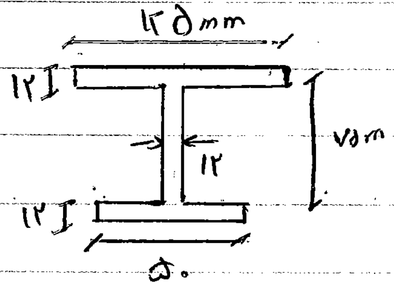
تبدیل به رادیان

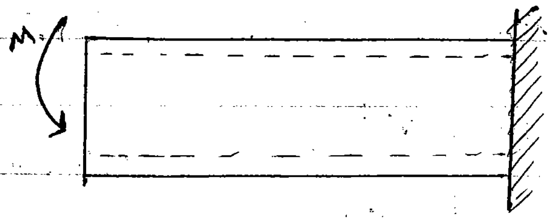
$M =$ خمشی
$T =$ پیچشی

مثال: در تیر شکل مقابل در مقطع تکیه داشته باشیم ، $\sigma_{\text{مجاز کششی}} = ٤٠ \, MPa$

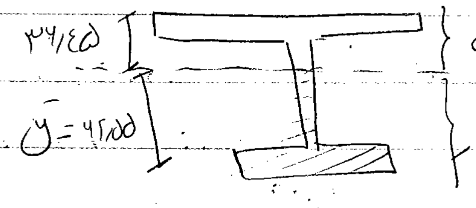
$\sigma_{\text{مجاز فشاری}} = ١٠٥ \, MPa$

تعیین کنید حداکثر مجاز گشتاور M چقدر است؟





اول تار خنثی (محور خنثی) را بدست آوردیم (استاتیک)



$\sigma = \frac{My}{I}$

نسبت به تار خنثی $I = ٣,٩١ \times ١٠^{٦} \, (mm)^4$

در این مقطع پایین ناحیه فشاری و بالا ناحیه کششی داریم که (طبق شکل پایین تار خنثی تحت فشار و بالای تار خنثی تحت کشش است)

حداکثر فاصله از تار خنثی $= ٣٦/٤٥$

$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I}$$

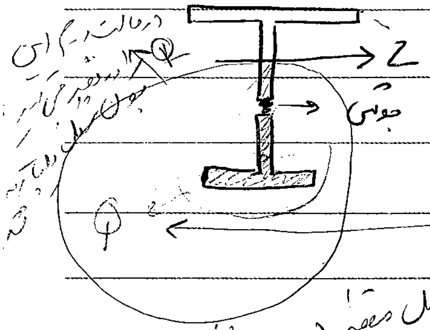
$\underbrace{\sigma_{max}}_{\text{معلوم}}$ کششی $= \frac{M\overset{\text{معلوم}}{C}}{\underset{\text{معلوم}}{(I)}} \Rightarrow M_1 =$ بدست می‌آید $=$ کشش $= ٤,٢٩ \times ١٠^{٦} \, (N.mm)$

σ_{max} فشاری $= \frac{MC}{I}$ $C \to ٤٢/٥٥ \Rightarrow M_2 =$ بدست می‌آید $=$ فشار $= ٦,٥٧ \times ١٠^{٦} \, (N.mm)$

M ای قابل قبول است که هم در ناحیه کششی و هم در ناحیه فشاری جواب دهد یعنی M کمتر یعنی M کمتر قابل قبول است

$M_{\text{مجاز}} = \min\{M_1, M_2\} = M_1 = ٤,٢٩ \times ١٠^{٦} \, (N.mm)$

کنترل جوشی؟



تنش برشی از حد مجاز سطح شکل عبور می‌کند

معلوم

$$\tau_{جوش} = \frac{VQ}{It} \le \tau_{مجاز جوش} \rightarrow$$ اگر جواب داد

یعنی تبدیل به یک شکل یکپارچه شد

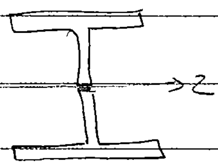
I همان اینرسی شکل مقطع (در این شکل ۳ تا مستطیل)

t ضخامت جوش (ضخامت جوش)

حال باید Q تا جوش را حساب کنیم

$$\tau_{فولاد} = \frac{VQ_{فولاد}}{It} \le \tau_{مجاز فولاد}$$

$Q_{فولاد} > Q_{جوش} \Leftarrow$ اما اگر شکل

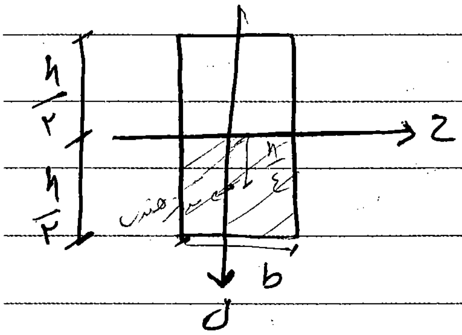


اگر تنش روی جوش کم ماند. $\tau_{فولاد}$ ، $\tau_{جوش}$ باید $\tau_{مجاز}$ را حساب کنیم و

هر کدام که بحرانی‌تر است را کنترل می‌کنیم

توضیح این که چطور $\frac{Q}{t}$ max شود؟

مقدار: $\tau_{max} = ?$



$$\tau_{max} = \frac{V_{max}\left[b\frac{h}{2}\times\frac{h}{4}\right]}{\frac{bh^3}{12}\times b} = \frac{3}{2}\times\underbrace{\frac{V}{A}}_{\tau_{Ave}}$$

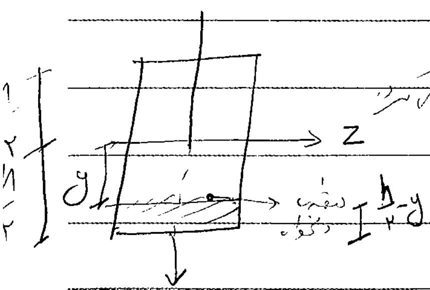
پس برای مستطیل تو پر:

تنش در بیشینه

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\times\underbrace{\frac{V}{A}}_{\tau_{Ave}} \qquad A \rightarrow b\times h$$ مساحت مقطع

حال اگر بخواهیم در یک نقطه دلخواه یک فرمول کلی بدست آوریم:

چون y^2 است سهمی است یعنی تنش برشی ... سهمی تغییر می‌کند



$$\tau = \frac{V\left[b\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(\frac{\frac{h}{2}+y}{2}\right)\right]}{\underbrace{\frac{bh^3}{12}}_{I}\times \underbrace{b}_{t}} = \frac{6V}{bh^3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2-y^2\right]$$

فرمول کلی **

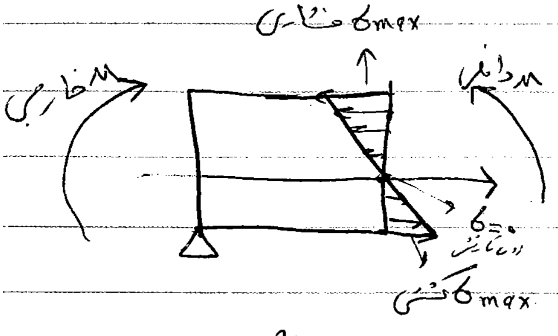
y: فاصله نقطه مورد نظر از تار خنثی

اگر $y=0$ باشد $\tau_{max}=1.5\frac{V}{A}$ می‌شود. **

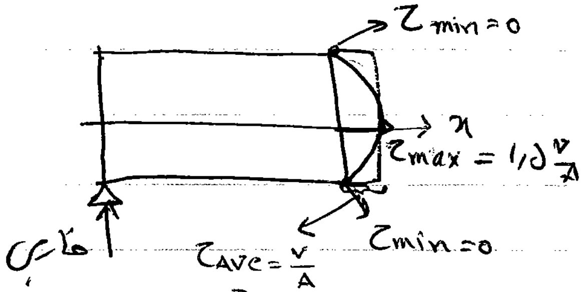
اگر $y=\pm\frac{h}{2}$ باشد $\tau_{min}=0$ می‌شود.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



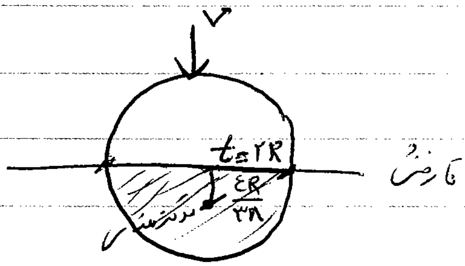
(خمش)



(برشی)

(تنش در اثر خمشی یا بالا یا پایین جسم max می‌شود ولی اثر برشی در وسط max برد) نتیجه مهم

حال برای دایره‌ی توپر:



$$\tau_{max} = \frac{V\left[\overbrace{\frac{\pi R^2}{2}\cdot\frac{4R}{3\pi}}^{\text{ممان استاتیک}}\right]}{\underbrace{\left(\frac{\pi R^4}{4}\right)}_{I}\underbrace{(2R)}_{t}} = \frac{4}{3}\underbrace{\frac{V}{A}}_{\tau_{Ave}}$$

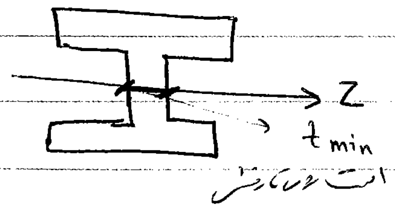
مرکز هندسی نیم دایره

پس در دایره‌ی توپر: $\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{V}{A}$

پس برای τ_{max} باید $\frac{Q}{t}$ max شود و V هم max شود

و برای شکل غیر از مستطیل برای τ_{max}، Q_{max} و t_{min} باید باشد:

یعنی در همان جایی که Q_{max} است، t_{min} باشد.

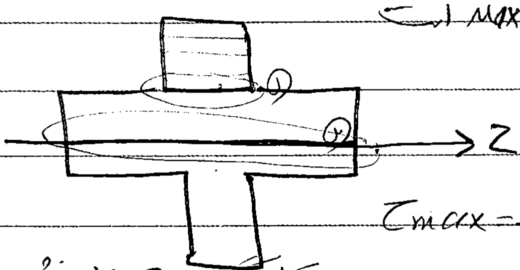


SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال: بین این دو کدام را خواهیم ببینیم $\frac{Q}{t}$ max است

باید محاسبه کنیم



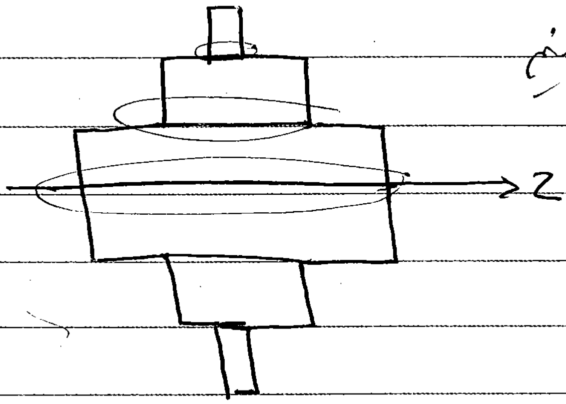
ما τ_{max} را می‌خواهیم و می‌دانیم به $\tau_{max} = \frac{V_{max} \cdot Q_{max}}{I \cdot t_{min}}$

باید مقطعی را در نظر بگیریم که در آن $\frac{Q}{t}$ max است ابتدا می‌دانیم ① در تار خنثی Q_{max} است اما t در تار خنثی min است پس باید در ① و ② $\frac{Q}{t}$ را محاسبه کنیم هر جا که $\frac{Q}{t}$ max شده

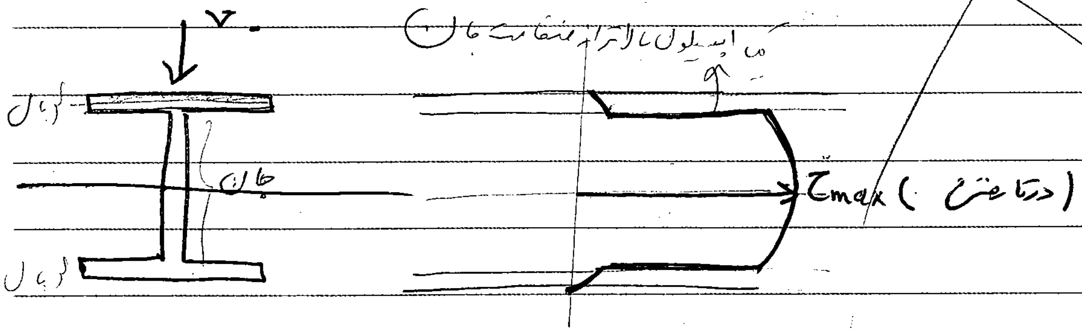
مقطع را در نظر بگیریم

مثال: بین این ۳ تا نقطه باید حساب کنیم

که کجا $\frac{Q}{t}$ max می‌شود.



~~مثال: تنش برشی را رسم کنید.~~



اکثر مقطع خمشی عمده نیرو به نسبت I ما است

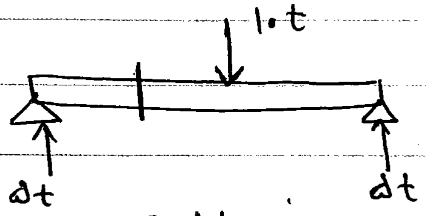
یعنی برشی را به جان می‌دهیم و خمش را به بال می‌دهیم.

STAEDTLER

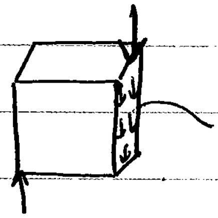
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

چه دادهای



$V = 5t$ داخلی



τ_{xy} = تقریبی

$\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$ ← تنش در صفحه قائم (تقریبی)

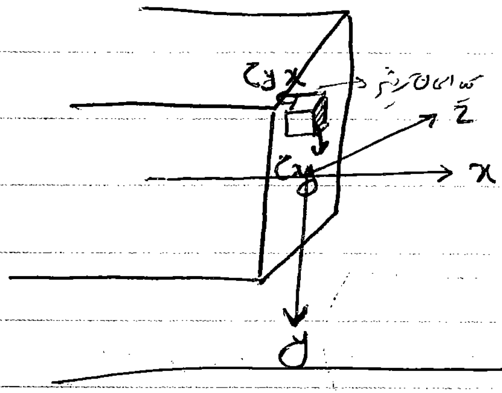
5t خارجی

$\tau = \frac{V \times Q}{It}$ ← تنش در صفحه افق (دقیق)

τ_{yx} = دقیق

هم داریم: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

در صفحه x در جهت y

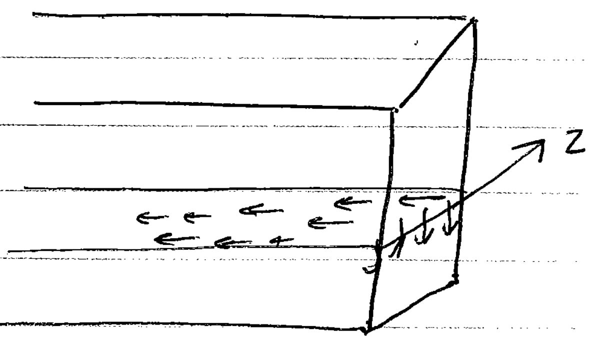


یادآوری: بیشترین تنش برشی در تار خنثی

بیشترین تنش خمشی در دورترین نقطه از تار خنثی

$Q = 0$

بنابراین در بالاترین و پایین ترین نقطه مقطع تنش برشی صفر است و در تار خنثی تنش برشی max است



STAEDTLER

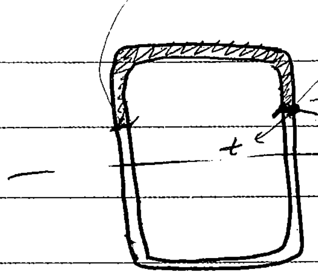
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مقطع توخالی ؟

برای بدست آوردن

بدون تنش درای نقطه برابر است بس Q را نشو سطح هاشور خورده

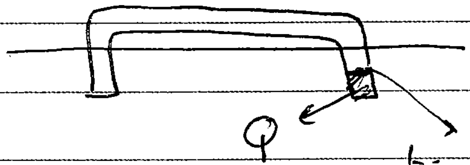


$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

سطح خارجی - سطح داخلی

تنش درای نقطه را می‌خواهیم

پس درای نقطه برش می‌زنیم



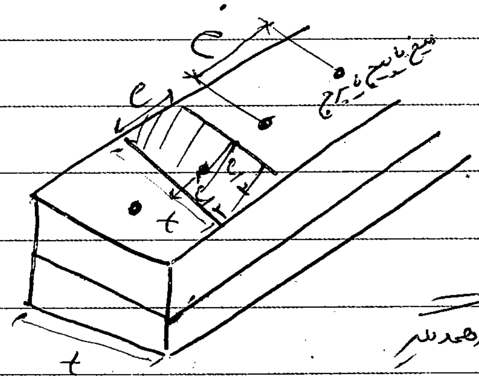
ایرادش

نقاطی که به یک فاصله هستند V هم تنشی هستند

اما نقاطی که قرینه هستند تنش صفر می‌شود.

تنش درای نقطه

دو نقطه را روی هم می‌گذاریم و تشریح می‌سازیم.



فرمول

فاصله ۲ پیچ یا پرچ یا میخ متوالی از همدیگر

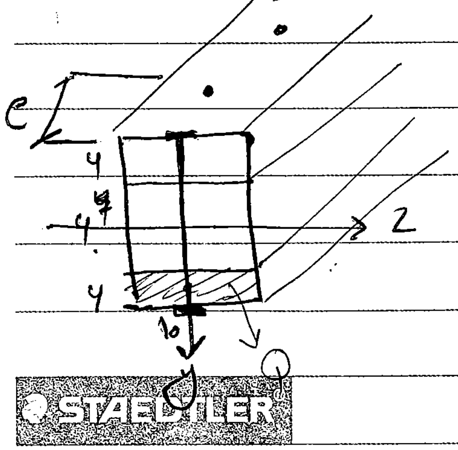
نیروی برشی در هر میخ یا پیچ یا پرچ

$$F = \tau \times A = \frac{VQ}{It} \cdot t \cdot e = \frac{VQ}{I} \cdot e \leq F_{\text{مجاز}}$$

تنش برشی در جیب — مقطع یا جیب معادل — مساحت جیب

هر میخ یا پیچ یا پرچ

در واقع شکل جیب است ولی به جای جیب میخ آمده.

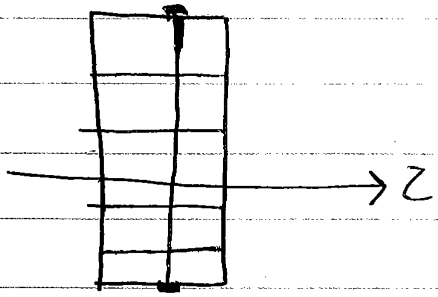


$$F_{4+4+4} = \frac{V\,[40 \times 6]}{\frac{10(18)^3}{12}} \cdot e \leq F$$

مجاز هر میخ

SUBJECT :

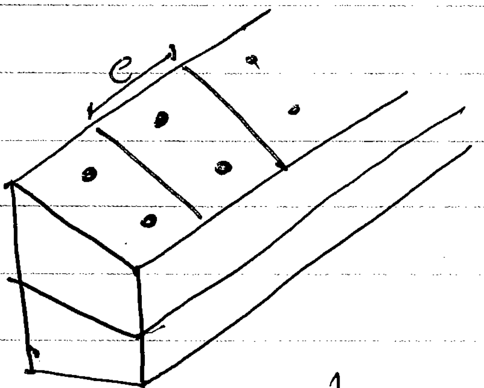
Year (   ) Month (   ) Date (   )



$$\begin{cases} F = qe \\ \underset{\text{جریان برش}}{q} = \dfrac{VQ}{I} \end{cases}$$

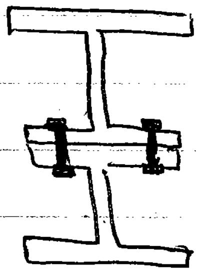
پس در این جا هم وقتی جای میخ ها عوض شود برای کنترل هم باید مال میخ و هم مال مقطع ها را کنترل کرد

در تیر برش



$$\boxed{2F_1 = \tau \times A}$$

امتحانی



$$\boxed{2F_1 = \tau \times A}$$

خیلی مهم ***

(در صورتی دست بالا (مقدار پیچ به سمت بالا و فاصله بین پیچ ها به سمت پایین) و تعداد پیچ به سمت بالا

(پس پارامتر باشد که e باید به سمت پایین رند شود)

جریان برش :

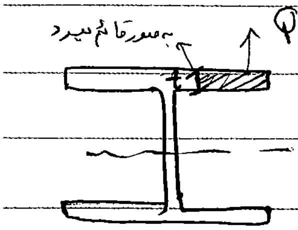
در مورد جریان برش تنش به این شکل محاسبه می شود :

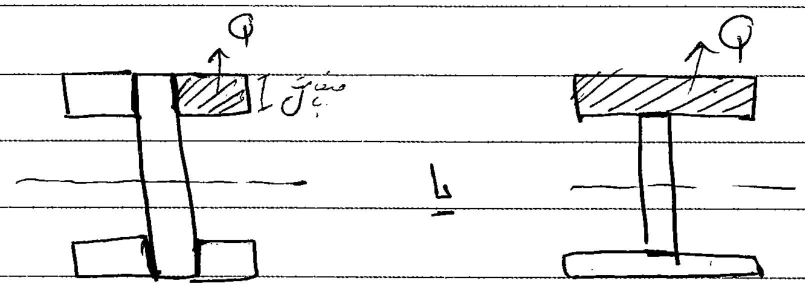
ص(الف)

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

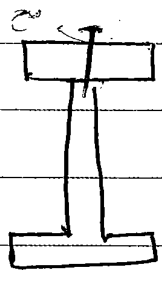


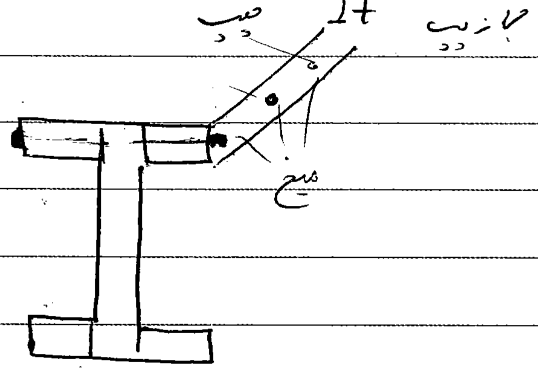


تیرها چسب هستند

$$\tau = \frac{VQ}{It} < \tau_{\text{مجاز چسب}}$$

$$\tau_{\text{چسب}} = \frac{VQ}{It} < \tau_{\text{مجاز چسب}}$$





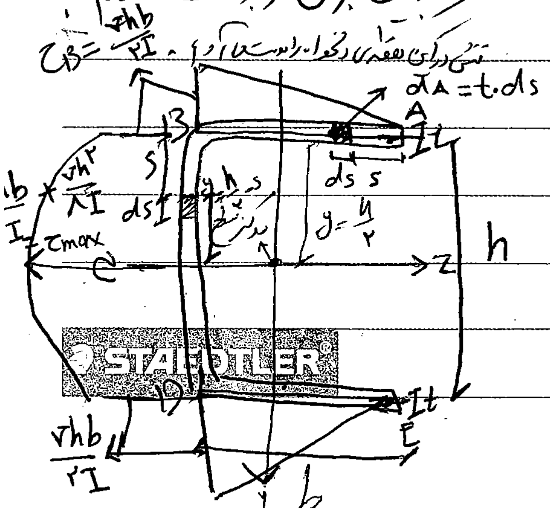
$$F = \frac{VQ}{I} \cdot e < F_{\text{مجاز}}$$

$$F = \frac{VQ}{I} \cdot e < F_{\text{مجاز هر میخ}}$$

اگر بخواهیم تنش را در تیر I شکل یا مقاطع دیگر به عبارت دیگر جریان برشی را بدست آوریم

(توزیع تنش برشی در مقاطع جدار نازک) **

مثال: تیر ناودانی



حل در صفحه بعد

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$\tau_{AB}\ (\text{تنش در داخل بال}) = \frac{V}{It}\overbrace{\int y\,dA}^{Q} = \frac{V}{I\cancel{t}}\int \underbrace{\frac{h}{2}}_{y}\cdot \underbrace{\cancel{t}\,ds}_{dA} = \frac{Vh}{2I}s$$

$$\text{جان}\ \tau_{BD} = \frac{V\overset{\text{بال}}{Q'}}{It} + \frac{V}{It}\int y\,dA = \tau_B + \frac{V}{I\cancel{t}}\int\left(\frac{h}{2}-s\right)\cdot\cancel{t}\,ds$$

$$\text{جان}\ \tau_{BD} = \frac{Vhb}{2I} + \frac{Vh}{2I}s - \frac{Vh}{2I}\times\frac{s^2}{2}$$

درجه ۲ است (s^2) سهمی است

$$\text{جان}\ \tau_{max} = \tau_C = \frac{Vhb}{2I} + \frac{Vh^2}{8I}$$

مثال عددی:

برای شکل صفحه قبل

$$I = \overset{\text{جان}}{\frac{th^3}{12}} + 2\left[\underbrace{\overset{\text{بال}}{\frac{bt^3}{12}}}_{0} + \underbrace{(bt)\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^2}_{Ad^2 = \text{اشتاینر}}\right] = \frac{th^2}{12}(h+6b)$$

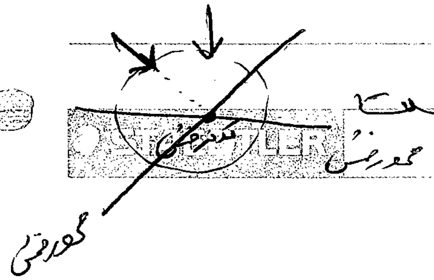
$$\text{if}\begin{cases} V = 8000\,N \\ b = 100\,mm \\ h = 150\,mm \\ t = 3\,mm \end{cases}\qquad \begin{aligned}\tau_B &= 14.22\,MPa \\ \tau_{max} &= 19.54\,MPa\end{aligned}$$

نکته: ما جریان برش را برای مرکز برشی بدست می‌آوریم

ما دو تا مرکز داریم: ۱- مرکز سطح (مرکز خمشی): اگر نیرو از مرکز سطح عبور نکند تولید خمش می‌کند

۲- مرکز برش (مرکز پیچشی)

نکته: محل برخورد دو محور خنثی (مرکز خمشی = مرکز سطح) هم هست



مرکز سطح نقطه‌ای است که اگر می‌خواهیم خمش نداشته باشیم باید نیرو از آن عبور کند
(خمش ناشی از نیروهای محوری و پیچش ناشی از نیروی برشی است) **

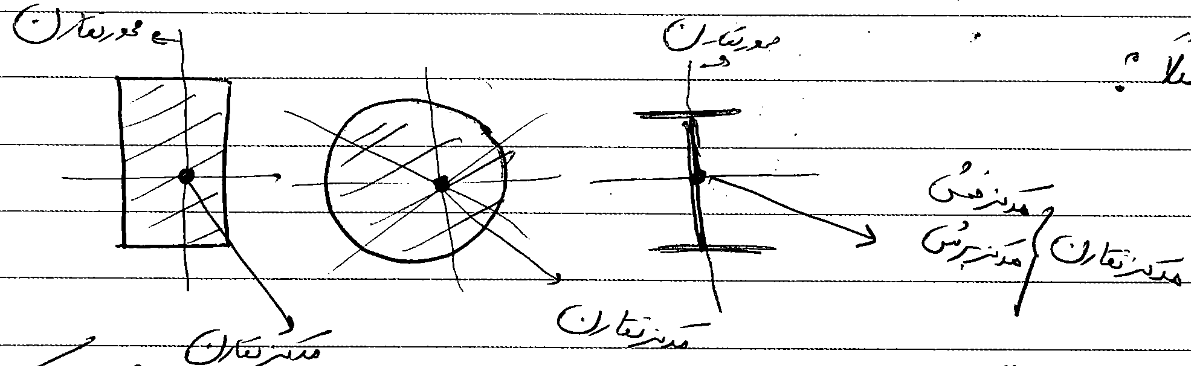
اگر بخواهیم پیچش ایجاد نشود باید نیروی برشی از مرکز برشی بگذرد.

مرکز برشی: نقطه‌ای است که اگر نیروی برشی از آن بگذرد پیچش به وجود نیاید

مرکز سطح: " " " " نیروی محوری " " خمش " "

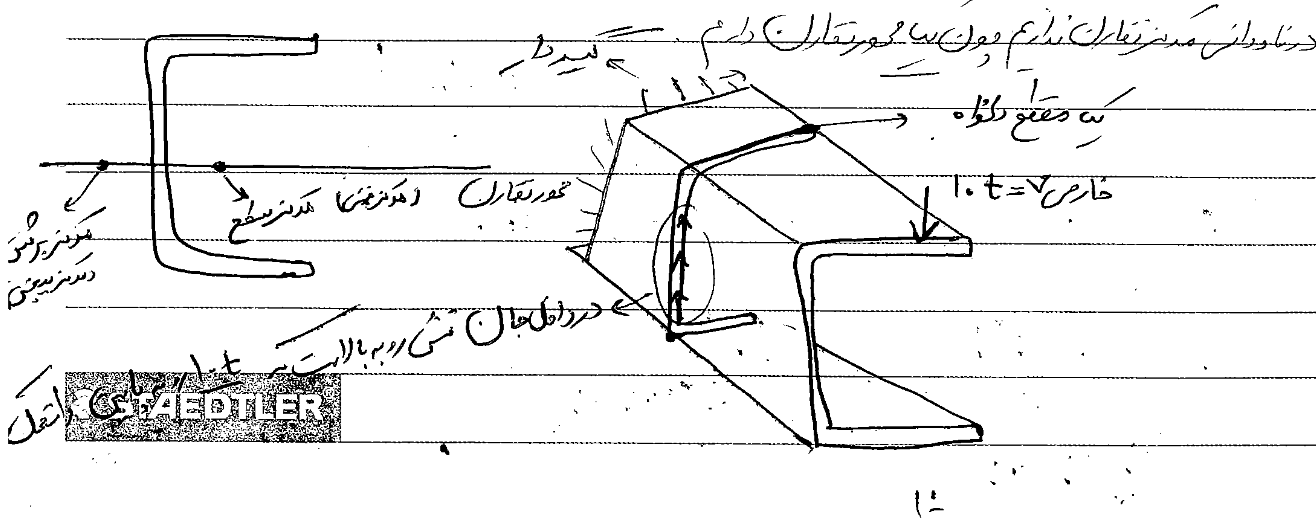
* اگر یک شکل مرکز تقارن داشته باشد آن گاه مرکز سطح و مرکز برشی آن هم منطبق هستند

مثلاً:



* نیرو لزوماً قائم نیست هم می‌تواند افقی باشد و هم مورب که از مرکز برشی عبور کند *

حال اگر شکلی دارای مرکز تقارن نشود باید مرکز برشی آن را بدست آوریم: (ناودانی)

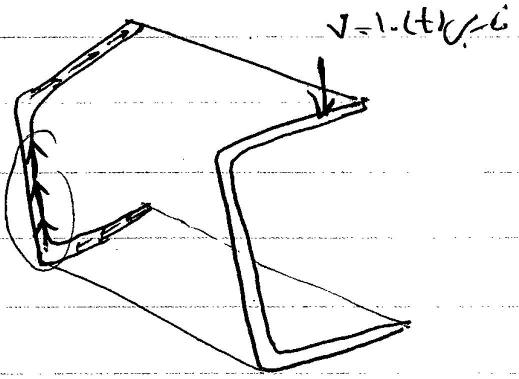


۱۰ مقطع

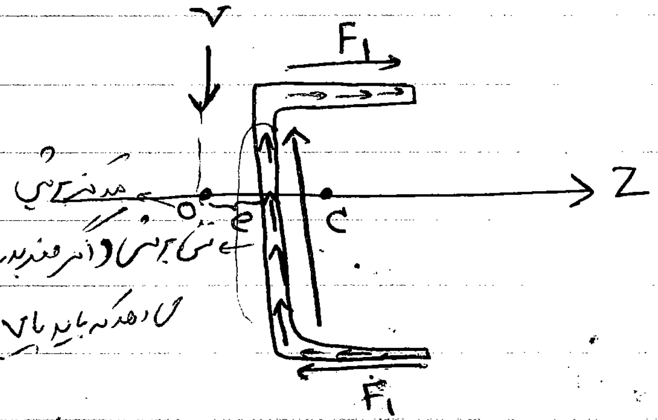
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

دیاگرام آزاد :



نمایی از روبه رو :



دو تا F_1 کوپل ایجاد می کنند که باید V را خنثی کنند یعنی باید متقابل در مساحت ضرب شود

e = فاصله ی مرکز برشی تا مرکز جان

مرکز برشی همیشه روی محور تقارن است

F_1 = مساحت بال × تنش در بال   در صورتی که تنش یکنواخت باشد

بال τ_{Ave} تنش متوسط را انتخاب کنیم

$$\overbrace{F_1 \cdot h}^{\text{کوپل}} = V \cdot e \Longrightarrow \boxed{e = \frac{F_1 \cdot h}{V}}$$

$$F_1 = \tau^{\text{بال}}_{Ave} \times A_{\text{بال}} = \frac{Vhb}{4I} \times bt = \frac{Vthb^2}{4I}$$

(با توجه به شکل ۴ صفحه ی ... صفحه ی الف)

$$e = \frac{Vth^2b^2}{V(4I)} = \frac{\cancel{3}t h^2 b^2}{\cancel{4}\,\frac{th^2(6b+h)}{3}} \Longrightarrow \boxed{e = \frac{3b^2}{h+6b} = \frac{b}{2+\frac{h}{3b}}}$$

$$I = \frac{th^2}{12}(h+6b)$$

SUBJECT :

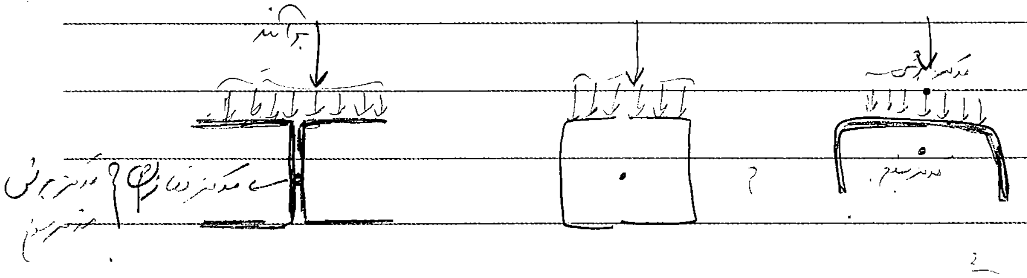
Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$\text{if}\begin{cases} V = 8000\,N \\ b = 100\,mm \\ h = 150\,mm \\ t = 3\,mm \end{cases} \Rightarrow \boxed{e = 40\,mm}$$

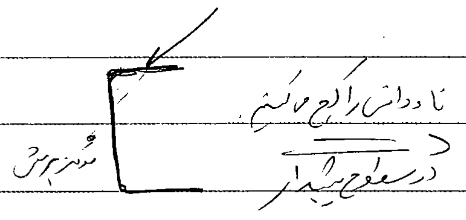
پس نتیجه: اگر یک مقطع ناودانی داشتیم باید نیرویی که به آن وارد می‌کنیم در 40mm به سمت بیرون ناودانی باشد.

سوال: در ناودانی چه جوری نیرو وارد شود؟ چون این جوری که در شکل نشان داده شده نیرو چون بیرون ناودانی است ممکن است.

راه حل: ناودانی را دوبل می‌کنیم (در صورتی که بخواهیم به عنوان تیر استفاده کنیم که نپیچد) باید به شکل زیر در بیاوریم.

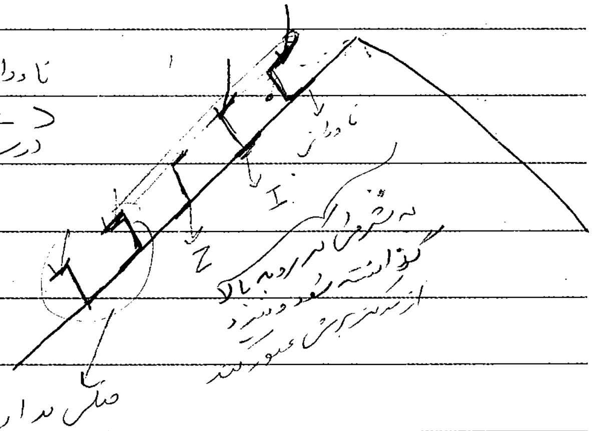


همین حالت:



ناودانی را کج می‌کنیم => در سطوح شیبدار

نیرو به صورت مورب وارد شود



مشکل دارد این مدل (چون رو به پایین گذاشته شده دچار پیچش می‌شود)

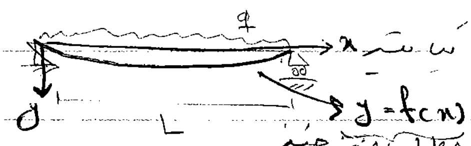
مثال ۵.۶ و ۶.۶ ص ۲۴۰ ص ۲۴۱

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

فصل ۶: تغییر شکل تیرها

اینجا بررسی تنش و مقاومت نیست
در این

می‌خواهیم بررسی کنیم مثلاً یک تیر  چه مقداری تغییر شکل می‌دهد (هر تیر با بار هر شرایط)

تکیه‌گاه‌ها و بارگذاری چه جوری تغییر شکل می‌دهد) (یعنی معادله‌ی $y = f(x)$ را می‌خواهیم بدست آوریم) = هدف این فصل

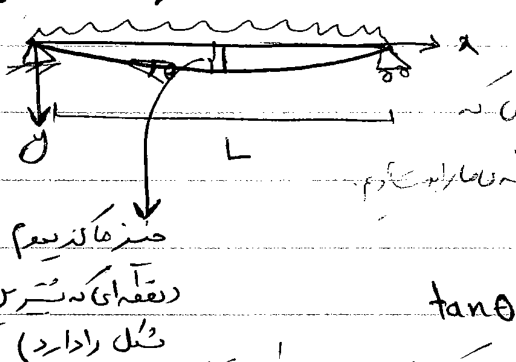
درجه ۳ یا ۴

که به $y = f(x)$ معادله‌ی منحنی الاستیک تیر گفته می‌شود

حال چه اطلاعاتی را می‌خواهیم؟

وقتی معادله‌ی منحنی را پیدا کردیم y هر نقطه را به راحتی می‌توان بدست آورد.

(شکل الف)



برای بدست آوردن خیز ماکزیمم از منحنی $y = f(x)$ مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم و xای که بدست می‌آید را در معادله‌ی y قرار می‌دهیم تا نقطه را بدست آوریم

* بیشترین شیب در تکیه‌گاه‌هاست *

$\tan\theta = y' =$ شیب

از نقاط دیگری که برایمان مهم است شیب است ابتدا و انتها که باید $y' = 0$ قرار دهیم

هدف دیگر از این بحث تحلیل تیرهای نامعین است (مثلاً تیری که ۳ تا تکیه‌گاه دارد باید معادله‌ی سازگاری تغییر شکل‌ها را بنویسیم)

تغییر شکل تیرها:

(در صفحه بعد)

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

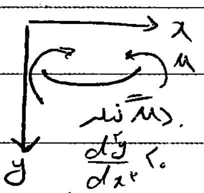
در فصل خمش ؛ فرمول شماره ۱ : $\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$

چون θ زاویه است در تیرها کوچک است : $\theta = \tan\theta = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y' = \text{شیب}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \boxed{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

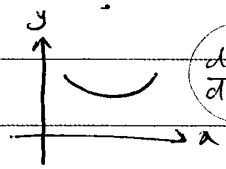
در فصل خمش فرمول شماره ۵ : $\frac{1}{\rho} = \boxed{\frac{M}{EI}}$

$$\frac{M}{EI} = \overset{\text{منفی}}{-}\frac{d^2y}{dx^2}$$



$M>0$ ولی $\frac{d^2y}{dx^2}<0$

هر چند تقعر به سمت بالاست اما چون جهت محور y به سمت پایین است پس منفی می‌شود



$\frac{d^2y}{dx^2}>0$

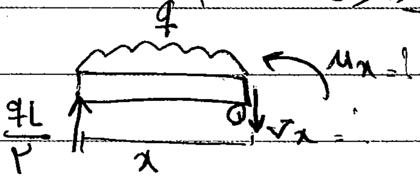
معادله دیفرانسیل منحنی الاستیک

$EIy'' = -M_x$ ⟶ دوبار انتگرال می‌گیریم تا y بدست آید. ادامه در پایین صفحه

y'' بر حسب x است

M را هم باید مقطع بزنیم و بر حسب x بدست آوریم.

با توجه به شکل الف صفحه قبل یک مقطع به فاصله x می‌زنیم (پیدا کردن Mx = هدف)



$\sum M_O = 0$:

$$M_x + qx\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{qL}{2}x$$

معادله Mx بدست آمد

نکته: همیشه با هر بارگذاری و هر نوع تکیه‌گاهی باید دوبار انتگرال بگیریم تا y را بدست آوریم.

و ثابت‌ها را c1 و c2 و ... را هم باید با بارگذاری نقاط مرزی: $y=0 \leftarrow x=L$ و $y=0 \leftarrow x=0$

ادامه حل معادله :

$$EIy'' = \frac{qx^2}{2} - \frac{qL}{2}x \xrightarrow{\text{انتگرال}} EIy' = \frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{4} + c_1 \xrightarrow{\text{انتگرال}}$$

$$EIy = \frac{qx^4}{24} - \frac{qLx^3}{12} + c_1x + c_2 \xrightarrow{\text{س}}$$

(در صفحه بعد)

شرایط مرزی $\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$

شرایط مرزی $\left.\begin{matrix} x=L \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 = \frac{qL^4}{24} - \frac{qL^4}{12} + c_1L \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{qL^3}{24}}$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\cancel{EIy' = \frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{4}}$$

پس: $y'' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^2}{2} - \frac{qL}{2}x\right]$

$$y' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{4} + \frac{qL^3}{24}\right]$$

$\cancel{y = f(x)}$

$$\boxed{y = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^4}{24} - \frac{qLx^3}{12} + \frac{qL^3x}{24}\right]}$$

حال اگر خیز ماکزیمم را خواستند [که در این مسئله بستر شکل الف ، به علت تقارن داریم خیز در وسط است]

برای بدست آوردن خیز $y'=0$ قرار دهیم

$$y' = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}$$

$x = \frac{L}{2}$ را در $y = f(x)$ قرار دهیم:

$$y_{max} = \frac{5\overset{\text{شدت بار}}{q}\,\underset{\text{طول بستر}}{L^4}}{384EI}$$

اگر شیب بستر در تکیه‌گاه را خواستند (شیب حداکثر = شیب تکیه‌گاه)

شیب حداکثر یعنی $y' = max$ شود پس باید $y'' = 0$ قرار دهیم

$$y'' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = L \end{cases} \xrightarrow{x=0} y'_{max} = \underbrace{\theta_{max}}_{\theta = \tan\theta} = \frac{qL^3}{24EI}$$

x ها را در y' قرار دهیم

$$x = L \Rightarrow y'_{min} = \theta_{min} = -\frac{qL^3}{24EI}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اگر جواب ندهد تیر می‌برد

بارها در سه مثل ۵ (قانچه) کنترل برش = کنترل تنش برشی ✓ $\tau_{max} = \frac{V_{max} \cdot Q}{It} \leq \tau_{مجاز}$ مثل ۵

اگر جواب ندهد با برش می‌شکند

در کنترل تیر برشی و خمشی = کنترل تنش قائم ✓ $\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot c}{I} \leq \sigma_{مجاز}$ مثل ۴

باید کنترل شود و خمشی

کنترل خیز: خیز مجاز > خیز واقعی ⟸ $\frac{5qL^4}{384EI}$ > خیز مجاز ✓

خیز مجاز را به صورت $\frac{L}{عدد}$ می‌دهند

اگر جواب ندهد به خاطر این که خیز زیاد شود، مصالح دیگر ساختمان هم از تیر ترک می‌خورند

دلیل: تیرهای ساختمان‌های صنعتی (سازه‌های ارتجاعی)

اگر در زیر سقف کاشی باشد و خیز داشته باشد از نگاه آرشیتکتی مشکل دارد.

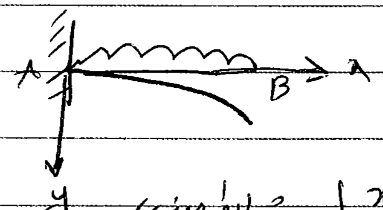
هر وقت خیز وجود داشت دلیل بر این است که تنش وجود دارد.

در تیرهای ساده با بارگذاری برشی در تکیه‌گاه است (τ_{max} بحرانی است)

در وسط σ_{max} بحرانی است

خیز در وسط بحرانی است (اگر بار یکنواخت و متقارن باشد)

نکته: اگر شرایط تکیه‌گاهی به صورت زیر باشد



خیز این تیر با شرایط این است که معادله M را بنویسیم

شرایط مرزی $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=0 \\ y'=0 \end{cases}$ ⟹ $C_1 = ?\ \ C_2 = ?$

شیب صفر است در تکیه‌گاه

هر تکیه‌گاه مفصلی یک شرط مرزی دارد که $y=0$ است.

در تکیه‌گاه گیردار دو شرط مرزی دارد که $y=0$ و $y'=0$ است

تکیه‌گاه آزاد شرط مرزی ندارد.

STAEDTLER

(تا این جا سؤال یک و مخصوص است) از اینجا به بعد ...

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

از این جا به بعد کاربردی است. (برای حل مسئله های این مبحث جدول به ما می دهند)

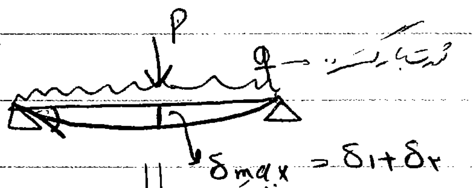
تغییر شکل

خیلی مهم

* تحلیل تیرهای نامعین : (جدول ص ۶۴۸ جانسون بوییت د)

مقدمه : مثال برای کاربرد جدول

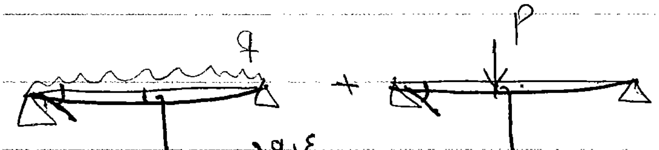
مثال ۱ :



$\delta_{max} = \delta_1 + \delta_2$

خیز ماکزیمم و شیب ماکزیمم؟

کاربرد اصل سوپرپوزیشن (جمع آثار قوا)

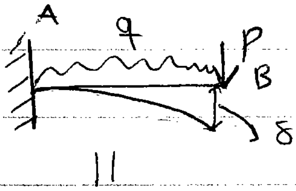


$\delta_1 = \frac{5qL^4}{384EI}$ $\delta_2 = \frac{PL^3}{48EI}$

از جدول به دست می آید.   از جدول به دست می آید.

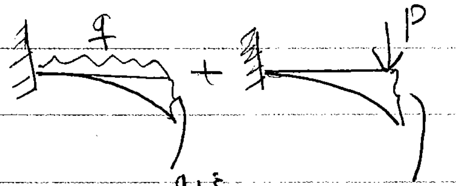
تمام مشخصات تیر مجموع این دو تیر می شود. حتی تغییر شکل تیر الاستیک ($y=f(x)$) هم مجموع تغییر شکل این دو تیر است یعنی دو معادله را با هم جمع می کنیم. (خیز ماکزیمم (δ_{max}) هم از جمع δ_1 و δ_2 به دست می آید.

مثال ۲ : تیر کنسول



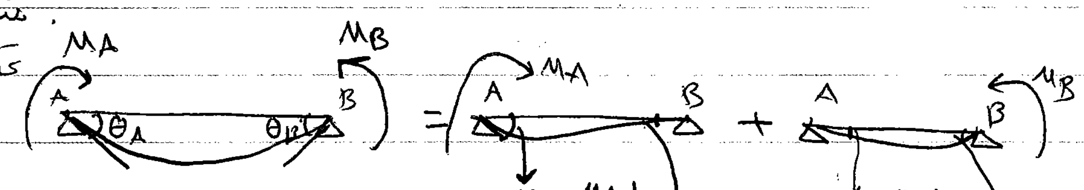
$\delta_{max} = \delta_B = \delta_1 + \delta_2$

اگر بار متمرکز از پایین به تیر وارد شود، و یا گسترده رو به بالا باشد، آن گاه $\delta_{max} = \delta_1 - \delta_2$ می شود.



$\delta_1 = \frac{qL^4}{8EI}$ $\delta_2 = \frac{PL^3}{3EI}$

مثال ۳ : گشتاور در دو طرف M_A و M_B گرفته



زاویه $A = \frac{M_A \cdot L}{3EI}$ زاویه $A = \frac{M_B \cdot L}{6EI}$

زاویه $B = \frac{M_A \cdot L}{6EI}$ (2×3)   زاویه $B = \frac{M_B \cdot L}{3EA}$

نصف زاویه A است

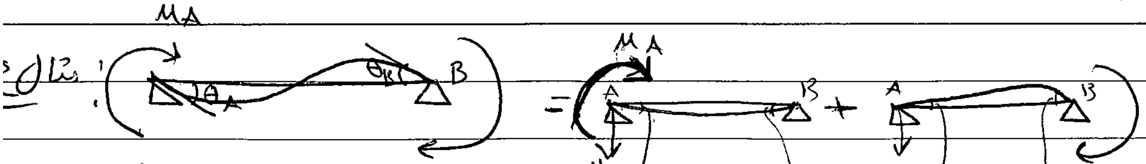
پس $\theta_A = \frac{M_A \cdot L}{3EI} + \frac{M_B \cdot L}{6EI}$

$\theta_B = \frac{M_A \cdot L}{6EI} + \frac{M_B \cdot L}{3EA}$

No...............

(دوم)

مثال:



$$\theta_A = \frac{M_A \cdot L}{3EI} - \frac{M_B \cdot L}{6EI}$$

$$\theta_B = \frac{-M_A \cdot L}{6EI} + \frac{ML}{3EI}$$

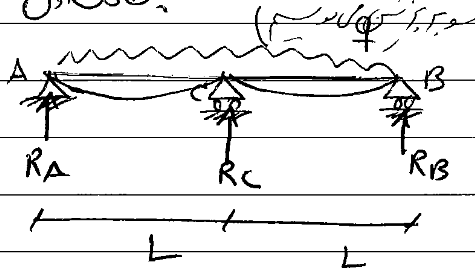
زاویه A $= \frac{+M_A \cdot L}{3EI}$ ، زاویه A $= \frac{-M_B \cdot L}{6EI}$

زاویه B $= \frac{-M_A \cdot L}{6EI}$ ، زاویه B : $\frac{ML}{3EI}$

در این حالت هم داریم

حالت دوم

تیر نامعین ۱: (عامل عدم زاویه به عنوان بار حذف می‌کنیم و سوپرپوزیشن می‌دهیم)



دو معادله تعادل داریم $\Sigma F_y = 0$ است $\Sigma M = 0$

و برای ΣM هم حرکت به دلیل تعادل در درجه ... داریم

با توجه به شکل آخر صفحه

معادله سازگاری تغییر: $\delta_C = (\delta_C)_1 + (\delta_C)_2 = 0 \Rightarrow \frac{5q(2L)^4}{384EI} + \left(-\frac{R_C(2L)^3}{48EI}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{R_C = \frac{5}{4}qL}$$

در این فصل اول به سراغ معادلات تعادل نمی‌رویم چون ما اینجا سازگاری داریم
سه معادله و سه مجهول است پس اول معادلات سازگاری را حل می‌کنیم و بعد به سراغ معادلات تعادل می‌رویم

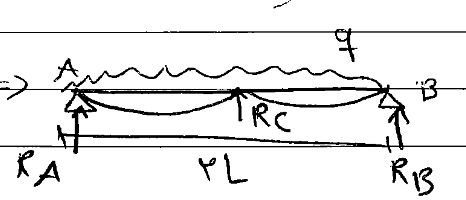
معادلات تعادل: $\begin{cases} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{R_A + R_B + R_C = 2qL} \\ \Sigma M_C = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = R_B} = \frac{3}{8}qL \end{cases}$

۲ معادله و ۳ مجهول
پس نامعین است

وقتی R_C برابر $\frac{5}{4}qL$ است پس $\frac{3}{4}$ دیگر می‌ماند پس R_A و R_B را داریم
($2qL - \frac{5}{4}qL = \frac{3}{4}qL$) به دو تقسیم $\frac{3}{8}qL$

در این شکل اگر ۲ تا تکیه‌گاه داشت می‌توانستیم حل کنیم (استاتیکی)

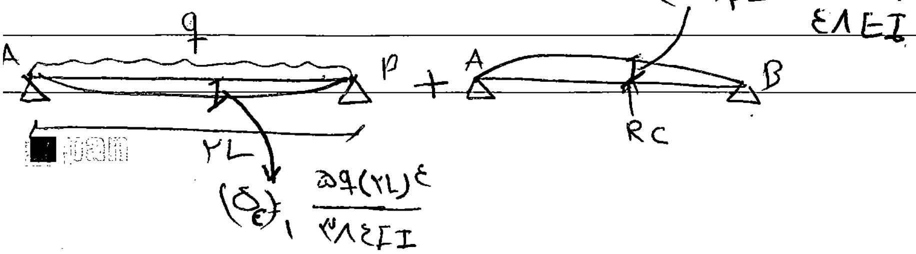
اگر تکیه‌گاه نبود $\Rightarrow$



ولی برای اینکه این شکل با شکل اصلی برابر باشد باید R_C را به جای اینکه به عنوان تکیه‌گاه در نظر بگیریم به عنوان عامل در نظر بگیریم

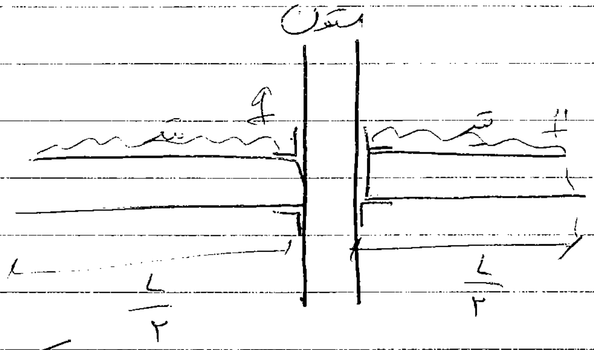
حال این شکل را سوپرپوزیشن می‌کنیم

||



سوپرپوزیشن = بار ... + بار گسترده

نتیجه: عکس العمل تکیه‌گاه وسط دو برابر تکیه‌گاه‌های کناری نشد، بلکه از آن‌ها بیشتر شده است



در این حالت تیر قطع شده،

که ستون qL و تیرهای کناری

$\underbrace{\frac{qL}{2}}$ بار می‌گیرد (نصف qL)

اما در شکل صفحه‌ی قبل تیر قطع نشده و به صورت سراسری است که R_C که

همان نقش ستون را بازی می‌کند $\frac{5}{4}\,qL$ بار می‌گیرد و دو برابر کناری‌ها نیست

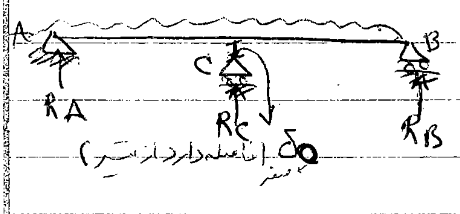
در این جا یک مسئله مطرح می‌شود:

عکس العمل‌ها = ?

حالت دوم:

معادلات تعادل آن مثل حالت اول است

اما: δ_0 صفر نیست

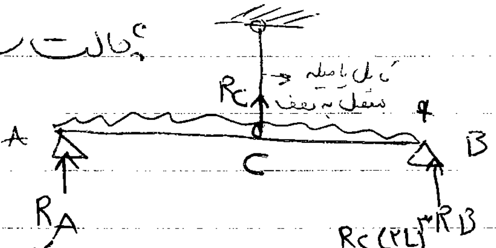


معادله‌ی سازگاری:

$$\delta_C = \delta_1 + \delta_2 = \delta_0 \Longrightarrow \boxed{R_C = \text{محاسبه می‌شود مشابه حالت اول}}$$

حالت سوم:

کابل فقط کشیده می‌شود.



سازگاری:

$$\delta_C = \underbrace{\delta_1}_{\frac{5q(2L)^4}{384EI}\ \text{بار q}} + \underbrace{\delta_2}_{\frac{R_C(2L)^3}{48EI}} = \underbrace{\frac{R_C \cdot L}{EA}}_{\frac{PL}{EA}\ \text{کابل}} = \frac{R_C}{\frac{EA}{L}}$$

$\frac{EA}{L}$ همان k در فنر است

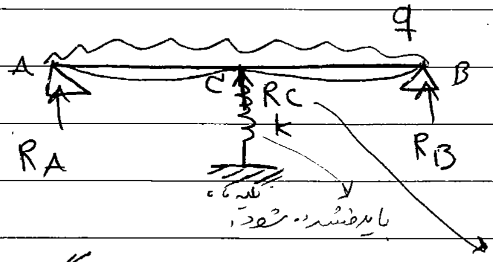
No...............

دراین با معادله سازگاری یا فنرات باشد

R باعث فنر می‌شود. تکیه‌گاه باعث دوران و شیب می‌شود.

فنر به سقف ؛ حالت چهار

منتقل شود یا فنر به زمین وصل شود

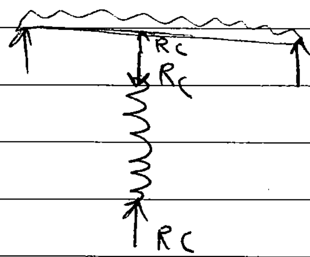


تغییر طول فنر

$F = k.\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{k}$

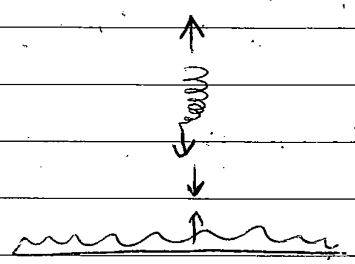
سازگاری:

$\delta_C = \delta_1 + \delta_2 = \frac{R_C}{k}$ → نیرویی که از فنر به تیر وارد می‌شود.

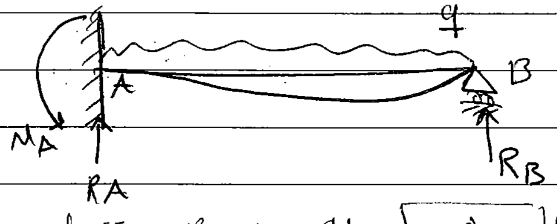


دیاگرام فنر:

اگر فنر بالا باشد.

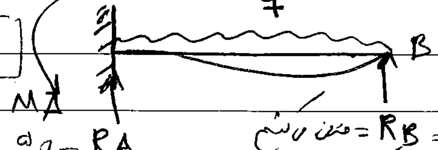


یا R_B اضافه است و یا M_A الزام است



حالت اول: R_B الزام است.

معادل هم هستند



تعداد معادله ۲

$\sum F_y = R_A + R_B = qL \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{5}{8}qL}$

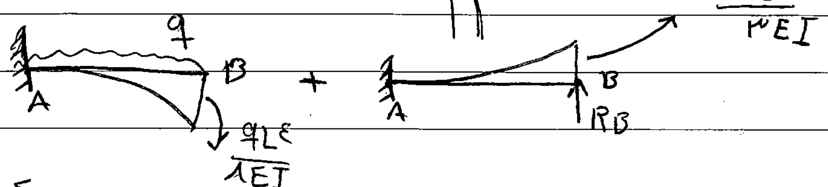
$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + R_B \cdot L = \frac{qL^2}{2}$

$\boxed{M_A = \frac{qL^2}{8}}$

$qL - \frac{3}{8}qL = \frac{5}{8}qL = R_A$

فرض می‌کنیم = $R_B = \frac{3}{8}qL$

R_B تکیه‌گاه نیست و بار متمرکز

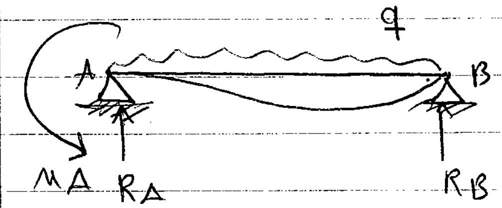


معادله سازگاری

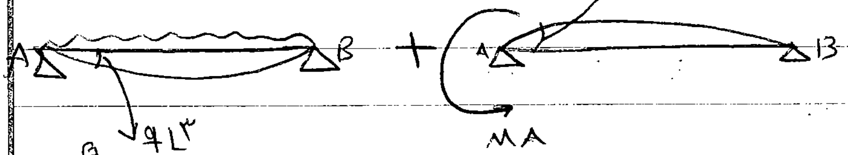
$; \delta_B = \delta_1 + \delta_2 = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = \frac{3}{8}qL}$

طبق شکل جابجایی B صفر است

حالت دوم = M_A مجهول است:



اگر ما M_A را صفر بدهیم یعنی تکیه‌گاه
گیردار هم مفصلی شود
(یعنی M_A را از حالت تکیه‌گاه (عکس‌العمل)
خارج می‌کنیم)



$$\theta_2 = \frac{-M_A \cdot L}{3EI}$$

$$\theta_1 = \frac{qL^3}{24EI}$$

معادله‌ی سازگاری:

چون یک عامل مجهول M_A است
پس یک معادله سازگاری
باید بنویسیم.

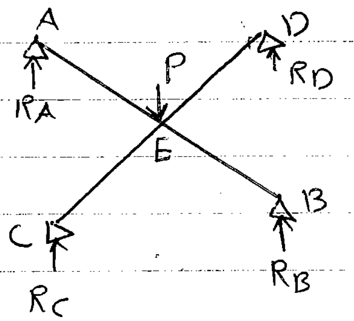
$$\theta_A = \theta_1 + \theta_2 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = \frac{qL^2}{8}}$$

معادلات تعادل:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \frac{qL^2}{8} + R_B \cdot L = \frac{qL^2}{2} \Rightarrow \boxed{R_B = \frac{3}{8}qL}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = qL \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{5}{8}qL}$$

چند مسأله:



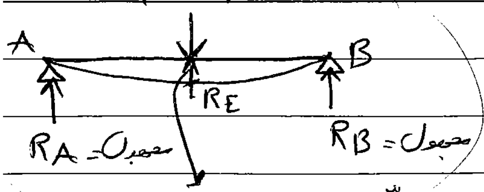
مثال ۱: (امتحانی)

(وسط تیر AB روی وسط تیر CD تکیه کرده)
تیر AB از روی تیر CD عبور کرده
و با آن تماس دارد
بار P مستقیم روی AB است
و CD به طور غیرمستقیم بار P را تحمل می‌کند
فرض کنیم مشخصات AB ، 1 باشد
و مشخصات CD ، 2 باشد
برای مشخص کردن تعداد معادلات تعادل تیرها را
از هم جدا کنیم (در صفحه بعد)

در اصل باید سوپرپوزیشن کنیم (اما در این حالت نشود)

No. $(P - R_E) \leftarrow E$

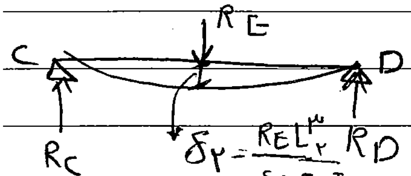
$P =$ معلوم



تیر پایین برای تیر بالایی به منزله تکیه‌گاه است

اما تیر بالایی به منزله‌ی فراگیرنده بار روی تیر پایین است

$$\delta_1 = \frac{(P - R_E)L_1^3}{48 E_1 I_1}$$



$$\delta_2 = \frac{R_E L_2^3}{48 E_2 I_2}$$

پس در کل ۵ تا مجهول داریم و برای هر تیر

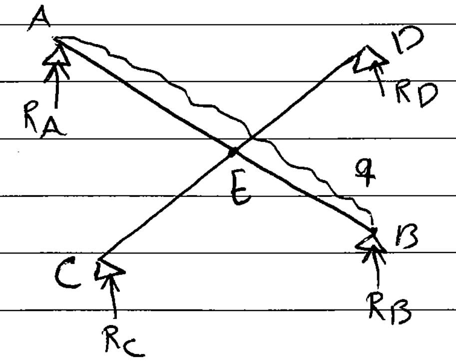
معادلات تعادل داریم: ۲ معادله — ۴ معادله، ۵ مجهول

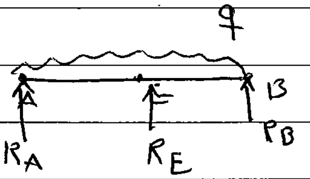
در نقطه E باهم برابرند $\Longleftarrow$ خیز CD = خیز AB

معادله سازگاری: $\delta_1 = \delta_2 \Longrightarrow R_E =$ بدست می‌آید

نکته: اگر یک تیر بدون بار به ما دادند باید وزن تیر را در آن درنظر بگیریم ... در حالت معادل ... آن را با بار متمرکز معادل نماییم

مثال ۱: با تقارن

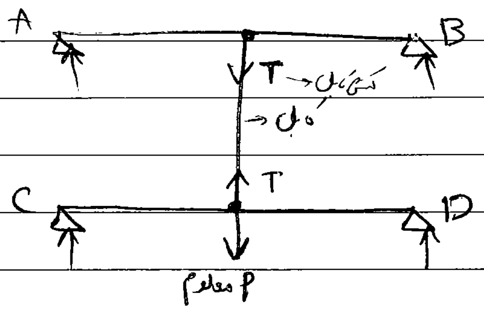




باید سوپرپوزیشن شود

اما باز هم $\delta_1 = \delta_2$ برقرار است

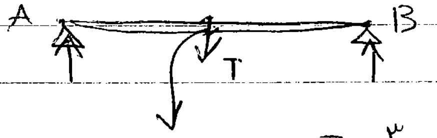
مثال ۲: نکته: نیروهایی که به کابل وارد می‌شود کشش است



و نیروی T را به تیر پایین وصل کردیم

۵ مجهول

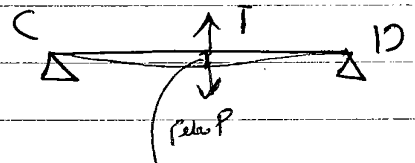
دیگه لازم آزاد شه



$$\delta_1 = \frac{TL_1^3}{48E_1I_1}$$

سازگاری : $\delta_2 - \delta_1 = \delta_{\text{کابل}}$

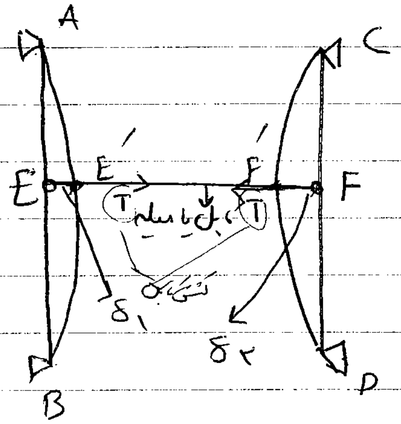
$$\frac{(P-T)L_2^3}{48E_2I_2} - \frac{TL_1^3}{48E_1I_1} = \frac{TL_3}{E_3A_3}$$



$$\delta_2 = \frac{(P-T)L_2^3}{48E_2I_2}$$

مثال ۳:

کابل را سرد کنیم تا دو طرف تنش را حساب کنید



با وجود طول لازم اند قدر

سازگاری : $|\delta_1| + |\delta_2| = |\delta_{\text{کابل}}|$

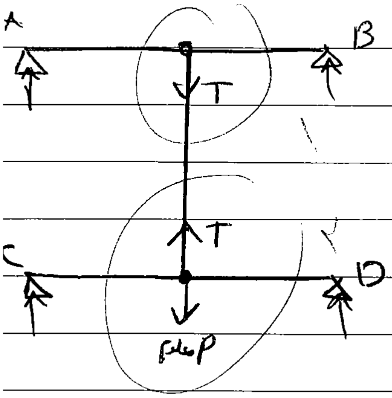
$$\frac{TL_1^3}{48E_1I_1} + \frac{TL_2^3}{48E_2I_2} = |\alpha \cdot L\Delta T| - \frac{TL}{EA} \Rightarrow \boxed{T = \text{بدست خواهد آمد}}$$

چون کابل را سرد کردیم

اگر کابل در سرد شدن یا اسپری آزاد بود فقط تغییر طول ناشی از دما بود اما چون در سرد شدن نشست به نقطه اتصال تنش می تغییر طول ناشی از آن را هم باید لحاظ کنیم

No...............

مثال:



$$\frac{TL_1^3}{48E_1I_1} + \frac{(T-P)L_2^3}{48E_2I_2} = |\alpha L \Delta T| - \frac{TL}{EA}$$

$$\overset{\text{فنر ۲}}{\delta_2} - \overset{\text{فنر ۱}}{\delta_1} = \delta_{\text{عضو}}$$

$$\frac{(P-T)L_2^3}{48E_2I_2} - \frac{TL_1^3}{48E_1I_1} = \underbrace{\frac{TL}{EA} + \alpha L \underbrace{\Delta T}_{-40}}_{\text{عضو}}$$

فنر ۲ > فنر ۱

No.