رئوس مطالب   مدار (۲)   استاد نادری

۱ـ عناصر تزویج (سلف های تزویج شده)   ۲ـ ترانس ها و قضیه تلگان

۳ـ تجزیه و تحلیل گره و مش   ۴ـ تجزیه و تحلیل حلقه و کات ست

۵ـ معادلات حالت   ۶ـ فرکانس های طبیعی

۷ـ پاسخ فرکانسی   ۸ـ قضایای شبکه

۹ـ توابع شبکه   ۱۰ـ دوقطبی ها

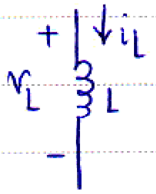
مراجع:
۱ـ نظریه اساسی مدارها و شبکه ها   ارنست کو
۲ـ تحلیل مهندسی مدار   ویلیام هیت

امتحان میان ترم   هفته اول اردیبهشت   ۳ـ۵ نمره   شنبه
۸۷/۲/۱۴

تکالیف و کار کلاسی   ۲ نمره

سلف‌های تزویج شده :

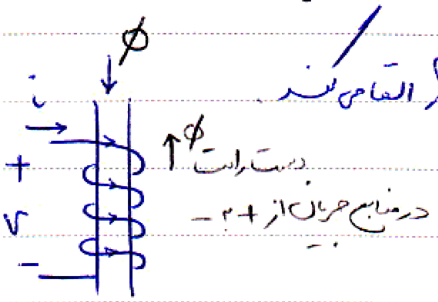
در مدارهای الکتریکی (۱) با سلف آشنا شدیم.



$$v_L = \frac{d(i_L)}{dt} = L\frac{di_L}{dt} + i_L\frac{dL}{dt}$$

در سلف‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان $\frac{dL}{dt} = 0$ $\Leftarrow$ $v_L = L\frac{di_L}{dt}$

در واقع اگر شار متغیر با زمان $\phi(t)$، سیم‌پیچی را در بر گیرد در آن ولتاژ القا می‌کند.

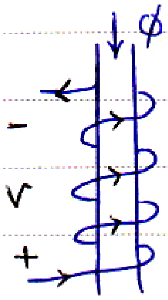


سیم‌پیچ شکل یک هسته با مقدار L ها را می‌دهد.

این سیم‌پیچ یک سلف L ها را تشکیل می‌دهد شار پیوندی سلف به صورت زیر تعریف می‌شود: $\lambda = Li$

و ولتاژ القایی دو سر سلف عبارت است از: $v = \frac{d\lambda}{dt}$ $\Leftarrow$ $v = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L\frac{di}{dt}$

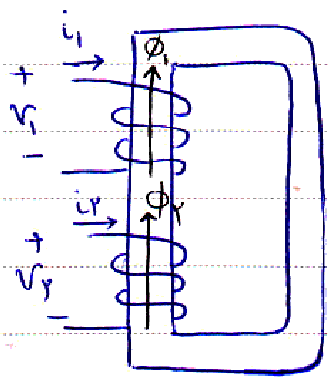
لذا ولتاژ القایی بر اساس قانون لنز به‌گونه‌ای است که جریان عبوری از سیم‌پیچ سبب تولید شاری شود که با شار به وجود آورنده‌اش مخالفت کند.



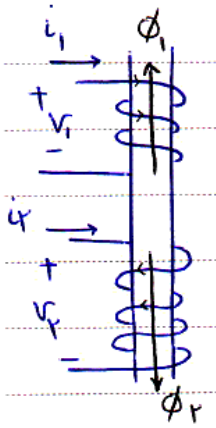
$\phi\uparrow$ شار

تذکر 3: با توجه به روابط گفته شده، ولتاژ القایی دو سر یک سلف (سیم‌پیچ) وابسته به شار عبوری از آن است.

حال دو سیم‌پیچ زیر را در نظر بگیرید که روی یک هسته بسته شده‌اند.



کل شار عبوری از هر سیم پیچ (شار مشترک) : $\phi = \phi_1 + \phi_2$



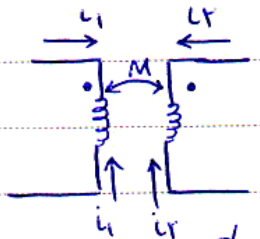
جهت مثبت به سمت بالا $\phi = \phi_1 - \phi_2$ شار مشترک

و می دانیم که ولتاژ دو سر هر سلف به شار عبوری از آن ها مربوط است. در مثال های بالا شار عبوری از هر سیم پیچ به سیم پیچ دیگر نیز وابسته است. به چنین حالتی که شار عبوری از سیم پیچ ها به یکدیگر وابسته باشد سلف ها را تزویج شده می گوییم. تزویج بین سلف ها می تواند به صورت مثبت یا منفی باشد.

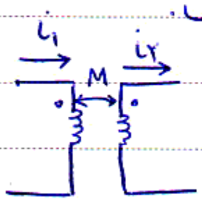
وقتی شار تولیدی یکی موافق با شار تولیدی دیگری باشد تزویج اثر مثبت و در غیر این صورت اثر منفی دارد.

قرارداد در تحلیل مدار :

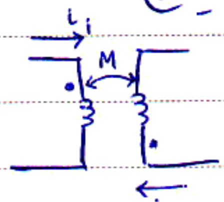
سلف های تزویج شده را با سرهای نقطه دار نشان می دهیم. وقتی ورود یا خروج جریان به سرهای نقطه دار هر دو سلف یکسان باشد تزویج مثبت و در غیر این صورت تزویج منفی است.



$\phi = \phi_1 + \phi_2$



$\phi = \phi_1 - \phi_2$



$\phi = \phi_1 + \phi_2$

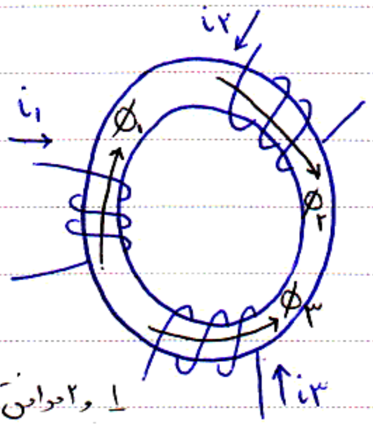
در دو سر سلف تزویج شده با ضریب تزویج M شارهای عبوری به صورت زیر بیان می شوند :

$$\begin{cases} \lambda_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \\ \lambda_2 = \pm M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

$$v = \frac{d\lambda}{dt}$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} \pm M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = \pm M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

مثال) سه سلف تزویج شده زیر را در نظر بگیرید.



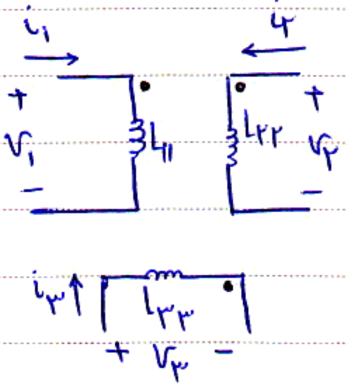
۱ و ۲ موافق هم و با ۳ مخالف.

ماتریس اندوکتانس به صورت زیر تعریف می شود:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix}$$

عناصر قطری، اندوکتانس های خودی و عناصر غیر قطری، اندوکتانس های متقابل است.

با تعیین سرهای نقطه دار و سیم پیچی این سه سلف روابط ولتاژ را می نویسیم:



$$v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} - L_{13} \frac{di_3}{dt}$$

$$v_2 = L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} - L_{23} \frac{di_3}{dt}$$

$$v_3 = -L_{13} \frac{di_1}{dt} - L_{23} \frac{di_2}{dt} + L_{33} \frac{di_3}{dt}$$ با ۱ و ۲ مخالف

سایر روابط در حوزه فازور به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$$

$$V_1 = (L_{11} j\omega) I_1 + (L_{12} j\omega) I_2 - (L_{13} j\omega) I_3$$

$\vdots$

موازی و جهت جریان خلاف $\quad \lambda_1 = -\lambda_2$

$\lambda_2 = -i_1 + 4i_2 - i_3$

$\lambda_3 = 2i_1 - i_2 + 3i_3$

$$3i_1 - i_2 + 2i_3 = i_1 - 4i_2 + i_3$$

$$\longrightarrow 2i_1 + 3i_2 = -i \quad ①$$

$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ یا $\lambda = -\lambda_2 + \lambda_3$ سری ها

λ شار کل سیم‌پیچ‌ها برآیند $= 5i_1 - 2i_2 + 5i \quad ②$

$i = i_1 - i_2 \quad ③ \longrightarrow i_1 = i + i_2$

جایگذاری در ①, ② :

$2i + 2i_2 + 3i_2 = -i \longrightarrow 3i = -5i_2$

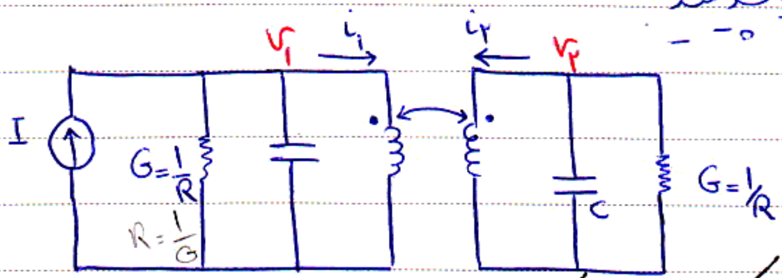
$i_2 = -\frac{3}{5}i$

$$\lambda = 5\underbrace{\left(i - \frac{3}{5}i\right)}_{i_1} - 2\times\left(-\frac{3}{5}i\right) + 5i$$

$$\lambda = 2i + \frac{6}{5}i + 5i$$

$$\lambda = \frac{41}{5}i \longrightarrow \boxed{L_{eq} = \frac{41}{5}}$$

مثال) V_1 و V_2 را با استفاده از آنالیز گره بدست آورید.



$$L = \begin{bmatrix} L & LK \\ LK & L \end{bmatrix}$$

در سلف‌های موازی راحت‌تر هم از ضریب القای معکوس استفاده کنیم.

$$\Gamma = \frac{L}{L^2(1-k^2)}\begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

حل در حوزه فازور:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{فازور}} j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{فازور}} \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}$$

خازن $C \longrightarrow \frac{1}{Cj\omega}$ $\qquad$ $\lambda \longrightarrow V$ در فازور

$$\Gamma = \frac{1}{j\omega L(1-k^2)} \begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

در دو سلف تزویج شده ؟

$$\begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}\,(j\omega) V_1 + \Gamma_{12}\,(j\omega) V_2 \\ i_2 = \Gamma_{12}\,(j\omega) V_1 + \Gamma_{22}\,(j\omega) V_2 \end{cases}$$

$$\text{kcl}: \quad I = V_1 G + V_1 c\omega j + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}(V_1 - kV_2)$$

$$\text{kcl}: \quad V_2 cj\omega + V_2 G + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}(V_2 - kV_1) = 0$$

$$\begin{cases} I_1 = V_1\left(G + cj\omega + \dfrac{1}{j\omega L(1-k^2)}\right) - \dfrac{k}{j\omega L(1-k^2)} V_2 \\ V_2\left(cj\omega + G + \dfrac{1}{j\omega L(1-k^2)}\right) = \dfrac{k}{j\omega L(1-k^2)} V_1 \end{cases}$$

دو معادله دو مجهول

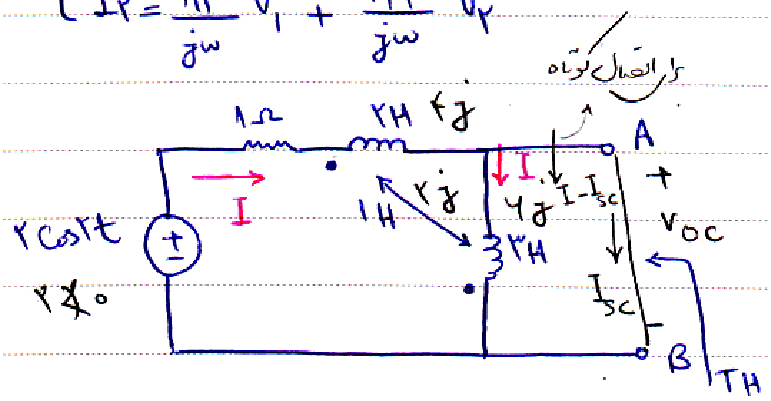
نکته) در حوزه فازور برای دو سلف تزویج شده :

$$\begin{cases} V_1 = L_{11} j\omega I_1 + L_{12} j\omega I_2 \\ V_2 = L_{12} j\omega I_1 + L_{22} j\omega I_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{\Gamma_{11}}{j\omega} V_1 + \dfrac{\Gamma_{12}}{j\omega} V_2 \\ I_2 = \dfrac{\Gamma_{12}}{j\omega} V_1 + \dfrac{\Gamma_{22}}{j\omega} V_2 \end{cases}$$

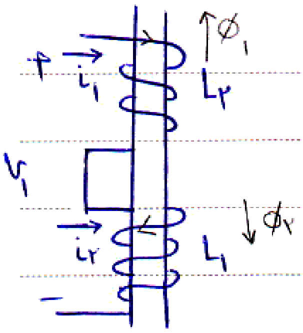
مثال) مدار معادل تونن را بیابید؟



$\omega = 2$

استفاده از معادله دیفرانسیل کامل ترین جواب را می دهد.

مثال) دو سلف تزویج شده سری

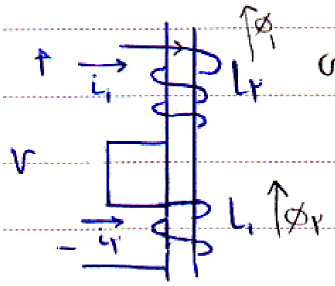


$$i_1 = i_2 = i$$

با توجه به جهت سیم پیچ ها:

$$V = V_1 + V_2$$

$$\begin{cases} V_1 = L_1 \dfrac{di}{dt} - M \dfrac{di}{dt} \\ V_2 = -M \dfrac{di}{dt} + L_2 \dfrac{di}{dt} \end{cases} \xrightarrow{\text{تزویج منفی}} V = \underbrace{(L_1 + L_2 - 2M)}_{L_{eq}} \frac{di}{dt}$$



همه روابط قبلی

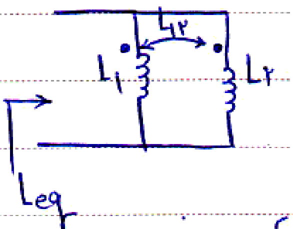
به راحتی می‌توان مسائل داده در سلف سری

$$V = \underbrace{(L_1 + L_2 + 2M)}_{L_{eq}} \frac{di}{dt}$$

تزویج مثبت

در دو سلف سری تزویج شده : $L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$

سلف معادل دو سلف تزویج شده موازی :



$$\lambda = Li$$

در دو سلف تزویج شده داریم :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

می‌توانیم جریان ها را برحسب شارها بنویسیم

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}}_{\Gamma} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس $\Gamma = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 = \Gamma_{11} \lambda_1 + \Gamma_{12} \lambda_2 \\ i_2 = \Gamma_{12} \lambda_1 + \Gamma_{22} \lambda_2 \end{cases}$$

ضرایب القاء معکوس

در سلف های موازی، شارهای پیوندی با هم برابرند.

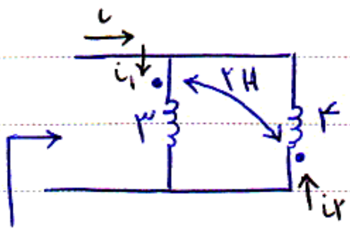
$$\lambda_1 = \lambda_2 \triangleq \lambda$$

صفحه بعد

$$i_1 = (\Gamma_{11} + \Gamma_{12})\,\lambda$$
$$i_2 = (\Gamma_{12} + \Gamma_{22})\,\lambda$$

$$i = i_1 + i_2 = (\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12})\,\lambda \qquad i = (\underbrace{\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12}}_{\Gamma_{eq} = \frac{1}{L_{eq}}})\,\lambda$$

تمرین)



$L_{eq} = ?$

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \Gamma = \frac{1}{3\times4 - 2\times2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 3/8 \end{bmatrix}$$

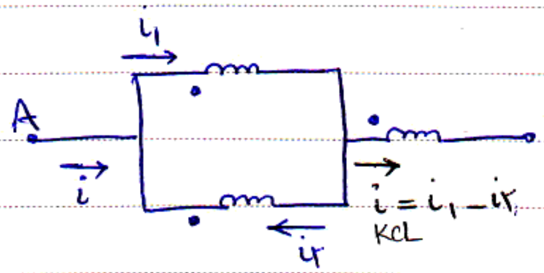
$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda \\ \lambda_2 = -\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}\lambda_1 + \Gamma_{12}\lambda_2 \\ i_2 = \Gamma_{12}\lambda_1 + \Gamma_{22}\lambda_2 \end{cases}$$

چون جهت جریان عکس

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{2}\lambda + (\frac{-1}{4})\times(-\lambda) = \frac{3}{4}\lambda \\ i_2 = (\frac{-1}{4}\times\lambda) + \frac{3}{8}(-\lambda) = -\frac{5}{8}\lambda \end{cases}$$

KCL $\quad i = i_1 - i_2 = (\frac{3}{4} + \frac{5}{8})\lambda = \frac{11}{8}\lambda \qquad i = \frac{11}{8}\lambda \longrightarrow \Gamma_{eq} = \frac{1}{L_{eq}} = \frac{11}{8} \longrightarrow L_{eq} = \frac{8}{11}$

مثال) سلف معادل از دو سر AB را بدست آورید.



$$L = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3i_1 - i_2 + 2i_3$$

$i_3 = i$

۱ و ۳ موافق هردو
با ۲ مخالف

Subject:
Year. Month. Date. تنوع علامت

درحوزه‌ی فازور حل می‌کنیم :

$KVL: ۲ = I + ۴jI - ۲jI + ۶jI - ۲jI$

$V_{oc} = ۴jI$

$۲ = (۱+۶j)I$

$I = \frac{۲}{۱+۶j} \qquad V_{oc} = \frac{۸j}{۱+۶j} = ۱٫۲۹ + ۰٫۲۱j = ۱٫۳۰۷ \angle ۹٫۲۴$

اتصال کوتاه :

$KVL: ۲ = I + ۴jI - ۲j(I - I_{sc})$

$۲ = I(۱+۲j) + ۲jI_{sc}$

$KVL: ۶j(I - I_{sc}) - ۲jI = ۰ \longrightarrow ۴jI = ۶jI_{sc} \longrightarrow I = \frac{۳}{۲} I_{sc}$

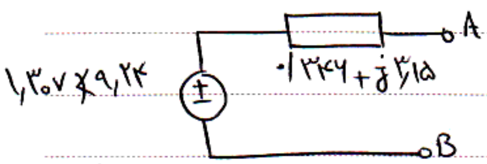
جایگذاری :

$۲ = \left(\frac{۳+۶j}{۲} + ۲j\right) I_{sc} = \frac{۳+۱۰j}{۲} I_{sc}$

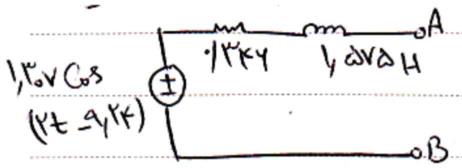
$I_{sc} = \frac{۴}{۳+۱۰j} = ۰٫۱۱ - ۰٫۳۹۷j = ۰٫۴۱۲ \angle -۷۴٫۵$

$Z_{th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{۱٫۳۰۷ \angle ۹٫۲۴}{۰٫۴۱۲ \angle -۷۴٫۵} = ۳٫۱۷۲ \angle ۸۳٫۷۴ = ۰٫۳۴۹ + j\,۳٫۱۵$

مدار معادل تونن :



یا



$L j\omega = ۳٫۱۵j \quad (\omega = ۲)$

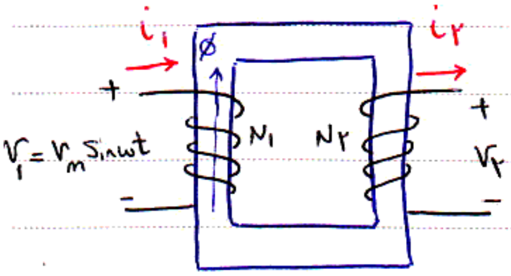
مدار معادل T :

$$\begin{cases} L_a = L_1 - M \\ L_b = L_2 - M \\ L_c = M \end{cases}$$

PAPCO

ضریب تزویج $K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ $(K \le ۱)$

ترانس ایده‌آل :



از یک هسته و دو سیم پیچ تشکیل شده . با اعمال ولتاژ به سیم پیچ اول .
شاری در هسته جاری می‌شود که از رابطه زیر پیروی خواهد کرد :

$$V_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_m}{N_1}\sin\omega t \longrightarrow \phi = \frac{V_m}{N_1 \omega}\cos\omega t$$

این شار از سیم پیچ دوم عبور می‌کند و در آن ولتاژ زیر القا می‌شود :

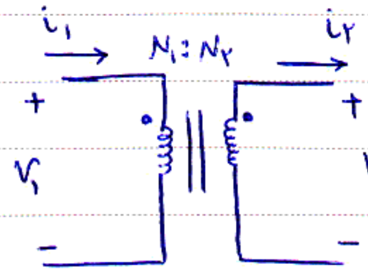
$$V_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{N_2}{N_1} \underbrace{V_m \sin\omega t}_{V_1}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}}$$

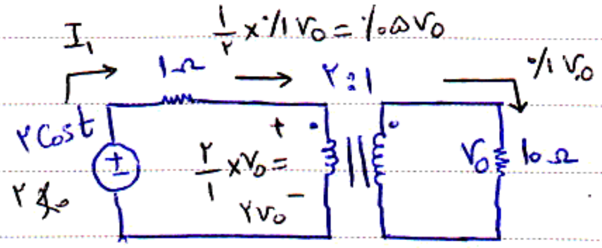
در ترانس ایده‌آل، تلفات سیستم صفر فرض می‌شود ، بنابراین قدرت لحظه‌ای دو سیم پیچ برابر است $P = Vi$

$$V_1 i_1 = V_2 i_2 \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{i_2}{i_1} \longrightarrow \boxed{\frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2}} \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{i_2}{i_1}$$

سمبل گرافیکی :



مثال) قدرت کشیده شده از منبع را بدست آورید ؟
ولتاژ خروجی را ؟ (V_0)



از فازور استفاده نمی‌کنیم چون سلف و خازن نداریم.

در ترانسفورماتورها جهت جریان از سر نقطه‌دار یکی وارد و از دیگری خارج می‌شود

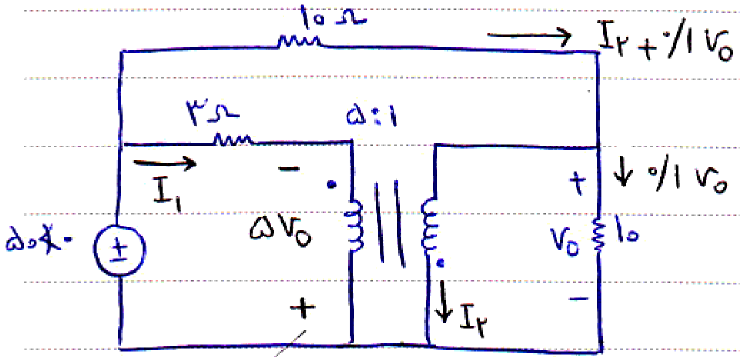
$$KVL: \ 2\cos t = 1 \times 0.05 V_o + 2V_o$$

$$2\cos t = 2.05 V_o \longrightarrow V_o = 0.975 \cos t$$

$$I_1 = 0.05 V_o = 0.0487 \cos t = 0.0487\angle 0 \qquad V_{rms} = \frac{V}{\sqrt{2}} \qquad I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$

$$P_{\text{قدرت منبع}} = V_{rms} \times I_{rms} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{0.0487}{\sqrt{2}} = 0.0487 \ W$$

مثال) V_o را بدست آورید.



ولتاژ برعکس چون سرهای نقطه دار عکس هم هستند

$$I_1 = \frac{1}{5} I_2 \longrightarrow I_2 = 5 I_1$$

$$KVL: \ 50 = 3I_1 - 5V_o$$

$$I_1 = \frac{50 + 5V_o}{3} \longrightarrow I_2 = \frac{250 + 25V_o}{3}$$

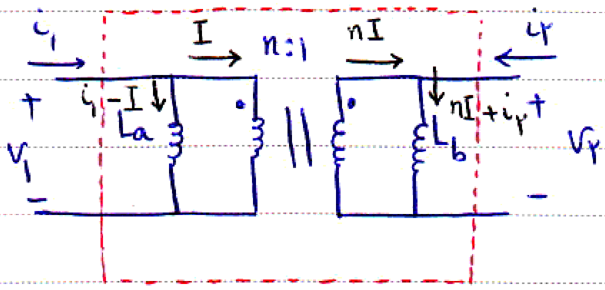
$$KVL: \ 50 = 10(I_2 + 0.1V_o) + V_o \longrightarrow 50 = 10 I_2 + 2V_o$$

$$50 = \frac{2500 + 250V_o}{3} + 2V_o \longrightarrow 150 = 2500 + 256 V_o \longrightarrow V_o = -9.18$$

تمرین) یکی از سرهای نقطه دار را عوض کرده و مجدداً V_o را بدست آورید.

مثال) این مدار جلو را با دو سلف تزویج شده

با ماتریس القای $L = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$ معادل می‌شود.



$$v_1 = L_a \frac{d(i_1 - I)}{dt} = L_a \frac{di_1}{dt} - L_a \frac{dI}{dt} \qquad (1)$$

$$v_2 = L_b \frac{d(nI + i_2)}{dt} = nL_b \frac{dI}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt} \quad (2)$$

$$v_1 = nv_2 \longrightarrow L_a \frac{di_1}{dt} - L_a \frac{dI}{dt} = n^2 L_b \frac{dI}{dt} + nL_b \frac{di_2}{dt}$$

$$(n^2 L_b + L_a) \frac{dI}{dt} = L_a \frac{di_1}{dt} - nL_b \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{L_a}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_1}{dt} - \frac{nL_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_2}{dt} \quad (3)$$

۳ در ۱ :

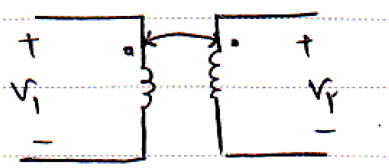
$$v_1 = L_a \frac{di_1}{dt} - \frac{L_a^2}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_1}{dt} + \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_2}{dt}$$

$$\boxed{v_1 = \frac{n^2 L_a L_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_1}{dt} + \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_2}{dt}}$$

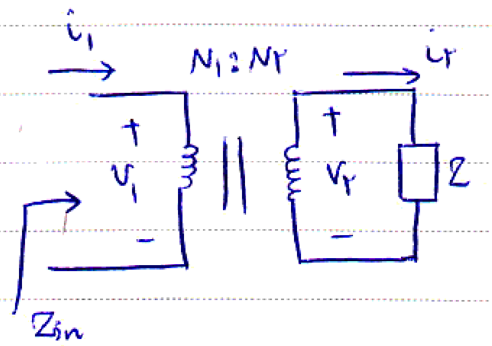
۳ در ۲ :

$$v_2 = \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_1}{dt} - \frac{n^2 L_b^2}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_2}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt}$$

$$\boxed{v_2 = \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_1}{dt} + \frac{L_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_2}{dt}}$$



$$L = \begin{bmatrix} \frac{n^2 L_b L_a}{n^2 L_b + L_a} & \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \\ \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} & \frac{L_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \end{bmatrix}$$



خاصیت ارجاع امپدانس در ترانس ایده‌آل :

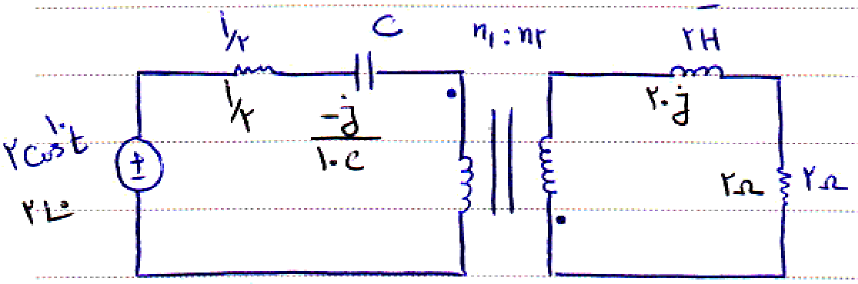
$$Z = \frac{v_2}{i_2}$$

$$Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = ?$$

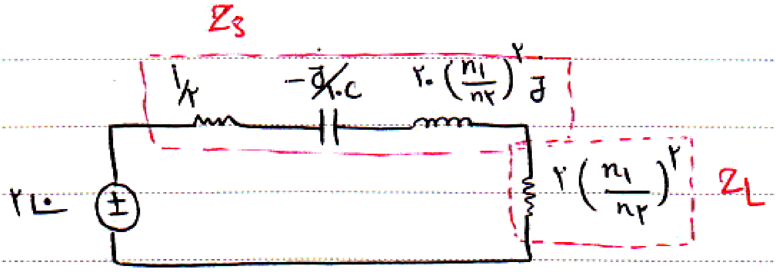
$$Z_{in} = \frac{V_1}{i_1} = \frac{(\frac{N_1}{N_2})V_2}{(\frac{N_2}{N_1})i_2} = (\frac{N_1}{N_2})^2 Z$$

$\rightarrow Z_{in} = (\frac{N_1}{N_2})^2 Z \longrightarrow$ خاصیت ارجاع امپدانس (اگر هم سرهای نقطه‌دار نداشته باشند)

مثال) نسبت تبدیل ترانس و مقدار خازن را به گونه‌ای بیابید که توان تحویلی به مقاومت ۲Ω حداکثر شود. $(\frac{n_1}{n_2})$



به سمت اولیه ارجاع می‌دهیم:



$\frac{n_1}{n_2} \triangleq n$

$Z_S = \frac{1}{2} + j(20n^2 - \frac{1}{10C})$ $\qquad Z_L = 2n^2$

شرط انتقال حداکثر توان: $Z_L = Z_S^*$

$2n^2 = \frac{1}{2} - j(20n^2 - \frac{1}{10C})$

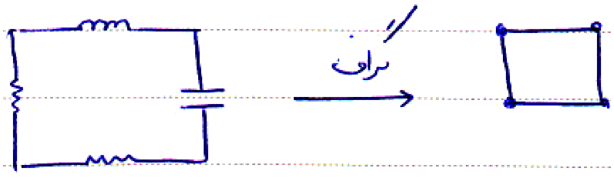
$$\begin{cases} 2n^2 = \frac{1}{2} \rightarrow n^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{n = \frac{1}{2}} \\ 20n^2 - \frac{1}{10C} = 0 \rightarrow 5 = \frac{1}{10C} \rightarrow \boxed{C = 0/02\ F} \end{cases}$$

فصل دوم: گراف‌ها و قضیه تلگان

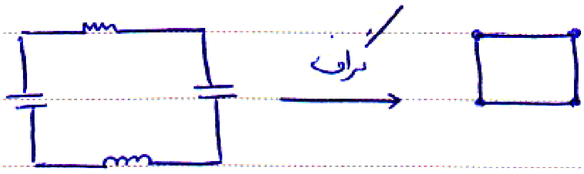
عناصر فشرده: عناصری می‌باشند که ابعاد آن‌ها نسبت به طول موج سیگنالی که آنها را تحریک می‌کند کوچک است.

در غیر این صورت قوانین KVL و KCL دیگر برقرار نخواهد بود.

گراف:



قوانین KVL و KCL ارتباطی به ماهیت

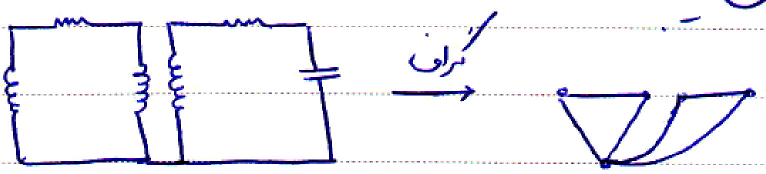


اجزای مدار ندارد و بنابراین می‌توان به جای هر عنصر

یک شاخه در گراف قرار داد و دو سر هر شاخه را با نقطه‌ها

یی که گره می‌نامند نشان داد.

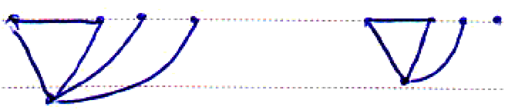
* از روی گراف نمی‌توان تشخیص داد که شاخه‌ها را عناصر تزویج هست یا خیر.



زیرگراف:

مفهوم زیرگراف به گراف مانند زیرمجموعه به مجموعه است که با حذف بعضی گره‌ها یا شاخه‌ها از یک گراف به دست می‌آید.

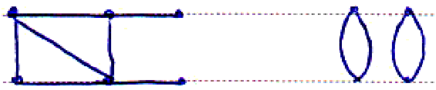
شکل گراف بالا و زیرگراف



زیرگراف سره:

زیرگرافی که فقط از یک گره تشکیل شده باشد.

گراف پیوسته: به گرافی پیوسته می‌گوییم که بین هر دو گره دلخواه آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

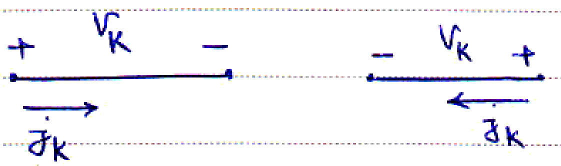


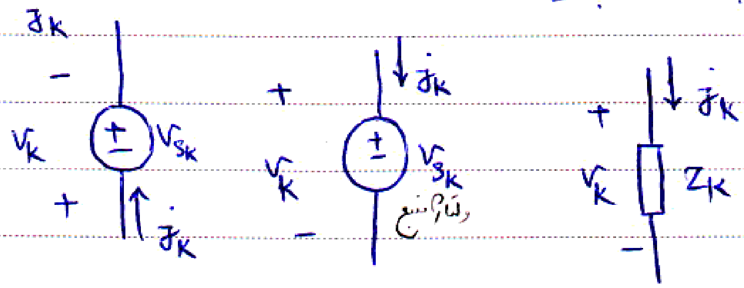
پیوسته ناپیوسته

جهت‌های قراردادی جریان:

جهت جریان در شاخه به طور دلخواه انتخاب می‌شود ولی بهتر است ولتاژ بر اساس جهت انتخاب شده باشد. قطب مثبت ولتاژ

در جهت ورود جریان قرار می‌شود



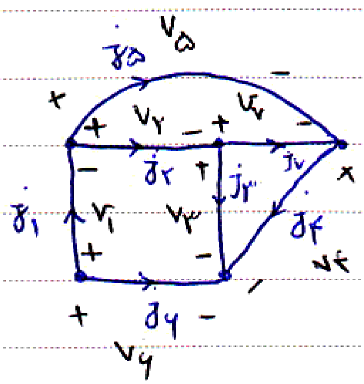


برای عناصر $V_k J_k > 0$

برای منابع $V_k J_k < 0$

گراف جهت‌دار:

گرافی که جریان شاخه‌ها روی آن تعیین شده باشد گراف جهت‌دار است.



ماتریس تلاقی گره و شاخه (A_a):

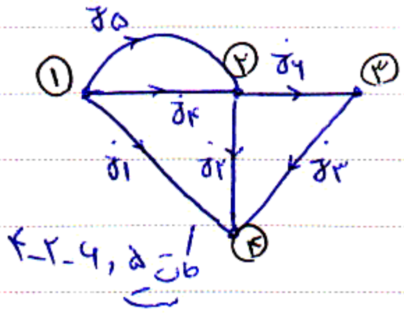
در یک گراف جهت‌دار عناصر ماتریس به صورت زیر فرض می‌شود:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } K \text{ با گره } i \text{ تلاقی داشته و جریان از گره خارج شود.} \\ 0 & \text{اگر شاخه } K \text{ و گره } i \text{ تلاقی نداشته باشند.} \\ -1 & \text{اگر شاخه } K \text{ با گره } i \text{ تلاقی داشته و جریان به آن وارد شود.} \end{cases}$$

A_a

مثال:



$$A_a = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

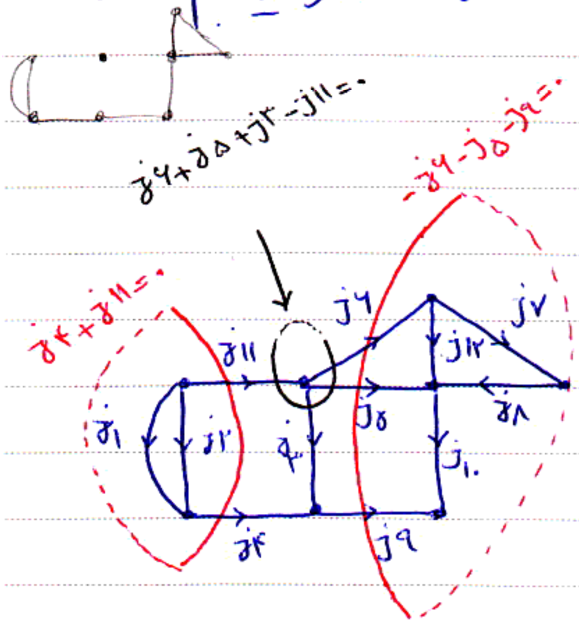
گره ↓ شاخه ⇐

جمع جبری جریان های وارد شده به یک گره صفر است. حال این قانون را تعمیم می دهیم.

گراف کات ست: دسته ای از شاخه های یک گراف تشکیل کات ست را می دهند اگر دو شرط زیر را با هم داشته باشند:

۱) حذف تمام شاخه های این دسته یک گراف ناپیوسته باقی بگذارد.

۲) حذف تمام شاخه ها غیر یکی، گراف را ناپیوسته کند.



کات ست هائی که می توان تشخیص داد: 11 و 4،

کات ست 5، 6، 9 کات ست 7، 12، 6

گسترش قانون KCL: برای هر دسته بسته شده در هر لحظه از زمان، مجموع جبری جریان ها خارج شده از کات ست صفر است.

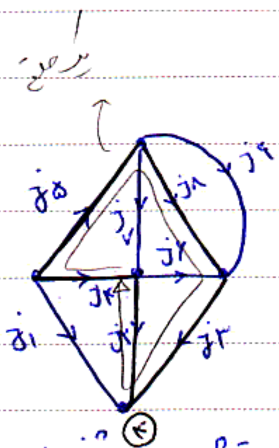
قرار داد: اگر کات ست را با یک سطح گاوسی نشان دهیم، جریان ها خارج شعاع کات ست با علامت مثبت و جریان های

وارد شده با علامت منفی هستند. علامت های ترز و نشر در شکل

حلقه و قانون KVL: یک زیرگراف از یک گراف پیوسته را حلقه می‌گویند اگر دو شرط زیر را داشته باشند:

1) زیرگراف پیوسته باشد.

2) به هر گره فقط ۲ شاخه متصل باشد.



$$-v_4 + v_5 + v_8 + v_3 - v_2 = 0$$

قضیه تلگان: برای هر شکل دهنده گرافی که دارای b شاخه و n_t گره باشد جهات ولتاژ و جریان شاخه‌ها با j_k و v_k مشخص شده باشند، خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$$

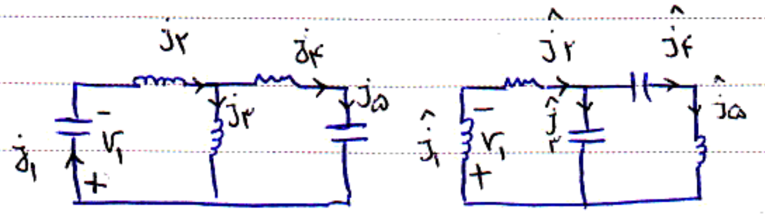
$v_k j_k > 0$ برای عناصر $\qquad v_k j_k < 0$ برای منابع

تبصره: اگر دو شکل گراف‌های یکسان داشته باشند ولی در دو گراف، شاخه‌ها را با شماره گذاری یکسان و جهت‌های قراردادی جریان یکسان بگیریم، قضیه تلگان روابط زیر را نتیجه می‌کند:

1) $$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k \hat{j}_k$$

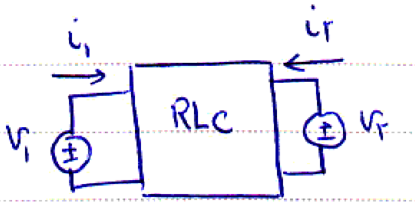
2) $$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=1}^{b} v_k \hat{j}_k$$

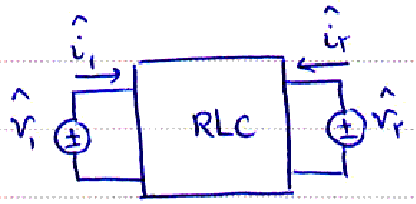
مثال)



به ازای شکل زیر در جهت اثبات قضیه تلگان دقت کنید :

یک مدار RLC ثابت در نظر بگیرید که منابع آن را به صورت زیر جابجا می کنیم :





می خواهیم اثبات کنیم : $\hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2 = v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=1}^{b} v_k \hat{j}_k$$

$$\hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{b} \hat{v}_k j_k}_{} = v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{b} v_k \hat{j}_k}_{}$$

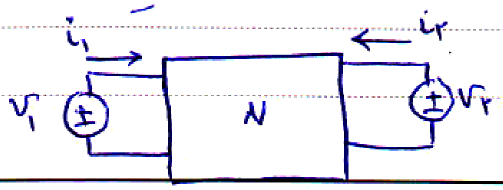
با هم برابرند

$$v_k = Z_k j_k \longrightarrow \sum_{k=3}^{b} v_k \hat{j}_k = \sum_{k=3}^{b} Z_k j_k \hat{j}_k$$

$$\hat{v}_k = Z_k \hat{j}_k \longrightarrow \sum_{k=3}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=3}^{b} Z_k \hat{j}_k j_k$$

$$\Longrightarrow v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2 = \hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2$$

مثال) شبکه N از عناصر RLC خطی و تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده . اندازه گیری های زیر در آن انجام شده است :



$V_1 = 4\cos(\omega t + 60) \quad , \quad V_2 = 0$

$i_1 = \cos(\omega t + 80) \quad , \quad i_2 = 2\cos(\omega t + 70)$

$\hat{V}_1 = \cos(\omega t + 10) \quad , \quad \hat{V}_2 = 2\cos(\omega t + 20) \qquad \hat{i}_1 = ?$

به حوزه‌ی فازوری می‌بریم:

$V_1 = 4\angle 60 \qquad i_1 = 1\angle 80 \qquad \hat{V}_1 = 1\angle 10$

$V_2 = 0 \qquad i_2 = 2\angle 70 \qquad \hat{V}_2 = 2\angle 20$

اصل تصدیق تلگان:

$$V_1 \hat{i}_1 + V_2 \hat{i}_2 = \hat{V}_1 i_1 + \hat{V}_2 i_2$$

$$4\angle 60 \times \hat{i}_1 + 0 = 1\angle 10 \times 1\angle 80 + 2\angle 20 \times 2\angle 70$$

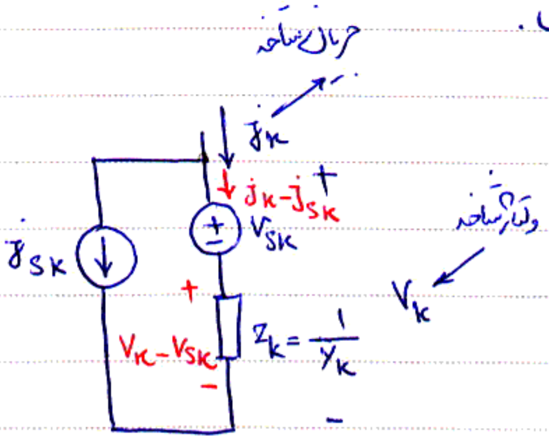
$$4\angle 60 \; \hat{i}_1 = 1\angle 90 + 4\angle 90$$

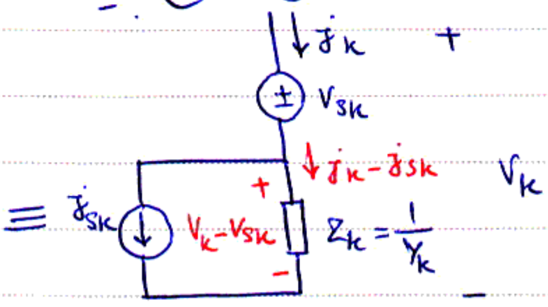
$$\hat{i}_1 = \frac{5\angle 90}{4\angle 60} = \frac{5}{4}\angle 30 \longrightarrow \hat{i}_1 = \frac{5}{4}\cos(\omega t + 30)$$

فصل ۲ : تجزیه و تحلیل گره و مش

مدل کلی یک شاخه :

یک شاخه در حالت کلی دارای منبع ولتاژ، منبع جریان و امپدانس است.





معادلات KVL و KCL در هر دو مدل یک شاخه بررسی می شود نشان می دهد با هم معادلند.

بیان رابطه شاخه با KCL :

$$J_k = J_{sk} + V_k Y_k - V_{sk} Y_k$$

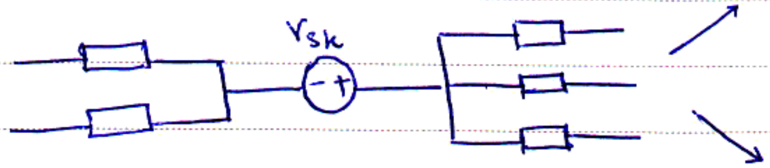
کاربرد در روش گره و کات ست.

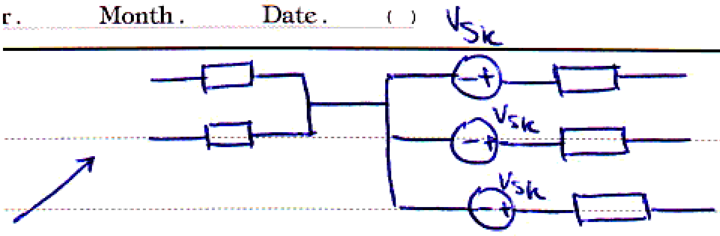
بیان رابطه شاخه با KVL :

$$V_k = V_{sk} + Z_k J_k - Z_k J_{sk}$$

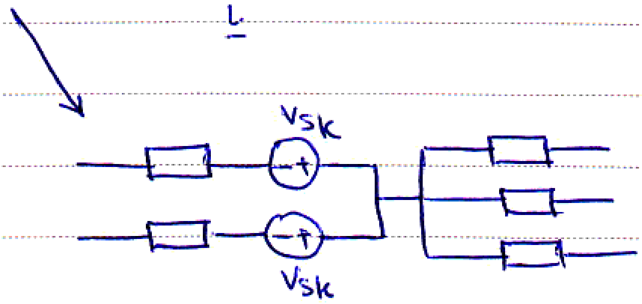
کاربرد در روش مش و حلقه اساسی.

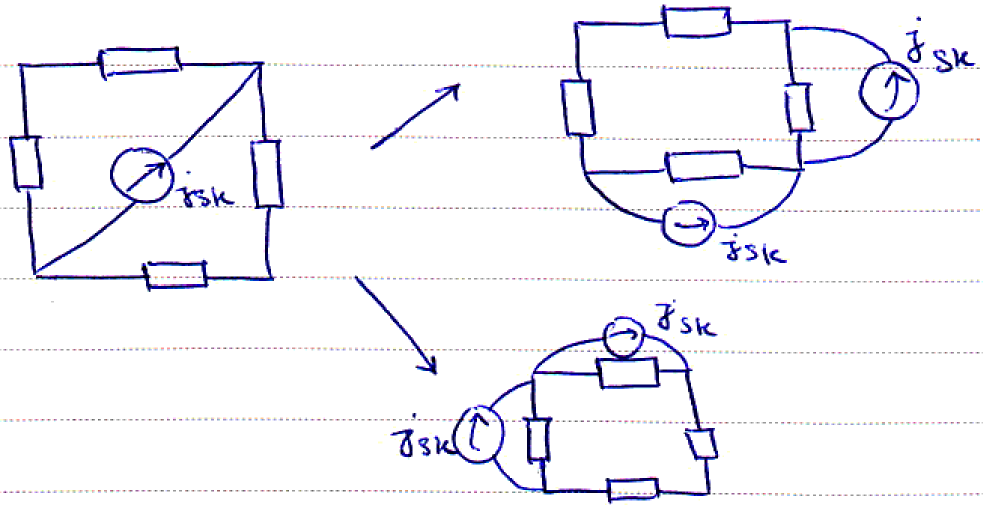
- برای اینکه حداکثر از شاخه هایی که تنها شامل منابع هستند از شاخه های دیگر لازم نباشد، تبدیل را چنان انجام می دهیم که تغییری در نتیجه نهایی مدار حاصل نشود.





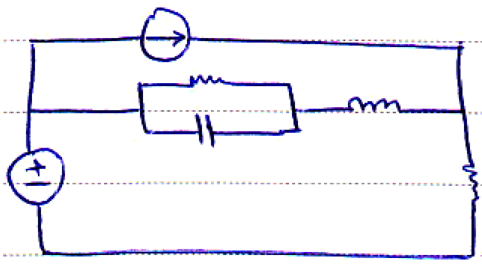
یا

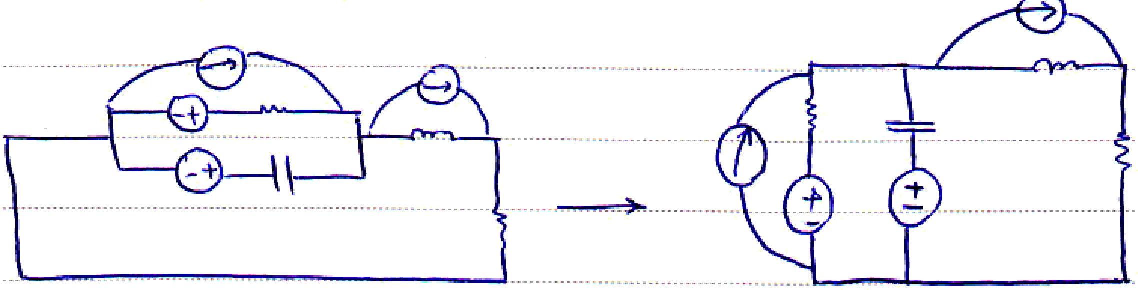




در تبدیل منابع ولتاژ اگر KVL به کار ببریم و در تبدیل منابع جریان اگر KCL به کار ببریم این معادلات ارضا می‌شود:

به عنوان مثال:





روش‌های تبدیل منابع فوق هم برای منابع مستقل هم برای منابع وابسته برقرار است.

تجزیه و تحلیل گره :

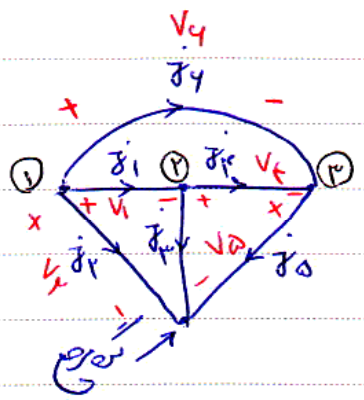
فرض کنید مداری دارای b شاخه باشد، در این صورت بردارهای زیر را تعریف می‌کنیم :

$$J = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$$ بردار جریان شاخه‌ها

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$$ بردار ولتاژ شاخه‌ها

در روش گره معمولاً گرهی که بیشترین اتصال به آن وجود دارد را به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم. اگر n_t تعداد کل گره‌ها باشد آنگاه $n_t = n+1$

فرض کنید گراف جهت‌دار مدار به صورت زیر باشد ←



ماتریس تلاقی گره و شاخه در روش گره به صورت زیر است : $A = (A_a)$ بدون گره مبنا

بسط قانون KCL

$$A.J = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 + j_2 + j_6 \\ -j_1 + j_3 + j_4 \\ -j_4 + j_5 - j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{A.J = 0}$$

بردار ولتاژ گره‌ها را با e نمایش می‌دهیم.

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

حال می‌خواهیم $A^t.e$ را به دست آوریم :

$$A^t.e = \overset{A^t}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 - e_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_2 - e_3 \\ e_3 \\ e_1 - e_3 \end{bmatrix}$$

جای سطرها و ستون‌ها ماتریس A را با هم عوض می‌کنیم

$$= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boxed{A^t . e = v}$$

استنباط KVL

اساس قضیه تلگان:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$$

$$\longrightarrow v_1 j_1 + v_2 j_2 + \dots + v_b j_b = 0$$

$$\sum v_k j_k = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} = v^t . j = (A^t . e)^t . j = e^t . A . j = 0$$

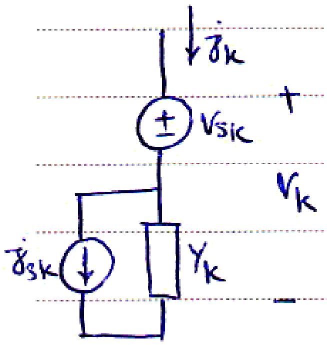
روش تجزیه و تحلیل گره:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$$

سه به روش امکان‌پذیر است: در روش گره، ولتاژ گره‌ها یعنی e مجهول معادله است.

۱) روش منظم   ۲) روش نظری   ۳) روش میانبر

۱) روش منظم:



$$j_k = j_{sk} + Y_k v_k - Y_k v_{sk}$$

این رابطه را برای تمام شاخه‌های مدار می‌نویسیم:

$$j_1 = j_{s1} + Y_1 v_1 - Y_1 v_{s1}$$
$$j_2 = j_{s2} + Y_2 v_2 - Y_2 v_{s2}$$
$$\vdots$$
$$j_b$$

$$\xrightarrow{\text{به صورت ماتریسی}} j = j_s + Y v - Y v_s$$

دو طرف را در A ضرب می‌کنیم:

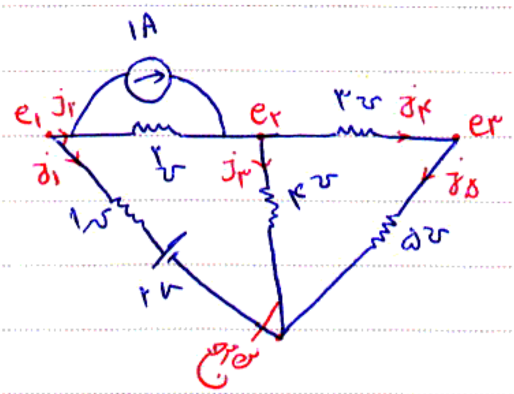
$$\underbrace{A . j}_{0} = A j_s + A Y \underbrace{v}_{A^t . e} - A Y v_s$$

$$0 = A j_s + A Y A^t . e - A Y v_s$$

$$\underbrace{A Y A^t}_{Y_n} . e = \underbrace{A Y v_s - A j_s}_{I_s} \quad \text{(A)} \quad \longrightarrow \quad Y_n . e = I_s$$

خوب است معادله A، منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل می‌کند.

مثال) یک مدار ساده مقاومتی: $V = ?$



ابتدا استفاده از رول

$$j_k = j_{s_k} + y_k v_k - y_k v_{s_k}$$

j_k ها را می‌نویسیم و بعد به صورت ماتریسی درمی‌آوریم سپس:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$?\ Y_n = A Y A^t$$

$$?\ I_s = A Y v_s - A j_s \quad \Rightarrow \quad Y_n . \underset{?}{e} = I_s \Rightarrow$$

$V = A^t . e$ به دست می‌آید.

$$j_1 = 0 + 1 v_1 - 1 \times 2$$

$$j_2 = 1 + 2 v_2 - 2 \times 0$$

$$j_3 = 0 + 4 v_3 - 4 \times 0$$

$$j_4 = 0 + 3 v_4 - 3 \times 0$$

$$j_5 = 0 + 5 v_5 - 5 \times 0$$

برای مثال بعدی

برای مثال بعدی

$$\underbrace{\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix}}_{j} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{j_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14\ \cancel{0} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}}_{v} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14\ \cancel{0} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_s}$$

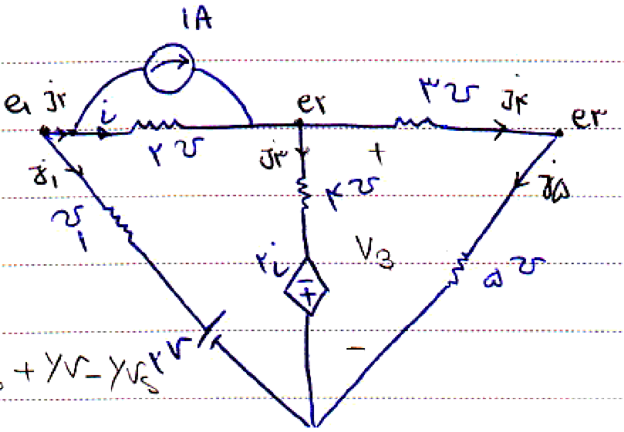
$$Y_n = A Y A^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$I_s = A Y v_s - A j_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Y_n \cdot e = I_s$ $\quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow e$ بدست می‌آید.

$v = A^t \cdot e$

مثال)



$J = J_s + YV - YV_s$

اتصالات کنترل را بدست می‌آوریم (i).

$i = j_2 - 1$

KCL: $j_2 = i + 1 \Rightarrow i = j_2 - 1$

$j_1 = 0 + 1v_1 - 1 \times 2$

$j_2 = 1 + 2v_2 - 2 \times 0$

$j_3 = 0 + 4(v_3 - (-2i)) = 4(v_3 + 2j_2 - 2) = 4v_3 + 8j_2 - 8 = 4v_3 + 16v_2 + 8 - 8 =$
$0 + 4v_3 + 16v_2 + 0$

$j_4 = 0 + 3v_4 - 3 \times 0$

$j_5 = 0 + 5v_5 - 5 \times 0$

$j_3 = 0 + 4v_3 - 4(-2i) =$
$4(v_3 - (-2i))$

$Y_n = A Y A^t = ?$
$I_s = A Y V_s - A j_s = ?$ $\longrightarrow Y_n \cdot e = I_s$

روش گره‌ای:

در شرایط زیر از روش گره‌ای استفاده می‌کنیم:

۱) منابع ولتاژ وجود نداشته باشند یا اگر وجود دارند به منابع جریان تبدیل شوند.

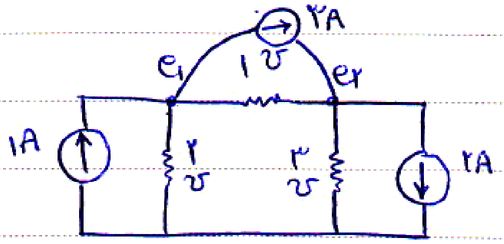
۲) سلف‌های تزویج شده و منابع وابسته وجود نداشته باشند، در این صورت در معادلات $Y_n \cdot e = i_s$

می‌توان Y_n و I_s را مستقیماً به صورت زیر تشکیل داد. $Y_n \cdot e = i_s$

$$Y_{ij} = \begin{cases} \text{مجموع ادمیتانس‌های متصل به گره } i\text{ ام} & i = j \\ -(\text{مجموع ادمیتانس‌های متصل بین گره } i \text{ و } j) & i \neq j \end{cases}$$

i_{s_i} = مجموع جریان‌های وارد شده به گره (وارد شده با علامت مثبت و خارج شده با علامت منفی)

مثال)



تعداد گره‌ها

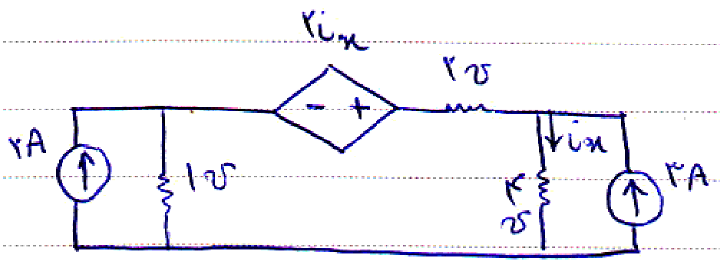
$$Y_n = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1+2 & -1 \\ -1 & 1+3 \end{bmatrix}}$$

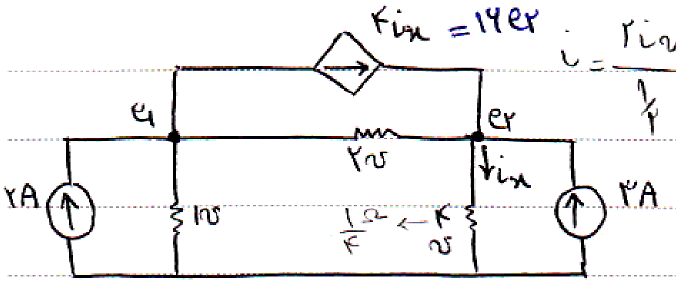
$$i_s = \begin{bmatrix} 1-3 \\ 3-2 \end{bmatrix} \qquad Y_n \cdot e = I_s \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

روش میانبر:

همان روش تحلیل گره است، با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند. در این روش، ابتدا منابع وابسته را مانند منابع مستقل در نظر می‌گیریم و معادلات را از روش تحلیل گره می‌نویسیم. در اینجا اثر منابع وابسته را به ماتریس Y_n بر می‌گردانیم.

مثال)





حل: منابع ولتاژ به جریان تبدیل می‌شوند: $i = \dfrac{2i_x}{\frac{1}{2}} = \dfrac{8e_2}{\frac{1}{2}} = 16e_2$

در روش گره، ولتاژ گره‌ها یعنی e مجهول معادلات است. وقتی از روش منابع استفاده می‌شود، تمام وابسته‌ها برحسب e نوشته می‌شوند

$i_x = \dfrac{e_2}{\frac{1}{4}} = 4e_2$ ، چون از آن جهت ساری دارد، علامتش عوض شده

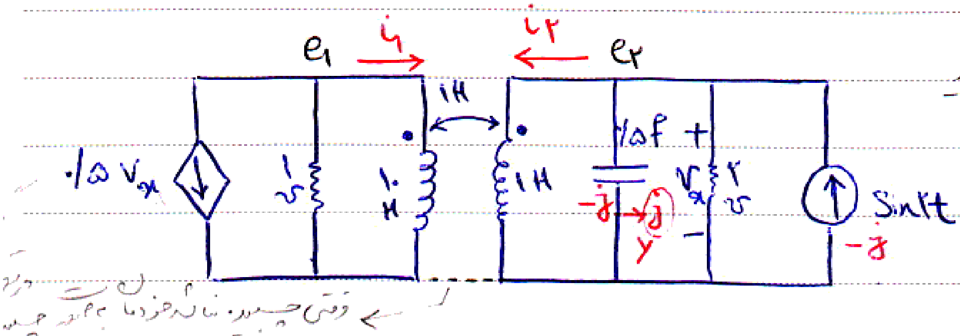
$$Y_n \cdot e = I_s \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2\;(+16) \\ -2 & 6\;(-16) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \cancel{16e_2} \\ 16e_2 + 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 14 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تجزیه و تحلیل گره در حالت دائمی سینوسی:

وقتی منابع موجود در یک مدار در رژیم سینوسی به صورت تک فرکانس باشند می‌توان از تحلیل حالت دائمی استفاده کرد.

مثال: چون سلف مزدوج داریم باید از Γ استفاده کنیم



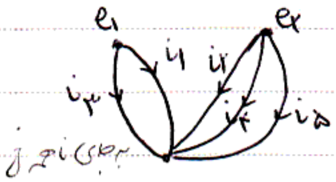
$\sin 2t = \cos(2t - 90) \to -j$

$$L = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \Gamma = \frac{1}{10-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = Li \Rightarrow i = \frac{\lambda}{L} = \lambda\Gamma \xRightarrow{\text{فازور}} I = V\frac{1}{j\omega}\Gamma$$

درحوزه‌ی سینوسی ماندگار :

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$



به جای ۵ j

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

معادلات گره به روش منظم :

$$J_K = J_{SK} + Y_K V_K - Y_K V_{SK}$$

$$J_3 = 0.5V_x + 1\times V_3 \,,\; V_x = V_5 \qquad J_5 = -(-j) + 0 + 2V_5 \longrightarrow J_5 = j + 2V_5$$

$$J_4 = 0 + j\times V_4 \longrightarrow J_4 = jV_4 \qquad J_3 = 0.5\times V_5 + V_3 \longrightarrow J_3 = 0.5V_5 + V_3$$

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad J = J_S + YV - YV_S$$

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \end{bmatrix}}_{J_S} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{Y_b}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Y_n = AY_bA^t \qquad i_s = \overset{0}{\cancel{AY_bV_S}} - AJ_S$$

معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل :

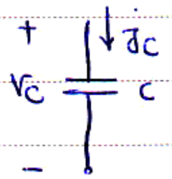
چنانچه بخواهیم پاسخ کامل یک شبکه‌ی معینی را به یک ورودی و حالات اولیه‌ی معلوم محاسبه کنیم معادلات

انتگرال - دیفرانسیل لازم خواهد بود.

اپراتور D ؛ $\frac{d}{dt} \triangleq D$

حال ادمیتانس های سلف، خازن در حوزه ی انتگرال - دیفرانسیل را به دست می آوریم:

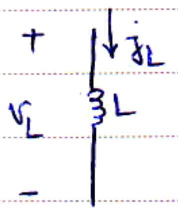
۱- خازن:



$$j_C = C\frac{d}{dt}v_C = CDv_C$$

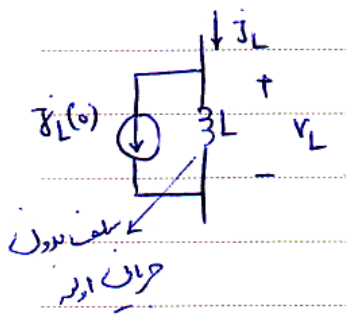
$$\boxed{Y_C = \frac{j_C}{v_C} = CD}$$

۲- سلف:



$$j_L = \frac{1}{L}\int v_L\,dt + j_L(0)$$

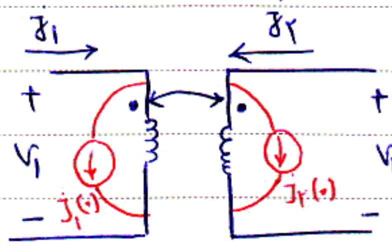
جریان اولیه سلف $j_L(0)$ را با یک منبع جریان موازی نشان می دهیم تا از معادلات حذف شود.



$$j = \frac{1}{L}\int v_L\,dt \Rightarrow v_L = L\frac{d}{dt}j$$

$$v_L = LDj \Rightarrow \boxed{Y_L = \frac{j}{v_L} = \frac{1}{LD}}$$

برای سلف های تزویج شده هم می توانیم آن را تعمیم دهیم:



$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1(0) \\ j_2(0) \end{bmatrix}$$

شرایط اولیه

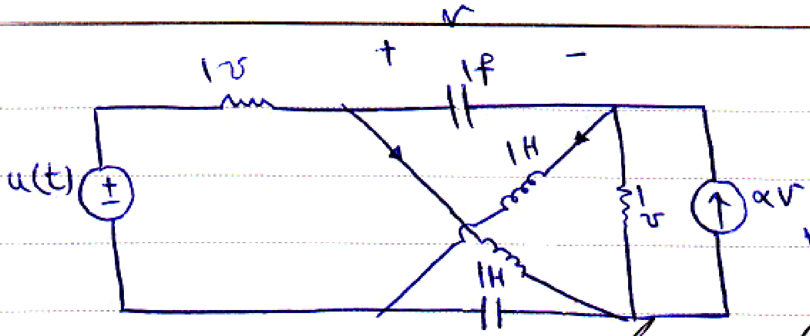
$\lambda = Li$

$i = \lambda\Gamma$

$j = V\frac{1}{j\omega}\Gamma = V\frac{1}{D}\Gamma$

$j = \frac{1}{D}V\Gamma$

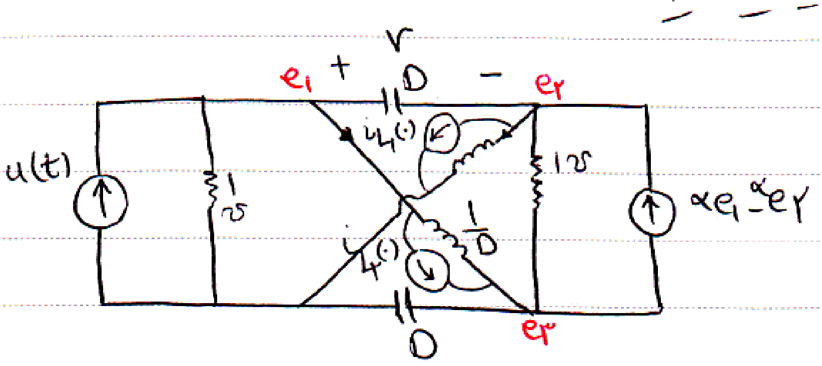
مثال) تمرین ۲۹ کتاب



$v_{c_2}(0), v_{c_1}(0)$, $i_{L_1}(0)$, $i_{L_2}(0)$

در حوزه‌ی انتگرال دیفرانسیل از روش ماتریس گره استفاده می‌کنیم

به دلیل وجود $u(t)$ ناچاریم از انتگرال دیفرانسیل حل کنیم.

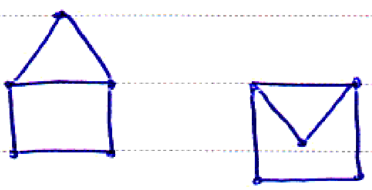


$$\begin{bmatrix} 1+D+\frac{1}{D} & -D & \frac{-1}{D} \\ -D-\alpha & 1+D+\frac{1+\alpha}{D} & -1 \\ \frac{-1}{D}+\alpha & -1-\alpha & 1+\frac{1}{D}+D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t)-i_{L_2}(0) \\ \alpha e_1 - \alpha e_2 - i_{L_1}(0) \\ -\alpha e_1 + \alpha e_2 + i_{L_2}(0) \end{bmatrix}$$

تجزیه و تحلیل مش:

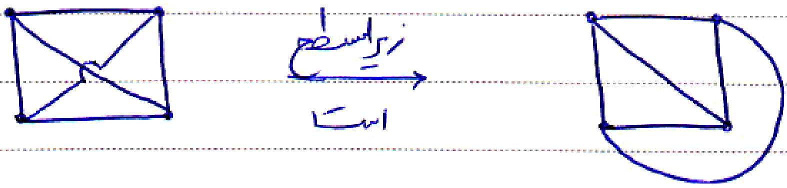
گراف‌های توپولوژیکی: گراف‌هایی هستند که از نظر رسم متفاوت‌اند ولی در واقع یک گراف هستند.

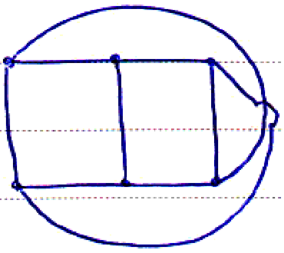
مثال)



گراف‌های مسطح: به گرافی گفته می‌شود که بتوان آن را در یک صفحه رسم کرد به نحوی که هیچ دو شاخه‌ای یکدیگر را قطع نکنند.

مثال)

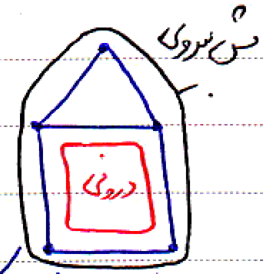




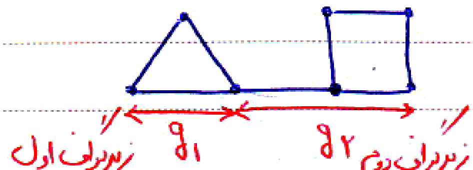
غیر مسطح

بخش درونی و بخش برونی:

حلقه‌ای که درآن هیچ شاخه‌ای وجود نداشته باشد را بخش درونی و از این به بعد به اختصار بخش می‌گویند و حلقه‌ای که در خارج از آن هیچ شاخه‌ای وجود نداشته باشد، بخش برونی است.

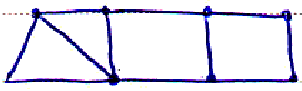


گراف‌های لولا دار و بی‌لولا: به گرافی لولادار می‌گویند که بتوان آن را به دو زیرگراف ناسوده که تنها در یک گره به هم متصل است، تفکیک نمود.



گراف لولادار

به گرافی بی‌لولا می‌گویند که هرگاه به دو زیرگراف ناسوده تفکیک شوند، حداقل در دو گره به هم متصل باشند.

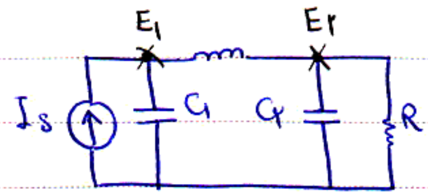


گرافی بی‌لولا

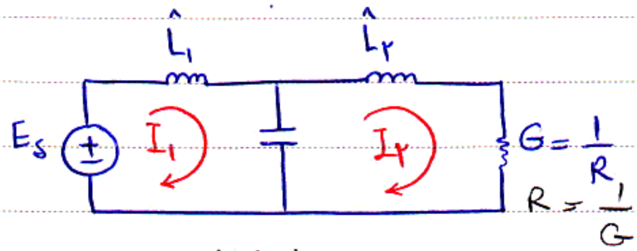
توجه) وقتی در یک مدار، بیش‌تر منابع جریان داشته باشیم، از KCL استفاده می‌کنیم.

توجه) وقتی در یک مدار، بیش‌تر منابع ولتاژ داشته باشیم، از KVL استفاده می‌کنیم.

خاصیت دوگان: این خاصیت در گراف‌های مسطح پیوسته بی‌لولا صدق می‌کند. عناصر شبکه باید دوقطبی باشند بنابراین عناصری مانند ترانسفورماتور، سلف‌های تزویج شده و غیره را از بحث خارج می‌کنیم. به دو مدار زیر توجه کنید:



مدار (A)



مدار (B)

مدار A:

KCL
$$I_S = E_1 C_1 j\omega + \frac{E_1 - E_2}{Lj\omega}$$

$$\boxed{I_S = E_1\left(C_1 j\omega + \frac{1}{Lj\omega}\right) - E_2 \times \frac{1}{Lj\omega}} \quad (1)$$

KCL
$$\frac{E_1 - E_2}{Lj\omega} = E_2 C_2 j\omega + \frac{E_2}{R}$$

$$\boxed{E_1 \times \frac{1}{Lj\omega} - E_2\left(\frac{1}{Lj\omega} + C_2 j\omega + \frac{1}{R}\right) = 0} \quad (2)$$

مدار B:

KVL
$$E_S = \hat{L}_1 j\omega I_1 + \frac{1}{\hat{C}j\omega}(I_1 - I_2)$$

$$\rightarrow \boxed{E_S = I_1\left(L_1 j\omega + \frac{1}{\hat{C}j\omega}\right) - I_2 \times \frac{1}{\hat{C}j\omega}} \quad (3)$$

KVL
$$\frac{1}{\hat{C}j\omega}(I_2 - I_1) + \hat{L}_2 j\omega I_2 + R I_2 = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{\hat{C}j\omega} I_1 - I_2\left(\frac{1}{\hat{C}j\omega} + \hat{L}_2 j\omega + R\right) = 0} \quad (4)$$

با مقایسه روابط ① با ③ و همچنین ② با ④ مشاهده می‌شود که یک تناظر یک به یک بین روابط وجود دارد.

E $\longleftrightarrow$ I   E جای خود را به I داده و برعکس.

C $\longleftrightarrow$ L   C جای خود را به L داده و برعکس.

R $\longleftrightarrow$ $G = \frac{1}{R}$ R جای خود را به G داده و برعکس.

* این دو مدار (A و B) دوگان هم هستند به عبارتی اگر مدار A را حل کنیم، پاسخ آن برای مدار B قابل استفاده است.

گراف های دوگان:

دو گراف g و ĝ را دوگان می‌گویند، اگر سه شرط زیر را داشته باشند:

به ازای هر تعداد مش همان تعداد گره

۱- میان مش های ĝ با در نظر گرفتن مش بیرونی و گره های g یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

۲- میان مش های g با در نظر گرفتن مش بیرونی و گره های ĝ یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

۳- میان شاخه های دو گراف یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد به طوری که هرگاه دو مش یک گراف دارای شاخه مشترک باشند، گره های متناظر با این دو مش در مدار دوگان شاخه‌ای داشته باشند که این دو گره را به هم وصل می‌کند.

الگوریتم رسم مدار دوگان:

۱- برای هر یک از مش های g یا اتصال (در نظر گرفتن مش بیرونی) یک گره از ĝ را متناظر می‌کنیم.

۲- برای هر شاخه K از g که بین مش های i و j مشترک است، یک شاخه از ĝ متناظر می‌کنیم که گره های i و j

$\hat{g}$ را متصل کنید.

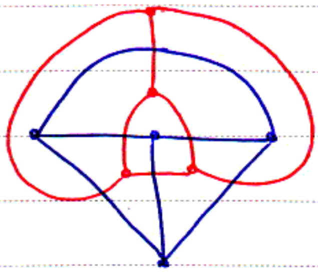
۳- بین عناصر g و $\hat{g}$ تناظر زیر را به وجود می‌آوریم؟

$L \longleftrightarrow C$

$R \longleftrightarrow G$

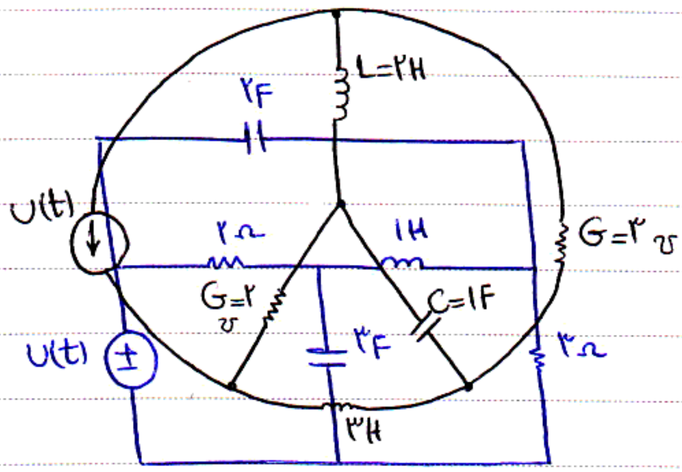
مثل منابع جریان $I \longleftrightarrow E$ مثل منابع ولتاژ

مثال) گراف های دوگان گراف زیر را به دست آورید؟



متناظر با هر مش، دوگان را یک گره می‌دانیم.

مثال) گراف دوگان مدار زیر را به دست آورید.

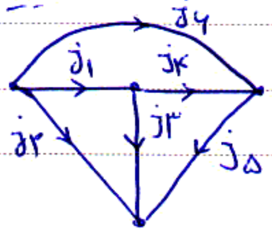


جریان به سر مثبت منبع وارد می‌شود.

تجزیه و تحلیل مش؟

در یک مدار که دارای b شاخه و n_t گره باشد، تعداد مش‌ها عبارت است از: $L = b - n_t + 1$

در روش مش برای هر یک از مش‌ها جهت عقربه‌های ساعت را به عنوان جهت قراردادی در نظر می‌گیریم.



$L = 6 - 4 + 1 = 3$

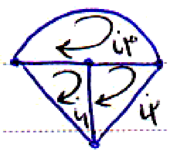
شاخه ↙ ↓ گره

i = بردار جریان مش ها $= \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix}$ $\qquad$ V = بردار ولتاژ شاخه ها $= \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_b \end{bmatrix}$

ماتریس M را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$M_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه k در مش iام قرار داشته و هم جهت با مش باشد} \\ 0 & \text{اگر شاخه ی k در مش iام نباشد} \\ -1 & \text{اگر شاخه ی k در مش iام قرار داشته و مخالف با مش باشد} \end{cases}$$

ماتریس M را برای مدار بالا بیابید



$$\underset{3\times 6}{M_{ik}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 6}$$

استنباط های KVL و KCL:

$$M.V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 - V_2 + V_3 \\ -V_3 + V_4 + V_5 \\ -V_1 - V_4 + V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

استنباط KVL: $\boxed{M.V = 0}$

$M^t . i = ?$

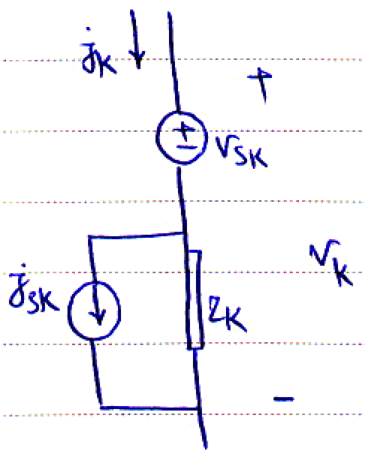
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 - i_3 \\ -i_1 \\ i_1 - i_2 \\ i_2 - i_3 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix}$$

استنباط KCL: $\boxed{M^t . i = j}$

روش آنالیز مش :

سه روش وجود دارد — مستقیم / نظری / بیانیه

روش مستقیم :



$$v_k = v_{sk} + Z_k j_k - Z_k j_{sk}$$

وقتی رابطه‌ی بین را برای b تا شاخه‌ها به صورت ماتریسی نوشته شود :

$$v = v_s + Z_b j - Z_b j_s$$

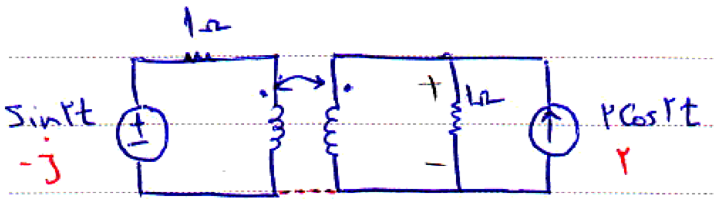
دو طرف را در M ضرب می‌کنیم :

$$\underbrace{M \cdot v}_{0} = M v_s + M Z_b \underbrace{j}_{M^t \cdot i} - M Z_b j_s$$

$$\overbrace{M Z_b M^t}^{Z_m} \cdot i = \underbrace{M Z_b j_s - M v_s}_{e_s} \quad (1) \qquad \Longrightarrow \quad Z_m \cdot i = e_s$$

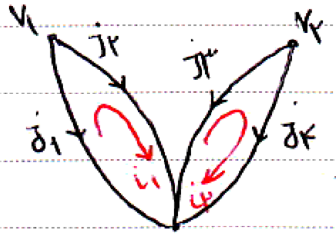
طرف راست معادله‌ی ① که همه منابع جریان مستقل را به منبع ولتاژ تبدیل می‌کند.

مثال)



$$L=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$$

گراف :



$$M=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ منابع را در گراف نمی‌گیریم.

$$V_k=V_{sk}+Z_kJ_k-Z_kJ_{sk}$$

ابتدا برای سلف‌های تزویج شده می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix}V_2\\V_3\end{bmatrix}=j\omega\begin{bmatrix}L_{11}&L_{12}\\L_{12}&L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_2\\J_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}V_2\\V_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2j&2j\\2j&4j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_2\\J_3\end{bmatrix}$$

$$V_1=-j+1\times J_1-1\times 0$$

$$V_4=0+1\times J_4-1\times(-2)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}V_1\\V_2\\V_3\\V_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-j\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{V_s}+\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2j&2j&0\\0&2j&4j&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{Z_b}\begin{bmatrix}J_1\\J_2\\J_3\\J_4\end{bmatrix}-\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2j&2j&0\\0&2j&4j&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{Z_b}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-2\end{bmatrix}}_{J_s}$$

$$Z_m\cdot i=e_s$$

$$Z_m=MZ_bM^t=\underbrace{\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2j&2j&0\\0&2j&4j&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}-1&2j&2j&0\\0&-2j&-4j&1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\\0&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2j&-2j\\-2j&1+4j\end{bmatrix}$$

$$e_s=MZ_bJ_s-MV_s$$

$$e_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4j & 2j & 0 \\ 0 & 2j & 4j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j \\ -2 \end{bmatrix}$$

روش نظری :

اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد در معادله ی $Z_m . i = e_s$ ماتریس های Z_m و e_s را می توان مستقیماً تشکیل داد.

۱) منابع جریان وجود نداشته باشند یا اگر دارند به منبع ولتاژ تبدیل شوند. (ضمناً همه ی منابع مستقل باشند)

۲) سلف های تزویج شده در مدار موجود نباشد.

L تعداد مش ها

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1L} \\ \vdots & & \\ Z_{L1} & \cdots & Z_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{s_1} \\ \vdots \\ e_{s_L} \end{bmatrix}$$

$$Z_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع امپدانس های موجود در مش i ام} \\ i \neq j & -\text{(مجموع امپدانس های مشترک بین مش i و j)} \end{cases}$$

$e_{s_i} =$ مجموع جبری منابع ولتاژ موجود در مش i ام اگر از قطب مثبت منبع وارد شدیم با علامت منفی و اگر از قطب منفی وارد شدیم با علامت مثبت.

روش میانبر :

همان روش نظری است با این تفاوت که منابع وابسته نیز می توانند وجود داشته باشند. منابع وابسته را مثل منابع

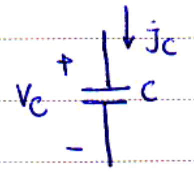
مستقل فرض می‌کنیم و وابستگی‌ها را برحسب جریان مش‌ها تعیین می‌کنیم و معادلات را به روش لوپ می‌نویسیم. در اینجا از

وابستگی‌ها را به ماتریس Z_m می‌پردازیم.

معادلات انتگرال - دیفرانسیل:

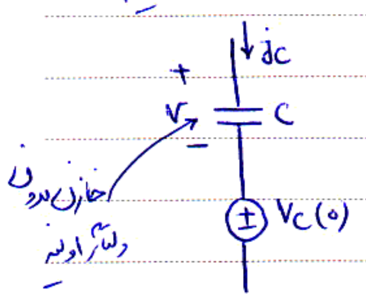
امپدانس‌های سلف و خازن را در این حوزه به دست می‌آوریم.

۱- خازن:



$$v_C = \frac{1}{C}\int i_C\,dt + v_C(0)$$

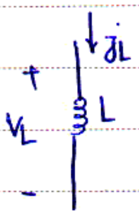
برای جدا کردن شرط اولیه از معادله آن را به صورت یک منبع ولتاژ سری با یک خازن بدون شرط اولیه نشان می‌دهیم.



$$v = \frac{1}{C}\int i_C\,dt \Rightarrow C\frac{dv}{dt} = i_C$$

$$CDv = i_C \longrightarrow Z_C = \frac{v}{i_C} \Rightarrow \boxed{Z_C = \frac{1}{CD}}$$

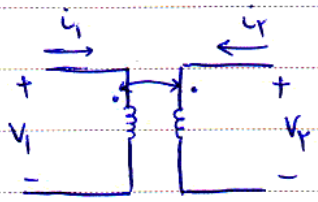
۲- سلف:



$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \longrightarrow v_L = LD\,i_L$$

$$Z_L = \frac{v_L}{i_L} \longrightarrow \boxed{Z_L = LD}$$

با تعمیم برای سلف‌های تزویج شده خواهیم داشت:



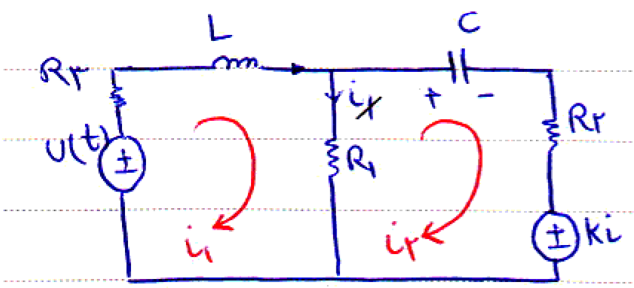
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

PAPCO

$\lambda = Li \Rightarrow v = Lj\omega i = LDi$

$v = LDi$

مثال ۳)



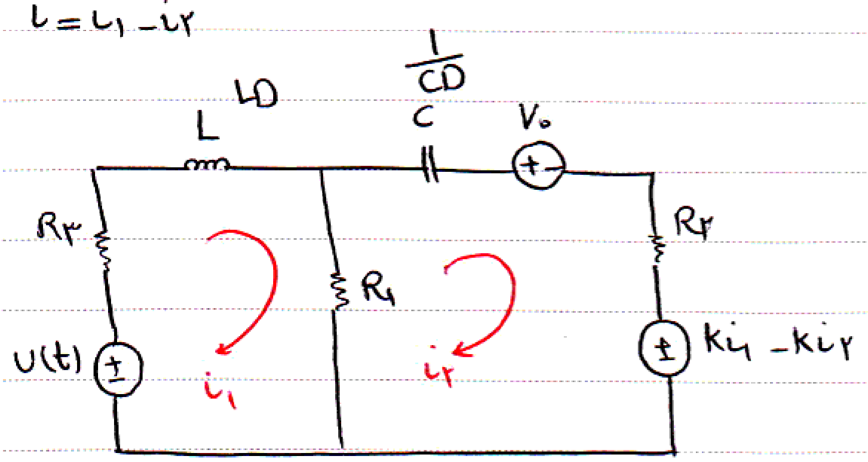
$V_C(0)=V_0$

$i_L(0)=I_0$

حل از روش پیمایش مش: چون مدار در رژیم سینوسی نیست،

دارای سلف و خازن است و شرایط اولیه داده شده، باید در حوزه‌ی انتگرال دیفرانسیل حل کنیم.

$i=i_1-i_2$



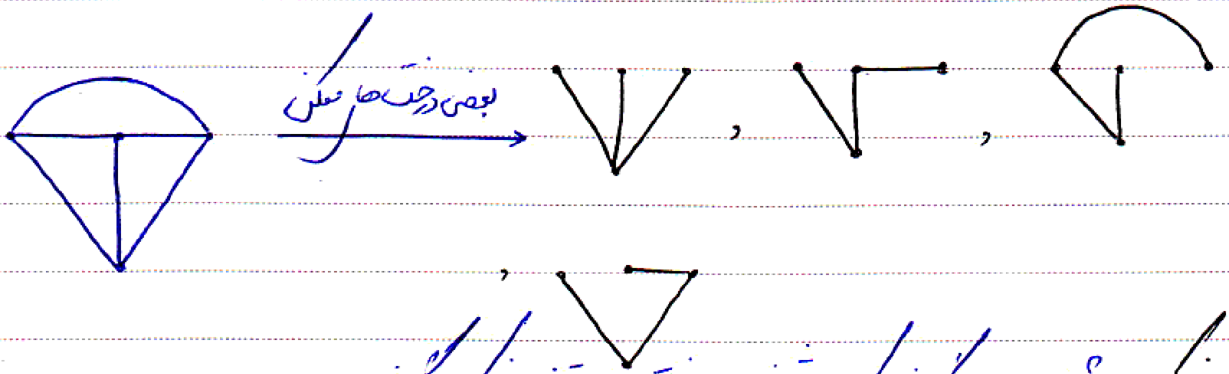
$Z_m \cdot i = e_s$

$$\begin{bmatrix} R_3+LD+R_1 & -R_1 \\ -R_1+K & R_1+\frac{1}{CD}+R_2-K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U(t) \\ -V_0-\cancel{Ki_1}+\cancel{Ki_2} \end{bmatrix}$$

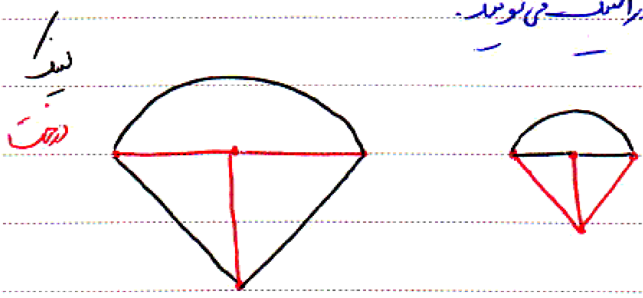
فصل ۱۱ : تجزیه و تحلیل حلقه‌ی اساسی و کات‌ست اساسی :

درخت : یک زیرگراف از یک گراف پیوسته را درخت گویند اگر ۳ شرط زیر را دارا باشند :

۱) پیوسته باشد.　　۲) تمام گره‌ها را شامل شود　　۳) هیچ حلقه‌ای تشکیل ندهد



لینک : شاخه‌هایی از گراف که از شاخه‌های درخت نیستند را لینک می‌گویند.



قضیه اساسی تئوری گراف :

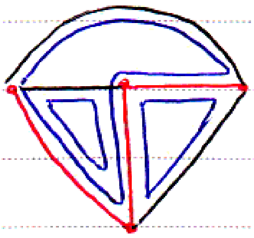
اگر گراف پیوسته‌ی G و درخت اختیاری T از آن گراف را در نظر بگیریم :

۱) بین هر دو گره‌ی دلخواه از گراف G روی درخت T یک مسیر منحصر به فرد وجود دارد.

۲) تعداد شاخه‌های درخت برابر $n_t - 1$ ($4-1=3$) و تعداد لینک‌ها برابر $b - n_t + 1$ ($6-4+1=3$) است.

۳) هر لینک درخت T همراه با مسیر منحصر به فرد میان دو گره آن لینک تشکیل یک حلقه می‌دهد به آن حلقه اساسی

متناظر با آن لینک می گویند.

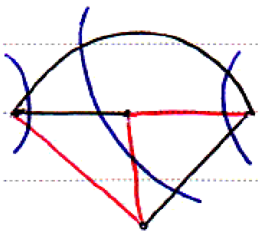


یعنی به تعداد لینک ها حلقه ی اساسی داریم.

۴) هر شاخه ی درخت T و تعدادی از لینک ها تشکیل یک کات ست منحصر به فرد را می دهد که به آن کات ست اساسی متناظر با آن شاخه ی درخت می گویند. یعنی به تعداد شاخه های درخت ، کات ست اساسی داریم.

روش به دست آوردن کات ست اساسی متناظر با شاخه ی درخت:

شاخه ی درخت مورد نظر را حذف می کنیم ، درخت به ۲ قسمت مجزا تقسیم می شود. لینک هایی که این دو قسمت مجزا را هم وصل می کنند به همراه آن شاخه ی درخت ، تشکیل کات ست اساسی متناظر با آن شاخه ی درخت را می دهند.

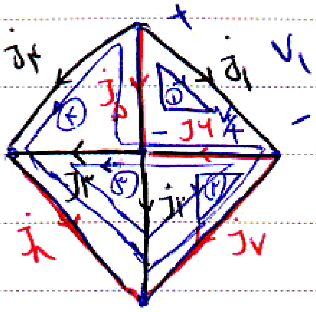


تجزیه و تحلیل حلقه ی اساسی:

قرارداد ۱) لینک ها را از 1 تا l و درخت ها را از $l+1$ تا b شماره گذاری می کنیم.

قرارداد ۲) جهت حلقه ی اساسی متناظر با هر لینک را هم جهت با جریان لینک در نظر می گیریم.

فرض کنید گراف به همراه درخت انتخابی با شکل زیر باشد:



جهت ها اختیاری است.

حلقه‌ی اساسی متناظر با هر لینک را نشان می‌دهیم.

استناط‌های KVL و KCL :

ماتریس B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ بوده و با آن هم جهت باشد.} \\ 0 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ نباشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ بوده و با آن خلاف جهت باشد.} \end{cases}$$

ماتریس B برای مثال قبلی:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

استناط‌های KVL و KCL :

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} \text{ : بردار ولتاژ شاخه‌ها} \qquad i = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_l \end{bmatrix} \text{ : بردار جریان حلقه‌های اساسی}$$

$$j = \begin{bmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} \text{ : بردار جریان شاخه‌ها}$$

$$B.V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_5 + v_6 \\ v_2 + v_6 - v_7 \\ v_3 + v_6 - v_7 + v_8 \\ v_4 - v_5 + v_6 - v_7 + v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

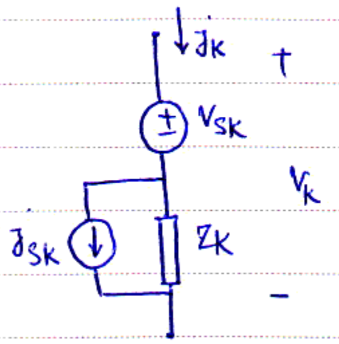
$B.V = 0$ استناط KVL

$$B^t \cdot i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ -i_1-i_4 \\ i_1+i_2+i_3+i_4 \\ -i_2-i_3-i_4 \\ i_3+i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boxed{B^t \cdot i = j}$$

استنباط KCL

معادلات حلقه‌ای اساسی: سه روش داریم: منظم / نظری / ماتریسی

۱- روش منظم



مجدداً تعمیم‌یافته شاخه‌ای را به یاد داریم.

$$V_k = V_{sk} + Z_k j_k - Z_k j_{sk}$$

وقتی رابطه را برای b تا شاخه‌ها بنویسیم به صورت ماتریسی خواهیم داشت:

$$V = V_s + Z_b j - Z j_s$$

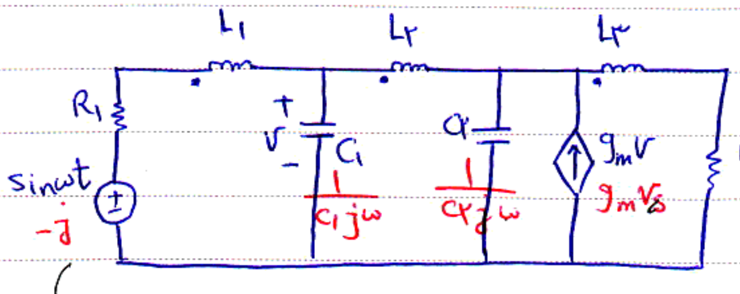
طرفین در B ضرب می‌شوند:

$$\underbrace{B \cdot V}_{0} = B V_s + B Z_b \underbrace{j}_{B^t \cdot i} - B Z j_s$$

$$\Rightarrow \underbrace{B Z_b B^t}_{Z_B} \cdot i = \underbrace{B Z_b j_s - B V_s}_{e_s} \quad (A) \Longrightarrow \boxed{Z_B \cdot i = e_s}$$

مولفه‌ی $B Z_b j_s$ در طرف راست رابطه‌ی (A)، عمل تبدیل منابع مستقل جریان را به منابع ولتاژ انجام می‌دهد.

مثال: در مدار زیر به روش منظم حلقه‌ای اساسی، ماتریس را ارائه دهید.



$$L = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

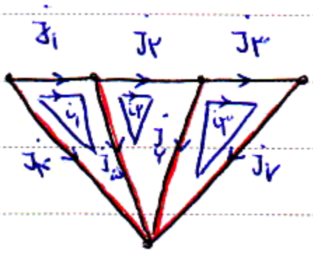
$\sin \omega t = 1\cos(\omega t - 90) = 1 \angle -90 = \cos -90 + j\sin(-90) = -j$

$\sin \omega t = \cos(\omega t - 90) = e^{-j90} = \cos 90 - j \sin 90 = -j$

$\boxed{A\cos(\omega t + \theta) = A e^{j\theta}}$

در حوزه فازور کار می‌کنیم

گراف :



لینک و درخت :

$$
B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array}
$$

ماتریس همانی ناشی از قراردادهای ۱ و ۲

ابتدا برای سلف های تزویج شده :

$\lambda = L i$

$V = L j\omega i$

بردار جریان شاخه‌ها

$$
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}
$$

$$V_k = V_{sk} + Z_k J_k - Z_k J_{sk}$$

$$V_1 = 4j\omega \times J_1 + 2j\omega \times J_2 + j\omega \times J_3$$

$$V_2 = 2j\omega \times J_1 + 4j\omega \times J_2 + 2j\omega \times J_3$$

$$V_3 = j\omega \times J_1 + 2j\omega \times J_2 + 4j\omega \times J_3$$

$$V_4 = -J + R_1 \times J_4 - R_1 \times 0$$

$$V_5 = 0 + \frac{1}{C_1 j\omega} \times J_5 - \frac{1}{C_1 j\omega} \times 0$$

$$V_6 = 0 + \frac{1}{C_2 j\omega} \times J_6 - \frac{1}{C_2 j\omega} \times (-g_m V_5)$$

$$V_6 = 0 + \frac{1}{C_2 j\omega} J_6 + \frac{g_m}{C_2 j\omega}\left(\frac{1}{C_1 j\omega}\right) J_5 \Rightarrow V_6 = \frac{-g_m}{C_1 C_2 \omega^2} J_5 + \frac{1}{C_2 j\omega} J_6$$

$v_7 = 0 + R_2 j_7 - R_2 \times 0$

به صورت ماتریسی؟

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4j\omega & 2j\omega & j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2j\omega & 4j\omega & 2j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j\omega & 2j\omega & 4j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1 j\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-g_m}{C_1 C_2 \omega^2} & \frac{1}{C_2 j\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix}}_{Z_b} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}}_{Z_b} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{J_s}$$

$$Z_B = B Z_b B^t$$

$$e_s = B Z_b J_s - B V_s \qquad \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$$

۲) روش تحلیل حلقه: اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد در معادله ی $Z_B \cdot i = e_s$ ماتریس های Z_B و e_s را می توان مستقیماً تشکیل داد.

۱) منابع جریان که وجود داشته باشند اگر دارند به منبع ولتاژ تبدیل شوند.

۲) سلف تزویج شده و منبع وابسته وجود نداشته باشد.

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1L} \\ \vdots & & \\ Z_{L1} & \cdots & Z_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{s_1} \\ \vdots \\ e_{s_L} \end{bmatrix}$$

$Z_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع امپدانس های موجود در حلقه اساسی i ام} \\ i \neq j & \text{مجموع امپدانس های مشترک بین حلقه ی اساسی i و j} \end{cases}$

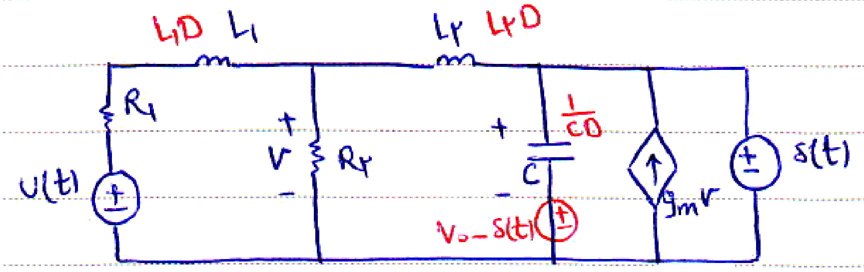
(اگر جهت حلقه های اساسی در شاخه ی مشترک یکسان بود با علامت مثبت و اگر خلاف بود با علامت منفی جمع می زنیم.)

$e_{s_i} =$ مجموع منابع ولتاژ موجود در حلقه‌ی اساسی iام (اگر از سر منفی وارد شدیم با علامت + و اگر از سر مثبت وارد شدیم با علامت منفی – جمع می‌زنیم.)

۴) روش مش: همان روش حلقه است.

با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند. وابستگی‌ها را حسب جریان حلقه‌ها می‌نویسیم و منابع وابسته را مانند منابع مستقل فرض می‌کنیم و معادلات را به روش حلقه می‌نویسیم. در نهایت اثر وابستگی را به ماتریس Z_B برمی‌گردانیم.

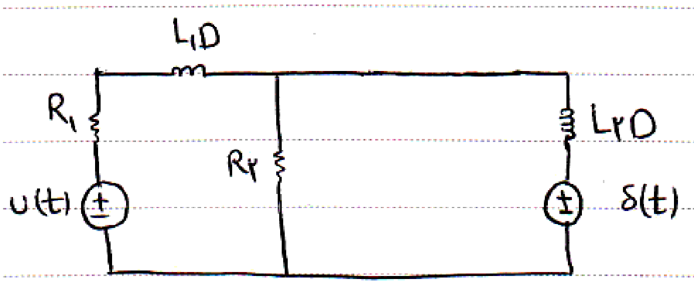
مثال)

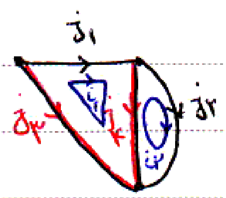


$V_C(0) = V_0$

$i_{L_1}(0) = i_{L_2}(0) = I_0$

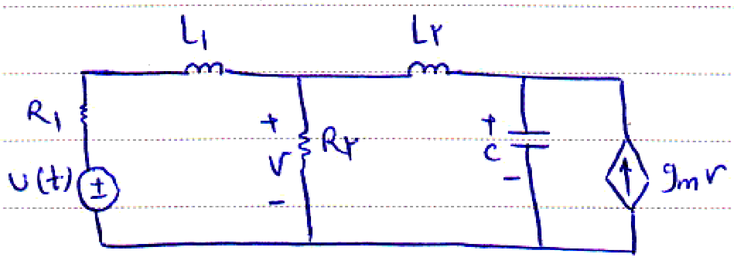
در حوزه‌ی اپراتور دیفرانسیل حل می‌کنیم:

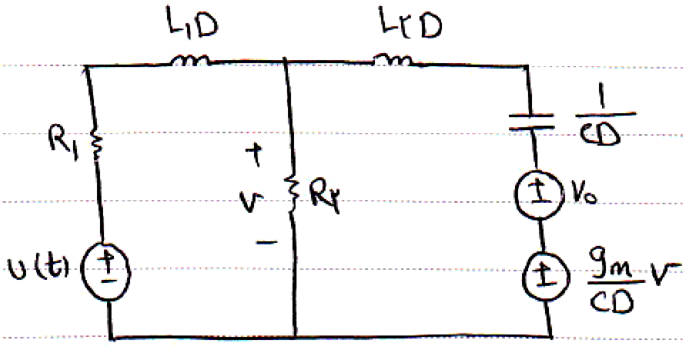


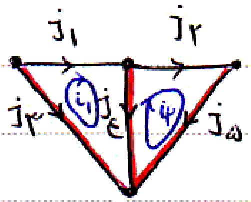


$$\begin{bmatrix} R_1+L_1D+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+L_2D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ -\delta(t) \end{bmatrix}$$

مثال)







$$V = R_2 i_1 - R_2 i_2$$

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+L_1D & -R_2 \\ -R_2+\frac{g_mR_2}{CD} & R_2+L_2D+\frac{1}{CD}-\frac{g_mR_2}{CD} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ -V_0 \cancel{-\frac{g_mR_2}{CD} i_1} \cancel{+\frac{g_mR_2}{CD} i_2} \end{bmatrix}$$

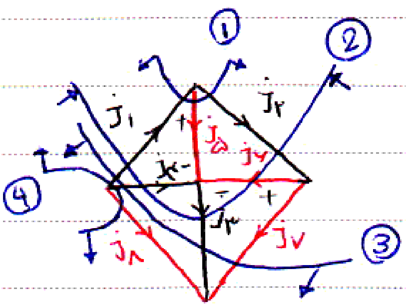
تجزیه و تحلیل کات‌ست:

با تعیین درخت مناسب در گراف مدار:

قرارداد ۱: لینک‌ها را از ۱ تا L و شاخه‌های درخت را از L+1 تا b شماره گذاری می‌کنیم

قرارداد ۲: جهت کات‌ست را هم‌جهت با جهت شاخه درخت متناظر در نظر می‌گیریم

مثال: فرض کنید یک گراف و درخت انتخابی به صورت زیر باشد:



ماتریس Q:

$$
Q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات‌ست } i \text{ بوده و با آن هم جهت باشد.} \\ 0 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات‌ست } i \text{ نباشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات‌ست } i \text{ بوده و با خلاف جهت باشد.} \end{cases}
$$

در مثال کل ۸ شاخه داریم.

$$
Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

ماتریس یکه ناشی از قراردادهای ۱ و ۲

استنباط‌های KVL و KCL :

بردار جریان شاخه‌ها :

$$
j = \begin{bmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}
$$

بردار ولتاژ شاخه‌ها :

$$
v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}
$$

بردار ولتاژ شاخه‌های درخت :

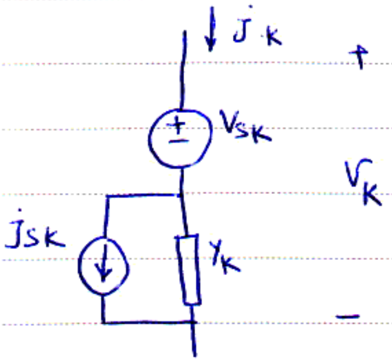
$$
e = \begin{bmatrix} e_{l+1} \\ \vdots \\ e_b \end{bmatrix}
$$

$$
Q \cdot j = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_1 + j_2 + j_5 \\ j_1 - j_2 - j_3 + j_4 + j_6 \\ -j_1 + j_3 - j_4 + j_7 \\ j_1 + j_4 + j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$\longrightarrow \quad Q \cdot j = 0 \qquad$ استنباط KCL

$$Q^t \cdot e = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} \Longrightarrow Q^t \cdot e = v$$

استنباط KVL ؛



معادلات کات ست اساسی ؛ (منظم / نامنظم) تعمیم یافته

منظم ؛

تعمیم یعنی شاخه را مجرداً در نظر می‌گیریم.

$$j_k = j_{sk} + y_k v_k - y_k v_{sk}$$

وقتی این معادله را برای تمام شاخه‌ها بنویسیم، معادلات ماتریسی زیر حاصل می‌شود ؛

$$j = j_s + Y_q v - Y_q v_s$$

ضرب طرفین در Q :

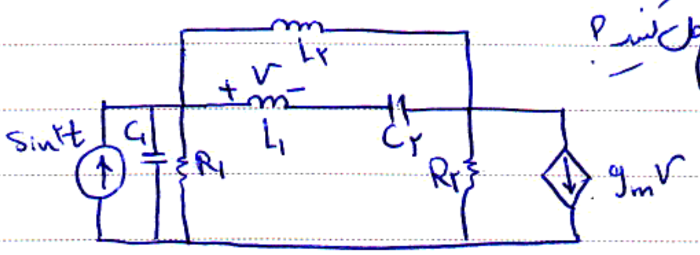
$$\underbrace{Q \cdot j}_{0} = Q j_s + Q Y_q \underset{\downarrow\, Q^t e}{v} - Q Y_q v_s$$

$$\underbrace{Q Y_q Q^t}_{Y_Q} \cdot e = \underbrace{Q Y_q v_s - Q j_s}_{i_s}$$

$$\boxed{Y_Q \cdot e = i_s}$$

تبدیل منابع ولتاژ سری به جریان

مثال) مدار زیر را به روش کات ست اساسی منظم حل کنید؟

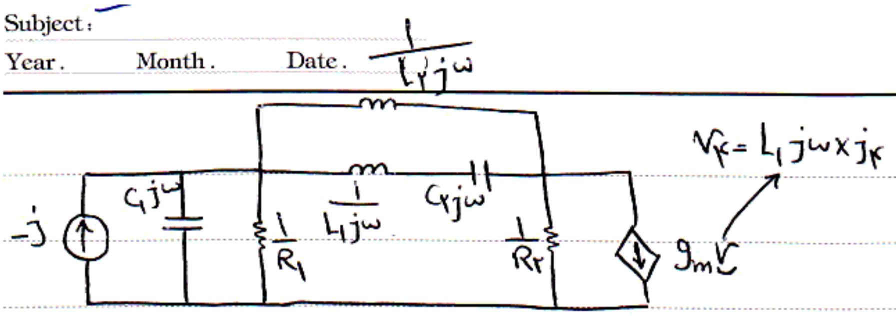


در روش کات ست
چون با ادمیتانس سروکار داریم
همه را به Y تبدیل می‌کنیم

مثلاً $Z_C = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow Y_C = j\omega C$ و نیز $Z_L = Lj\omega \Rightarrow Y_L = \frac{1}{Lj\omega}$

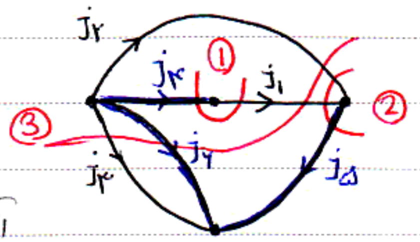
Subject:

Year. Month. Date.



$V_4 = L_1 j\omega \times j_4$

تبدیل به Y ،



آبی درخت
سیاه لینک

گراف ،

$$Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$j_1 = 0 + C_2 j\omega \times V_1 - C_2 j\omega \times 0$$

$$j_2 = 0 + \frac{1}{L_2 j\omega} V_2 - \frac{1}{L_2 j\omega} \times 0$$

$$j_3 = -(-j) + C_1 j\omega \times V_3 - C_1 j\omega \times 0$$

$$j_4 = 0 + \frac{1}{L_1 j\omega} \times V_4 - \frac{1}{L_1 j\omega} \times 0$$

$$j_5 = g_m v + \frac{1}{R_2} V_5 - \frac{1}{R_2} \times 0$$

$$j_5 = g_m \times L_1 j\omega \left(\frac{1}{L_1 j\omega}\right) V_4 + \frac{1}{R_2} V_5 \Rightarrow j_5 = 0 + g_m V_4 + \frac{1}{R_2} V_5$$

$-(-j)$

$$j_6 = 0 + \frac{1}{R_1} V_6 - \frac{1}{R_1} \times 0$$

ادامه به عهده خودتان.

$$j_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_q = \begin{bmatrix} C_2 j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2 j\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 j\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_1 j\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_m & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Y_Q = Q Y_q Q^t \\ i_s = Q Y_q V_s - Q j_s \end{cases}$$

ادامه به عهده خودتان

۲ـ روش نودی: اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد می‌توان Y_Q و i_s را مستقیماً تشکیل داد:

۱) منابع ولتاژ موجود نباشند و اگر هستند به منبع جریان تبدیل شوند.

۲) سلف تزویج شده و منبع وابسته نداشته باشیم.

$$Y_{ij} = \begin{cases} i=j & \text{مجموع ادمیتانس‌های متصل به کات‌ست } i \text{ ام} \\ i \neq j & \text{مجموع ادمیتانس‌های مشترک کات‌ست } i \text{ و } j \end{cases}$$

(اگر جهت دو کات‌ست در شاخه‌ی مشترک یکسان بود با علامت مثبت و در غیر این صورت با علامت منفی جمع می‌زنیم)

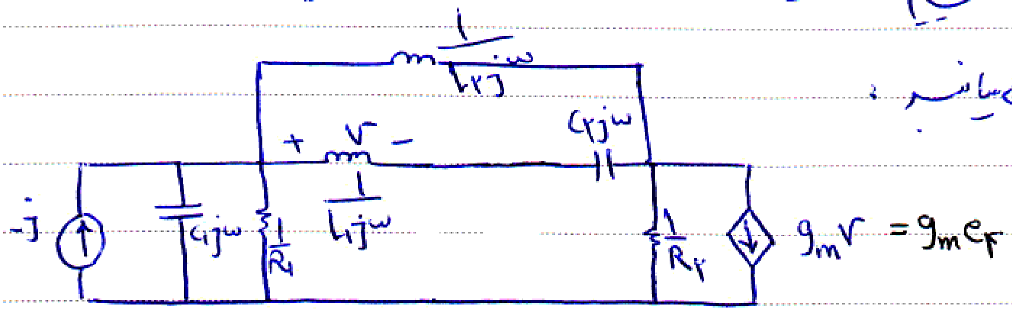
$is_i =$ مجموع جبری منابع جریان موجود در کات‌ست i ام (اگر جهت منبع مخالف جهت کات‌ست بود با علامت مثبت و در غیر این صورت با علامت منفی جمع می‌زنیم)

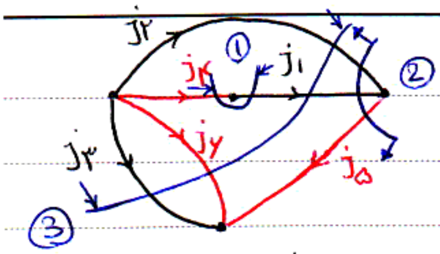
۳ـ روش میانبر: همان روش نودی است با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند.

تمامی وابستگی‌ها را برحسب ولتاژ شاخه‌های درخت می‌نویسیم و منابع وابسته را مانند منابع مستقل فرض می‌کنیم.

معادلات را به روش نودی می‌نویسیم و در نهایت اثر وابستگی را به ماتریس Y_Q برمی‌گردانیم.

مثال) مثال قبل به روش میانبر:





$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{L_1 j\omega}+C_2 j\omega & C_2 j\omega & -C_2 j\omega \\
C_2 j\omega + g_m & \frac{1}{L_2 j\omega}+C_3 j\omega+\frac{1}{R_2} & \frac{-1}{L_2 j\omega}-C_2 j\omega \\
-C_2 j\omega & \frac{-1}{L_2 j\omega}-C_2 j\omega & C_1 j\omega+\frac{1}{R_1}+C_2 j\omega+\frac{1}{L_2 j\omega}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \overset{0}{\cancel{-j}} \\ \cancel{-g_m e_4} \\ \underset{-j}{\cancel{0}} \end{bmatrix}
$$

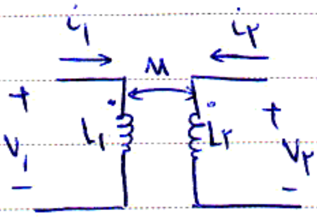
نکات مهم برای حل مسائل:

۱ـ در روش گره و کات ست اساسی منابع جریان را می‌توان به تنهایی یک شاخه در نظر گرفت.

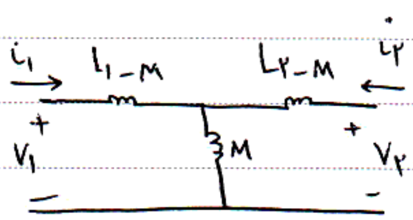
۲ـ در تجزیه و تحلیل مش و حلقه اساسی، منابع ولتاژ را می‌توان به تنهایی یک شاخه در نظر گرفت.

۳ـ در تجزیه و تحلیل گره و کات ست و حلقه اساسی، گراف‌ها می‌توانند غیر مسطح باشند اما در روش مش خیر.

۴ـ در روش‌های میانبر، گفته بودیم سلف تزویج شده نباید موجود باشد، لیکن می‌توان به جای سلف‌های تزویج شده مدار معادل قرار داد و از روش میانبر استفاده کرد.

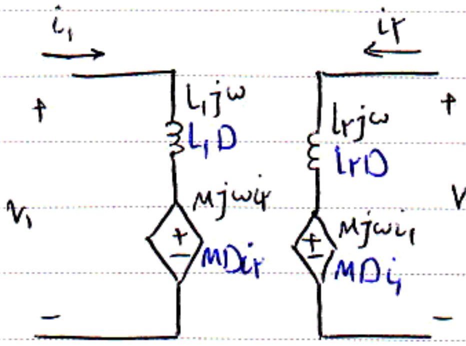


معادل اول: مدار معادل T ،



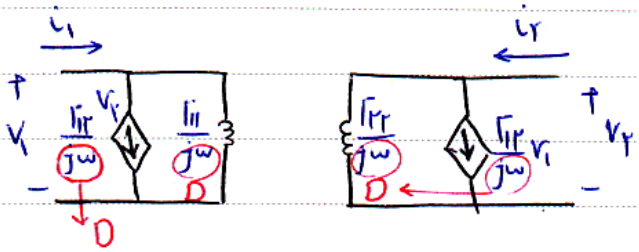
شرط استفاده از این معادل این است که سلف‌ها در مجاورت هم باشند و یا سر مشترک داشته باشند.

معادل دوم:



کاربرد در روش مش و حلقه اساسی.

معادل سوم:

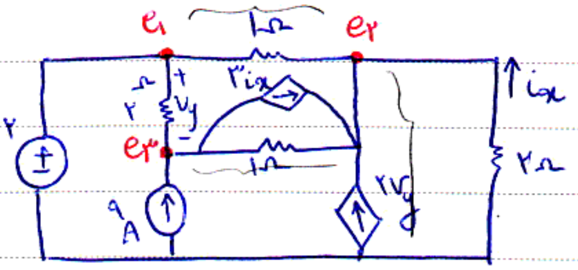


کاربرد در روش گره و کات ست اساسی.

۵ـ در بعضی حالات در هنگام استفاده از روش‌های ترکی منابع مستقلی وجود دارد که قابل تبدیل نیستند یا تبدیل آن‌ها به سختی انجام می‌شود. مثلاً منابع جریان در تبدیل‌های مش و حلقه اساسی و منابع ولتاژ در تبدیل‌های گره و کات ست اساسی. در این موارد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) در تحلیل‌های گره و کات ست اساسی، این منابع (منابع ولتاژ)، ولتاژ گره یا ولتاژ یک شاخه درخت اند. در این حالت در روش‌های ترکی، ولتاژ مشخص شده را در بردار e قرار می‌دهیم، سپس سطر مربوط را از ماتریس Y_n یا Y_Q حذف می‌کنیم.

مثال) حل از روش ماتریس گره



با مراد مربوط e_2

$Y_n \cdot e = I_s \qquad i_x = \frac{-e_2}{2} \longrightarrow 3 i_x = -\frac{3}{2} e_2 \qquad V_y = e_1 - e_3$

$\Rightarrow 2V_y = 2e_1 - 2e_3$

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1-2 & 1+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2} & -1+2 \\ -\frac{1}{2} & -1-\frac{3}{2} & 1+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cancel{-\frac{3}{2}e_2} \cancel{+2e_1} \cancel{-2e_3} \\ -9 \cancel{+\frac{3}{2}e_2} \end{bmatrix} \qquad 9+\frac{3}{2}e_2$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{\frac{3}{2}} & \cancel{-1} & \cancel{-\frac{1}{2}} \\ -3 & 4 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$-6 + 4e_2 + e_3 = 0 \longrightarrow 4e_2 + e_3 = 6 \longrightarrow \boxed{e_3 = 6 - 4e_2}$

$-1 - \frac{5}{2} e_2 + \frac{3}{2} e_3 = -9 \longrightarrow -2 - 5e_2 + 3e_3 = -18 \longrightarrow \boxed{3e_3 - 5e_2 = -16}$

$18 - 12e_2 - 5e_2 = -16 \longrightarrow -17e_2 = -34 \longrightarrow \boxed{e_2 = 2} \qquad e_3 = 6 - 4\times 2 = -2 \rightarrow \boxed{e_3 = -2}$

$i_x = -\frac{e_2}{2} = -1$

ب) در تحلیل های مش و حلقه ی اساسی، این منابع (منابع جریان)، جریان یک مش یا جریان یک حلقه ی اساسی اند.

در این حالت در روش های تحلیلی، جریان مشخص شده را در بردار ... قرار می دهیم، پس سطر مربوطه را از ماتریس Z_B یا Z_m حذف می کنیم.

فصل ۱۲: معادلات حالت

متغیرهای حالت: کوچکترین دسته از متغیرهای شبکه است به طوریکه بتوان با دانستن آن مقادیر در $t=t_0$ و دانستن منابع در $t>t_0$ بتوان رفتار شبکه را در هر لحظه $t\geq t_0$ تعیین کرد. اگر در دست کم n متغیر حالت $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ وجود داشته باشند، بردار حالت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{bmatrix}$$

معادلات حالت: اگر معادلات دیفرانسیل یک شبکه را به صورت زیر بنویسیم، می‌گوییم معادلات حالت تشکیل شده:

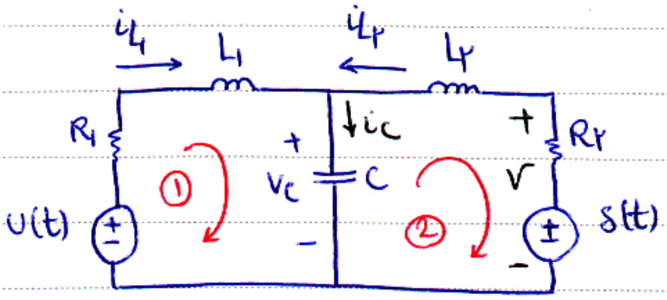
$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(\underbrace{x(t)}_{\text{بردار حالت}}, \underbrace{u(t)}_{\text{بردار ورودی های سیستم}}\big) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

در شبکه‌های خطی و تغییر ناپذیر با زمان:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

خروجی های سیستم $y(t) = Cx(t) + Du(t)$

مثال) مدار زیر را در نظر بگیرید:



KVL (1): $-u(t) + R_1 i_{L_1} + L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + v_C = 0$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{-R_1}{L_1} i_{L_1} - \frac{1}{L_1} v_C + \frac{1}{L_1} u(t)}$$

$$KVL(2):\quad -V_C - L_2\frac{di_{L_2}}{dt} - R_2 i_{L_2} + \delta(t) = 0$$

$$\boxed{\frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{-R_2}{L_2} i_{L_2} - \frac{1}{L_2} V_C + \frac{1}{L_2}\delta(t)}$$

$$KCL:\quad i_1 + i_{L_2} = C\frac{dv_C}{dt} \longrightarrow \boxed{\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_1 + \frac{1}{C} i_{L_2}}$$

براساس این معادلات می‌توان بردار حالت را به صورت زیر نقش کرد:

خروجی سیستم به صورت روبرو است:

$$v = -R_2 i_{L_2} + \delta(t)$$

حال:

$$\dot{x} = Ax + \underbrace{BU}_{\text{بردار ورودی‌ها}} \qquad \underbrace{y}_{\text{بردار خروجی‌ها}} = Cx + DU$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \\ \dot{v}_C \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_C \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} U(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}}_{U}$$

$$v = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -R_2 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_C \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} U(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}}_{U}$$

به طور کلی اگر در یک سیستم، n متغیر حالت، m ورودی و k خروجی داشته باشیم، ابعاد ماتریس‌های فضای حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$[\dot{x}]_{n\times 1} = [A]_{n\times n}[x]_{n\times 1} + [B]_{n\times m}[U]_{m\times 1}$$

$$[y]_{k\times 1} = [C]_{k\times n}[x]_{n\times 1} + [D]_{k\times m}[U]_{m\times 1}$$

سلف باید لینک باشد. باید خازن درخت باشد

کات ست یک درخت یعنی لینک
حلقه یک لینک یعنی درخت

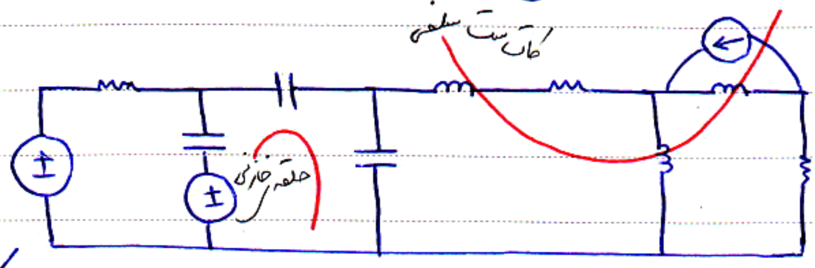
Subject:
Year. Month. Date. ( )

الگوریتم معادلات حالت :

۱- انتخاب متغیرهای حالت : براساس عناصر ذخیره کننده انرژی انجام می‌شود. در مدارهای الکتریکی، معمولاً جریان سلف‌ها و ولتاژ خازن‌ها به عنوان متغیرهای حالت انتخاب می‌شوند. به طور مشابه می‌توان شار سلف‌ها و بار خازن‌ها را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب نمود.

۲- انتخاب درخت مناسب : درختی انتخاب می‌کنیم که شامل خازن‌ها بوده و شامل سلف‌ها نباشد.

سوال: آیا همیشه امکان‌پذیر است؟ خیر، در شرایطی که حلقه خازنی داریم، یکی از خازن‌ها را در درخت انتخاب نمی‌کنیم، همچنین در شرایطی که کات ست سلفی داریم یکی از سلف‌ها را انتخاب می‌کنیم. در نتیجه به تعداد حلقه‌های خازنی و کات ست‌های سلفی از متغیرهای حالت کم می‌شود. حلقه خازنی و کات ست سلفی را با کشتن منابع مستقل می‌توان تشخیص داد.

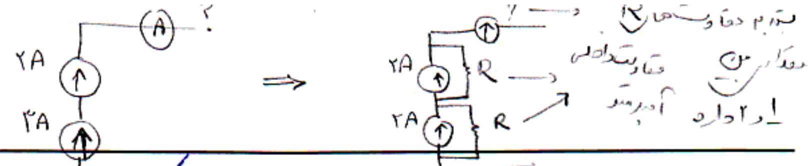


تعداد عناصر ذخیره کننده ۶ ؛ تعداد کات ست سلفی : ۱ ؛ تعداد حلقه خازنی : ۱ ؛ تعداد متغیرهای حالت ۶-۱-۱=۴

۳- KCL را در کات ست‌های خازنی می‌نویسیم و سعی می‌کنیم که بر حسب متغیرهای حالت نوشته شود.

۴- KVL را در حلقه‌های اساسی شامل سلف‌ها می‌نویسیم و سعی می‌کنیم که بر حسب متغیرهای حالت نوشته شود.

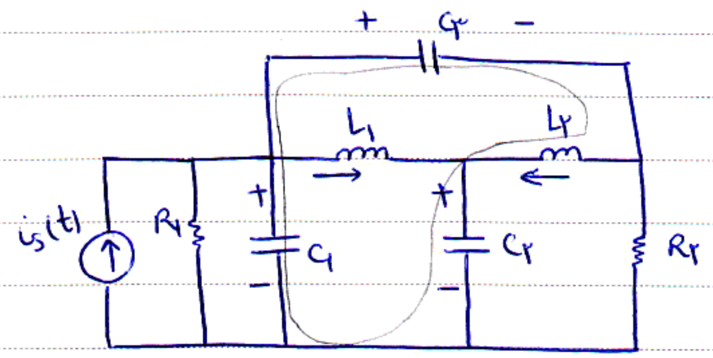
Subject:
Year. Month. Date. ( )



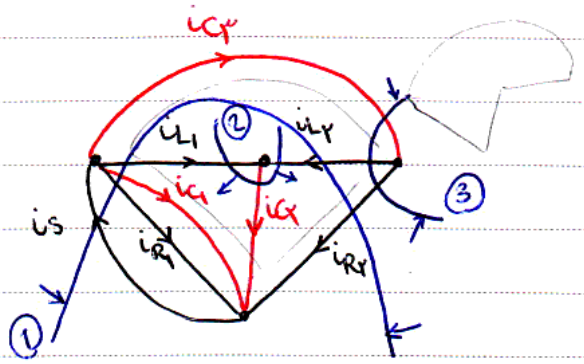
۵- درصورت وجود متغیر غیرحالت در مراحل ۳ و ۴ اگر این متغیر غیرحالت، متغیر یک لینک بود، حلقه اساسی را در آن لینک می‌نویسیم تا متغیر به حالت تبدیل شود.

۶- درصورت وجود متغیر غیرحالت در مراحل ۳ و ۴، درصورتیکه این متغیر مربوط به یک شاخه درخت بود، کات ست اساسی را در آن شاخه درخت می‌نویسیم تا متغیر به حالت تبدیل شود.

مثال) معادلات حالت مدار زیر؟



منبع جریان را به عنوان یک شاخه مستقل در نظر می‌گیریم



$$x(t) = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{C_3} \end{bmatrix}$$

$$KCL\ (1):\quad i_{L_1} + i_{L_2} + C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} + i_{R_1} - i_s + i_{R_2} = 0$$

$$\boxed{\frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{-1}{C_1} i_{L_1} - \frac{1}{C_1} i_{L_2} - \frac{1}{C_1} \overset{\text{غیرحالت}}{i_{R_1}} - \frac{1}{C_1} \overset{\text{غیرحالت}}{i_{R_2}} + \frac{1}{C_1} i_s} \quad (1)$$

$$KCL\ (2):\quad C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} - i_{L_1} - i_{L_2} = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{dv_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_{L_1} + \frac{1}{C_2} i_{L_2}}$$

غیرحالت

$$KCL(3):\ C_3\frac{dv_{C_3}}{dt}-i_{L_2}-i_{R_2}=0 \longrightarrow \frac{dv_{C_3}}{dt}=\frac{1}{C_3}i_{L_2}+\frac{1}{C_3}i_{R_2} \quad ②$$

$$KVL(1):\ L_1\frac{di_{L_1}}{dt}+v_{C_2}-v_{C_1}=0 \longrightarrow \frac{di_{L_1}}{dt}=\frac{1}{L_1}v_{C_1}-\frac{1}{L_1}v_{C_2}$$

$$KVL(2):\ L_2\frac{di_{L_2}}{dt}+v_{C_2}-v_{C_1}+v_{C_3}=0 \longrightarrow \frac{di_{L_2}}{dt}=\frac{1}{L_2}v_{C_1}-\frac{1}{L_2}v_{C_2}-\frac{1}{L_2}v_{C_3}$$

$$KVL:\ R_1 i_{R_1}-v_{C_1}=0 \longrightarrow i_{R_1}=\frac{v_{C_1}}{R_1}$$

حذف غیرحالت i_{R_1} :

$$KVL:\ R_2 i_{R_2}-v_{C_1}+v_{C_3}=0 \longrightarrow$$

حذف غیرحالت i_{R_2} :

$$i_{R_2}=\frac{1}{R_2}v_{C_1}-\frac{1}{R_2}v_{C_3}$$

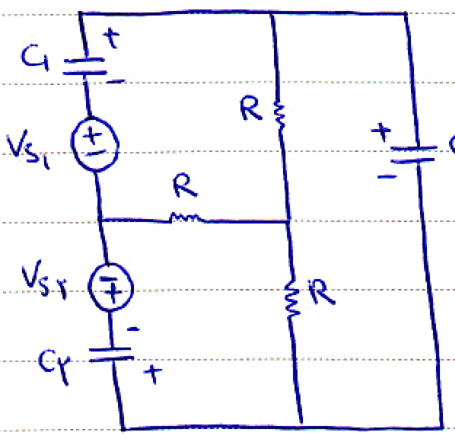
بازنویسی ① و ②

$$\frac{dv_{C_1}}{dt}=-\frac{1}{C_1}i_{L_1}-\frac{1}{C_1}i_{L_2}-\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_{C_1}-\frac{1}{R_2}v_{C_3}+\frac{1}{C_1}i_s$$

$$\frac{dv_{C_3}}{dt}=\frac{1}{C_3}i_{L_2}+\frac{1}{C_3}\frac{v_{C_1}}{R_2}-\frac{1}{C_3R_2}v_{C_3}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{i}_{L_1}\\ \dot{i}_{L_2}\\ \dot{v}_{C_1}\\ \dot{v}_{C_2}\\ \dot{v}_{C_3}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{L_1}&\frac{-1}{L_1}&0\\ 0&0&\frac{1}{L_2}&\frac{-1}{L_2}&\frac{-1}{L_2}\\ \frac{-1}{C_1}&\frac{-1}{C_1}&\frac{-1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)&0&\frac{-1}{R_2}\\ \frac{1}{C_2}&\frac{1}{C_2}&0&0&0\\ 0&\frac{1}{C_3}&\frac{1}{C_3R_2}&0&\frac{-1}{C_3R_2}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}i_{L_1}\\ i_{L_2}\\ v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ v_{C_3}\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\ \frac{1}{C_1}\\0\\0\end{bmatrix}}_{B}i_s(t)$$

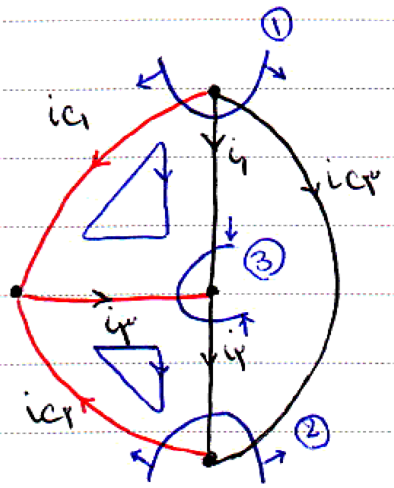
مثال) قبلاً گفتیم اگر متغیرهای حالت برحسب هم نوشته شوند از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود مانند حلقه خازنی یا کات ست سلفی.



$$V_{C2}+V_{S2}-V_{S1}-V_{C1}+V_{C3}=0$$

$$V_{C3}=V_{C1}-V_{C2}+V_{S1}-V_{S2}$$

یعنی از متغیرهای حالت یکی کم می‌شود. از بین سه متغیر موجود ۲ تا را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.



$$x=\begin{bmatrix}V_{C1}\\ V_{C2}\end{bmatrix}$$

غیرحالت　　غیرحالت

$$KCL(1):\quad C_1\frac{dV_{C1}}{dt}+i_1+i_{C3}=0\longrightarrow \dot{V}_{C1}=-\frac{1}{C_1}i_1-\frac{1}{C_1}i_{C3}\quad ①$$

غیرحالت　　غیرحالت

$$KCL(2):\quad C_2\frac{dV_{C2}}{dt}-i_2-i_{C3}=0\longrightarrow \dot{V}_{C2}=\frac{1}{C_2}i_2+\frac{1}{C_2}i_{C3}\quad ②$$

حذف غیرحالت i_1 : i_1 متغیر لینک است. حلقه اساسی این لینک را می‌نویسیم.

$$KVL:\quad Ri_1-Ri_3-V_{S1}-V_{C1}=0\longrightarrow i_1=i_3+\frac{1}{R}V_{C1}+\frac{1}{R}V_{S1}\quad Ⓐ$$

غیرحالت

i_3 مربوط به یک شاخه درخت است. کات ست اساسی این شاخه را می‌نویسیم.

$$KCL(3):\quad i_3+i_1-i_2=0\longrightarrow i_3=i_2-i_1$$

جایگذاری در (A)

$$2i_1 = i_2 + \frac{1}{R}V_{C_1} + \frac{1}{R}V_{S_1}$$

غیرحالت

$$\longrightarrow \boxed{i_1 = \frac{1}{2}i_2 + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}} \quad (B)$$

i_2 متغیر لینک است. حلقه اساسی این لینک را می‌نویسیم.

$$KVL(2):\ Ri_2 + V_{C_2} + V_{S_2} + Ri_3 = 0 \longrightarrow i_2 = -\underbrace{i_3}_{i_1 - i_2} - \frac{1}{R}V_{C_2} - \frac{1}{R}V_{S_2}$$

$$2i_2 = i_1 - \frac{1}{R}V_{C_2} - \frac{1}{R}V_{S_2} \longrightarrow \boxed{i_2 = \frac{1}{2}i_1 - \frac{1}{2R}V_{C_2} - \frac{1}{2R}V_{S_2}} \quad (C)$$

جایگذاری (C) در (B):

$$i_1 = \frac{1}{4}i_1 - \frac{1}{4R}V_{C_2} - \frac{1}{4R}V_{S_2} + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}$$

$$\frac{3}{4}i_1 = \frac{-1}{4R}V_{C_2} - \frac{1}{4R}V_{S_2} + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}$$

$$\boxed{i_1 = \frac{-1}{3R}V_{C_2} - \frac{1}{3R}V_{S_2} + \frac{2}{3R}V_{C_1} + \frac{2}{3R}V_{S_1}} \quad (E)$$

با جایگذاری (E) در (C)، i_2 نیز برحسب متغیرهای حالت بیان می‌شود.

$$i_2 = \frac{-1}{6R}V_{C_2} - \frac{1}{6R}V_{S_2} + \frac{1}{3R}V_{C_1} + \frac{1}{3R}V_{S_1} - \frac{1}{2R}V_{C_2} - \frac{1}{2R}V_{S_2}$$

$$\boxed{i_2 = \frac{1}{3R}V_{C_1} - \frac{2}{3R}V_{C_2} - \frac{2}{3R}V_{S_2} + \frac{1}{3R}V_{S_1}} \quad (F)$$

i_1 و i_2 طبق روابط E ، F ، هر دو به حالت تبدیل شوند.

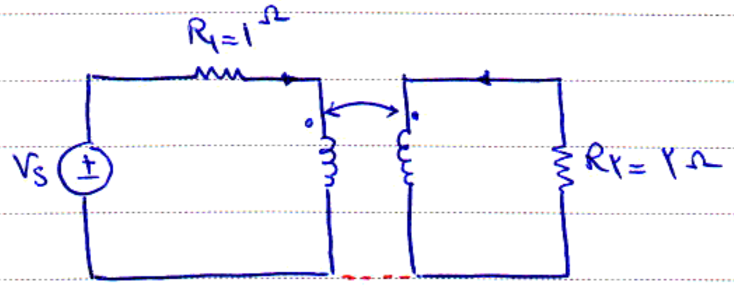
حذف غیرحالت i_{C_3} : $V_{C_3} = V_{C_1} - V_{C_2} + V_{S_1} - V_{S_2}$ ؛ داشتیم

$$i_{c_3} = C_3 \dot{v}_{c_3} \longrightarrow i_{c_3} = C_3 \dot{v}_{c_1} - C_3 \dot{v}_{c_2} + C_3 \dot{V}_{s_1} - C_3 \dot{V}_{s_2} \quad (9)$$

با جایگذاری 9 در ① و ② و استفاده از سایر روابط نامگذاری شده، معادلات حالت به دست می‌آید. ادامه به عهده دانشجو!

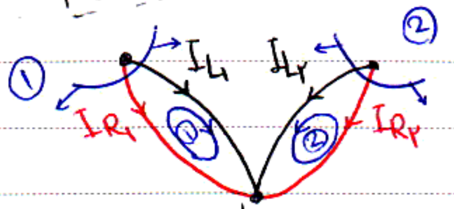
مثال)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



خودمان چسبیده در نظر می‌گیریم

گراف:



به ازای هر یک از سلف‌ها، حلقه اساسی را می‌نویسیم.

$$\lambda_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \xrightarrow{d/dt} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$

$$KVL(1): \quad 1 \times \frac{dI_{L_1}}{dt} + 1 \frac{dI_{L_2}}{dt} - V_s - 1 \times I_{R_1} = 0$$

غیرحالت

$$\dot{I}_{L_1} + \dot{I}_{L_2} = I_{R_1} + V_s \quad ①$$

غیرحالت

$$KVL(2): \quad 2 \frac{dI_{L_2}}{dt} + 1 \times \frac{dI_{L_1}}{dt} - 2 I_{R_2} = 0 \longrightarrow 2\dot{I}_{L_2} + \dot{I}_{L_1} = 2 I_{R_2} \quad ②$$

حذف غیرحالت i_{R_1} : i_{R_1} متغیر یک شاخه درخت است، کات‌ست اساسی شاخه آن را می‌نویسیم.

$$KCL(1): \quad I_{L_1} + I_{R_1} = 0 \longrightarrow I_{R_1} = -I_{L_1} \quad (A)$$

حذف غیرحالت I_{R_2} : متغیر یک شاخه در درخت است، کات ست اساسی آن را می‌نویسیم.

$$\text{kcl}\ (2):\quad I_{L_2} + I_{R_2} = 0 \longrightarrow \boxed{I_{R_2} = -I_{L_2}} \quad (B)$$

با جایگذاری (A) در (1) و (B) در (2)،

$$\begin{cases} \dot{I}_{L_1} + \dot{I}_{L_2} = -I_{L_1} + V_s \longrightarrow \dot{I}_{L_1} = -I_{L_1} - \dot{I}_{L_2} + V_s \quad (3) \\ 2\dot{I}_{L_2} + \dot{I}_{L_1} = -2I_{L_2} \quad (4) \end{cases}$$

با جایگذاری (3) در (4)،

$$2\dot{I}_{L_2} - I_{L_1} - \dot{I}_{L_2} + V_s = -2I_{L_2} \longrightarrow \boxed{\dot{I}_{L_2} = I_{L_1} - 2I_{L_2} - V_s} \quad (5)$$

جایگذاری (5) در (3):

$$\dot{I}_{L_1} = -I_{L_1} - I_{L_1} + 2I_{L_2} + V_s + V_s$$

$$\boxed{\dot{I}_{L_1} = -2I_{L_1} + 2I_{L_2} + 2V_s} \quad (6)$$

از (5) و (6)،

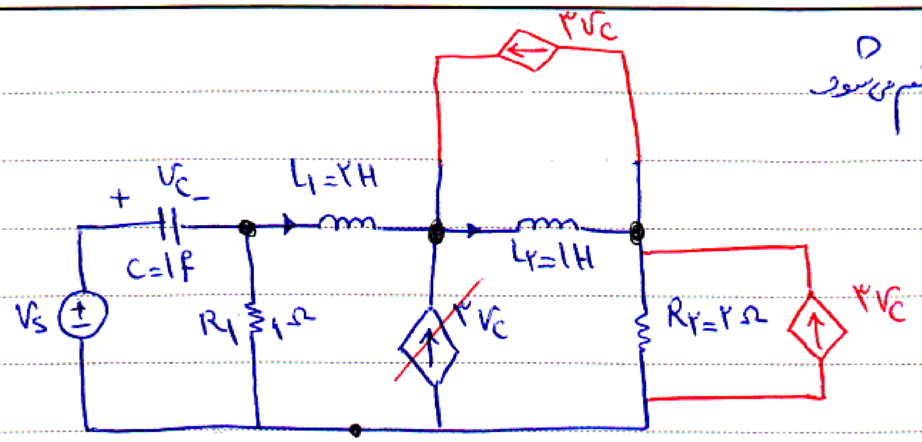
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{L_1} \\ \dot{I}_{L_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} I_{L_1} \\ I_{L_2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B} V_s$$

نکته) در شرایطی که در حلقه‌ی خازنی و کات ست سلفی داشته باشیم به دلیل اینکه متغیرهای حالت وابسته هم نوشته می‌شوند، از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود.

حتی منابع وابسته نیز علاوه بر شرایط فوق، ممکن است متغیرهای حالت را وابسته هم سازی کند، در این صورت

بازهم از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود

مثال)



تعداد عناصر ذخیره‌کننده انرژی ۳ است. به نظر می‌رسد ۳ متغیر حالت داشته باشیم ولی اگر دقت کنیم مشاهده می‌کنیم که

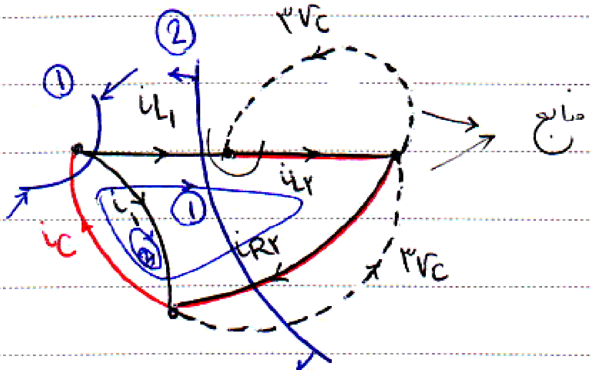
KCL : $3V_C = i_{L_2} - i_{L_1}$

یعنی یکی از متغیرهای حالت برحسب بقیه بیان می‌شود، در نتیجه ۲ متغیر حالت داریم. از ۳ متغیر موجود، ۲ تا را به دلخواه انتخاب می‌کنیم

$$x = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ V_C \end{bmatrix}$$

حال متغیرهای حالت را به دست می‌آوریم:

درخت :



غیرحالت

KCL (1) : $C\dfrac{dV_C}{dt} - i_1 - i_{L_1} = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{V}_C = \dfrac{1}{C} i_{L_1} + \dfrac{1}{C} i_1}$ ①

KVL (1) : $L_1 \dfrac{di_{L_1}}{dt} + L_2 \dfrac{di_{L_2}}{dt} + R_2 i_{R_2} - V_s + V_C = 0$

غیرحالت

$L_1 \dot{i}_{L_1} + L_2 \dot{i}_{L_2} + R_2 i_{R_2} - V_s + V_C = 0$ ②

 غیرحالت

حذف غیرحالت i_1 : i_1 متغیر لینک است، حلقه اساسی آن را می‌نویسیم.

$$KVL(2): R_1 i_1 - V_s + V_c = 0 \longrightarrow \boxed{i_1 = \frac{-1}{R_1}V_c + \frac{1}{R_1}V_s} \quad (A)$$

حذف غیرحالت i_{R_2} : i_{R_2} متغیر شاخه درخت است. کات‌ست اساسی این شاخه را می‌نویسیم.

$$KCL(2): i_{R_2} - i_{L_1} - 3V_c = 0 \longrightarrow i_{R_2} = i_{L_1} + 3V_c \quad (B)$$

حذف غیرحالت i_{L_2} :

داشتیم: $i_{L_2} = i_{L_1} + 3V_c \longrightarrow \boxed{\dot i_{L_2} = \dot i_{L_1} + 3\dot V_c} \quad (C)$

جانشینی (A)، (B)، (C) در (1) و (2)

$$\boxed{\dot V_c = \frac{1}{C} i_{L_1} - \frac{1}{R_1 C} V_c + \frac{1}{CR_1} V_s} \quad (3)$$

$$L_1 \dot i_{L_1} + L_2 \dot i_{L_1} + 3L_2 \dot V_c + R_2 i_{L_1} + 3R_2 V_c - V_s + V_c = 0$$

$$(L_1 + L_2)\dot i_{L_1} + \underbrace{\frac{3L_2}{C} i_{L_1} - \frac{3L_2}{R_1 C} V_c + \frac{3L_2}{R_1 C} V_s}_{3L_2 \dot V_c} + R_2 i_{L_1} + 3R_2 V_c - V_s + V_c = 0$$

$$\boxed{(L_1+L_2)\dot i_{L_1} + \left(\frac{3L_2}{C} + R_2\right) i_{L_1} + \left(1 + 3R_2 - \frac{3L_2}{R_1 C}\right)V_c + V_s\left(\frac{3L_2}{R_1 C} - 1\right)V_s = 0}$$

عددگذاری:

$$\boxed{\dot V_c = i_{L_1} - V_c + V_s}$$

$$3\dot i_{L_1} + 5 i_{L_1} + 4V_c + 2V_s = 0 \longrightarrow \boxed{\dot i_{L_1} = -\frac{5}{3} i_{L_1} - \frac{4}{3}V_c - \frac{2}{3}V_s}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4/3 & -5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} v_s$$

نکته) درصورت لزوم می‌توان منابع را به عنوان یک شاخه مستقل درنظر گرفت، در این صورت سعی می‌شود منابع ولتاژ جزء شاخه‌های درخت و منابع جریان جزء لینک‌ها باشند.

فصل ۱۳ : تبدیلات لاپلاس

از این روش برای تحلیل مدارات خطی و تغییرناپذیر با زمان استفاده می‌شود.

ابتدا مروری بر روابط لاپلاس :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} \qquad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha} \qquad \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[\sin\beta t] = \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \qquad \mathcal{L}[\cos\beta t] = \frac{s}{s^2+\beta^2}$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n$$

مثال)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3!}\cdot\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{6}t^3$$

* در بسیاری از مواقع، معکوس گیری از لاپلاس و یا لاپلاس گیری از توابع از خواص تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود.

مروری بر خواص :

۱) $$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}f(t)\right] = F(s-\alpha)$$

مثال) $$\mathcal{L}\left[e^{-2t}\cos(3t)\right] = ?$$

$$\mathcal{L}\{\cos(3t)\} = \frac{s}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t}\cos 3t\right] = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

۲) $$L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(S)$$

مثال) $$L\left[t^2 e^{3t}\right] = ? \quad (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{S-3}\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(S-3)^2}\right) = \frac{2}{(S-3)^3}$$

۳) $$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = SF(S) - f(0^-)$$

$2 = 2\times 1 \longrightarrow L\{\delta(t)\}$

علم ضربه دارد.

۴) $$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = S^n F(S) - S^{n-1} f(0^-) - S^{n-2} f(0^-) - \dots - Sf(0^-) - f(0^-)$$

مشتقات ضربه $\quad L\left[\delta^{(n)}(t)\right] = S^n$

نکته: باید هنگام استفاده از قاعده مشتق گیری، ضربه‌های ناشی از $f(0^-)$ ظاهر می‌شود را فراموش نکرد.

قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی:

قضیه مقدار نهایی:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{S\to 0} SF(S)$$

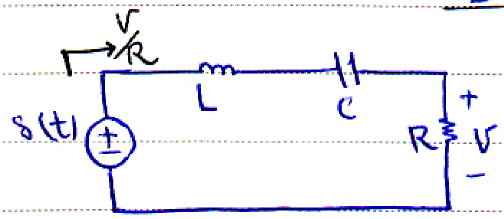
قضیه مقدار اولیه:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{S\to\infty} SF(S)$$

یادآوری: پاسخ ضربه و پاسخ ضربه یک مدار همان پاسخ حالت صفر است.

شرایط اولیه صفر

مثال) در مدار زیر با استفاده از تبدیل لاپلاس، پاسخ ضربه سیستم را بدست آورید. (تابع تبدیل سیستم؟)



⇐ پاسخ ورودی صفر

شرایط اولیه صفر

$$\delta(t) = L\frac{d}{dt}\left[\frac{v}{R}\right] + \frac{1}{C}\int \frac{v}{R}\,dt + \cancel{v_c(0)} + v$$

هدف بدست آوردن v است.

$$\delta(t) = \frac{L}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}\int v\,dt + v \xrightarrow{\mathcal{L}} 1 = \frac{L}{R}\left[sV(s) - \cancel{v(0^-)}\right] + \frac{1}{RCs}V(s) + V(s)$$

$$1 = V(s)\left[\frac{Ls}{R} + \frac{1}{RCs} + 1\right]$$

$$1 = V(s)\left[\frac{LCs^2 + 1 + RCs}{RsC}\right] \longrightarrow V(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + 1 + RCs} \Rightarrow V(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

* برای بدست آوردن پاسخ در حوزه زمان باید معکوس تبدیل لاپلاس را انجام داد.

بسط به کسرهای جزئی:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad m \leq n$$

ریشه‌های صورت $\quad P(s) = 0 \xrightarrow{\text{صفرها}} z_1, z_2, \ldots, z_m$

ریشه‌های مخرج $\quad Q(s) = 0 \xrightarrow{\text{قطب‌ها}} P_1, P_2, \ldots, P_n$

۱- قطب‌ها حقیقی و ساده

$$Q(s) = (s - P_1)(s - P_2)(s - P_3)\cdots(s - P_n)$$

$$F(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{K_j}{(s - P_j)} \qquad K_j = (s - P_j)F(s)\Big|_{s = P_j}$$

مثال)

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1 = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2}{s+2}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$K_2 = (S+2)F(S)\Big|_{S=-2} = \frac{2}{S+1}\Big|_{S=-2} = -2$$

$$f(t) = \left[2e^{-t} - 2e^{-2t}\right]u(t)$$

۲ـ قطب‌ها حقیقی ولی تکراری؛

$$Q(s) = (s-p_1)^{n_1}(s-p_2)^{n_2}(s-p_3)^{n_3}\cdots(s-p_r)^{n_r}$$

$$F(S) = \frac{k_{11}}{(s-p_1)} + \frac{k_{12}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{k_{1n_1}}{(s-p_1)^{n_1}} +$$

$$\frac{k_{21}}{(s-p_2)} + \frac{k_{22}}{(s-p_2)^2} + \cdots + \frac{k_{2n_2}}{(s-p_2)^{n_2}} +$$

$$\vdots$$

$$\frac{k_{r1}}{(s-p_r)} + \frac{k_{r2}}{(s-p_r)^2} + \cdots + \frac{k_{rn_r}}{(S-P_r)^{n_r}}$$

$$k_{in_i} = (s-p_i)^{n_i}F(s)\Big|_{s=p_i}$$

$$k_{i\,n_i-1} = \frac{d}{ds}\left[(s-p_i)^{n_i}F(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

$$k_{i\,n_i-2} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_i)^{n_i}F(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

$$k_{i\,n_i-3} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{ds^3}\left[(s-p_i)^{n_i}F(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

$$\vdots$$

مثال

$$F(S) = \frac{1}{(S+1)^3 S^2}$$

$$= \frac{k_{۱۱}}{(s+۱)} + \frac{k_{۱۲}}{(s+۱)^۲} + \frac{k_{۱۳}}{(s+۱)^۳} + \frac{k_{۲۱}}{s} + \frac{k_{۲۲}}{s^۲}$$

$$k_{۱۳} = (s+۱)^۳ F(s)\Big|_{s=-۱} = \frac{۱}{s^۲}\Big|_{s=-۱} = ۱$$

$$k_{۱۲} = \frac{d}{ds}\left[(s+۱)^۳ F(s)\right]\Big|_{s=-۱} = \frac{d}{ds}\left[\frac{۱}{s^۲}\right]\Big|_{s=-۱} = \frac{-۲}{s^۳}\Big|_{s=-۱} = ۲$$

$$k_{۱۱} = \frac{۱}{۲!}\frac{d^۲}{ds^۲}\left[(s+۱)^۳ F(s)\right]\Big|_{s=-۱} = \frac{d}{ds}\left[-\frac{۱}{s^۳}\right]\Big|_{s=-۱} = \frac{۳}{s^۴}\Big|_{s=-۱} = ۳$$

$$k_{۲۲} = \left[s^۲ F(s)\right]\Big|_{s=۰} = \frac{۱}{(s+۱)^۳}\Big|_{s=۰} = ۱$$

$$k_{۲۱} = \frac{d}{ds}\left[s^۲ F(s)\right]\Big|_{s=۰} = \frac{d}{ds}\left[\frac{۱}{(s+۱)^۳}\right]\Big|_{s=۰} = \frac{-۳}{(s+۱)^۴}\Big|_{s=۰} = -۳$$

$$f(t) = \left[۳e^{-t} + ۲te^{-t} + \frac{۱}{۲}t^۲e^{-t} + t - ۳\right]u(t)$$

۳ـ قطب‌های زوج:

$$P_{۱,۲} = \alpha \pm j\beta$$

$$F(s) = \frac{k_۱}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{k_۲}{s-(\alpha-j\beta)}$$

تمرین) نشان دهید $k_۱$ و $k_۲$ زوج مزدوج‌اند.

$$k_۱ = |k| \angle \theta_k$$

$$k_۲ = |k| \angle -\theta_k$$

$$F(s) = \frac{k}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{k^*}{(s-(\alpha-j\beta))}$$

$$f(t) = ke^{(\alpha+j\beta)t} + k^* e^{(\alpha-j\beta)t}$$

$$f(t) = |k| e^{j\theta_k} \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{j\beta t} + |k| e^{-j\theta_k} \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{-j\beta t}$$

$$f(t) = |k|\, e^{\alpha t}\left[e^{j(\beta t+\theta_k)} + e^{-j(\beta t+\theta_k)} \right]$$

$$\boxed{f(t) = 2|k|\, e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta_k)}$$

مثال) $F(s) = \dfrac{s^2+3s+7}{(s^2+4s+8)(s+1)}$ $P: -2+2j\,,\ -2-2j\,,\ -1$

$$F(s) = \frac{k}{(s-(-2+2j))} + \frac{k^*}{(s-(-2-2j))} + \frac{k_1}{s+1}$$

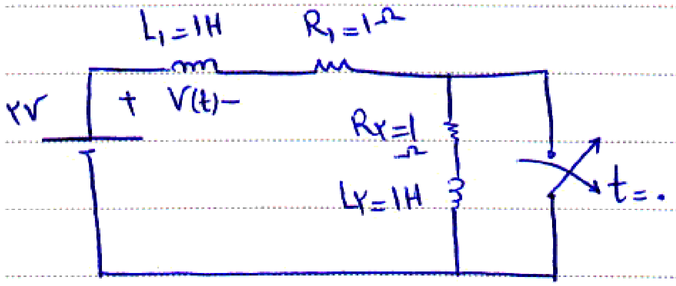
$$k = (s-(-2+2j))\,F(s)\Big|_{s=-2+2j} = \frac{(-2+2j)^2+3(-2+2j)+7}{(-2+2j+2+2j)(-2+2j+1)} = \frac{j}{4} = \frac{1}{4}\angle 90$$

$$\begin{cases} |k| = \dfrac{1}{4} \\ \theta_k = 90 \end{cases}$$

$$k_1 = (s+1)\,F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{s^2+3s+7}{s^2+4s+8}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$\longrightarrow f(t) = \left[\frac{1}{2} e^{-2t}\cos(2t+90) + e^{-t} \right] u(t)$$

مثال) در مدار زیر با استفاده از آنالیز در حوزه لاپلاس، $v(t)$ را به دست آورید.



توضیحی در مورد مدارهای کلیددار:

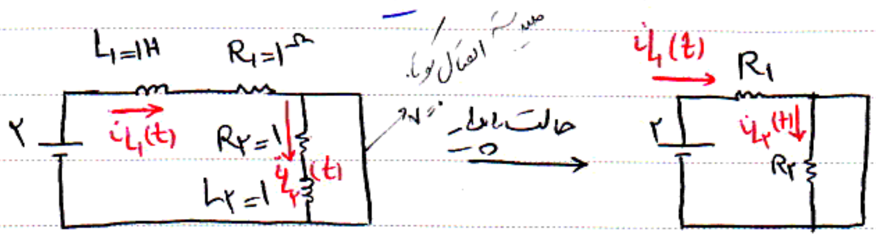
اگر در لحظه $t = t_0$، کلید تغییر وضعیت دهد آنالیز را در سه مرحله زیر انجام می‌دهیم:

۱) $t \leq t_0$ فرض می‌شود که مدار در وضعیت پایدار خود قرار دارد، یعنی در رژیم DC، سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها اتصال باز فرض می‌شوند. و اگر در رژیم سینوسی باشیم از فازور استفاده می‌کنیم.

۲) $t = t_0$ در معادلات بخش قبل با قرار دادن $t=t_0$ شرایط اولیه را برای مرحله بعد به دست می‌آوریم.

۳) $t > t_0$ با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادلات حاکم بر مدار را به دست می‌آوریم.

حل مثال) $t \leq t_0$

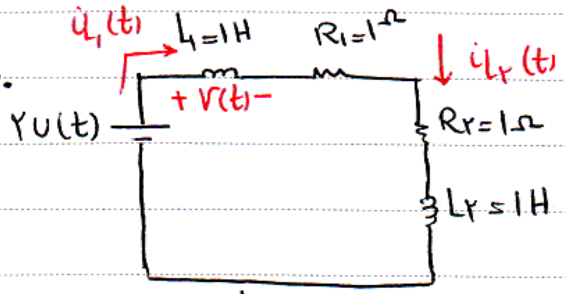


$$i_{L_1}(t) = \frac{2}{R_1} = \frac{2}{1} = 2A \quad , \quad i_{L_2}(t) = 0 \quad , \quad v(t) = 0$$

اتصال کوتاه

$$t = 0 \longrightarrow \begin{cases} i_{L_1}(0) = 2 \\ i_{L_2}(0) = 0 \end{cases}$$

$t > t_0$



KVL:
$$2U(t) = L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} + R_1 i_{L_1}(t) + R_2 i_{L_2}(t) + L_2 \frac{di_{L_2}}{dt}$$

$$2U(t) = \frac{di_{L_1}(t)}{dt} + i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t) + \frac{di_{L_2}(t)}{dt}$$

نکته: اگرچه $i_{L_1}(t) = i_{L_2}(t)$ اما چون شرایط اولیه آن‌ها فرق می‌کند از مساوی قرار دادن آن‌ها قبل از انتقال به حوزه لاپلاس پرهیز می‌کنیم.

به حوزه لاپلاس می‌بریم:

$$\frac{2}{s} = sI_{L_1}(s) - \underbrace{i_{L_1}(0^-)}_{2} + I_{L_1}(s) + I_{L_2}(s) + sI_{L_2}(s) - \underbrace{i_{L_2}(0^-)}_{0}$$

$$I_{L_1}(s) = I_{L_2}(s) \triangleq I_L(s)$$

$$\frac{2}{s} = I_L(s)(2s+2) - 2 \longrightarrow \frac{2}{s} + 2 = 2I_L(s)(s+1)$$

$$\frac{2(s+1)}{s} = 2(s+1)I_L(s) \longrightarrow I_L(s) = \frac{1}{s}$$

نکته: تا رسیدن به جواب نهایی، استفاده از حوزه لاپلاس را ادامه می‌دهیم

$$\begin{cases} i_{L_1}(t) = u(t) \\ v(t) = L_1 \dfrac{di_{L_1}(t)}{dt} = 1 \times \dfrac{d}{dt}(u(t)) = \delta(t) \end{cases} \quad \times$$

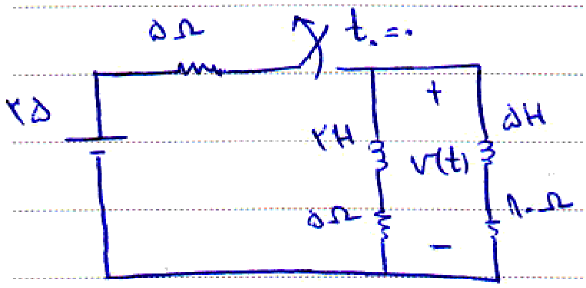
اشتباه

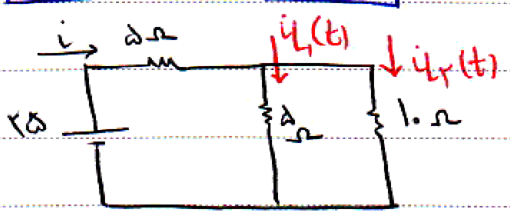
حال:

$$v(t) = L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} \xrightarrow{L} V(s) = L_1\left(sI_L(s) - i_{L_1}(0)\right) = 1 \times \left(s \times \frac{1}{s} - 2\right) = -1$$

$$V(s) = -1 \Rightarrow v(t) = -\delta(t)$$

مثال) مدار زیر را با استفاده از آنالیز در حوزه لاپلاس حل کرده و $v(t)$ را به دست آورید؟



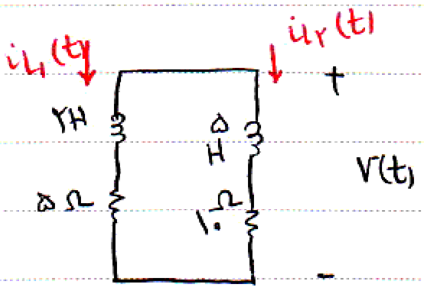


$t \le 0$

$$i = \frac{25}{5 + (5 \| 10)} = 3A \qquad i_{L_1}(t) = 3 \times \frac{10}{15} = 2A \qquad i_{L_2}(t) = 3 \times \frac{5}{15} = 1A$$

$$i_{L_1}(0^-) = 2A \quad , \quad i_{L_2}(0^-) = 1A \qquad t=0$$

$t>0$



$$KVL: \; 2\frac{di_{L_1}(t)}{dt} + 5 i_{L_1}(t) - 10 i_{L_2}(t) - 5\frac{di_{L_2}(t)}{dt} = 0$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} 2\left[s I_{L_1}(s) - i_{L_1}(0^-)\right] + 5 I_{L_1}(s) - 10 I_{L_2}(s) - 5\left[s I_{L_2}(s) - i_{L_2}(0^-)\right] = 0$$

$$i_{L_2}(0^-) = 2 \quad , \quad i_{L_2}(0^-) = 1 \quad , \quad I_{L_2}(s) = -I_{L_1}(s)$$

$$2s I_{L_1}(s) - 4 + 5 I_{L_1}(s) + 10 I_{L_1}(s) + 5s I_{L_1}(s) + 5 = 0$$

$$I_{L_1}(s)\,(7s + 15) = -1 \Rightarrow I_{L_1}(s) = \frac{-1}{7s+15} = \frac{-1/7}{s + \frac{15}{7}}$$

$$\begin{cases} i_{L_1}(t) = \frac{-1}{7} e^{-\frac{15}{7}t} u(t) \\ i_{L_2}(t) = \frac{1}{7} e^{-\frac{15}{7}t} u(t) \end{cases} \qquad i_{L_1}(0^+) = -\frac{1}{7} \; , \; i_{L_2}(0^+) = \frac{1}{7}$$

دقت کنید جریان سلف‌ها تغییر ناگهانی داشته، یعنی در ولتاژ دو سر سلف‌ها ایجاد ضربه خواهد شد.

$$v(t) = 2\frac{di_{L_1}(t)}{dt} + 5 i_{L_1}(t)$$

دقت کنید که از همان $i_{L_1}(t)$ مستقیماً استفاده کنیم، به حوزه لاپلاس می‌بریم،

$$V(s) = 2\left[s I_{L_1}(s) - i_{L_1}(0^-)\right] + 5 I_{L_1}(s)$$

$$V(s) = (2s+5) I_{L_1}(s) - 4 \longrightarrow V(s) = \frac{-(2s+5)}{7s+15} - 4 = \frac{-25-5-28s-60}{7s+15}$$

$$V(s) = \frac{-30s-45}{7s+15}$$

حال لاپلاس معکوس می‌گیریم،

$$F(s) = \frac{-30}{7s+15} = \frac{-30/7}{s+15/7} \xrightarrow{L^{-1}}$$

$$\frac{-30}{7} e^{-\frac{15}{7}t} u(t) = f(t)$$

طبق خواص L^{-1} داشتیم که،

$$sF(s) - f(0^-) \xrightarrow{L^{-1}} \frac{df(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow sF(s) \xrightarrow{L^{-1}} \frac{df(t)}{dt} + f(0^-)$$

$$\frac{-30s}{7s+15} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{d}{dt}\left(\frac{-30}{7} e^{-\frac{15}{7}t} u(t)\right) - \frac{30}{7} e^{-\frac{15}{7}\times 0} u(0^-) =$$

$$\frac{-30}{7} \times \left(-\frac{15}{7}\right) e^{-\frac{15}{7}t} u(t) - \underbrace{\frac{30}{7} e^{-\frac{15}{7}t} \delta(t)}_{-\frac{30}{7}\delta(t)}$$

$* \; f(t)\,\delta(t-T_0) = f(T_0)\,\delta(t-T_0)$

$$\begin{cases} -\dfrac{30s}{7s+15} \xrightarrow{L^{-1}} \dfrac{450}{49} e^{-\frac{15}{7}t} u(t) - \dfrac{30}{7}\delta(t) \\[2ex] \dfrac{-45}{7s+15} \xrightarrow{L^{-1}} \dfrac{-45}{7} e^{-\frac{15}{7}t} u(t) \end{cases}$$

$$v(t)=\frac{450}{49}e^{-15/7\,t}u(t)-\frac{30}{7}\delta(t)-\frac{65}{7}e^{-15/7\,t}u(t)$$

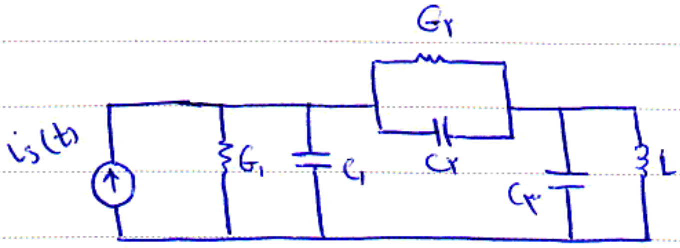
$$v(t)=\frac{-30}{7}\delta(t)-\frac{5}{49}e^{-15/7\,t}u(t)\implies$$ $v(t)$ دارای ضربه است.

تنظیم کردن معادلات جبر خطی:

هدف انتقال معادلات حوزه انتگرال ـ دیفرانسیل به حوزه لاپلاس است.

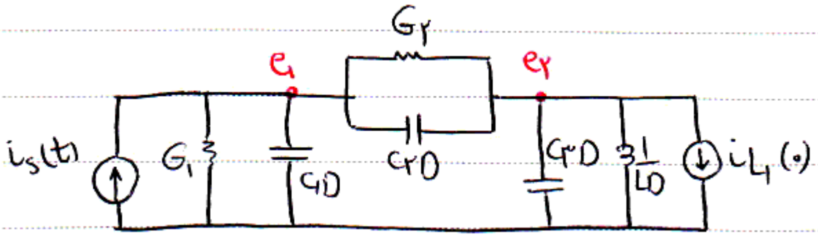
با یک مثال مسئله را بررسی می‌کنیم.

مثال) معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل مدار زیر را در حوزه انتگرال ـ دیفرانسیل به روش گره به دست آورید.



$v_{C_1}(0),\ v_{C_2}(0),\ v_{C_3}(0)$ و $i_L(0)$

حوزه انتگرال ـ دیفرانسیل



از روش ماتریس:

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+C_1D+C_2D & -G_2-C_2D \\ -G_2-C_2D & G_2+C_2D+C_3D+\frac{1}{LD} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_s(t) \\ -i_L(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Df(t)\xrightarrow{L} sF(s)-f(0^-) \\ \frac{1}{D}f(t)\xrightarrow{L}\frac{F(s)}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_1 e_1 + G_2 e_1 + C_1 D e_1 + C_2 D e_1 - G_2 e_2 - C_2 D e_2 = i_s(t) \\ \\ -G_2 e_1 - C_2 D e_1 + G_2 e_2 + C_2 D e_2 + C_3 D e_2 + \frac{1}{LD} e_2 = -i_{L_1}(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (G_1+G_2)e_1 + (C_1+C_2)De_1 - G_2 e_2 - C_2 D e_2 = i_s(t) \\ -G_2 e_1 - C_2 D e_1 + G_2 e_2 + (C_2+C_3)De_2 + \frac{1}{LD} e_2 = -i_{L_1}(0) \end{cases}$$

باانتقال به حوزه لاپلاس :

$$(G_1+G_2)E_1(s) + (C_1+C_2)\left[sE_1(s) - e_1(0^-)\right] - G_2E_2(s)$$

$$-C_2\left[sE_2(s) - e_2(0^-)\right] = I_s(s)$$

$$① \longrightarrow E_1(s)\left(G_1+G_2+C_1s+C_2s\right) + E_2(s)\left(-G_2-C_2s\right) = I_s(s) + C_1 \overset{V_{C_1}(0^-)}{e_1(0^-)} + C_2\overbrace{\left(e_1(0^-)-e_2(0^-)\right)}^{V_{C_2}(0^-)}$$

$$-G_2E_1(s) - C_2\left[sE_1(s) - e_1(0^-)\right] + G_2E_2(s) + (C_2+C_3)\left[sE_2(s) - e_2(0^-)\right] + \frac{1}{Ls}E_2(s)$$

$$= -\frac{i_L(0)}{s}$$

$$② \; E_1(s)\left(-G_2-C_2s\right) + E_2(s)\left(G_2+C_2s+C_3s+\frac{1}{Ls}\right) = -\frac{i_L(0)}{s} - C_2 \overset{V_{C_1}(0^-)}{e_1(0^-)} + C_2\overset{V_{C_3}(0^-)}{e_2(0^-)} + C_3\underset{V_{C_3}(0^-)}{e_2(0^-)}$$

معادلات را به صورت ماتریسی می‌نویسیم :

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+C_1s+C_2s & -G_2-C_2s \\ -G_2-C_2s & G_2+C_2s+C_3s+\frac{1}{Ls} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} =$$

بردار شرایط اولیه

$$\begin{bmatrix} I_s(s) \\ \\ -\dfrac{i_L(0)}{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 e_1(0) + c_2\left(e_1(0) - e_2(0)\right) \\ c_1 v_{c_1}(0) + c_2 v_{c_2}(0) \\ -c_2 e_1(0) + c_2 e_2(0) + c_3 e_2(0) \\ -c_2 v_{c_1}(0) + c_2 v_{c_2}(0) + c_3 v_{c_3}(0) \end{bmatrix}$$

اما از تشکیل معادلات فوق راه حل مستقیمی به صورت زیر وجود دارد:

حوزه‌ی انتگرال دیفرانسیل

بردار شرایط اولیه

روش گره $\quad Y_n . e = i_s \xrightarrow{L} Y_n(s)\ E(s) = I_s(s) + \alpha$

روش مش $\quad Z_m . i = e_s \xrightarrow{L} Z_m(s) . I(s) = E_s(s) + \alpha$

روش حلقه‌ی اساسی $\quad Z_B . i = e_s \xrightarrow{L} Z_B(s) . I(s) = E_s(s) + \alpha$

روش کات ست اساسی $\quad Y_Q . e = i_s \xrightarrow{L} Y_Q(s) . E(s) = I_s(s) + \alpha$

در روش‌های گره و کات ست اساسی، بردار شرایط اولیه شامل ولتاژ اولیه‌ی خازن‌ها است.

در روش‌های مش و حلقه‌ی اساسی، بردار شرایط اولیه شامل جریان اولیه‌ی سلف‌ها است.

$\frac{1}{D} \to \frac{1}{s}$

$D \to s$

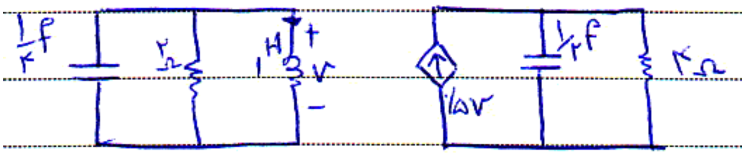
برای تبدیل معادلات انتگرال دیفرانسیل به حوزه‌ی لاپلاس در هر طرف معادلات اول اینکه D ها را به s تبدیل می‌کنیم و هر جا D داریم (یا $\frac{1}{D}$) به جای علامت و همان ضرب، شرایط اولیه را در بردار α جمع می‌کنیم.

فرض کنید معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل یک مدار در آنالیز مش به صورت زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} 2D+\frac{1}{D} & -D & 3 \\ -D & 3D+2 & D \\ 3 & D & 5D+\frac{1}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \\ \delta(t) \end{bmatrix}$$

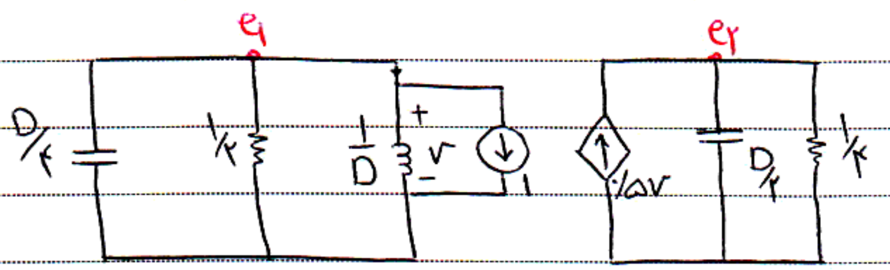
$$\begin{bmatrix} 2s+\frac{1}{s} & -s & 3 \\ -s & 3s+2 & s \\ 3 & s & 5s+\frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2i_1(0^-)-i_2(0^-) \\ -i_1(0^-)+3i_2(0^-)+i_3(0^-) \\ i_2(0^-)+5i_3(0^-) \end{bmatrix}}_{\alpha}$$

مثال) در مدار زیر مقدار v را بیابید؟ (در حوزه لاپلاس)



$i_L(0^-)=1A \qquad V_{C_1}(0^-)=2V \qquad V_{C_2}(0^-)=1V$

ابتدا معادلات انتگرال دیفرانسیل را در یکی از روش ها مثلا گره می نویسیم.



$$\begin{bmatrix} \frac{D}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{D} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}+\frac{D}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5e_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{s} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{4}+\frac{s}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} e_1(0^-) \\ \frac{1}{2} e_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$v_{C_1}(0^-)=2$

$v_{C_2}(0^-)=1$

$$\begin{bmatrix} \frac{s^2+2s+4}{4s} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2s+1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-2}{2s} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$E_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s-2}{2s} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2s+1}{4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{s^2+2s+4}{4s} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2s+1}{4} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{(s-2)(2s+1)}{8s}}{\frac{(s^2+2s+4)(2s+1)}{16s}}$$

$$E_1(s) = \frac{2s-4}{s^2+2s+4}$$

$$P_1, P_2 = -1 \pm j\sqrt{3} \qquad E_1(s) = \frac{K}{\left(s-(-1+j\sqrt{3})\right)} + \frac{K^*}{\left(s-(-1-j\sqrt{3})\right)}$$

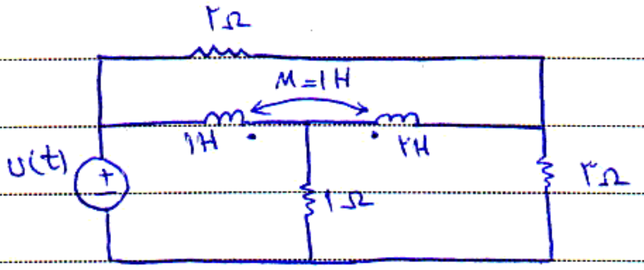
$$K = \left(s-(-1+j\sqrt{3})\right) E_1(s)\Big|_{s=-1+j\sqrt{3}} = \frac{2s-4}{s+1+j\sqrt{3}}\Big|_{s=-1+j\sqrt{3}} = \frac{-2+2j\sqrt{3}-4}{2j\sqrt{3}} = \frac{-3+j\sqrt{3}}{j\sqrt{3}}$$

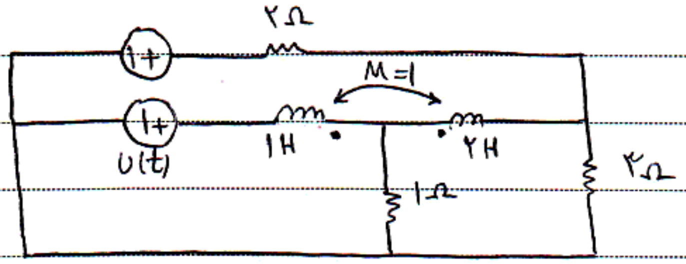
$$= \frac{2\sqrt{3}\angle 150}{\sqrt{3}\angle 90} = 2\angle 60 \quad \begin{cases} |K| = 2 \\ \angle K = 60 \end{cases}$$

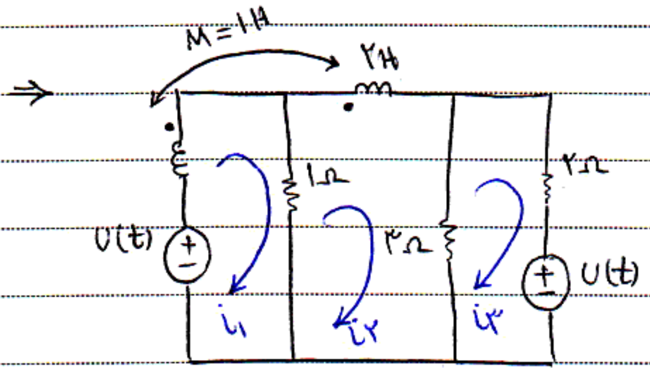
$$v(t) = 2|K| e^{\alpha t} \cos(\beta t + \angle K)$$

$$= 4 e^{-t} \cos(\sqrt{3}\, t + 60)$$

مثال) با استفاده از روش لاپلاس، مدار زیر را آنالیز کنید؟

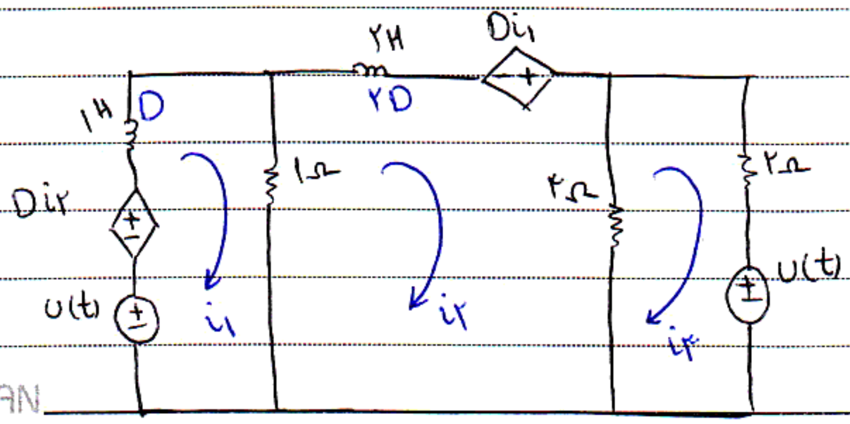


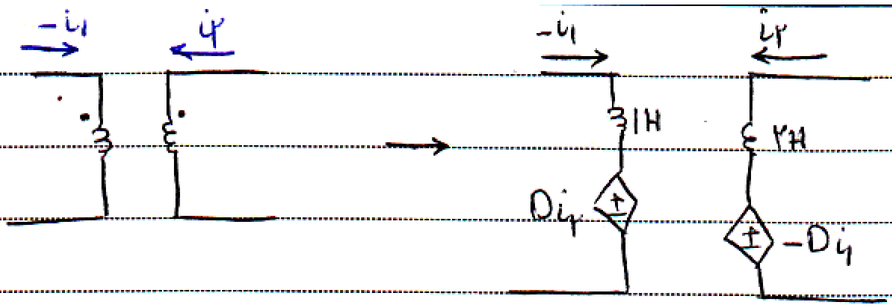




روش مش را استفاده می‌کنیم.

برای استفاده از روش مش باید از مدار معادل سلف‌های تزویج شده استفاده می‌کنیم.





$$\begin{bmatrix} D+1 & -1-D & 0 \\ -1-D & 2D+4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t)+\cancel{Di_2} \\ \cancel{Di_1} \\ -u(t) \end{bmatrix}$$

$i_{L_1}(0^-)$ $\quad$ $i_{L_2}(0^-)$

$$\begin{bmatrix} s+1 & -1-s & 0 \\ -1-s & 2s+4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s}+i_1(0^-)-i_2(0^-) \\ 0-i_1(0^-)+2i_2(0^-) \\ -\frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

معادلات حالت و تبدیلات لاپلاس :

حل معادلات حالت با استفاده از تبدیل لاپلاس :

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

$$\xrightarrow{L} sX(s)-x(0^-)=AX(s)+BU(s)$$

$$X(s)(sI-A)=+BU(s)+x(0) \Rightarrow \boxed{X(s)=(sI-A)^{-1}[BU(s)+x(0)]}$$

پاسخ حالت صفر $\quad x(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$

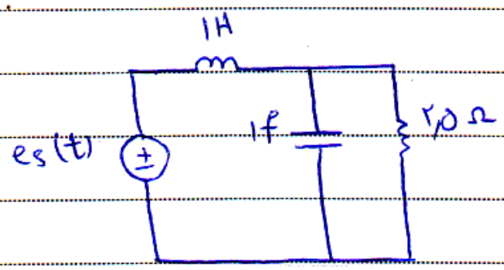
پاسخ ورودی صفر $\quad X(s)=(sI-A)^{-1}x(0^-)$

Subject:

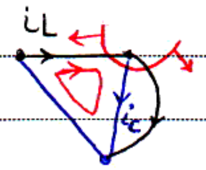
Year. Month. Date. ( )

* پاسخ پله و پاسخ ضربه یک مدار همان پاسخ حالت صفر است .

مثال) با استفاده از معادلات حالت پاسخ پله و پاسخ ضربه مدار زیر را بدست آورید؟



گراف:



KCL: $C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{2.5} - i_L = 0$

$$\dot{v}_C = -\frac{1}{2.5}v_C + i_L$$

KVL: $L\frac{di_L}{dt} + v_C - e_s = 0 \Longrightarrow \dot{i}_L = -v_C + e_s$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-1}{2.5} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} e_s$$

$$s\underbrace{I}_{\text{ماتریس یکه}} - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-1}{2.5} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2.5s+1}{2.5} & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

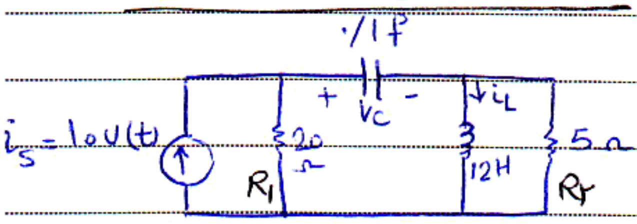
$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\frac{2.5s^2+s+2.5}{2.5}} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & \frac{2.5s+1}{2.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2.5s}{2.5s^2+s+2.5} & \frac{2.5}{2.5s^2+s+2.5} \\ \frac{-2.5}{2.5s^2+s+2.5} & \begin{array}{c} 6.25 \\ \hline (2.5s+1) \end{array} \end{bmatrix}$$
$$(2.5s^2+s+2.5)$$

پاسخ ضربه $\quad e_s(t) = \delta(t) \longrightarrow E_s(s) = 1$

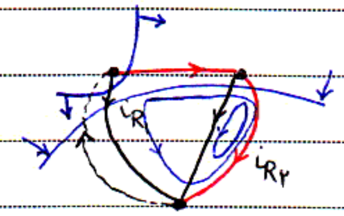
$$x(s)=\begin{bmatrix} V_C(s) \\ I_L(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (sI-A)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 1$$

(پاسخ حالت صفر)

مثال) در مدار زیر، معادلات حالت را بدست آورید سپس پاسخ به ورودی را با شرایط اولیه صفر محاسبه کنید؟



گراف:



i_s

$$KCL:\ 0/1\frac{dv_C}{dt} + i_{R_1} - 10u(t) = 0 \longrightarrow \frac{dv_C}{dt} = -10\, i_{R_1} + 10\, i_s \quad (1)$$

غیرحالت

$$KVL:\ 0/2\frac{di_L}{dt} = 5\, i_{R_2} \longrightarrow \frac{di_L}{dt} = 25\, i_{R_2} \quad (2)$$

غیرحالت

$$KVL:\ 20\, i_{R_1} - 5\, i_{R_2} - v_C = 0 \longrightarrow i_{R_1} = \frac{1}{4} i_{R_2} + \frac{1}{20} v_C \quad (A)$$

رفع غیرحالت i_{R_1} ،

غیرحالت

$$\dot{v}_C = \frac{-10}{4} i_{R_2} - \frac{1}{2} v_C + 10\, i_s \quad (3)$$

(A) در (1) ،

$$KCL:\ i_{R_2} + i_L + i_{R_1} - i_s = 0$$

رفع غیرحالت i_{R_2} ،

$$i_{R_2} = -i_L - i_{R_1} + i_s$$

$$i_{R_2} = -i_L - \frac{1}{4} i_{R_2} - \frac{1}{20} v_C + i_s$$

(A) را در معادله بالا می‌گذاریم ،

$$\frac{5}{4} i_{R_2} = -i_L - \frac{1}{20} v_C + i_s$$

$$\boxed{i_{R_2} = -\frac{4}{5} i_L - \frac{1}{25} v_C + \frac{4}{5} i_s} \quad (B)$$

(B) را در (2) و (3) قرار می‌دهیم تا معادلات حالت تولید شود.

(B) در (2):

$$\boxed{\dot{i}_L = -20 i_L - v_C + 20 i_s} \quad \text{معادله حالت}$$

(B) در (3):

$$\dot{v}_C = 2 i_L + 0.1 v_C - 2 i_s - \frac{1}{2} v_C + 10 i_s$$

$$\boxed{\dot{v}_C = 2 i_L - 0.4 v_C + 8 i_s} \quad \text{معادله حالت}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 \\ 2 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} i_s$$

محاسبه روابط i_L و v_C:

یک راه استفاده از معادلات انتگرال دیفرانسیل در هر یک از ۴ روش موجود یا استفاده از معادلات لاپلاس و یک

راه استفاده از خود لاپلاس با استفاده از ماتریس A است.

داشتیم که: $X(s) = (sI - A)^{-1}\left[BU(s) + x(0^-)\right]$

با شرایط اولیه صفر:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) = \begin{bmatrix} s+20 & 1 \\ -2 & s+0.4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} \underbrace{\left(10 \times \frac{1}{s}\right)}_{U(s)}$$

$$X(S)=\frac{۱}{(s+۲۰)(s+۰٫۴)+۲}\begin{bmatrix} s+۰٫۴ & -۱ \\ ۲ & s+۲۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۲۰۰}{s} \\ \frac{۸۰}{s} \end{bmatrix}$$

$$X(S)=\begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_C(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{۲۰۰s}{s(s^۲+۲۰٫۴s+۱۰)} \\ \dfrac{۸۰s+۲۰۰۰}{s(s^۲+۲۰٫۴s+۱۰)} \end{bmatrix}$$

$$I_L(S)=\frac{K_۱}{s}+\frac{K_۲}{(s+۰٫۵۰۵)}+\frac{K_۳}{(s+۱۹٫۸۹۵)}$$

$$K_۱=\frac{۲۰۰s}{s^۲+۲۰٫۴s+۱۰}\bigg|_{s=۰}=۰$$

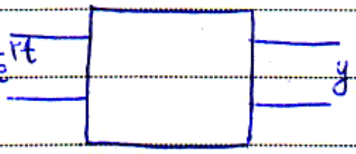
$$K_۲=\frac{۲۰۰s}{s(s+۱۹٫۸۹۵)}\bigg|_{s=-۰٫۵۰۵}=۱۰٫۳۱ \qquad K_۳=\frac{۲۰۰s}{s(s+۰٫۵۰۵)}\bigg|_{s=-۱۹٫۸۹۵}=-۱۰٫۳۱$$

$$\boxed{i_L(t)=۱۰٫۳۱\left(e^{-۰٫۵۰۵t}-e^{-۱۹٫۸۹۵t}\right)u(t)}$$

فصل ۱۴: فرکانس های طبیعی

سیستمی مانند سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$x(t) = ۳\cos ۳t + e^{-۲t}$



$y(t) = \sin ۳t + \cos(۵t + ۳۰) + ۰/۲e^{-۲t} + ۳e^{-۴t}$

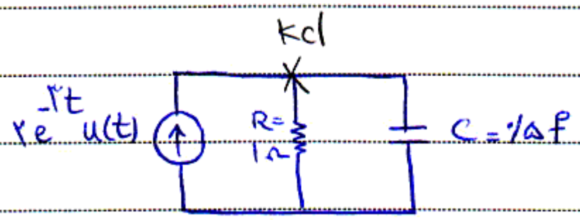
مولفه های $۳t$ و $۲t$ که در خروجی ظاهر شده اند ممکن است ناشی از ورودی باشند اما مولفه های $۵t$ و $۴t$ ناشی از وضعیت سیستم در خروجی ظاهر شده است و ارتباطی با ورودی ندارد.

بنابراین با توجه به توضیحات فوق:

نکته: فرکانس های طبیعی در پاسخ ورودی صفر سیستم ظاهر می شوند.

یک راه این است که معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار را بنویسیم. ریشه های معادله مشخصه همان فرکانس های طبیعی هستند.

مثال:



$v_c(۰) = ۲V$

می خواهیم پاسخ کامل v_c را بدست آوریم؟

پاسخ کامل v_c:

$$۲e^{-۳t} = ۰/۵\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{۱}$$

معادله دیفرانسیل مدار:

$$\boxed{\frac{dv_c}{dt}+2v_c=4e^{-3t}}$$

پاسخ عمومی $\quad v_c(t)=Ke^{-2t}$

پاسخ خصوصی $\quad v_c(t)=Ae^{-3t}\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}}-3Ae^{-3t}+2Ae^{-3t}=4e^{-3t}\longrightarrow \boxed{A=-4}$

پاسخ کامل $\quad v_c(t)=\underbrace{v_c(t)}_{\text{عمومی}}+\underbrace{v_c(t)}_{\text{خصوصی}}\longrightarrow v_c(t)=Ke^{-2t}-4e^{-3t}$

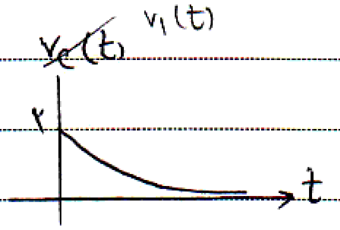
$v_c(0)=2\longrightarrow K-4=2\longrightarrow K=6$

$$\boxed{v_c(t)=(6e^{-2t}-4e^{-3t})\,u(t)}$$

با توجه به جواب مسئله، $s=-2$ فرکانس طبیعی سیستم است. اما $s=-3$ نباید فرکانس طبیعی باشد شاید یعنی نزدیک باشد. در حالیکه اگر معادله مشخصه را بررسی کنیم:

$\frac{dv_c}{dt}+2v_c=0\longrightarrow s+2=0\longrightarrow \boxed{s=-2}$

پس فقط $s=-2$ فرکانس طبیعی سیستم است.



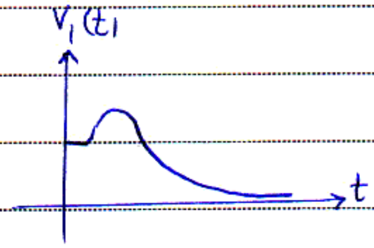
خلاف

حال فرض کنید ورودی به صورت زیر باشد و مدار را با فرکانس طبیعی آن تحریک کنیم:

$v_c(0)=2V$

پاسخ کامل v_c:

$$e^{-2t} = 0/5\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{1}$$



$$\frac{dv_c}{dt} + 2v_c = 2e^{-2t}$$

پاسخ عمومی $v_c(t) = kte^{-2t}$

پاسخ خصوصی $v_c(t) = Ae^{-2t} \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} -2Ae^{-2t} + 4Ae^{-2t} = 2e^{-2t} \longrightarrow \boxed{A=1}$

کامل $v_c(t) = \overset{\text{عمومی}}{v_c(t)} + \overset{\text{خصوصی}}{v_c(t)} \Rightarrow v_c(t) = kte^{-2t} + e^{-2t} \longrightarrow v_c(t) = e^{-2t}(1+kt)$

مثال) معادله مشخصه یک مدار به صورت زیر است:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 4i_L + 3 = 0$$

$$s^2 + 4s + 3 = 0 \quad \begin{cases} s = \frac{-4+2}{2} = -1 \\ s = \frac{-4-2}{2} = -3 \end{cases}$$

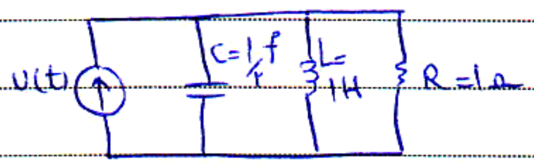
تا اینجا حذف است.

انواع فرکانس‌های طبیعی $\longrightarrow$ فرکانس‌های طبیعی متغیرهای شبکه

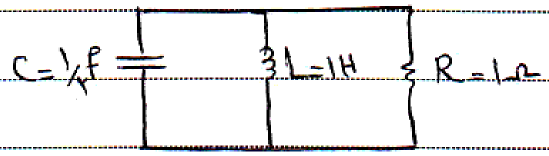
$\longrightarrow$ فرکانس‌های طبیعی کل شبکه

یعنی ممکن است یک یا تعدادی از فرکانس‌های طبیعی کل شبکه در ولتاژ یا جریان یک شاخه ظاهر نشوند.

مثال) فرکانس‌های طبیعی ولتاژ خازن را به دست آورید.



منبع را صفر کنیم تا مدار در شرایط ورودی صفر قرار گیرد.



$$i_C + i_L + i_R = 0$$

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L}\int v_C\,dt + i_L(0) + \frac{v_C}{R} = 0 \longrightarrow \text{معادله مدار}$$

$$C\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{1}{L}v_C + \frac{1}{R}\frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$0.5\frac{d^2v_C}{dt^2} + v_C + \frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + 2\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = 0 \longrightarrow s^2 + 2s + 2 = 0 \quad \text{معادله مشخصه}$$

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4j^2}}{2} \begin{cases} -1+j \\ -1-j \end{cases} \quad \text{فرکانس‌های طبیعی}$$

می‌توان نشان داد که قطب‌های تابع تبدیل در حوزه لاپلاس همان فرکانس‌های طبیعی سیستم هستند.

۲/ روش دوم

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L}\int v_C\,dt + i_L(0) + \frac{v_C}{R} = 0$$

$$\frac{dv_C}{dt} + 2\int v_C\,dt + 2v_C + 2i_L(0) = 0 \xrightarrow{L} sV_C(s) - V_C(0) + \frac{2}{s}V_C(s) + 2V_C(s) + \frac{2i_L(0)}{s} = 0$$

$$V_C(s)\left(s + \frac{2}{s} + 2\right) = V_C(0) - \frac{2}{s}i_L(0)$$

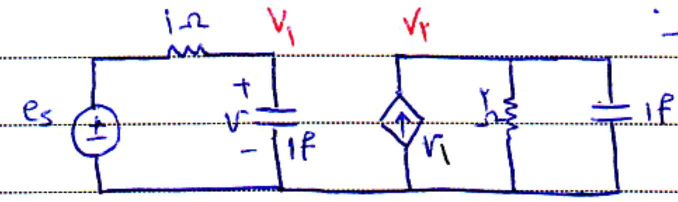
$$V_C(s) = \frac{V_C(0) - \frac{2}{s}i_L(0)}{s + \frac{2}{s} + 2}$$

$$V_C(S)=\frac{SV_C(0^-)-2i_L(0^-)}{S^2+2S+2}$$

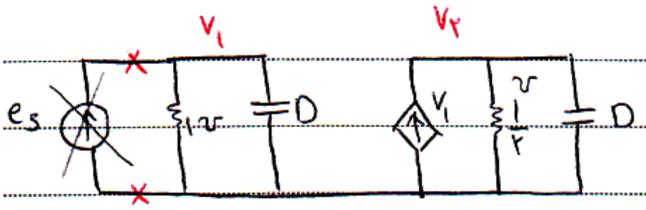
قطب ها $\begin{cases} s=-1+j \\ s=-1-j \end{cases}$

یعنی:

مثال ۲) فرکانس های طبیعی V_1 و V_2 را بدست آورید؟



در حالت ورودی صفر، مدار را از راه گره تحلیل می‌کنیم.



$$\begin{bmatrix} D+1 & 0 \\ -1 & D+\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ V_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} S+1 & 0 \\ -1 & S+\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(S) \\ V_2(S) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_1(0^-) \\ V_2(0^-) \end{bmatrix}\begin{matrix} V_{C_1}(0^-) \\ V_{C_2}(0^-) \end{matrix}$$

$$V_1(S)=\frac{\begin{vmatrix} V_1(0^-) & 0 \\ V_2(0^-) & S+\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}=\frac{V_1(0^-)(S+\frac{1}{2})}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}$$

$$V_1(S)=\frac{V_1(0^-)}{S+1} \xrightarrow{\text{فرکانس طبیعی}} \boxed{S=-1}$$

$$V_2(S)=\frac{\begin{vmatrix} S+1 & V_1(0^-) \\ -1 & V_2(0^-) \end{vmatrix}}{(S+1)(S+\frac{1}{2})} \Longrightarrow \boxed{V_2(S)=\frac{V_2(0^-)(S+1)+V_1(0^-)}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}}$$

فرکانس های طبیعی $\begin{cases} S=-1 \\ S=-\frac{1}{2} \end{cases}$

۱- $s=-1$ و $s=-1/2$ فرکانس‌های طبیعی مدار بوده ولی $s=-1/2$ در پاسخ V_1 ظاهر نشده.

سؤال) در مثال قبل پاسخ به ورودی‌های زیر را بدست آورید؟

$$\begin{cases} e_s(t) = u(t) \\ e_s(t) = e^{-t}\, u(t) \end{cases}$$

شرایط اولیه: $v_{C_1}(0^-) = v_{C_2}(0^-) = 1$

$$\begin{bmatrix} D+1 & 0 \\ 0\;-1 & D+1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{1}{v_{C_1}(0^-)} + E_s \\ \underset{1}{v_{C_2}(0^-)} \end{bmatrix}$$

$$V_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1+E_s & 0 \\ 1 & s+1/2 \end{vmatrix}}{(s+1)(s+1/2)} = \frac{(1+E_s)(s+1/2)}{(s+1)(s+1/2)} = \frac{1+E_s}{(s+1)}$$

$$V_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+1 & 1+E_s \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{(s+1)(s+1/2)} = \frac{s+2+E_s}{(s+1)(s+1/2)}$$

الف) $E_s = \frac{1}{s}$

$$V_1(s) = \frac{1+1/s}{s+1} = \frac{\frac{s+1}{s}}{s+1} = \frac{1}{s}$$

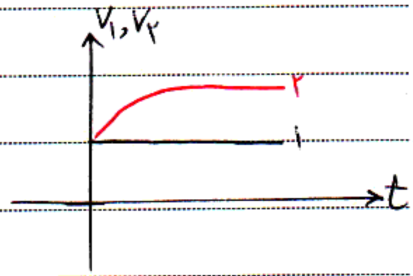
$$\Rightarrow \boxed{v_1(t) = u(t)}$$

$$V_2(s) = \frac{s+2+1/s}{(s+1)(s+1/2)} = \frac{s+1}{s\,(s+1/2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1/2}$$

$$K_1 = \frac{s+1}{s+1/2}\bigg|_{s=0} = 2$$

$$K_2 = \frac{s+1}{s}\bigg|_{s=-1/2} = -1$$

$$V_2(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1/2} \longrightarrow \boxed{v_2(t) = (2 - e^{-1/2\, t})\, u(t)}$$



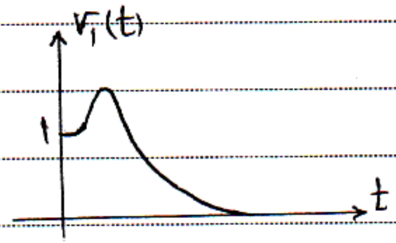
ب) $E_g = \frac{1}{(s+1)}$: این ورودی، واکنش طبیعی مدار را تحریک نمی‌کند.

$$V_1(s) = \frac{1 + \frac{1}{s+1}}{s+1} = \frac{s+2}{(s+1)^2}$$

$$V_1(s) = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2}$$

$$K_{12} = (s+2)\big|_{s=-1} = 1 \qquad K_{11} = \frac{d}{ds}\Big[(s+2)\Big]_{s=-1} = 1$$

$$\boxed{v_1(t) = (e^{-t} + t e^{-t})\, u(t)} \Longrightarrow \boxed{v_1(t) = e^{-t}(1+t)\, u(t)}$$



$$V_2(s) = \frac{(s+2) + \frac{1}{s+1}}{(s+1)(s+1/2)} = \frac{\frac{s^2+3s+3}{s+1}}{(s+1)(s+1/2)}$$

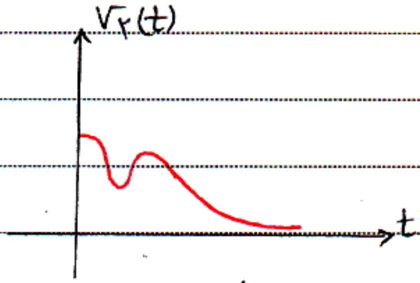
$$V_2(s) = \frac{s^2+3s+3}{(s+1)^2(s+1/2)} = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_2}{s+1/2}$$

$$K_{12} = \frac{s^2+3s+3}{s+1/2}\bigg|_{s=-1} = \frac{1-3+3}{-1/2} = -2$$

$$K_{11} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+3s+3}{s+1/2}\right]_{s=-1} = \left[\frac{(2s+3)(s+1/2) - s^2-3s-3}{(s+1/2)^2}\right]_{s=-1} = \frac{1\times(-1/2)-1+3-3}{1/4} = -6$$

$$K_2 = \frac{s^2+3s+3}{(s+1)^2}\bigg|_{s=-1/2} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+3}{\frac{1}{4}} = 7$$

$$v_{c2}(t) = \left(-6e^{-t} - 2te^{-t} + 7e^{-1/2\,t}\right)u(t)$$



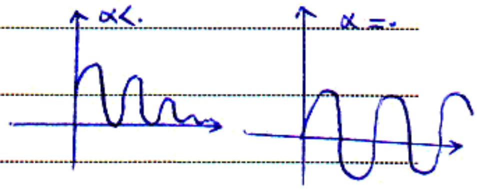
حالت‌های مختلف برای فرکانس‌های طبیعی:

$$f(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + k_3 e^{s_3 t} + \dots$$

۱) اگر حقیقی باشند دارای علامت منفی و اگر مختلط باشند زوج با قسمت حقیقی منفی‌اند. فرکانس‌های طبیعی مختلط به صورت نوسانی در جواب ظاهر می‌شوند (به صورت $\cos , \sin$)

$$s_{1,2} = \alpha \pm j\omega$$

$$f(t) = e^{(\alpha+j\omega)t} + e^{(\alpha-j\omega)t} = e^{\alpha t}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$



$$f(t) = 2e^{\alpha t}\cos\omega t$$

α: قسمت حقیقی (ضریب میرایی)

ω: قسمت موهومی فرکانس طبیعی (فرکانس نوسانی)

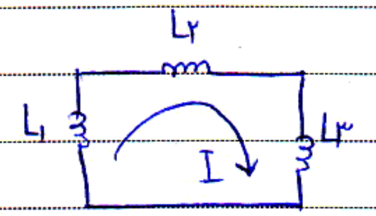
۲) هرگاه، تغییر شار متناظر جریان یک سلف نباشد و این سلف در حلقه‌ای قرار گرفته باشد که این حلقه فقط از تعدادی سلف تشکیل شده، چون سلف‌ها ایده‌آل فرض می‌شوند ممکن است جریان ثابت I_0 در آن ثابت باقی بماند یعنی:

$$\frac{I_0}{s} \xrightarrow{L^{-1}} I_0 e^{0t} u(t)$$

به ازای هر حلقه سلفی، یک فرکانس طبیعی صفر خواهیم داشت.

بنابراین $s=0$ فرکانس طبیعی جریان سلف خواهد بود.

مثال)



$$KVL: \quad L_1 \frac{dI_{L_1}}{dt} + L_2 \frac{dI_{L_2}}{dt} + L_3 \frac{dI_{L_3}}{dt} = 0$$

$$L_1\left(sI_{L_1}(s) - I_{L_1}(0^-)\right) + L_2\left(sI_{L_2}(s) - I_{L_2}(0^-)\right) + L_3\left(sI_{L_3}(s) - I_{L_3}(0^-)\right) = 0$$

$$I_{L_1}(s) = I_{L_2}(s) = I_{L_3}(s) \triangleq I_L(s)$$

$$I_L(s) = \overbrace{\frac{L_1 I_{L_1}(0^-) + L_2 I_{L_2}(0^-) + L_3 I_{L_3}(0^-)}{s(L_1+L_2+L_3)}}^{I_0} = \frac{I_0}{s}$$

اگر $s=0$ فرکانس طبیعی جریان سلف باشد فرکانس طبیعی ولتاژ سلف نخواهد بود.

$$V_L(t) = L\frac{dI_L(t)}{dt} \longrightarrow V_L(s) = L\left(s\underbrace{I_L(s)}_{\frac{I_0}{s}} - i_L(0^-)\right)$$

۳) هرگاه متغیر شبکه مورد نظر ولتاژ یک خازن باشد و این خازن فقط در حلقات سری با خازن تشکیل شده قرار داشته باشد، چون خازن‌ها ایده‌آل فرض می‌شوند معلوم است ولتاژ ثابت V_0 در دو سر خازن‌ها باقی بماند

در این صورت، $\quad V(s) = \frac{V_0}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} V_0 e^{0t} u(t)$

$i_C = C\dfrac{dv}{dt} \xrightarrow{L}$

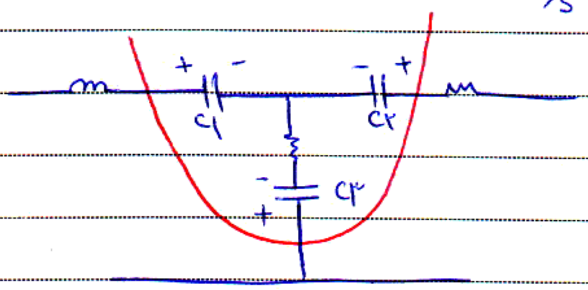
Subject:

Year. Month. Date. ( )

* اگر S=۰ در کاس ضربه ولتاژ خازن باشد، در کاس ضربه جریان خازن نخواهد بود.

$$I_C(S) = CS\underbrace{V_C(S)}_{1/S} - CV_C(0^-) = C\left(1 - V_C(0^-)\right)$$

و S=۰ در کاس ضربه ولتاژ خازن خواهد بود.

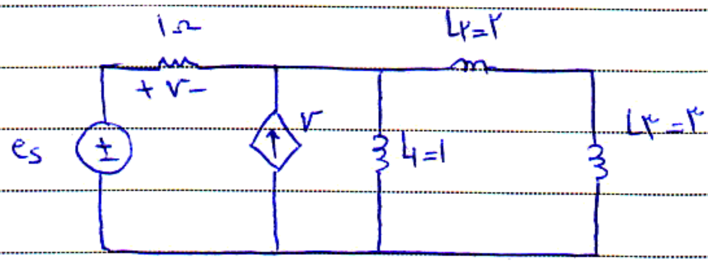


✓ برای حلقه‌های سلفی و کات‌ست‌های خازنی در کاس ضربه صفر داریم

$$c_1\frac{dv_{c_1}}{dt} + c_2\frac{dv_{c_2}}{dt} + c_3\frac{dv_{c_3}}{dt} = 0$$

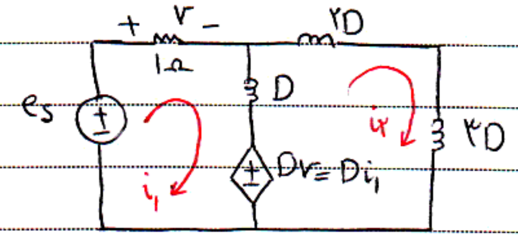
$$c_1SV_{c_1}(S) - c_1V_{c_1}(0) + c_2SV_{c_2}(S) - c_2V_{c_2}(0^-) + c_3SV_{c_3}(S) - c_3V_{c_3}(0^-) = 0$$

مثال ۵) در کاس ضربه جریان سلف‌ها را بدست آورید؟

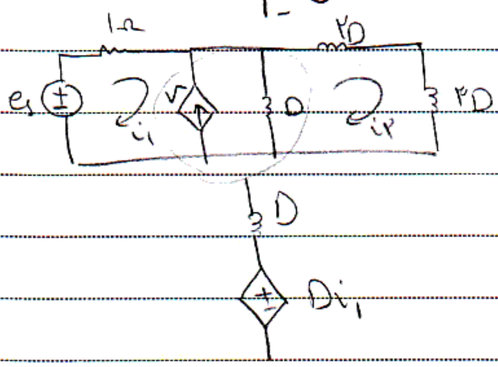


$I_{L_1}(0^-) = 1$

$I_{L_2}(0^-) = I_{L_3}(0^-) = 2$



از روش مش حل می‌کنیم.



$V = 1 \times i_1 = i_1$

$$\begin{bmatrix} D+1+D & -D \\ -D-D & 4D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s - \cancel{Di_1} \\ \cancel{Di_1} \end{bmatrix}$$

$I_{L_1}(0^-) + I_{L_2}(0^-) + I_{L_3}(0^-) = 5$

$$\begin{bmatrix} 2S+1 & -S \\ -2S & 4S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(S) \\ I_2(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s + 2i_1(0^-) - i_2(0^-) \\ -2i_1(0^-) + 4i_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$-2I_{L_1}(0^-) - 2I_{L_2}(0^-) + 4I_{L_2}(0^-) = 10$

TABAN

$$i_1(0^-) - i_2(0^-) = I_{L_1}(0^-) \longrightarrow i_1(0^-) = I_{L_1}(0^-) + I_{L_2}(0^-)$$

$$i_2(0^-) = I_{L_2}(0^-) = I_{L_3}(0^-)$$

$$\begin{bmatrix} 2s+1 & -s \\ -2s & 6s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Es+5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} Es+5 & -s \\ 10 & 6s \end{vmatrix}}{(2s+1)6s - 2s^2} = \frac{6s(Es+5)+10s}{12s^2+6s-2s^2}$$

$$\boxed{I_1(s) = \frac{6s(Es+5)+10s}{s(10s+6)}}$$

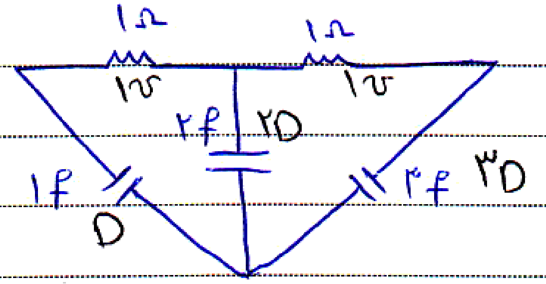
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2s+1 & Es+5 \\ -2s & 10 \end{vmatrix}}{(2s+1)6s - 2s^2} = \frac{10(2s+1)+2s(Es+5)}{s(10s+6)}$$

$$I_{L_1}(s) = I_1(s) - I_2(s) = \frac{\bigcirc}{s(10s+6)}$$

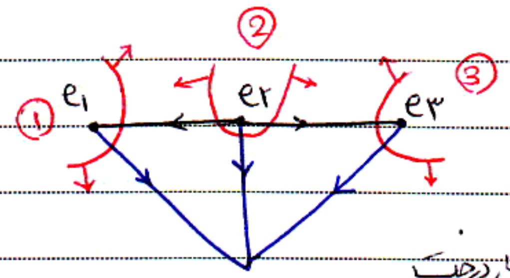
$$I_{L_2}(s) = I_{L_3}(s) = \frac{10(2s+1)+2s(Es+5)}{s(10s+6)}$$

$s=0$ ، $s=\frac{-6}{10}$ فرکانس طبیعی جریان سلف‌ها است.

مثال) فرکانس طبیعی ولتاژ خازن‌ها را بدست آورید.



از روش معادلات حالت استفاده می‌کنیم.



مدار خود در شرایط ورودی صفر است. (ورودی نداریم)

بردار ولتاژ شاخه‌ها در جهت

$$\begin{bmatrix} D+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2D+2 & -1 \\ 0 & -1 & 3D+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2s+2 & -1 \\ 0 & -1 & 3s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{C_1}(0^-) \\ 2v_{C_2}(0^-) \\ 3v_{C_3}(0^-) \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \frac{\begin{vmatrix} v_{C_1}(0^-) & -1 & 0 \\ 2v_{C_2}(0^-) & 2(s+1) & -1 \\ 3v_{C_3}(0^-) & -1 & (3s+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2(s+1) & -1 \\ 0 & -1 & 3s+1 \end{vmatrix}} = \frac{v_{C_1}(0^-)\left[2(s+1)(3s+1)-1\right] + \left(2v_{C_2}(0^-)(3s+1)+3v_{C_3}(0^-)\right)}{s+1\left[2(s+1)(3s+1)-1\right] - (-1)\times(-3s-1)}$$

صورت کسر $= A$

$$= \frac{A}{2(s+1)^2(3s+1)-(s+1)-3s-1} = \frac{A}{2(s+1)^2(3s+1)-4s-2} =$$

$$\frac{A}{(2s^2+4s+2)(3s+1)-4s-2} = \frac{A}{6s^3+2s^2+12s^2+4s+6s+2-4s-2}$$

$$= \frac{A}{6s^3+14s^2+6s} = \frac{A}{s(6s^2+14s+6)}$$

$s=0$ ریشه صفر ولتاژ خازن C_1 است یعنی ولتاژ مقدار نهایی خازن یک مقدار ثابت خواهد بود.

TARAN

$$e_1(\infty) = \lim_{s\to 0} sE_1(s) = \frac{v_{c1}(0^-)+2v_{c2}(0^-)+3v_{c3}(0^-)}{6}$$

e_2 و e_3 به عهده خودتان.

پاسخ‌های طبیعی کل مدار = (پاسخ‌های طبیعی موجود در شبکه)

پاسخ‌های طبیعی شبکه، اجتماع ۲b پاسخ‌های طبیعی شاخه‌ها می‌باشد. ثابت می‌شود برای به دست آوردن پاسخ‌های طبیعی شبکه لازم نیست به همه پاسخ‌های طبیعی ۲b شاخه‌ها را به دست آوریم، زیرا اگر $s \neq 0$ پاسخ طبیعی جریان شاخه باشد، پاسخ طبیعی ولتاژ شاخه هم خواهد بود.

۱) شاخه مقاومت باشد.

$$j_k = Ie^{st}$$

$$v_k = Rj_k = \overset{V}{(RI)}e^{st} = Ve^{st}$$

۲) شاخه سلف باشد.

$$v_k = L\frac{dj_k}{dt} = L\frac{d}{dt}\left[Ie^{st}\right] = \overset{V}{(LIs)}e^{st} = Ve^{st}$$

۳) شاخه خازن باشد.

$$v_k = \frac{1}{C}\int j_k\,dt + v_C(0^-) = \frac{1}{C}\int_0^t Ie^{st}\,dt + v_C(0^-)$$

$$= \underset{V}{\left(\frac{I}{C}\times\frac{1}{s}\right)}e^{st} - \frac{I}{Cs} + v_C(0^-) = Ve^{st} + v_C(0^-) - V$$

به طور مشابه می‌توان اثبات کرد اگر $s \neq 0$، پاسخ طبیعی ولتاژ شاخه باشد، پاسخ طبیعی جریان شاخه هم خواهد بود.

$s=0$ ممکن است پاسخ طبیعی ولتاژ شاخه باشد ولی پاسخ طبیعی جریان همان شاخه نباشد یک مدار مثال بزنید؟

و بالعکس. ولتاژ جریان

تصمیم: فرکانس‌های طبیعی غیرصفر هر شبکه خطی و تغییرناپذیر با زمان همان ریشه‌های غیرصفر معادله دترمینان $P(S)$

است که $P(S)$ ماتریسی است که در یکی از ۴ روش، معادلات مدار را توصیف می‌کند

در روش گره: $Y_n(S)\,E(S) = I_S(S) + \alpha \longrightarrow P(S) = Y_n(S)$

در روش مش: $Z_n(S)\,I(S) = E_S(S) + \alpha \longrightarrow P(S) = Z_n(S)$

در روش حلقه اساسی: $Z_B(S)\,I(S) = E_S(S) + \alpha \longrightarrow P(S) = Z_B(S)$

در روش کات ست اساسی: $Y_Q(S)\,E(S) = I_S(S) + \alpha \longrightarrow P(S) = Y_Q(S)$

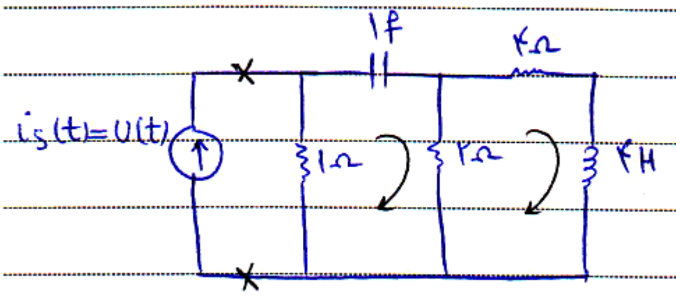
اثبات) مثلاً در روش گره:

$$E(S) = Y_n^{-1}(S)\,(I_S(S) + \alpha)$$

$$E(S) = \frac{\text{ماتریس دترمینان کهاد}}{\det(Y_n(S))}\,[I_S(S) + \alpha]$$

ریشه‌های آن فرکانس‌های طبیعی را می‌دهد.

مثال) فرکانس‌های طبیعی شبکه را به دست آورید؟



ورودی را می‌کشیم دو مش داریم.

$$Z_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{D} + 3 & -2 \\ -2 & 2 + 4D + 4 \end{bmatrix}$$

$$Z_n(s)=\begin{bmatrix} \frac{۳s+۱}{s} & -۲ \\ -۲ & ۴s+۶ \end{bmatrix}$$

$$\det\left(Z_n(s)\right)=\frac{(۳s+۱)(۴s+۶)-۴s}{s}=\frac{۱۲s^۲+۱۸s+۶}{s}=\frac{۶(۲s^۲+۳s+۱)}{s}$$

$$\left|Z_n(s)\right|=0 \xrightarrow[\frac{-۳\pm ۱}{۴}]{} \begin{cases} s=-\frac{۱}{۲} \\ s=-۱ \end{cases}$$

مرتبه‌ی مدار و تعداد فرکانس‌های طبیعی:

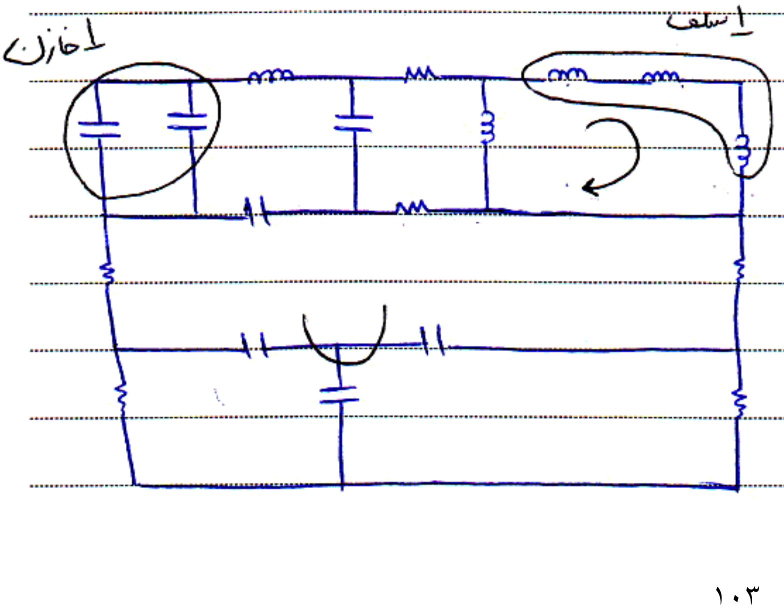
به درجه‌ی دترمینان P(s)، (|P(s)|)، ~~دترمینان~~ مرتبه‌ی مدار می‌گوییم که معادل با:

(تعداد کات‌ست‌های سلفی) − (تعداد حلقه‌های خازنی) − (تعداد عناصر ذخیره‌کننده انرژی)

که برابر با تعداد فرکانس‌های طبیعی نیز هست. تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر:

(تعداد حلقه‌های سلفی) − (تعداد کات‌ست‌های خازنی) − (مرتبه‌ی مدار)

مثال)



تعداد عناصر ذخیره کننده = ۹
تعداد حلقه‌های خازنی = ۰
کات ست سلفی = ۰
→ مرتبه مدار ۹؛

تعداد فرکانس‌های طبیعی = ۹
تعداد فرکانس‌های غیرصفر = ۷

تعداد کات ست خازنی = ۱

حلقه سلفی = ۱

فرکانس‌های طبیعی و معادلات حالت:

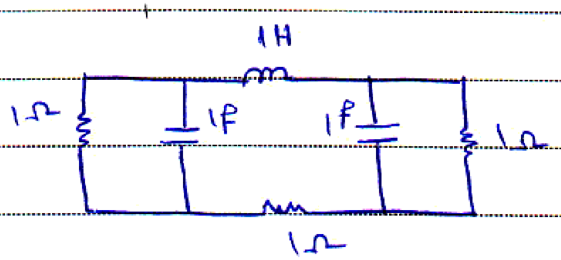
در معادلات حالت داشتیم: $X(S)=(SI-A)^{-1}[BU(S)+X(0^-)]$

در فرکانس‌های طبیعی ⟵ ورودی صفر $X(S)=(SI-A)^{-1}X(0^-)$

روش دیگر به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی: $|SI-A|=0$

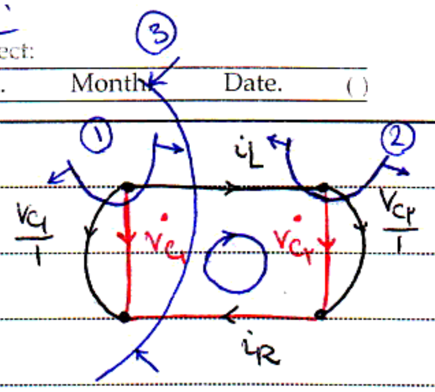
ضمناً مرتبه مدار و معادلات از درجه $(SI-A)$ است یعنی درجه $|SI-A|$ در ماتریس

مثال) با استفاده از معادلات حالت، فرکانس‌های طبیعی را بیابید؟



وقتی از طریق معادلات حالت می‌خواهیم فرکانس‌های طبیعی را پیدا کنیم به ماتریس B نیاز نیست یعنی حتی اگر مدار دارای ورودی باشد می‌توانیم ورودی‌ها را برداریم. منابع را می‌توانیم بکشیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$KCL: \dot v_{C_1} + v_{C_1} + i_L = 0 \longrightarrow \boxed{\dot v_{C_1} = -v_{C_1} - i_L}$$

$$KCL: \dot v_{C_2} + v_{C_2} - i_L = 0 \longrightarrow \boxed{\dot v_{C_2} = -v_{C_2} + i_L}$$

$$KVL: \dot i_L + v_{C_2} + i_R \times 1 - v_{C_1} = 0 \longrightarrow \boxed{\dot i_L = v_{C_1} - v_{C_2} - i_R}$$

$$KCL: i_R - i_L = 0 \longrightarrow i_R = i_L \qquad \boxed{\dot i_L = v_{C_1} - v_{C_2} - i_L}$$

حال می‌توانیم ماتریس A را ببینیم $(SI - A)$ را محاسبه کنیم

$$\begin{bmatrix} \dot v_{C_1} \\ \dot v_{C_2} \\ \dot i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$SI - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 1 \\ 0 & s+1 & -1 \\ -1 & 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\det(SI - A) = 0 \longrightarrow$$ فرکانس‌های طبیعی

$$|SI - A| = (s+1)\left[(s+1)^2 + 1\right] + (s+1)$$

$$= (s+1)\left[s^2 + 2s + 2\right] + (s+1) = (s+1)(s^2 + 2s + 3) \quad \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -1 + j\sqrt{2} \\ s_3 = -1 - j\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\frac{-2 \pm 2\sqrt{2}\, j}{2}$$

متفاوت با انتظار ۳ و مغناطیس صنعتی دائم

فصل ۱۵: توابع شبکه

به طور کلی تابع شبکه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(S) = \frac{L\left[\text{پاسخ حالت صفر}\right]}{L\left[\text{منبع ورودی}\right]}$$

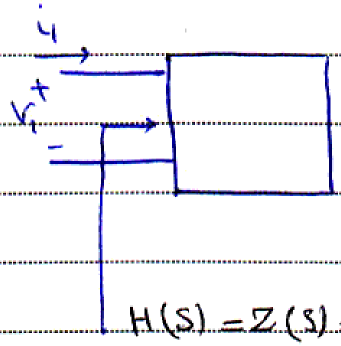
معمول است که در بررسی تابع شبکه، منبع ورودی را تابع ضربه در نظر می‌گیرند

$$H(S) = \frac{L\left[h(t)\right]}{L\left[\delta(t)\right]} = L\left[h(t)\right]$$

$h(t)$ پاسخ ضربه می‌باشد

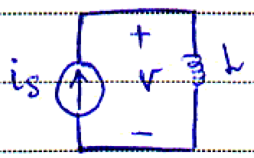
انواع تابع شبکه:

۱) امپدانس تحریک: (Z_S)



$$H(S) = Z(S) = \frac{V_1(S)}{I_1(S)}$$

مثال)

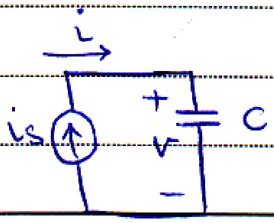


$$v = L\frac{di_s}{dt} \xrightarrow{L} = LS\,I_S(S) - \cancel{L i_L(0^-)}$$

گفتیم که تابع شبکه در حالت صفر حساب می‌شود

$$\Rightarrow Z_S = \frac{V(S)}{I(S)} = LS$$

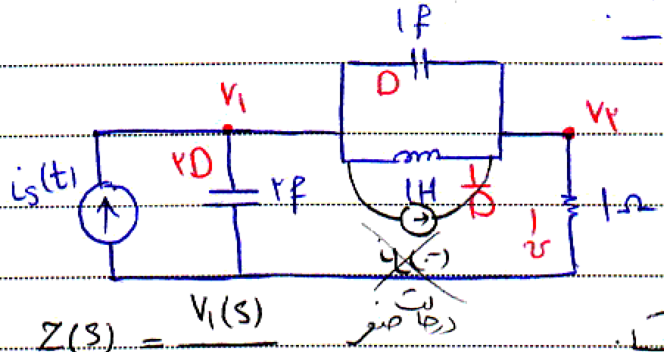
مثال)



$$v = \frac{1}{C}\int_0^t i_s dt + \cancel{v_C(0^-)}$$

$$V(s)=\frac{1}{Cs}I(s) \longrightarrow Z(s)=\frac{1}{Cs}$$

مثال) در مدار زیر امپدانس نقطه تحریک را بدست آورید؟



$$Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)}$$

از روش گره حل میکنیم. هدف بدست آوردن $Z(s)$ است.

شرایط اولیه نداریم مستقیماً معادلات حوزه لاپلاس را می نویسیم (D را به S تبدیل میکنیم.)

$$\begin{bmatrix} 2s+s+\frac{1}{s} & -(s+\frac{1}{s}) \\ -(s+\frac{1}{s}) & s+\frac{1}{s}+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_s \\ 0 \end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} 2V_1(0)+\ldots \\ \ldots \end{bmatrix}}_{\text{مربوط به شرایط اولیه}=0}$$

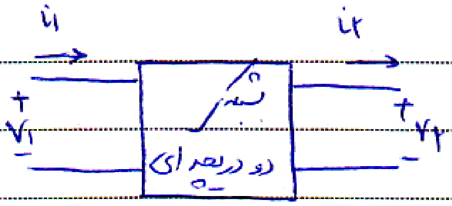
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3s+1 & -\frac{s^2+1}{s} \\ -\frac{s^2+1}{s} & \frac{s^2+s+1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1=\frac{\frac{s^2+s+1}{s}I_s}{\frac{(3s^2+1)(s^2+s+1)}{s^2}-\frac{(s^2+1)^2}{s^2}} \Rightarrow Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)}=\frac{s(s^2+s+1)}{(3s^2+1)(s^2+s+1)-(s^2+1)^2}$$

تعریف توابع شبکه با استفاده از دو قطبی ها؟

برخی توابع شبکه را با استفاده از شبکه های دو دریچه ای تعریف میکنیم.

۱) امپدانس نقطه تحریک: (وقتی تحریک از دهانه ۱ اعمال شود)



$$H(S)=Z(S)=\frac{V_1(S)}{I_1(S)}$$

۲) امپدانس انتقالی:

$$H(S)=\frac{V_2(S)}{I_1(S)}$$

۳) ادمیتانس انتقالی:

$$H(S)=\frac{I_2(S)}{V_1(S)}$$

۴) نسبت انتقال ولتاژ:

$$H(S)=\frac{V_2(S)}{V_1(S)}$$

۵) نسبت انتقال جریان:

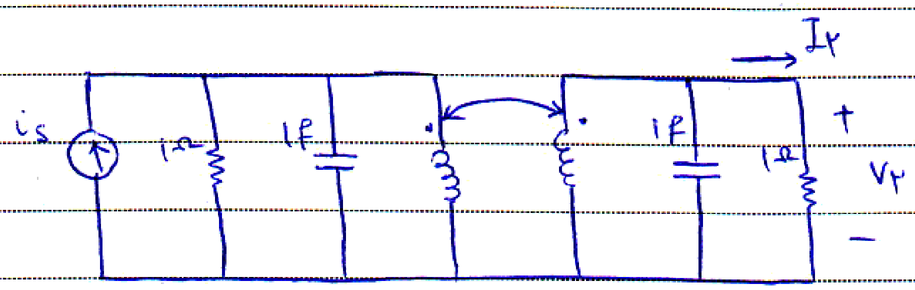
$$H(S)=\frac{I_2(S)}{I_1(S)}$$

گاهاً از ترکیب این توابع استفاده می‌کنیم

مثال $\dfrac{\left(\frac{I_1}{V_2}\right)}{\frac{V_1}{V_2}}=\dfrac{I_1}{V_1}$ ادمیتانس نقطه تحریک

مثال) در مدار زیر توابع شبکه زیر را حساب کنید.

الف) امپدانس نقطه تحریک $\dfrac{V_1}{I_1}$ ب) امپدانس انتقالی $\dfrac{V_2}{I_1}$ ج) نسبت انتقال ولتاژ $\dfrac{V_2}{V_1}$



$$L=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

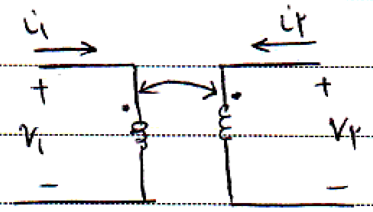
با توجه به ماهیت المان‌ها که به طور موازی اند از یکی از روش‌های گره یا کات ست استفاده می‌کنیم

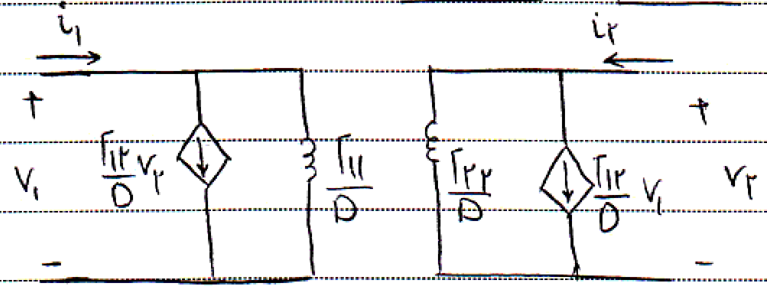
TABAN

آزمون میانترم گروه 2

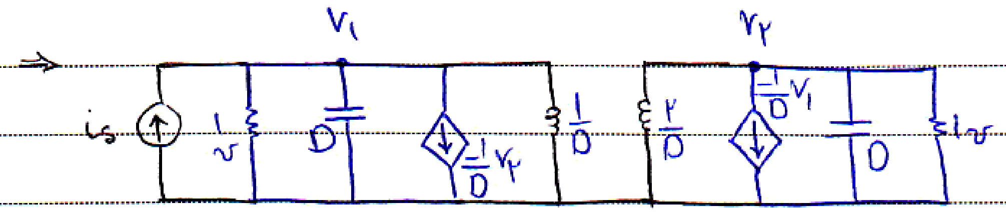
$$L=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \Gamma = L^{-1} = \frac{1}{2-1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Gamma=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$





$\Rightarrow$



$$\begin{bmatrix} s+\frac{1}{s}+1 & 0\\ 0 & \frac{2}{s}+s+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s+\frac{1}{D}V_2\\ \frac{1}{D}V_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s^2+s+1}{s} & \frac{-1}{s}\\ -\frac{1}{s} & \frac{s^2+s+2}{s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s\\ 0\end{bmatrix}$$

$$Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)} \qquad H_1(s)=\frac{V_2(s)}{I_s(s)} \qquad H_2(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{H_1(s)}{Z(s)}$$

$$V_1(s)=\frac{\frac{s^2+s+1}{s}\,I(s)}{\frac{(s^2+s+1)(s^2+s+2)}{s^2}-\frac{1}{s^2}} \Rightarrow Z(s)=\frac{s(s^2+s+1)}{(s^2+s+1)(s^2+s+2)-1}$$

$$V_2(s) = \frac{\frac{1}{s} I_s(s)}{\frac{(s^2+s+1)(s^2+s+2)}{s^2} - \frac{1}{s^2}} \Rightarrow H_1(s) = \frac{s}{(s^2+s+1)(s^2+s+2)-1}$$

$$H_2(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

مشخصات قطب و صفر :

این یک روش تابع تبدیل توابع و ترسیم آن در صفحه مختلط طرح می‌کنند

تابع $H(s)$ را در نظر بگیرید فرم کلی تابع تبدیل :

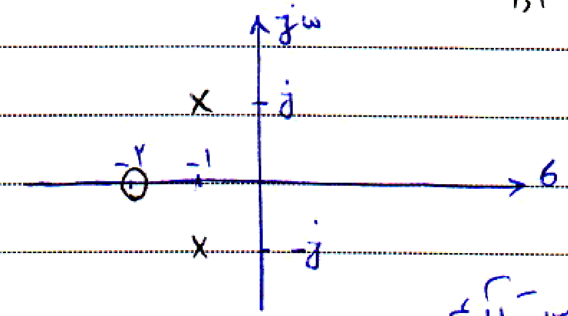
$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \qquad m \leq s \qquad m \leq n$$

در صفحه مختلط $(\sigma, j\omega)$ صفرهای تابع تبدیل را با علامت O و قطبها را با X نمایش می‌دهیم

سپس شکل بدست آمده را با علامات قطب و صفر می‌نویسیم

مثال تابع تبدیل زیر را رسم کنید :

$$H(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+2s+2} \quad \begin{cases} z_1 = -2 \\ p_{1,2} = -1 \pm j \end{cases}$$



از روی شکل می‌توانیم به تابع تبدیل برسیم ولی K را نمی‌توانیم بدست آوریم

برای بدست آوردن K باید در یک نقطه مشخص مقدار تابع تبدیل را داشته باشیم

فرض کنید: $H(j0)=2$

$$H(j\omega)=\frac{K(2+j\omega)}{2-\omega^2+2j\omega}$$

$$H(j0)=\frac{2K}{2}=2 \longrightarrow K=2 \quad \Rightarrow H(S)=\frac{2(s+2)}{s^2+2s+2}$$

تابع شبکه در حالت دائمی سینوسی و ورودی Sin , Cos است

$X(S) \longrightarrow \boxed{H(S)} \longrightarrow Y(S)$ در درس پنجم صحبت کردیم

$$\boxed{H(S)=\frac{Y(S)}{X(S)}} \qquad H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \qquad Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$$

$$|Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)=|X(j\omega)|\angle X(j\omega)\times|H(j\omega)|\angle H(j\omega)$$

$$|Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)=|X(j\omega)||H(j\omega)|\angle\left(\angle X(j\omega)+\angle H(j\omega)\right)$$

در حوزه دائمی سینوسی:

$$\cancel{X(j\omega)}\ x(t)=A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow X(j\omega)=A\angle\phi$$

$$|Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)=A|H(j\omega)|\angle\phi+\angle H(j\omega)$$

$$\xrightarrow{\text{انتقال به زمان سینوسی}} y(t)=A|H(j\omega)|\cos(\omega t+\phi+\angle H(j\omega))$$

مثال) فرض کنید:

$$y(t)=? \Leftarrow x(t)=\cos t\,u(t)\ ,\quad H(S)=\frac{s^2+4}{(s+2)(s^2+3s+4)}$$

راه حل سخت:

$$X(S)=\frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(S)=X(S)H(S)\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

$$x(t)=A\cos(\omega t+\theta) \Rightarrow X(j\omega)=A\angle\theta$$

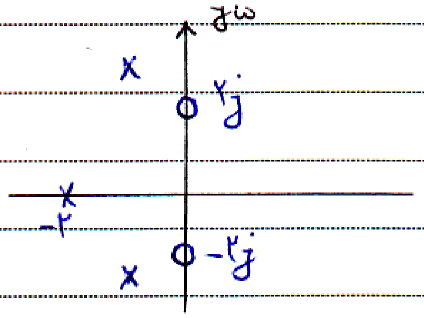
راه حل آسان: چون ورودی در سیستم سینوسی تک فرکانس است از تحلیل سینوسی حالت ماندگار استفاده می‌کنیم.

$\omega = 1$

$$H(j1) = \frac{4-1}{(2+j1)(4-1+3j\omega)} = \frac{3}{(2+j1)(3+3j\omega)} = \frac{1}{(2+j)(1+j)}$$

$$H(j1) = \frac{1}{1+3j} = \frac{1}{\sqrt{10}\angle 71.5^\circ} = \frac{1}{\sqrt{10}}\angle -71.5^\circ$$

$$X(j1) = 1\angle 0$$



$$Y(j1) = 1 \times \frac{1}{\sqrt{10}} \angle\big(0 + (-71.5)\big) = \frac{1}{\sqrt{10}}\angle -71.5^\circ$$

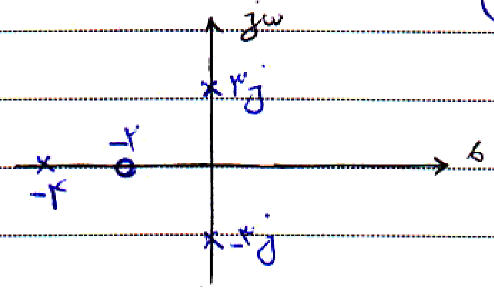
$$\rightarrow y(t) = \frac{1}{\sqrt{10}}\cos(t - 71.5^\circ)$$

تمرین: اگر $x(t) = \cos 2t \leftarrow y(t) = ?$

$$H(j\omega) = \frac{4-\omega^2}{(2+j\omega)(4-\omega^2+3j\omega)}$$

$$H(j2) = 0 \longrightarrow Y(j2) = 0 \longrightarrow y(t) = \cancel{X}\,0$$

تمرین: $x(t) = \cos 3t \qquad H(s) = \frac{s+2}{(s^2+9)(s+4)} \qquad , y(t) = ?$



$$H(j\omega) = \frac{2+j\omega}{(9-\omega^2)(4+j\omega)} \longrightarrow H(j3) = \infty$$

$$\longrightarrow Y(j3) = \infty \longrightarrow y(t) = \infty$$

اگر صفر در تابع تبدیل روی محور $j\omega$ قرار داشته باشد، پاسخ حالت دائمی سینوسی به ازای آن فرکانس صفر است.

✓ اگر قطبی روی محور $j\omega$ قرار داشته باشد پاسخ حالت دائمی سینوسی به ازای آن فرکانس بی نهایت است.

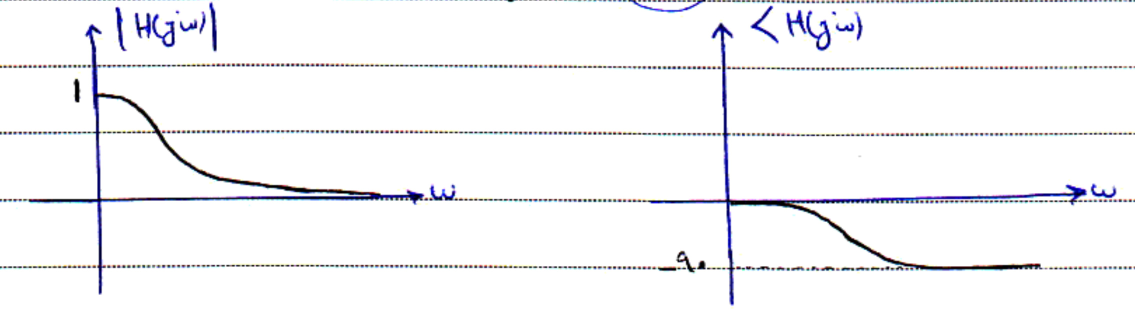
این حالت به معنای تحریک هر مدار که در فرکانس طبیعی است.

پاسخ فرکانسی: $H(j\omega)=|H(j\omega)|\angle H(j\omega)$

به اطلاعات سیستمی $|H(j\omega)|$ و $\angle H(j\omega)$، پاسخ فرکانسی می‌گوییم.

مثال) $H(S)=\frac{1}{S+1}$

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}=\frac{\sqrt{1}\angle 0}{\sqrt{1+\omega^2}\angle tg^{-1}\omega}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}}_{|H(j\omega)|}\angle\underbrace{-tg^{-1}\omega}_{\angle H(j\omega)}$$



در این درس به دنبال $|H(j\omega)|$ و $\angle H(j\omega)$ در یک الگوی مشخص هستیم. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

1) قطب‌ها و صفرهای تابع را مشخص می‌کنیم.

$$H(S)=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(S-Z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(S-P_j)}$$

یعنی:

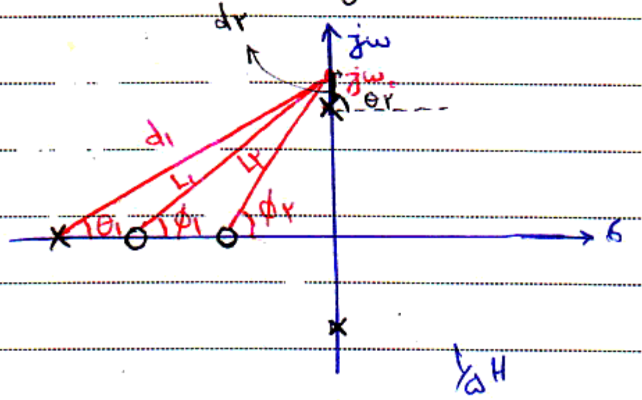
$$H(j\omega)=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(j\omega-Z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(j\omega-P_j)}$$

$$|H(j\omega)| = |K(j\omega)| \cdot \sum_{j=1}^{m} |j\omega - z_j| \Big/ \sum_{j=1}^{n} |j\omega - p_j|$$

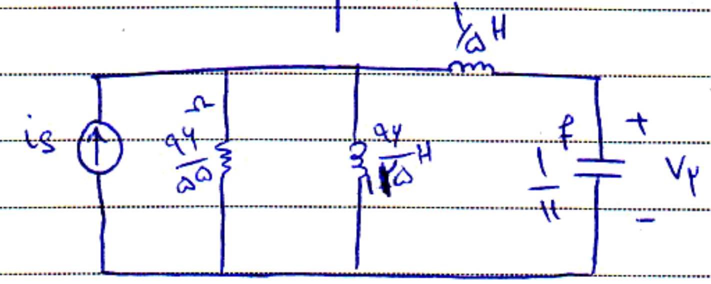
$$\angle H(j\omega) = \angle K(j\omega) + \sum_{j=1}^{m} \angle(j\omega - z_j) - \sum_{j=1}^{n} \angle(j\omega - p_j)$$

۲) قطب‌ها و صفرها را در صفحه s مشخص می‌کنیم و از قطب‌ها و صفرها به نقطه $j\omega_0$ یعنی نقطه‌ای که می‌خواهیم اندازه و فاز را در آن بدست آوریم، خطوطی را رسم می‌کنیم. هرگاه اندازه بردارهایی که از صفرها رسم می‌شوند را با L_1 ، L_2 ، ... ، L_m و زوایای این بردارها را با محور حقیقی با ϕ_1 ، ϕ_2 ، ... ، ϕ_m نشان دهیم و همچنین اندازه بردارهایی را که از قطب‌ها رسم می‌شوند با d_1 ، d_2 ، ... ، d_n نشان دهیم و زوایای این بردارها را با محور حقیقی با θ_1 ، θ_2 ، ... ، θ_n نشان دهیم:

$$|H(j\omega_0)| = \frac{|K(j\omega)| \prod_{j=1}^{m} L_j}{\prod_{j=1}^{n} d_j} \quad , \quad \angle H(j\omega_0) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j - \sum_{j=1}^{n} \theta_j$$



مثال ۷) برای حل، چون $H(s)$ در حالت صفر محاسبه می‌شود پس شرایط اولیه نداریم.



الف) $H(S)=\dfrac{V_2(S)}{I_S(S)}$

ب) خروجی برای $i_s(t)=15\cos(4t-30)$.

الف) حل از

$$\begin{bmatrix} \frac{55}{96}+\frac{125}{96S}+\frac{5}{S} & \frac{-5}{S} \\ \frac{-5}{S} & \frac{5}{S}+\frac{S}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(S) \\ V_2(S) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_S(S) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{535+55S}{96S} & \frac{-5}{S} \\ \frac{-5}{S} & \frac{S^2+55}{11S} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(S) \\ V_2(S) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I(S) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2(S)=\frac{\frac{5}{S}I(S)}{\frac{(55S+535)(S^2+55)}{96\times 11\,S^2}-\frac{25}{S^2}}$$

$$\frac{V_2(S)}{I_S(S)}=\frac{96\,S}{(S+5)(S^2+6S+25)}$$

$Z=0$

$P_1=-5$

$P_{2,3}=-3\pm 4j$

$I_S(j\omega)=15\angle -30 \Rightarrow I_S(j4)=15\angle -30$

ب) حل از روش فازور:

$I_S(S)=15\angle -30 \qquad \omega_0=4$

$$H(j4)=\frac{96\times 4j}{(5+4j)(9+24j)}=2{,}22-0/717j=2{,}334\angle -18{,}13$$

$I_S(j4)=15\angle -30$

$$\longrightarrow V_2(j4)=2{,}334\times 15\,\angle -30-18{,}13 \Rightarrow V_2(j4)=35{,}04\angle -48{,}13$$

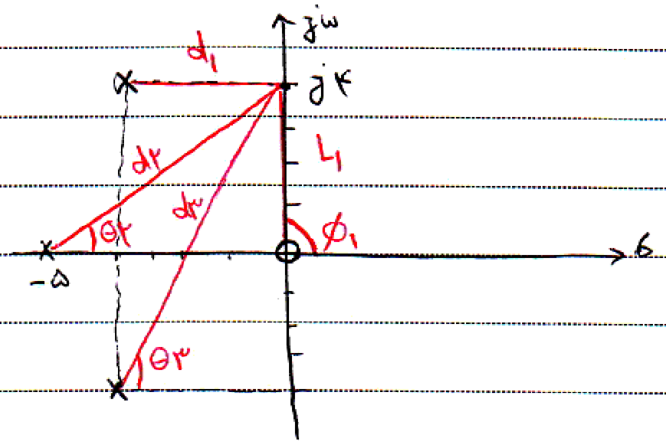
$\longrightarrow v_2(t) = 35.04 \cos(4t - 48.13)$

حل از راه حل دوم: از شکل قطب و صفر استفاده می‌کنیم

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{I_s(s)} = \frac{96s}{(s+5)(s^2+6s+25)}$$

$z \longrightarrow s=0$

$p \longrightarrow -5 \,,\, -3 \pm 4j$



$$\begin{cases} d_1 = 3 \\ \theta_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_2 = \sqrt{5^2+4^2} = 6.4 \\ \theta_2 = tg^{-1}\frac{4}{5} = 38.68 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_3 = \sqrt{8^2+3^2} = 8.54 \\ \theta_3 = tg^{-1}\frac{8}{3} = 69.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 = 4 \\ \phi_1 = 90 \end{cases} \qquad |H(j4)| = \frac{|k|\, L_1}{d_1 d_2 d_3} = \frac{96 \times 4}{6.4 \times 3 \times 8.54} = 2.34$$

$$\angle H(j4) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \angle k = 90 - 38.68 - 69.5 = -18.18$$

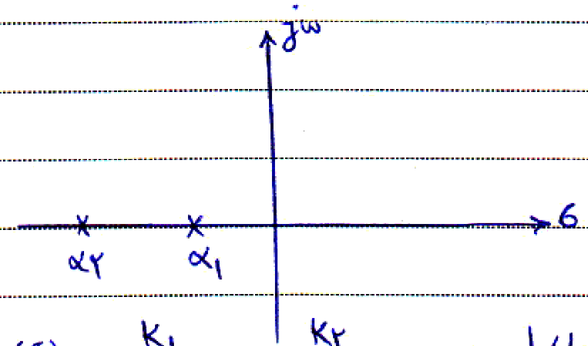
$$H(j4) = 2.34 \angle -18.18$$

$$V_2(j4) = 15 \angle -30 \times 2.34 \angle -18.18 = 35 \angle -48.18$$

$$v_2(t) = 35 \cos(4t - 48.18)$$

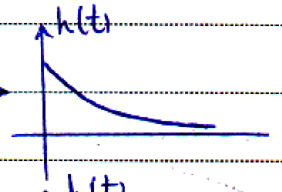
بررسی قطب‌های تابع تبدیل:

الف) قطب‌های حقیقی:



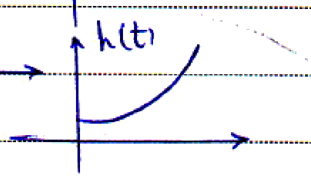
$$H(S)=\frac{K_1}{S-\alpha_1}+\frac{K_2}{S-\alpha_2}\Rightarrow h(t)=K_1e^{\alpha_1 t}+K_2e^{\alpha_2 t}$$

$\alpha_1<0\ ,\ \alpha_2<0 \longrightarrow$



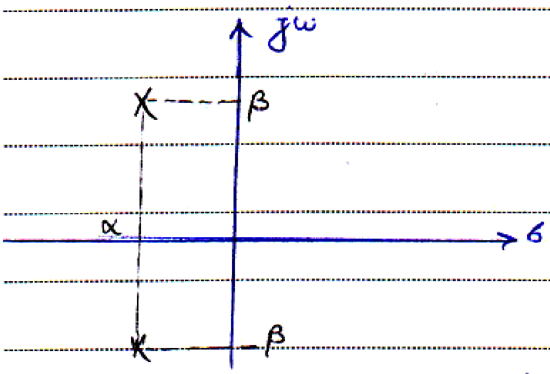
تابع پایدار است.

$\alpha_1>0$ یا $\alpha_2>0 \longrightarrow$
اگر یکی مثبت باشد.



ناپایدار

ب) قطب‌های مزدوج:



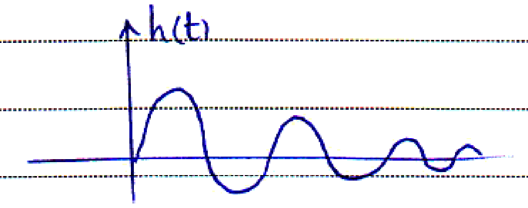
$$S_{1,2}=\alpha\pm j\omega$$

$$H(S)=\frac{K}{S-(\alpha+j\beta)}+\frac{K^*}{S-(\alpha-j\beta)}$$

$$h(t)=2|K|e^{\alpha t}\cos(\beta t+\angle K)$$

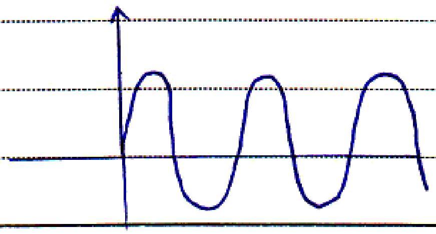
به α ضریب میرایی و به β فرکانس نوسان می‌گوییم.

$\alpha<0$



قطب‌ها سمت چپ محور $j\omega$ $\longrightarrow$ وضعیت پایدار

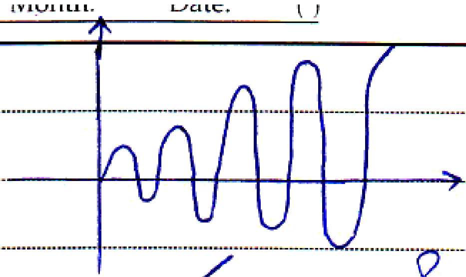
$\alpha=0$



قطب‌ها روی محور $\longrightarrow$ وضعیت مرز پایدار

(در عمل امکان ندارد)

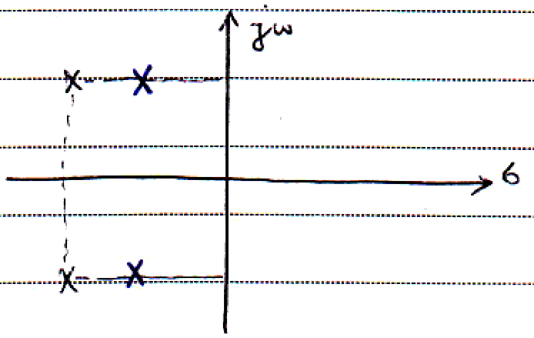
$\alpha > 0$

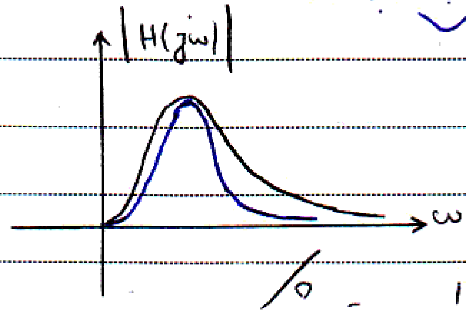


قطب‌ها سمت راست ← وضعیت ناپایدار

✓ بر خط طبیعی هر قطبی چه حقیقی چه مزدوج اگر سمت راست محور $j\omega$ باشد ناپایداری ایجاد می‌کند.

✓ وجود قطب مزدوج (مختلط) در پاسخ فرکانسی تابع شبکه ایجاد پیک‌های نوک تیزی می‌کنند هر چه این قطب‌ها از محور دورتر باشند پهنای باند بزرگتر است.





فرکانس‌های طبیعی و قطب‌های تابع شبکه؟

فرکانس‌های طبیعی را از یکی از روش‌های زیر به دست می‌آوریم؟

$|Y_n(s)| = 0$

یا

$|Z_m(s)| = 0$

یا

$|Z_B(s)| = 0$

یا

$|Y_Q(s)| = 0$

قابل توجه است که هر قطب تابع شبکه فرکانس طبیعی شبکه نیز هست ولی ممکن است یک فرکانس طبیعی، قطب تابع شبکه نباشد.

خاصیت تقارن در تابع سیستم:

فرم کلی تابع سیستم:

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \qquad m\leq n$$

در حوزه فرکانس $\quad s \longrightarrow j\omega$

$(j\omega)=j\omega \qquad (j\omega)^2=-\omega^2$

$(j\omega)^3=-j\omega^3 \qquad (j\omega)^4=\omega^4$

$(j\omega)^5=j\omega^5=(j\omega)^3\times(j\omega)^2 \qquad (j\omega)^6=-\omega^6=(j\omega)^4\times(j\omega)^2$

$(j\omega)^7=-j\omega^7 \qquad (j\omega)^8=\omega^8=(j\omega)^6\times(j\omega)^2$

$\vdots \qquad \vdots$

$$H(j\omega)=\frac{(b_0-b_2\omega^2+b_4\omega^4-\dots)+j\omega(b_1-b_3\omega^2+b_5\omega^4-\dots)}{(a_0-a_2\omega^2-a_4\omega^4-\dots)+j\omega(a_1-a_3\omega^2+a_5\omega^4-\dots)}$$

$$H(j\omega)=\frac{(\text{چندجمله‌ای از }\omega^2)+j\omega(\text{چندجمله‌ای از }\omega^2)}{(\text{چندجمله‌ای از }\omega^2)+j\omega(\text{چندجمله‌ای از }\omega^2)}$$

$$\begin{cases}|H(j\omega)|=|H(-j\omega)|\\ \mathrm{Re}[H(j\omega)]=\mathrm{Re}[H(-j\omega)]\end{cases} \qquad \begin{cases}\angle H(j\omega)=-\angle H(-j\omega)\\ \mathrm{Im}[H(j\omega)]=-\mathrm{Im}[H(-j\omega)]\end{cases}$$

مثال) اطلاعات زیر از یک تابع سیستم داده شده، حداقل تعداد قطب و صفرها چیست؟

$|H(j0)|=1$

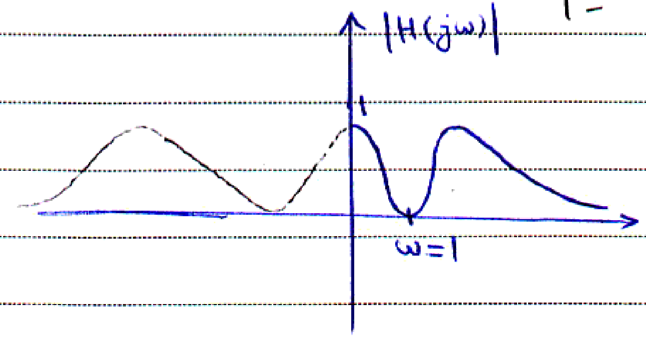
$|H(j1)|=0 \qquad |H(j\infty)|=0$

با توجه به خاصیت تقارن، $|H(-j1)|=0$

پس حداقل دو صفر داریم $S=j$ و $S=-j$

با توجه به اینکه $|H(j\infty)|=0$ یعنی درجه مخرج از درجه صورت حداقل یکی بالاتر است یعنی حداقل ۳ قطب داریم. حتماً یکی از قطب‌ها حقیقی است و ممکن است دو قطب دیگر مزدوج باشند.

$$H(s)=\frac{(s-j)(s+j)=(s^2+1)}{(s-\gamma)\big(s-(\alpha+j\beta)\big)\big(s-(\alpha-j\beta)\big)}$$



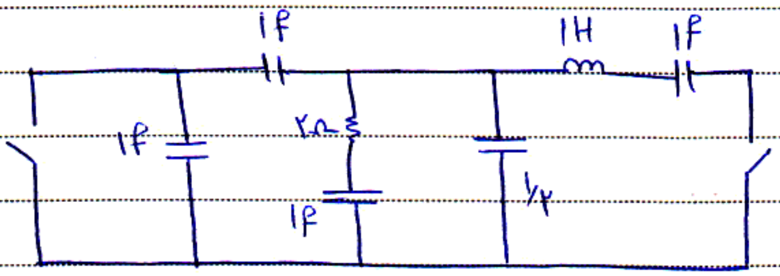
A) در مدار شکل زیر در دو حالت باز بودن کلیدها و بسته بودن کلیدها کدام گزینه صحیح است؟

۱) تعداد فرکانس‌های طبیعی در هر دو حالت ۵ است.

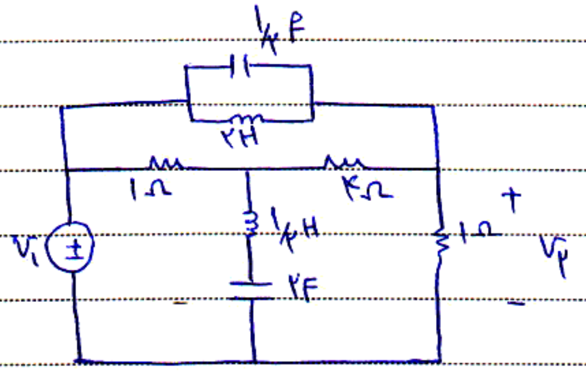
۲) تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر در یک حالت برابر ۱ است.

۳) تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر در یک حالت برابر تعداد فرکانس‌های طبیعی غیر صفر در حالت دیگر است.

۴) موارد ۲ و ۳.



B) در مدار زیر تابع تبدیل $\frac{V_2}{V_1}$ کدام است؟



1) $\frac{2(s^2+1)}{(s+1)^2}$

2) $\frac{s^2+1}{(s+2)^2}$

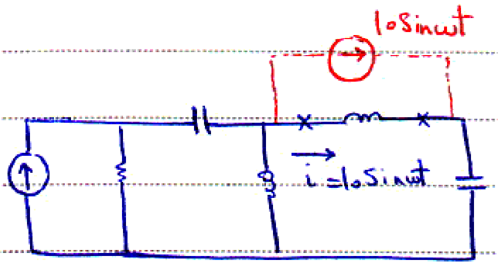
3) $\frac{s^2+1}{s^2+s+1}$

4) $\frac{s^2+1}{(s+1)^2}$

«فضای شبکه»

قضیه جانشینی: کاربرد در شبکه‌های خطی، غیرخطی، تغییرپذیر و تغییرناپذیر با زمان

قضیه: هرگاه در شبکه N با مشخصات داده شده، عنصری یا شاخه‌ای مانند k که تزویجی با سایر عناصر شبکه ندارد در نظر بگیریم، جایگزین کنیم این شاخه برابر با $v_k(t)$ و جریان شاخه برابر با $j_k(t)$ بوده و معادلات شبکه دارای جواب یکتا باشد، می‌توان به جای شاخه k، منبع ولتاژی که معادله تغییرات آن برابر با $v_k(t)$ یا منبع جریانی که معادله تغییرات آن برابر با $j_k(t)$ باشد قرار داد.



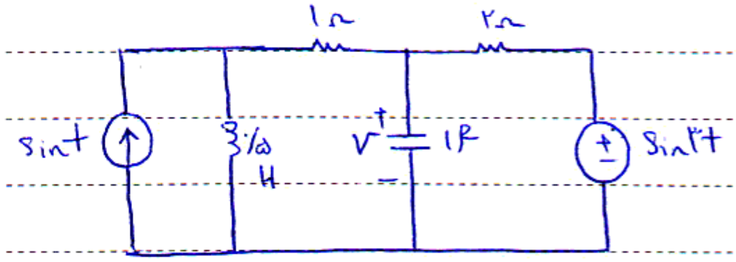
قضیه جمع آثار: کاربرد در شبکه‌های خطی (تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان)

هرگاه شبکه N با مشخصات داده شده، فرض می‌شود که این شبکه توسط تعدادی منبع مستقل تحریک شود، پاسخ حالت صفر شبکه برابر است با جمع جبری پاسخ‌های حالت صفر ناشی از اعمال هر یک از منابع مستقل در صورتی که به تنهایی به شبکه اعمال شوند.

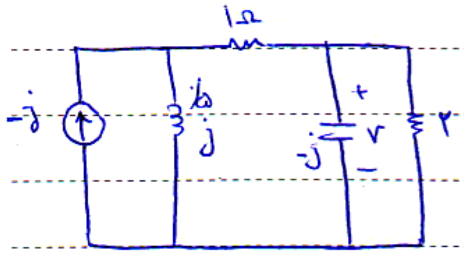
قضیه فرعی: هرگاه شبکه N خطی و تغییرناپذیر با زمان در حالت دائمی سینوسی باشد، پاسخ حالت صفر (یا پاسخ حالت دائمی) ناشی از اعمال یک تعداد منابع سینوسی مستقل (حتی با فرکانس‌های متفاوت) برابر است با

مجموع جمع پاسخ‌های دائمی سینوسی ناشی از اعمال هر یک از منابع وقتی به تنهایی به شبکه اعمال می‌شوند.

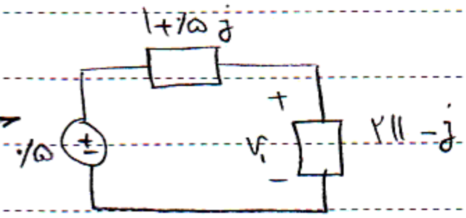
مثال) $v(t)$ را در مدار زیر بدست آورید؟



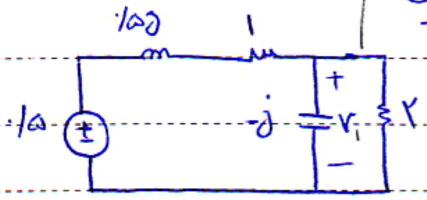
حل: از جمع آثار استفاده می‌کنیم و از تحلیل سینوسی حالت ماندگار.



$\omega = 1$



$\Downarrow$

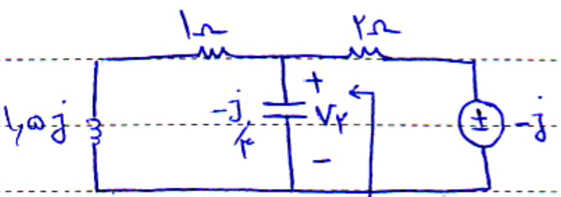


v_1 ناشی از منبع جریان

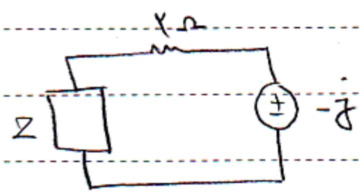
$$V_1 = \frac{(2 \| -j)}{0.5j + 1 + (2 \| -j)} \times 0.5 = \frac{0.4 - 0.8j}{0.5j + 1 + 0.4 - 0.8j} \times 0.5$$

$$V_1 = \frac{8}{41} - \frac{10}{41} j = 0.31 \angle -51.34$$

$$\Rightarrow v_1(t) = 0.31 \cos(t - 51.34)$$



$\omega = 3$



$$Z = (1 + 1.5j) \| (-j/3) = 0.047 - 0.388j$$

v_2 ناشی از منبع ولتاژ

$$V_2 = -j \times \frac{(0.047 - 0.388j)}{2 + (0.047 - 0.388j)} = -0.178 - 0.0548j = 0.187 \angle 197.2$$

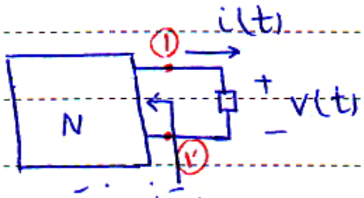
$v_2(t)=0.187\cos(3t+197.7)$

چون فرکانس‌ها متفاوت‌اند مجموع در حوزه زمان آن‌ها را با هم جمع کنیم. $v(t)=v_1(t)+v_2(t)=$

$v(t)=0.31\cos(t-51.34)+0.187\cos(3t+197.7)$

قضیه‌های شبکه‌های معادل تونن و نورتن : کاربرد در شبکه‌های خطی تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان

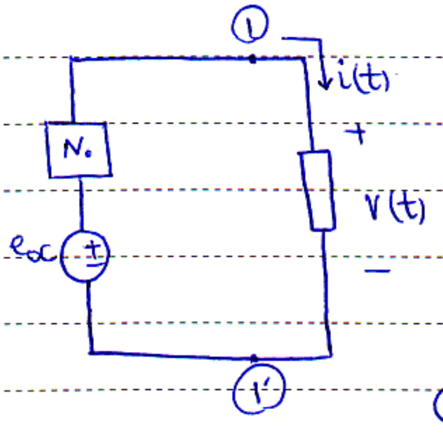
براساس این قضیه‌ها اگر شبکه N را با یک شبکه معادل تونن یا نورتن تعویض کنیم هیچگونه تغییری در شکل موج جریان (یعنی $i(t)$) و شکل موج ولتاژ (یعنی $v(t)$) در مدار بیرونی شکل زیر حاصل نمی‌شود.



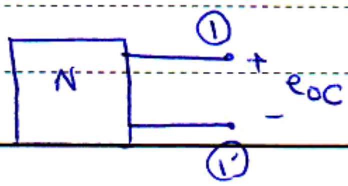
معادل تونن یا نورتن

شرط این است که بار هیچ کوپلی با سایر عناصر شبکه نداشته باشد.

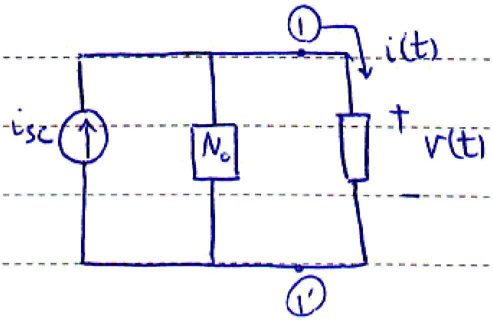
قضیه شبکه معادل تونن: هر شبکه با مشخصات موصوف را می‌توان با شبکه زیر معادل نمود که در آن شبکه N_0 شبکه در حالت استراحت یا شبکه معادل ورودی صفر و حالت صفر شبکه اولیه است.

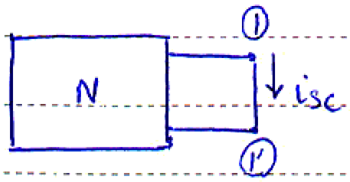


منبع ولتاژ e_{oc} ، ولتاژ مدار باز دو سر ۱ و ۱' است که بوسیله منابع مستقل شبکه با شرایط اولیه به وجود می‌آید.

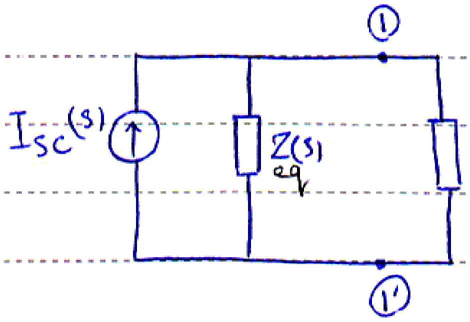


تفسیر شبکه معادل نورتن: هر شبکه با مشخصات فوق را می‌توان با شبکه نورتن معادل کرد که در آن شبکه N_0 مشابه حالت قبل است و I_{sc} جریان اتصال کوتاه دو سر (1)(1') ناشی از منابع مدار و شرایط اولیه آن است.

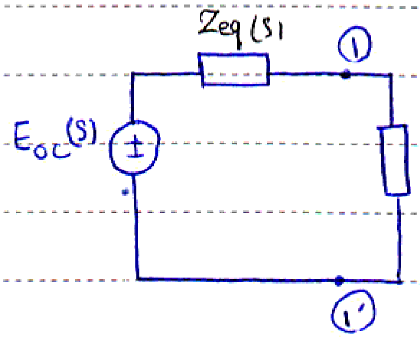




تفسیر دوم: هرگاه شبکه N خطی و تغییرناپذیر با زمان باشد می‌توان از تبدیل لاپلاس استفاده نمود و مدارهای معادل تونن و نورتن را به صورت زیر حاصل کرد



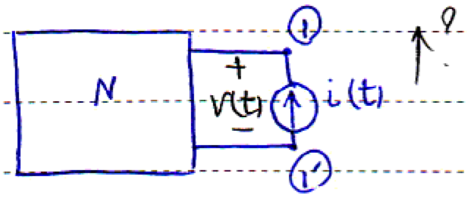
$$Z_{eq}(S) = \frac{E_{oc}(S)}{I_{sc}(S)}$$



روش‌های به دست آوردن $Z_{eq}(S)$:

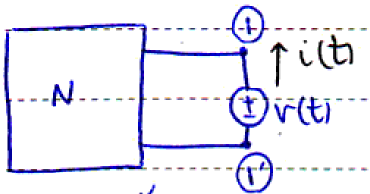
1) روش اعمال منبع: یکی از دو روش زیر عمل می‌کنیم:

الف) یک منبع جریان $i(t)$ به دو سر (1)(1') اعمال می‌نماییم و ولتاژ دو سر آن را مانند شکل زیر به دست می‌آوریم



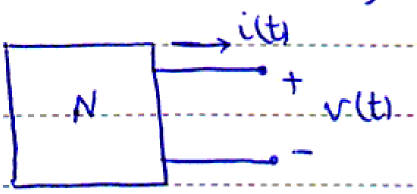
$$Z_{eq} = \frac{v(t)}{i(t)}$$

ب) یک منبع ولتاژ $v(t)$ به دو سر درگاه اعمال می‌کنیم جریان آن را مانند شکل زیر بدست می‌آوریم:



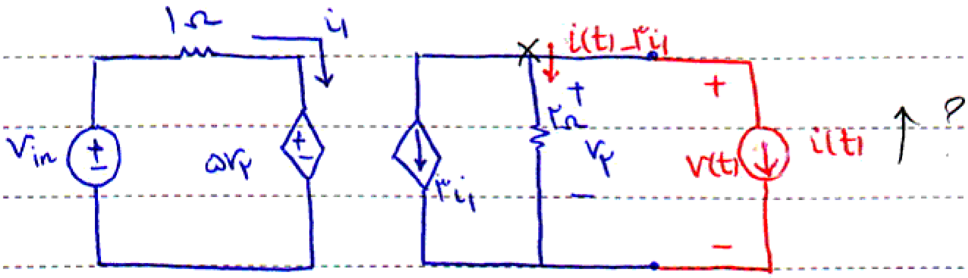
$$Z_{eq} = \frac{v(t)}{i(t)}$$

۲) معادله ولتاژ و جریان دو سر ①①' را به صورت زیر به دست می‌آوریم: (e_{oc} و i_{sc} را جداگانه بدست می‌آوریم)



$$v(t) = e_{oc} - Z_{eq}\, i(t)$$

مثال: معادل تونن از دیدگاه ①①'



حل: از روش اعمال منبع: منبع جریان اعمال می‌کنیم

$v_2 = v(t) = 2(+i(t) - 3i_1)$

$\boxed{v(t) = +2i(t) - 6i_1}$ ①

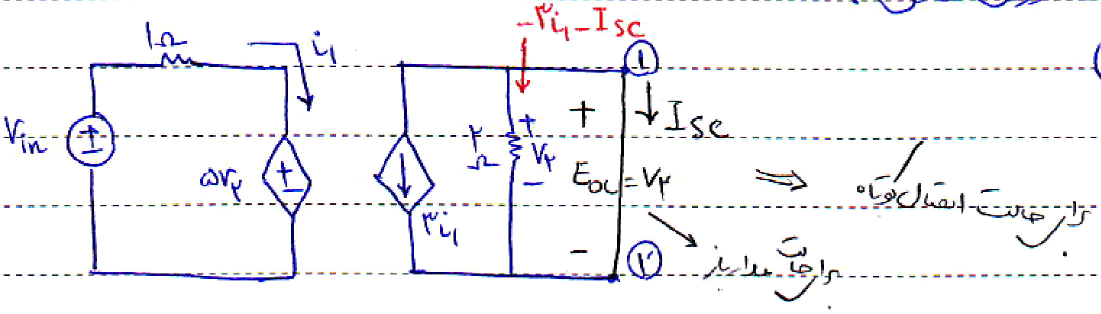
$KVL: v_{in} = i_1 + 5v(t) \longrightarrow \boxed{i_1 = v_{in} - 5v(t)}$ ②

① و ②: $v(t) = +2i(t) - 6v_{in} + 30v(t) \Rightarrow 29v(t) = 6v_{in} - 2i(t)$

$$v(t) = \underbrace{\frac{6}{29}V_{in}}_{E_{oc}} \overset{-}{\cancel{+}} \underbrace{\frac{2}{29}}_{Z_{eq}} i(t)$$

حل از طریق بدست آوردن معادل :

(روش دوم)



$V_2 = -2\times 3 i_1 = -6 i_1 \qquad i_1 = \dfrac{V_{in} - 5V_2}{1} = V_{in} - 5(-6i_1)$

$i_1 = V_{in} + 30 i_1 \longrightarrow i_1 = \dfrac{-V_{in}}{29} \qquad V_2 = \underbrace{\dfrac{6}{29}}_{E_{oc}} V_{in} \longrightarrow E_{oc} = \dfrac{6}{29} V_{in} \qquad (V_2 = e_{oc})$

$V_2 = 0 \longrightarrow 2(-3i_1 - I_{sc}) = 0 \Rightarrow -6i_1 - 2I_{sc} = 0 \longrightarrow \boxed{I_{sc} = -3i_1}$

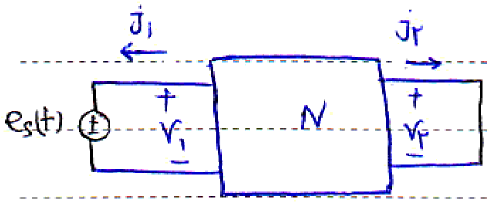
KVL : $i_1 = V_{in} - \cancel{5V_2} \Rightarrow i_1 = V_{in} \longrightarrow \boxed{I_{sc} = -3V_{in}}$

$$Z_{eq} = \frac{E_{oc}}{I_{sc}} = \frac{6/29}{-3} = -2/29$$

تفسیر هم پاسخی : کاربرد در شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، بدون منابع وابسته و مستقل و بدون عنصری به نام ژیراتور و شرایط اولیه صفر. این تفسیر سه نوع بیان دارد :

بیان ۱) اگر به شبکه N با مشخصات ذکر شده در ترکیبات الف و ب منابع زیر را اعمال کنیم خواهیم داشت :

$$j_2(t) = \hat{j}_1(t)$$

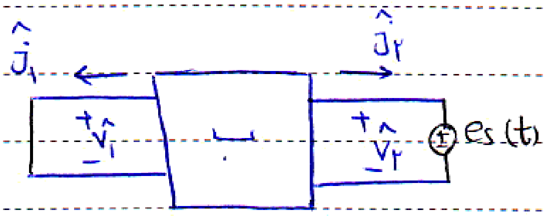


(الف)

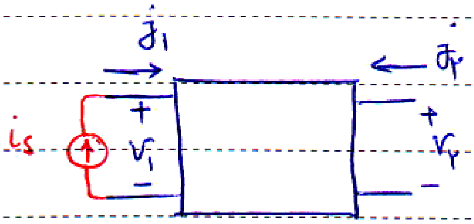
طبق قضیه تلگان :

$$\underbrace{V_1}_{e_s}\hat{J}_1 + \underbrace{V_2}_{0}\hat{J}_2 = \underbrace{\hat{V}_1}_{0} J_1 + \underbrace{\hat{V}_2}_{e_s} J_2$$

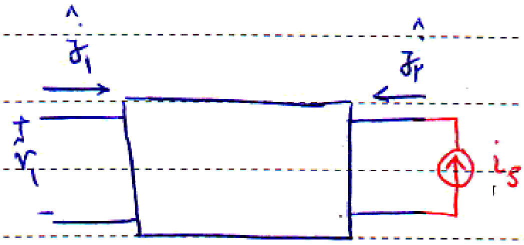
$$e_s \hat{J}_1 = e_s J_2 \longrightarrow \hat{J}_1 = J_2$$



مثال ۲)



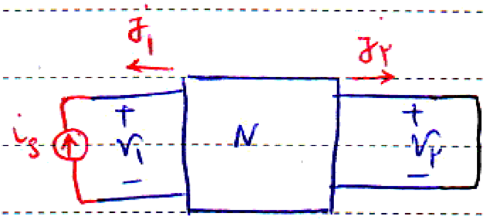
طبق قضیه تلگان :



$$V_1 \underbrace{\hat{J}_1}_{0} + V_2 \underbrace{\hat{J}_2}_{i_s} = \hat{V}_1 \underbrace{J_1}_{i_s} + \hat{V}_2 \underbrace{J_2}_{0}$$

$$V_2 i_s = \hat{V}_1 i_s \longrightarrow \boxed{V_2 = \hat{V}_1}$$

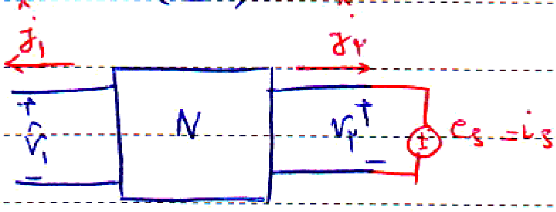
مثال سوم : با استفاده از قضیه تلگان می توان نشان داد :



(الف)

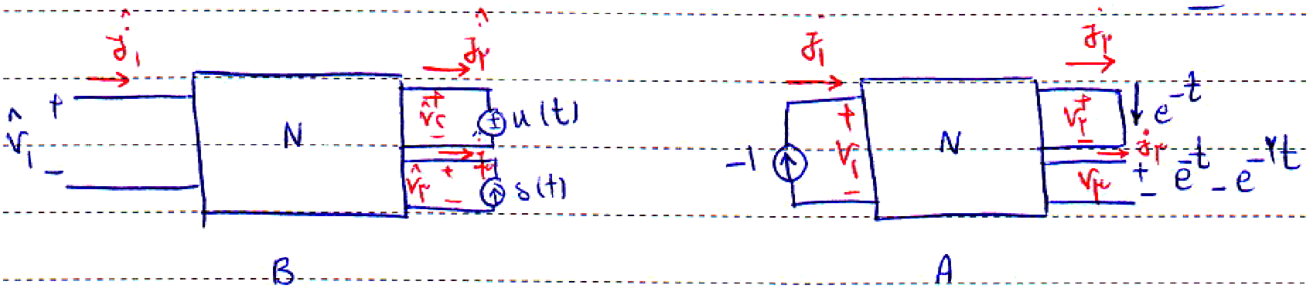
$$\underbrace{V_1 \hat{J}_1}_{0} + \underbrace{V_2 \hat{J}_2}_{0} = \hat{V}_1 \underbrace{J_1}_{-i_s} + \underbrace{\hat{V}_2}_{e_s} J_2$$

$$-\hat{V}_1 i_s + i_s \hat{J}_2 = 0 \longrightarrow \boxed{\hat{V}_1 = \hat{J}_2}$$



(ب)

مثال) در مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان شکل A، اطلاعات زیر داده شده. اینک مدار را به صورت B در می‌آوریم. ولتاژ $\hat{v}_1$ چیست؟



چون قضیه هم‌پاسخی تحت شرایط خطی و تغییر ناپذیر بودن با زمان است می‌توان برای آن قضیه تلگان را در حوزه لاپلاس بکار برد.

$$V_1 \hat{J}_1 + V_2 \hat{J}_2 + V_3 \hat{J}_3 = \hat{V}_1 J_1 + \hat{V}_2 J_2 + \hat{V}_3 J_3$$

$$0 + 0 + \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right) \times (-1) = \hat{V}_1 \left(-\frac{1}{s}\right) + \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right) + 0$$

$$\frac{-1}{(s+1)(s+2)} = \hat{V}_1 \times \frac{-1}{s} + \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\frac{\hat{V}_1}{s} = \frac{1}{s(s+1)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+2+s}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\hat{V}_1 = \frac{2}{s+2} \longrightarrow \hat{v}_1(t) = 2e^{-2t}u(t)$$

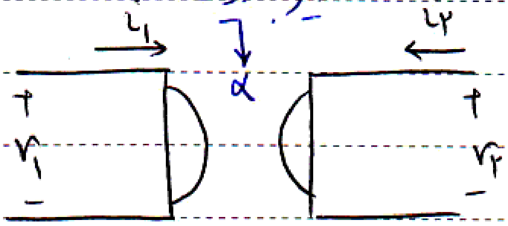
ژیراتور؟

تعریف: هر شبکه‌ای که در قضیه هم‌پاسخی صدق کند شبکه متقابل گفته می‌شود.

$$\begin{cases} Z_{ij} = Z_{ji} \\ Y_{ij} = Y_{ji} \end{cases}$$

ژیراتور: یک عنصر غیرخطی و تغییرناپذیر با زمان است.

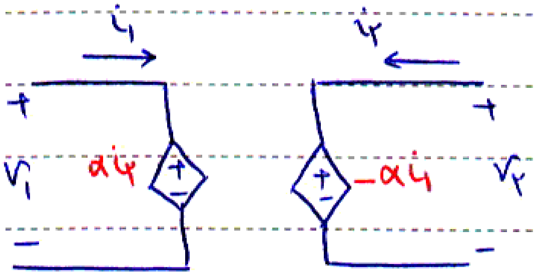
ضریب ژیراتور



$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_2 \\ v_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_2 = \dfrac{1}{\alpha} v_1 \\ i_1 = \dfrac{-1}{\alpha} v_2 \end{cases}$$

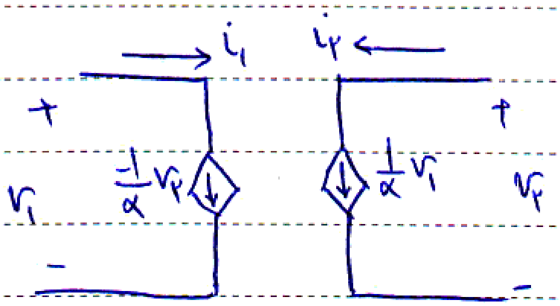
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

مدل کاربردی ژیراتور در آنالیزهای مش و حلقه‌های اساسی:



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-1}{\alpha} \\ 1/\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

مدل کاربردی در آنالیزهای گره و کات ست اساسی:

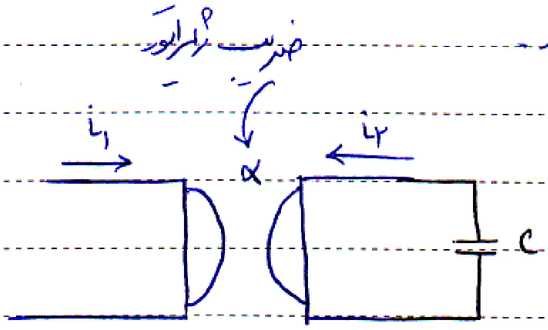


در ژیراتور:

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = \alpha i_2 i_1 - \alpha i_2 i_1 = 0$$

مفهوم این رابطه این است که ژیراتور به شبکه توان می‌دهد.

مثال) عملکرد مدار زیر را شرح دهید؟



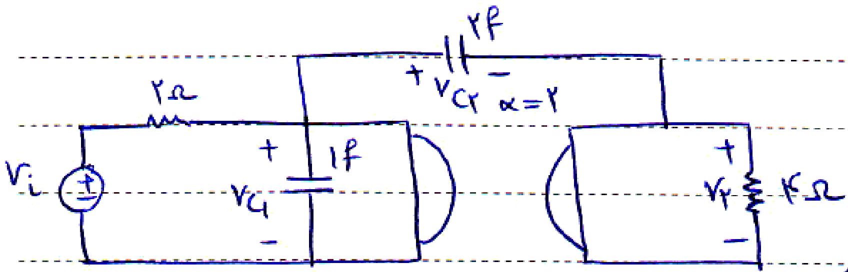
$$\begin{cases} V_1 = \alpha i_2 \\ V_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow -i_2 = C\frac{dV_2}{dt}$$

$$\longrightarrow i_2 = -C\frac{dV_2}{dt}$$

$$\begin{cases} V_1 = \alpha i_2 = -\alpha C \dfrac{dV_2}{dt} \\ V_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow V_1 = -\alpha C \frac{d}{dt}(-\alpha i_1)$$

$$\longrightarrow V_1 = \underbrace{\alpha^2 C}_{L} \frac{di_1}{dt}$$

مثال) در مدار زیر:



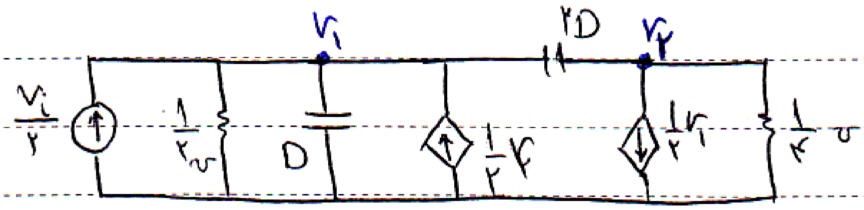
الف) فرکانس‌های طبیعی سیستم را بیابید؟

ب) تابع شبکه $\frac{V_o}{V_i}$ را بیابید؟

ج) اگر $V_i = 2\sin(t-40)$ باشد، $V_o(t)$ را بیابید؟

(از روش سینوسی گسترده استفاده می‌کنیم.

NADERI



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+3D & -\frac{1}{2}-2D \\ -2D+\frac{1}{2} & 2D+\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_i}{2} + \cancel{\frac{1}{2}V_2} \\ \cancel{-\frac{1}{2}V_1} \end{bmatrix}$$

$$2V_{C_2}(0^-)+V_{C_1}(0^-)$$

$$\begin{bmatrix} 3s+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-2s \\ -2s+\frac{1}{2} & 2s+\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_i}{2} + 3V_1(0^-)-2V_2(0^-) \\ -2V_1(0^-)+2V_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$$-2V_{C_2}(0^-)$$

$$V_1(0^-)-V_2(0^-)=V_{C_2}(0^-) \qquad V_1(0^-)=V_{C_1}(0^-)$$

شرایط اولیه

$$\begin{bmatrix} \frac{6s+1}{2} & -\frac{4s+1}{2} \\ -\frac{4s-1}{2} & \frac{8s+1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_i}{2} + 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

فرکانس‌های طبیعی

$$\frac{(6s+1)(8s+1)}{8} - \frac{(4s+1)(4s-1)}{4} = 0$$

$$(6s+1)(8s+1) - 2(4s+1)(4s-1) = 0$$

$$48s^2+14s+1-16s^2+2=0 \longrightarrow 32s^2+14s+3=0 \begin{cases} s_1 = \text{—} \\ s_2 = \text{—} \end{cases}$$

برای به دست آوردن تابع شبکه شرایط اولیه را صفر می‌کنیم.