

بِسْمِ اللّٰهِ

خزوه دس

کنترل پیشرفته

راحمیل زرکرمی نژاد

(ویرایش دوم)

بخش اول: شناسایی سیستم ها

بخش اول: شناسایی سیستم ها

۱-۱- مقدمه:

یک فرآیند کنترلی شامل انواع متغیرهای کنترلی و فرآیندی است که عموماً تابعی از ورودی یا خروجی فرآیند می باشند. از آنجا که هدف کلی یک فرآیند کنترلی، کنترل رفتار متغیر خروجی در محدوده مطلوب با استفاده از تغییر ورودی است، طراحی یک سیستم کنترلی مناسب نیازمند داشتن پارامترهای دقیق و مدل مناسبی از سیستم می باشد اما در عمل، مدل ریاضی دقیق سیستم های فیزیکی به راحتی بدست نمی آید. شناسایی سیستم، یک روش تجربی تقریباً مناسب برای تشخیص مدل ریاضی سیستم با استفاده از ورودی و خروجی مشخص می باشد. به این منظور که با اعمال یک ورودی مشخص که معمولاً تابع پله است، خروجی اندازه گیری شده و از پارامترهای خروجی، مدل ریاضی سیستم حدس زده می شود.

در این بخش به بررسی روش های شناسایی سیستم ها به مدل تقریبی مرتبه اول و دوم می پردازیم:

۱- شناسایی سیستم مرتبه اول تاخیر دار^۱ (FOPTD)

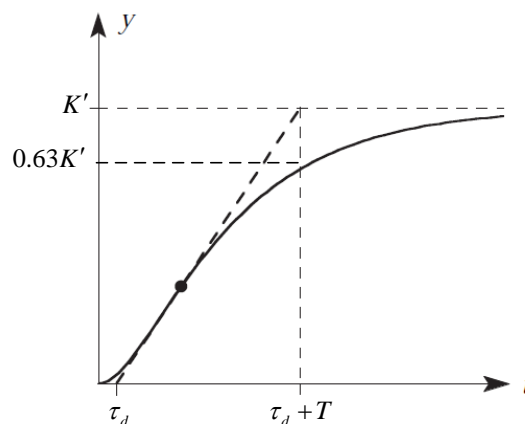
۲- شناسایی سیستم مرتبه دوم میرای بحرانی تاخیر دار

۳- شناسایی سیستم مرتبه دوم میرای شدید تاخیر دار

۴- شناسایی سیستم مرتبه دوم تاخیر دار^۲ (SOPTD)

۱-۲- شناسایی سیستم مرتبه اول تاخیر دار (FOPTD):

همانطور که در درس کنترل خطی دیدیم، سیستم های مرتبه اول، دارای پاسخ پله ای به فرم عمومی زیر می باشند:



شکل ۱-۱: فرم عمومی پاسخ پله سیستم مرتبه اول

که در آن T ثابت زمانی سیستم، τ_d زمان تاخیر و K' مقدار نهایی پاسخ می باشد. با داشتن این مقادیر تابع تبدیل تقریبی این سیستم از رابطه

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts} e^{-\tau_d s} \quad (1-1)$$

به دست می آید:

^۱ First-Order Plus Time-Delay Processes

^۲ Second-Order Plus Time-Delay Processes

جزوه درسی کنترل پیشرفته

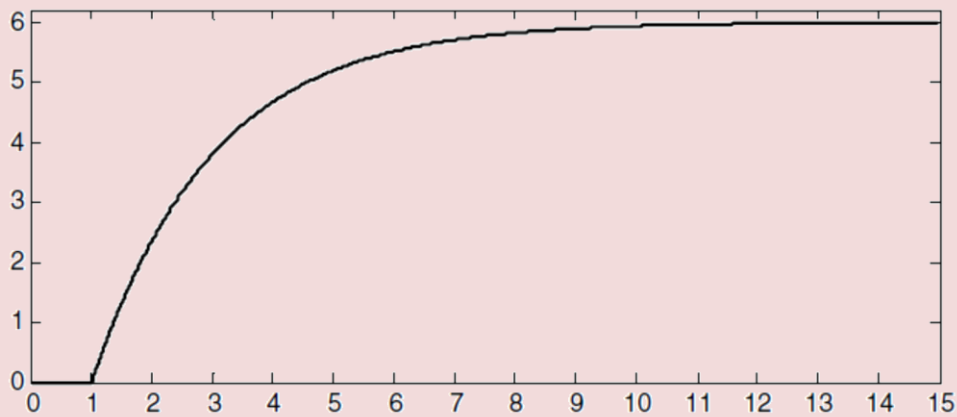
روش محاسبه τ_d : در صورتیکه مقدار تاخیر پاسخ مستقیم از نمودار قابل مشاهده نباشد، برای محاسبه τ_d ، یک خط مماس بر نقطه عطف نمودار مطابق شکل ۱-۱ رسم می نماییم. محل برخورد این خط با محور زمان، τ_d را بدست می دهد. روش محاسبه T : زمانی که پاسخ برای اولین بار به 63% مقدار نهایی می رسد برابر $\tau_d + T$ می باشد. با داشتن τ_d می توان T را محاسبه نمود.

روش محاسبه K : اگر ورودی سیستم برابر $nu(t)$ باشد، مقدار K از رابطه $\frac{K'}{n}$ بدست می آید.

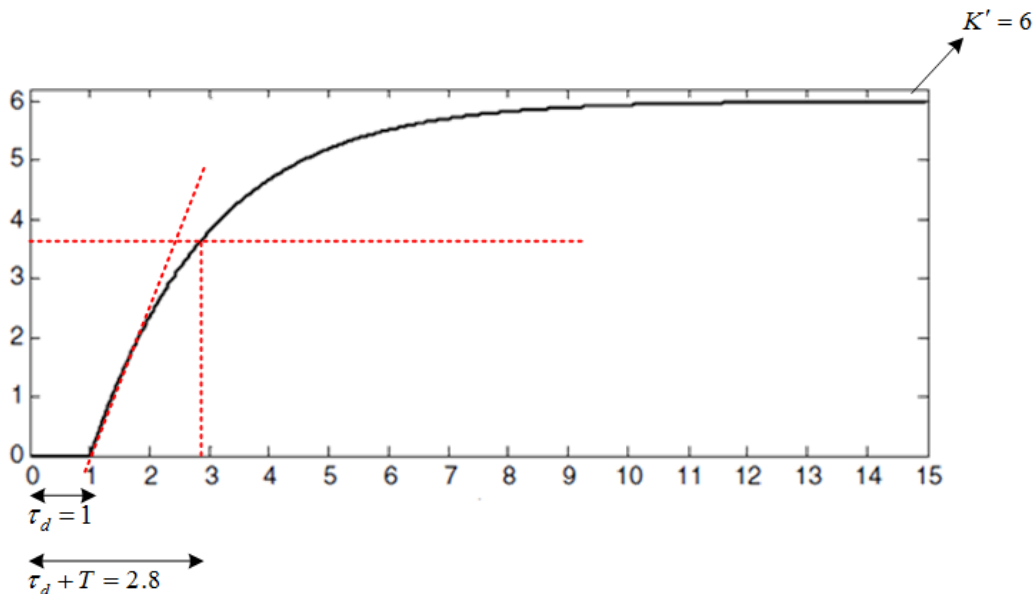
مثال ۱-۱

۱- الف) با توجه به ورودی خروجی زیر، تابع تبدیل سیستم را به ورودی $r(t) = 2u(t)$ تخمین بزنید.
ب) پاسخ پله سیستم بدست آمده را در نرم افزار MATLAB رسم نموده و با شکل اصلی مقایسه کنید.

$y(t)$



ابتدا تابع تبدیل تقریبی سیستم را به دست می آوریم:

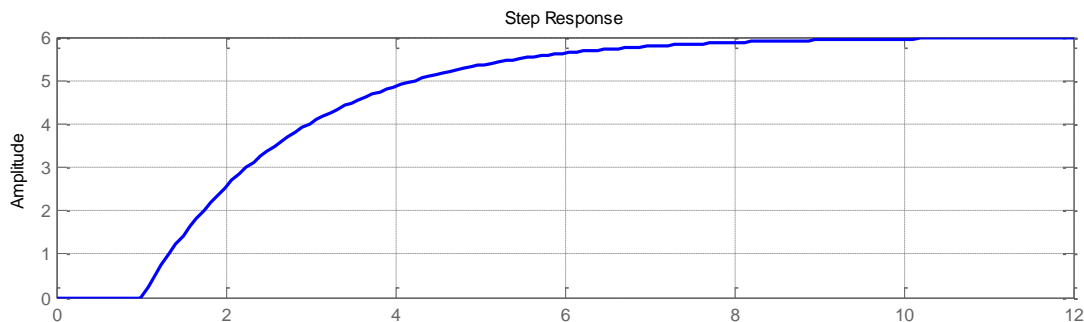


بنابراین:

$$\begin{cases} T=1.8 \\ K=\frac{6}{2}=3 \end{cases} \rightarrow G(s) = \frac{3}{1+1.8s} e^{-s}$$

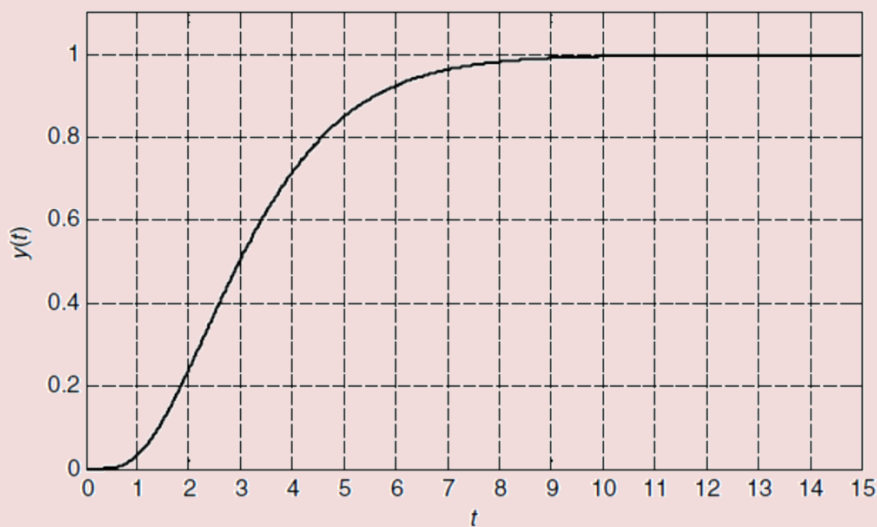
کد زیر پاسخ به ورودی $r(t) = 2u(t)$ سیستم تقریب زده شده را با استفاده از تقریب پاده^۱ برای بخش نمایی، ترسیم می‌کند:

```
clc
clear all
close all
k=3;
T=1.8;
td=1;
s=tf('s')
Gp = (2*k/(1+T*s))*exp(-td*s)
y=step(Gp);
plot(y)
grid on
```



۲- الف) با توجه به خروجی زیر، تابع تبدیل سیستم را به ورودی $r(t) = u(t)$ تخمین بزنید.
ب) پاسخ پله سیستم بدست آمده را در نرم افزار MATLAB رسم نموده و با شکل اصلی مقایسه کنید.

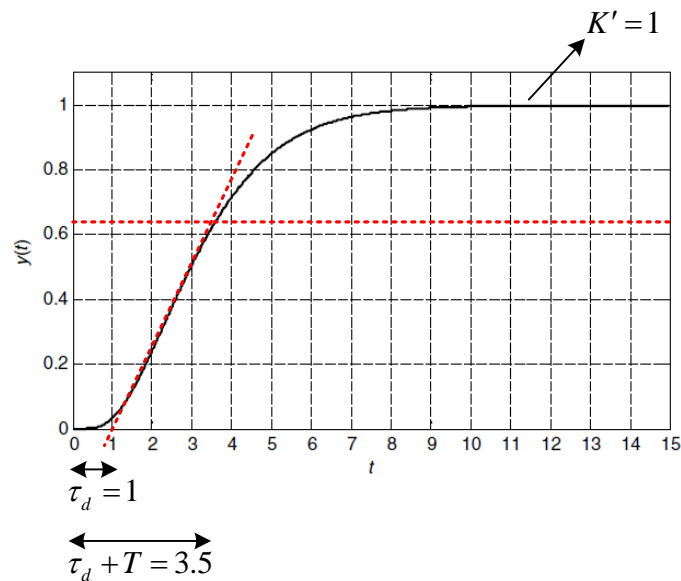
$$y(t)$$



^۱ تقریب پاده:

$$e^{-Ts} = \frac{1 - \frac{T}{2}s}{1 + \frac{T}{2}s}$$

جزوه درسی کنترل پیشرفته

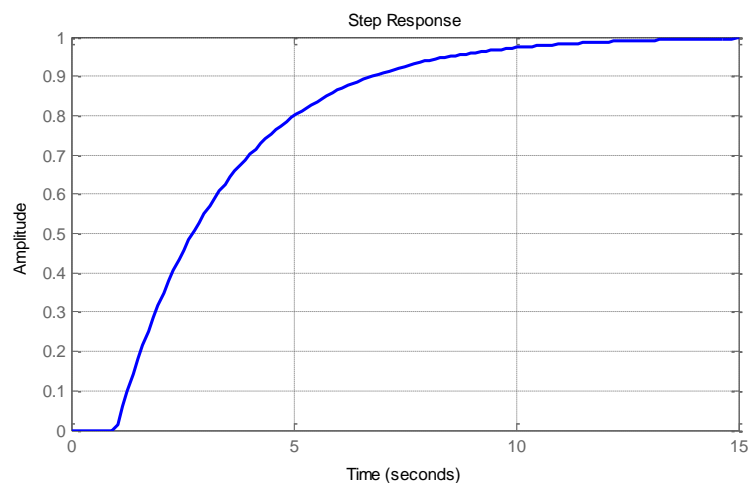


بنابراین:

$$\begin{cases} T = 2.5 \\ K = \frac{K'}{1} = 1 \end{cases} \rightarrow G(s) = \frac{1}{1 + 2.5s} e^{-s}$$

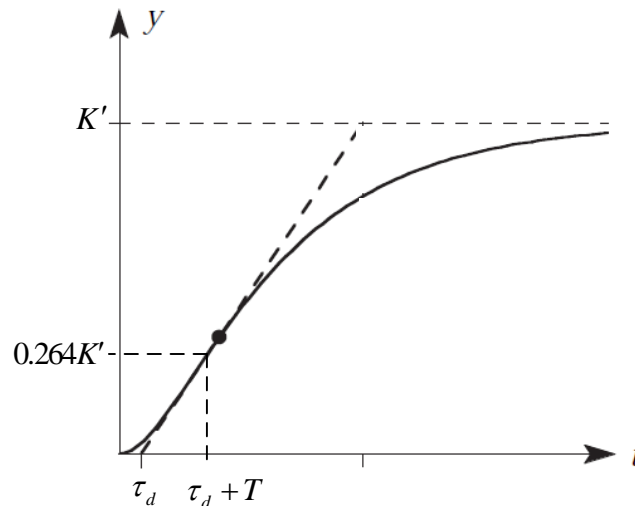
کد زیر پاسخ پله سیستم تقریب زده شده را با استفاده از تقریب پاده برای بخش نمایی، ترسیم می کند:

```
clc
clear all
close all
k=1;
T=2.5;
td=1;
s=tf('s')
s=tf('s')
Gp = (k/(1+T*s))*exp(-td*s)
step(Gp);
grid on
```



۳-۱- شناسایی سیستم مرتبه دوم میرای بحرانی:

سیستم های مرتبه دوم میرای بحرانی نیز دارای پاسخ پله ای به فرم عمومی زیر می باشند:



شکل ۲-۱: فرم عمومی پاسخ پله سیستم مرتبه دوم میرای بحرانی

که در آن T ثابت زمانی سیستم، τ_d زمان تاخیر و K' مقدار نهایی پاسخ می باشد. با داشتن این مقادیر تابع تبدیل تقریبی این سیستم از رابطه

$$G(s) = \frac{K}{(1+Ts)^2} e^{-\tau_d s} \quad (2-1)$$

به دست می آید که در آن روش محاسبه τ_d ، K' مانند بخش قبل است اما برای محاسبه T باید از پاسخ پله این سیستم به فرم معادله ۳-۱ استفاده نمود:

$$y(t) = K \left(1 - \left(1 + \frac{t - \tau_d}{T} \right) e^{-\left(\frac{t - \tau_d}{T}\right)} \right) \quad t \geq \tau_d \quad (3-1)$$

با جایگذاری یک نقطه دلخواه، بطور مثال زمان $t = \tau_d + T$ در معادله ۳-۱ داریم:

$$\begin{aligned} y(\tau_d + T) &= K' \left(1 - \left(1 + \frac{\cancel{\tau_d} + T - \cancel{\tau_d}}{T} \right) e^{-\left(\frac{\cancel{\tau_d} + T - \cancel{\tau_d}}{T}\right)} \right) \\ &= K' \left(1 - \left(1 + \frac{T}{\underset{=1}{T}} \right) e^{-\left(\frac{T}{T}\right)} \right) = 0.264K' \end{aligned}$$

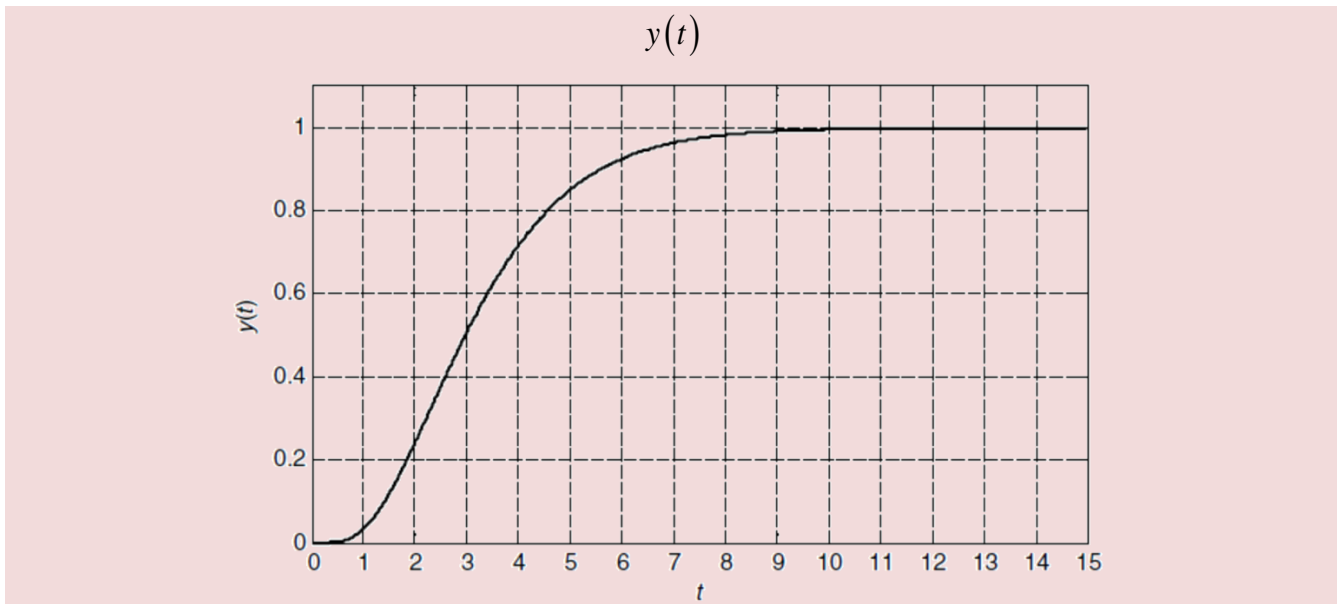
اکنون با داشتن K' و نمودار پاسخ پله، می توان زمان K' را محاسبه نمود.

مثال ۲-۱

۱- الف) با توجه به خروجی پله زیر، تابع تبدیل سیستم را تخمین بزنید.

ب) پاسخ پله سیستم بدست آمده را در نرم افزار MATLAB رسم نموده و با شکل اصلی مقایسه کنید.

جزوه درسی کنترل پیشرفته

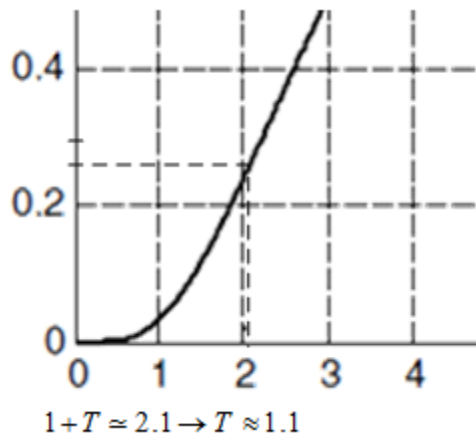


با توجه به قسمت ۲ مثال قبل داریم:

$$\begin{cases} \tau_d = 1 \\ K = \frac{K'}{1} = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow y(1+T) = 0.264K' = 0.264$$

که بصورت تقریبی از روی نمودار زمانی محور $y(t)$ برابر 0.264 می شود را پیدا می کنیم، این زمان برابر $1+T$ می باشد:



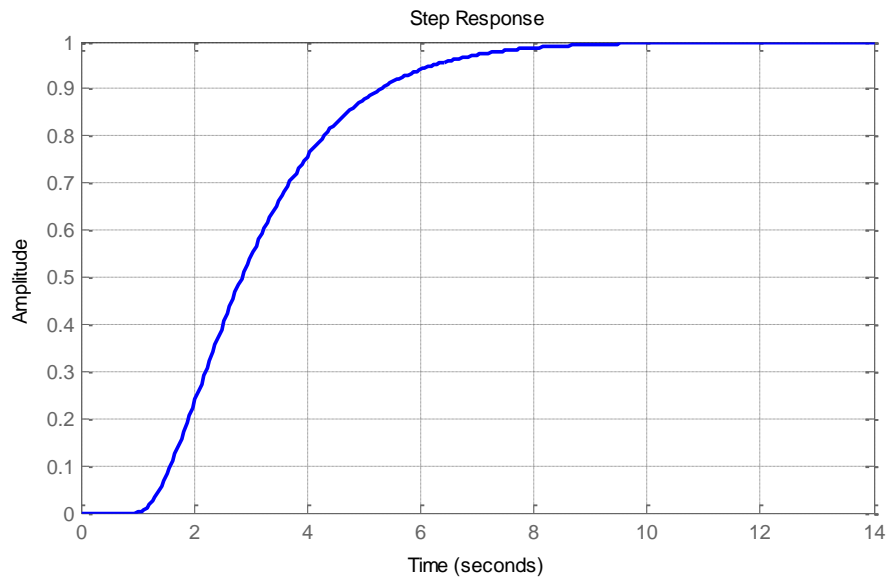
$$\rightarrow G(s) = \frac{1}{(1+1.1s)^2} e^{-s}$$

کد زیر پاسخ پله سیستم تقریب زده شده را با استفاده از تقریب پاده برای بخش نمایی، ترسیم می کند:

```
clc
clear all
close all
```

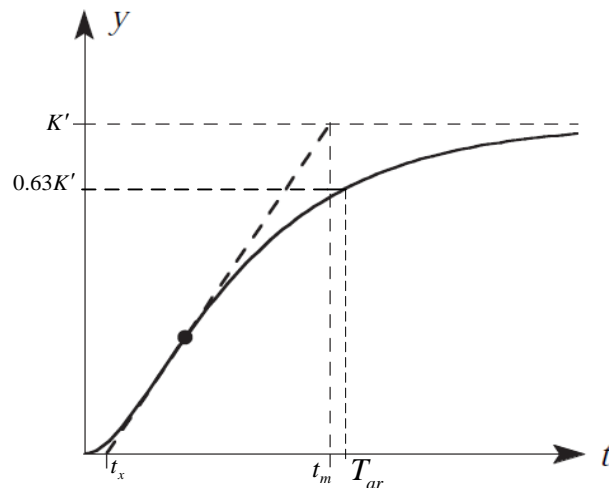
```
k=1;
T=1.1;
td=1;
```

```
s=tf('s')
Gp = (k/(1+T*s)^2)*exp(-td*s)
step(Gp);
grid on
```



۴-۱ - شناسایی سیستم مرتبه دوم میرای شدید:

سیستم های مرتبه دوم، دارای پاسخ پله ای به فرم عمومی زیر می باشند:



شکل ۳-۱: فرم عمومی پاسخ پله سیستم مرتبه دوم میرای شدید

که در آن T ثابت زمانی سیستم و K' مقدار نهایی پاسخ می باشد. با داشتن این مقادیر تابع تبدیل تقریبی این سیستم از رابطه

$$G(s) = \frac{K'}{(1+T_1s)(1+T_2s)} e^{-\tau_d s} \quad (4-1)$$

به دست می آید:

روش محاسبه t_x : برای محاسبه t_x ، یک خط مماس بر نقطه عطف نمودار مطابق شکل ۳-۱ رسم می نماییم. محل برخورد این خط با محور زمان، t_x را بدست می دهد.

روش محاسبه t_m : برای محاسبه t_m ، محل برخورد خط مماس با خط مقدار نهایی پاسخ را بدست می آوریم، مختصات این نقطه بر روی محور زمان، t_m را بدست می دهد.

روش محاسبه K : اگر ورودی سیستم برابر $nu(t)$ باشد، مقدار K از رابطه $\frac{K'}{n}$ بدست می آید.

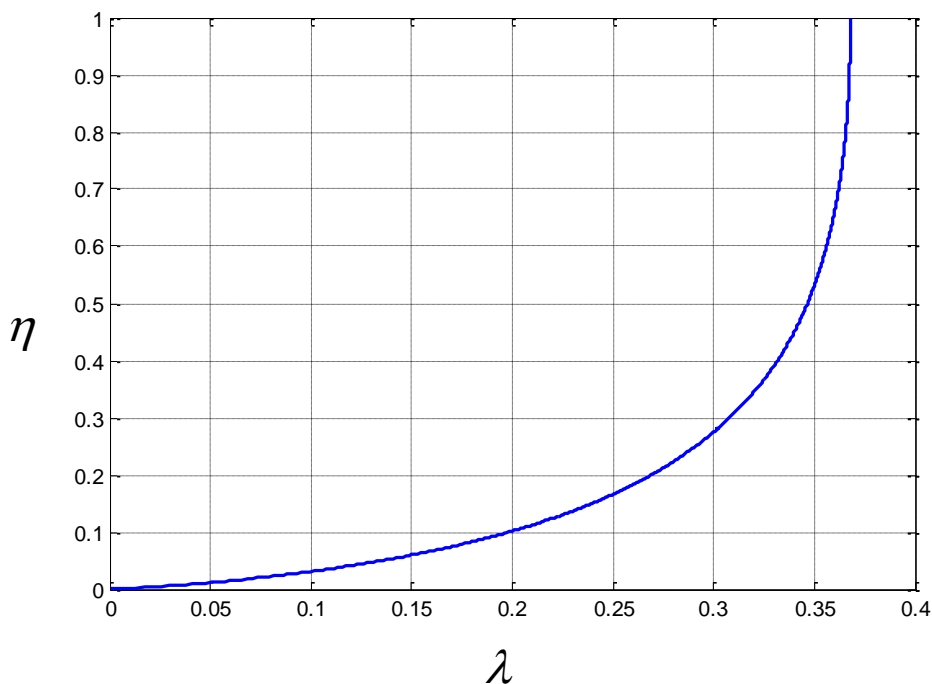
روش محاسبه T_{ar} : زمانی که پاسخ برای اولین بار به 63% مقدار نهایی می رسد برابر T_{ar} می باشد.

با بدست آوردن این چهار پارامتر از روی نمودار، سایر پارامترها بصورت زیر بدست می آیند:

$$K_s = \frac{K}{(t_m - t_x)} \quad (5-1)$$

$$\lambda = \frac{K_s (t_m - T_{ar})}{K} \quad (6-1)$$

اکنون با استفاده از نمودار زیر، η را بدست آورده



شکل ۴-۱: رابطه λ و η

و در نهایت داریم:

$$\frac{K_s}{K} = \frac{\eta^{1-\eta}}{T_1} \quad (7-1)$$

$$\eta = \frac{T_1}{T_2} \quad (8-1)$$

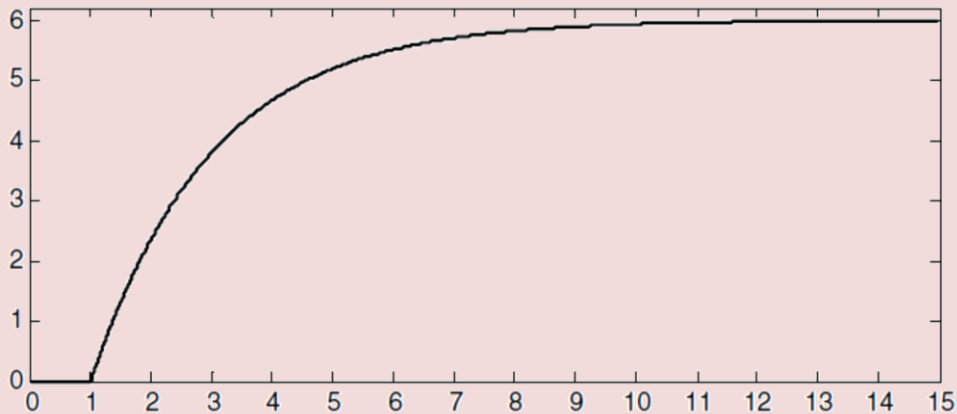
$$T_{ar} = T_1 + T_2 + \tau_d$$

(۹-۱)

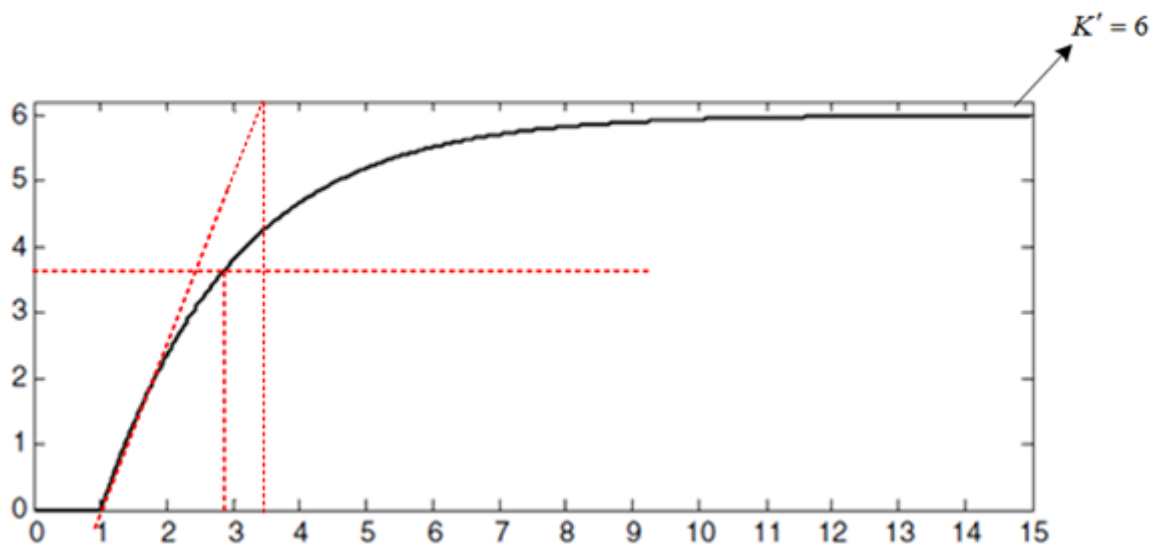
مثال ۳-۱

۱- الف) با توجه به ورودی خروجی زیر، تابع تبدیل سیستم را به ورودی $r(t) = 2u(t)$ تخمین بزنید.
ب) پاسخ پله سیستم بدست آمده را در نرم افزار MATLAB رسم نموده و با شکل اصلی مقایسه کنید.

$y(t)$



ابتدا تابع تبدیل تقریبی سیستم را به دست می آوریم:

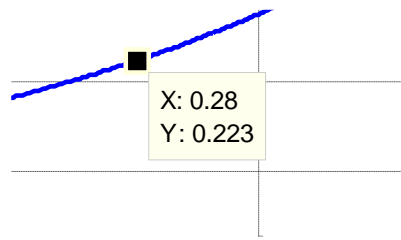


بنابراین:

$$\begin{cases} T_{ar} = 2.8 \\ K = \frac{6}{2} = 3 \\ t_x = 1 \\ t_m = 3.5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_s = \frac{K}{(t_m - t_x)} = \frac{3}{3.5 - 1} = 1.2 \\ \lambda = \frac{K_s(t_m - T_{ar})}{K} = \frac{1.2 \times (3.5 - 2.8)}{3} = 0.28 \end{cases}$$

بنابراین از روی شکل ۴-۱ داریم:

جزوه درسی کنترل پیشرفته



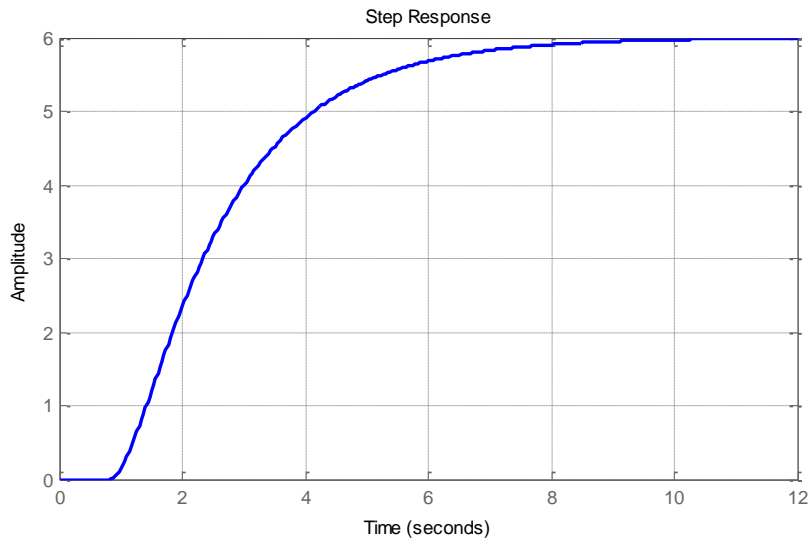
$$\rightarrow \eta = 0.223 \rightarrow \begin{cases} \frac{K_s}{K} = \frac{\eta^{\frac{1}{1-\eta}}}{T_1} \rightarrow T_1 = \frac{K \eta^{\frac{1}{1-\eta}}}{K_s} = \frac{3 \times 0.223^{\frac{1}{1-0.223}}}{1.2} ; 0.36 \\ \eta = \frac{T_1}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{T_1}{\eta} ; 1.62 \\ T_{ar} = T_1 + T_1 + \tau_d \rightarrow \tau_d = T_{ar} - T_1 - T_1 ; 0.8 \end{cases}$$

$$\rightarrow G(s) = \frac{6}{(1+0.36s)(1+1.62s)} e^{-0.8s}$$

کد زیر پاسخ به ورودی $r(t) = 2u(t)$ سیستم تقریب زده شده را با استفاده از تقریب پاده برای بخش نمایی، ترسیم می کند:

```
clc
clear all
close all

u1=2;
k1=6;
Tar=2.8;
tx=1;
tm=3.5;
k=k1/u1;
ks=k/(tm-tx);
landa=ks*(tm-Tar)/k
eta=input('Please enter eta: ')
T1=(k*eta^(1/(1-eta)))/ks;
T2=T1/eta;
td=Tar-T1-T2;
s=tf('s')
Gp=(k1/((1+T1*s)*(1+T2*s)))*exp(-td*s)
step(Gp)
grid on
```



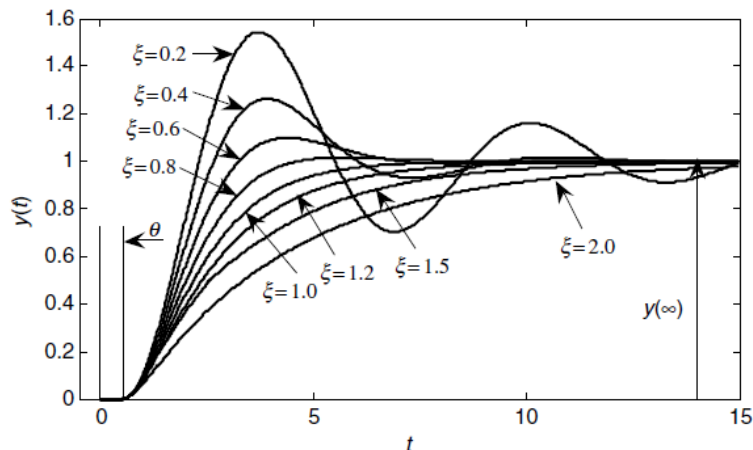
۵-۱- شناسایی سیستم مرتبه دوم میرای نوسانی تاخیر دار (SOPTD):

سیستم مرتبه دوم دارای تاخیر با تابع تبدیل

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{ke^{-\tau_d s}}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1} \quad (10-1)$$

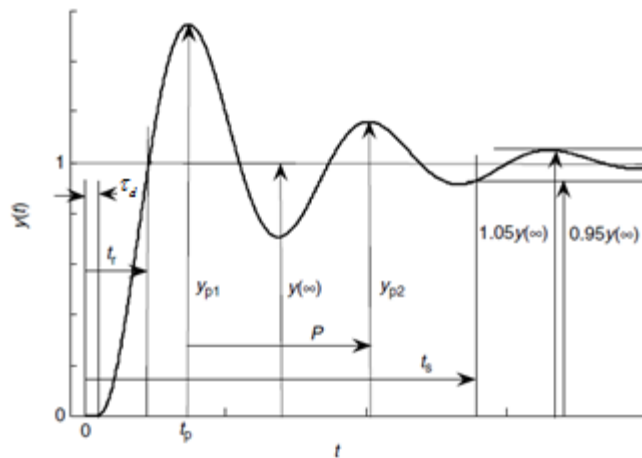
بیان می گردد که در آن k بهره DC، τ ثابت زمانی، τ_d زمان تاخیر و ζ فاکتور میرایی سیستم می باشند. همانطور که از قبل می دانیم؛ سیستم مرتبه دوم بسته به مقدار ζ سه پاسخ پایدار می تواند داشته باشد:

- $0 < \zeta < 1$ پاسخ میرای نوسانی
- $\zeta = 1$ پاسخ میرای بحرانی
- $\zeta > 1$ پاسخ میرای شدید



شکل ۵-۱: پاسخ پله سیستم مرتبه دوم تأخیر دار به ازای مقادیر مختلف میرایی

پاسخ میرای نوسانی شکل ۵-۱ را در نظر بگیرید:



شکل ۱-۶: پاسخ پله میرای نوسانی برای سیستم مرتبه دوم تأخیر دار

برای مشخص نمودن تابع تبدیل سیستم مرتبه دوم مربوطه باید مقادیر k ، τ ، τ_d و ζ سیستم با استفاده از شکل ۷-۱ و روابط زیر مشخص شوند:

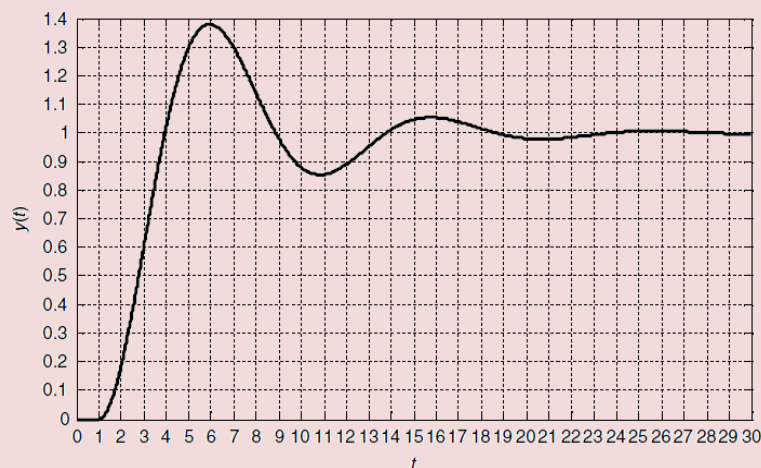
$$k = \frac{y(\infty)}{r(\infty)} \quad (11-1)$$

$$\frac{y_p - y(\infty)}{y(\infty)} = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (12-1)$$

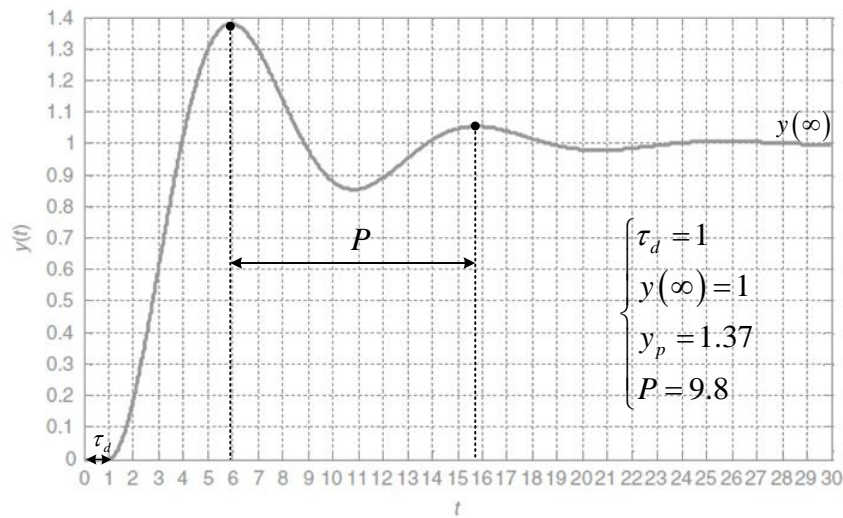
$$P = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (13-1)$$

مثال ۴-۱

الف) با استفاده از پاسخ پله واحد زیر مدل مرتبه دوم تأخیر دار سیستم مربوطه را بدست آورید.
ب) پاسخ پله سیستم بدست آمده را در نرم افزار MATLAB رسم نموده و با شکل اصلی مقایسه کنید.



ابتدا مقادیر $y(\infty)$ ، y_p ، τ_d و P را از روی نمودار می خوانیم:



بنابراین:

$$k = \frac{y(\infty)}{r(\infty)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{y_p - y(\infty)}{y(\infty)} = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \rightarrow e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = \frac{1.37-1}{1} = 0.37 \rightarrow \frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln(0.37) = -0.9943$$

$$\rightarrow \frac{\pi^2\zeta^2}{1-\zeta^2} = 0.9835 \rightarrow (0.9835 + \pi^2)\zeta^2 = 0.9835 \rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{0.9835}{0.9835 + \pi^2}} = 0.3017$$

$$P = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}} \rightarrow \tau = \frac{P\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi} = 1.487$$

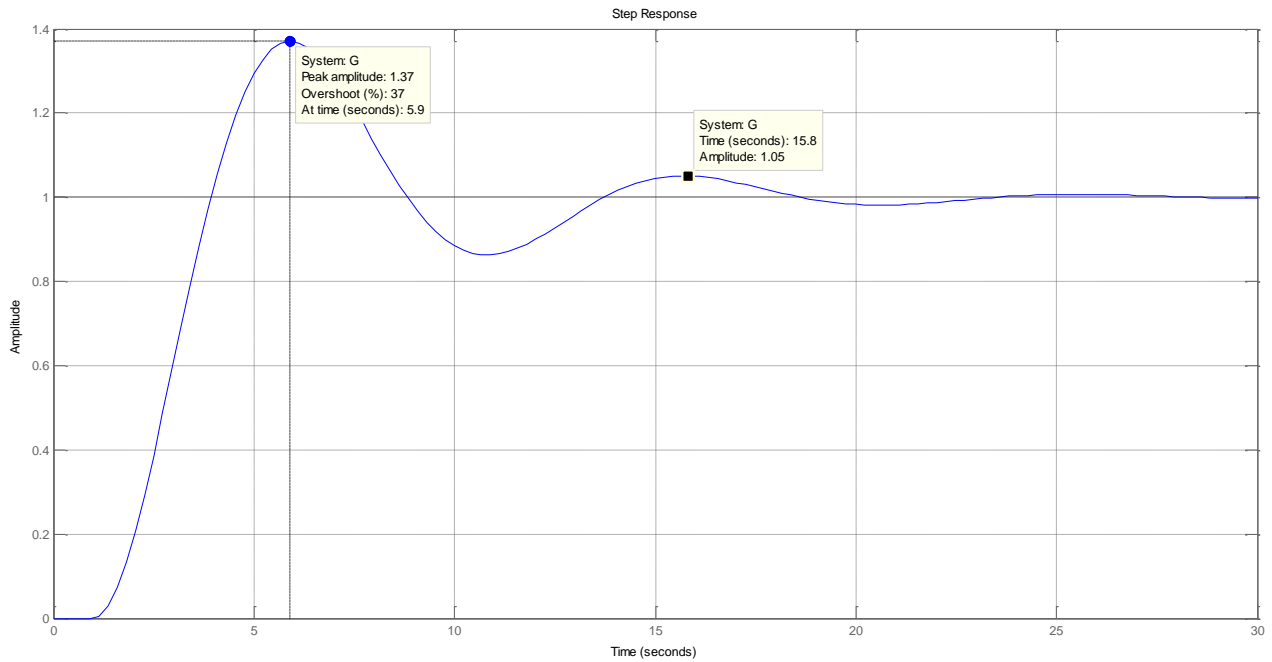
بنابراین تابع تبدیل این سیستم عبارتست از:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{e^{-s}}{2.2112s^2 + 0.8973s + 1}$$

پاسخ پله سیستم تقریب زده شده بصورت زیر است:

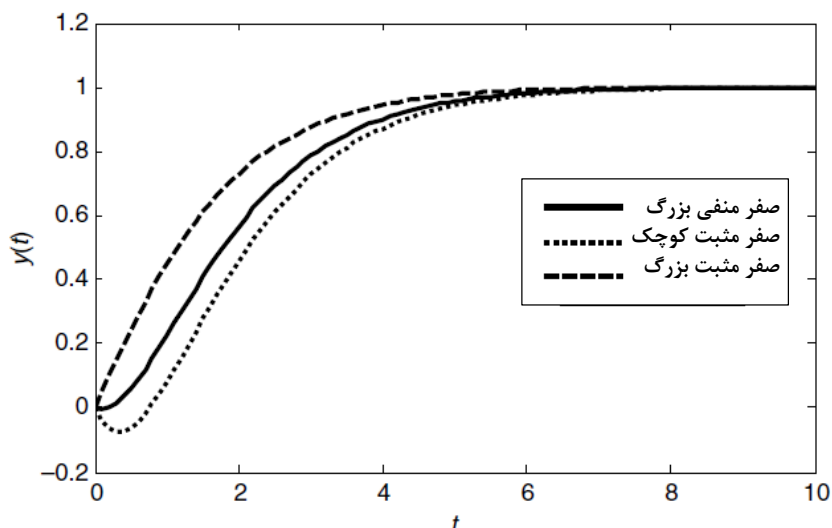
```

clc
clear all
close all
y_inf=1;
yp=1.37 ;
r_inf=1;
P=9.8 ;
td=1;
ov=(yp-y_inf)/y_inf
k=y_inf/r_inf
a=log(ov);
zeta=sqrt(a^2/(pi^2+a^2))
ta=P*sqrt(1-zeta^2)/(2*pi)
s=tf('s')
G=(k/(ta^2*s^2+2*ta*zeta*s+1))*exp(-td*s)
step(G)
grid on
    
```

۱-۶- رابطه بین صفر تابع تبدیل و رفتار دینامیکی سیستم:

صفر های سیستم روی رفتار اولیه فرآیند به ازای تغییرات ورودی تاثیرگذار می باشند. شکل زیر رابطه بین نوع صفر و رفتار اولیه فرآیند را به خوبی نشان می دهد:



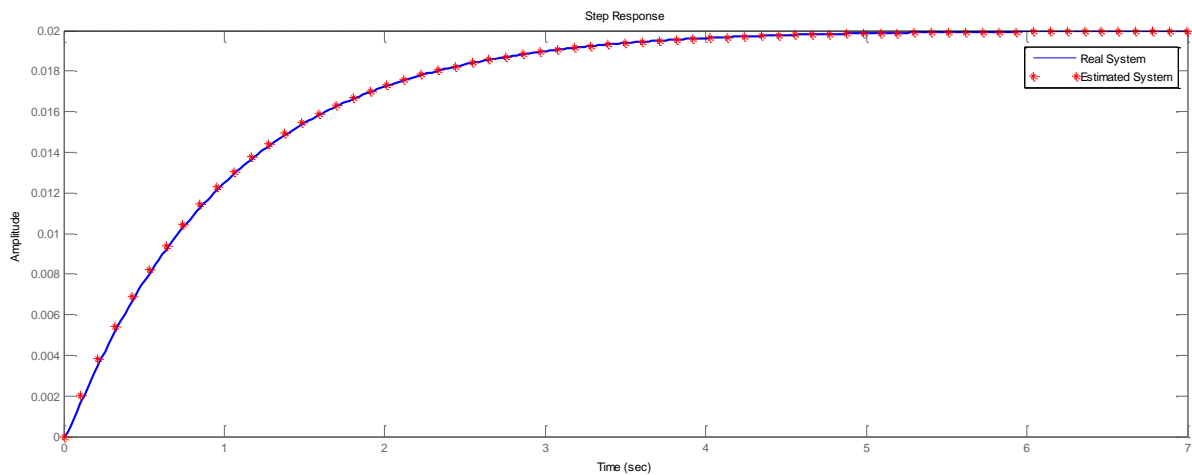
شکل ۱-۷: رابطه بین نوع صفر و رفتار اولیه فرآیند

۱-۷- کاهش مرتبه سیستم ها:

اگر یک قطب سیستم مرتبه n از نظر مکانی ۵ تا ۱۰ برابر با سایر قطب‌های آن فاصله داشته باشد، دینامیک غالب سیستم را مرتبه $n-1$ خوانند. به طور مثال سیستم $G_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+20)}$ دینامیک غالب مرتبه اول و سیستم

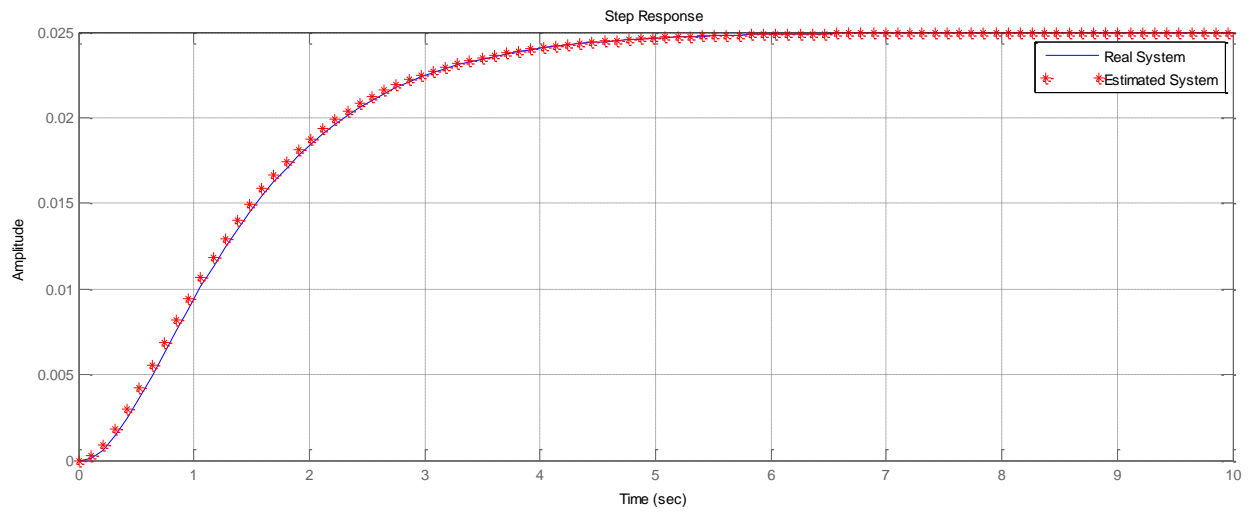
$G_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+20)}$ دینامیک غالب مرتبه n دارد. در تقریب یک سیستم به مرتبه پایین تر آن، همواره باید بهره DC دو سیستم ثابت باشد:

$$\begin{cases} G_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+20)} \rightarrow G_1(s); \frac{1}{(s+1)} \\ G_1(0) = \frac{1}{20} \end{cases}$$



$$\begin{cases} G_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+20)} \rightarrow G_2(s); \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ G_2(0) = \frac{1}{40} \end{cases}$$

جزوه درسی کنترل پیشرفته



بخش دوم:
طراحی انواع کنترل کننده

بخش دوم: طراحی کنترل کننده‌های حوزه زمان

۱-۲- انتخاب مناسب نوع کنترل کننده:

مشاهدات تجربی نشان می‌دهد که بسیاری از سیستم‌های صنعتی را می‌توان به طور معقول، با کنترل کننده PID کنترل نمود. عمل مشتق‌گیری عموماً استفاده نمی‌شود و کنترل کننده بسیاری از سیستم‌های صنعتی فقط PI بوده و بخش مشتق‌گیر آنها خاموش هست. می‌توان نشان داد که کنترل کننده PI برای کنترل تمام پروسه‌هایی که ذاتاً دارای دینامیک درجه یک می‌باشند کافی است. اگر پاسخ پله با دقت کافی شبیه سیستم درجه یک باشد و یا منحنی ناپکوئیست فقط در ناحیه اول و چهارم قرار داشته باشد، کنترل کننده PI کافی است.

برای کنترل سیستم‌هایی که دینامیک غالب آنها از درجه دو هست، برای این سیستم‌ها با استفاده از کنترل کننده‌های پیچیده مزیت اضافه‌تری به دست نمی‌آید. مشخصات اصلی هر گروه از کنترل کننده به صورت لیست وار در زیر ارائه شده است:

الف) خصوصیات کنترل کننده تناسبی:

- این کنترل کننده با بهره بزرگ باعث کاهش خطای حالت دائمی می‌گردد.

ب) خصوصیات کنترل کننده مشتق‌گیر:

- این کنترل کننده یک صفر به تابع تبدیل حلقه باز اضافه نموده و سبب افزایش پایداری حلقه بسته می‌گردد.
- این کنترل کننده از تغییرات ناگهانی ورودی جلوگیری می‌کند.
- این کنترل کننده پهنای باند را افزایش داده و نویز سیستم را زیاد می‌کند.
- این کنترل کننده روی خطای حالت دائمی تأثیری ندارد.

ج) خصوصیات کنترل کننده انتگرال‌گیر:

- این کنترل کننده یک قطب به تابع تبدیل حلقه باز اضافه می‌نماید.
- این کنترل کننده به دلیل افزودن یک قطب در مبدأ به تابع تبدیل حلقه باز پایداری سیستم را کاهش می‌دهد.
- این کنترل کننده نویز فرکانس بالا را حذف می‌کند.
- این کنترل کننده سرعت سیستم را کاهش می‌دهد.
- این کنترل کننده به دلیل افزایش نوع سیستم، خطای حالت دائمی را کاهش می‌دهد.

د) خصوصیات کنترل کننده تناسبی-مشتق‌گیر-انتگرال‌گیر:

- این کنترل کننده در برابر تغییرات ورودی، عکس‌العمل سریعی دارد.
- این کنترل کننده خطای حالت دائمی را کاهش می‌دهد.
- با انتخاب صحیح ثابت زمانی انتگرال‌گیر و بهره تناسبی، این کنترل کننده پایداری سیستم را افزایش می‌دهد.

روش تجربی دیگری برای انتخاب نوع کنترل کننده وجود دارد. در این روش ابتدا مدل تجربی مرتبه اول غالب سیستم را با استفاده از پاسخ پله آن به دست می‌آوریم.

برای یک سیستم دارای تأخیر، با دینامیک غالب مرتبه اول تابع تبدیل تقریبی از رابطه

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts} e^{-\tau_d s} \quad (1-2)$$

به دست می آید.

بر اساس این روش تجربی انتخاب نوع کنترل کننده به نسبت ثابت زمانی به زمان تأخیر یعنی $\frac{T}{\tau_d}$ بستگی دارد، بطوریکه اگر

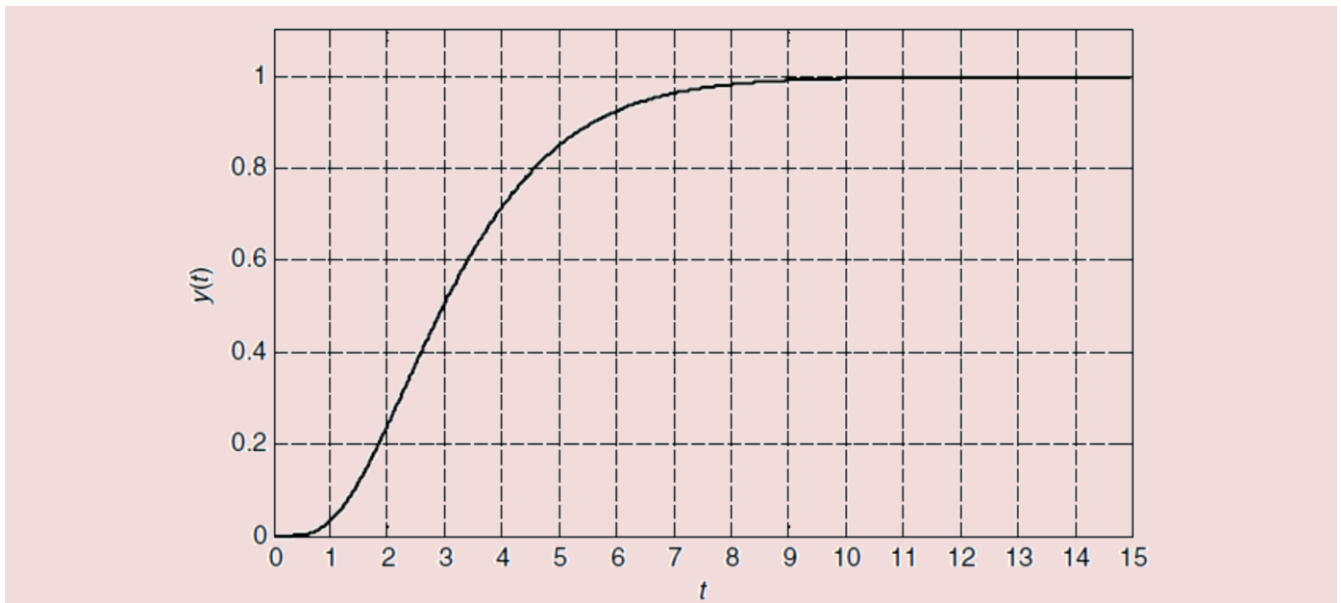
$\frac{T}{\tau_d} > 10$ باشد از کنترل کننده نوع P، اگر $5 < \frac{T}{\tau_d} < 10$ باشد از نوع PI، اگر $2 < \frac{T}{\tau_d} < 5$ باشد از نوع PID، اگر $1 < \frac{T}{\tau_d} < 2$

باشد از کنترل کننده های پیش فاز/ پس فاز و اگر $\frac{T}{\tau_d} < 1$ باشد، از کنترل کننده های دیجیتال استفاده می شود. در ۸۰٪

پروژه های صنعتی $\frac{T}{\tau_d} > 5$ بوده و لذا از کنترل کننده PI استفاده می شود.

مثال ۱-۲

با توجه به پاسخ پله سیستم زیر، چه نوع کنترل کننده ای برای آن مناسب است؟



با توجه به مثال ۱-۱ داریم:

$$T = 2.5 \rightarrow G(s) = \frac{1}{1+2.5s} e^{-s}$$

$$\rightarrow \frac{T}{\tau_d} = 2.5$$

که می توان نتیجه گرفت کنترل PID برای این سیستم مناسب است.

۲-۲- روش سعی و خطا برای تنظیم پارامترهای کنترل کننده PID:

یک روش برای تخمین پارامترهای کنترل کننده PID با بررسی دقیق رفتار دینامیکی خروجی فرآیند، روش سعی و خطا است. بدین منظور درک دقیق تأثیر هر یک از پارامترها بر روی رفتار خروجی فرآیند، ضروری است.

جدول ۱-۲ تأثیر هر یک از ضرایب کنترل کننده PID را بر خصوصیات پاسخ پله سیستم نشان می دهد:

جزوه درسی کنترل پیشرفته

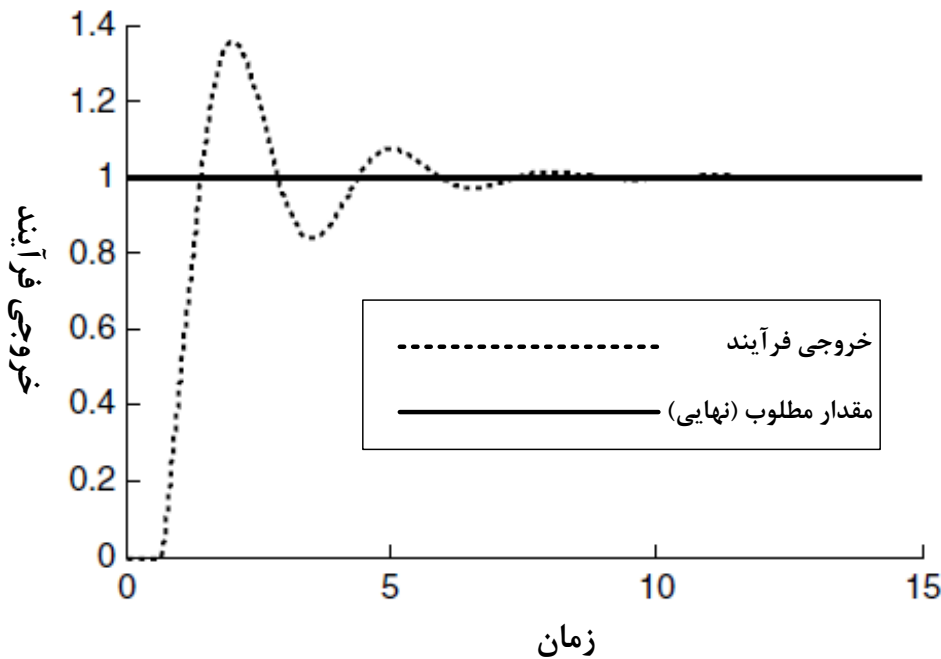
جدول ۱-۲: تأثیر ضرایب کنترل کننده PID بر روی پارامترهای پاسخ پله

ضریب	زمان صعود	فراجهدش	زمان نشست	خطای حالت دائمی
K_p	کاهش	افزایش	تغییر اندک	کاهش
$K_d = T_d$	کاهش	افزایش	افزایش	حذف
$K_I = \frac{1}{T_i}$	تغییر اندک	کاهش	کاهش	بی تأثیر

کنترل کننده PID با پارامترهای تنظیم شده بر اساس تغییرات مقدار مطلوب (پله‌ای) معمولاً رفتارهای دینامیکی زیر را از خود نشان می‌دهد:

رفتار دینامیکی ۱:

برای تغییرات پله‌ای مقدار مطلوب^۱ اگر خروجی فرآیند مطابق شکل ۲-۲ نوسانی با دامنه بزرگ داشته باشد، بهره تناسبی K_p بیش از اندازه بزرگ است؛ بنابراین نوسانات حول مقدار مطلوب خواهد بود.

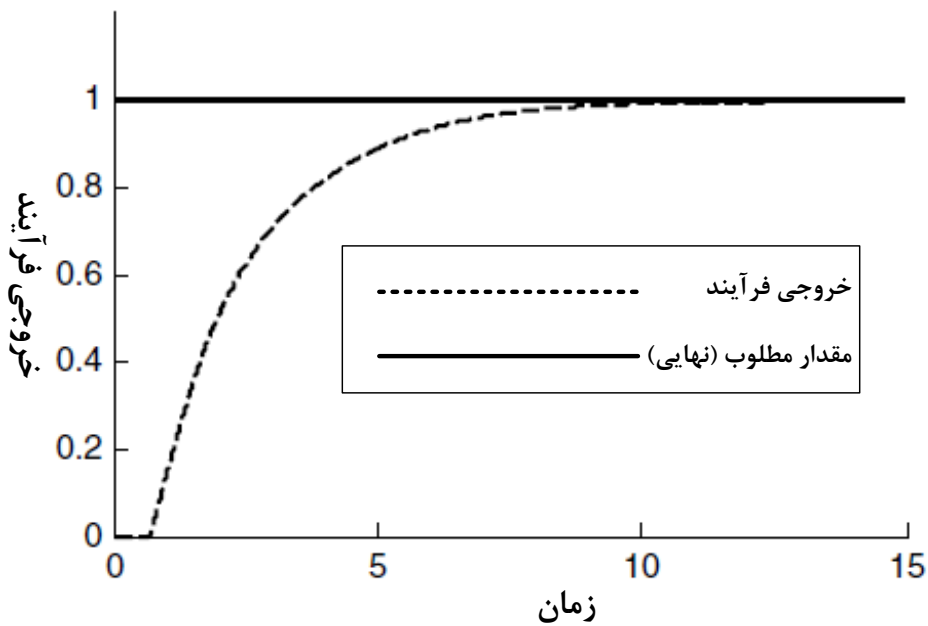


شکل ۲-۲: پاسخ پله برای زمانی که K_p بزرگ است.

رفتار دینامیکی ۲:

برای تغییرات پله‌ای مقدار مطلوب، اگر خروجی فرآیند کنترل شده، پاسخی فوق میرا (میرای شدید) مطابق شکل ۳-۲ داشته باشد، آنگاه بهره تناسبی K_p بیش از اندازه کوچک است.

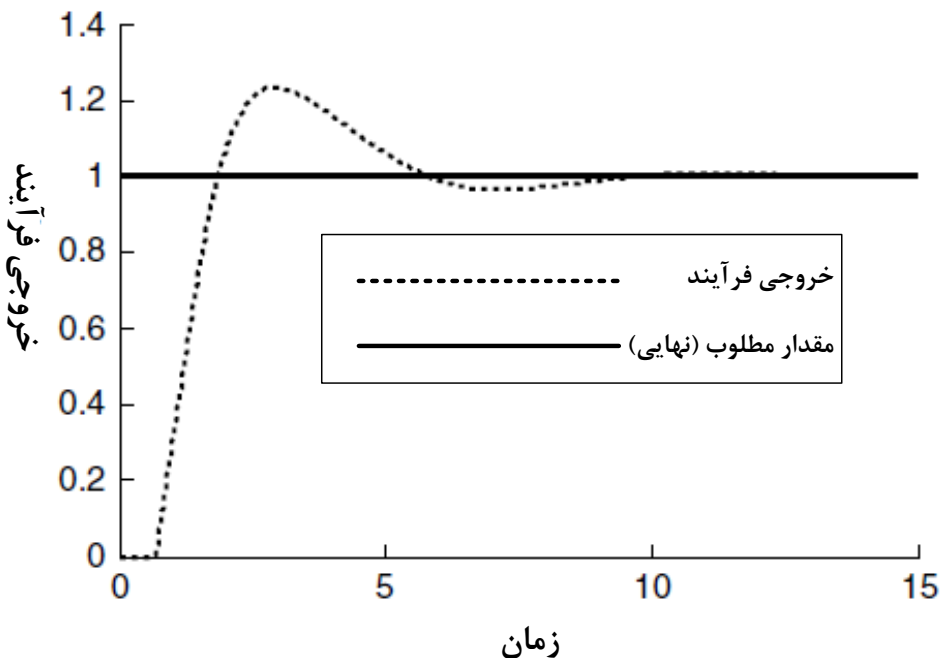
^۱Set Point



شکل ۲-۳: پاسخ پله برای زمانی که K_p بسیار کوچک است.

رفتار دینامیکی ۳:

برای تغییرات پله‌ای مثبت مقدار مطلوب، اگر خروجی فرآیند نوسان داشته و دامنه‌های مثبت نوسان حول مقدار مطلوب مطابق شکل ۲-۴ بزرگ‌تر از دامنه‌های منفی باشد، ثابت زمانی بخش انتگرال گیر یعنی τ_i بسیار کوچک هست (بخش انتگرال گیر بسیار قوی عمل می‌کند).

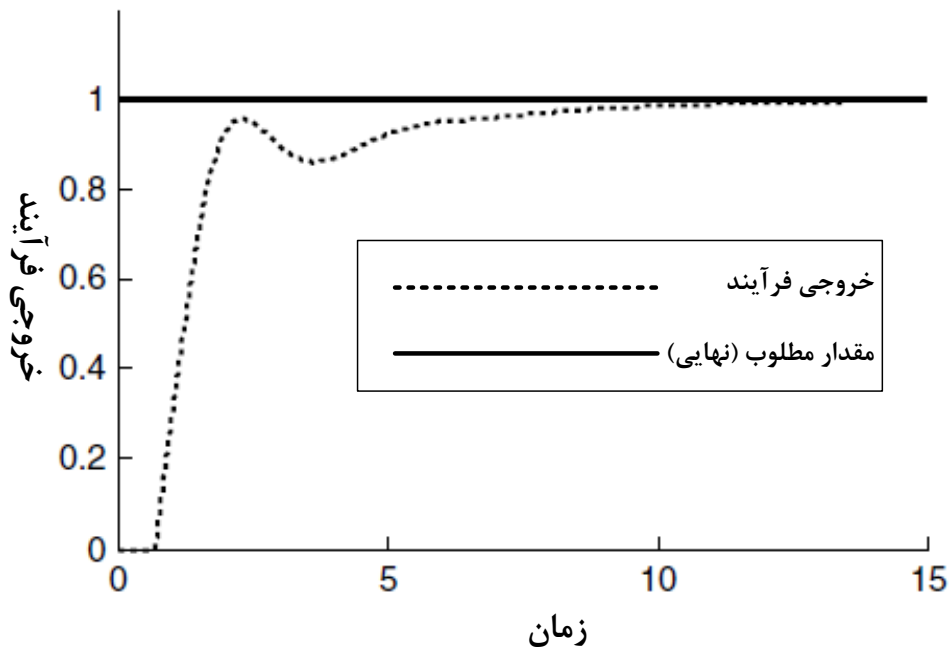


شکل ۲-۴: پاسخ پله برای زمانی که τ_i کوچک است.

رفتار دینامیکی ۴:

برای تغییرات پله‌ای مثبت مقدار مطلوب، اگر خروجی فرآیند نوسان داشته و دامنه پاسخ مطابق شکل ۲-۵، اغلب کمتر از مقدار مطلوب باشد، ثابت زمانی بخش انتگرال گیر یعنی τ_i بسیار بزرگ هست (بخش انتگرال گیر بسیار قوی ضعیف می‌کند).

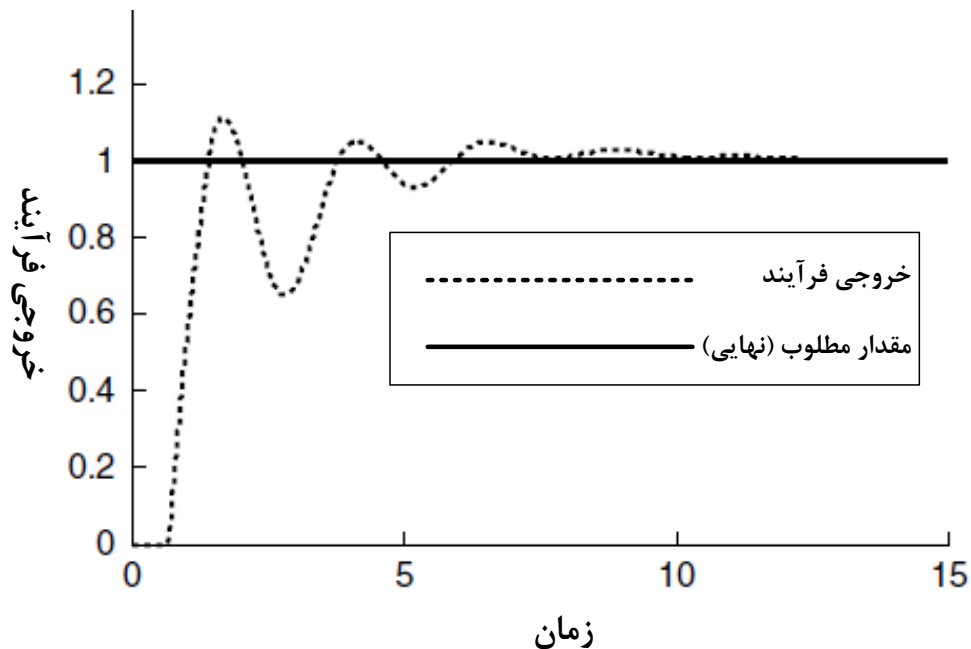
جزوه درسی کنترل پیشرفته



شکل ۲-۵: پاسخ پله برای زمانی که τ_i بزرگ است.

رفتار دینامیکی ۵:

برای تغییرات پله‌ای مقدار مطلوب، اگر خروجی فرآیند نوسانات فرکانس بالایی مطابق شکل ۲-۶ داشته باشد، یعنی از آغاز تا مقدار نهایی تعداد قله‌های نوسان زیاد باشد، آنگاه ثابت زمانی مشتق گیر τ_d بسیار بزرگ است.

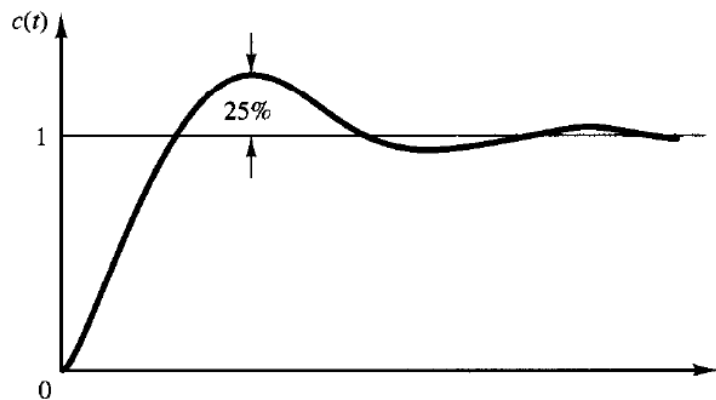


شکل ۲-۶: پاسخ پله برای زمانی که τ_d بزرگ است.

برای حذف رفتارهای دینامیکی فوق، اپراتور می‌تواند به روش سعی و خطا ضرایب کنترل کننده PID را تغییر دهد. نکته نهایی در به‌کارگیری روش سعی و خطا به طور موفق این است که مقدار بهره تناسبی تا حد ممکن بزرگ نگه‌داشته شود زیرا در غیر این صورت رفتار دینامیکی حلقه بسته به تدریج کند خواهد شد.

۲-۳- تخمین ضرایب کنترل کننده PID به روش زیگلر نیکولز:

از آنجاکه یافتن مدل ریاضی یک سیستم پیچیده به سادگی ممکن نیست، گاهی لازم است برای تنظیم کنترل کننده PID به روش‌های تجربی متوسل شد. فرآیند انتخاب پارامترهای کنترل کننده برای برآورده شدن مشخصات عملکردی مطلوب، تنظیم کنترل کننده نامیده می‌شود. زیگلر و نیکولز قواعدی برای تنظیم کردن کنترل کننده‌های PID پیشنهاد کرده‌اند که بر اساس تنظیم پارامتر K_p در مرز پایداری به دست می‌آید. این قواعد برای مواردی که مدل ریاضی دستگاه معلوم نیست به کار می‌آیند. دو روش موسوم به قواعد زیگلر و نیکولز وجود دارد که در هر دو روش هدف، حداکثر فراجهش حدود ۱۰٪ تا ۶۰٪ خواهد داشت که به طور متوسط ۲۵٪ هست.



شکل ۲-۷: منحنی پاسخ پله با حداکثر فراجهش ۲۵٪

الف) روش اول (حلقه باز):

در روش اول با استفاده از پاسخ پله دستگاه مدل تجربی رابطه ۲-۱ را به دست می‌آوریم. توجه کنید که این روش تنها زمانی بکار برده می‌شود که دستگاه پاسخ پله‌ای مطابق با شکل ۲-۱ داشته باشد (دستگاه انتگرال گیر نداشته و قطب‌های مزدوج مختلط غالب نیز نداشته باشد). در این صورت مدل پیشنهادی زیگلر و نیکولز برای کنترل کننده‌ها به صورت جدول ۲-۲ خواهد بود:

جدول ۲-۲: قواعد تنظیم ضرایب کنترل کننده PID بر اساس پارامترهای پاسخ پله

T_d	T_i	K_p	نوع کنترل کننده
0	∞	$\frac{T}{\tau_d}$	P
0	$\frac{\tau_d}{0.3}$	$0.9 \frac{T}{\tau_d}$	PI
$0.5\tau_d$	$2\tau_d$	$1.2 \frac{T}{\tau_d}$	PID

با جایگذاری ضرایب کنترل کننده PID در تابع تبدیل مربوطه داریم:

$$G_C(s) = K_P \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) = 1.2 \frac{T}{\tau_d} \left(1 + 0.5 \tau_d s + \frac{1}{2 \tau_d s} \right) = 0.6T \frac{\left(s + \frac{1}{\tau_d} \right)^2}{s} \quad (2-2)$$

مثال ۲-۲

کنترل کننده PID مناسب برای مدل به دست آمده از مثال ۱-۲ را به دست آورید:

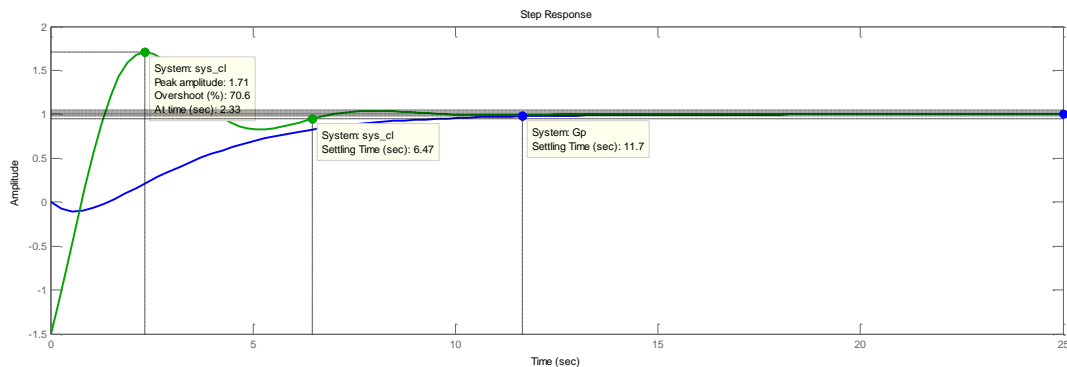
تابع تبدیل تقریبی سیستم که در مثال ۱-۲ به دست آمده به صورت:

$$G_P(s) = \frac{1}{1+2.5s} e^{-s}$$

است؛ بنابراین، ضرایب کنترل کننده PID بر اساس جدول ۲-۲ به صورت

$$\begin{cases} K_p = 1.2 \frac{T}{\tau_d} = 1.2 \times 2.5 = 3 \\ T_i = 2\tau_d = 2 \\ T_d = 0.5\tau_d = 0.5 \end{cases} \rightarrow G_C(s) = 3 \left(1 + 0.5s + \frac{1}{2s} \right) = 1.5 \frac{(s+1)^2}{s}$$

خواهد بود. پاسخ پله سیستم حلقه بسته با حضور کنترل کننده و فیدبک واحد به صورت زیر خواهد بود.



همان طور که در شکل نیز مشاهده می شود زمان نشست سیستم کاهش یافته اما فراجھشی حدود ۷۰٪ دارد. برای کاهش فراجھش باید ضرایب را کمی تغییر داد.

(ب) روش دوم (حلقه بسته):

در روش دوم ابتدا مقدار بهره تناسبی بحرانی K_{cr} یعنی مقداری که به ازای آن سیستم به مرز پایداری می رسد را به دست می آوریم. در این حالت مقادیر ضرایب کنترل کننده به صورت $K_P = K_{cr}, T_d = 0, T_i = \infty$ خواهد بود. سپس فرکانس نوسانات متناسب با آن P_{cr} محاسبه می گردد.

برای محاسبه بهره بحرانی، دو روش پیشنهاد می گردد:

- ۱- تشکیل جدول روٹ - هورویتز، تعیین بهره بطوریکه یک سطر از جدول روٹ صفر گردد. (تغییر علامت نباید در ستون اول دیده شود). پس از به دست آوردن بهره بحرانی، فرکانس نوسانات آن از معادله کمکی سطر بالاتر به دست می آید.
- ۲- ترسیم نمودار مکان ریشه و تعیین بهره نمودار در نقطه برخورد با محور موهومی. (این روش در صورت استفاده از نرم افزار MATLAB توصیه می شود).

با داشتن این دو مقدار مدل پیشنهادی زیگلر و نیکولز برای کنترل کننده ها به صورت جدول ۲-۳ خواهد بود:

جدول ۲-۲: قواعد تنظیم ضرایب کنترل کننده PID بر اساس پارامترهای پاسخ پله

T_d	T_i	K_p	نوع کنترل کننده
0	∞	$0.5K_{cr}$	P
0	$\frac{P_{cr}}{1.2}$	$0.45K_{cr}$	PI
$0.125P_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.6K_{cr}$	PID

با جایگذاری ضرایب کنترل کننده PID در تابع تبدیل مربوطه داریم:

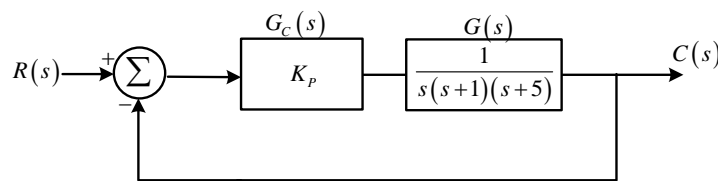
$$G_C(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) = 0.6K_{cr} \left(1 + 0.125P_{cr}s + \frac{1}{0.5P_{cr}s} \right) = 0.075K_{cr}P_{cr} \frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}} \right)^2}{s} \quad (3-2)$$

مثال ۳-۲

کنترل کننده PID مناسب برای سیستم زیر را به دست آورید:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

ابتدا معادله مشخصه حلقه بسته سیستم را تشکیل می دهیم:



$$\Delta(s) = 1 + K_p \left(\frac{1}{s(s+1)(s+5)} \right) = 0$$

$$= s(s+1)(s+5) + K_p = s^3 + 6s^2 + 5s + K_p$$

اکنون برای محاسبه بهره بحرانی جدول روث را تشکیل می دهیم:

s^3	1	5	
s^2	6	K_p	
s	$\frac{30 - K_p}{6}$	0	→ سطر تمام صفر → $K_p = 30$
1	K_p		

→ معادله کمکی → $6s^2 + K_p = 0 \xrightarrow{s=j\omega} -6\omega^2 + 30 = 0 \rightarrow \omega = \pm\sqrt{5}$

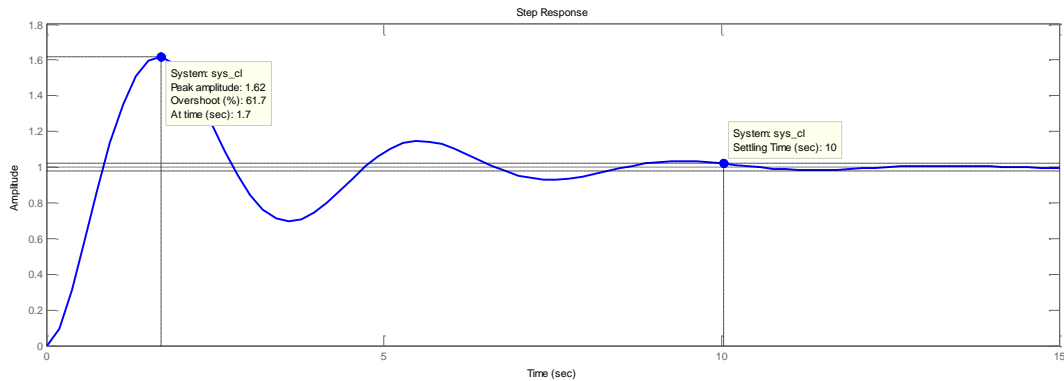
بنابراین

$$\begin{cases} K_{cr} = 30 \\ P_{cr} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.8099 \end{cases}$$

خواهد بود؛ بنابراین، ضرایب کنترل کننده PID بر اساس جدول ۲-۳ به صورت

$$\begin{cases} K_p = 0.6K_{cr} = 18 \\ T_i = .5P_{cr} = 1.405 \\ T_d = 0.125P_{cr} = 0.35124 \end{cases} \rightarrow G_C(s) = 18 \left(1 + 0.3514s + \frac{1}{1.405s} \right) = 6.3223 \frac{(s + 1.4235)^2}{s}$$

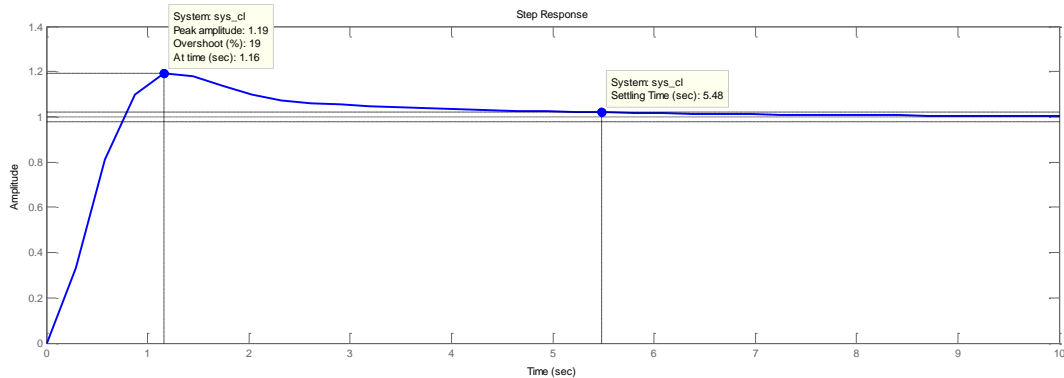
خواهد بود. پاسخ پله سیستم حلقه بسته با حضور کنترل کننده و فیدبک واحد به صورت زیر خواهد بود.



برای تنظیم بهتر پارامترها، کمی ضرایب را تغییر می دهیم. با استفاده از بررسی نمودارهای پله به دست آمده، برای کاهش فرجهش، تغییر بهره تناسبی تأثیری ندارد. برای کاهش فرجهش بهره انتگرال گیر را افزایش داده و بهره مشتق گیر را هم کمی افزایش می دهیم:

$$\begin{cases} K_p = 18 \\ T_i = 4 \\ T_d = 0.7 \end{cases}$$

اکنون پاسخ پله سیستم حلقه بسته با حضور کنترل کننده و فیدبک واحد به صورت زیر خواهد بود.

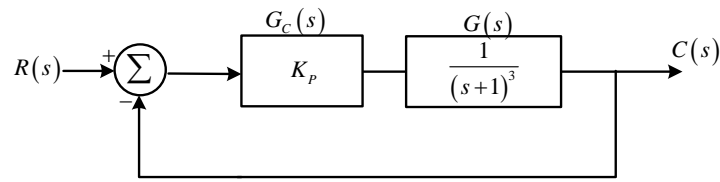


مثال ۲-۴

کنترل کننده PID مناسب برای سیستم زیر را به دست آورید:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

ابتدا معادله مشخصه حلقه بسته سیستم را تشکیل می دهیم:



$$\Delta(s) = 1 + K_p \left(\frac{1}{(s+1)^3} \right) = 0$$

$$= s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K_p$$

اکنون برای محاسبه بهره بحرانی جدول روث را تشکیل می‌دهیم:

s^3	1	3	
s^2	3	$1 + K_p$	
s	$\frac{9-1-K_p}{3}$	0	→ سطر تمام صفر → $K_p = 8$
1	$1 + K_p$		

→ معادله کمکی → $3s^2 + 1 + K_p = 0 \xrightarrow{s=j\omega} -3\omega^2 + 9 = 0 \rightarrow \omega = \pm\sqrt{3}$

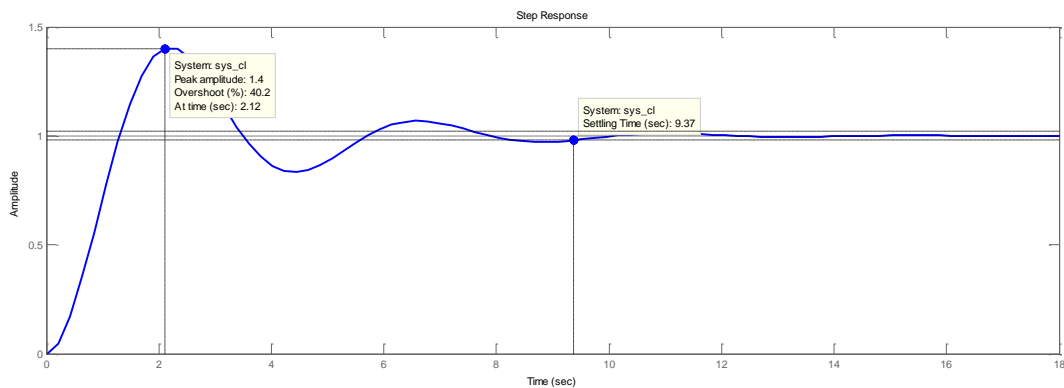
بنابراین

$$\begin{cases} K_{cr} = 8 \\ P_{cr} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 3.63 \end{cases}$$

خواهد بود؛ بنابراین، ضرایب کنترل کننده PID بر اساس جدول ۲-۳ به صورت

$$\begin{cases} K_p = 0.6K_{cr} = 4.8 \\ T_i = .5P_{cr} = 1.81 \\ T_d = 0.125P_{cr} = 0.44 \end{cases} \rightarrow G_C(s) = 4.8 \left(1 + 0.44s + \frac{1}{1.81s} \right) = 2.178 \frac{(s+1.102)^2}{s}$$

خواهد بود. پاسخ پله سیستم حلقه بسته با حضور کنترل کننده و فیدبک واحد به صورت زیر خواهد بود.

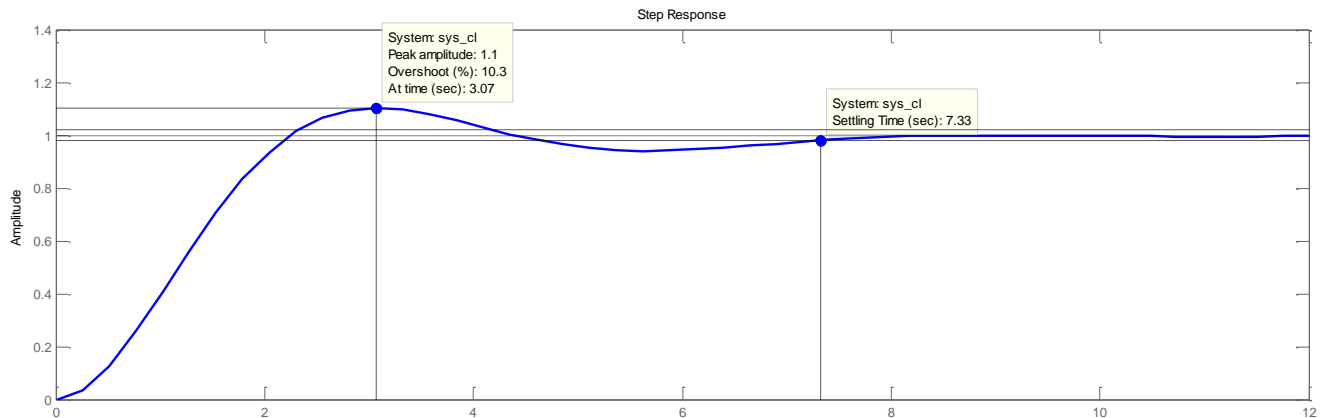


برای تنظیم بهتر پارامترها، کمی ضرایب را تغییر می‌دهیم. برای کاهش فراجشش بهره تناسبی را کاهش داده و بهره انتگرال گیر را زیاد می‌کنیم:

جزوه درسی کنترل پیشرفته

$$\begin{cases} K_p = 2.5 \\ T_i = 3 \\ T_d = .4534 \end{cases}$$

اکنون پاسخ پله سیستم حلقه بسته با حضور کنترل کننده و فیدبک واحد به صورت زیر خواهد بود.

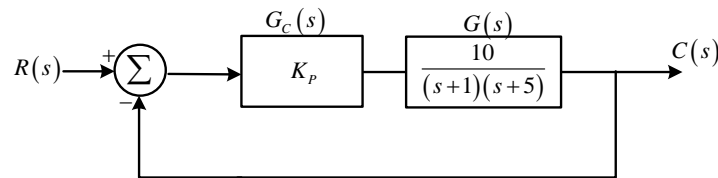


مثال ۲-۵

کنترل کننده PID مناسب برای سیستم زیر را به دست آورید:

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+5)}$$

ابتدا معادله مشخصه حلقه بسته سیستم را تشکیل می دهیم:

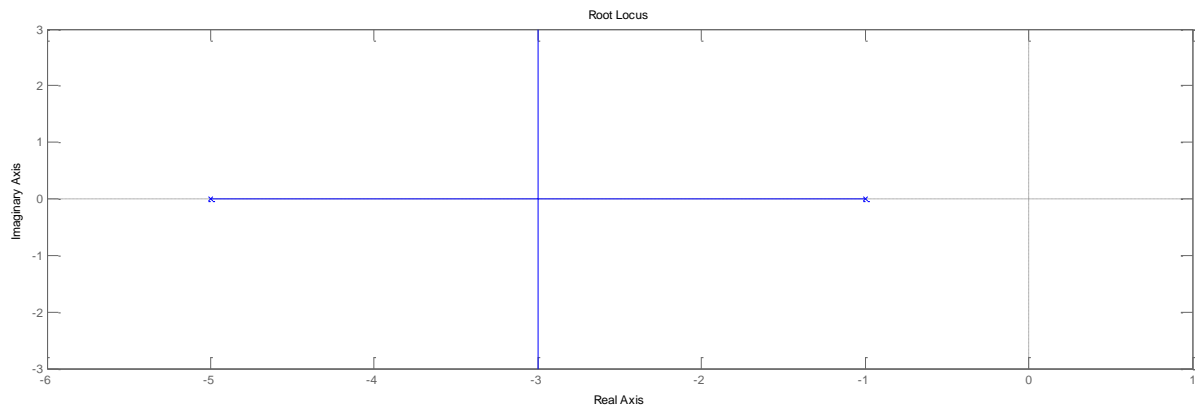


$$\begin{aligned} \Delta(s) &= 1 + K_p \left(\frac{10}{(s+1)(s+5)} \right) = 0 \\ &= s^2 + 6s + 5 + 10K_p \end{aligned}$$

اکنون برای محاسبه بهره بحرانی جدول روث را تشکیل می دهیم:

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & 5 + 10K_p \\ s & 6 & 0 \\ 1 & 5 + 10K_p & \end{array}$$

با توجه به جدول روث، سطر تمام صفر وجود نخواهد داشت یعنی سیستم به ازای هیچ مقداری از بهره به مرز پایداری نمی رسد. این موضوع را می توان با نمودار مکان ریشه نیز نشان داد.



بنابراین روش دوم برای این سیستم کاربردی ندارد.

۴-۲- تعیین تجربی ضرایب کنترل کننده‌ها:

برای اینکه یک سیستم عملکرد مطلوبی داشته باشد، کنترل کننده باید به خوبی با رفتار سیستم هماهنگ شود. هدف از طرح کنترل کننده تنظیم پارامترهای آن به نحوی است که خطا در اثر اغتشاش و یا تغییر نقطه تنظیم به سرعت و با حداقل تغییرات از بین برود. سرعت از بین رفتن خطا و حداقل بودن جهش را باید با تابع معیاری بر حسب خطا و زمان سنجید. برای این تابع که با $J(e, t)$ نمایش داده شده و تابع معیار خطا نامیده می‌شود تعاریف متعددی ارائه شده که در جدول زیر به طور خلاصه به آنها اشاره شده است.

جدول ۲-۳: مقایسه عملکردی انواع توابع معیار خطا

نام معیار	خصوصیات معیار	تابع خطا
انتگرال مجذور خطا (ISE)	۱- خطاهای مثبت و منفی یکسان در نظر گرفته می‌شود. ۲- خطاهای کوچک سهم کم و خطاهای بزرگ سهم بیشتری در تابع معیار دارند. ۳- به ازای خطای اولیه بزرگ سریعاً کاهش می‌یابد، پاسخ سریع و نوسانی است. ۴- پایداری نسبی کمی دارد. ۵- برای تنظیم کنترل کننده به منظور حذف اغتشاش استفاده می‌گردد.	$J(e, t) = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$
انتگرال قدر مطلق خطا (IAE)	۱- خطاهای مثبت و منفی یکسان در نظر گرفته می‌شود. ۲- خطاهای کوچک و بزرگ یکسان در نظر گرفته می‌شوند. ۳- به نسبت ISE حساسیت کمتری نسبت به خطاهای کوچک دارد. ۴- برای بهینه‌سازی سیستم‌های به میرای شدید کاربرد ندارد. ۵- برای تنظیم کنترل کننده به منظور حذف اغتشاش استفاده می‌گردد.	$J(e, t) = \int_0^{\infty} e(t) dt$
انتگرال حاصل ضرب زمان در مجذور خطا (ITSE)	۱- خطای اولیه بزرگ در پاسخ پله سیستم وزن کمی دارد اما اگر با گذشت زمان خطا باقی بماند، بر روی آن تأثیرگذار است. ۲- تمایل به کاهش خطای حالت دائمی دارد. ۳- برای تنظیم کنترل کننده جهت ردیابی نقطه مطلوب بکار می‌رود.	$J(e, t) = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt$
انتگرال حاصل ضرب زمان در قدر مطلق خطا (ITAE)	۱- خطای اولیه بزرگ در پاسخ پله سیستم وزن کمی دارد اما اگر با گذشت زمان خطا باقی بماند، بر روی آن تأثیرگذار است. ۲- جهش در پاسخ گذرا کوچک است و نوسانات میرایی مناسب دارند. ۳- برای تنظیم کنترل کننده جهت ردیابی نقطه مطلوب بکار می‌رود.	$J(e, t) = \int_0^{\infty} t e(t) dt$

جزوه درسی کنترل پیشرفته

اگر کنترل کننده سیستم مرتبه اول تأخیر دار که با استفاده از پاسخ پله به دست می آید $(G(s) = \frac{K}{1+Ts} e^{-\tau_d s})$ ، در دسترس باشد، هدف از طراحی کنترل کننده و تنظیم پارامترها به گونه ایست که معیار انتخاب شده دارای خصوصیت

$$\frac{\delta J}{\delta K_p} = 0, \quad \frac{\delta J}{\delta T_d} = 0, \quad \frac{\delta J}{\delta T_i} = 0$$

باشد تا خطا سریع و با حداقل تغییرات صفر گردد؛ بنابراین ضرایب کنترل کننده های P، PI و PID بر اساس معیار فوق به صورت روابط زیر خواهد بود:

جدول ۲-۴: تنظیم ضرایب کنترل کننده ها بر اساس حداقل سازی تابع معیار

نوع کنترل کننده	ضرایب کنترل کننده
P	$K_p = \frac{1}{K} a \left(\frac{\tau_d}{T} \right)^{-b}$
PI	$T_i = \tau_d c \left(\frac{\tau_d}{T} \right)^d \quad K_p = \frac{1}{K} a \left(\frac{\tau_d}{T} \right)^{-b}$
PID	$T_d = T e \left(\frac{\tau_d}{T} \right)^f \quad T_i = T c \left(\frac{\tau_d}{T} \right)^d \quad K_p = \frac{1}{K} a \left(\frac{\tau_d}{T} \right)^{-b}$

که پارامترهای a تا f از جداول زیر به دست می آیند:

جدول ۲-۵: تنظیم ضرایب کنترل کننده P بر اساس حداقل سازی تابع معیار

معیار	a	b
IAE	0.9	0.98
ISE	1.4	0.92
ITAE	0.5	0.98

جدول ۲-۶: تنظیم ضرایب کنترل کننده PI بر اساس حداقل سازی تابع معیار

معیار	a	b	c	d
IAE	0.98	0.98	1.65	0.7
ISE	1.3	0.96	2	0.74
ITAE	0.86	0.98	1.48	0.68

جدول ۲-۷: تنظیم ضرایب کنترل کننده PID بر اساس حداقل سازی تابع معیار

معیار	a	b	c	d	e	f
IAE	1.43	0.92	1.14	0.75	0.48	1.14
ISE	1.5	0.95	0.92	0.77	0.59	1
ITAE	1.36	0.347	1.18	0.74	0.38	1

نکته مهم:

استفاده از این روش‌ها زمانی مجاز است که $0.1 < \frac{\tau_d}{T} < 1$ باشد.

مثال ۲-۶

پاسخ پله به دست آمده از طراحی کنترل کننده PID به روش‌های مختلف را برای سیستم‌های زیر مقایسه نمایید:

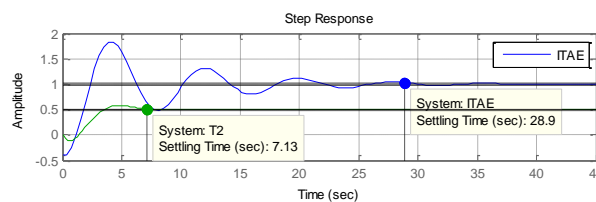
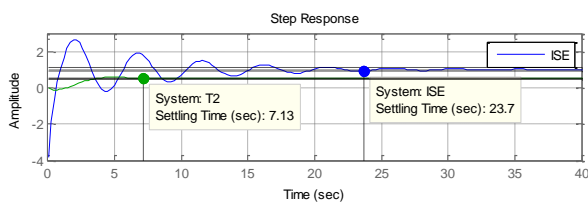
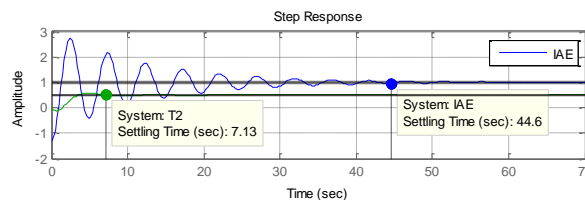
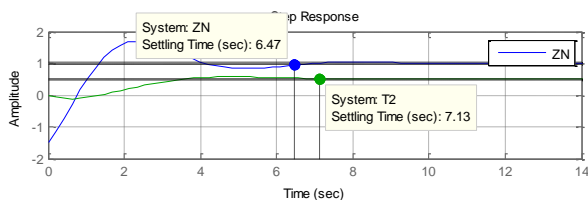
$$1) G(s) = \frac{1}{1+2.48s} e^{-s}$$

$$G(s) = \frac{1}{1+2.48s} e^{-s} \rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ T = 2.48 \rightarrow \frac{\tau_d}{T} = 0.4032 \\ \tau_d = 1 \end{cases}$$

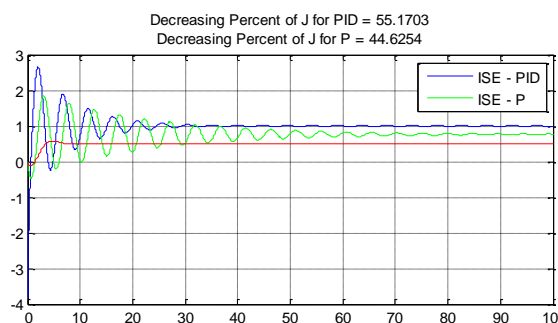
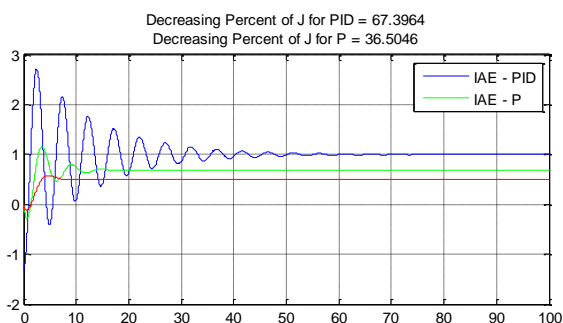
با توجه به جدول ۲-۷ داریم:

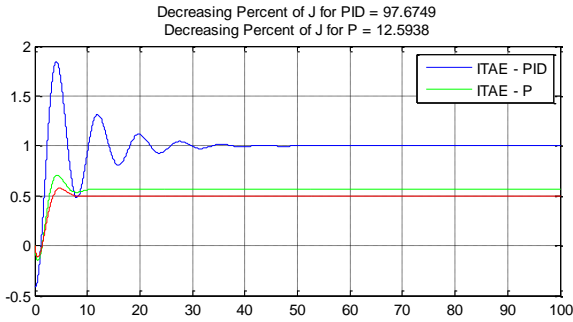
معیار	K_p	T_i	T_d
ZN	2.976	2	0.5
IAE	3.3124	1.4306	0.4256
ISE	3.5269	1.1183	0.557
ITAE	1.8598	1.5067	0.3827

مشخصات پاسخ سیستم با حضور هر یک از چهار کنترل کننده به شرح زیر است:



نمودارهای زیر درصد کاهش تابع معیار J را برای دو کنترل کننده P و PID به روش‌های مختلف نشان می‌دهد:





نکته مهمی که در مورد طراحی کنترل کننده با توابع معیار خطا وجود دارد و باید به دقت به آن توجه شود این است که این روشها بر مبنای حداقل سازی خطای بین پاسخ مطلوب و پاسخ بهبود یافته عمل می کنند و لذا تضمینی وجود ندارد که به پارامترهای زمان نشست و مقدار فراجهش مناسبی دست پیدا کنند. معنی این گفته این است که در طراحی کنترل کننده مهم ترین نکته هدف از طراحی آن و کاربرد آن است. مثلاً اگر هدف سریعترین زمان رسیدن به پاسخ مطلوب است نباید قاعده‌تاً از روشهای طراحی کنترل کننده با استفاده از توابع معیار خطا استفاده نمود.

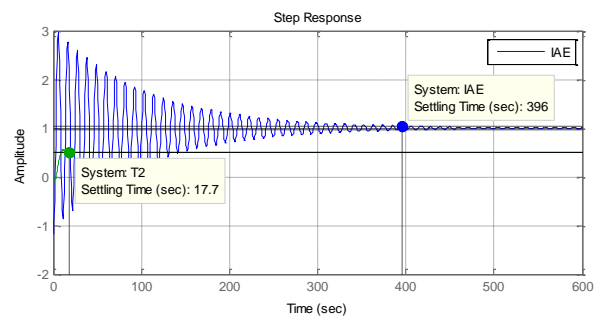
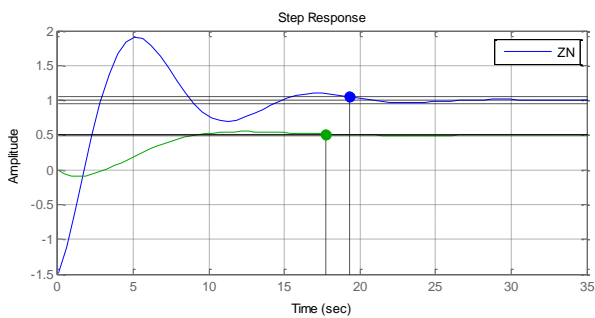
$$۲) G(s) = \frac{1}{1+6.8s} e^{-2.2s}$$

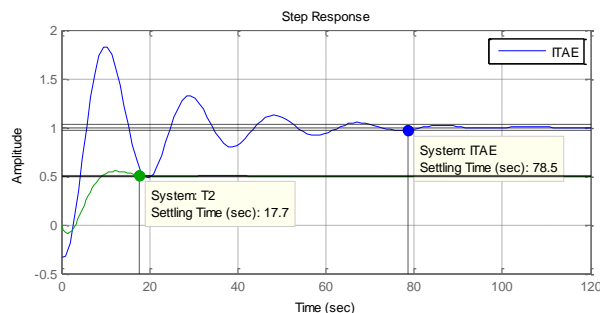
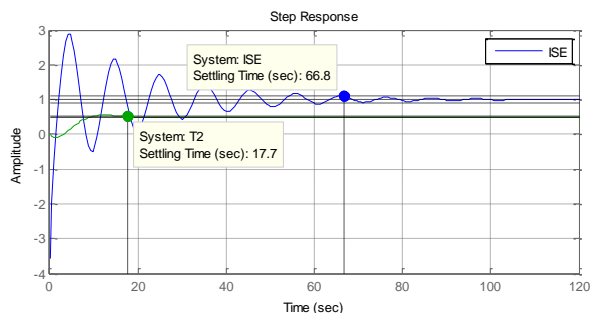
$$G(s) = \frac{1}{1+6.8s} e^{-2.2s} \rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ T = 6.8 \rightarrow \frac{\tau_d}{T} ; 0.31 \\ \tau_d = 2.2 \end{cases}$$

مشخصات پاسخ سیستم با حضور هر یک از چهار کنترل کننده به شرح زیر است:

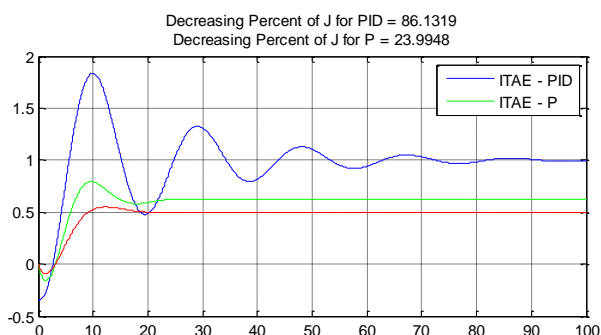
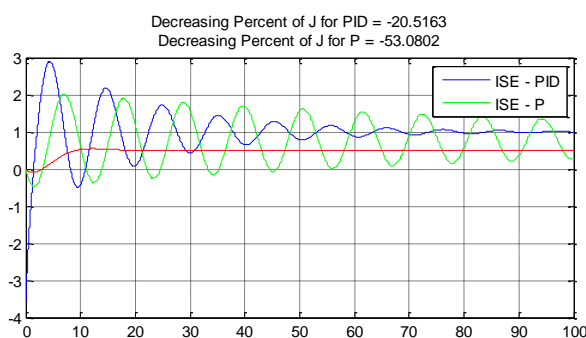
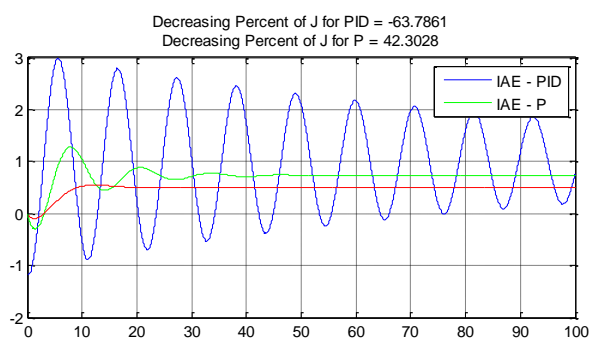
معیار	K_p	T_i	T_d
ZN	3.7091	4.4	1.1
IAE	4.0572	3.3261	0.9085
ISE	4.3428	2.5874	1.2237
ITAE	2	3.5117	0.8429

مشخصات پاسخ سیستم با حضور هر یک از چهار کنترل کننده به شرح زیر است:





نمودارهای زیر درصد کاهش تابع معیار J را برای دو کنترل کننده P و PID به روش های مختلف نشان می دهد:



مشاهده می شود که تأثیر این کنترل کننده بر روی مشخصات پاسخ گذرا خوب نیست اما با مقایسه درصد کاهش خطای سیستم می بینیم که این روشها به نسبت کنترل کننده P، معیار خطا را به خوبی کاهش می دهند.

هر دو مثال به خوبی نشان می دهد که طراحی کنترل کننده PID به روش ITAE به منظور کاهش خطا، روش مناسب تری هست.

۲-۵- روش Cohen-Coon:

روش Cohen-Coon نیز بر اساس مدل تأخیر دار مرتبه اول تعریف می گردد. معیار اصلی در این روش حذف اغتشاش هست. در این روش سعی بر این است که مقدار قله هر نوسان با نسبت تنزل $\frac{1}{4}$ نسبت به قله قبلی کاهش یابد. فرمول های تنظیم این

روش که بر اساس محاسبات تحلیلی به دست آمده اند در جدول زیر آمده اند. در این جدول $a = \frac{K\tau_d}{T}$ و $\tau = \frac{\tau_d}{T + \tau_d}$ می باشند.

جزوه درسی کنترل پیشرفته

جدول ۲-۸: تنظیم ضرایب کنترل کننده‌ها بر اساس حداقل سازی تابع معیار

نوع کنترل کننده	ضرایب کنترل کننده
P	$K_p = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{0.35}{\tau} \right)$
PI	$K_p = \frac{0.9}{a} \left(1 + \frac{0.92\tau}{1-\tau} \right), T_i = \left(\frac{3.3-3\tau}{1+1.2\tau} \right) \tau_d$
PID	$K_p = \frac{1.35}{a} \left(1 + \frac{0.18\tau}{1-\tau} \right), T_i = \left(\frac{2.5-2\tau}{1-0.39\tau} \right) \tau_d, T_d = \left(\frac{0.37-0.37\tau}{1-0.81\tau} \right) \tau_d$

در این روش هدف کاهش انتگرال قدر مطلق خطا هست.

مثال ۲-۷

پاسخ پله به دست آمده از طراحی کنترل کننده PID به روش Cohen-Coon را برای سیستم زیر محاسبه نمایید:

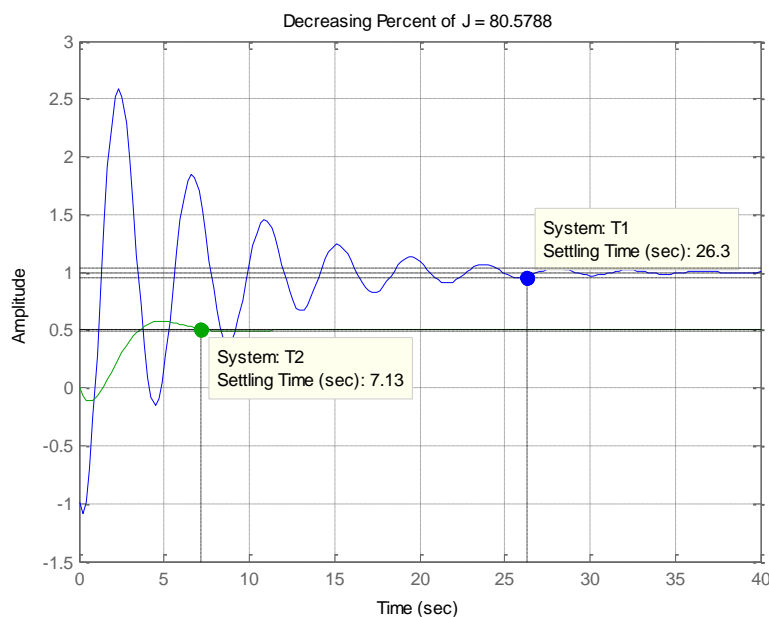
$$G(s) = \frac{1}{1+2.48s} e^{-s}$$

$$G(s) = \frac{1}{1+2.48s} e^{-s} \rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ T = 2.48 \\ \tau_d = 1 \end{cases}$$

با توجه به جدول ۲-۸ داریم:

معیار	K_p	T_i	T_d
CC	3.59	2.1683	0.3437

مشخصات پاسخ سیستم با حضور این نوع کنترل کننده به شرح زیر است:



مجدداً مشاهده می‌شود که تأثیر این کنترل کننده بر روی مشخصات پاسخ گذرا خوب نیست اما با مقایسه درصد کاهش خطای

سیستم می بینیم که این سیستم ۸۰٪ انتگرال قدرمطلق خطا را کاهش می دهد.

کنترل کننده های متداول حوزه فرکانسی:

۵-۳-۱- کنترل کننده پیشفاز - کنترل کننده پس فاز:

کنترل کننده ای با فرم کلی

$$G_C(s) = \frac{K_C(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)} \quad (4-2)$$

بسته به موقعیت صفر و قطب می توانند پیش فاز^۱ و یا پس فاز^۲ باشند. این کنترل کننده ها با توجه به رابطه ۲-۴ یک صفر

$$\text{در } s = \frac{-1}{T} \text{ و یک قطب در } s = \frac{-1}{\alpha T} \text{ دارند.}$$

اگر مقدار $\alpha > 1$ باشد یعنی صفر کنترلر نسبت به قطب آن به مبدا نزدیک تر است و زاویه فازی که کنترل کننده دارد مثبت خواهد بود. در این صورت کنترلر را پیش فاز می نامیم. این نوع کنترل کننده معادل کنترل کننده PD حوزه زمان است.

$$\varphi = PM_{\text{desired}} - PM_{\text{plant}} + 5^\circ$$

$$\alpha = \frac{1 + \sin(\varphi)}{1 - \sin(\varphi)}$$

$$T = \frac{1}{\omega_g \alpha}$$

اگر مقدار $\alpha < 1$ باشد یعنی صفر کنترلر نسبت به قطب آن از مبدا دورتر است و زاویه فازی که کنترل کننده دارد منفی خواهد بود. در این صورت کنترلر را پس فاز می نامیم. این نوع کنترل کننده معادل کنترل کننده PI حوزه زمان است.

اگر ω'_g فرکانس متناظر با حدفاز مطلوب سیستم باشد:

$$\omega'_g - 5^\circ = \omega_g$$

$$\left| G_P(j\omega_g) \right| = -20 \log \alpha$$

$$T = \frac{\alpha}{10} \omega_g$$

۵-۳-۲- کنترل کننده پیشفاز - پس فاز:

کنترل کننده پیش فاز - پس فاز ترکیب دو کنترل کننده فوق می باشد. این نوع کنترل کننده معادل کنترل کننده PID حوزه زمان است.

مثال ۲-۸

سیستم حلقه باز زیر را در نظر بگیرید:

^۱ Lead Controller

^۲ Lag Controller

$$G_p(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

جبران‌ساز پیش‌فازی برای این سیستم طراحی کنید بطوریکه خطای حالت دائمی به ورودی شیب برابر $\frac{1}{20}$ گردد و حاشیه فاز سیستم حداقل 50° باشد.

حل:

$$\begin{cases} G(s) = G_c(s)G_p(s) \\ G_c(s) = \frac{K_c(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)} \end{cases} \rightarrow G(s) = \frac{K_c(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)} \times \frac{4}{s(2+2)} = \frac{4K_c(1+Ts)}{s(1+\alpha Ts)(s+2)}$$

$$\begin{aligned} e_{ss}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \left(\frac{1}{1+G(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{s^2} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{4K_c(1+Ts)}{s(1+\alpha Ts)(s+2)}} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{s^2} \right) \left(\frac{s(1+\alpha Ts)(s+2)}{s(1+\alpha Ts)(s+2) + 4K_c(1+Ts)} \right) = \frac{2}{4K_c} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{K_c = 10}$$

$$\rightarrow G(s) = \frac{40(1+Ts)}{s(1+\alpha Ts)(s+2)}$$

$$|G_p(j\omega_g)| = 1 \rightarrow \frac{40}{\omega_g \sqrt{4 + (\omega_g)^2}} = 1 \rightarrow \omega_g \sqrt{4 + (\omega_g)^2} = 40$$

$$\omega_g^2(\omega_g^2 + 4) = 1600 \rightarrow \omega_g^4 + 4\omega_g^2 - 1600 = 0$$

$$\xrightarrow{\omega_g^2 = x} x^2 + 4x - 1600 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -42.05 \\ 38.05 \end{cases} \checkmark \rightarrow \omega_g = \sqrt{38.05} = 6.17$$

$$\angle G_p(j6.17) = 0 - 90^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{6.17}{2} \right) = -162.04^\circ$$

$$\rightarrow PM = -162.04^\circ + 180^\circ = 18^\circ$$

اکنون به طراحی کنترل کننده پیش فاز می پردازیم:

$$\varphi = 50^\circ - 18^\circ + 5^\circ = 37^\circ$$

$$\alpha = \frac{1 + \sin(37^\circ)}{1 - \sin(37^\circ)}; 4 > 1 \checkmark$$

$$T = \frac{1}{\omega_g \alpha} = \frac{1}{6.17 \times 4} = 0.04$$

$$\rightarrow G_c(s) = \frac{(1 + 0.040s)}{(1 + 0.162s)}$$

$$G_p(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$

جبران ساز پسفازی برای این سیستم طراحی کنید بطوریکه خطای حالت دائمی به ورودی شیب برابر $\frac{1}{100}$ گردد و حاشیه فاز سیستم 45° باشد.

حل:

$$\begin{cases} G(s) = G_c(s)G_p(s) \\ G_c(s) = \frac{K_C(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)} \end{cases} \rightarrow G(s) = \frac{K_C(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)} \times \frac{2500}{s(s+25)} = \frac{2500K_C(1+Ts)}{s(1+\alpha Ts)(s+25)}$$

$$\begin{aligned} e_{ss}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \left(\frac{1}{1+G(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{s^2} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{2500K_C(1+Ts)}{s(1+\alpha Ts)(s+25)}} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{s^2} \right) \left(\frac{s(1+\alpha Ts)(s+25)}{s(1+\alpha Ts)(s+25) + 2500K_C(1+Ts)} \right) = \frac{25}{2500K_C} = \frac{1}{100} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{K_C = 1}$$

$$\rightarrow G(s) = \frac{2500(1+Ts)}{s(1+\alpha Ts)(s+25)}$$

$$\rightarrow PM = 45^\circ \rightarrow \angle G_p(j\omega'_g) + 180^\circ = 45^\circ \rightarrow \angle G_p(j\omega'_g) = -135^\circ$$

$$\angle G_p(j\omega'_g) = 0 - 90^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{\omega'_g}{25} \right) = -135^\circ \rightarrow \tan^{-1} \left(\frac{\omega'_g}{25} \right) = 45^\circ$$

$$\rightarrow \frac{\omega'_g}{25} = \tan(45^\circ) = 1 \rightarrow \omega'_g = 25 \rightarrow \omega_g = 20$$

$$|G_p(j20)| = \frac{2500}{20\sqrt{25^2 + (20)^2}} = 3.90$$

$$3.90 = -20 \log \alpha \rightarrow \alpha = 10^{\frac{-3.9}{20}} = 0.6383 < 1 \quad \checkmark$$

$$T = \frac{\alpha}{10} \omega'_g = 1.2765$$

$$\rightarrow G_c(s) = \frac{(1+1.27s)}{(1+0.81s)}$$

۲-۶- طراحی کنترل کننده بر اساس جایابی قطب:

یکی از روش‌های مرسوم در طراحی کنترل کننده‌های حوزه زمان که مشخصات مطلوب آنها بر اساس مقادیر زمان نشست، مقدار حداکثر فراجهش و ... بیان می‌شود، استفاده از روش جایابی قطب است. در این روش جبران ساز مورد نظر به گونه‌ای طراحی

می‌شود که قطب‌های حلقه بسته سیستم در محل دلخواه قرار گیرند. بدین منظور نمودار مکان ریشه‌های سیستم بهترین راهنما در محاسبات مربوط به کنترل کننده هست.

در این فصل با طراحی کنترل کننده‌های PI، PD و PID با استفاده از جبران سازه‌های پیش فاز و پس فاز می‌پردازیم. به نکات زیر توجه کنید:

- منحنی مکان ریشه‌های یک کنترل کننده PI از یک قطب و یک صفر تشکیل شده است به گونه‌ای که قطب همواره در سمت راست صفر قرار داشته و معادل یک کنترل کننده پس فاز است؛ بنابراین در طراحی کنترل کننده PI می‌توان از یک کنترل کننده پس فاز معادل نیز استفاده نمود.
- منحنی مکان ریشه‌های یک کنترل کننده PD از یک قطب و یک صفر تشکیل شده است به گونه‌ای که صفر همواره در سمت راست قطب قرار داشته و معادل یک کنترل کننده پیش فاز است؛ بنابراین در طراحی کنترل کننده PD می‌توان از یک کنترل کننده پیش فاز معادل نیز استفاده نمود.

۲-۶-۱- مراحل طراحی کنترل کننده به روش جایابی قطب:

۱. ابتدا مکان ریشه‌های سیستم مورد نظر را ترسیم می‌نماییم.
۲. بر اساس مشخصات پاسخ گذرای خواسته شده محل قطب‌های حلقه بسته مطلوب را مشخص می‌کنیم.
۳. اگر قطب‌های حلقه بسته مطلوب روی مکان ریشه سیستم قرار داشتند، بهره تناسبی لازم برای جایابی قطب‌ها را به دست می‌آوریم.
۴. اگر قطب‌های حلقه بسته مطلوب روی مکان ریشه‌های سیستم قرار نداشتند، یک کنترل کننده به فرم $G_c(s) = K_c \frac{s + \alpha}{s + \beta}$ به سیستم اضافه نموده و اختلاف زاویه لازم برای جایابی قطب‌ها را به محل های مورد نظر را با توجه به شرط مکان ریشه‌ها محاسبه می‌کنیم.
۵. صفر و قطب کنترل کننده را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که زاویه به دست آمده از قسمت ۴ را جبران نماید.
۶. بهره کنترل کننده را با توجه شرط مکان ریشه‌ها محاسبه می‌کنیم.

یادآوری:

شرط قرارگیری یک قطب بر روی مکان ریشه‌ها:

$$K > 0: \begin{cases} |KG_c(s)G_p(s)| = 1 \\ \text{R}KG_c(s)G_p(s) = -(2n+1)\pi \end{cases}$$

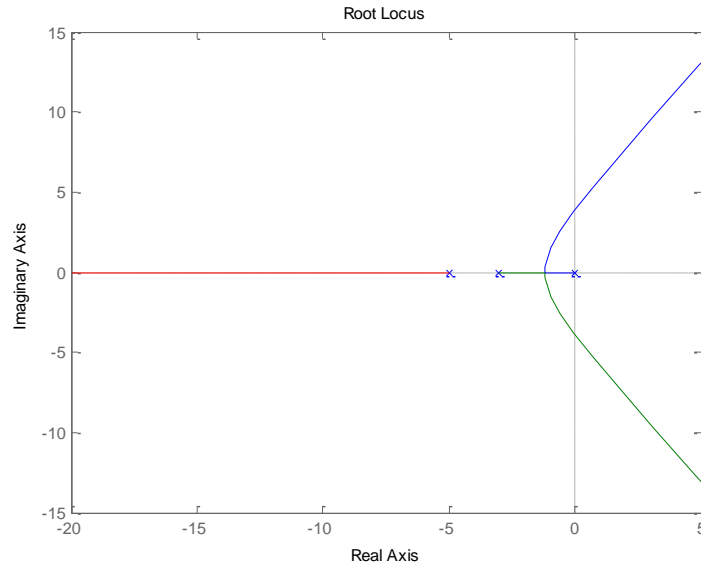
$$K < 0: \begin{cases} |KG_c(s)G_p(s)| = 1 \\ \text{R}KG_c(s)G_p(s) = 2n\pi \end{cases}$$

مثال ۲-۱۰

برای سیستم زیر کنترل کننده مناسب، به گونه‌ای طراحی نمایید که $\%o.s = 16\%$ بوده و $t_r = 0.6s$ شود.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)(s+5)}$$

مکان ریشه‌های این سیستم به صورت



هست.

$$e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.16 \rightarrow \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln(0.16) = -1.83 \rightarrow \zeta^2\pi^2 = 3.3584(1-\zeta^2)$$

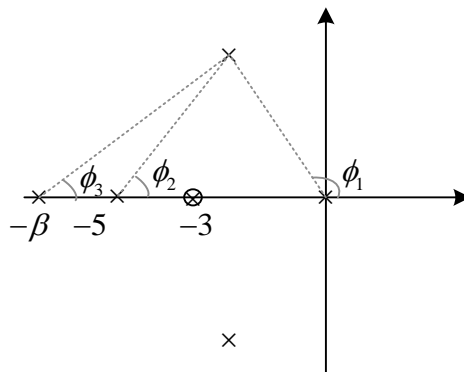
$$\rightarrow \zeta^2(\pi^2 + 3.3584) = 3.3584 \rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{3.3584}{3.3584 + \pi^2}} = 0.504$$

$$t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}\zeta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.6 \rightarrow \omega_n = \frac{\pi - 1.0427}{0.6\sqrt{0.7461}} \rightarrow \omega_n = 4.05$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2.0407 \pm 3.4983j$$

$$\left| \frac{1}{s(s+3)(s+5)} \right|_{s=-2.0407 \pm 3.4983j} = 0.0149, \quad R \left| \frac{1}{s(s+3)(s+5)} \right|_{s=-2.0407 \pm 3.4983j} = 115.3066$$

بنابراین قطب‌های غالب روی مکان ریشه‌های سیستم قرار ندارند؛ بنابراین باید کنترل کننده‌ای به فرم $G_c(s) = K_c \frac{s+\alpha}{s+\beta}$ برای سیستم طراحی شود. این کنترل کننده باید جبران فازی برابر با $180^\circ - 115.3066^\circ = 64.6934^\circ$ داشته باشد که کنترل کننده پیش فاز برای این منظور بکار خواهد رفت. صفر کنترل کننده را برابر با نزدیک‌ترین قطب کنترل کننده به مبدأ یعنی $\alpha = -3$ انتخاب می‌کنیم.



بنابراین برای برقراری شرط مکان باید رابطه

$$-\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = -180$$

برقرار باشد؛ بنابراین داریم:

$$-\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = -180^\circ$$

$$\phi_1 = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{3.4983}{2.0407}\right) = 120.2567^\circ$$

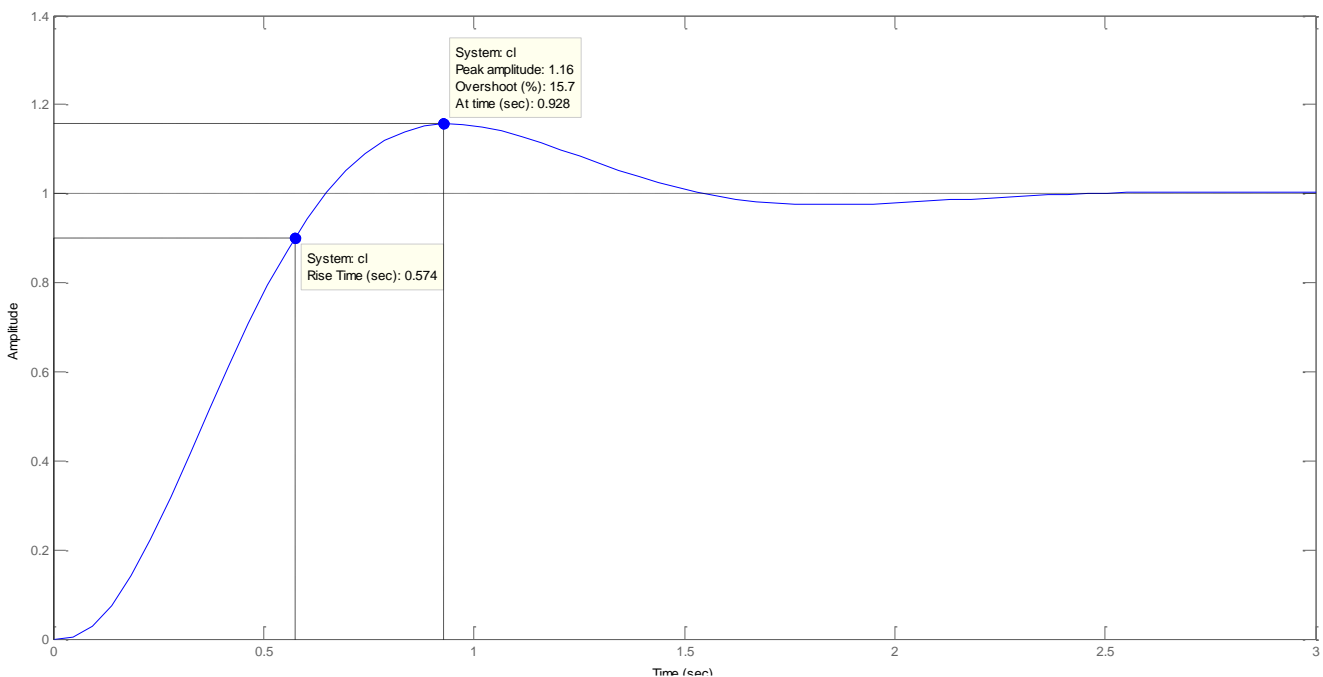
$$\phi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{3.4983}{5-2.0407}\right) = 49.7683^\circ$$

$$\rightarrow -120.2567 - 49.7683 - \phi_3 = -180^\circ \rightarrow \phi_3 = 9.975^\circ$$

$$\rightarrow \phi_3 = \tan^{-1}\left(\frac{3.4983}{\beta - 2.0407}\right) = 9.975^\circ \rightarrow \frac{3.4983}{\beta - 2.0407} = \tan(9.975^\circ) \rightarrow \beta ; 21.9291$$

بهره کنترل کننده نیز از شرط اندازه به دست می آید:

$$|G_c(s)G_p(s)| = 1 \rightarrow K_c \left| \frac{1}{s(s+5)(s+21.9291)} \right|_{s=-2.0407 \pm 3.4983j} = 1 \rightarrow 0.0027K_c = 1 \rightarrow K_c = 374.7451$$

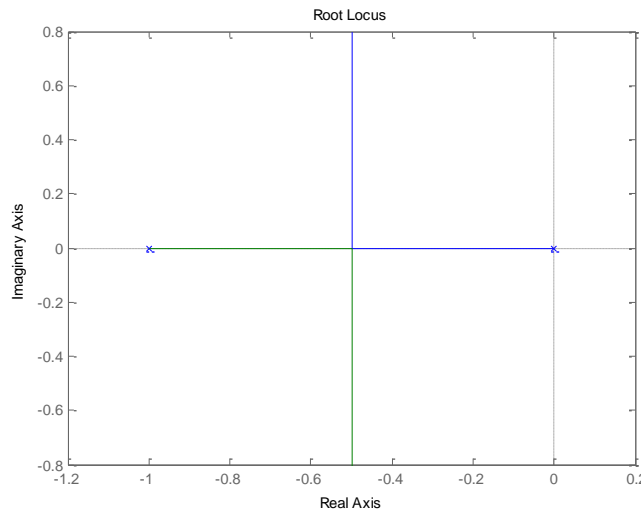


مثال ۱۱-۲

برای سیستم زیر کنترل کننده مناسب، به گونه‌ای طراحی نمایید که $o.s = 20\%$ بوده و $t_s = \frac{8}{3}s$ شود.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

مکان ریشه‌های این سیستم به صورت



هست.

$$e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.2 \rightarrow \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln(0.2) = -1.6094 \rightarrow \zeta^2\pi^2 = 2.59(1-\zeta^2)$$

$$\rightarrow \zeta^2(\pi^2 + 2.59) = 2.59 \rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{2.59}{2.59 + \pi^2}} = 0.4559$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{8}{3} \rightarrow \omega_n = \frac{12}{8 \times 0.4559} \rightarrow \omega_n = 3.29$$

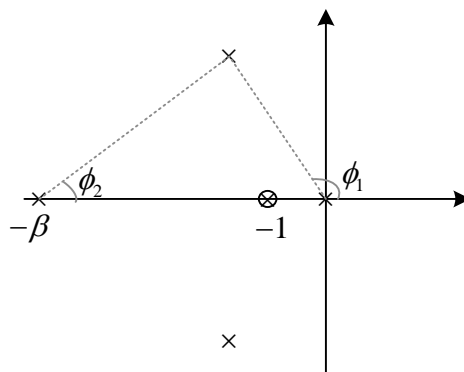
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -1.5 \pm 2.9281j$$

$$\left| \frac{1}{s(s+1)} \right|_{s=-1.5 \pm 2.9281j} = 0.1023$$

$$R \left. \frac{1}{s(s+1)} \right|_{s=-1.5 \pm 2.9281j} = 143.185$$

بنابراین قطب‌های غالب روی مکان ریشه‌های سیستم قرار ندارند؛ بنابراین باید کنترل کننده‌ای به فرم $G_c(s) = K_c \frac{s+\alpha}{s+\beta}$

برای سیستم طراحی شود. این کنترل کننده باید جبران فازی برابر با $180^\circ - 143.185^\circ = 36.815^\circ$ داشته باشد که کنترل کننده پیش فاز برای این منظور بکار خواهد رفت. صفر کنترل کننده را برابر با نزدیک‌ترین قطب کنترل کننده به مبدأ یعنی $\alpha = -1$ انتخاب می‌کنیم.



بنابراین برای برقراری شرط مکان باید رابطه

$$-\phi_1 - \phi_2 = -180$$

برقرار باشد؛ بنابراین داریم:

$$-\phi_1 - \phi_2 = -180^\circ$$

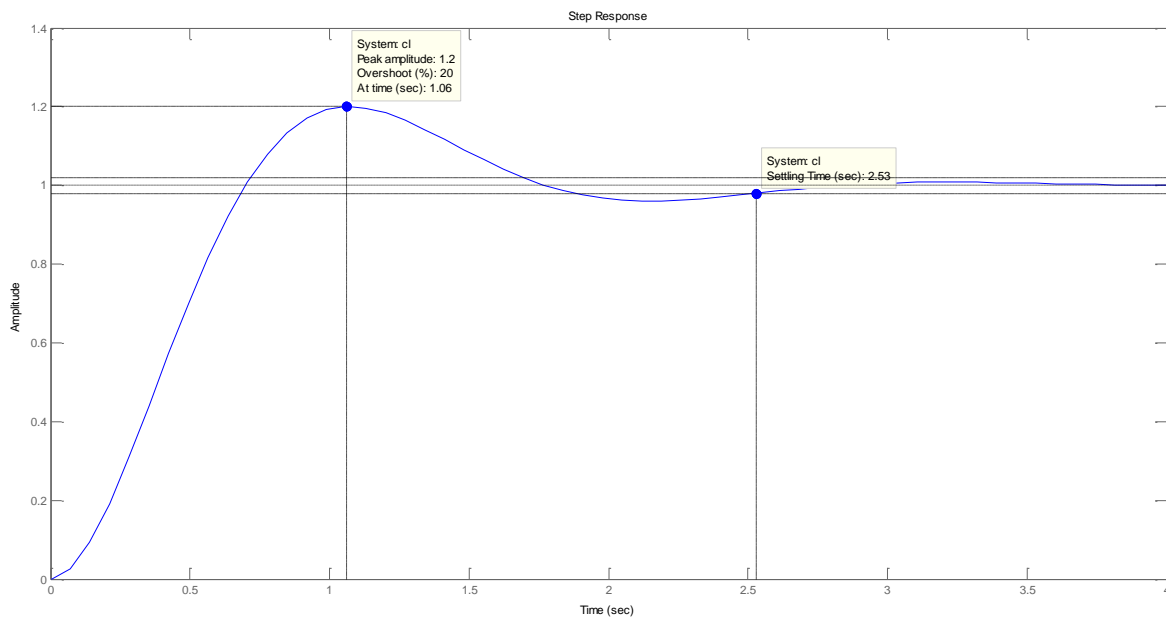
$$\phi_1 = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{2.9281}{1.5}\right) = 117.125^\circ$$

$$\rightarrow -117.125 - \phi_2 = -180^\circ \rightarrow \phi_2 = 62.875^\circ$$

$$\rightarrow \phi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{2.9281}{\beta - 1.5}\right) = 62.875^\circ \rightarrow \frac{2.9281}{\beta - 1.5} = \tan(62.875^\circ) \rightarrow \beta = 3$$

بهره کنترل کننده نیز از شرط اندازه به دست می آید:

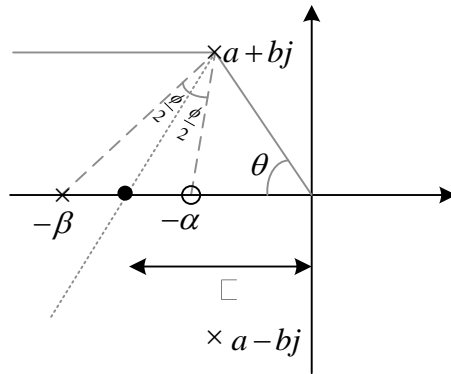
$$|G_c(s)G_p(s)| = 1 \rightarrow K_c \left| \frac{1}{s(s+1)} \right|_{s=-1.5 \pm j2.9281} = 1 \rightarrow 0.0924K_c = 1 \rightarrow K_c = 10.824$$



برای محاسبه محل صفر و قطب کنترل کننده باید به این نکته توجه کنیم که نسبت p به z تا حد امکان باید کوچک نگاه داشته شود تا پیاده سازی کنترل کننده ساده تر گردد. برای حداقل کردن این نسبت از روش ترسیمی که در بخش بعدی معرفی می گردد استفاده می کنیم.

۲-۶-۲- روش ترسیمی طراحی کنترل کننده پیش فاز به روش جایابی قطب:

اگر زاویه جبران ساز را ϕ در نظر بگیریم، برای محاسبه محل صفر و قطب کنترل کننده ابتدا از محل قطب موثر یک خط به موازات محور حقیقی و خط دیگری تا مبدأ ترسیم می نماییم. سپس نیمساز زاویه بین دو خط را مطابق شکل زیر مشخص می کنیم. آنگاه دو خط در دو طرف نیمساز با زاویه $\frac{\phi}{2}$ رسم می نماییم.



شکل ۲-۸: روش ترسیمی طراحی کنترل کننده پیش فاز

بنابراین داریم:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \quad (۵-۲)$$

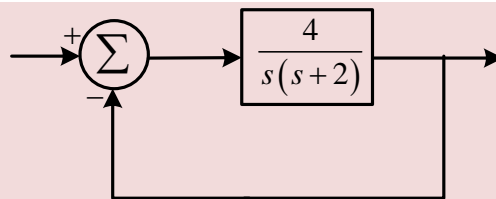
$$1 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (۶-۲)$$

$$\beta = 1 \left(1 + 2 \frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\phi + \theta}{2}\right)} \right) \quad (۷-۲)$$

$$\alpha = 1 \left(1 - 2 \frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right)} \right) \quad (۸-۲)$$

مثال ۲-۱۲

برای سیستم حلقه بسته شکل زیر کنترل کننده ای طراحی کنید که ضمن ثابت ماندن ضریب میرایی، فرکانس طبیعی سیستم $\omega_n = 4 \text{ rad/s}$ گردد.



ابتدا با استفاده از تابع تبدیل حلقه بسته سیستم، مقدار ضریب میرایی را به دست می آوریم:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{4}{s(s+2)}}{1 + \frac{4}{s(s+2)}} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

$$\rightarrow s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \equiv s^2 + 2s + 4 \rightarrow \begin{cases} \omega_n^2 = 4 \\ 2\zeta\omega_n = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_n = 2 \\ \zeta = 0.5 \end{cases}$$

از آنجا که قطب های سیستم حلقه بسته باید در

جزوه درسی کنترل پیشرفته

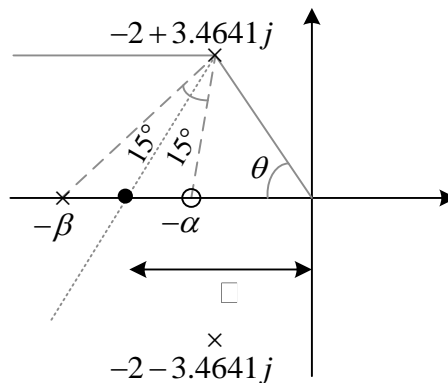
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2 \pm 3.4641j$$

قرار گیرند ابتدا باید چک شود که این ریشه‌ها روی مکان قرار دارند یا خیر؟

$$\Re \frac{4}{s(s+2)} \Big|_{-2 \pm 3.4641j} = 150^\circ$$

بنابراین قطب‌های غالب روی مکان ریشه‌های سیستم قرار ندارند؛ بنابراین باید کنترل کننده‌ای به فرم $G_c(s) = K_c \frac{s+\alpha}{s+\beta}$

برای سیستم طراحی شود. این کنترل کننده باید جبران فازی برابر با $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ داشته باشد که کنترل کننده پیش فاز برای این منظور بکار خواهد رفت.



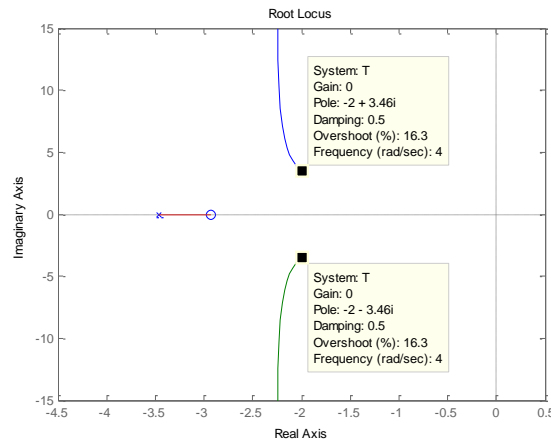
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = 60^\circ$$

$$1 = \sqrt{a^2 + b^2} = 4$$

$$\beta = 1 \left(1 + 2 \frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)} \right) = 4 \left(1 + 2 \frac{\sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right) \sin\left(\frac{60^\circ}{2}\right)}{\cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right)} \right) = 5.4641$$

$$\alpha = 1 \left(1 - 2 \frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\phi-\theta}{2}\right)} \right) = 4 \left(1 - 2 \frac{\sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right) \sin\left(\frac{60^\circ}{2}\right)}{\cos\left(\frac{-30^\circ}{2}\right)} \right) = 2.9282$$

$$|G_c(s)G_p(s)| = 1 \rightarrow K_c \left| \frac{4(s+2.9282)}{s(s+2)(s+5.4641)} \right|_{s=-2 \pm 3.4641j} = 1 \rightarrow K_c = 4.7321$$



مثال ۲-۱۳

برای سیستم زیر کنترل کننده مناسب، به گونه‌ای طراحی نمایید که $10\% o.s = 10\%$ بوده و $t_s = 4s$ شود.

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.1 \rightarrow \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln(0.1) = -2.3026 \rightarrow \zeta^2\pi^2 = 5.3019(1-\zeta^2)$$

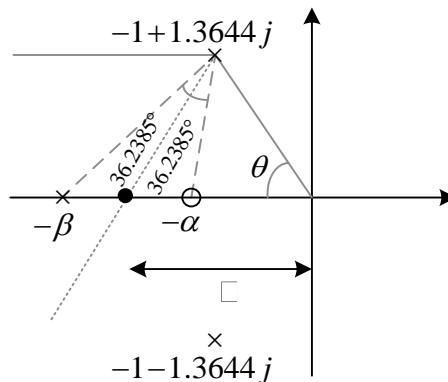
$$\rightarrow \zeta^2(\pi^2 + 5.3019) = 5.3019 \rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{5.3019}{5.3019 + \pi^2}} = 0.5912$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4 \rightarrow \omega_n = \frac{4}{4 \times 0.5912} \rightarrow \omega_n = 1.6916$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -1 \pm 1.3644j$$

$$R \left. \frac{1}{s^2} \right|_{s=-1 \pm 1.3644j} = 107.522$$

بنابراین قطب‌های غالب روی مکان ریشه‌های سیستم قرار ندارند؛ بنابراین باید کنترل کننده‌ای به فرم $G_c(s) = K_c \frac{s+\alpha}{s+\beta}$ برای سیستم طراحی شود. این کنترل کننده باید جبران فازی برابر با $180^\circ - 107.522^\circ = 72.4771^\circ$ داشته باشد که کنترل کننده پیش فاز برای این منظور بکار خواهد رفت.



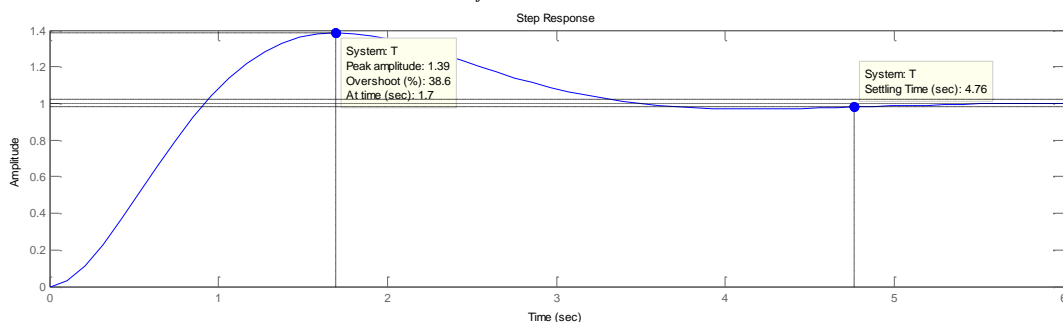
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = 53.761^\circ$$

$$1 = \sqrt{a^2 + b^2} = 1.6916$$

$$\beta = 1 \left(1 + 2 \frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\phi + \theta}{2}\right)} \right) = 1.6916 \left(1 + 2 \frac{\sin\left(\frac{72.478^\circ}{2}\right) \sin\left(\frac{53.761^\circ}{2}\right)}{\cos\left(\frac{126.239^\circ}{2}\right)} \right) = 3.6916$$

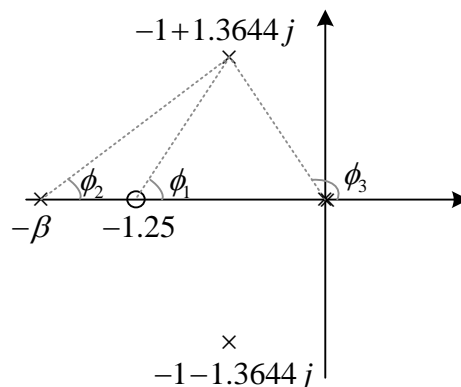
$$\alpha = 1 \left(1 - 2 \frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right)} \right) = 1.6916 \left(1 - 2 \frac{\sin\left(\frac{72.478^\circ}{2}\right) \sin\left(\frac{53.761^\circ}{2}\right)}{\cos\left(\frac{-18.717^\circ}{2}\right)} \right) = 0.7751$$

$$|G_c(s)G_p(s)| = 1 \rightarrow K_c \left| \frac{(s + 0.7751)}{s^2(s + 3.6916)} \right|_{s=-1 \pm 1.3644j} = 1 \rightarrow K_c = 6.2447$$



با توجه به شکل واضح است که حداکثر فراجهش حدود ۴۰٪ هست و این مقدار به مراتب از ۱۰٪ بیشتر خواهد بود. علت این تفاوت فاحش وجود صفر جبران کننده پیش فاز در نزدیکی قطب مؤثر هست. توجه کنید که صفر سیستم حلقه باز و حلقه بسته یکسان بوده و وجود این صفر حداکثر فراجهش را افزایش داده است. البته قطب سیستم حلقه بسته نیز به اندازه کافی به محل صفر نزدیک نیست تا بتواند تأثیر آن مؤثر دور شود.

را خنثی نماید. برای کاهش اثر صفر جبران کننده بر روی حداکثر فراجهش باید تا حد امکان این صفر از محل قطب های البته نمی توان مقدار صفر را خیلی بزرگ در نظر گرفت بنابراین با انتخاب $z = -1.25$ محل قطب جبران ساز به صورت زیر به دست می آید:



$$\phi_1 - \phi_2 - 2\phi_3 = -180^\circ$$

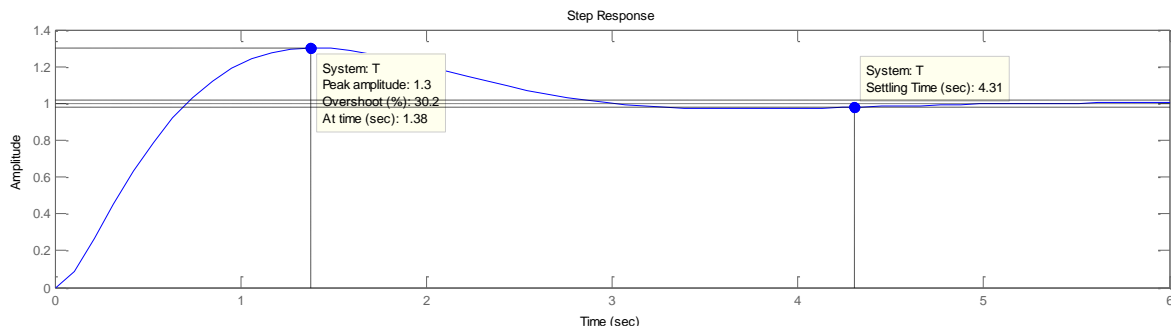
$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1.3644}{0.25}\right) = 79.6168^\circ$$

$$\phi_3 = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{1.3644}{1}\right) = 126.2385^\circ$$

$$\rightarrow 79.6168 - 2 \times 126.2385 - \phi_2 = -180^\circ \rightarrow \phi_2 = 7.1397^\circ$$

$$\rightarrow \phi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{1.3644}{\beta - 1}\right) = 7.1397^\circ \rightarrow \frac{1.3644}{\beta - 1} = \tan(7.1397^\circ) \rightarrow \beta = 11.8924$$

$$|G_c(s)G_p(s)| = 1 \rightarrow K_c \left| \frac{(s+1.25)}{s^2(s+11.8924)} \right|_{s=-1 \pm 1.3644j} = 1 \rightarrow K_c = 22.6464$$



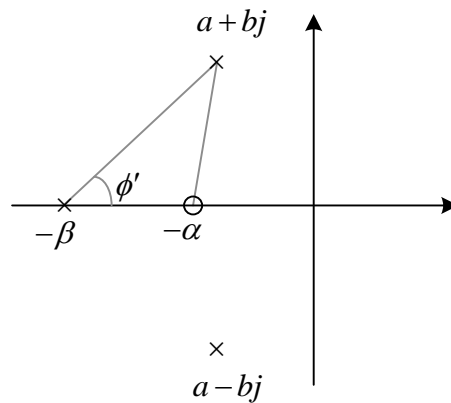
۲-۶-۳- مراحل طراحی کنترل کننده PID به روش جایابی قطب:

۱. بر اساس مشخصات پاسخ گذرای خواسته شده محل قطب‌های حلقه بسته مطلوب را مشخص می‌کنیم.
۲. زاویه پیش فاز ϕ که باید توسط بخش PD کنترل کننده اضافه شود تا ریشه‌های غالب روی منحنی مکان هندسی ریشه‌های سیستم قرار گیرد را محاسبه می‌کنیم.
۳. کنترل کننده PID را به فرم کلی زیر در نظر می‌گیریم:

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_3}} \right) \quad (9-2)$$

۴. مقدار بهره K_c از ضریب خطای سیستم و شرط مکان به دست می‌آید.

۵. صفر و قطب بخش PD را با استفاده از زاویه ϕ و روابط زیر محاسبه می‌کنیم:



شکل ۹-۲: روش طراحی بخش پیش فاز کنترل کننده PID

$$k = |K_c G(s)| \quad (10-2)$$

$$\phi' = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \phi}{k - \cos \phi} \right) \quad (11-2)$$

$$T_1 = \frac{\tan(\phi + \phi')}{b - a \tan(\phi + \phi')} \quad (12-2)$$

$$\beta = \left(\frac{b - a \tan(\phi')}{\tan(\phi')} \right) T_1 \quad (13-2)$$

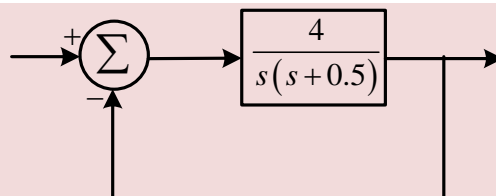
۶. با داشتن β مقدار T_2 از رابطه زیر مشخص می‌گردد:

$$T_2 \approx \left(\frac{180}{\pi} \right) \frac{b(\beta - 1)}{\delta \beta (a^2 + b^2)} \quad (14-2)$$

توجه کنید که در این رابطه زاویه بخش پس فاز مقدار کوچک δ (بر حسب درجه) در نظر گرفته شده است؛ زیرا با افزودن بخش پس فاز نباید زاویه کنترل کننده تغییر چندانی داشته باشد.

مثال ۱۴-۲

برای سیستم مدار بسته شکل زیر کنترل کننده‌ای طراحی کنید که ضریب میرایی برابر $\zeta = 0.5$ ، فرکانس طبیعی سیستم $\omega_n = 4 \text{ rad/s}$ و ضریب خطای استاتیک سیستم برابر $k_v = 50 \text{ s}^{-1}$ گردد.



ابتدا با استفاده از تابع تبدیل حلقه بسته سیستم، مقدار ضریب میرایی را به دست می‌آوریم:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{4}{s(s+0.5)}}{1 + \frac{4}{s(s+0.5)}} = \frac{4}{s^2 + 0.5s + 4}$$

$$\rightarrow s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \equiv s^2 + 0.5s + 4 \rightarrow \begin{cases} \omega_n^2 = 4 \\ 2\zeta\omega_n = 0.5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_n = 2 \\ \zeta = 0.125 \end{cases}$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4}{s + 0.5} = 8$$

از آنجا که قطب‌های سیستم حلقه بسته باید در

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -2.5 \pm j4.33$$

قرار گیرند ابتدا باید چک شود که این ریشه‌ها روی مکان قرار دارند یا خیر؟

$$R \left. \frac{4}{s(s+0.5)} \right|_{s=-2.5 \pm j4.33} = 125.2087^\circ$$

بنابراین قطب‌های غالب روی مکان ریشه‌های سیستم قرار ندارند. با انتخاب کنترل کننده PID به فرم

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right)$$

داریم:

$$8K_c = 50 \rightarrow K_c = 6.25$$

کنترل کننده PD باید فازی معادل $\phi = 180 - 125.2087^\circ = 54.7913^\circ$ را جبران نماید؛ بنابراین:

$$k = |K_c G(s)| = \left| 6.25 \left(\frac{4}{s(s+0.5)} \right) \right|_{s=-2.5 \pm j4.33} = 1.0483$$

$$\phi' = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \phi}{k - \cos \phi} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\sin(54.7913^\circ)}{1.0483 - \cos(54.7913^\circ)} \right) = 59.99^\circ$$

$$T_1 = \frac{\tan(\phi + \phi')}{b - a \tan(\phi + \phi')} = \frac{\tan(54.7913^\circ + 59.99^\circ)}{4.33 + 2.5 \tan(54.7913^\circ + 59.99^\circ)} = 1.9991$$

$$\beta = \left(\frac{b - a \tan(\phi')}{\tan(\phi')} \right) T_1 = 1.9991 \left(\frac{4.33 + 2.5 \tan(59.99^\circ)}{\tan(59.99^\circ)} \right) = 9.996$$

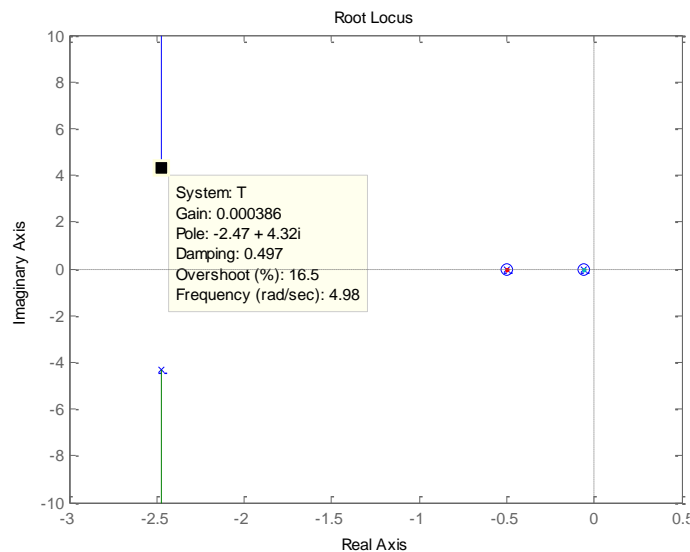
$$\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{T_1} = 0.5 \\ \frac{\beta}{T_1} = 5 \end{cases}$$

با داشتن β برای بخش PI با در نظر گرفتن $\delta = 0.5$ داریم:

$$T_2 \approx \left(\frac{180}{\pi} \right) \frac{b(\beta - 1)}{\delta \beta (a^2 + b^2)} = \left(\frac{180}{\pi} \right) \frac{4.33(9.996 - 1)}{0.5 \times 9.996((-2.5)^2 + 4.33^2)} = 17.86$$

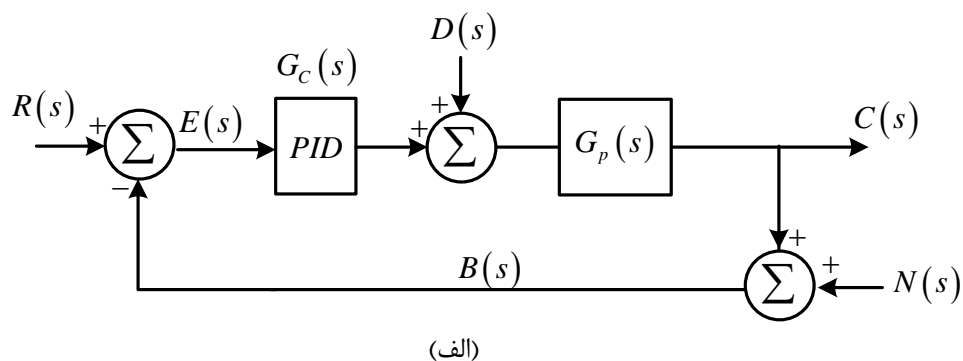
$$\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{T_2} = 0.056 \\ \frac{\beta}{T_1} = 0.0056 \end{cases}$$

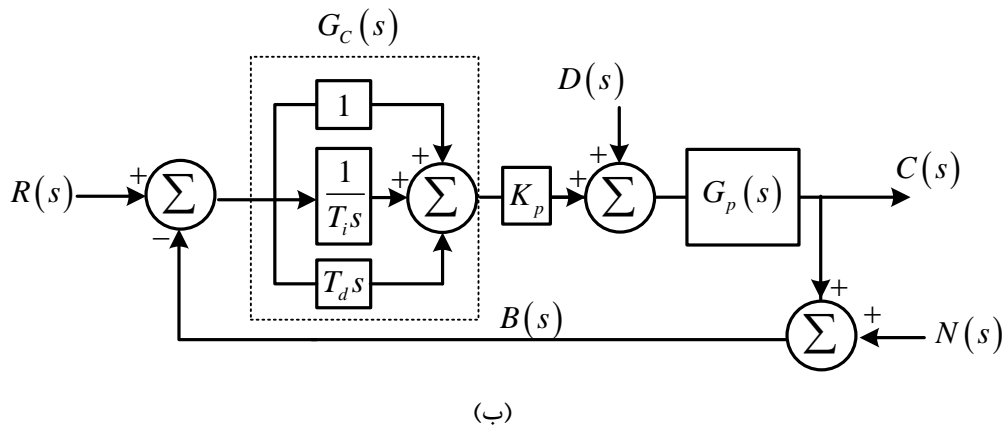
$$\rightarrow G_c(s) = 6.25 \left(\frac{s+0.5}{s+5} \right) \left(\frac{s+0.056}{s+0.0056} \right)$$



۲-۷- اصلاح طرح های کنترل PID:

سیستم کنترل PID شکل ۲-۹-الف که در آن سیستم در معرض اغتشاش و نویز قرار دارد را در نظر بگیرید. شکل ۲-۹-ب را که نمایش دیگری از شکل ۲-۹-الف است را به ورودی پله در نظر بگیرید. به دلیل وجود جمله مشتق گیر در بخش کنترل کننده، متغیر $u_c(t)$ شامل تابع ضربه خواهد بود. به این پدیده **لگد نقطه تنظیم** گویند. برای اصلاح این مشکل از کنترل کننده های PID اصلاح شده استفاده می شود:

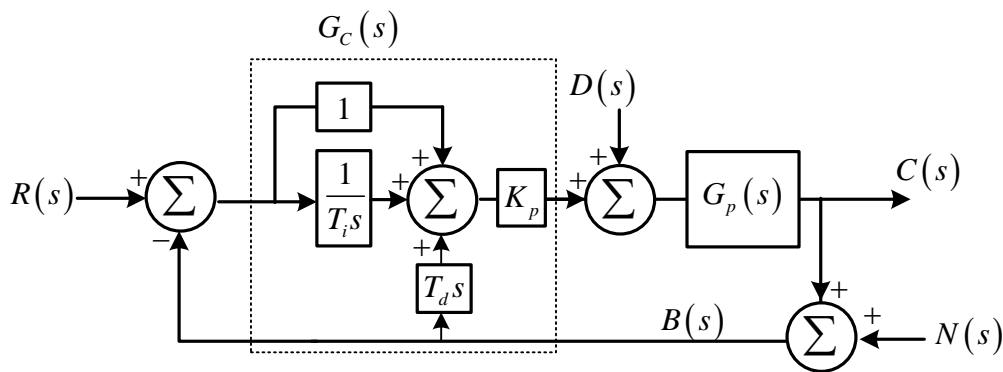




شکل ۲-۹: سیستم شامل کنترل کننده PID با حضور اغتشاش و نویز

۲-۷-۱- کنترل PI-D

برای اجتناب از پدیده لگد نقطه تنظیم می‌توانیم عمل مشتق را تنها در مسیر فیدبک بکار گیریم تا تنها از سیگنال فیدبک مشتق گرفته شود و نه از ورودی مرجع.



شکل ۲-۱۰: سیستم شامل کنترل کننده PI-D با حضور اغتشاش و نویز

با توجه به شکل ۲-۱۰ می‌بینیم که سیگنال خروجی کنترل کننده $u_c(t)$ عبارت است از:

$$U_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) R(s) - K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) B(s)$$

اگر اغتشاش و نویز وجود نداشته باشد، تابع تبدیل حلقه بسته سیستم دارای کنترل PID و سیستم دارای کنترل PI-D به ترتیب عبارتند از:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s) \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)}$$

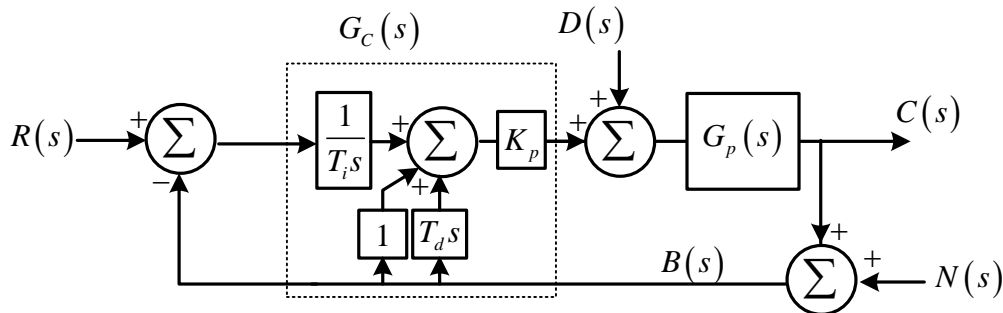
تابع تبدیل حلقه بسته سیستم دارای کنترل PID:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s) \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)}$$

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم دارای کنترل PI-D:

۲-۷-۲ - کنترل I-PD

باز حالتی را در نظر بگیرید که ورودی مرجع تابع پله است. در هر دو طرح کنترل و کنترل PI-D سیگنال $u_c(t)$ یک تابع پله دارد. در بسیاری از موارد تغییر پله‌ای در سیگنال کار اندازه می‌تواند نامطلوب باشد؛ بنابراین انتقال عمل کنترل تناسبی و مشتق به مسیر فیدبک می‌تواند راه گشا باشد.



شکل ۲-۱۱: سیستم شامل کنترلر I-PD با حضور اغتشاش و نویز

با توجه به شکل ۲-۱۱ می‌بینیم که سیگنال خروجی کنترل کننده $u_c(t)$ عبارت است از:

$$U_c(s) = K_p \left(\frac{1}{T_i s} \right) R(s) - K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) B(s)$$

اگر اغتشاش و نویز وجود نداشته باشد، تابع تبدیل سیستم دارای کنترل I-PD برابر است با:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(\frac{1}{T_i s} \right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s) \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)}$$

کنترل کننده I-PD کوچکترین پهنای باند را نسبت به دو نوع دیگر دارد.

بخش سوم:

پیاده سازی کنترل کننده های حوزه زمان

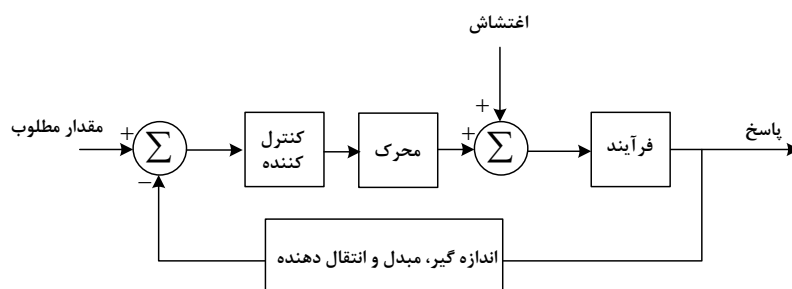
بخش سوم: طراحی و پیاده‌سازی کنترل‌کننده‌های حوزه زمان

۳-۱- مقدمه

بهره‌برداری مطلوب از واحدهای صنعتی از نظر فنی و اقتصادی بدون استفاده از سیستم‌های کنترل اتوماتیک تقریباً عملی غیرممکن هست و از طرفی عدم توجه به مسائل ناشی از تنظیم نادرست کنترل‌کننده‌ها ضررهای جبران‌ناپذیری را به سیستم وارد می‌کند. کنترل دقیق فرآیندهای صنعتی برای بهبود راندمان و افزایش طول عمر مستلزم دو مسئله عمده زیر هست:

- ۱- طراحی سیستم کنترل مناسب برای فرآیند مربوطه
- ۲- تنظیم سیستم کنترل مناسب برای فرآیند مربوطه

تنظیم بهینه کنترل‌کننده‌ها در بهبود عملکرد و بهره‌برداری مطمئن و اقتصادی تر سیستم‌های صنعتی نقشی اساسی بازی می‌کند. مرور زمان و تغییر پارامترهای سیستم، کنترل‌کننده‌ها را از تنظیم بهینه خارج می‌کند. تنظیم مجدد این کنترل‌کننده‌ها هر از چند گاهی لازم هست. کنترل‌کننده خودکار با مقایسه مقدار واقعی خروجی پروسه با مقدار مطلوب اختلاف آنها را تعیین و سیگنال کنترلی تولید می‌کند که خطا را تا صفر یا مقدار کوچکی کاهش می‌دهد. تولید سیگنال کنترل به‌وسیله کنترل‌کننده خودکار را عمل کنترل می‌نامند. به شکل زیر توجه کنید:



شکل ۳-۱: اجزا تشکیل‌دهنده یک سیستم کنترلی حلقه بسته

اکنون که تحلیل یک سیستم با استفاده از روش‌های حوزه زمانی و فرکانسی را آموختیم، برای دستیابی به یک مقدار مطلوب یعنی پاسخی که دارای مشخصات عملکردی مطلوب باشد، نیاز به آموختن روش‌های طراحی کنترل‌کننده مناسب برای یک سیستم داریم. مشخصات عملکردی مطلوب به چند دسته تقسیم می‌شوند:

۱. مشخصات مربوط به پاسخ پله (درصد فراجهدش، زمان صعود، زمان مستقر شدن)
۲. مشخصات کلی سیستم (پایداری نسبی، خطای حالت دائمی، حساسیت کم نسبت به پارامترهای پاسخ گذرا)
۳. مشخصات حوزه فرکانسی (حد بهره، حد فاز، پهنای باند)

برای دسترسی به این مشخصات، باید یک کنترل‌کننده مناسب برای سیستم طراحی گردد. طراحی کنترل‌کننده عموماً به دو روش انجام می‌شود:

- ۱- روش طراحی در حوزه زمان (تعیین محل قطب‌ها به روش مکان ریشه‌ها)
- ۲- روش طراحی در حوزه فرکانس (نایکوئیست، بودی و زیگلر نیکولز)

کنترل‌کننده در دیگرام بلوکی یا به‌صورت سری با دستگاه هست و یا در شاخه فیدبک قرار دارد. کنترل‌کننده حالت اول را کنترل‌کننده سری و حالت دوم را کنترل‌کننده پس‌خوردی می‌نامند. در این فصل پیاده‌سازی کنترل‌کننده‌های متداول حوزه زمان را بیان نموده و سپس در فصل‌های آتی به روش‌های طراحی آنها می‌پردازیم.

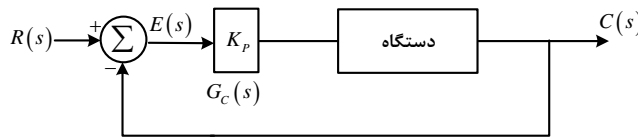
۲-۳- پیاده سازی انواع کنترل کننده های متداول در حوزه زمان:

۱-۲-۳- کنترل کننده تناسبی (P):

در کنترل کننده تناسبی^۱ رابطه بین خروجی کنترل کننده و سیگنال خطا یک بهره ثابت هست. کنترل کننده تناسبی در واقع یک تقویت کننده با بهره قابل تنظیم است.

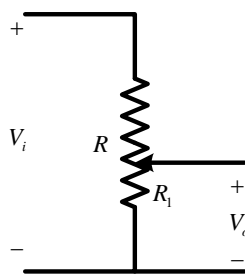
$$G_C(s) = K_p$$

۱-۳



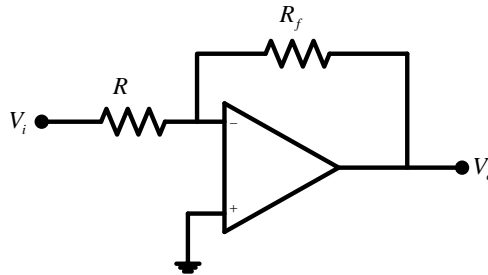
شکل ۲-۳: کنترل کننده تناسبی

شکل های زیر پیاده سازی^۲ کنترل کننده تناسبی را به روش های مختلف نشان می دهد^۳. برای بهره های بزرگ تر از واحد از مدار شکل الف استفاده می شود. برای از بین بردن علامت منفی بهره می توان از دو مدار الف به طور سری که یکی از آنها بهره واحد دارد استفاده نمود. برای پیاده سازی بهره های کوچک تر از واحد از مدار شکل ب استفاده می گردد.



ب) مدار تقسیم ولتاژ

$$G_C(s) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{R_1}{R}$$



الف) مدار تقویت کننده

$$G_C(s) = \frac{V_o}{V_s} = -\frac{R_f}{R}$$

^۱ Proportional Implementation

^۲ جدول های استاندارد برای پیاده سازی الکترونیکی کنترل کننده ها:

1.0	10	100	1.0K	10K	100K	1.0M
1.1	11	110	1.1K	11K	110K	1.1M
1.2	12	120	1.2K	12K	120K	1.2M
1.3	13	130	1.3K	13K	130K	1.3M
1.5	15	150	1.5K	15K	150K	1.5M
1.6	16	160	1.6K	16K	160K	1.6M
1.8	18	180	1.8K	18K	180K	1.8M
2.0	20	200	2.0K	20K	200K	2.0M
2.2	22	220	2.2K	22K	220K	2.2M
2.4	24	240	2.4K	24K	240K	2.4M
2.7	27	270	2.7K	27K	270K	2.7M
3.0	30	300	3.0K	30K	300K	3.0M
3.3	33	330	3.3K	33K	330K	3.3M
3.6	36	360	3.6K	36K	360K	3.6M
3.9	39	390	3.9K	39K	390K	3.9M
4.3	43	430	4.3K	43K	430K	4.3M
4.7	47	470	4.7K	47K	470K	4.7M
5.1	51	510	5.1K	51K	510K	5.1M
5.6	56	560	5.6K	56K	560K	5.6M
6.2	62	620	6.2K	62K	620K	6.2M
6.8	68	680	6.8K	68K	680K	6.8M
7.5	75	750	7.5K	75K	750K	7.5M
8.2	82	820	8.2K	82K	820K	8.2M
9.1	91	910	9.1K	91K	910K	9.1M

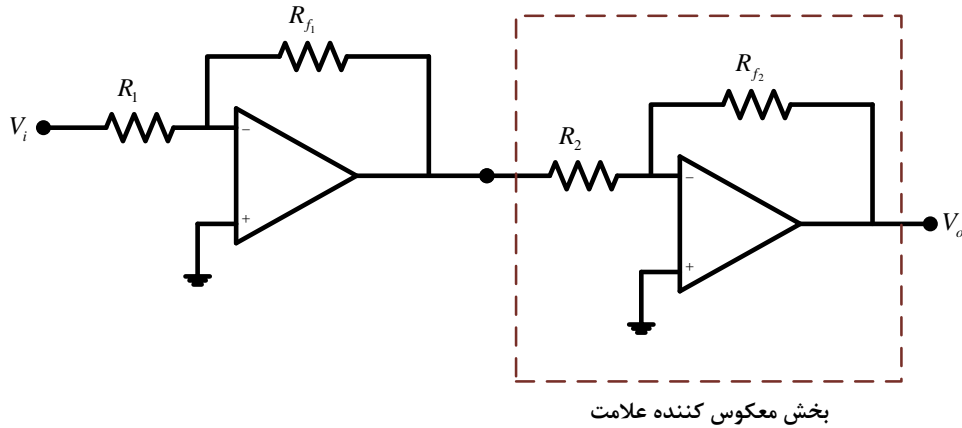
10pF	100pF	1000pF	.010μF	.10μF	1.0μF	10μF
12pF	120pF	1200pF	.012μF	.12μF	1.2μF	12μF
15pF	150pF	1500pF	.015μF	.15μF	1.5μF	15μF
18pF	180pF	1800pF	.018μF	.18μF	1.8μF	18μF
22pF	220pF	2200pF	.022μF	.22μF	2.2μF	22μF
27pF	270pF	2700pF	.027μF	.27μF	2.7μF	27μF
33pF	330pF	3300pF	.033μF	.33μF	3.3μF	33μF
39pF	390pF	3900pF	.039μF	.39μF	3.9μF	39μF
47pF	470pF	4700pF	.047μF	.47μF	4.7μF	47μF
56pF	560pF	5600pF	.056μF	.56μF	5.6μF	56μF
68pF	680pF	6800pF	.068μF	.68μF	6.8μF	68μF
82pF	820pF	8200pF	.082μF	.82μF	8.2μF	82μF

Name	deca-	hecto-	kilo-	mega-	giga-	tera-	peta-	exa-	zetta-	yotta-
Multiples Prefix	da	h	k	M	G	T	P	E	Z	Y
Factor	10 ¹	10 ²	10 ³	10 ⁶	10 ⁹	10 ¹²	10 ¹⁵	10 ¹⁸	10 ²¹	10 ²⁴
Name	deci-	centi-	milli-	micro-	nano-	pico-	femto-	atto-	zepto-	yocto-
Fractions Prefix	d	c	m	μ	n	p	f	a	z	y
Factor	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻⁶	10 ⁻⁹	10 ⁻¹²	10 ⁻¹⁵	10 ⁻¹⁸	10 ⁻²¹	10 ⁻²⁴

شکل ۳-۳: چند نمونه از پیاده‌سازی کنترل کننده تناسبی

مثال ۱-۳

کنترل کننده P با دو بهره الف) $k_p = 100$ و ب) $k_p = 0.5$ را به صورت مداری پیاده‌سازی نمایید:
الف) برای به دست آوردن $k_p = 100$ از مدار شکل ۳-۳ الف استفاده می‌کنیم:



مدار طبقه اول بهره 100- و مدار طبقه دوم بهره 1- را به وجود می‌آورد. بدین منظور با استفاده از جدول مقاومت های استاندارد، یک روش پیاده‌سازی به صورت زیر هست:

$$G_C(s) = \frac{V_o}{V_i} = \left(-\frac{R_{f1}}{R_1} \right) \left(-\frac{R_{f2}}{R_2} \right) \rightarrow \begin{cases} \frac{R_{f1}}{R_1} = 100 \rightarrow \begin{cases} R_{f1} = 100\Omega \\ R_1 = 1\Omega \end{cases} \\ \frac{R_{f2}}{R_2} = 1 \rightarrow \begin{cases} R_{f2} = 1\Omega \\ R_2 = 1\Omega \end{cases} \end{cases}$$

ب) برای به دست آوردن $k_p = 0.5$ از مدار شکل ۳-۳ ب استفاده می‌کنیم:

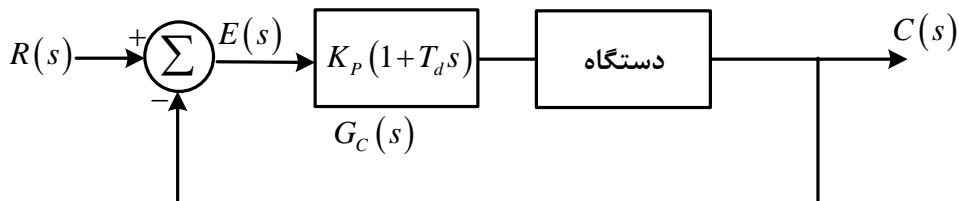
$$G_C(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R_1}{R} = 0.5 \rightarrow \begin{cases} R_1 = 1\Omega \\ R = 2\Omega \end{cases}$$

۳-۲-۲- کنترل کننده تناسبی - مشتق گیر (PD):

در کنترل کننده تناسبی - مشتق گیر^۱ رابطه بین خروجی کنترل کننده و سیگنال خطا یک بهره ثابت و یک مشتق گیر هست.

$$G_C(s) = K_p(1 + T_d s)$$

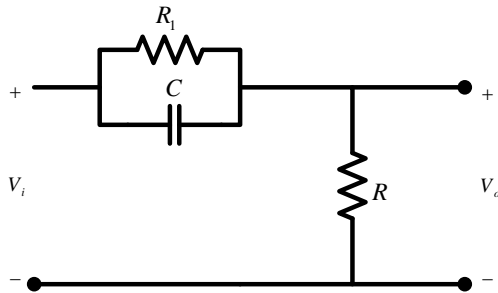
۲-۳



شکل ۳-۴: کنترل کننده تناسبی - مشتق گیر

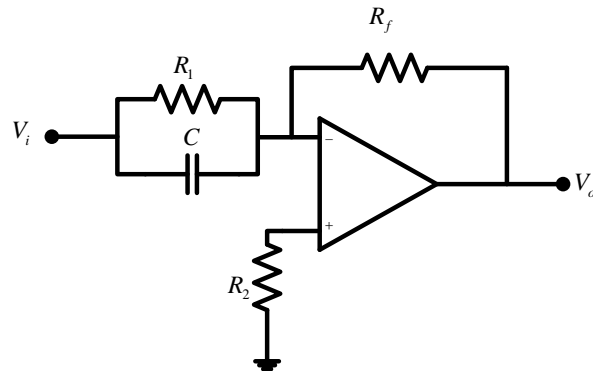
شکل های زیر پیاده‌سازی کنترل کننده تناسبی - مشتق گیر را به روش های مختلف نشان می‌دهد:

^۱ Proportional-Derivative



ب) مدار RC

$$G_C(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R_1(1+RCs)}{R+R_1(1+RCs)} \approx \frac{R_1}{R}(1+RCs) \quad R \gg R_1$$



الف) مدار تقویت کننده

$$G_C(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_{f1}}{R_1}(1+R_1Cs)$$

شکل ۳-۵: چند نمونه از پیاده سازی کنترل کننده تناسبی-مشتق گیر

مثال ۲-۳

کنترل کننده PD زیر را به دو روش شکل ۳-۵ الف و ب پیاده سازی نمایید:

$$G_C(s) = 0.5(1+12s)$$

الف) برای پیاده سازی کنترل کننده با مدار شکل ۳-۵ الف با توجه به علامت منفی رابطه، یک معکوس کننده علامت به مدار طبقه اول تابع $-0.5(1+12s)$ و مدار طبقه دوم بهره -1 را به وجود می آورد. بدین منظور با استفاده از جدول مقاومت و خازن های استاندارد، یک روش پیاده سازی به صورت زیر هست:

$$G_C(s) = \frac{V_o}{V_s} = \left(-\frac{R_{f1}}{R_1}(1+R_1Cs) \right) \left(-\frac{R_{f2}}{R_2} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{R_{f1}}{R_1} = 0.5 \rightarrow \begin{cases} R_{f1} = 1.8M\Omega \\ R_1 = 3.8M\Omega \end{cases} \\ R_1C = 12 \rightarrow \begin{cases} R_1 = 3.8M\Omega \\ C = 3.3\mu F \end{cases} \\ \frac{R_{f2}}{R_2} = 1 \rightarrow \begin{cases} R_{f2} = 1M\Omega \\ R_2 = 1M\Omega \end{cases} \end{cases}$$

ب) برای استفاده از این نوع مدار باید توجه داشته باشیم که $R \gg R_1$ هست.

$$G_C(s) = \frac{V_o}{V_s} \approx \frac{R_1}{R}(1+RCs) = 0.5(1+12s)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{R_1}{R} = 0.5 \\ R \gg R_1 \end{cases} \rightarrow \text{تناقض دارد}$$

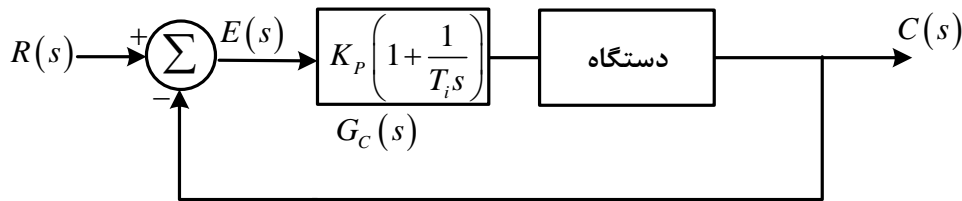
بنابراین این پیاده‌سازی امکان‌پذیر نمی‌باشد.

۳-۲-۳- کنترل‌کننده تناسبی-انتگرال گیر (PI):

در کنترل‌کننده تناسبی-انتگرال گیر^۱ رابطه بین خروجی کنترل‌کننده و سیگنال خطا یک بهره ثابت و یک انتگرال گیر هست.

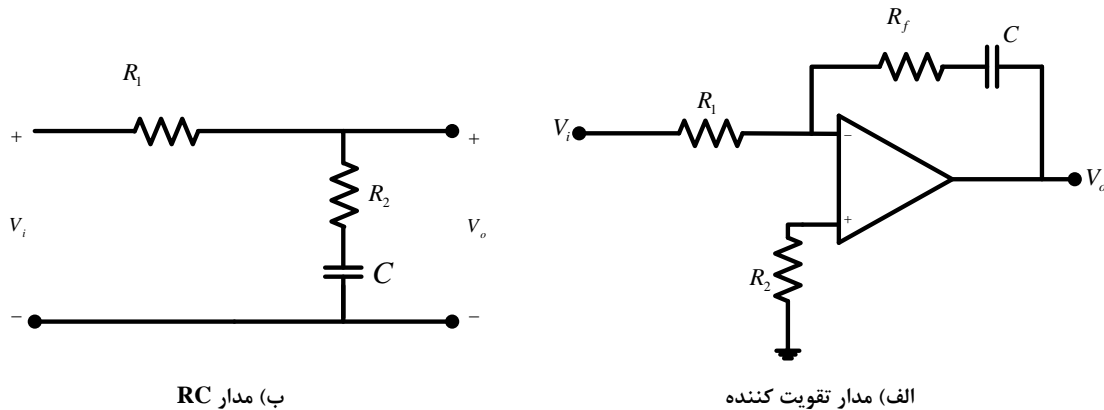
$$G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

۳-۳



شکل ۳-۶: کنترل‌کننده تناسبی-انتگرال گیر

شکل‌های زیر پیاده‌سازی کنترل‌کننده تناسبی-انتگرال گیر را به روش‌های مختلف نشان می‌دهد:



(ب) مدار RC

(الف) مدار تقویت‌کننده

$$G_C(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1 + R_2 C s}{1 + (R_1 C + R_2 C) s} \approx \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{1}{(R_1 + R_2) C s}$$

$$G_C(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_f}{R_1} \left(1 + \frac{1}{R_f C s} \right)$$

شکل ۳-۷: چند نمونه از پیاده‌سازی کنترل‌کننده تناسبی-انتگرال گیر

مثال ۳-۳

کنترل‌کننده PI زیر را به دو روش شکل ۳-۷ الف و ب پیاده‌سازی نمایید:

$$G_C(s) = 0.084 + \frac{1.36}{s}$$

(الف) برای پیاده‌سازی کنترل‌کننده با مدار شکل ۳-۷ الف با توجه به علامت منفی رابطه، یک معکوس‌کننده علامت به صورت سری نیز باید به مدار اضافه گردد:

$$G_C(s) = 0.084 \left(1 + \frac{16.2}{s} \right)$$

^۱ Proportional-Integrator

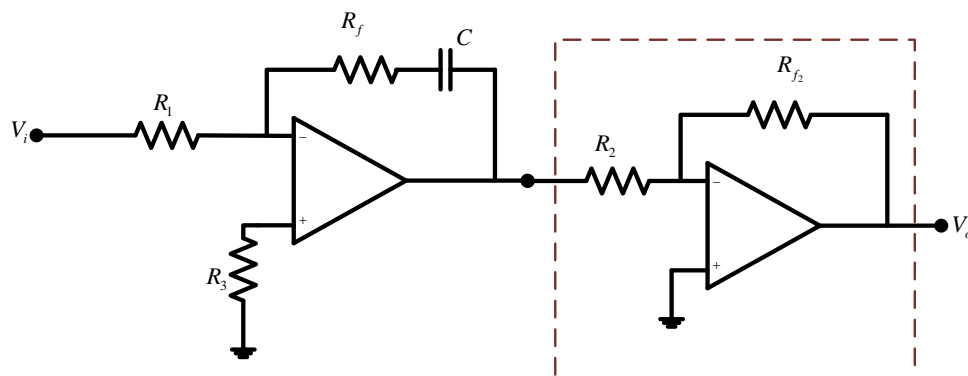
مدار طبقه اول تابع $-0.084 \left(1 + \frac{16.2}{s}\right)$ و مدار طبقه دوم بهره 1- را به وجود می آورد. بدین منظور با استفاده از جدول مقاومت و خازن های استاندارد، یک روش پیاده سازی به صورت زیر هست:

$$G_C(s) = \frac{V_o}{V_s} = \left(-\frac{R_{f1}}{R_1} \left(1 + \frac{1}{R_{f1} C s} \right) \right) \left(-\frac{R_{f2}}{R_2} \right)$$

$$\frac{R_{f1}}{R_1} = 0.084 \rightarrow \begin{cases} R_{f1} = 62k\Omega \\ R_1 = \frac{62000}{0.084} ; 7.4 \times 10^5 ; 750k\Omega \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{R_{f1} C} \approx 16.2 \rightarrow R_{f1} C = 0.0617 ; 6.2 \times 10^{-2} \rightarrow \begin{cases} R_{f1} = 62k\Omega \\ C = 1\mu F \end{cases}$$

$$\frac{R_{f2}}{R_2} = 1 \rightarrow \begin{cases} R_{f2} = 100k\Omega \\ R_2 = 100k\Omega \end{cases}$$



بخش معکوس کننده علامت

(ب) برای استفاده از این نوع مدار داریم:

$$G_C(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{1}{(R_1 + R_2)Cs} = 0.084 + \frac{1.36}{s}$$

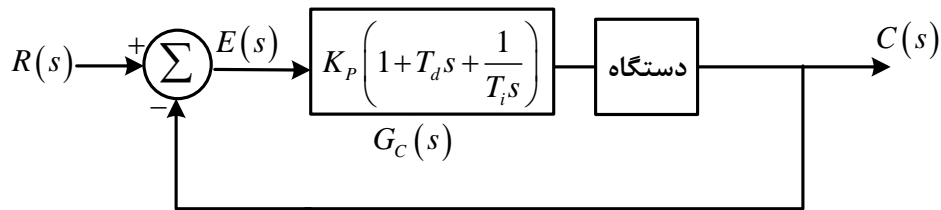
$$\rightarrow \begin{cases} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.084 \rightarrow 0.084(R_1 + R_2) = R_2 \rightarrow 0.084R_1 = 0.916R_2 \rightarrow \frac{R_1}{R_2} ; 11 \rightarrow \begin{cases} R_1 = 10k\Omega \\ R_2 = 110k\Omega \end{cases} \\ \frac{1}{(R_1 + R_2)C} = 1.36 \rightarrow (R_1 + R_2)C = 0.75 \rightarrow 120000C = 0.75 \rightarrow C = 6.25 \times 10^{-6} ; 6.8\mu F \end{cases}$$

۳-۲-۴- کنترل کننده تناسبی-مشتق گیر - انتگرال گیر (PID):

در کنترل کننده تناسبی - مشتق گیر - انتگرال گیر رابطه بین خروجی کنترل کننده و سیگنال خطا یک بهره ثابت، یک مشتق گیر و یک انتگرال گیر هست.

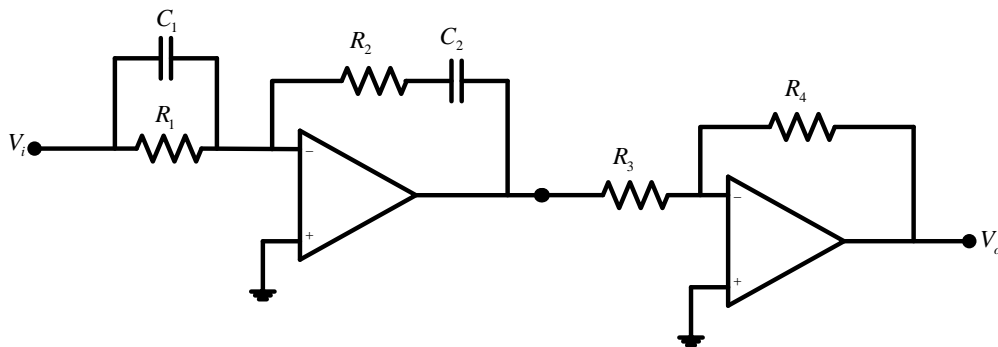
$$G_C(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

۴-۳



شکل ۳-۸: کنترل کننده تناسبی-مشتق گیر-انتگرال گیر

شکل های زیر پیاده سازی کنترل کننده تناسبی - مشتق گیر - انتگرال گیر را با مدار تقویت کننده آپ امپی نشان می دهد:



$$G_c(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R_4(R_1C_1 + R_2C_2)}{R_3R_1C_2} \left(1 + \frac{R_1C_1R_2C_2}{R_1C_1 + R_2C_2}s + \frac{1}{(R_1C_1 + R_2C_2)s} \right)$$

شکل ۳-۹: پیاده سازی کنترل کننده تناسبی-مشتق گیر-انتگرال گیر

مثال ۳-۴

کنترل کننده PID زیر را به روش شکل ۳-۹ پیاده سازی نمایید:

$$G_c(s) = 30.3215 \frac{(s + 0.65)^2}{s}$$

ابتدا تابع تبدیل کنترل کننده را بسط می دهیم:

$$G_c(s) = 30.3215 \frac{(s + 0.65)^2}{s} = 39.42 \left(1 + 0.7692s + \frac{1}{3.077s} \right)$$

بنابراین داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R_4(R_1C_1 + R_2C_2)}{R_3R_1C_2} = 39.42 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R_1C_1R_2C_2}{R_1C_1 + R_2C_2} = 0.7692 \end{array} \right.$$

$$R_1C_1 + R_2C_2 = 3.077$$

$$R_1C_1 + R_2C_2 = 3.077 \rightarrow \frac{R_1C_1R_2C_2}{R_1C_1 + R_2C_2} = \frac{R_1C_1R_2C_2}{3.077} = 0.7692 \rightarrow R_1C_1R_2C_2 = 2.3668$$

برای حل بهتر مسئله فرض می کنیم:

$$C_1 = C_2 = 10\mu F$$

بنابراین

$$\begin{cases} 10 \times 10^{-6} (R_1 + R_2) = 3.077 \\ 100 \times 10^{-12} R_1 R_2 = 2.3668 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_1 + R_2 = 3.077 \times 10^5 \\ R_1 R_2 = 2.3668 \times 10^{10} \end{cases} \rightarrow R_1 = \frac{2.3668 \times 10^{10}}{R_2}$$

$$\rightarrow \frac{2.3668 \times 10^{10}}{R_2} + R_2 = 3.077 \times 10^5 \rightarrow R_2^2 - 3.077 \times 10^5 R_2 + 2.3668 \times 10^{10} = 0 \rightarrow \begin{cases} R_2 = 152 \times 10^3 \\ R_2 = 155 \times 10^3 \end{cases}$$

با انتخاب $R_2 = 150 \times 10^3 \Omega = 150k\Omega$ داریم:

$$R_1 = \frac{2.3668 \times 10^{10}}{150 \times 10^3}; 157 \times 10^3; 160k\Omega$$

اکنون به سراغ شرط آخر می‌رویم:

$$\frac{R_4 (R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2} = 39.42 \rightarrow \frac{R_4 (R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2} = \frac{R_4}{R_3} \frac{(160 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} + 150 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6})}{160 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6}} = 39.42$$

$$\rightarrow \frac{R_4}{R_3}; 20.35 \rightarrow R_4 = 20.35 R_3 \rightarrow \begin{cases} R_3 = 10k\Omega \\ R_4 = 200k\Omega \end{cases}$$

