بسمه تـ

جزوه

امار احتمال مهندسی

دانشگاه

علم و صنعت

استاد

دکتر ۰اری

آمار و احتمالات مهندسی :

احتمال :

آزمایش تصادفی : هر عملی که نتایج آن بطور قطع مشخص نباشد را آزمایش تصادفی گوییم .

فضای نمونه‌ای : مجموعه نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای گوییم ... که شامل همه حالات ممکن یک آزمایش تصادفی است . و با Ω یا S نشان می‌دهیم.

پیشامد : زیرمجموعه‌هایی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد گوییم .

انواع پیشامد : ۱) هر پیشامد تک عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده می‌گوییم .

$A_i = \{a_i\}$

۲) زیرمجموعه‌ی تهی از فضای نمونه‌ای را پیشامد غیرممکن گوییم .

۳) زیرمجموعه‌ی کل فضای نمونه‌ای را پیشامد حتمی گوییم .

۴) همه زیرمجموعه‌های غیر از ۳ حالت قبل را پیشامد مرکب گوییم .

* پیشامدی را غیرممکن گوییم هرگاه در شرایط معین رخ ندهد.
* پیشامدی را حتمی گوییم هرگاه در شرایط معین رخ دهد.
* پیشامدهایی که تحت شرایط معین رخ می‌دهند یا نمی‌دهند را پیشامدهای تصادفی گویند .

انواع فضای نمونه‌ای :

۱) فضای نمونه‌ای شمارا و متناهی .... اعداد طبیعی بین ۱ تا ۱۰۰

۲) فضای نمونه‌ای شمارا و نامتناهی .... اعداد طبیعی

۳) فضاهای نمونه‌ای ناشمارا

مانند اعداد حقیقی بین صفر و یک $\Omega = \{x ; x \in (a, b), a, b \in R\}$

نامتناهی‌ها لزوماً شمارا نیستند

توجه : کلیه علامت نظریه‌ی مجموعه‌ها درباره‌ی پیشامدهای حاصل از یک فضای نمونه‌ای نیز صادق است .

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند:

$A\cup B$: A یا B رخ دهد

$A\cap B$: هر دوی A و B رخ دهند

$A\Delta B$: فقط یکی از A و B رخ دهد

$A-B$: A رخ دهد ولی B رخ ندهد

$\bar{A}$: A رخ ندهد

محاسبهٔ احتمال در فضای نمونه‌ای که اعضای آن هم‌احتمال هستند:

اگر A پیشامدی از Ω باشد، آنگاه:

$$P(A)=\frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای}}$$

اگر $n(A)$, $n(S)$ شمارا باشند می‌توان از این نسبت استفاده کرد.

اگر $A=\emptyset \Rightarrow P(A)=0$ پیشامد غیرممکن

اگر $A=\Omega \Rightarrow P(A)=1$ پیشامد حتمی

اگر $A\neq\emptyset,\ A\neq\Omega \Rightarrow P(A)=\frac{k}{n},\ 0<k<n$

$$\Rightarrow \forall A\in\Omega \longrightarrow \boxed{0\leq P(A)\leq 1}$$

مثال) از مجموعهٔ اعداد طبیعی بین ۱ تا ۲۰، احتمال انتخاب عددی که مضرب ۲ باشد چقدر است؟

$$n(S)=20\ ,\ n(A)=\left[\frac{20}{2}\right]=10 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}.$$

۸ــ یادآوری از روش‌های شمارش:

۱) اصل ضرب: اگر آزمایشی به m طریق و آزمایش بعدی به n طریق رخ دهد، دو آزمایش با هم به $m\times n$ طریق رخ خواهند داد.

(تعمیم این تعریف برای k آزمایش امکان‌پذیر است. $(n_1\times n_2\times\cdots n_k)$

مثال) یک سکهٔ معمولی، یک تاس معمولی، هرم ۴ وجهی و مجدداً تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش را بیابید.

$$n(S)=2\times6\times4\times6=288$$

هر عضو از فضای نمونه‌ای یک ۴تایی است.

۲) اگر مجموعه‌ای دارای n عضو باشد، تعداد گروه‌های r تایی که می‌توان انتخاب کرد.

که به سه حالت زیر است:

الف) انتخاب با جایگذاری و با ترتیب باشد

یعنی هر عضوی که انتخاب می‌کنیم دوباره به مجموعه باز می‌گردانیم و ترتیب افراد مهم است یعنی اینکه اگر عضوی از مجموعه در بار اول انتخاب شود یا انتخاب او در بار دوم متفاوت است.

پس انتخاب هر عضو n حالت دارد:

* انتخاب با ترتیب یعنی اینکه دو حالت abc و acb متفاوتند. یعنی جایگشت این r تا از هر حالات حل می‌شود. n^r ، $\underbrace{n \times n \times n \cdots \times n}_{r}$: تعداد

که این مورد بیشتر برای کدها بکار می‌رود.

مثلاً تعداد حالات نوشتن شماره‌های ۵ رقمی با تکرار از مجموعه‌ی $\{1, 2, \ldots, 9\}$ برابر است با: 9^5

ب) انتخاب بدون جایگذاری و با ترتیب:

در این حالت با انتخاب هر فرد او را از مجموعه‌ی کل کم می‌کنیم پس نفر دوم به $(n-1)$ حالت انتخاب می‌شود. در ضمن ترتیب افراد مهم است. (مثلاً از قبل تعیین شده که نفر اول مدیر، نفر دوم کارمند و ... هستند) بنابراین اگر علی در بار اول انتخاب شود یا اینکه وی در بار دوم انتخاب شود متمایز است.

جواب: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots (n-r+1) = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

(تعداد جایگشت r تا از n تا با ترتیب)

اگر $r = n \Rightarrow \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

نکته: تعداد حالات چیدن n نفر در یک صف (جایگشت n نفر با ترتیب)

ج) انتخاب بدون جایگذاری و بدون ترتیب:

بدون جایگذاری و با ترتیب: $\frac{n!}{(n-r)!}$

حال ترتیب مهم نیست یعنی جایگشت r نفر مهم نیست پس از کل حالات جایگشت این r تا را جدا می‌کنیم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

ترکیب

ضریب دوجمله‌ای

ح) انتخاب با جایگذاری و بدون ترتیب: $\binom{n+r-1}{r-1}$

ضریب دو جمله‌ای منفی $\longrightarrow (1+x)^{-r}$

$x_1+x_2+\dots+x_r=n \longrightarrow$ تعداد جواب‌های صحیح نامنفی $\binom{n+r-1}{r-1}$

* بدون ترتیب یعنی اینکه حالت abc با حالت bac یکی است.

تعریف: اگر آزمایشی دارای k حالت باشد و n مرتبه بطور مستقل انجام بپذیرد،

آنگاه فضای نمونه‌ای آزمایش k^n حالت دارد و هر حالت n تایی دارد.

مثال) سکه‌ای را ۵۰ بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای:

$k=2,\ n=50 \Rightarrow \Omega = 2^{50}$

هر حالت از فضای نمونه‌ای ۵۰ عضو دارد. برای هر بار پرتاب سکه ۲ حالت داریم.

$\Rightarrow \Omega = 2\times 2\times \dots \times 2 = 2^{50}$

$\binom{50}{2}$: تعداد اعضایی که دو بار خط بیاید

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$$

مثال) سکه‌ای را ۳ بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای را نوشته و احتمال اینکه سکه دو بار شیر بیاید را بیابید.

$\Omega = \{HHH, HHT, HTT, TTT, THH, TTH, THT\}$

$\underset{\text{تعداد حالات}}{}\ \underset{\text{اولی}}{2} \times \underset{\text{دومی}}{2} \times \underset{\text{سومی}}{2} = 2^3 \qquad n(\Omega)=2^3,\ n(A)=3 \Rightarrow P(A)=\frac{3}{8}$

حال اگر سکه‌ای را n بار پرتاب کنیم احتمال اینکه k بار شیر بیاید را بیابید.

با توجه به احتمال دو جمله‌ای

$P(A) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$

ابتدا k محل را به $\binom{n}{k}$ طریق انتخاب کرده که هر کدام احتمال $\frac{1}{2}$ دارد. $\binom{n}{k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k$

و بقیه محل‌ها برای آمدن خط باید با احتمال $\frac{1}{2}$ باشند که $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$ حالت است.

همه این‌ها طبق اصل ضرب انجام گرفته است.

روشی که تا اینجا برای محاسبه احتمال بکار برده شد، روش فراوانی نسبی احتمال بوده است.
آیا روش دیگر، روش جدی این فراوانی نسبی است:
اگر آزمایشی دارای درجات مطلوب و نامطلوب باشد (a, b)

n_a : تعداد حالات مطلوب

$$\Rightarrow p(\{a\}) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_a}{N}$$

با محاسبه احتمال دریافتیم که احتمال اینکه در ۸ پرتاب سکه ۴ پرتاب خط باشد $\frac{1}{2}$ است:

* آیا این بدین معنی است که اگر ۸ بار سکه را بیندازیم ۴ بار حتماً خط آید؟ خیر. ممکن است تمام دفعات شیر بیاید.

$$\binom{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}$$

اما اگر تعداد پرتاب‌ها را خیلی زیاد کنیم و تعداد N که $N \to \infty$ آنگاه تعداد حالات خط آمدن به $\frac{N}{2}$ بسیار نزدیک خواهد بود.

* روش دوم: روش کلاسیک احتمال

تعریف: فرض کنید Ω فضای نمونه‌ای متناهی و هم‌شانس باشد. اگر E پیشامدی از Ω باشد، آنگاه احتمال پیشامد E به صورت زیر است:

$$P(E) = \frac{\text{تعداد حالات مساعد برای } E}{\text{تعداد کل حالات آزمایش}}$$

مثال) فرض کنید در یک کلاس ۸۰ نفر ثبت نام کرده‌اند. ۱۵ نفر رشته A، ۴۵ نفر رشته B و ۲۰ نفر رشته C هستند. ۸ نفر به تصادف و بدون جایگذاری از کلاس انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه ۳ نفر رشته A انتخاب شود چقدر است؟

$$\Omega = \left\{\binom{80}{8}\right\} \qquad E = \{\text{پیشامد انتخاب شدن ۳ نفر از رشته } A\} = \left\{\binom{15}{3}\right\}$$

حالات مساعد

$$\Rightarrow p(E) = \frac{\binom{15}{3}\binom{65}{5}}{\binom{80}{8}} \Leftarrow \text{حالات مساعد}$$

ابتدا ۱۵ نفر رشته A را کنار گذاشته، از این ۱۵ نفر ۳ نفر را جدا کرده، از ۶۵ نفر باقیمانده ۵ نفر انتخاب می‌کنیم. این تعداد حالات دو به دو مرتب به ۸ تایی هستند که حتماً ۳ نفر رشته A و بقیه غیر رشته A است.

۴) احتمال آنکه از رشته A، ۲ نفر و از رشته B، ۳ نفر و از رشته C، ۱ نفر انتخاب شود چقدر است؟

$$P(E_1)=\frac{\binom{15}{2}\binom{10}{3}\binom{20}{1}\binom{35}{2}}{\binom{80}{8}}$$

مثال) یک تاس معمولی همگن را ۳ بار پرتاب می‌کنیم: ۱) احتمال آنکه نتایج هر سه پرتاب یکسان باشد چقدر است؟

$$\Omega=\{(i,j,k) : i,j,k=1,2,\dots,6\} \Rightarrow n(\Omega)=6^3$$

$$E=\{(i,i,i) ; i=1,2,\dots,6\} \Rightarrow n(E)=6$$

$$\Rightarrow P(E)=\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$$

۲) احتمال آنکه نتایج ۳ پرتاب نامساوی باشند.

ترتیب بدون تکرار

$$P(E_1)=\frac{(6)_3}{6^3}=\frac{6\times5\times4}{6^3}=\frac{20}{36}$$

روش ۲:

اگر اولی عدد ۶ شد دومی عددی غیر از ۶

پس پنج حالت دارد مثلاً ۱ و سومی عددی

غیر از ۶ و ۱ است پس ۴ حالت دارد.

$$1\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}$$

احتمال تاس ۱ — احتمال تاس ۲ — احتمال تاس ۳

۳) احتمال آنکه نتایج دو پرتاب یکسان باشد و نامساوی با پرتاب سوم؟

$$P(E_2)=1-(P(E_1)+P(E))=\frac{9}{6^3}=\frac{15}{36}$$

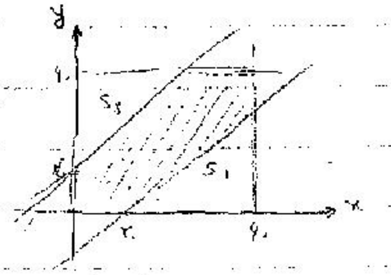
Ω: | E | E_1 | E_2 |

اشاره: ۲ موقعیت از ۳ مکان را برای یکسان بودن اعداد انتخاب می‌کنیم

روش ۲: یک تاس هر عددی می‌تواند با احتمال $\frac{6}{6}$ بیاید، تاس دوم هم باید با اولی برابر شود پس با احتمال $\frac{1}{6}$ (فقط یک حالت دارد) و حالت سوم غیر از آن دو حالت باشد که پنج حالت دارد.

$$P(E_2)=\binom{3}{1}\times\frac{6}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{15}{36}$$

مثال) دو نفر A و B قرار گذاشتند بین ساعت ۱۱ و ۱۲ در یک مکان برای با هم ملاقات کنند ولی هر کدام زودتر به محل برسد، حداکثر ۲۰ دقیقه منتظر دیگری باشد، اگر دیگری نیامد محل را ترک کند. احتمال ملاقات دو نفر را بیابید:



زمان رسیدن A به مکان: x : $0\le x\le 60$

زمان رسیدن B به مکان: y : $0\le y\le 60$

احتمال ملاقات: $|x-y|\le 20$

$\Rightarrow -20\le x-y\le 20$

$$\Rightarrow p=\frac{S_T-(S_1+S_2)}{S_T}=\frac{20}{36}$$

تعریف: هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای Ω باشند آنگاه A و B را دو پیشامد ناسازگار گوییم، هرگاه

$P(A\cap B)=0$

۵) حال این مسئله را می‌توان به n پیشامد تعمیم داد:

این پیشامدها دو به دو ناسازگارند هرگاه: $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=0$

۳) دنباله‌ای از پیشامدهای $A_1, A_2, \dots$ را دو به دو ناسازگار گوییم هرگاه: $\frac{9}{36}$ $(\frac{3}{2})$

$3\times 18\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{15}{36}$

$\forall i\neq j \Rightarrow P(A_i\cap A_j)=0$

۴) بررسی ریاضی (اصول) احتمال:

تعریف: فرض کنید Ω فضای نمونه‌ای و A پیشامدی از Ω است. P تابعی نامنفی روی Ω است، در این صورت احتمال پیشامد A را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و P را یک تابع احتمال می‌نامیم، هرگاه در ۴ اصل زیر صدق کند:

1) $P(\Omega)=1$

2) $\forall A\subset\Omega ,\ 0\le P(A)\le 1$

3) $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$ if $A_1\cap A_2=\emptyset$, $(P(A_1\cap A_2)=0)$

4) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ if $A_i\cap A_j=\emptyset \quad \forall i\neq j$

A

قضیه:

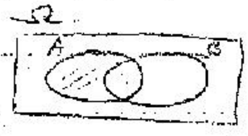
اگر A_1 و A_2 دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه:

① $p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2)$

② قضیه: اگر A و B دو پیشامد از S باشند بطوریکه $A \subset B$ باشد، آنگاه:

$p(B - A) = p(B) - p(A)$

① $\rightarrow$ $A_1 \cup A_2 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_1) \cup (A_1 \cap A_2)$



چون هر سه زیرمجموعه ناسازگارند طبق اصل ۳ کولموگروف داریم:

$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1 - A_2) + p(A_2 - A_1) + p(A_1 \cap A_2)$

$\Rightarrow p(A_1 \cup A_2) = p(A_1 - (A_1 \cap A_2)) + p(A_2 - (A_1 \cap A_2)) + p(A_1 \cap A_2)$ طبق قضیه ②

$\Rightarrow p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) - p(A_1 \cap A_2) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2) + p(A_1 \cap A_2)$

$\boxed{\Rightarrow p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2)}$

اگر بخواهیم برای سه مجموعه این رابطه را اثبات کنیم:

$p(\underbrace{(A_1 \cup A_2)}_{D} \cup A_3) = p(D \cup A_3) = p(D) + p(A_3) - p(D \cap A_3)$

حال از آنچه در بالا برای دو مجموعه ناسازگار خواهیم داشت:

اثبات؟ $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$

* برای n مجموعه چطور است؟

قضیه: فرض کنید S فضای نمونه‌ای و A پیشامدی از S باشد، در این صورت A' را مکمل پیشامد A نسبت به S می‌نامیم. آنگاه:

$$p(A) = 1 - p(A')$$

مثال: فرض کنید در یک کلاس ۷۰ نفر حضور دارند که ۱۰ نفر از دانشجویان جوان هستند، ۸ نفر به تصادف [illegible] از کلاس انتخاب می‌کنیم.

۱) احتمال اینکه فقط دو نفر از جوان‌ها انتخاب شوند، چقدر است؟

$$p(A) = \frac{\binom{10}{2} \times \binom{60}{6}}{\binom{70}{8}}$$

۲) احتمال اینکه حداقل دو نفر از دانشجویان جوان انتخاب شوند، چقدر است؟

روش ۱: حداقل دو نفر یعنی فقط ۲ نفر، فقط ۳ نفر، ... ۸ نفر که هر کدام را حساب کرده و با هم جمع می‌کنیم (طبق اصل جمع)

$$A_i = \{\text{پیشامد انتخاب } i \text{ نفر جوان}\} \quad i = 2, 3, \ldots, 8$$

بهتر

روش ۲: روش متمم:

$$A' = \{\text{پیشامد حداکثر یک نفر}\}$$

$$p(A') = \underbrace{\frac{\binom{10}{0} \times \binom{60}{8}}{\binom{70}{8}}}_{\text{فقط صفر نفر جوان}} + \underbrace{\frac{\binom{10}{1}\binom{60}{7}}{\binom{70}{8}}}_{\text{فقط ۱ نفر جوان}} \qquad p(A) = 1 - p(A')$$

قضیه: فرض کنید $A_1, A_2, \ldots, A_n$، n پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \overbrace{\sum_{i=1}^{n} p(A_i)}^{C_n} - \overbrace{\sum_{1 \le i < j} p(A_i \cap A_j)}^{\text{به تعداد } \binom{n}{2} \text{ (هر دو عضو که از کل مجموعه)}} + \overbrace{\sum_{1 \le i < j < k \le n} p(A_i \cap A_j \cap A_k)}^{\text{به تعداد } \binom{n}{3}}$$

$$- \overbrace{\sum_{1 \le i < j < k < l \le n} p(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l)}^{\text{به تعداد } \binom{n}{4}} + \cdots + \underbrace{\overbrace{(-1)^{n-1} p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)}^{\text{به تعداد } \binom{n}{n} = 1}}_{\text{جمله آخر}}$$

۱) احتمال دختر بودن $\frac{1}{2}$ ، احتمال آنکه هر دو فرزند دختر باشند؟ $\binom{}{}$ ؟ $\frac{2 \times 2}{2 \times 2}$

۲) دو فرزند اول دختر باشند

مثال) از مجموعه ی ورق های بازی یک ورق به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه این ورق آس یا دل باشد چقدر است؟

$\Omega = \{a_1, \ldots, a_{52}\}$ $A = \{$ پیشامد اینکه ورق انتخاب شده آس باشد $\}$

$B = \{$ " " " " دل باشد $\}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$

مثال) در یک صندوق ۲۰ عدد سیب موجود است. ۱۰ عدد از سیب ها کرم دارند. ۸ عدد از سیب ها شکسته اند. ۵ عدد از سیب ها هم شکسته و هم کرم دار است.

۱ سیب به تصادف از صندوق انتخاب می کنیم:

مطلوب است احتمال آنکه سیب شکسته یا کرم دار باشد؟

مطلوب است احتمال آنکه سیب سالم باشد.

$A: \{$ پیشامد انتخاب یک سیب کرم دار $\}$

$B: \{$ " " " " " شکسته $\}$

$P(A \cup B) = \frac{10}{20} + \frac{8}{20} - \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$

چون $P(A \cup B) \neq 1$ است پس هنوز سیب سالم نیز در جعبه وجود دارد

احتمال انتخاب سیب سالم: $\rightarrow$ $\boxed{P(C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}}$ سیب سالم

احتمال شرطی: فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، در این صورت احتمال شرطی پیشامد B به شرط وقوع پیشامد A را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$p(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{p(A)\neq 0}$$

پیشامدی که اول رخ دهد

قضیهٔ حاصلضرب برای دو پیشامد:

$$p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B|A)$$
$$= p(B)\cdot P(A|B)$$

مثال: فرض کنید در یک ظرف ۱۲ عدد سیب موجود است. ۴ عدد از سیب‌ها زرد هستند، ۲ عدد سیب به تصادف بدون جایگذاری از ظرف انتخاب می‌کنیم.

۱) احتمال اینکه هر دو انتخاب سیب زرد باشد چقدر است.

$\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}=$

انتخاب سیب‌ها بدون جایگذاری: احتمال انتخاب دو سیب زرد = احتمال سیب اول زرد × احتمال سیب دوم زرد $= \frac{4}{12}\times\frac{3}{11}=\frac{1}{11}$

B|A = { پیشامد اینکه سیب دوم هم زرد باشد }   A = { پیشامد اینکه انتخاب اول سیب زرد باشد }

انتخاب‌ها بدون جایگذاری هستند.

سیب اول و دوم زرد باشند

$p(A\cap B)=\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}=\frac{1}{11}$

$p(A\cup B)=?$

۲) احتمال اینکه انتخاب دوم زرد باشد چقدر است:

p(انتخاب دوم زرد) = p(اولی زرد) × p(دومی زرد) + p(اولی غیرزرد) × p(دومی زرد)

$\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}+\frac{8}{12}+\frac{4}{11}$

۳) اگر انتخاب‌ها با جایگذاری صورت بگیرد، احتمال (۱) را بیابید.

(۱) p(هر دو زرد) $= \frac{4}{12}\times\frac{4}{12}$ $p(A\cup B)=p(A)\cdot p(B|A)$

انتخاب اول

انتخاب دوم

$\boxed{p(A\cup B)=p(A)\cdot p(B)}$ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه

* در اشتراک دو گانه اگر متغیرها مستقل نباشند، احتمال‌ها در هم ضرب می‌شوند.

(۲) p(دو مهره همرنگ) = p(انتخاب ...) = p(اولی قرمز) × p(دومی قرمز) + p(اولی آبی) × p(دومی آبی)

$$p = \frac{4}{12}\times\frac{4}{12} + \frac{8}{12}\times\frac{8}{12}$$

تعریف: هر دو پیشامد A و B را مستقل از هم نامیم هرگاه رابطه زیر برقرار باشد.

$$* \quad \boxed{p(A\cap B) = p(A).p(B)}$$

A و B مستقل از هم هستند اگر و تنها اگر رابطه * برقرار باشد

یعنی این رابطه دوطرفه است

مثال: در ظرف A، پنج عدد سیب زرد و ۸ عدد سیب سرخ موجود است، در ظرف B، ۳ عدد سیب زرد و ۷ عدد سیب سرخ موجود است. از هر ظرف یک سیب انتخاب می‌کنیم، احتمال آنکه هر دو انتخاب سیب زرد باشند چقدر است؟

$E_A = \{$پیشامد آنکه از ظرف A سیب زرد انتخاب شود$\}$

$p(E_A\cap E_B) = ?$

$E_B = \{$ " " " " B " " " " $\}$

این دو انتخاب از دو ظرف مستقل‌اند، یعنی نتیجه انتخاب سیب از ظرف اول ربطی به انتخاب از ظرف دوم ندارد

$$p(E_A\cap E_B) = \frac{5}{13}\times\frac{3}{10} = \frac{3}{26}$$

* تعمیم حاصلضرب برای سه پیشامد:

اگر A_1 ، A_2 ، A_3 پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند، داریم:

$$p(A_1\cap A_2\cap A_3) = p(A_1).p(A_2|A_1).p(A_3|A_1\cap A_2)$$

* احتمال رخ دادن هر سه پیشامد همزمان

مثال) فرض کنید ۳ ورق را از یک دسته ورق‌های بازی بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم؛
احتمال اینکه هر سه ورق دل باشند چقدر است؟

$A_1 = \{$ ورق اولی دل باشد $\}$ $\qquad A_2 | A_1 \{$ ورق دوم دل باشد به شرطی که اولی دل باشد $\}$

$A_3 | A_1 \cap A_2 = \{$ ورق سوم دل باشد به شرطی که دو تای اول دل باشند $\}$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50}$$

اگر انتخاب‌ها با جایگذاری باشد، احتمال را محاسبه کنید؟

$$\boxed{P = \frac{13}{52} \times \frac{13}{52} \times \frac{13}{52}}$$

نکته: انتخاب‌های با جایگذاری پیشامدهای مستقل می‌سازد
ولی انتخاب‌های بدون جایگذاری پیشامدهای وابسته می‌سازد.

استقلال کامل سه پیشامد:

اگر A_1 ، A_2 ، A_3 پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای Ω باشند، گوییم این سه پیشامد
استقلال کامل دارند اگر و فقط اگر همه روابط زیر توأم برقرار باشند.

1) $P(\bigcap_{i=1}^{3} A_i) = \prod_{i=1}^{3} P(A_i)$

2) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$

3) $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$

4) $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$

تعمیم قضیه حاصلضرب برای n پیشامد:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdots P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

* پیشامدهای ناسازگار اشتراک ندارند ولی پیشامدهای مستقل اشتراک دارند.

استقلال کامل n پیشامد: ← تعداد متناهی n تا.

n پیشامد $A_1, A_2, \ldots, A_n$ استقلال کامل دارند، اگر روابط زیر

به تعداد $2^n-(n+1)$ رابطه برقرار باشد. (شامل مجموعه‌های دوتایی، سه‌تایی، ... n تایی)

یعنی تهی و تک‌عضوی ... استقلال داشتن ایشان

تعمیم استقلال برای دنباله‌ای از پیشامدها: * تعداد نامتناهی

$A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$

این دنباله از پیشامدها را مستقل می‌نامیم اگر برای هر عدد صحیح و مثبت k رابطه زیر برقرار باشد.

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_{i_k})$$

* احتمال اشتراک‌ها برای هر عضو باید برقرار باشد.

* (یعنی انتخاب n پیشامد ترتیبی در انتخاب وجود ندارد)

مثال) تاس ... را دو بار پرتاب می‌کنیم: $\Omega = \{(i,j) \mid i,j = 1,2,\ldots,6\}$

$n(\Omega) = 36 = 6^2$

پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم:

A_1: {پیشامد اینکه پرتاب اول ۱ یا ۲ یا ۳ باشد} $n(A_1) = 18$

A_2: {پیشامد اینکه پرتاب اول ۳ یا ۴ یا ۵ باشد} $n(A_2) = 18$

A_3: {مجموع اعداد حاصل از ۲ پرتاب برابر ۹ باشد} $n(A_3) = 4$

$P(A_1) = P(A_2) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, $P(A_3) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$n(A_1 \cap A_2) = 6 \Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(1) $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1) \cdot P(A_2)$ ⇒ A_1, A_2 مستقل نیستند.

(2) $P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{36}$, $P(A_1) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$

$\Rightarrow P(A_1 \cap A_3) \neq P(A_1) \cdot P(A_3)$ ⇒ A_1, A_3 مستقل نیستند.

نکته: اگر پیشامدهای دو به دو مستقل باشند دلیل بر این نیست که همگی مستقل باشند.

15

$$P(A_2 \cap A_3) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \quad , \quad P(A_2)\cdot P(A_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow P(A_2 \cap A_3) \neq P(A_2)\cdot P(A_3)$$ A_2 و A_3 مستقل نیستند

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{36} \quad , \quad P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{36}$$

(۳،۶) :

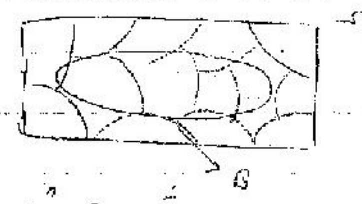
$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$$ مستقل‌اند.

قضیه احتمال کل: total theory

فرض کنید A_1 ، A_2 ، ...... دنباله‌ای از پیشامدهای دو به دو ناسازگار از فضای نمونه‌ای Ω باشد به طوری که $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ در این صورت اگر B هر پیشامد دلخواه از Ω باشد:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\cdot P(B \mid A_i)}$$

افراز Ω: A_i ها: هیچ دو تا از A_i ها اشتراک ندارند.



پیشامد B را به صورت اجتماعی از A_i ها افراز می‌کنیم:

$$B \subset \Omega \Rightarrow B = B \cap \Omega \Rightarrow B = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \Rightarrow B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap A_i)$$

اگر $B \cap A_i = C_i$ مستقل‌اند: $\Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i)$ ، $B \cap A_i$ ها مستقل‌اند

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\cdot P(B \mid A_i)$$

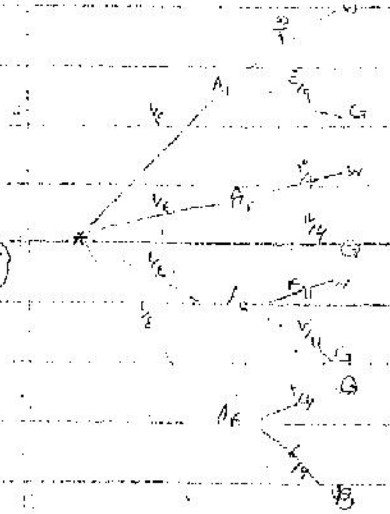
* نکته: اگر پیشامدهای A و B مستقل باشند، آنگاه پیشامدهای A' و B ، A و B' ، A' و B' نیز مستقل هستند.

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$
$$= P(A') - P(B)\left(1 - P(A)\right)$$
$$= P(A') - P(B)\cdot P(A')$$
$$= P(A')\cdot P(B')$$

مثال) فرض کنید در ظرف A_1، ۵ مهره سفید و ۴ مهره سبز، در ظرف A_2، ۳ مهره سفید و ۳ مهره سبز، در ظرف A_3، ۴ مهره سفید و ۷ مهره سبز، در ظرف چهارم ۵ مهره آبی و ۵ مهره سبز موجود است. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای از آن به تصادف خارج می‌کنیم.

احتمال اینکه این مهره سفید رنگ باشد چقدر است؟

نمودار درختی:



یکی از حالات این است که مسیر A_1 است

یا مسیر A_2 یا مسیر A_3 ...

هر کدام از این حالات سازگار نیستند پس احتمال آنها

با هم جمع خواهد شد:

$$P(W) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i)\cdot P(W|A_i)$$

$$\Rightarrow P(W) = \frac{1}{4}\times\frac{5}{9} + \frac{1}{4}\times\frac{3}{6} + \frac{1}{4}\times\frac{4}{11} = /\alpha$$

تعمیم: اگر در تعریف قبل با حفظ فرضیات، پیشامد B رخ داده باشد آنگاه احتمال شرطی A_k به شرط وقوع پیشامد B را احتمال برگشت می‌نامیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{P(B)}$$

سؤال: اگر مهره انتخاب شده رنگ سفید داشته باشد، چه احتمالی از ظرف دوم انتخاب شده است؟

$$P(W) = /\alpha \quad , \quad P(A_2|W) = \frac{P(A_2)\cdot P(W|A_2)}{/\alpha} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{6}}{/\alpha} = \cancel{/B}$$

$P(A_2|W) \longrightarrow$ اگر مهره سفید باشد احتمال اینکه از ظرف A_2 باشد

$P(A_2 \cap W) = P(A_2)\cdot P(W|A_2)$ احتمال اینکه ظرف A_2 رنگ سفید را دارد

۱) در ظرف A ۵ مهره‌ی سفید و ۲ عدد مهره‌ی سبز موجود است.

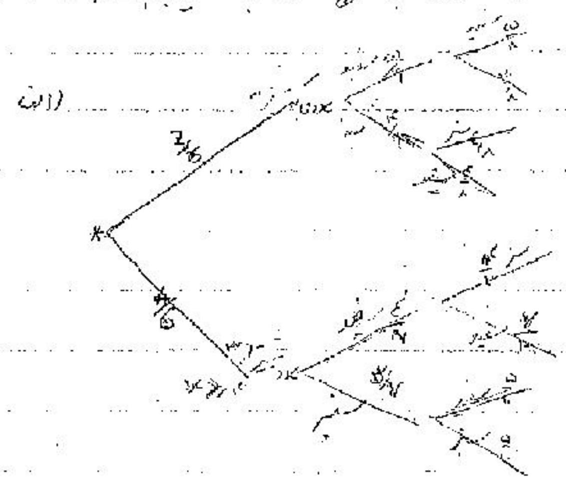
در ظرف B ۴ ... ۳ ...

یک تاس سالم را پرتاب می‌کنیم، و اگر نتیجه‌ی پرتاب عددی کمتر از ۳ باشد مهره‌ای از ظرف A انتخاب می‌کنیم و در ظرف B قرار می‌دهیم و از B یک مهره انتخاب می‌کنیم. در غیر این صورت، مهره‌ای از ظرف B انتخاب کرده و در ظرف A قرار داده و از ظرف A یک مهره انتخاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه هر دو مهره سفید باشند چقدر است؟

ب) اگر انتخاب دوم سفید داشته باشد احتمال اینکه مهره انتقالی سفید بوده باشد چقدر است؟

الف)



$$P(B) = \frac{2}{6}\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{6}{10}\right) + \frac{2}{3} \cdot \ldots$$

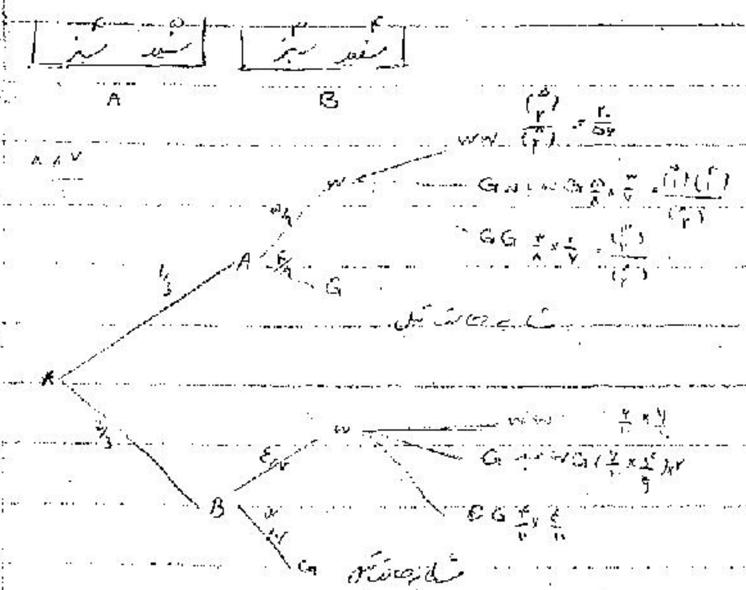
ب) $P($ مهره انتقالی سبز A | انتخاب دوم سفید $C)$

$$\frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{6}\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right) + \frac{4}{6}\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{5}{10}\right)}{P(C)}$$

اولی سبز و دومی سفید

$$P(C) = \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right) + \left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\ldots$$

مثال) در ظرف A، ۵ مهره سفید و ۴ مهره سبز موجود است
در ظرف B، ۴ مهره سفید و ۳ مهره سبز موجود است.
یک تاس سالم را پرتاب می‌کنیم اگر نتیجه پرتاب عددی کمتر از ۳ باشد مهره‌ای از ظرف A انتخاب کرده و در ظرف B قرار می‌دهیم و از ظرف B دو مهره بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم
در غیر این صورت مهره‌ای از ظرف B انتخاب کرده و در ظرف A قرار می‌دهیم و از ظرف A دو مهره بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم: الف) احتمال آنکه هر دو مهره هم‌رنگ باشند چقدر است؟
ب) اگر انتخاب دو مهره آخر غیر هم‌رنگ باشند، احتمال آنکه مهره انتقالی سفید باشد چقدر است؟



* در این مثال منظور از WG و GW ترتیب مد نظر نیست و GG را داریم ... هم‌رنگ یا غیر هم‌رنگ بودن مهره‌ها مهم است

الف) $P(\text{هر دو مهره هم‌رنگ}) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{9} \times \frac{20}{54}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{9} \times \frac{26}{54}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} \times \frac{32}{100}\right)$
$+ \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{7} \times \frac{16}{100}\right)$

ب) $P(\text{مهره انتقالی سفید} \mid \text{دو مهره آخر غیر هم‌رنگ}) = \dfrac{P(\text{دو مهره غیر هم‌رنگ} \cap \text{مهره انتقالی سفید})}{P(\text{دو مهره غیر هم‌رنگ})}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{9} \times \frac{15}{54}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} \times \frac{48}{90}\right)}{\left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{9} \times \frac{15}{54}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{9} \times \frac{15}{54}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} \times \frac{48}{90}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{7} \times \frac{48}{90}\right)}$$

مثال) یک تاس غیر همگن را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر نتیجه زوج باشد، یک سکه همگن و معمولی را n بار پرتاب می‌کنیم، اگر فرد باشد یک سکه... حداقل یک بار شیر آمده باشد، احتمال اینکه تاس نتیجه فرد آمده باشد چقدر است؟

$$P(\text{نتیجه فرد در تاس} \mid \text{حداقل یکبار شیر بیاید}) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$$

$$P(\text{حداقل یکبار شیر در n پرتاب سکه}) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(2^n - 1\right) = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C \mid A) = \frac{1}{2} \times \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{6} \times \left(\frac{17}{8}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{17}{48}$$

$$* \quad \text{جواب} = \frac{17/48}{\frac{2^n - 1}{2^n}}$$

متغیرهای تصادفی : (یافتن تابع احتمال گسسته و پیوسته)

تعریف : فرض کنید Ω فضای نمونه‌ای آزمایشی است. تابع X از Ω به مجموعه اعداد حقیقی را متغیر تصادفی گویند.

$X : \Omega \to R$

بنابراین هر عضو از X یک پیش‌نمایه از فضای نمونه‌ای است

الف) اگر X مقادیر متمایز $x_1, x_2, \ldots$ را اختیار کند، X را متغیر تصادفی گسسته می‌گویند.

(مجموعه مقادیر X را (برد تابع X) فضای متغیر تصادفی یا تکیه‌گاه X می‌نامیم.)

$A = \{x ; x = x_1, x_2, \ldots\}$

ب) اگر X از Ω به R تابع پیوسته باشد، X را متغیر تصادفی پیوسته می‌نامیم.

$A = \{x ; x \in (a,b) ; a, b \in R\}$

مثال: از بین کلاس یک نفر به تصادف انتخاب. و تعداد واحدهایی که در ترم جاری اخذ کرده است، سؤال می‌شود. تابع X از Ω به R تعداد واحدها تعریف می‌شود.

$\Omega = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$ $\quad X : \Omega \to R$

$X(\{a_i\}) =$ تعداد واحدهای نفر iام

تعداد واحد :	۱۶	۱۸	۱۷	۲۰	۱۴	۱۹	۲۵	۱۲	۱۳	
تعداد افراد :	۳	۱۲	۴	۵	۱	۱۴	۰	۰	۰	← ۶ نفر

در a_i ، X دارای ۶ مقدار است.

در واقع از یک مجموعه n عضوی $X = \{x ; x = 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$ یک مجموعه ۶ عضوی درست کرده‌ایم که در واقع اطلاعات خلاصه شده است.

تابع احتمال گسسته

اگر A فضای متغیر تصادفی گسسته باشد تابع f از A به R را تابع احتمال گسسته می‌نامیم هرگاه دو شرط زیر صدق کند.

1) $0 \le f(x) \le 1 \quad \forall x \in A$

2) $\sum_{x=-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$

کدام یک از توابع زیر تابع احتمال گسسته است.

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{10} & x = 0,1,2,3,4 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

f تابع احتمال نیست زیرا $\exists x = 0 \Rightarrow f(x) < 0$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{10} & x = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

f تابع احتمال نیست زیرا جمع آن کمتر از ۱ می‌شود:

$\sum_{x=1}^{4} f(x) < 1 \rightarrow$ تابع احتمال نیست

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{10} & x = 1,\ldots,5 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

تابع احتمال است زیرا در دو شرط فوق صدق می‌کند.

1) $0 \le f(x) \le 1$ ✓

2) $\sum f(x) = 1$ ✓

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} & x \in N \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

1) $0 \le f(x) \le 1 \quad \forall x \in A$ ✓

2) $\sum f(x) = \sum \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ ✓

پس $f(x)$ تابع احتمال است.

توجه شود که در این توابع احتمال همهٔ اعضا یک‌ها نیست بنابراین برای احتمال‌های غیرهمشانس نیز مدل کلی را فرض هستیم که همان توابع احتمال هستند.

محاسبه احتمال توسط تابع احتمال گسسته

اگر $f(x)$ تابع احتمال گسسته برای متغیر تصادفی x باشد، آنگاه

1) $P(X = x_0) = f(x_0)$

2) $P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{b} f(x)$

مثال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} & x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$P(2 < X \leq 7) = \sum_{x=3}^{7} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7}$$

مثال: به ازای چه مقداری از c، تابع زیر، تابع احتمال گسسته می‌شود؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x(x+1)} & x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باید دو شرط تابع احتمال صدق کند:

۲) $\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = 1$

$$\Rightarrow c \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} = c \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = 1 \Rightarrow c\left(1 - \frac{1}{\infty}\right) = 1 \Rightarrow c(1-0) = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

تعریف: فرض کنید x متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال گسسته $f(x)$ است. اگر $g(x)$ تابعی از x باشد، آنگاه امید ریاضی $g(x)$ (میانگین $g(x)$) به صورت زیر است:

$$E[g(x)] = \sum_{x} g(x) f(x)$$

* این سری جدید باید همگرا باشد.
* اگر سری واگرا باشد، آنگاه $g(x)$ میانگین ندارد. امید ریاضی باید جواب داشته باشد

اگر $g(x) = x$ باشد، آنگاه:

① $\mu_x = E[g(x)] = \sum_{x} x f(x)$ * میانگین معمولی (وزن‌دار)

میانگین برای حالت‌های غیرمشخص * مقدار مورد انتظار x

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^x} & x\in N\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$ ، EX چقدر است؟

① $EX=\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{1}{2^x} = \frac{1}{2}+\overset{\text{دوتا}}{2}\,\frac{1}{4}+\overset{\text{سه‌تا}}{3}\,\frac{1}{8}+4\,\frac{1}{16}+5\,\frac{1}{32}$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$

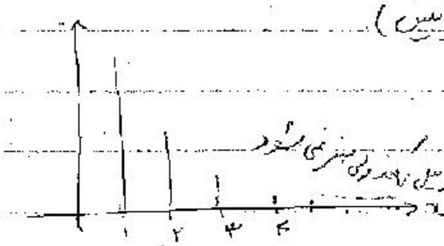
$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}+\cdots$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=1\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 \Rightarrow \boxed{EX=2}$

$EX=\sum_{1}^{\infty} x\frac{1}{x(x+1)}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(x+1)}$ واگراست

* حال تمرکز شکل این اطلاعات (میانگین)

① $\longrightarrow$



هرچه جلوتر میرویم به صفر میل می‌کند

در واقع امید ریاضی است

جایی که داده‌ها هستند و

... شده حدود ۲ است

② اگر $x^2=g(x) \Rightarrow E[g(x)]=Ex^2=\sum x^2 f(x)$

میانگین مربعات — گشتاور مرتبه ۲

③ اگر $g(x)=x^k \Rightarrow E(g(x))=Ex^k=\sum x^k f(x)<\infty$ متناهی

گشتاور مرتبه k ام

مثال: گشتاور مرتبه دوم $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^x} & x\in N\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$ را بیابید

۲۶

⑤ اگر $g(x) = \overbrace{x - E(x)}^{\text{انحراف از میانگین}} = x - \mu_x$ انحراف از میانگین

$$E[g(x)] = E[x - E(x)] = \sum_x (x - Ex) f(x) = \sum_x x f(x) + (-1)\sum E_x f(x)$$

$$= \sum_x x f(x) - E_x \underbrace{\sum f(x)}_{1} = E(x) - E(x) = 0$$

* نتیجه‌گیری: مجموع انحرافات از میانگین صفر است.

⑤ اگر $g(x) = (x - Ex)^2$

$$\Rightarrow E[g(x)] = E[(x - Ex)^2] = \sigma^2$$ واریانس x

میانگین مربع انحرافات.

$$\Rightarrow E[g(x)] = \sum_x (x - E_x)^2 f(x)$$

$$= \sum_x x^2 f(x) + \sum_x E^2 x f(x) - \sum_x 2E_x \cdot x f(x)$$

$$= Ex^2 + E^2x - 2E^2x =$$

فرمول محاسباتی واریانس: $\sigma^2_{(x)} = \underbrace{Ex^2}_{\text{گشتاور مرتبه دوم}} - \underbrace{E^2x}_{\text{توان دوم گشتاور اول}} \geq 0$

مثال: واریانس تابع احتمال زیر را بیابید: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} & , x \in N \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

۶) اگر $g(x)=e^{tx}$ X $(t\in\mathbb{R})$

$M_x(t)=E[g(x)]=E[e^{tx}]=\sum_x e^{tx}f(x)<\infty$ به شرطی که

تابعی است برحسب t

* $M_x(t)$ تابع مولد گشتاورهای x

* ویژگیهای تابع مولد گشتاورها $M_x(t)$:

الف) $M_x(t)\xrightarrow{t=0}M_x(0)=1$

ب) $\frac{dM(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_x e^{tx}f(x)\right)=\sum_x\frac{d}{dt}\left(e^{tx}f(x)\right)=\sum_x x e^{tx}f(x)$

$$\frac{dM(0)}{dt}=\sum_x x\times 1\times f(x)=E(x)$$ گشتاور مرتبه اول

ج) $\frac{d^k M(0)}{dt^k}=\sum x^k f(x)=Ex^k$

$$\Longrightarrow \boxed{\sigma^2=M''(0)-(M'(0))^2}$$

۷) $g(x)=(x-Ex)^k \quad (k\geq 1)\in N$

$$E[g(x)]=E(X-EX)^k=\sum_x(x-Ex)^k f(x)<\infty$$

گشتاور مرتبه kام حول Ex

اگر $k=2\Rightarrow\sigma_x^2$ گشتاور مرکزی مرتبه دوم (پراکندگی)

$Ex=\mu_x=\mu=\mu'_1$ گشتاور اول

$Ex^2=\mu'_2$ گشتاور دوم $\quad Ex^k=\mu'_k \quad E[x-Ex]^k=\mu_k$

مثال) اگر تابع احتمال گسسته $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{6} & x=1,2,3\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$ را داشته باشیم:

1) $E(X)=\sum_{x=1}^{3} x\cdot\frac{x}{6} = 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{6}+3\times\frac{3}{6}=\frac{7}{3}$ بین ۱ و ۳ است.

2) $E(X^2)=\sum_{1}^{3} x^2\cdot\frac{x}{6} = 1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{2}{6}+3^2\times\frac{3}{6}=6$

$\Rightarrow \sigma^2 = EX^2 - E^2X = 6-(\frac{7}{3})^2=\frac{5}{9}$

$\Rightarrow \sigma=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ انحراف معیار

3) $M_X(t)=Ee^{tX}=\sum^{3} e^{tx}\frac{x}{6}=\frac{1}{6}e^{t}+\frac{2}{6}e^{2t}+\frac{3}{6}e^{3t}$

که این یک سری محدود است (زیرا هیچ t وجود ندارد که سری واگرا بشود).

بنابراین تمام خواص تابع مولد گشتاور برقرار است:

$M(0)=1\ ,\quad M'(t)=\frac{1}{6}e^{t}+\frac{4}{6}e^{2t}+\frac{9}{6}e^{3t}\Big|_{t=0}=\boxed{\frac{14}{6}}$

---

* قضیه:

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع مولد گشتاور در همسایگی صفر باشد، $M_X(t)$

الف) ثابت می‌شود که X دارای تابع احتمال است.

ب) تابع احتمال $f(x)$ یکتاست.

اما عکس این قضیه برقرار نیست یعنی هر تابع احتمال می‌تواند تابع مولد گشتاور نداشته باشد.

مثال) نشان دهید که تابع احتمال اشاره شده تابع مولد گشتاور ندارد:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{\pi^2x^2} & x=1,2,\dots\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}\qquad \sum_{1}^{\infty} f(x)=1 \Rightarrow \sum \frac{6}{\pi^2x^2}=1 \ \checkmark$$

حال می‌خواهیم تابع مولد گشتاور را بدست آوریم:

$$M_X(t)=Ee^{tX}=\sum e^{tx}\cdot\frac{6}{\pi^2x^2}$$

$$=\frac{6}{\pi^2}\sum\frac{e^{tx}}{x^2}\Rightarrow\frac{\infty}{\infty}\longrightarrow$$ با دو بار هوپیتال رفتن

بنابراین نتیجه می‌گیریم این سری همگرا نیست.

توزیع‌های پیوسته:

تعریف:

اگر X متغیر تصادفی پیوسته باشد، تابع $f_X(x)$ را تابع احتمال پیوسته می‌نامیم هرگاه:

1) $\forall x \quad f(x)\geq 0$

2) $\int_x f(x)\,dx=1$

مثال) از انتگرال زیر یک تابع احتمال معرفی کنید:

$$\int_0^1 (x^2+x+1)\,dx$$

می‌دانیم $f(x)$ مثبت است:

$$2)\quad \text{جواب انتگرال}:\begin{cases}=1 \Rightarrow f(x) \ \text{تابع احتمال}\\ =A\neq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{A}f(x)\ \text{تابع احتمال} \qquad x\in(0,1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2+x+1=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\Big]_0^1=\frac{11}{6}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{6}{11}(x^2+x+1) & x\in(0,1)\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

* محاسبهٔ احتمال در توابع پیوسته

* یعنی جرم احتمال تجمع شده در بازهٔ $[a,b]$

$$P(a<X<b) = \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow$$

در هر ۴ حالت $a<x<b$ ، $a\le x<b$ ، $a<x\le b$ ، $a\le x\le b$

$$P(X=x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = 0$$

* اگر $f(x)$ تابع احتمال پیوسته برای متغیر تصادفی X باشد، $g(x)$ هر تابعی (از X) باشد آنگاه:

$$E[g(x)] = \int_x g(x) f(x)\,dx < \infty$$ * به شرط همگرایی

همهٔ تعاریف گسسته در مورد توابع پیوسته فقط با تغییر سیگما (Σ) به انتگرال معتبر است.

$$g(x)=e^{tx} \Rightarrow E[g(x)] = M_x(t) = \int_x e^{tx} f(x)\,dx$$ می‌شود

$M(0)=1$

همهٔ ویژگی‌های $M_x(t)$ در حالت پیوسته بودن X نیز برقرار است.

مثال) واریانس تابع احتمال پیوستهٔ $f(x)$ را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\sigma^2 = Ex^2 - E^2x$$

$$Ex = \int_0^\infty x e^{-x}\,dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} = -xe^{-x} - e^{-x}\Big]_0^\infty = 0-(0-e^0) = 1$$

یعنی جرم *

$$Ex^2 = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx \xrightarrow{\text{دو بار استفاده از جزء به جزء}} Ex^2 = 2$$

$$\Rightarrow \sigma_x^2 = 2-(1)^2 = 1$$ واریانس

انحراف معیار $\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1} = 1$

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{-x(1-t)}\,dx$$

$$\Rightarrow M_x(t) = \frac{1}{1-t} e^{-x(1-t)}\Big|_0^\infty = \frac{1}{1-t} \qquad 1-t>0$$

* آنگاه جواب برای ∞ صفر می‌شود.

$M(0)=1$ ✓ میانگین $E_x = M'(0) = \frac{1}{(1-t)^2}\Big|_{t=0} = 1$ ✓

$$M''(0) = \frac{2(1-t)}{(1-t)^4}\Big|_{t=0} = 2$$

واریانس $\sigma^2 = M''(0) - (M'(0))^2 = 2-(1)^2 = 1$

$$M(t) = \frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+t^3+\dots+t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

سری توانی — همگرایی سری را بررسی می‌کنیم

آزمون نسبت: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \begin{cases} <1 & \text{همگرا} \\ >1 & \text{واگرا} \\ 1 & \text{بی‌نتیجه} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{t^{n+1}}{t^n} = |t| \Rightarrow$

اگر $|t|<1$ باشد آنگاه سری همگراست (بازه همگرایی $|t|<1$)

$t \in (-1, 1)$

بنابراین $M_x(t)$ همگرا است اگر $t \in (-h_1, h_2)$ بطوری‌که $(h_1, h_2 > 0) \in \mathbb{R}$

---

* توزیع‌های یک‌بعدی پیوسته ، توزیع‌های یک‌بعدی گسسته:

همگرا $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx < \infty$ ، تابع گاما (انتگرال نوع دوم)

با روش انتگرال جزء به جزء:

آنقدر از جزء به جزء استفاده می‌کنیم که x حذف شود: $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx=(\alpha-1)!$

اثبات $\rightarrow \boxed{0!=1} \Leftarrow \Gamma(1)=0!=\int_0^\infty e^{-x}dx=1$

$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$?

الف) توزیع های گسسته خاص:

* ① توزیع برنولی:

فرض کنید آزمایشی دارای دو حالت مطلوب و نامطلوب (پیروزی و شکست) باشد.

احتمال حالت مطلوب برابر p ($0<p<1$) و احتمال حالت نامطلوب $1-p=q$

و $p+q=1$

اگر این آزمایش یک بار انجام شود و متغیر تصادفی X تعداد حالتهای مطلوب باشد،

آنگاه X دارای توزیع برنولی است با پارامتر p است که تابع احتمال آن به صورت

زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}=p^xq^{1-x} & x=0,1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

توزیع دوجمله‌ای:

توزیع دوجمله‌ای :

تعریف : فرض کنید یک آزمایش برنولی با حفظ همه شرایط n مرتبه بطور مستقل تکرار شود، X مرتبه نتیجه مطلوب باشد، آنگاه X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p که تابع احتمال آن بصورت زیر است :

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & x=0,1,\dots,n \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$$

اثبات : x حالت مطلوب داریم با احتمال p و n-x حالت نامطلوب با احتمال q.
حال با این جابجایی x حالت مطلوب را بیابیم که $\binom{n}{x}$ طریق امکان پذیر است.

---

1) $0<f(x)<1 \quad x=0,1,\dots,n$ ✓

2) $\sum_{0}^{n} f(x) = 1$

میدانیم : $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$

$\Rightarrow \sum_{0}^{n} f(x) = (p+q)^n = 1$

مثال: فرض کنید در یک ظرف ۱۰ عدد مهره وجود دارد که ۵ عدد از آنها رنگ سبز دارند. ۴ عدد مهره به تصادف با جایگذاری از ظرف انتخاب می‌کنیم :

الف) احتمال اینکه هیچ مهره سبز انتخاب نشود.
ب) احتمال اینکه ۲ مهره سبز انتخاب شود.
ج) حداکثر ۵ مهره سبز انتخاب شود.
د) حداقل ۲ مهره سبز انتخاب شود.

حل) چون مهره‌ها با جایگذاری انتخاب می‌شود پس مستقل‌اند بنابراین از توزیع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم چون در نتیجه دو حالت داشته باشد، در توزیع دوجمله‌ای تعداد حالات معلوم است

* شرایط استفاده از توزیع دوجمله‌ای

۱) دو نتیجه داشته باشد ۲) احتمال نتایج معلوم باشد ۳) مستقل بودن هر کدام از نتایج
۴) تعداد آزمایش‌ها معلوم باشد.

$n=10$, $p = p(\text{سبز}) = \frac{5}{20}$, $q = \frac{15}{20}$

$X \sim B(n,p)$: $X \sim B(10, \frac{5}{20})$

تابع احتمال :

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{10}{x}\left(\frac{5}{20}\right)^x\left(\frac{15}{20}\right)^{10-x} & x=0,1,\dots,10 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

الف) $x=0$

[illegible]

$$f(0) = \binom{n}{0} p^0 q^{10-0} = \left(\frac{15}{20}\right)^{10}$$

ب)

$$f(2) = \binom{n}{2} p^2 q^8 = \frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{5}{20}\right)^2 \times \left(\frac{15}{20}\right)^8$$

ج) مشاهده مهره سبز:

احتمال اینکه از پنج مشاهده حداکثر پنج مهره سبز باشد:

$$P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^{5} f(x)$$

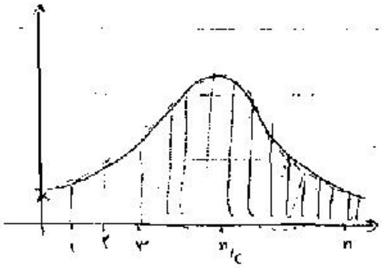
د)

$$P(x \geq 2) = \sum_{x=2}^{10} f(x) = 1 - \sum_{x=0}^{1} f(x)$$

حالا اگر شکل توزیع دوجمله‌ای را رسم کنیم :

حالا می‌خواهیم میانگین این توزیع را بیابیم

که همان مرکز جرم این هم است :



$$E(x) = ? = \sum x f(x)$$

همگراست .

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} < \infty$$

زیرا با معلوم بودن n حتما E(x) مشخص است.

$$= \sum_{x=1}^{n} x \times \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x \frac{n(n-1)!\, p\, p^{x-1} q^{n-x}}{x(x-1)!\,(n-x)!}$$

چون x=0 تاثیری ندارد $x = 1, \dots, n$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!\, p^{x-1} q^{n-x}}{(x-1)!\,(n-x)!} \qquad \begin{cases} n-1 = n' \\ x-1 = x' \end{cases}$$

$$= (np) \sum_{x'=0}^{n'} \frac{n'!}{x'!\,(n'-x')!} p^{x'} q^{n'-x'} = (np) \times \sum f(x') = (np) \times 1$$

* میانگین توزیع دوجمله‌ای :

$$\Rightarrow * \boxed{E(x) = np}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$X^2 = X(X-1) + X \Rightarrow E(X^2) = E(X(X-1)+X)$$

$$= E(X(X-1)) + \underbrace{E(X)}_{np}$$

$$\boxed{\sigma^2 = EX^2 - (EX)^2 = npq}$$

نتیجه مثال :

میانگین توزیع دوجمله‌ای : $EX = np = 20 \times \frac{5}{20}$

واریانس : $\sigma^2 = npq = 10 \times \frac{5}{20} \times \frac{15}{20}$

$$e^x = \sum$$

* محاسبهٔ تابع مولد گشتاور در توزیع دوجمله‌ای :

$$M_X(t) = Ee^{tx} = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t p)^x q^{n-x} = (e^t p + q)^n$$

۱) $M_X(0) = \Big|_{t=0} (p+q)^n = 1$

۲) $M'(t)\Big|_{t=0} = EX = np\, e^t (pe^t + q)^{n-1}\Big|_{t=0} = np$

۳) $M''(t) = np\, e^t (pe^t + q)^{n-1} + n(n-1)p^2 \times e^{2t} (pe^t + q)^{n-2}\Big|_{t=0}$

$$= np + n(n-1)p^2$$

$$\left.\begin{aligned} M''(t)\Big|_{t=0} &= EX^2 = E(X(X-1)) + E(X) \\ &= n(n-1)p^2 + np \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E(X)=np}$$

$$\Rightarrow \underline{E(X(X-1)) = n(n-1)p^2}$$

$$\sigma^2 = EX^2 - (EX)^2 = M''(t) - (M'(t))^2\Big|_{t=0} = npq$$

مثال) شخصی از نقطهٔ A شروع به قدم زدن می‌کند. با احتمال $\frac{1}{4}$ یک قدم به سمت راست و با احتمال $\frac{3}{4}$ یک قدم به سمت چپ برمی‌دارد. (قدم زدن به طور تصادفی)

۱) احتمال اینکه بعد از صد قدم در نقطهٔ A باشد چقدر است؟

۲) احتمال اینکه بعد از صد قدم در ۲۰ قدمی نقطهٔ A باشد چقدر است.

۱) $\binom{100}{50}\left(\frac{1}{4}\right)^{50} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{50}$

۲) $\binom{100}{40}\left(\frac{1}{4}\right)^{40}\left(\frac{3}{4}\right)^{60} + \binom{100}{60}\left(\frac{1}{4}\right)^{60} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40}$

این توزیع دوجمله‌ای است زیرا دو حالت دارد که هر کدام مستقل اند در تعداد ۱۰۰ قدم:

$X \sim B(100, \frac{1}{4})$

اگر در ۱۰۰ قدم بخواهد به نقطه A برگردد باید تعداد قدمهای چپ و راست یکسان باشد

یعنی اینکه در ۱۰۰ قدم چند قدم به راست یا چپ باشد را باید در نظر بگیریم:

$P(X=50) = f(50)$

ب)

باید اختلاف قدمهای چپ و راست ۱۰ باشد.

$P(|X-(100-X)|=10) = ?$

$P(X = 45, 55) = f(45) + f(55)$

ج) انتظار داریم که بعد از ۱۰۰ قدم در چه نقطه‌ای باشد (میانگین فاصله از A)

$E(X) = np = 100 \times \frac{1}{4} = \underline{25}$

مثال) یک سکه دو بار پرتاب می‌شود. ۲۵۰ بار، هر دو پرتاب ... تکرار می‌شوند

احتمال آنکه ۲۵ بار دو شیر ظاهر شود چقدر است؟

$\Omega = \{HH, TT, HT, TH\}$ ...... $HH \to$ موفقیت $p = \frac{1}{4}$ * دو شیر

شکست: $TT, HT, TH \longrightarrow$ شکستها $p = \frac{3}{4}$

$X \sim B(100, \frac{1}{4})$

* انتظار داریم در چند پرتاب دو شیر ظاهر شود؟ Ex.

تمرین: اگر در مثال قبل احتمال قبولی در کنکور ۵۰ درصد یا $\frac{2}{3}$ و در کنکور ۲۵ درصد یا $\frac{3}{4}$ باشد
احتمال دو قبولی یعنی حاصلضرب این دو است. $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$

توزیع فوق هندسی:

فرض کنید جامعه‌ای دارای N عضو است که M عضو آن ویژگی خاصی دارد. از این جامعه، نمونه تصادفی n تایی بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم.
اگر X تعداد نتیجه‌ی انتخاب در M باشد، آنگاه M دارای توزیع فوق هندسی است.
تابع احتمال آن به صورت زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} & x = 0, 1, \dots, \min(M, n) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$f_X(x) \geq 0$ ✓

تمرین: $\sum_{x=0}^{\min(M,n)} f(x) = 1 \Rightarrow \dfrac{\sum_{x=0}^{n} \binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}} = 1$

مثال: فرض کنید کلاسی ۵۰ نفر است که ۱۰ نفر آنها دختران هستند. ۸ نفر بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم.
(۱) احتمال اینکه یک نفر از دختران در انتخاب شرکت داشته باشد چقدر است؟
چون توزیع بدون جایگذاری است پس از توزیع فوق هندسی استفاده می‌کنیم.
فرض می‌کنیم X نفر از ۸ نفر دختران انتخاب شوند.
X دارای توزیع فوق هندسی است:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{10}{x}\binom{40}{8-x}}{\binom{50}{8}} & x = 0, 1, \dots, 8 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

به توجه شود که اگر بخواهیم ۸ نفر انتخاب کنیم x نفر است ... باشد.

۱) $p(X=1)=f(1)=\frac{\binom{10}{1}\binom{40}{7}}{\binom{50}{8}}$

۲) احتمال آنکه حداقل دو برنده جوان انتخاب شود:

$p(X\geq 2)=\sum_{2}^{8} f(x)$

$=1-p(X=0,1)$

۳) احتمال آنکه تعداد جوانهای انتخابی بصورت زیر باشد:

$*\,p(Ex-\delta < X < Ex+\delta)$

ابتدا باید فرمولهای δ را بیابیم تا بتوانیم Ex و نیز δ را بیابیم.

میانگین توزیع فوق هندسی : $Ex=\sum_{x=0}^{\min(M,n)} x f(x)$

$=\sum_{x=1}^{\min(M,n)} x \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

* اثبات با خودتان

$\Rightarrow \quad EX=\frac{Mn}{N}$

$\Rightarrow EX=\frac{8\times 10}{50}=\frac{8}{5}=1.6$

* برعهده اثبات تان

$EX^2=\sum_{x=0}^{\min(M,n)} x^2 f(x)$

$\delta^2=EX^2-(EX)^2=\frac{nM}{N}\left[\frac{(N-M)(N-n)}{N(N-1)}\right]$ * واریانس

$\Rightarrow \delta^2=1.6\left[\frac{40\times 42}{50\times 49}\right] \rightarrow \delta=1.047$

$\Rightarrow *\ p(1.6-1.047 < X < 1.6+1.047)=p(0.553 < X < 2.647)$

$=p(X=1,2)=\sum_{x=1}^{2} f(x)+f(x)$

* دوجمله‌ای: $EX = np$
* فوق هندسی: $EX = \frac{nM}{N} \to p$

* تابع مولد گشتاور برای توزیع فوق هندسی:

$M_X(t) = E e^{tx} = \sum_{x \geq 0} e^{tx} f(x)$ سری محدود نیست → ناشناخته است

* پس تابع مولد گشتاور ندارد.

مثال: فرض کنید در یک بسته بندی ۱۰۰ عدد قطعه وجود دارد که ۱۰ قطعه معیوب هستند، از این بسته نمونه ۵ تایی بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم.

۱) احتمال اینکه در انتخاب ۵ تایی فقط یک قطعه معیوب باشد چقدر است؟

۲) انتظار داریم در انتخاب ۵ تایی چند قطعه معیوب وجود داشته باشد؟

X: تعداد قطعه‌های معیوب

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{10}{x}\binom{90}{5-x}}{\binom{100}{5}} & x = 0, 1, \ldots, 5 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

1) $p(X=1) = f(1)$

2) میانگین انتخاب: $EX = \frac{nM}{N} = \frac{5 \times 10}{100} = \frac{1}{2}$

توزیع هندسی:

* توزیع هندسی:

تعریف: یک آزمایش برنولی با احتمال‌های p و q ($0<p,q<1$ و $p+q=1$)
بطور مستقل تکرار می‌کنیم تا اولین نتیجه مطلوب بدست آید.
اگر X تعداد آزمایش‌ها باشد، آنگاه X دارای توزیع هندسی با تابع احتمال زیر است.

$$f_X(x)=\begin{cases} p q^{x-1} & x=1,2,\dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

بررسی: $0<f_X(x)<1$

$\sum f(x) \overset{?}{=} 1$

$$\Rightarrow \sum f(x) = p\sum q^{x-1} = p(1+q+q^2+\cdots) = p\times\frac{1}{1-q}=1 \checkmark$$

مثال: فرض کنید احتمال آمدن شیر در هر پرتاب یک سکه معیوب دو برابر آمدن خط می‌باشد. احتمال اینکه اولین باری که نتیجه پرتاب شیر ظاهر شود، پرتاب بیستم باشد.

حل: $p=\frac{2}{3}$ ، $q=\frac{1}{3}$ ، X : تعداد پرتاب

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & x=1,\dots \\ 0 & o.w. \end{cases} \qquad f(20)=P(X=20)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{19}$$

* در این حالت بزرگترین شانس پرتاب اول است.

---

* میانگین، واریانس، و تابع مولد گشتاورهای توزیع هندسی:

$$EX=\sum_{x=1}^{+\infty} x p q^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} x q^{x-1}$$
$$=p(1+2q+3q^2+\cdots)$$
$$=p\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right)=\frac{1}{p}$$

دنباله‌ای از سری‌های هندسی $1+2q+3q^2+\cdots$: روش اول

$q+q^2+q^3+\cdots \xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} 1+2q+3q^2+\cdots$: روش دوم

$$EX^2 = \sum_{1}^{\infty} x^2 p q^{x-1} = ?$$

واریانس $\boxed{\sigma^2 = q/p^2}$

تابع مولد گشتاور: $M_X(t) = Ee^{tx} = \sum_{1}^{\infty} e^{tx} p q^{x-1}$

$$= \frac{p}{q}\sum_{1}^{\infty} (qe^t)^x = \frac{p}{q}(qe^t + q^2e^{2t} + \cdots)$$

* شرط همگرایی $0 < qe^t < 1$

باید t هایی را به عنوان دامنه تابع مولد گشتاور انتخاب کنیم که $0 < qe^t < 1$ باشد.

$$\Rightarrow M_X(t) = \frac{p}{q}\,\frac{qe^t}{1-qe^t} \Rightarrow \boxed{M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}} \quad *$$

$M(0) = 1$ ✓

* تعریف: فرض کنید X متغیر تصادفی $M_X(t)$ تابع مولد گشتاورهای X وجود دارد؛ در این صورت لگاریتم $M_X(t)$ را تابع مولد کومولانی X می‌نامیم.

$$\boxed{\varphi_X(t) = \ln M_X(t)} \qquad \varphi(0) = \ln 1 = 0$$

$$\varphi(0) = 0$$

مشتق اول: $\varphi'_X(t) = \frac{M'(t)}{M_X(t)}\Big|_{t=0} = EX$ ← میانگین

مشتق دوم: $\varphi''_X(t) = \frac{M''(t)M(t) - (M'(t))^2}{(M(t))^2}\Big|_{t=0} = M''(0) - (M'(0))^2$

$$= EX^2 - (EX)^2$$

واریانس

* مشتق دوم تابع مولد کومولانی واریانس را می‌دهد.

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

$\ln M_X(t) = \ln pe^t - \ln(1-qe^t)$ باید: $1-qe^t > 0$

$\Rightarrow 0 > \ln q + t \Rightarrow \boxed{t < -\ln q}$

* بازه‌ای برای t که تابع مولد گشتاور در آن تعریف است.

* فاصله همگرایی سری تابع $M_X(t)$: $t \in (-\infty, -\ln q)$

مثال) فرض کنید ماشینی، قطعاتی را با استاندارد ۲٪ معیوب تولید می‌کند. معیار ادامه کار ماشین را معرفی کنید.

$p = \%2$, $q = \%98$ X = تعداد آزمایش

$EX = \frac{1}{p} = \frac{1}{\%2} = 50$

یعنی هر بار ۵۰ تعداد از محصول را آزمایش می‌کنیم اگر یکی معیوب باشد ادامه کار انجام گیرد.

---

* توزیع پواسن:

تعریف: پیشامدهای متوالی زمانی که بطور مستقل رخ می‌دهند پیشامدهای پواسنی نام دارند مانند: حوادث رانندگی، تغییرات جوی، ... که تکرار می‌شوند، مستقل اند و بطور تصادفی رخ می‌دهند.

تعریف: فرض کنید بطور متوسط در واحد زمان λ پیشامد به طور مستقل رخ می‌دهد، در این صورت تعداد این پیشامدها در واحد زمان دارای توزیع احتمال پواسن با تابع احتمال زیر است.

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & x=0,1,2,\dots\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$f(x) > 0$ اگر ثابت کنیم $\sum f(x) = 1$

آنگاه ثابت می‌شود که هر کدام از x ها $f(x) \le 1$

$$\sum f(x) = e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda}\times e^{\lambda}=1$$

بسط

مثال) فرض کنید بطور متوسط در هر دقیقه ۱۲ نفر وارد یک ایستگاه خاص اتوبوس می‌شوند.
۱) احتمال اینکه در یک دقیقه معین هیچ کس وارد ایستگاه نشود چقدر است؟

اولین توزیع احتمالی که با زمان سروکار دارد پواسن است. باید λ را داشته باشیم.

$X \sim P(\lambda)$ — λ : متوسط رخ داد در واحد زمان

$X \sim P(12)$ — X : تعداد افراد — * اطلاعات داده شده

* نرخ ورود

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(12)^x e^{-12}}{x!} & x=0,1,\dots\\ 0 & o.w\end{cases}$$

* اگر نرخ خروج از نرخ ورود کمتر شود صف تشکیل می‌شود (البته بطور متوسط)

$P(X=0)=f(0)=e^{-12}$

$P(X \ge 2)=\sum_{2}^{\infty} f(x)$

حداقل دو نفر

برای بسط ماکزیمم توزیع پیوسته: $f'(x)=0 \Rightarrow x_1$ ریشه

اگر $f''(x_1)<0 \Rightarrow f(x_1) \longrightarrow$ مقدار ماکزیمم

در توزیع گسسته: حل دو نامعادله ←

$$\begin{cases} f(r) > f(r+1)\\ f(r) > f(r-1)\end{cases}$$

تابع توزیع :

الف) تابع توزیع متغیرهای تصادفی گسسته :

تعریف : فرض کنید $f(x)$ تابع احتمال گسسته برای متغیر تصادفی X است ، در این صورت ...

تابع توزیع X بصورت زیر است :

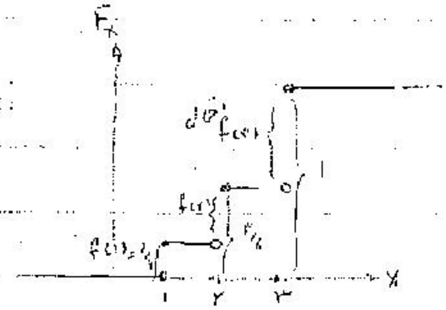
$$F_X(x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

مثال $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x=1,2,\dots,6 \\ 0 & o.w \end{cases}$ تابع توزیع در نقطه ۳ :

$$F_X(3) = \sum_{t \leq 3} f(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال $f(x) = \begin{cases} x/6 & x=1,2,3 \\ 0 & o.w \end{cases}$ که تابع احتمال گسسته است :

تابع توزیع x را تعیین و نمودار آن را رسم کنید :



$$\underset{x<1}{F_X(x)} = 0 \qquad \underset{x\leq 1}{F_X(x)} = 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\underset{x<2}{F_X(x)} = \frac{1}{6} \quad , \quad \underset{x\leq 2}{F_X(x)} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$$

$$\underset{x\geq 3}{F_X(x)} = 1$$

$F_X(2) = 3/6$

$f(2) = 2/6$ (احتمال $x=2$)

خواص تابع توزیع :

1) $F_X(-\infty) = 0$,

2) $F_X(+\infty) = 1$ 3) $\forall\, x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

یعنی F_X تابع غیرکاهشی می‌باشد

4) F_X همیشه از راست پیوسته است :

* نکته:

فرض کنید X متغیر تصادفی و F_X تابع توزیع X است، اگر x_0 یک نقطه انفصال (ناپیوستگی) برای F_X باشد آنگاه

x_0 احتمال*

$$P(X=x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$$

مقدار جهش تابع در x_0

ب) تابع توزیع پیوسته: فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته و f_X تابع احتمال پیوسته برای X است، در این صورت تابع توزیع X بصورت زیر است.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = P(X \le x)$$

* نکته: * مشتق ~~تابع~~ تابع توزیع پیوسته، تابع احتمال است، و انتگرال تابع احتمال تابع توزیع است.

$$F'_X(x) = f(x)$$

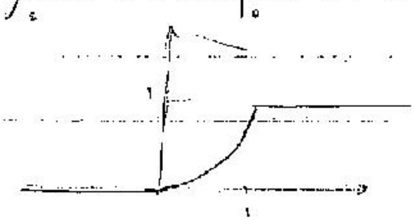
مثال: تابع احتمال متغیر تصادفی X بصورت زیر داده شده است:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

تابع توزیع آن را تعیین، و نمودار آن را رسم و خواص F_X را بررسی کنید:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 2t\,dt \Rightarrow F_X(x) = \int_{0}^{x} 2t\,dt = t^2\Big|_0^x = x^2$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$



توجه شود که در نقطه‌ای پیوسته مثلاً نقطه در ۱=x مشتق پذیر نیست ولی f(1) وجود دارد. این بدین دلیل است که در حالت پیوسته، نقاط حجم ندارند.

مثلاً: $F(1\leq x\leq 2) = \int_1^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^2 f(x)dx$

$\Rightarrow P(1<x<2) = P(1\leq x<2) = P(1<x\leq 2) = P(1\leq x\leq 2)$

بنابراین در حالت پیوسته خود نقطه مهم نیست.

✓ تابع توزیع آمیخته:

مثال: تابع توزیع X بصورت زیر داده شده است:

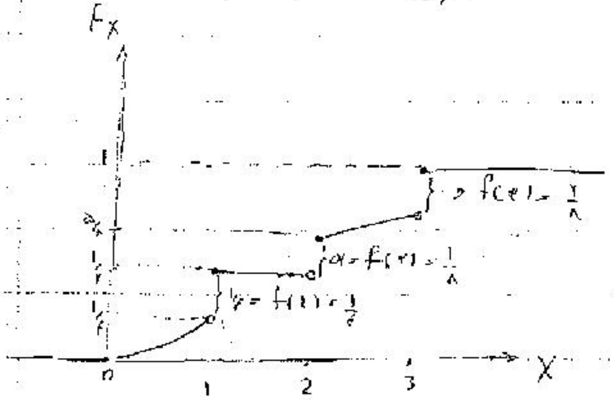
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x^2}{4} & 0\leq x<1 \\ \frac{1}{2} & 1\leq x<2 \\ \frac{x+3}{8} & 2\leq x<3 \\ 1 & x\geq 3 \end{cases}$$

۱) $P(X=1)=?$

۲) $P(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2})=?$

۳) $E_X=?$

ابتدا نمودار آن را بدست آوریم.



$P(X=1) = F_X(1) - F_X(1^-) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(1) = \frac{1}{4}$ ✓

$P(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}) = P(\frac{1}{2}<X<1) + P(X=1) + P(1<X<\frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$

$\frac{1}{2}<x<1 \Rightarrow F'_X(x) = f(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow P(\frac{1}{2}<x<1) = \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(\frac{1}{2})$

$P(1<X<\frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(1)$

* امتحان میان‌ترم آمار و احتمال مهندسی تاریخ ۸۶/۲/۱۴ روز یکشنبه ساعت ۱۱:۳۰

دانشگاه ...

* فضای احتمال، تابع احتمال تجمعی و ...

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x/2 & 0<x<1 \\ 1/4 & x=1 \\ 0 & 1<x<2 \\ 1/8 & x=2 \\ 1/8 & 2<x<3 \\ 1-\frac{6}{8}=\frac{2}{8} & x=3 \\ 0 & x>3 \end{cases}$$

توجه شود که مثلاً در نقطه ۱ در $F(x)$ گسستگی وجود دارد بنابراین چون مقدار F قبل و بعد از ۱ با هم مساوی اند بنابراین باید اختلاف دو سطح را بیابیم:

$$f(x) = F(x_0) - F(x_0^-)$$

$$EX = \int_0^1 x\frac{x}{2}dx + 1\times\frac{1}{4} + 0 + 2\times\frac{1}{8} + \int_2^3 \frac{1}{8}x\,dx + 3\times\frac{2}{8} = 9$$

گشتاور دوم: $\int_0^1 x^2\frac{x}{2}dx + 1^2\times\frac{1}{4} + 0 + 2^2\times\frac{1}{8} + \int_2^3 \frac{1}{8}x^2dx + 3^2\times\frac{2}{8} =$

$$\sigma^2 = EX^2 - E^2X$$

* نکته: اگر $F(x)$ تابع توزیع تجمعی باشد، $P(a<x\leq b) = F(b)-F(a)$

مثال) فرض کنید به طور متوسط در هر دقیقه ۶ تلفن به مرکز مخابرات اداره‌ای زده می‌شود.

۱) احتمال اینکه در یک دقیقه درست ۲ تلفن زده شود چقدر است؟

X تعداد تلفن $\sim P(\lambda=6)$.

پواسون $f(x) = \begin{cases} \frac{6^x e^{-6}}{x!} & , x=0,1,\dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$ $\qquad f(2)=P(X=2)=\frac{6^2e^{-6}}{2!}$

۲) احتمال اینکه در سه دقیقه حداقل دو تلفن زده شود، چقدر است؟

توجه شود که چون واحد زمان تغییر کرده بنابراین λ جدید حساب شود.

$1\ min \longrightarrow \lambda$

$3\ min \longrightarrow \lambda' = 3\lambda = 18$

$$X \sim P(\lambda' = 18) \Rightarrow f(x) = \frac{(18)^x e^{-18}}{x!}$$

$$P(X \geq 5) = \sum_{5}^{\infty} f(x) = 1 - \sum_{x=0}^{4} f(x)$$

فرض کنید به‌طور متوسط در واحد زمان λ پیشامد (زنگ تلفن) رخ می‌دهد، بنابراین در یک زمان t (t، به‌طور متوسط λt پیشامد رخ می‌دهد:

$$X \sim P(\lambda t)$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} & x = 0, 1, 2, \dots \quad t, \lambda > 0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

سؤال: احتمال اینکه در زمان t هیچ پیشامدی رخ ندهد چقدر است؟

$$f(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

$$P(X = 0) = f(0) = e^{-\lambda t}$$

این احتمال برای متغیر تصادفی X (تعداد تلفن‌ها) است.

و این معادل است با اینکه در زمان تعیین شده T هیچ تلفنی زده نشود،

$$P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

$$P(T > t) = P(X = 0) = e^{-\lambda t}$$

$$1 - P(T \leq t) = P(X = 0) = e^{-\lambda t}$$

$$1 - \underbrace{G_T(t)}_{\text{تابع توزیع } T} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \boxed{G_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}}$$

تابع توزیع زمان انتظار

از آنجائیکه مشتق تابع توزیع، تابع احتمال را نتیجه می‌دهد پس:

تابع احتمال زمان انتظار: $G'_T(t) = g(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t,\lambda > 0$

در مثال قبل: تابع احتمال زمان انتظار تلفن‌چی برای تلفن‌ها:

$$\boxed{g(t) = 4e^{-4t}}$$

گشتاورها

متوسط زمان‌های انتظار بین دریافت‌ها: ET

$$ET = \int_0^{+\infty} t\, g(t)\, dt = \frac{1}{\lambda} \qquad \underbrace{\boxed{ET = \frac{1}{\lambda}}}_{\text{میانگین}}$$

$$ET^2 = \int_0^{\infty} t^2 g(t)\, dt = \ ? \ \ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_T^2 = \frac{1}{\lambda^2}} \quad \text{variance}$$

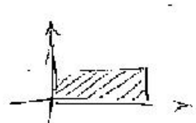
توزیع‌های پیوسته خاص:

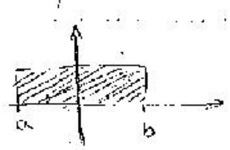
1) توزیع‌های پیوسته یکنواخت:

فرض کنید متغیر تصادفی X بین a و b باشد، در این صورت f(x) را تابع احتمال یکنواخت X می‌نامیم، اگر تابع احتمال آن زیر باشد:

توزیع مستطیلی

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0 & o.w \end{cases}$$





$$\int_a^b f(x)\, dx = 1$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1$$

$$EX = \int_a^b x \frac{dx}{b-a} = \boxed{\frac{a+b}{2}}$$

$$EX^2 = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{b-a}\Big|_a^b$$

واریانس: $\delta^2 = EX^2 - E^2X = \boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\sqrt{3} < x < +\sqrt{3} \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \qquad EX = 0 \;,\; \delta^2 = 1$$

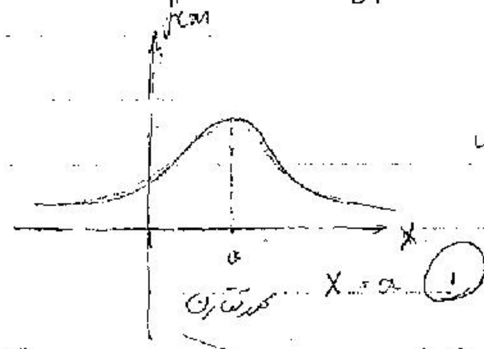
---

۱) توزیع نرمال:

متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با پارامترهای a و b است، هرگاه تابع احتمال آن بصورت زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2b^2}(x-a)^2} & -\infty < x, a < +\infty \\ & b > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$



X = a (۱)

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a+a) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a) f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow EX = 0 + a \Rightarrow \boxed{EX = a} \quad (۲)$$

$f'(x)=0 \Rightarrow X=a$

$\Rightarrow f''(a)<0 \Rightarrow X=a$ نسبی منحنی نرمال max

بنابراین $f(a)$ ماکزیمم است

بنابراین

(۳) $\boxed{\text{مُد } X=a}$

میانه: هر شاخصی که توزیع را نصف کند، میانه است.

(۴) $X=a$ میانه توزیع است

بنابراین در اینجا میانه، مد و میانگین در این توزیع نرمال یکسان است.

گشتاور مرتبه دوم

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = a^2+b^2$$

$$\sigma^2 = EX^2 - E^2X = a^2+b^2-a^2 \qquad \boxed{\sigma^2=b^2}$$

$b=$ انحراف معیار

توزیع نرمال

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$\mu=EX=a, \quad \sigma^2=b^2$$

تابع مولد گشتاور

$$M_X(t)=Ee^{tx}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{tx}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{tx-\frac{1}{2\sigma^2}x^2-\frac{1}{2\sigma^2}\mu^2+\frac{x\mu}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,dx$$

$$\overset{\text{تعریف}}{=\!=} e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\mu,\sigma^2)\,dx = e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

* تمام خصوصیات یک تابع مولد گشتاور را دارد. $\quad , \quad M_X(0)=1$

$\mu = M'(t)\big|_{t=0} \quad , \quad \sigma^2 = M''(t) - M'^2(t)\big|_{t=0}$

تابع مولد کومولانی: $\quad \ln M_X(t) = t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2$

حال اگر بخواهیم تابع توزیع را بدست آوریم. برای مثال:

که بدست آوردن این انتگرال $\quad p(a<x<b) = \int_a^b f(x)\,dx$

مشکل است و نقاط a و b مربوط

به جدولی است. که با تقریب زدن اعداد بدست آمده است.

---

* تبدیل نرمال استاندارد (نرمال متعارف): فرض کنید $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ آنگاه اگر $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(\overset{\text{میانگین}}{0}, \underset{\text{واریانس}}{1})$

* اثبات: تابع مولد گشتاور Z : * یکی از روشهای قوی در اثبات استفاده از تابع مولد گشتاور است.

با استفاده از تابع مولد گشتاور می‌خواهیم تابع احتمال را بیابیم:

$$M_Z(t) = Ee^{tz} = Ee^{t\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)} = E\,e^{\frac{tx}{\sigma}-\frac{t\mu}{\sigma}} = Ee^{\frac{tx}{\sigma}} \times Ee^{-\frac{t\mu}{\sigma}} \quad (1)$$

$E[c]=c$ امید ریاضی اعداد ثابت خودشان است.

$$(1) \longrightarrow E\,e^{\frac{tx}{\sigma}} \cdot e^{\frac{-t\mu}{\sigma}} = e^{\frac{-t\mu}{\sigma}}\,Ee^{\frac{tx}{\sigma}} = e^{-\frac{t\mu}{\sigma}} M_X\left(\tfrac{t}{\sigma}\right)$$

$$= e^{-t\mu/\sigma} \times e^{\frac{t}{\sigma}\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2} = e^{t^2/2} \Rightarrow \boxed{M_Z(t) = e^{t^2/2}}$$

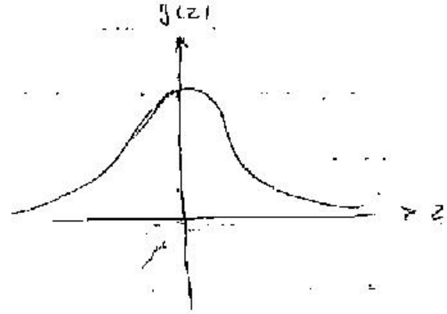
تابع مولد گشتاور Z

بنابراین $M_Z(t)$ حالت خاص از $M_X(t)$ است که اگر $\mu=0$ و $\sigma^2=1$

بنابراین Z یک توزیع نرمال است با میانگین صفر و واریانس 1.

به برهان تابع احتمال Z چنین است اگر $\mu=0$, $\sigma^2=1$

$$\Rightarrow g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$$



$$P(4<X<16)$$

$$=P\left(\frac{4-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{16-\mu}{\sigma}\right)=P(c<Z<d)=\Phi(d)-\Phi(c)$$

اگر $\mu=10$, $\sigma^2=7$ آنگاه:

$$P\left(\frac{-6}{\sqrt{7}}<Z<\frac{6}{\sqrt{7}}\right)=P(-2/26<Z<2/26)$$

با استفاده از اطلاعات جدول نشان داریم:

$$P(-2/26<Z<2/26)=\Phi(2/26)-\Phi(-2/26)=2\Phi(2/26)-1$$
$$=2(0/9881)-1=0/9762=\%97/62$$

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)\Rightarrow\Phi(x)-\Phi(-x)=2\Phi(x)-1$$

چون $\Phi(x)$ تابع توزیع تابع نرمال است محیط آن با توجه به جدول قابل استخراج است:

سؤال: فرض کنید نمرات دانشجویان دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۰ و واریانس ۷ است. مطلوبست:

۱) چند درصد افراد نمره بین ۴ و ۱۶ دارند؟
۲) چند درصد افراد با میانگین نمره ۶ فاصله دارند؟
۳) چند درصد افراد بالای ۱۸ نمره دارند؟
۴) چند درصد افراد نمره کمتر از ۲ دارند؟

چون منحنی نرمال است اگر در زیر نمودار بالای ۱۸ برابر احتمال است از ۲ چپ است.

۱) قبلاً جواب داده شد:

$P(\ 6 < x < 14\ ) = 0.9764$

$|x - \mu| < 1 \longrightarrow 9 < x < 11$

۲) $P(\ 9 < x < 11\ ) = P\left(\frac{9-10}{\sqrt{7}} < \frac{x-10}{\sqrt{7}} < \frac{11-10}{\sqrt{7}}\right)$

$= P\left(-\frac{1}{\sqrt{7}} < z < \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) - 1$

$= 2\,\Phi(0.37) - 1 = 2(0.6443) - 1 = 0.2886$

$= \%28.86$

۳) $P(\ X > 18\ ) = 1 - P(\ X < 18\ )$

$= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{18-\mu}{\sigma}\right) = 1 - P(Z < 3.02)$

$= 1 - (\Phi(3.02) - \Phi(-\infty)) = 1 - \Phi(3.02) = 1 - 0.99878$

* با استفاده از درون‌یابی (Interpolation) در جدول مقدار $\Phi(3.02)$ را می‌یابیم

$\Phi(3) = 0.9987$

$\Phi(3.05) = 0.9989$

$0.05 \quad 0.0002$

$\frac{0.05}{0.02} = \frac{0.0002}{x} \Rightarrow x = 0.00008$

$\Rightarrow \Phi(3.02) = \Phi(3) + x = 0.9987 + 0.00008$

* در فاصله‌ی ۰٫۰۵ از افزایش طول به اندازه‌ی ۰٫۰۰۰۲ افزایش ارتفاع است. حال اگر ۰٫۰۲ افزایش طول داشته باشیم ارتفاع چقدر افزایش می‌یابد

حال اگر بخواهیم جدول معکوس داشته باشیم

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \Phi(a) = 0.7753 \Rightarrow a = ?$

$\Phi(0.75) = 0.7734$

$\Phi(a) = 0.7753$

$\Phi(0.76) = 0.7764$

$\frac{0.01}{K} = \frac{0.003}{0.0019} \Rightarrow K = \dots$

$\Rightarrow a = 0.75 + K$

توزیع گاما:

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما با پارامترهای α و β باشد، آنگاه تابع احتمال آن به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}, & x>0,\ \beta>0,\ \alpha\in\mathbb{N}\\[2mm] 0 & o.w\end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}\,dy=(\alpha-1)!$$

$$\Rightarrow\quad 1=\int_0^{\infty}\frac{y^{\alpha-1}e^{-y}}{\Gamma(\alpha)}\,dy$$

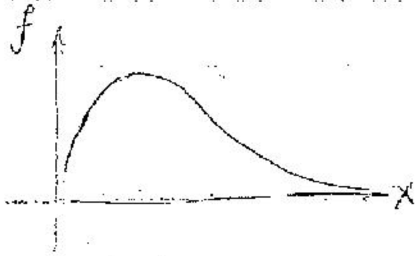
چون زیر انتگرال مثبت و پیوسته است بنابراین یک تابع احتمال پیوسته است:

تغییر متغیر: $y=x/\beta\,,\quad \beta>0\qquad dy=\dfrac{dx}{\beta}$

$$\Rightarrow 1=\int_0^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{dx}{\beta}=\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\,dx$$

$$\Rightarrow\ f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}} & x,\beta>0,\ \alpha\in\mathbb{N}\\[2mm] 0 & o.w\end{cases}$$

تابع احتمال توزیع گاما



چوله به راست.
(مشخصه داشتن یک قله خاص)

ده

نشان دهید α, β
واریانس و میانگین ...

$$EX = \int_0^\infty \frac{x \cdot x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}\,dx = \varphi(\alpha,\beta)$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{(1+\alpha)-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha) * \beta^\alpha} \cdot \frac{\beta^{\alpha+1}\,\alpha\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)}\,dx = \frac{\beta^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)}{\beta^\alpha\,\Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^{(1+\alpha)}}{\Gamma(\alpha+1)}}_{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{EX = \varphi(\alpha,\beta) = \alpha\cdot\beta}$$

EX^k

* ...

$$EX^k = \beta^k (\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots(\alpha+1)(\alpha)$$

$$EX = \alpha\cdot\beta, \qquad EX^2 = \beta(\alpha)(\alpha+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta^2 = E X^2 - E^2 X = \alpha\cdot\beta^2}$$

$$M_X(t) = Ee^{tX} = \int_0^\infty \frac{e^{tx}\, x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{(tx-\frac{x}{\beta})}\, x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\, e^{-x(\frac{1}{\beta}-t)}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha}$$

اگر $x(\frac{1}{\beta}-t)=z$ آنگاه $x=\frac{\beta z}{1-\beta t}$

تغییر متغیر:

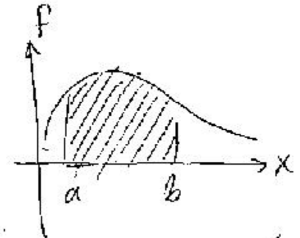
$$\Rightarrow dx=\frac{\beta\, dz}{1-\beta t}$$

فرض $1-\beta t>0$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}\cdot\beta^{\alpha-1}}{(1-\beta t)^{\alpha-1}}\,\frac{e^{-z}\beta\, dz}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}(1-\beta t)}=\frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}}\underbrace{\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}e^{-z}}{\Gamma(\alpha)}dz}_{1}$$

تابع مولد گشتاورها:

$$\Rightarrow \boxed{M_X(t)=\frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}}}$$



$$p(a<x<b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

برای محاسبه احتمال در خانواده توزیع گاما از تغییر زیر استفاده می‌کنیم:

نتیجه: فرض کنید $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$ آنگاه:

$$Y=\frac{2X}{\beta}\ ,\ \beta>0$$

$$Y\sim\overset{\text{کای اسکوئر}}{\chi}\,(\underset{\text{درجه آزادی}}{r}=2\alpha)$$

با تغییر متغیر $y=\frac{2x}{\beta}$ در تابع توزیع گاما:

$$1=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}dx \qquad x=\frac{\beta y}{2}\Rightarrow dx=\frac{\beta}{2}dy$$

$$=\int_0^\infty \frac{\beta^{\alpha-1}y^{\alpha-1}e^{-y/2}}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\cdot\frac{\beta\, dy}{2}=\int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}e^{-y/2}}{\Gamma(\alpha)2^{\alpha}}dy=\int_0^\infty \frac{y^{r/2-1}e^{-y/2}}{\Gamma(r/2)\cdot 2^{r/2}}$$

کافیست در تابع گاما $\alpha\to\frac{r}{2}\ ,\ \beta\to 2$

تابع احتمال توزیع کای اسکور

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y^{r/2 - 1} e^{-y/2}}{\Gamma(\frac{r}{2})\, 2^{r/2}} & y>0 \ ,\ r=1,2,\dots \\ 0 & o.w \end{cases}$$

حال محاسبه احتمال:

$$P(a<X<b) = P\left(\frac{2a}{\beta} < \frac{2X}{\beta} < \frac{2b}{\beta}\right)$$

$$= P(c<Y<d) = \int_c^d f(y)\,dy$$

$$= \int_0^d f(y)\,dy - \int_0^c f(y)\,dy$$ ثابت کردن کران انتگرال در صفر

با استفاده از جدول می‌توان حاصل انتگرال را محاسبه کرد.

مثال) فرض کنید X دارای توزیع گاما: $X \sim \Gamma(6,4)$ در این صورت

مطلوبست $P(a<x<b)$

* برای استفاده از جدول ابتدا سطر موردنیاز را مشخص کرد که 2α آن را مشخص

می‌کند $2\alpha = 2\times 6 = 12$ سطر درجه آزادی سپس از سطر ۱۲ استفاده می‌کنیم:

$$P\left(\frac{2a}{\beta} < \frac{2X}{\beta} < \frac{2b}{\beta}\right)$$ باید

$$= P\left(\frac{2a}{\beta} < Y < \frac{2b}{\beta}\right)$$

* باید طوری در سطر ۱۲ حرکت کنیم که $\frac{2a}{\beta}$، $\frac{2b}{\beta}$ در سطر ۱۲ باشد

$c = \frac{2a}{\beta} = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2} = 7.807 \qquad a = 15.614$ احتمال: ٪۲۰

$c = \frac{2b}{\beta} = \frac{b}{2} = 11.34 \qquad b = 22.68$ احتمال: ٪۵۰

$$\Rightarrow P(15.614<X<22.68) = P(7.807<Y<11.34)$$

$$= \int_0^{11.34} f(y) - \int_0^{7.807} f(y)\,dy = \%50 - \%20 = \%30$$

* میانگین توزیع χ^2 معادل درجه آزادی است.
تابع کای اسکوئر

$Ey = 8$

$\delta_y^2 = 2r$ واریانس در توزیع χ^2 دو برابر درجه آزادی است.

$$M_y(t) = \frac{1}{(1-2t)^{r/2}}$$

* اگر در تابع توزیع گاما:

$\alpha = 1 \; , \; \beta = \frac{1}{\lambda}$

$\Rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ تابع توزیع زمان انتظار

تابع های گاما برای طول عمر بکار می روند

توزیع های گسسته: دوجمله ای، فوق هندسی، هندسی، پواسن

توزیع های پیوسته: نرمال، گاما، کای اسکوئر، نمایی.

توزیع گاما: $f(x) = \dfrac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^{\alpha}}$ $\quad x \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

if $\beta = 1 \; , \; \alpha = 2 \longrightarrow$ توزیع نمایی: xe^{-x} $\quad X \sim E(X)$

میانگین توزیع نمایی $= 2$ ، واریانس $= 2$

توأم پیوسته : البته می‌تواند خود در متغیر تصادفی نباشند ولی مشترکاً توأم پیوسته باشد

فرض کنید (X, Y) متغیر تصادفی توأم پیوسته است، آنگاه $f(x,y)$ را تابع احتمال پیوسته می‌نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$1)\quad f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in D \,,\quad D \subset \mathbb{R}^{2}$$

$$2)\quad \int_x \int_y f(x,y)\, dy\, dx = 1$$

انتگرال زیر را تابع احتمال توأم پیوسته بسازید:

$$\iint (x+y)\, dy\, dx \qquad D = \{(x,y) \mid 0<x<y \,,\, 0<y<1\}$$

با انتگرال دوگانه حساب می‌کنیم، چون x بستگی به y دارد در ابتدا نسبت به x انتگرال می‌گیریم:

$$\int \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Big|_0^y dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2} + y^2 = \frac{y^3}{6} + \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{تابع احتمال}\quad f(x,y) = \begin{cases} 2(x+y) & 0<x<y \,,\, 0<y<1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

احتمال:

$$P(X \in A, Y \in B) = \int_A \int_B f(x,y)\, dy\, dx$$

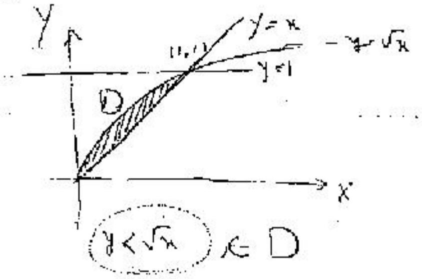
$$p(a \leq X \leq b \,,\, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx$$

اگر $a \to b \,,\, c \to d \Rightarrow p(X=a, Y=c) = 0$

$\boxed{X \le Y}$ در اینجا همواره داریم

در مثال با احتمال زیر را بیابید:

$$P(Y < \sqrt{X}) = \iint 2(x+y)\,dy\,dx$$



$$= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} 2(x+y)\,dy \right) dx = \frac{1}{4}$$

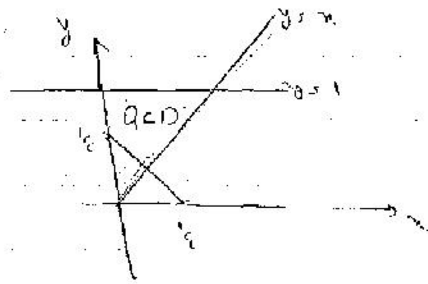
$$P(0 < X < \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4} < Y < \tfrac{3}{4}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 2(x+y)\,dy\,dx = \frac{1}{4}$$

جواب احتمال منفی است.

* چون حد بالا کمتر است زیرا در اینجا همواره داریم $X \le Y$ ...

$$P(0 < X < \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2} < Y < \tfrac{3}{4}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2(x+y)\,dy\,dx =$$

$$P(X + Y > \tfrac{1}{2}) = \iint_{x\ y} 2(x+y)\,dy\,dx$$



$$= 1 - P(x + y < \tfrac{1}{2})$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{1}{2}} \int_x^{\frac{1}{2}-x} 2(x+y)\,dy\,dx$$

marginalize — توابع حاشیه‌ای (کناری) ۵

$$f_Y(y) = f_y(y) = \int_x f(x,y)\,dx$$

$$f_1(x) = f_X(x) = \int_y f(x,y)\,dy \Rightarrow \int f_1(x)\,dx = \iint_{x\ y} f(x,y)\,dy\,dx = 1$$

$$\int_x f_1(x)\,dx = 1$$

* به این تابع، تابع حاشیه‌ای یا تابع احتمال کناری است (نیز می‌گویند)

در مثال (1) توابع حاشیه‌ای X و Y را بیابید:

$$f_1(x) = \int_{y=x}^{1} 2(x+y)\,dy = 2xy+y^2 \Big|_x^1$$

$$\Rightarrow \quad f_1(x) = 2x+1-3x^2 \quad , \; 0<x<1$$
$$0 \qquad\qquad o.w.$$

آزمون:

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx \overset{?}{=} 1 \Rightarrow \int_0^1 2x+1-3x^2 = x^2+x-x^3 \Big|_0^1 = 1 \quad ✓$$

پس این تابع احتمال حاشیه‌ای درست است.

$$f_2(y) = \int_{x=0}^{y} 2(x+y)\,dx = x^2+2xy \Big|_0^y = 3y^2 \qquad 0<y<1$$

آزمون:

$$\int_0^1 f_2(y) = 1 \quad ✓$$

$$P(0<X<\tfrac{1}{2}) = \int_0^{1/2} f_1(x)\,dx = \int_{x=0}^{1/2} \underbrace{\int_y f(x,y)\,dy}_{f_1(x)}\,dx$$

پس در تمام موارد مربوط به تک متغیر از توابع حاشیه‌ای مربوط به همان متغیر استفاده می‌کنیم.

توزیع های شرطی:

تعریف: فرض کنید $f(x,y)$ تابع احتمال توأم و $f_1(x)$ و $f_2(y)$ توابع حاشیه‌ای باشند. در این صورت تابع احتمال شرطی X به شرط Y=y و Y به شرط X=x بصورت زیر است:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

مثال) اگر تابع چگالی توأم به شکل زیر باشد:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x+y) & 0<x<y \\ & 0<y<1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

توابع حاشیه‌ای را بیابیم:

$$f_1(x) = 1 + 2x - 3x^2 \quad , \quad 0<x<1$$
$$= 0 \quad \text{سایر جاها}$$

* نکته: حدود تغییرات در توابع شرطی همان حدود تابع توأم است.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{2(x+y)}{1+2x-3x^2} \quad 0<x<y, \; 0<y<1$$
$$= 0 \quad \text{o.w}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{2(x+y)}{3y^2} \quad 0<x<y, \; 0<y<1$$
$$= 0 \quad \text{o.w}$$

* احتمال در توابع شرطی:

به طور مشابه تابع احتمال شرطی $f(x|y)$ را داریم:

$$P(x \in A \,/\, y = c) = \int_{x \in A} f(x|c)\, dx$$

$$P(y \in B \,|\, X = d) = \int_{y \in B} f(y|d)\, dy$$

مثال) در مثال قبل مطلوب است:

$$P\left(0<X<\tfrac{1}{2} \,\middle|\, Y = \tfrac{2}{3}\right)$$

$y > \frac{1}{2}$ باشد

$y \geq x$

$$f(x|\tfrac{2}{3}) = \frac{2(x+\frac{2}{3})}{3(\frac{2}{3})^2}$$

$$\Rightarrow P\left(0<X<\tfrac{1}{2} \,\middle|\, Y = \tfrac{2}{3}\right) = \frac{2}{3(\frac{2}{3})^2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x + \tfrac{2}{3}\right) dx$$

$$= \frac{2}{3(\frac{2}{3})^2} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

حل: $y \geq x$ [illegible] $x \leq \frac{1}{2}$

$$P\left(\frac{1}{4} < y < \frac{1}{3} \mid x = \frac{1}{6}\right) =$$

$$\Rightarrow f\left(y \mid \frac{1}{6}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{6} + y\right)}{1 + 2\frac{1}{6} - 3\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{2}{1 + \frac{2}{6} - \frac{3}{36}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \left(y + \frac{1}{6}\right) dy$$

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2} \mid y = \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{1}{2}} = 1$$

احتمال حتمی:

توزیع های شرطی:

امید ریاضی شرطی:

فرض کنید $f(y|x)$ تابع احتمال شرطی است، و $g(y)$ تابع حقیقی از y است.

در این صورت امید ریاضی $E(g(y)|x)$ بصورت زیر است:

$$E\left(g(y) \mid x\right) = \int_y g(y) f(y|x)\, dy < \infty$$

مثال: مطلوبست $E(y^2 + 5y + 1 \mid x)$

$0 < y < 1 \,,\; 0 < x < y$

$$\int_y \left(y^2 + 5y + 1\right) f(y|x)\, dy = \int_x^1 \left(y^2 + 5y + 1\right) \frac{2(x+y)}{1 + 2x - 3x^2}\, dy$$

$\boxed{\text{چرا؟ تابعی از } x \text{ است.}}$

* گشتاورهای شرطی:

$g(y) = Y^n \quad n \geq 1 \,,\; n \in \mathbb{N}$

$\forall n = 1 \Rightarrow g(y) = Y$

گشتاور مرتبه اول $f(y|x)$

میانگین شرطی $f(y|x)$

گشتاور مرتبه ۲ام شرطی $y|x$ $\qquad E(y^2|x) = \int_y y^2 f(y)\, dy$

$E y = \int y f(y)\, dy \Rightarrow E\, y|x = \int y f(y|x) = \varphi_1(x)$ تابعی از x

$\Rightarrow \sigma_y^2 = E y^2 - E^2 y \Rightarrow \sigma^2_{y|x} = E\, y^2|x - (E\, y|x)^2 = \varphi_2(x)$ تابعی از x

مثال از مثال فوق مطلوبست: $\sigma^2_{y|x} = ?$

$$E(y|x) = \int_y y f(y|x)\, dx = \int_x^1 y \cdot \frac{2(x+y)}{1+2x-3x^2}\, dy = \frac{2}{1+2x-3x^2}\left[\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_x^1 = \varphi_1(x)$$

$$E(y^2|x) = \frac{2}{1+2x-3x^2}\left[\frac{xy^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]_x^1 = \varphi_2(x)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \varphi_2(x) - \varphi_1^2(x)$$

تعریف: فرض کنید $f(x,y)$ تابع احتمال توأم و $g(x,y)$ تابعی از دو متغیر x و y باشد در این صورت:

امید ریاضی $g(x,y)$ بصورت زیر است:

$$E\left(g(x,y)\right) = \int_x\int_y g(x,y) \cdot f(x,y)\, dy\, dx < \infty$$

$$E(x^2) = \int_x\int_y x^2 f(x,y)\, dy\, dx = \int_x x^2 f_1(x)\, dx$$

$$E(y^k) = \int_x\int_y y^k f(x,y)\, dy\, dx = \int_y y^k f_2(y)\, dy$$