اگر $g(x,y)=x^r y^k$ $\qquad r,k \in \{0\}\cup N$

$$\Rightarrow E\,g(x,y)=E(x^r y^k)=\int_x\int_y x^r y^k f(x,y)\,dy\,dx$$

گشتاور توأم مرتبه r ام x و k ام y.

اگر $g(x,y)=xy$

$$\Rightarrow E\,g(x,y)=Exy$$

$$\int_x\int_y xy\,f(x,y)\,dy\,dx$$

گشتاور توأم x و y
که در واقع گشتاور توأم مرتبه ۱ مورد نظر است.

کوواریانس: * واریانس مشترک *

فرض کنید $f(x,y)$ تابع احتمال توأم است، اگر Ex^2, Ey^2 موجود باشند، آنگاه کوواریانس X و Y به صورت زیر است:

$$\sigma_{X,Y}=E\big[(X-EX)(Y-EY)\big]$$

$$=EXY-EX.EY$$

تعریف: فرض کنید $f(x,y)$ تابع احتمال توأم است. اگر $f_1(x), f_2(y)$ توابع حاشیه‌ای باشند آنگاه X و Y مستقل‌اند اگر و فقط اگر:

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

مثال: آیا در مثال قبل X و Y مستقل‌اند؟

$f_1(x)=(1+2x-3x^2)$, $\quad f_2(y)=3y^2$ $\qquad f(x,y)=2(x+y)$

$\Rightarrow f(x,y)\neq f_1(x)\cdot f_2(y)$ * بنابراین در این مثال X و Y غیرمستقل‌اند.

تعمیم: اگر $f(x,y)$ تابع احتمال توأم x و y مستقل از هم باشند آنگاه:

$$\sigma(x,y) = Cov(x,y) = E_{xy} - E_x \cdot E_y = 0$$ * آیا عکس این تعمیم درست است؟

تعمیم: اگر x و y مستقل از هم باشند آنگاه $g(x)$ و $h(y)$ نیز مستقل از هم هستند.

و نیز: $Cov(h(y), g(x)) = 0$

مثال: تابع احتمال توأم y و x بدین صورت است:

$$f(x,y) = \begin{cases} c & 0<x<y \\ & 0<y<1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

الف) c را بیابید.

ب) احتمال $P(y<2x)$

ج) $P(0<x<\frac{1}{2} \mid y=\frac{2}{3})$

د) آیا x,y استقلال دارند: $f(x,y) \overset{?}{=} f_1(x) \cdot f_2(y)$

ه) ضریب همبستگی $=?$

و) مطلوبست $\sigma^2_{y|x} = ?$

الف) $\iint f(x,y)\,dy\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 \int_x^1 c\,dy\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 c(1-x)\,dx = 1$

$\Rightarrow c - \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{c=2}$

ب) $P(y<2x) = 1 - P(y>2x) = 1 - \int_0^{1/2}\int_{2x}^1 2\,dy\,dx = \frac{1}{2}$

ج) $P(0<x<\frac{1}{2} \mid y=\frac{2}{3}) \Rightarrow \quad f(x\mid y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$

$f_1(x) = \int_{y=x}^{1} 2\,dy = 2-2x$

$f_2(y) = \int_0^y 2\,dx = 2y$

۴۷

$$P(0<X<\tfrac{1}{2} \mid Y=\tfrac{2}{3}) = \int f(x \mid \tfrac{2}{3})dx = \int \frac{f(x,2/3)}{f_2(2/3)}dx = \int_0^{1/2} \frac{2}{4/3}dx = \frac{1}{4}$$

د)

استقلال x و y

$$f(x,y) \overset{?}{=} f_1(x)\cdot f_2(y)$$

$$4y(1-x) \neq f(x,y)$$ مستقل نیستند

ه) ضریب همبستگی : $\rho_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{1}{2}$

چون x و y مستقل نیستند از این ~~σ_{xy}~~ کوواریانس همبستگی و ضریب
همبستگی

$$\boxed{Cov(x,y) = \sigma_{xy} = Ex\cdot y - Ex\cdot Ey} \qquad \sigma_x^2 = Ex^2 - E^2x \quad , \quad \sigma_y^2 = Ey^2 - E^2y$$

$$Ex = \int_x x f_1(x)\,dx \qquad Ey = \int_y y f_2(y)\,dy \qquad , \quad Exy = \iint_{x\,y} xy\,dy\,dx$$

$$Ex^2 = \int_x x^2 f(x) \qquad Ey^2 = \int_y y^2 f_2(y)\,dy$$

ز) $\sigma^2_{y|x} = Ey^2|x - E^2 y|x$

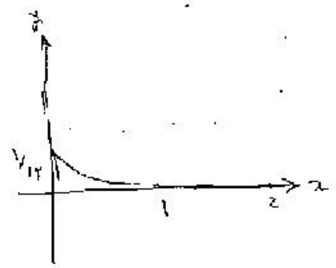
$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{2}{2-2x} = \frac{1}{1-x}$$

$$Ey|x = \int_x^1 y f(y|x)\,dy = \int_x^1 y\left(\frac{1}{1-x}\right)dy = \frac{1}{2}(1+x)$$

$$Ey^2|x = \int_x^1 y^2 f(y|x)\,dy = \int_x^1 y^2 \frac{1}{1-x}\,dy = \frac{1}{3}(1+x+x^2)$$

$$\Rightarrow \sigma^2(y|x) = \frac{1}{3}(1+x+x^2) - \frac{1}{4}(1+x^2+2x) = \frac{1}{12}(x-1)^2$$

رسم تابع واریانس:



$$\sigma^2(y|\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{2}-1)^2$$

تعریف: فرض کنید $f(x,y)$ تابع احتمال توأم، Ex^2, Ey^2 وجود دارند آنگاه

ضریب همبستگی x و y بدین صورت است:

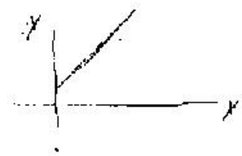
$$\rho_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{Exy - Ex.Ey}{\sigma_x \sigma_y}$$

تمرین ۱: ثابت کنید که $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$

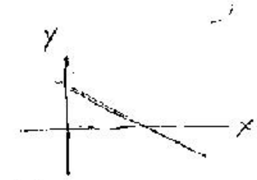
تمرین ۲: اگر Ex^r وجود داشته باشد ثابت کنید Ex^k وجود دارد برای هر $k<r$

تمرین ۳: اگر $\rho_{xy}=0$ باشد، لزوماً x و y مستقل از هم هستند.

x و y مستقل از هم هستند $Exy = Ex.Ey$



$$\rho_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{هنگامی بین x و y رابطهٔ خطی کامل برقرار باشد.} \\ & \text{یعنی تغییرات x روی y مفید کامل است.} \\ 0 & \text{x و y همبسته نیستند.} \\ -1 & \text{رابطهٔ خطی بین x و y در دو جهت مخالف} \end{cases}$$



اگر $|\rho_{xy}|$ باشد، مثبت. برای کارکرد هرچه به ۱ نزدیکتر باشد مفیدتر خواهد بود.

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$$
$$EXY=EX\cdot EY$$

اگر X,Y مستقل $\Rightarrow$ ۱) $\rho_{XY}=0$ $\quad Cov(x,y)=0$ $\quad , \sigma(x,y)=0$

۲) $p(X\in A, Y\in B)=p(X\in A)\cdot p(Y\in B)$

۳) $p(X\in A \mid Y\in C)=p(X\in A)$

تمام حالت توام به ضرب تبدیل می‌شود
و شرط‌ها به غیرشرطی تبدیل می‌گردد.

۴) $EX|Y=EX$

۵) $F(x,y)=F(x)\cdot F(y)$

* میزان همبستگی عنوان اولین قدم را برای مستقل بودن X و Y نشان می‌دهد

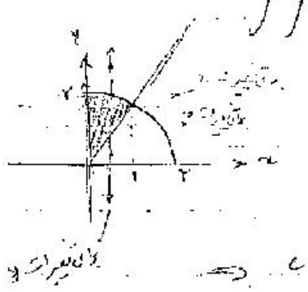
مثال) با فرض $f(x,y)$ داده شده:

$$f(x,y)=\begin{cases} c(xy) & x^2+y^2<4\ ,\ x,y>0\ ,\ y>\sqrt{3}x \\ 0 & o.w \end{cases}$$

مطلوبست تمام سوالات مستقل آنها

الف) $c=?$

$$\iint f(x,y)\,dy\,dx=1 \Rightarrow \int_0^1\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{4-x^2}} cxy\,dy\,dx=1$$



$$\Rightarrow \int_0^1 cx\,dx\left[\frac{4-x^2-3x^2}{2}\right]=\int_0^1 c(2-2x^2)x\,dx=1$$

$$\Rightarrow c\left[x^2-\frac{1}{2}x^4\right]_0^1=1 \Rightarrow \boxed{c=2}$$

ب) x و y مستقل‌اند؟

$$f(x,y)\overset{?}{=}f_1(x)\cdot f_2(y)$$

$$f_1(x)=\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy=\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{4-x^2}} 2xy\,dy = x(4-x^2)-x(3x^2)=x(4-4x^2)$$
$$0<x<1$$

۷۲

$$f_Y(y) = \int_x f(x,y)\,dx$$

تا صورت به منظور ... و تقسیم شود پس:

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^{y/\sqrt{3}} 2xy\,dx & 0<y<\sqrt{3} \\ \int_0^{\sqrt{4-y^2}} 2xy\,dx & \sqrt{3}<y<2 \end{cases}$$

حال باید برای مرزهای $f(x,y)$ تغییر به دو قسمت تقسیم کرد.

توزیع های توأم گسسته:

فرض کنید (X,Y) متغیر تصادفی توأم است. تابع $f(x,y)$ را تابع احتمال توأم گسسته برای X,Y می نامیم هرگاه شرطهای زیر برقرار باشد.

1) $0 \leq f(x,y) \leq 1 \quad \forall (x,y)$

2) $\sum_y \sum_x f(x,y) = 1$

تعریف: فرض کنید $f(x,y)$ تابع احتمال توأم برای X,Y باشد. اگر $g(x,y)$ تابع معینی از X,Y باشد، آنگاه امید ریاضی $g(X,Y)$ به صورت زیر است:

$$E\,g(X,Y) = \sum_y \sum_x g(x,y) f(x,y) < \infty$$

1) $g(x,y) = X^l \qquad l \geq 0,\ l \in \mathbb{N}$

گشتاور مرتبه l ام:

$\mu'_l = E X^l$

N1

تابع حاشیه‌ای X در تابع گسسته: $f_1(x) = \sum_y f(x,y)$

$$\Rightarrow E g(x) = E x^l = \sum_y \sum_x x^l f(x,y) = \sum_x x^l f_1(x) < \infty$$

تابع ضربی: $g(x,y) = x^l y^k$

گشتاور توأم l ام X و k ام Y: $\Rightarrow E x^l y^k = \sum_y \sum_x x^l y^k f(x,y)$

که می‌توان واریانس، کوواریانس را نیز محاسبه کرد:

ضریب همبستگی: $\rho_{X,Y} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

برای استقلال X و Y (استقلال کامل) باید نشان داد $f_1(x) f_2(y) = f(x,y)$
را محاسبه کرد اگر تساوی‌ها برقرار نباشد، عدم استقلال است.
بنابراین:
در گسسته‌ها استقلال کامل X و Y وقتی است که رابطه فوق برای همه Xها و Yها برقرار باشد.

مثال) فرض کنید تابع توأم (X,Y) به صورت زیر داده شده است.

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+2y) & x=0,1,2 \\ & y=1,2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

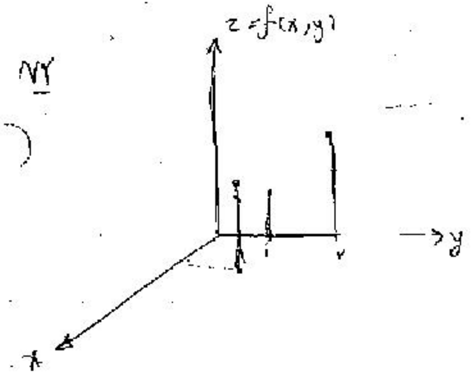
الف) به ازای چه مقداری از c، تابع f تابع احتمال توأم است؟
شرط (۱) برقرار است. $f(x,y) \geq 0$ که
حل شرط دوم

$$c \sum_{x=0}^{2} \left(\sum_{y=1}^{2} (x+2y) \right)$$

$$= c \sum_{x=0}^{2} \left((x+2) + (x+4) \right) = c \sum_{x=0}^{2} (2x+6) = c\left[6+8+10\right] = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{24}} \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{24}(x+2y) \quad \begin{matrix} x=0,1,2 \\ y=1,2 \end{matrix}$$

$$= 0 \quad \text{o.w}$$



$f(0,1)=\frac{2}{24}$, $f(0,2)=\frac{4}{24}$

$f(1,1)=\frac{3}{24}$, $f(1,2)=$

نمودار این تابع در فضای $\mathbb{R}^3$ است.

$$p(X=0,\ Y=1)=f(0,1)=\frac{2}{24}$$

در حالت کلی:

1) $p(X=x_0,\ Y=y_0)=f(x_0,y_0)$

2) $p(a\leq X\leq b,\ c\leq Y\leq d)=\sum_{x=a}^{b}\sum_{y=c}^{d}f(x,y)$

$f(x,y)$

$Y \backslash X$	0	1	2	$f_2(y)$
1	$f(0,1)$ $\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{9}{24}$
2	$\frac{4}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{15}{24}$
$f_1(x)$	$\frac{6}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{10}{24}$	1

$p(X=1,\ Y=1)=\frac{3}{24}$

$p(1\leq X\leq 2,\ Y=2)=f(1,2)+f(2,2)$

$=\frac{5}{24}+\frac{6}{24}=\frac{11}{24}$

$$p(X=2)=\sum_{y}f(2,y)=f_1(2)=\frac{10}{24}$$

$f_1(x)=\sum_{y}f(x,y)\ \Rightarrow$

$\Rightarrow f_1(0)=\sum_{y}f(0,y)=\frac{2}{24}+\frac{4}{24}=\frac{6}{24}$ جمع ستون مربوطه

نتیجه: $\sum_{x=0}^{2}f_1(x)=1$, $\sum_{y=1}^{2}f_2(y)=1$

$$\sigma_x^۲ = Ex^۲ - (Ex)^۲$$

$$Ex = \sum x f_1(x) = ۰ \times \frac{۶}{۲۴} + ۱ \times \frac{۸}{۲۴} + ۲ \times \frac{۱۰}{۲۴} = \frac{۲۸}{۲۴}$$

$$Ex^۲ = \sum x^۲ f_1(x) = ۰^۲ \times \frac{۶}{۲۴} + ۱^۲ \times \frac{۸}{۲۴} + ۲^۲ \times \frac{۱۰}{۲۴} = \frac{۴۸}{۲۴}$$

$$\Rightarrow \sigma_x^۲ = \frac{۴۸}{۲۴} - \left(\frac{۲۸}{۲۴}\right)^۲$$ واریانس

$$E(y) = \sum_x \sum_y y f(x,y) < \infty$$

$$= \sum_y y f_۲(y) \quad ; \quad f_۲(y) = \sum_x f(x,y)$$

ضریب همبستگی: $\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{Exy - Ex\,Ey}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

$$Exy = \sum_x \sum_y xy f(x,y)$$

$$= ۰ + \frac{۲۰}{۲۴} + \frac{۸}{۲۴} + ۰ + ۲ \times \frac{۵}{۲۴} + ۴ \times \frac{۶}{۲۴} = \frac{۶۵}{۲۴}$$

$$Ey = \sum_y y f_۲(y) = ۱ \times \frac{۹}{۲۴} + ۲ \times \frac{۱۵}{۲۴} = \frac{۳۹}{۲۴}$$

$$Ey^۲ = \frac{۹}{۲۴} + \frac{۶۰}{۲۴} = \frac{۶۹}{۲۴}$$

$$\sigma_y^۲ = \frac{۶۹}{۲۴} - \left(\frac{۳۹}{۲۴}\right)^۲$$

$$\Rightarrow \rho_{xy} = \frac{\frac{۶۵}{۲۴} - \frac{۳۹}{۲۴} \times \frac{۲۸}{۲۴}}{\sqrt{\left(\frac{۴۸}{۲۴} - \left(\frac{۲۸}{۲۴}\right)^۲\right)\left(\frac{۶۹}{۲۴} - \left(\frac{۳۹}{۲۴}\right)^۲\right)}}$$

استقلال کامل x و y در بررسی :

$$f(x,y) \overset{?}{=} f_1(x)\, f_2(y) \qquad \forall (x,y)$$

$$f(1,2) = \frac{5}{24} \overset{?}{=} f_1(1)\cdot f_2(2) = \frac{8}{24}\cdot\frac{15}{24} = \frac{5}{24} \checkmark$$

تساوی برقرار است

تساوی برای همه نقاط باید برقرار باشد

تا استقلال کامل باشد :

$$f(0,1) = \frac{2}{24} = f_1(0)\cdot f_2(1) \neq \frac{6}{24}\cdot\frac{9}{24}$$

x و y استقلال کامل ندارند :

* نکته : اگر در جدول احتمال برای $f(x,y)$ یک صفر وجود داشته باشد، بنابراین استقلال کامل ندارد (زیرا هیچکدام از توابع حاشیه‌ای صفر نمی‌شوند درنتیجه تساوی برقرار نخواهد بود)

$$P(X=1 \mid Y=1)$$

تابع احتمال شرطی : $f(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_2(y)}$

۱) اگر ضابطه داشته باشیم :

۲) اگر جدول داشته باشیم :

$$P(X=1 \mid Y=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{3/24}{9/24} = \frac{1}{3}$$

بنابراین در ۲ حالت می‌توان احتمال شرطی را محاسبه کرد :

بنابراین می‌توان یک جدول شرطی نیز داشته باشیم که همراه حاشیه‌ای ها ، احتمال را محاسبه کرد :

$$f(x|y)\cdot f_2(y) = f(x,y)$$

$$f(y|x)\cdot f_1(x) = f(x,y)$$

۲۵

$f(x|y)$

$y \backslash x$	0	1	2	
1	$f_{x\|y}(0\|1) = 2/9$	$\frac{2/24}{9/24}$	$\frac{4/24}{9/24}$	1
2	$\frac{4/24}{15/24}$	$\frac{5/24}{15/24}$	$\frac{6/24}{15/24}$	1

$f(0|1) = \frac{f(0,1)}{f_2(1)}$

$\leftarrow f(x|1) = \frac{2/24}{9/24} = 2/9$

$\leftarrow f(x|2)$

$$* \quad P(a \le x \le b \mid y = c) = \sum_{x=a}^{b} f(x|c)$$

$$P(a \le x \le b \mid c \le y \le d) = \sum_{x=a}^{b}\sum_{y=c}^{d} f(x|y) \quad \int_a^b\int_c^d f(x|y)\,dy\,dx$$

$P(y = 2 \mid x = 1)$ باید جدول $f(y|x)$ را تشکیل دهیم.
و یا از شکل خلاصه استفاده کنیم:

$$\sigma^2_{x|y} = E\,x^2|y - [E(x|y)]^2$$

$$E\,x|y = \sum_x x\, f(x|y)$$

در مورد این مثال چون y مشخص نیست باید
برای هر دو ۱ و ۲ حساب کرد:

$$= \begin{cases} \sum_x x f(x|1) = 0 + \frac{2}{9} + \frac{8}{9} \\ \sum_x x\, f(x|2) = 0 + \frac{5}{15} + \frac{12}{15} = \frac{17}{15} \end{cases}$$

$$E\,x^2|y = \begin{cases} \sum_x x^2 f(x|1) = \\ \sum_x x^2 f(x|2) = \end{cases}$$

$$\sigma^2_{x|1} = E\,x^2|1 - (E\,x|1)^2$$

$$\sigma^2_{x|2} = E\,x^2|2 - (E\,x|2)^2$$

مثال) فرض کنید درون ظرفی ۳ مهره سفید و ۴ مهره سبز موجود است. از این ظرف ۲ مهره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را تعداد مهره‌های سفید انتخابی و Y را تعداد مهره‌های سبز انتخابی تعریف می‌کنیم.

الف) تابع احتمال توأم X و Y را بیابید.

ب) احتمال اینکه $X+Y>1$ باشد را بیابید.

ج) آیا X و Y استقلال دارند؟

د) احتمال $p(X=1|Y=1)$ باشد چقدر است؟

هـ) امید $E(Y|X=1)$ چقدر است؟

الف)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\binom{3}{x}\binom{4}{y}}{\binom{7}{2}} & x+y=2 \;\; \begin{cases} x=0,\ y=2 \\ x=1,\ y=1 \\ x=2,\ y=0 \end{cases} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\text{ب)}\ P(X+Y>1)=\frac{\binom{3}{0}\binom{4}{2}+\binom{3}{1}\binom{4}{1}+\binom{3}{2}\binom{4}{0}}{\binom{7}{2}}=1$$

ج) خیر، استقلال دارند.

چون شرط $f(x,y)=f_1(x).f_2(y)$ برای تمامی مقادیر x و y برقرار شد. بنابراین باید در جهات تساوی فوق برقرار باشد.

د) چون x و y نسبت به هم استقلال دارند بنابراین:

$$p(X=1|Y=1)=p(X=1)=f_1(1)=\sum_y f(1,y)$$

هـ) چون x و y نسبت به هم مستقل‌اند بنابراین:

$$E(y|x=1)=Ey=\sum_y y f_2(y)$$

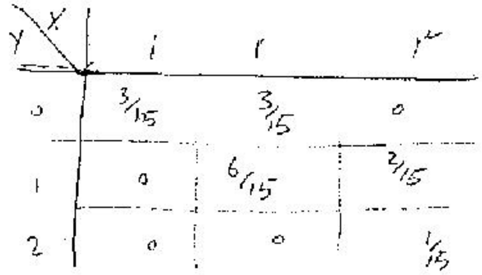
$\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{1}{z}$ $\quad x+y+z=4$

مثال) در ظرفی ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و ۱ مهره قرمز موجود است.

۴ مهره به تصادف و بدون جایگذاری از ظرف انتخاب می‌کنیم. X را تعداد مهره‌های سفید انتخابی تعریف می‌کنیم و Y را تعداد مهره‌های سیاه باقیمانده در ظرف تعریف می‌کنیم.

الف) تابع احتمال $f(x,y)$ را مشخص کنید:

انتخاب‌های بدون جایگذاری



$y \backslash x$	1	2	3
0	3/15	3/15	0
1	0	6/15	2/15
2	0	0	1/15

$$f(x,y)=\frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{1}{\cdot}}{\binom{6}{4}} \qquad x=1,2,3 \quad y=0,1,2 \qquad \boxed{3 \le x+y \le [illegible]}$$

توزیع توابعی از متغیرهای تصادفی (الف) پیوسته

تعریف: فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته با تابع احتمال $f(x)$ است،

تعریف می‌کنیم $Y=g(x)$ (تابع یک به یک) آنگاه تابع احتمال Y به صورت زیر است.

Y: تابع چگالی توابع احتمال: ژاکوبین تبدیل

$$h_Y(y)=f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

اثبات با استفاده از تابع توزیع:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)$$
$$=P\left(X\le g^{-1}(y)\right)$$
$$=\int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)\,dx$$

۱) $F \to H \Rightarrow$ تابع توزیع $H_y(y) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_x(x)\,dx$

تابع احتمال: $h_y(y) = \dfrac{dH_y(y)}{dy} = \dfrac{d}{dy}\left(\int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_x(x)\,dx\right)$

$= (g^{-1}(y))'_y \cdot f_x(g^{-1}(y))$

$(g^{-1}(y))'$ در اینجا مساوی است با $= \dfrac{dx}{dy}$

$= f_x(g^{-1}(y)) \left| \dfrac{dx}{dy} \right|$

۲) مثال: فرض کنید x دارای توزیع یکنواخت در فاصله (۰،۱) است.

$f_x(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & o.w \end{cases}$

اگر $y = -2\ln x$ باشد مطلوبست $h_y(y)$:

$h_y(y) = 1 \times \left|\dfrac{dx}{dy}\right|$

$y = -2\ln x \Rightarrow x = e^{-y/2} \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} = -\frac{1}{2} \times e^{-y/2}$

$\Rightarrow h_y(y) = \frac{1}{2} e^{-y/2}$

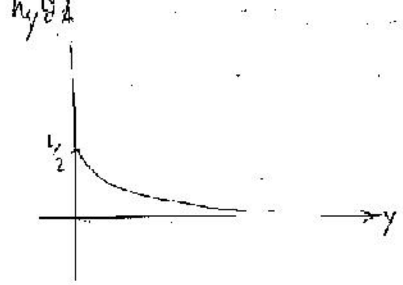
برای تعیین حدود y را می‌یابیم

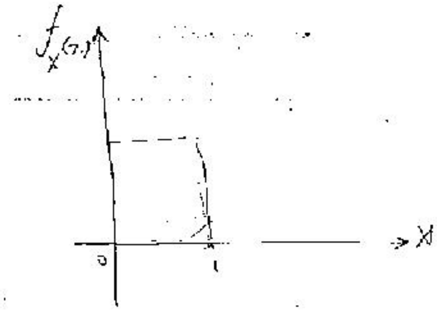
$0<x<1 \Rightarrow 0<e^{-y/2}<1 \xrightarrow{\text{از طرفین ln می‌گیریم}} -\infty < -y/2 < 0$

$\Rightarrow \boxed{0<y<+\infty}$ تغییرات y

$\int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-y/2}\,dy = -e^{-y/2}\Big|_0^\infty = 1$ بنابراین $h(y)$ تابع احتمال است

۳) $h_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-y/2} & y>0 \\ 0 & o.w \end{cases}$





بنابراین $h_Y(y)$ یک توزیع گاما و یک توزیع کای اسکور با درجه آزادی ۲ است.

$$h_Y(y) = \frac{y^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})\, 2^{\frac{1}{2}}} \qquad r = 2$$

توزیع کای اسکور همین حالت درجه آزادی است.

$$\Rightarrow Y \sim \chi^2_{(2)}$$

$$p(Y < \tfrac{1}{2} E Y) = 1$$

ب) در حالت گسسته:

$f(x)$ تابع احتمال گسسته است و $y = g(x)$ آنگاه تابع احتمال، توابع احتمال:

$$h_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))$$

$$h_Y(y) = p(Y = y) = p(g(x) = y) \Longrightarrow p(X = g^{-1}(y))$$
$$= f_X(g^{-1}(y))$$

مثال: اگر $X \sim B(n, p)$ ، $y = X^2$ آنگاه:

$$h_Y(y) = p(Y = y) = p(g(x) = y) = p(X^2 = y) = p(X = \pm\sqrt{y})$$

منفی نمی‌باشد

$$= f(\sqrt{y}) \Rightarrow f(\sqrt{y}) = \binom{n}{\sqrt{y}} p^{\sqrt{y}} q^{n-\sqrt{y}}$$

$$h(y) = f_X(g^{-1}(y)) = f(\sqrt{y})$$ حال باید جذر y را بیابیم

۸۰

$\rightarrow f(\sqrt{y}) = \binom{n}{\sqrt{y}} p^{\sqrt{y}} q^{n-\sqrt{y}} \qquad y = 0, 1, 4, 9, \dots, n^2$

تعریف: فرض کنید (X_1, X_2) متغیر تصادفی توأم گسسته با تابع احتمال توأم

$f(x_1, x_2)$ است. اگر داشته باشیم $\quad y_1 = h_1(x_1, x_2)$

$y_2 = h_2(x_1, x_2)$

در این صورت تابع احتمال توأم (y_1, y_2) بصورت زیر است:

$$g_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1, X_2}(w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2))$$

$$\begin{cases} y_1 = h_1^{-1}(x_1, x_2) \\ y_2 = h_2^{-1}(x_1, x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = w_1(y_1, y_2) \\ x_2 = w_2(y_1, y_2) \end{cases}$$

x_1, x_2 را برحسب y_1 و y_2 تعیین می‌کنیم

مثال) اگر $X_1 \sim P(\lambda_1)$ ، $X_2 \sim P(\lambda_2)$ ، X_1, X_2 دارای توزیع پواسن با پارامترهای λ_1 و λ_2 هستند و X_1 و X_2 مستقل هستند.
تابع احتمال $Y_1 = X_1 + X_2$ را بیابید:
تابع Y_2 را خودمان تعیین کنیم:

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = y_2 \\ x_1 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$x \sim P(\lambda) \rightarrow f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

چون x_1 و x_2 مستقل‌اند بنابراین تابع احتمال توأم آنها حاصلضرب آنهاست:

$$f(x_1, x_2) = \frac{\lambda_1^{x_1} e^{-\lambda_1}}{x_1!} \cdot \frac{\lambda_2^{x_2} e^{-\lambda_2}}{x_2!} \qquad x_i = 0, 1, \dots \quad \lambda_i > 0$$

$$\longrightarrow \quad g_{y_1,y_2}(y_1,y_2) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\,\lambda_1^{y_1-y_2}\,\lambda_2^{y_2}}{(y_1-y_2)!\;y_2!}$$

X تغییرات $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1,x_2 = 0,1,\dots\}$

Y تغییرات $A \xrightarrow{T} B = \left\{(y_1,y_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} \overset{x_2 = y_2}{y_2 = 0,1,\dots,y_1} \\ y_1 = 0,1,\dots \end{array}\right\}$ $\qquad y_2 = x_2 \geq 0$, $\; y_1 - y_2 = x_1 = 0,1,\dots \Rightarrow y_2 \leq y_1$

حال می‌خواهیم ببینیم که آیا جمع X ها پواسن می‌شود یا خیر. (مجموع دو پواسن مستقل)

* g_{y_1} درواقع توزیع حاشیه‌ای g_{y_1,y_2} است.

$$g_{y_1}(y_1) = \sum_{y_2=0}^{y_1} g_{y_1,y_2}(y_1,y_2)$$

$$= \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\,\lambda_1^{y_1-y_2}\,\lambda_2^{y_2}}{(y_1-y_2)!\;y_2!} \times \frac{y_1!}{y_1!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \binom{y_1}{y_2} \lambda_1^{y_1-y_2}\,\lambda_2^{y_2}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\,(\lambda_1+\lambda_2)^{y_1}}{y_1!} \qquad y_1 = 0,1,\dots$$ یعنی توزیع حاصل توزیع پواسن

n.w

$\neq 0$

بنابراین توزیع حاصل جمع دو توزیع پواسن با پارامترهای λ_1, λ_2، یک توزیع پواسن با پارامتر $\lambda_1+\lambda_2$ است.

نتیجه: این رابطه برای n متغیر نیز برقرار است.

تعمیم: فرض کنید X_1 و X_2 دارای توزیع احتمال پواسن با پارامترهای λ_1 و λ_2 است و X_1 و X_2 مستقل‌اند. اگر $Y_1 = X_1 + X_2$ باشد آنگاه

$$Y_1 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

اثبات: از تابع مولد گشتاورها استفاده می‌کنیم:

$$M_{Y_1}(t) = Ee^{tY_1} = Ee^{t(X_1+X_2)} = Ee^{tX_1} \cdot e^{tX_2} = Ee^{tX_1} \cdot Ee^{tX_2}$$

$$= M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t)$$

حال باید تابع مولد گشتاور توزیع پواسن را بدست آورد.

$$X \sim P(\lambda) \longrightarrow M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

حال جایگزین می‌کنیم:

$$M_{Y_1}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)} \cdot e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$$

بنابراین Y_1 دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda_1+\lambda_2$ است. (زیرا تابع مولد گشتاور آن مانند تابع مولد گشتاور توزیع پواسن است).

نکته: همین ترتیب و با تعمیم قضیه فوق و مشابه اثبات قبل برای n متغیر برقرار است:

$$X_i \sim P(\lambda_i) \quad , \quad X_i \text{ ها مستقل} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

توزیع

تمرین: فرض کنید $X_1 \sim B(n_1, p)$ ، $X_2 \sim B(n_2, p)$ که X_1 ، X_2 مستقل هستند نشان دهید:

$$Y_1 = (X_1 + X_2) \sim B(n_1 + n_2, p)$$

در حالت کلی: $X_i \sim B(n_i, p)$ ، $i = 1, \dots, n$ که X_i ها مستقل‌اند، آنگاه:

$$\sum x_i \sim B(\sum n_i, p)$$

تعریف: فرض کنید (X_1, X_2) متغیرهای تصادفی توأم پیوسته با تابع احتمال توأم $f(x_1, x_2)$ باشد. اگر $Y_1 = h_1(X_1, X_2)$ و $Y_2 = h_2(X_1, X_2)$ ($1-1$) آنگاه:

$$g_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1, X_2}\left(w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)\right) |J|$$

روش اثبات:

$$\int_{x_1}\int_{x_2} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1 \quad (1)$$

در انتگرال دوگانه تغییر متغیر می‌دهیم:

$$|J| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{matrix} \right\|$$

تابع احتمال:

$$(1) \longrightarrow = \int_{y_1}\int_{y_2} f(w_1, w_2)|J|\, dy_1\, dy_2 = 1$$

مثال: فرض کنید X_1 ، X_2 متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع نمایی با پارامتر ۱ باشند. اگر $Y_1 = X_1 + X_2$ آنگاه Y_1 را بیابید.

$X_i \sim E(1)$ توزیع نمایی حالت خاص توزیع گاما با $\alpha = 1$ و $\beta = 1$

$$f(x_i) = \lambda e^{-\lambda x} = e^{-x} \quad x > 0$$
$i = 1, 2$

$$= 0 \quad \text{o.w}$$

تابع توأم: x_1, x_2 مستقل اند پس

$$f(x_1,x_2) = e^{-x_1} \cdot e^{-x_2}$$

$$= e^{-(x_1+x_2)} \qquad x_i > 0,\ i=1,2$$

$$= 0 \qquad \text{o.w}$$

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_2 = y_2 \\ x_1 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$g_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = e^{-y_1} \qquad y_2 < y_1,\ y_1 > 0$$

$$= 0 \qquad \text{o.w}$$

$$g_{Y_1}(y_1) = \int_{y_2=0}^{y_1} e^{-y_1}\, dy_2 = e^{-y_1}\left[y_2\right]_0^{y_1} = y_1 e^{-y_1} \qquad y_1 > 0$$

$$= 0 \qquad \text{o.w}$$

$X_i \sim \Gamma(1,1)$

$\rightarrow Y_1 \sim \Gamma(2,1)$ که این یک توزیع "گاما" با $\beta=1$ و $\alpha=2$ است.

بنابراین اگر هر متغیر دارای توزیع "گاما" با پارامتر β و α_1 و متغیر دیگر β و α_2

آنگاه اگر متغیر حاصل جمع این دو متغیر باشد توزیع این متغیر جدید "گاما"

با β ثابت و $\alpha_1+\alpha_2$ جدید است.

تمرین: فرض کنید $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$ که $i=1,2,\dots,n$ و x_i ها مستقل

از هم باشند آنگاه نشان دهید

$$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta\right)$$

برای حل این تمرین از تابع مولد گشتاور استفاده کنیم.

$$M_Y(t) = \prod M_{X_i}(t)$$

$$M_Y(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha_1}} \times \cdots \times \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha_n}} = \frac{1}{(1-\beta t)^{\sum \alpha_i}}$$

* از توزیع گاما $B=(\alpha,\beta)$ ، توزیع بتا بدست می‌آید

مثال) اگر $X_i \sim \Gamma(1,1)$ و $Y_1=\frac{X_1}{X_1+X_2}$ باشد

مطلوبست $g_{Y_1}(y_1)=?$

ابتدا Y_2 را تعیین کنیم:

$$\begin{cases} Y_1=\frac{X_1}{X_1+X_2} \\ Y_2=X_1+X_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1=\frac{x_1}{x_1+x_2} \\ y_2=x_1+x_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1=y_1 \cdot y_2 \\ x_2=y_2-y_1y_2 \end{cases}$$

چون X_i ها مستقل اند بنابراین تابع توام آنها ضرب توابع توزیع آنها است:

$$f(x_1,x_2)=e^{-(x_1+x_2)} \qquad x_1,x_2>0$$

$$A=\{(x_1,x_2) \mid x_1,x_2>0\}$$

$$J=\begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ -y_2 & 1-y_1 \end{vmatrix}=y_2-y_1y_2+y_1y_2=y_2$$

$$\longrightarrow g_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=e^{-y_2}\cdot y_2$$

$$\begin{cases} x_1=y_1y_2 \longrightarrow x_1>0 \longrightarrow y_1 \cdot y_2>0 \longrightarrow y_1>0 \ , \ y_2>0 \\ x_2=y_2-y_1y_2 \longrightarrow x_2>0 \longrightarrow y_2(1-y_1)>0 \longrightarrow y_2>0 \ , \ y_1<1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\begin{cases} e^{-y_2}y_2 & y_2>0 \ , \ 0<y_1<1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$g_1(y_1)=\int_{y_2=0}^{+\infty} g(y_1,y_2)\,dy_2=\int_0^{\infty} y_2e^{-y_2}\,dy_2=1$$

$$\longrightarrow g_1(y_1)=\begin{cases} 1 & 0<y_1<1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$ توزیع یکنواخت

در بعضی حالات این یک توزیع به بتا تبدیل میشود.

۱) تقریب احتمالهای توزیع دوجمله‌ای با توزیع پواسن:

فرض کنید $X \sim B(n, p)$ است، در این صورت برای n های بزرگ، p کوچک
، $np = \lambda \leq 10$ آنگاه

$$X \simeq P(\lambda)$$

دوجمله‌ای $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0 \\ np = \lambda}} f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \qquad \lambda > 0, \quad x = 0, 1, \dots$$

مثال)

فرض کنید $X \sim B(100, \frac{2}{100})$ مطلوبست احتمال:

۱) $P(X = 2) = ?$

$$P(X=2) = f(2) = \binom{100}{2} \left(\frac{2}{100}\right)^2 \left(\frac{98}{100}\right)^{98} = 0.2734$$

۲) احتمال قبل را با توزیع پواسن تقریب بزنید:

$np = 100 \times \frac{2}{100} = 2 \leq 10$, $= \lambda$

$$X \simeq P(2 = np = \lambda)$$

$$h(x) = \frac{2^x e^{-2}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \dots$$

$= 0$ o.w

$$P(X=2) = h(2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 2e^{-2} = 0.2706$$

بنابراین اعداد (۱) و (۲) بسیار به هم نزدیک اند بنابراین میتوان توزیع دوجمله‌ای را با توزیع پواسن تقریب زد.

تقریب احتمالهای توزیع دوجمله‌ای با توزیع نرمال:

قضیه:

معمولاً n های بزرگتر از ۳۰

فرض کنید $X \sim B(n,p)$ برای n های بزرگ تقریباً دارای توزیع نرمال

با میانگین $\mu = np$ و واریانس $\sigma^2 = np(1-p)$ است.

مثال: فرض کنید $X \sim B(30, \frac{1}{2})$ احتمال آن را بیابید. $P(X=10) = ?$

$$P(X=10) = \binom{30}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{30} = 0.0279 \quad (1)$$

$$X \simeq N(\mu = np = 15,\ \sigma^2 = npq = 7.5)$$

$P(X=10) = 0$ احتمال نقطه در توزیع پیوسته صفر است.

در این‌گونه موارد به جای نقطه بازه را استفاده می‌کنیم:

$P(X=10) \simeq P(9.5 < X < 10.5)$ که $\frac{1}{2}$ را تصحیح پیوستگی گویند. در این بازه ۱۰ دقیقاً در وسط قرار گیرد

$$\simeq P\left(\frac{9.5-15}{\sqrt{7.5}} < \frac{X-15}{\sqrt{7.5}} < \frac{10.5-15}{\sqrt{7.5}}\right)$$

$$\simeq P(-2.07 < Z < -1.7) \simeq N(-1.7) - N(-2.07) = 0.0278 \quad (2)$$

+ که (۱) و (۲) بسیار به هم نزدیک‌اند.

$P(20 < X \leq 80) = P(20.5 < X < 80.5)$ استاندارد می‌کنیم و حل می‌کنیم:

$P(20 < X < 80) = P(20.5 < X < 79.5)$

تابع احتمال توأم حاصلضرب آنهاست.

قضیه‌ی اساسی نرمال:

فرض کنید $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ و X_iها مستقل از یکدیگرند.

$i = 1, 2, \dots, n$

و $y = k_1X_1 + k_2X_2 + \dots + k_nX_n$ (ترکیب خطی) و k_iها مقادیر حقیقی ثابتی‌اند $\forall i; k_i \in R$

آنگاه y دارای توزیع نرمال است:

$$y \sim N\Big(\overbrace{\sum_{i=1}^{n} k_i\mu_i}^{\mu_y}, \overbrace{\sum_{i=1}^{n} k_i^2\sigma_i^2}^{\sigma_y^2}\Big)$$

اثبات: با استفاده از توابع مولد گشتاور

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} = Ee^{tX} \quad (1)$$

$$M_y(t) = Ee^{ty} = Ee^{t\sum k_iX_i} = Ee^{tk_1X_1 + \dots + tk_nX_n}$$

$$= E\left(e^{tk_1X_1} \cdot e^{tk_2X_2} \cdot \dots \cdot e^{tk_nX_n}\right)$$

چون X_iها استقلال دارند بنابراین:

$$= \prod_{i=1}^{n} Ee^{tk_iX_i} = \prod_{i=1}^{n} M_i(k_iX) = \prod_{i=1}^{n} e^{tk_i\mu_i + \frac{1}{2}k_i^2t^2\sigma_i^2}$$

$$= e^{t\sum_{i=1}^{n} k_i\mu_i + \frac{1}{2}t^2\sum_{i=1}^{n} k_i^2\sigma_i^2} \quad (2)$$

که ثابت است

زیرا با مقایسه رابطه (۲) با رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$\mu \to \sum k_i\mu_i$$

$$\sigma^2 \to \sum k_i^2\sigma_i^2$$

مثال: فرض کنید $X_1 \sim N(10, 11)$ ، $X_2 \sim N(9, 16)$ و X_1, X_2 استقلال دارند.

اگر $y = X_1 + X_2$ باشد، احتمال زیر را بیابید: $P(20 < y < 46) = ?$

نتیجه ثابت شد که y نیز دارای توزیع نرمال است حال باید μ و σ^2 را برای y بیابیم:

$$y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2) \qquad \mu_y = \sum_{i=1}^{2} k_i\mu_i = \mu_1+\mu_2 = 19$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{2} k_i^2\sigma_i^2 = \sigma_1^2+\sigma_2^2 = 21+4 = 25$$

$$P(20<y<24) \xrightarrow{\text{نرمال سازی}} P\left(\frac{20-19}{\sqrt{25}} < \frac{y-19}{\sqrt{25}} < \frac{24-19}{\sqrt{25}}\right)$$

$$= P(0.2 < Z < 1) = N(1) - N(0.2)$$

با استفاده از جدول:

$$P(X_1 > X_2) = P(X_1 - X_2 > 0) = P(y > 0)$$

$$y = X_1 - X_2 \longrightarrow k_1 = 1, \quad k_2 = -1$$

$$y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2) \qquad \mu_y = \sum_{i=1}^{2} k_i\mu_i = \mu_1 - \mu_2 = 10-9 = 1$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{2} k_i^2\sigma_i^2 = 1\sigma_1^2 + (-1)^2\sigma_2^2 = 25$$

$$\Rightarrow y \sim N(1, 25)$$

$$P(y>0) = 1 - P(y<0) = 1 - P\left(Z < \frac{0-1}{\sqrt{25}}\right) = 1 - N(-0.2)$$

$$= N(0.2)$$

— مثال) فرض کنید که نمره درس ۳ واحدی دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۲ و واریانس ۱ و نمره درس ۲ واحدی دارای توزیع نرمال با معدل ۱۷ و واریانس ۴ است. احتمال اینکه معدل این دو درس بیشتر از ۱۵ باشد چقدر است؟

۹۰

(

باتوجه به تفضیل قبل باید y را تشکیل دهیم: که y را اصل در نظر بگیریم.

$$y = \frac{3X_1 + 2X_2}{5} = \frac{3}{5}X_1 + \frac{2}{5}X_2$$

بنابراین $k_1 = \frac{3}{5}$, $k_2 = \frac{2}{5}$

فرمول استرلینگ	$n! \approx (\frac{n}{e})^n \sqrt{2n\pi}$

$\longrightarrow P(y > 15) = 1 - P(y < 15)$

). $\mu_y = k_1\mu_1 + k_2\mu_2 = \frac{3}{5} \times 12 + \frac{2}{5} \times 17$

$\sigma_y^2 = (\frac{3}{5})^2 \times 10 + (\frac{2}{5})^2 \times 4$

$\Rightarrow y \sim N(\mu_y , \sigma_y^2)$

$\longrightarrow 1 - P(y < 15) \xrightarrow{normalization} 1 - P(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} < \frac{15-\mu_y}{\sigma_y})$

$\longrightarrow 1 - P(z < \frac{15-\mu_y}{\sigma_y}) \longrightarrow 1 - (\Phi(\frac{15-\mu_y}{\sigma_y}) - \Phi(-\infty))$

)

)

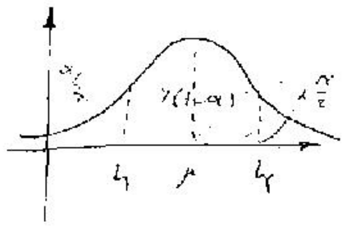
برآوردها :

برآوردها سه نوع هستند :

۱) برآورد حداکثر احتمال (درستنمایی)

۲) برآورد گشتاوری ۳) برآورد فاصله‌ای (فاصله‌های اطمینان)

برای مثال در توزیع نرمال :



$p(l_1<\mu<l_2) = (1-\alpha)\%$

۱) فاصله اطمینان برای میانگین توزیع نرمال با واریانس معلوم، ضریب اطمینان $(1-\alpha)\%$ و نمونه تصادفی n تایی و میانگین مجهول

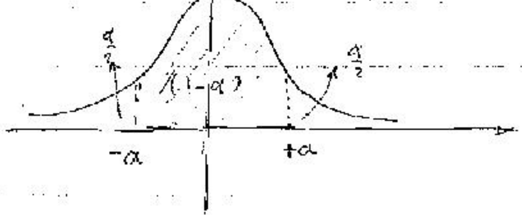
در مسئله‌ی اول: از توزیع نرمال $N(\mu,\sigma^2)$ (معلوم) ، نمونه‌ی تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$

را انتخاب می‌کنیم و $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

با استاندارد سازی داریم:

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$$

$$p(-a<Z<+a) = (1-\alpha)\%$$



$$\longrightarrow p\left(-a<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<+a\right)$$

$$\longrightarrow p\left(\bar{X}-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(1-\alpha)\%$$

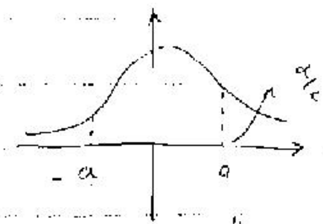
$$\longrightarrow l_1=\bar{X}-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad , \quad l_2=\bar{X}+a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

بنابراین $[L_1 , L_2]$ فاصله تصادفی است که با احتمال $(1-\alpha)\%$ شامل

نقطه مجهول μ است. اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ اندازه‌های $X_1, X_2, \ldots, X_n$

باشند آنگاه $\bar{x}$ اندازه $\bar{X}$ است و یک فاصله اطمینان برای μ به صورت زیر است،

$$\left[\bar{x}-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x}+a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$



$p(Z \leq a) = 1-\frac{\alpha}{2}$

که اگر $(1-\frac{\alpha}{2})$ را داشته باشیم با توجه

به جدول a را بدست می‌آوریم:

مثال) فرض کنید [illegible] دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار ۲

است. با ضریب اطمینان $(1-\alpha)\% = ۹۵\%$ از نمونه تصادفی ۱۰ تایی μ را به صورت

فاصله پیش‌بینی کنید (یک فاصله اطمینان برای آن بسازید).

$X \sim N(\mu, 4)$ $\quad (1-\alpha)\% = ۹۵\%$ $\quad , n = 10$

$X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ را از توزیع فوق انتخاب می‌کنیم.

فرض می‌کنیم $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ جوابهای $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ باشند:

طول x_i : ۱۲، ۱۷، ۴، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۹، ۶، ۲۰، ۷

$\Rightarrow \bar{x} = 11$

$$\left[\bar{x} - Z_{\%(1-\frac{\alpha}{2})}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\ \bar{x} + Z_{\%(1-\frac{\alpha}{2})}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = 0.64 \qquad \%(1-\alpha) = 0.95 \to \alpha = 0.05 \,,\ \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$Z_{\%(1-\frac{\alpha}{2})} = Z_{0.975} = 1.96$ با استفاده از جدول

$$\longrightarrow \left[11 - 1.96 \times 0.64 \,,\ 11 + 1.96 \times 0.64\right] = \left[9.74 \,,\ 12.24\right]$$

طول فاصله = $12.24 - 9.74$

$$\longrightarrow P(9.74 < \mu < 12.24) = 0.95$$

تعریف: فرض کنید $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ باشد.

① استاندارد توزیع نرمال $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

②* مربع توزیع نرمال کای اسکوئر است. $Z^2 = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$

*استاندارد

تعریف: اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی کای اسکوئر با درجه آزادی $r_1, r_2, \dots, r_n$

باشند (X_iها مستقل هستند) $Y = \sum X_i \sim \chi^2\left(\sum r_i\right)$

تعریف:

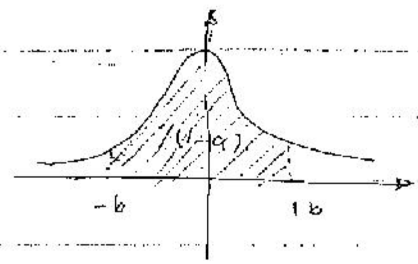
فرض کنید $Z \sim N(0,1)$, $V \sim \chi^2(r)$ و

Z و V مستقل از هم باشند، آنگاه:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{r}}} \sim t(r)$$

$E\,T = 0$ میانگین صفر دارد

$$\sigma_T^2 = E\,T^2$$



$$P(-b < T < b) = \%(1-\alpha)$$

۱۲ فاصله اطمینان برای میانگین توزیع نرمال با واریانس مجهول و ضریب اطمینان $(1-\alpha)\%$ و n نمونه: تعداد n ها کم است.

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad , \quad Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

قضیه: اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه تصادفی از $N(\mu, \sigma^2)$ باشد

آنگاه:

$$V = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

درجه آزادی

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

واریانس

۱۵

که براین با توجه به قضیه فوق داریم : $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{r}}} \sim t(r)$

$$T = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{nS^2}{\sigma^2(n-1)}}} \sim t(n-1)$$

$$\longrightarrow T = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$$

* رابطه‌ی مستقل از σ^2

$$p(-b < T < +b) = \%(1-\alpha) \longrightarrow p\left(-b < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} < +b\right) = \%(1-\alpha)$$

$$\longrightarrow p\left(\bar{X} - b\frac{S}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{X} + b\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right)$$

$$\longrightarrow \text{فاصله اطمینان} : \left[\bar{X} \pm b\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

اگر به اندازه $\bar{X}$ باشد آنگاه بازه‌ی فاصله اطمینان بصورت زیر است :

$$\therefore \left[\bar{x} \pm b\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right] \longrightarrow t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}$$

تخمین تست $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ و سطر $(n-1)$ ام

$$\longrightarrow t_{(۰/۹۷۵, ۱۴)} = ۲/۱۷۹$$

الان اگر بخواهیم فاصله μ را در حالتی که واریانس مجهول پیدا کردیم با جواب ...

ولی واریانس معلوم قبلاً پیدا کرده را اعلام کنید کدام پیش‌بینی دقیق‌تر است :

)

$\bar{x} = 11$ فاصله $\left[\bar{x} \pm b \dfrac{s}{\sqrt{n-1}}\right]$

واریانس عملی نمونه: $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum (x_i - 11)^2 \longrightarrow S = 4{,}44$

$t_{(0{,}975\,,\,9)} = 2{,}262 = b$

$\longrightarrow$ فاصله: $\left[11 - 2{,}262 \times \dfrac{4{,}44}{3} , 11 + 2{,}262 \times \dfrac{4{,}44}{3}\right]$

) فاصله جدید: $[7{,}48 , 14{,}51]$

فاصله قدیم: $[9{,}76 , 12{,}24]$.

واریانس قبلی $4 = \sigma^2$، واریانس جدید $4{,}44^2 = 21{,}71$ است بنابراین

چون واریانس قبلی بهتر است (کوچکتر است) داده‌ها و نمونه بهتر انتخاب شده

بنابراین فاصله قدیم بهتر است.

)

۲. واریانس نظری (در اثبات‌ها) $\dfrac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$

دو نوع واریانس

۱. واریانس عملی (در کاربردهای عملی) $\dfrac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$

$E(S^2) = \dfrac{n-1}{n} \sigma^2$ برای نمونه بزرگ $E(S^2) = \sigma^2$

)

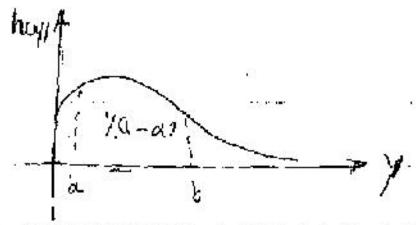
(۳) فاصله اطمینان برای واریانس توزیع نرمال با میانگین معلوم.

n: اندازه نمونه   ضریب اطمینان: $\%(1-\alpha)$

نمونه تصادفی $x_1, x_2, \dots, x_n$ از توزیع نرمال $N(\underset{\text{معلوم}}{\mu}, \sigma^2)$ انتخاب میکنیم.

$$\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1) \longrightarrow y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

$$P(l_1<\sigma^2<l_2)=\%(1-\alpha)$$

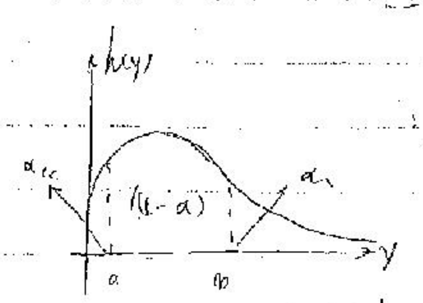


$$P(a<y<b)=\%(1-\alpha)$$

$$\longrightarrow P\left(a<\sum_{1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}<b\right)=P\left(\frac{1}{b}<\frac{\sigma^2}{\sum_1^n (x_i-\mu)^2}<\frac{1}{a}\right)$$

$$\longrightarrow = P\left(\underbrace{\frac{\sum_1^n (x_i-\mu)^2}{b}}_{l_1}<\sigma^2<\underbrace{\frac{\sum_1^n (x_i-\mu)^2}{a}}_{l_2}\right)$$

حال باید a و b را بدست آورد تا فاصله بدست آید.



با فرض: $\alpha_1=\alpha_2=\frac{\alpha}{2}$ آنگاه برای b داریم:

$$P(0<y<b)=\%\frac{\alpha}{2}+\%(1-\alpha)=\%\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

تلاقی ستون $\%(1-\frac{\alpha}{2})$ و سطر n ام

$$\longrightarrow b=\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\,n)}$$

$$,\quad P(0<x<a)=\%\frac{\alpha}{2} \longrightarrow a=\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\,n)}$$

فاصله اطمینان واریانس : $\left[\frac{\sum (x_i-\mu)^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}, n)}}, \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2}, n)}}\right]$

مثال) فرض کنید قد دانشجویان کلاس آمار دارای توزیع نرمال با معدل ۱۷۹ سانتی‌متر و انحراف معیار σ است. با استفاده از نمونه تصادفی ده تایی با ضریب اطمینان $\%(1-\alpha)=\%95$ ، σ را بصورت فاصله‌ای برآورد کنید. (یک فاصله اطمینان برای σ بسازید.)

در اینجا μ معلوم و σ نامعلوم است.

یک نمونه ده تایی انتخاب می‌کنیم : $X_1, X_2, \dots, X_{10} \sim N(179, \sigma^2)$

$x_i = ۱۸۰, ۱۷۶, ۱۷۷, ۱۷۵, ۱۷۸, ۸۷۰, ۱۷۴, ۱۷۰, ۱۷۸, ۱۸۵$

باید فاصله را بدست آوریم :
با استفاده از جدول :

$$\begin{cases} \chi^2_{(\%97.5,\ 10)} = 20.48 \\ \chi^2_{(\%2.5,\ 10)} = 3.247 \end{cases}$$

$$\sum_{1}^{10} (x_i - 179)^2 = 830$$

فاصله σ^2 : $\left[\frac{830}{20.48}, \frac{830}{3.247}\right] = [40.5, 255.7]$

فاصله σ (انحراف معیار) : $[6.36 , 16]$

$$\longrightarrow \boxed{p\left(\sigma \in [6.36, 16]\right) = \%95}$$

در اینجا ۱۷۹ یک میانگین فرضی برای μ است و فرض می‌کنیم توزیع ۱۷۹ ... حال اگر میانگین معلوم نباشد (چون μ) بیانگر ... است :

۲) فاصله اطمینان برای واریانس توزیع نرمال با میانگین مجهول :

ضریب اطمینان : $\%(1-\alpha)$ n: اندازه نمونه

نمونه تصادفی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را از توزیع $N(\underset{\text{مجهول}}{\mu}, \delta^2)$ انتخاب می‌کنیم

$$P(L_1 < \delta^2 < L_2) = \%(1-\alpha)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum x_i \quad , \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$Y = \frac{nS^2}{\delta^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

سوال ؟

$$P(a < Y < b) \rightarrow P\left(\frac{nS^2}{b} < \delta^2 < \frac{nS^2}{a}\right) = (1-\alpha)\%$$

$$\rightarrow \left[\frac{nS^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}} , \frac{nS^2}{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)}}\right] \quad \text{نظری}$$

در عمل از نمونه زیر استفاده می‌کنیم :

$$* \text{ فاصله} : \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}} , \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)}}\right] \quad (1)$$

مثال) در مثال قبل، فاصله اطمینان برای δ^2 را با حالت میانگین مجهول بسازید.

ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم : $\bar{X} = ۱۷۴,۸$

$$S^2 = \frac{1}{9}\sum (x_i - ۱۷۴,۸)^2 = ۴۹,۳۴$$

با استفاده از رابطه (۱) داریم :

$$\left[\frac{9 \times ۴۹,۳۴}{۱۹,۰۲} , \frac{9 \times ۴۹,۳۴}{۲,۷}\right]$$

* واریانس نسبت به حالت قبل بصورت دقیق‌تر شده $[۲۳,۱۳ , ۱۶۴,۵]$: فاصله جدید برای δ^2 ←

و این نشان دهنده اختلاف قدها کمتر است.

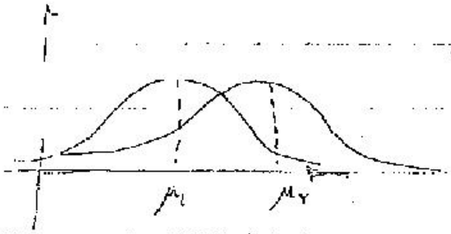
بنابراین فاصله جدید بهتر است چون میانگین، واریانسش کوچکتر است.

⑤ فاصله اطمینان برای تفاضل های دو توزیع نرمال با واریانس های معلوم:

ضریب اطمینان: $\%(1-\alpha)$ ، n, m: اندازه های نمونه

که $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ معلوم

$Y_1, Y_2, \dots, Y_m \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ معلوم



توجه شود که X_i ها با Y_i ها استقلال کامل دارند:

توزیع میانگین $\rightarrow \bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n})$

$\rightarrow \bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m})$

در فرمول فاصله اطمینان برای $\mu_1 - \mu_2$ می خواهیم برای توزیع $\bar{X}-\bar{Y}$ را داشته باشیم:

$$\rightarrow (\bar{X}-\bar{Y}) \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}\right)$$

$$P(l_1 < \mu_1-\mu_2 < l_2) = \%(1-\alpha)$$

نرمال استاندارد: $Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}$

$$P(-a < Z < +a) = \%(1-\alpha)$$

* اگر معادله را برای $\mu_1-\mu_2$ حل می کنیم، فاصله مطلوب بدست آید:

اگر $R_1 = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}$

$$P\left((\bar{X}-\bar{Y}) - aR_1 < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}-\bar{y}) + aR_1 \right)$$

$\longrightarrow$ بازه: $\left[(\bar{x}-\bar{y}) - aR_1 , (\bar{x}-\bar{y}) + aR_1 \right]$

$Z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$ که با استفاده از جدول.

مثال: فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه تصادفی از توزیع نرمال $(\mu_1, 7)$ و $Y_1, Y_2, \ldots, Y_8$ نمونه تصادفی از توزیع نرمال $(\mu_2, 10)$ است، با ضریب اطمینان ۹۵٪ با اندازه‌های زیر اعلام کنید که ... بین کدام حدها مشترک است. (نمونه‌ها مستقل‌اند)

$x_1 = 7 , x_2 = 11 , x_3 = 13 , x_4 = 6 , x_5 = 10 , x_6 = 13 , x_7 = 11$

$x_8 = 14 , x_9 = 2 , x_{10} = 20$

$y_1 = 10 , y_2 = 18 , y_3 = 6 , y_4 = 15 , y_5 = 4 , y_6 = 14 , y_7 = 12 , y_8 = 13$

$$\left[(\bar{x}-\bar{y}) \pm Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} R_1 \right] , \quad R_1 = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}$$

$\bar{x} = 11 , \quad \bar{y} = 11.5 \qquad \%(1-\frac{\alpha}{2}) = \%97.5$

$Z_{\%97.5} = 1.96$

$R_1 = \sqrt{\frac{7}{10} + \frac{10}{8}} = 1.396 \qquad \bar{x} - \bar{y} = -0.5$

$$\Rightarrow \left[-0.5 - 1.96 \times 1.396 , -0.5 + 1.96 \times 1.396 \right]$$

$$= \left[-3.24 , 2.234 \right]$$

$$\Rightarrow P\left((\mu_1-\mu_2)\in[-4.23,\ 2.236]\right) = \%95$$

بنابراین میانگین دوم با احتمال ۹۵٪ بیشتر اوقات از μ_1 بیشتر است.

در این مثال واریانس‌ها بصورت فرض معلوم است، بنابراین در حالت کلی‌تر واریانس مجهول را در نظر میگیریم. (البته در این مثال میتوان از داده‌های xها و yها واریانس را محاسبه کرد)

۴) فاصله اطمینان برای تفاضل میانگین‌های دو توزیع نرمال با واریانس‌های مجهول:

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \qquad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

x و y مستقل‌اند

فرض میکنیم: $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma^2) \longrightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$V_1 = \frac{nS_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{m}\right)$$

$$V_2 = \frac{nS_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$

طبق قضیه‌ای که قبلاً گفته شده است:

$$V = (V_1 + V_2) \sim \chi^2(m+n-2)$$

$$(\bar{X}-\bar{Y}) \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{m}\right)$$

استاندارد

$$Z = \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

درحالتی که واریانس ها مجهول اند از توزیع t استفاده می‌کنیم :

تعریف : $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{r}}} \sim t(r)$

$$\longrightarrow \quad T = \frac{\dfrac{(\bar{x}-\bar{y}) - (\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}}}}{\sqrt{\dfrac{\left(\frac{nS_x^2}{\sigma^2} + \frac{mS_y^2}{\sigma^2}\right)}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$$

$$\longrightarrow \quad T = \frac{(\bar{x}-\bar{y}) - (\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{nS_x^2+mS_y^2}{m+n-2}\right)}} \sim t(m+n-2)$$

با جایگذاری T بازه‌ای برای $(\mu_1-\mu_2)$ می‌سازیم $P(-a < T < a)$

اگر $R = \sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{nS_x^2+mS_y^2}{m+n-2}\right)}$

$$\longrightarrow \quad P\left((\bar{x}-\bar{y}) - aR < \mu_1-\mu_2 < (\bar{x}-\bar{y}) + aR\right) = \%(1-\alpha)$$

فاصله : $\left[(\bar{x}-\bar{y}) \pm aR\right]$, $a = t_{(1-\frac{\alpha}{2},\, m+n-2)}$

مثال : مثال قبل را با واریانس های مجهول دوباره حل کنید .