بسمه تعالی

جزوه

تجزیه و تحلیل سیستم ها

دانشگاه

علم و صنعت

استاد

دکتر چلداوی

جلسه اول ۱/

سیگنال و سیستم

سال ۱) $y(t)=x(t)+x(0)$. خطی بودن، تغییر ناپذیری با زمان - وارون پذیری - پایداری - علی بودن

حافظه دار بودن را بررسی کنید

حل: ۱- خطی بودن ←

$x_1 \rightarrow y_1$

$x_2 = kx_1 \rightarrow ky_1$

این تعریف را جایی که سیستم استفاده کنیم نمی توانیم بگوییم ... مقایسه کنیم

$y_1 = x_1(t)+x(0)$ اگر ورودی ... سیستم ... که ... مقدار ... آن ... بنویسیم

$x_2 \rightarrow y_2 = x_2(t)+x_2(0) = Kx_1(t)+Kx_1(0)$ (... ضرب ...)

$= K(x_1(t)+x_1(0))$ برقرار است

$= Ky_1 \rightarrow$ و جمع پذیری ... شرط ... سیستم خطی است

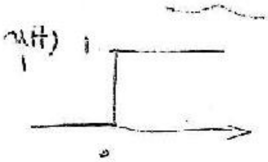
مثال: $y(t)=x(t)+K$ خطی نیست

$x_2 = \alpha x(t) \rightarrow y_2 = \alpha x + K \neq \alpha y_1$ خطی نیست

نکته: سیستم هایی که خطی هستند از اینرو هم ... یعنی اگر ورودی صفر باشد، خروجی هم صفر باید باشد

چون در اینجا $y(t)=0+K\neq 0 \leftarrow x(t)=0$

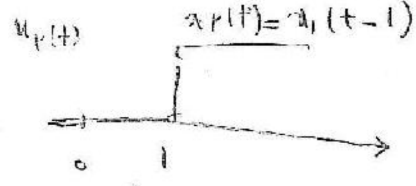
۲- تغییر پذیری با زمان ← سیستم تغییر پذیر با زمان است که فقط یک تغییر پذیر با زمان باشد.



این سیستم تغییر پذیر با زمان است.

در اینجا $x_1(0)=1$

(... $x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$)



$x_2(0)=0$

... شرط تغییر پذیری با زمان این است که ... تابع باید خود t باشد. (... αt !)

... ... با زمان باشد ... $x(0)$.

۳- وارون پذیری: وارون پذیر است

$x(t)=y(t)-x(0)$

... ... باز ... ...

با ورودی در لحظه صفر

$$y(0)=x(0)+x(0)=2x(0) \Rightarrow x(0)=\frac{1}{2}y(0)$$

← با داشتن همه خروجی‌ها می‌توانیم همه ورودی‌ها را بازسازی کنیم

$$\xrightarrow{\text{حافظه‌دار است و وارون}} \quad y(t)=x(t)-x(0)$$

جای x(0) را فرض کنیم

۴ - پایداری ← اگر ورودی محدود باشد ← خروجی هم باید محدود باشد.

با تست: ماکزیمم مقدار ورودی را قرار می‌دهیم ← می‌بینیم آیا می‌توانیم ماکزیمم مقدار خروجی را پیدا کنیم؟

$|x(t)|\le N$, $|y(t)|<M$ ← خروجی محدود

$$y_{max}=N+N=2N \rightarrow \text{محدود}$$

بیشترین مقدار ورودی

۵ - علّی ← خروجی در هر زمانی از زمان‌های آینده بستگی نداشته باشد.

در زمان‌های مثبت ← $t>0 \rightarrow y(t)=x(t)+x(0) \rightarrow$ مشکلی ندارم

" " منفی ← $t<0 \rightarrow y(t)=x(t)+\underbrace{x(0)}_{\text{آینده}}$

حافظه‌دار بودن ⇒ غیرعلّی است

خروجی: ورودی در زمان‌های آینده را لازم است.

۶- اگر سیستم به ورودی‌های آینده یا گذشته بستگی داشته باشد حافظه‌دار است

$$y(t)=x(t)+x(0) \rightarrow \text{حافظه‌دار است.}$$

مثال ۲) آیا علّی است؟

$$y(t)=\frac{x^2(t)}{x(t-1)} \rightarrow$$

واضح است ← علّی

غیرخطی است

حاصل تغییرناپذیر است : پاسخ

مثال ۳) فرض کنید که پاسخ پله یک سیستم گسسته LTI مطابق شکل باشد.

$$S(n)=2^{-n-1}u(n+1)$$

مقدار پاسخ ضربه در لحظه $t=2$ چقدر است؟

نکته: سیستم‌های گسسته را مانند سیستم‌های پیوسته می‌گیریم

معادل مفهوم تفاضل‌گیری.

سیستم پیوسته $\Rightarrow h(t)=\frac{dS(t)}{dt}$

" گسسته $\Rightarrow h(n)=S(n)-S(n-1)$

حل:

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

$$= 2^{-n-1} u(n+1) - 2^{-(n-1)-1} \cdot u(n-1+1)$$

$$= 2^{-n-1} u(n+1) - 2^{-n} u(n)$$

$$\Rightarrow h(2) = 2^{-3} u(3) - 2^{-2} u(2) = \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{8}$$

سوال ۴) خاصیت علی بودن و خطی بودن تابع زیر را بررسی کنید

حل:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\sqrt[5]{\alpha})\, d\alpha$$

۱) خطی بودن ← با توجه به یکی بودن توان‌ها میتوانیم بگوییم که سیستم خطی است.
و عملگر انتگرال هم یک عملگر خطی است

۲) علی بودن ←

اگر $t>1 \rightarrow y(t) = \underbrace{\cdots}_{\text{جمع مقادیر از } -\infty \text{ تا } \sqrt[5]{t}} + x\left(\sqrt[5]{t}\right) \rightarrow$ خروجی به زمان‌های بعد وابسته است

$< t$

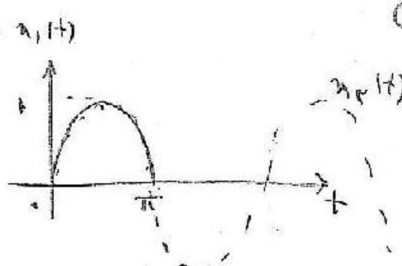
$$t = \tfrac{1}{32} \rightarrow y(\tfrac{1}{32}) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{32}} x(\sqrt[5]{\alpha})\, d\alpha = \cdots + x\left(\sqrt[5]{\tfrac{1}{32}}\right) = \cdots + x(\tfrac{1}{2})$$

$\rightarrow$ غیر علی

۳) تغییر ناپذیری با زمان ← چون ضریب‌های تابع $x(t)$ یک تابع غیر از (t) است ← سیستم تغییرپذیر با زمان است

سوال ۵:

$$x_1(t) = \sin t \,(u(t) - u(t-\pi))$$



$$y_1(t) = \begin{cases} \sin t - e^{-t}, & 0 < t < \pi \\ e^{-(t-\pi)}, & t > \pi \end{cases}$$

حال اگر $x_2(t) = \sin t\, u(t) \rightarrow y_2(t)\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} = ?$

حل: ابتدا $\sin t\, u(t)$ را می‌سازیم

$$x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-\pi) + x_1(t-2\pi) + \cdots$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \sin t\, u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_1(t - k\pi)$$

$$\Rightarrow y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-\pi) + y_1(t-2\pi) + \cdots$$

$x_3(t) = \frac{dx_2}{dt} \longrightarrow y_3(t) = \frac{dy_2}{dt}$ چون سیستم تغییرناپذیر با زمان است

$x_3(t) = \cos t\, u(t) \longrightarrow y_3(t) = \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_1}{dt}(t) - \frac{dy_1(t-\pi)}{dt} + \frac{dy_1(t-2\pi)}{dt} \mp \cdots$

$$\Rightarrow y_3(t)\Big|_{\frac{3\pi}{2}} = y_1'\left(\frac{3\pi}{2}\right) - y_1'\left(\frac{3\pi}{2}-\pi\right) + \underbrace{\underbrace{y_1'\left(\frac{3\pi}{2}-2\pi\right) \mp \cdots}_{t<0}}_{=0}$$

$$= y_1'\left(\frac{3\pi}{2}\right) - y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-(t-\pi)}\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} - \left(\cos t + e^{-t}\right)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}$$

$$= -e^{-\frac{\pi}{2}} - \cancel{\cos\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$= -2e^{-\frac{\pi}{2}} \rightarrow$$ گزینهٔ ۱

چون سیستم LTI علّی است ← تا زمانی ورودی صفر است ← خروجی هم صفر خواهد بود

همچنین برای سیستم علّی هم این موضوع برقرار است.

$$\underset{t<t_0}{x(t)=0} \rightleftarrows \underset{t<t_0}{y(t)=0}$$

اما در مورد سیستم غیرخطی این موضوع برقرار نیست

$y(t) = x(t) + 1 \longrightarrow$ غیرخطی

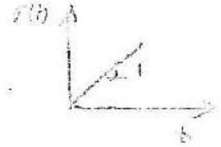
سؤال ۱۶ :

$h(t) = 2r(2-t)u(t)$

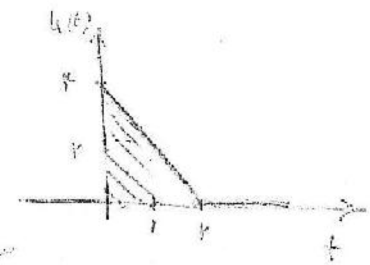
$S(t)\Big|_{t=1} = ?$

حل : ابتدا پاسخ ضربه را رسم کنیم

$r(t) = t\,u(t)$



$h(t) = 2(2-t)\underbrace{u(2-t)\,u(t)}_{\text{فقط برای } 0<t<2 \text{ مقدار دارد}}$



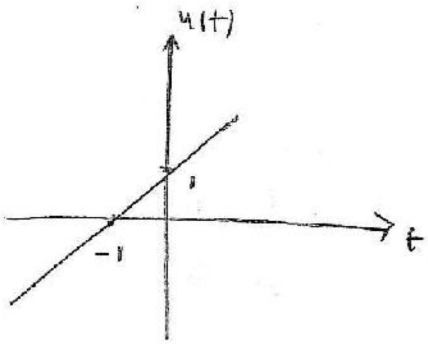
$S(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau \Rightarrow S(1) =$ سطح زیر منحنی $h(t)$ از $-\infty$ تا ۱ = ۳

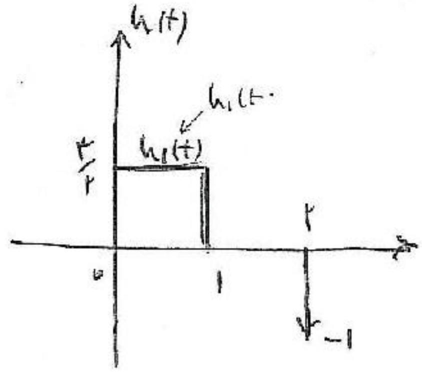
۳

$$S(1) = (۲+۴)\times \tfrac{1}{۲} = ۳ \longrightarrow ۲ \text{ نمره}$$

$$S(1) = \int_{-\infty}^{1} h(\tau)\,d\tau$$

سوال ۱۰ :





$$y(t)\Big|_{t=1/۲} = ?$$

حل : با توجه به اینکه سیستم LTI است $y(t) = x(t)*h(t) = h(t)*x(t)$

چون $h(t)$ شامل ضربه است راحت‌تر است که $h(t)$ را دو بخش تقسیم کنیم :
ضربه و بقیه آن $h_1(t)$ است

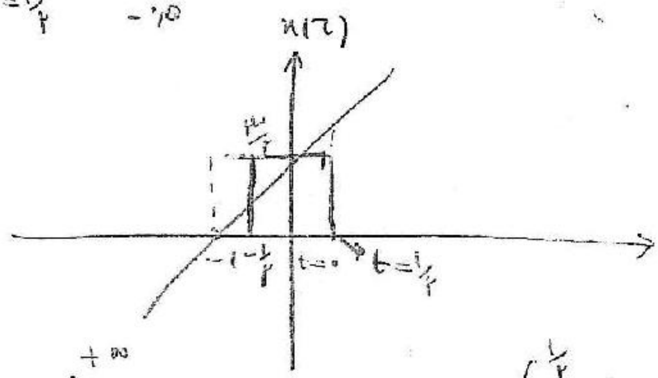
$$y(t) = x(t)*h(t)$$

$$= x(t)*\big(h_1(t) - \delta(t-۲)\big) \qquad x(t)*\delta(t-۲) = x(t-۲)$$

$$= x(t)*h_1(t) - x(t-۲)$$

$$y(\tfrac{1}{۲}) = x(t)*h_1(t)\Big|_{t=1/۲} - \underbrace{x(-1{,}5)}_{-0{,}5}$$

$$x(\tau) = \tau + 1$$



$$x(t)*h_1(t)\Big|_{t=1/۲} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-1/۲}^{1/۲} (\tau+1)\cdot ۳/۲ \; d\tau$$

$$= \tfrac{۳}{۲}\,(\tau)\Big|_{-1/۲}^{1/۲} = \tfrac{۳}{۲} \qquad \tfrac{۳}{۲}\Big[\underbrace{(۳/۲ + 1/۲)\times 1/۲}_{}\Big] = \tfrac{۳}{۲}$$

مساحت ذوزنقه

$$\Rightarrow y(\tfrac{1}{۲}) = \tfrac{۳}{۲} - (-0{,}5) = ۲ \qquad ۳ \text{ نمره}$$

سؤال ۷ : سیستم LTI است.
تمرین ۳

$x_1(t) = e^{-2t}u(t-1) \longrightarrow y_1(t)$

$x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} \longrightarrow y_2(t) = -2y_1(t) + e^{-2t}u(t)$

پاسخ ضربه ؟

حل : چون از ورودی مشتق گرفته‌ایم پس در خروجی هم باید مشتق داشته باشد.

دقت کنید : $x_1(t)$ شامل پله است.

$$x_2 = \frac{dx_1(t)}{dt} = -2e^{-2t}u(t-1) + \underbrace{e^{-2t}\delta(t-1)}_{e^{-2}\delta(t-1)}$$

$$\Rightarrow x_2 = -2x_1 + \overset{e^{-2}\delta(t-1)}{\bigcirc} \longrightarrow -2y_1 + e^{-2t}u(t)$$

$$e^{-2}\delta(t-1) \longrightarrow e^{-2t}u(t) = e^{-2}h(t-1)$$

پس $= e^{-2}h(t-1)$

$$\Rightarrow h(t-1) = e^{2}e^{-2t}u(t)$$

$$\Rightarrow h(t) = e^{2}e^{-2(t+1)}u(t+1) = e^{-2t}u(t+1)$$

راه دوم $\frac{dy_1}{dt} = -2y_1 + e^{-2t}u(t)$ (معادله دیفرانسیل)

سؤال ۸ : $h_1(n) = \sin 8n \qquad h_2(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$

$x(n) = 2\delta(n) - \delta(n-1) \longrightarrow y(n) = ?$

حل : دقت سیستم‌ها LTI هستند پس ترتیب را می‌توان عوض کرد سیستم اول ... ورودی را به عنوان خود سیستم در نظر گرفت. در سیستم‌ها LTI ترتیب سیستم‌ها مهم نیست (جابجایی‌پذیری)

LTI هستند پس سیستم معادل ... $2\sin(n)$

$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)} \xrightarrow{y_1(n)} \boxed{h(n) = \sin 8n} \longrightarrow y(n)$

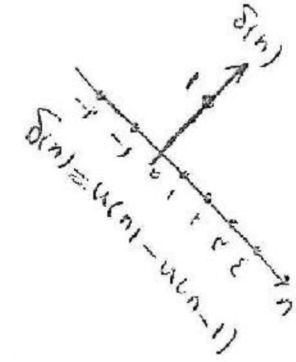
۴

$$y_1(n) = x(n) * h_2(n) = \left(2\delta(n) - \delta(n-1)\right) * h_2(n)$$

$$= 2h_2(n) - h_2(n-1) = 2\left(h_2(n) - \tfrac{1}{2}h_2(n-1)\right)$$

$$= 2\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)\right]$$

$$= 2\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \underbrace{\left(u(n) - u(n-1)\right)}_{\delta(n)\ \text{تعریف تابع ضربه گسسته زمان}}$$



$$= 2\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \delta(n)$$

$$= 2\,\delta(n)$$

$$y(n) = y_1(n) * h_1(n) = 2\delta(n) * \sin 8n = 2\sin 8n \quad \rightarrow \quad \text{تمرین ۲}$$

سوال ۴ : سیستم LTI است.

$$h(n) = \left(\tfrac{1}{5}\right)^n u(n)$$

$$x(n) = \delta(n) - \alpha\,\delta(n-1)$$

α چقدر باشد تا $y(n)=\delta(n)$ باشد.

حل:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \left(\delta(n) - \alpha\delta(n-1)\right) * \left(\tfrac{1}{5}\right)^n u(n)$$

$$= \left(\tfrac{1}{5}\right)^n u(n) - \alpha\left(\tfrac{1}{5}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$= \left(\tfrac{1}{5}\right)^n \left(u(n) - \alpha\left(\tfrac{1}{5}\right)^{-1} u(n-1)\right)$$

$$\text{تعریف ضربه} = u(n) - u(n-1)$$

$$\Rightarrow \alpha\left(\tfrac{1}{5}\right)^{-1} = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = \tfrac{1}{5}}$$

$$y(n) = \left(\tfrac{1}{5}\right)^n \delta(n) = \left(\tfrac{1}{5}\right)^0 \delta(n) = \delta(n) \quad \rightarrow \quad \text{تمرین ۳}$$

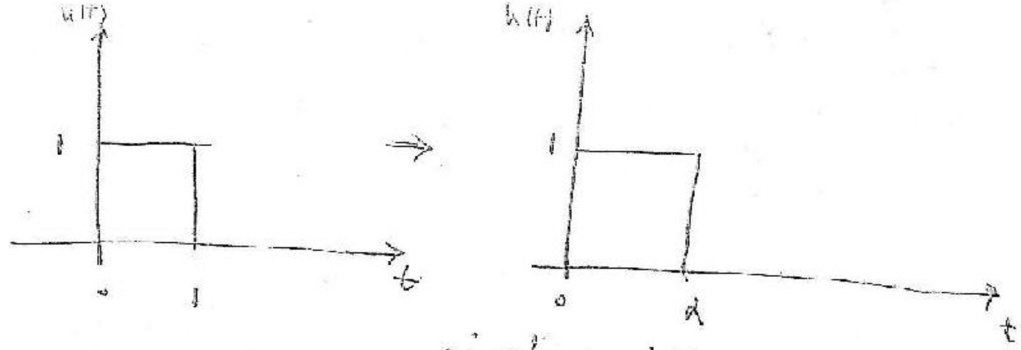
سوال ۵ :

$$x(t) = \begin{cases} 1 ; & 0<t<1 \\ 0 ; & \text{سایر} \end{cases} \quad , \quad h(t) = x(t/2) \quad 0<t<2$$

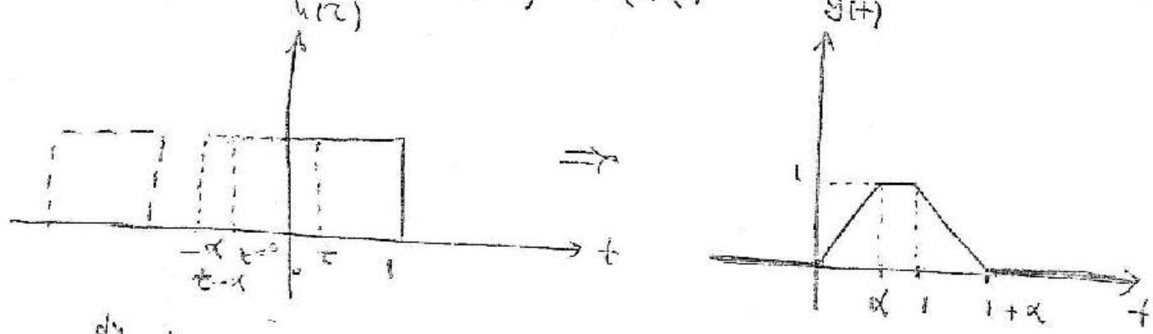
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

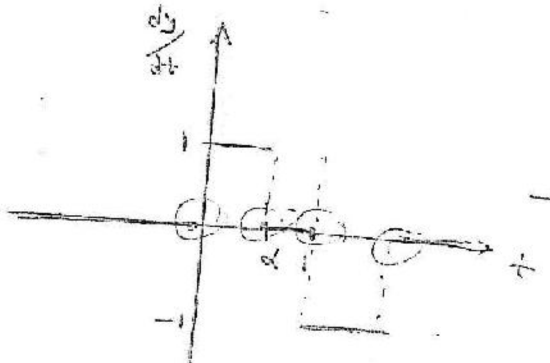
α چقدر باشد تا $\frac{dy}{dt}$ دارای سه ناپیوستگی باشد.

حل:



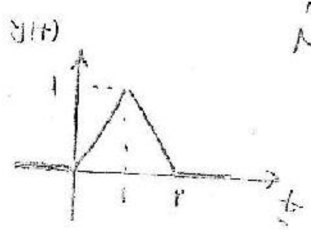
$0<\alpha\le 1$ فرض شده

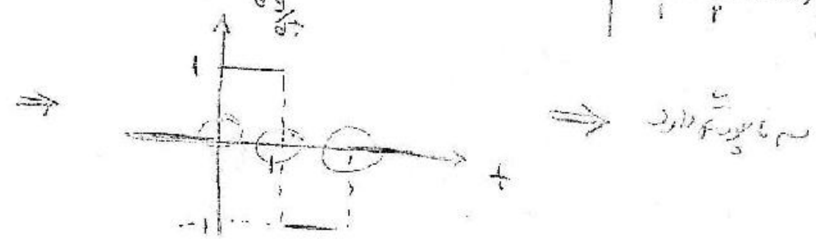




چون در $0<\alpha<1$ بود ← مشتق پیوسته نیست

حال اگر $\alpha=1$ باشد





سؤال ۲: $y(n)=Re(x(n-1))$

حل ۱- خطی بودن: فرض کنید $x_1(n) \to$ خروجی متناظر $y_1(n)=Re(x_1(n-1))$

$x_2(n)=jx_1(n) \Rightarrow y_2(n)=Re(x_2(n-1))=Re(jx_1(n-1))=0 \longrightarrow$ خطی نیست

← همگن نیست

۲- تغییرناپذیری با زمان ← چون ... تغییرناپذیر با زمان است

نکته: $x(|n|) \to$ تغییرپذیر با زمان

۳- پایداری → اگر $x(n)$ کراندار باشد $y(n)$ هم کراندار است

$|x(n)| = N \xrightarrow{\text{سیستم ترکیبی}} |y(n)| = Re(N) = N$ → خروجی کراندار → پایدار است

در بدترین شرایط

اگر سیستم گسسته باشد تعریف شده n را اگر ورودی سیستم بدهیم تعریف نشده و را بدست آوریم

۴- علی بودن

$y(2) = Re(x(1))$ →

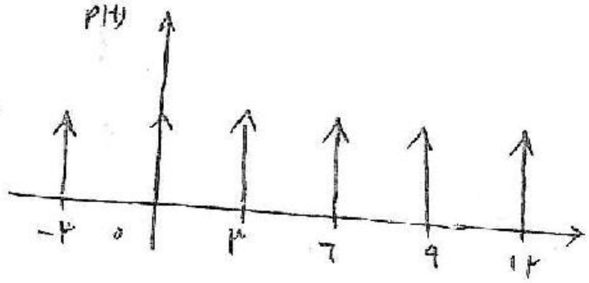
$y(-1) = Re(x(-2))$ → علی است

سوال ۴:

ورودی $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-3k)$ $\qquad h(t) = e^{-t}u(t)$

$y(t) = Ae^{-t} \quad 0<t<3 \quad \Rightarrow \quad A = ?$

حل:



نکته:

در سیستم LTI اگر ورودی متناوب باشد با دوره ۳

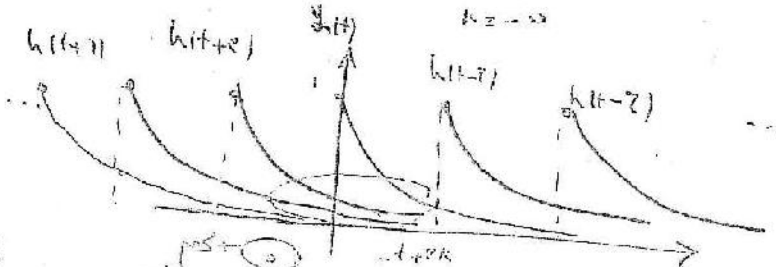
جواب خروجی هم متناوب باشد با دوره ۳ $=T$ باشد

$$y(t) = h(t) * p(t) = h(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-3k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(t) * \delta(t-3k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(t-3k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(t-3k)} u(t-3k)$$



جواب

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{0} e^{-(t-3k)} \times 1 = e^{-t} + e^{-t-3} + e^{-t-6} + \cdots$$

$0<t<3$

$$= \frac{e^{-t}}{1-e^{-3}} = e^{-t}\left(\frac{e^{3}}{e^{3}-1}\right) = Ae^{-t}$$

مجموع سری هندسی

نکات مهم در مورد کانولوشن :

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

1) $y(t-t_0) = x(t-t_0) * h(t)$

2) $y(t-(t_1+t_2)) = x(t-t_1) * h(t-t_2)$

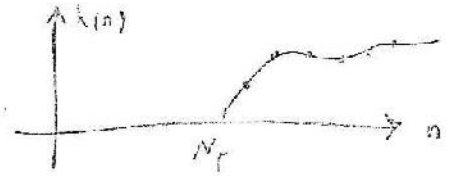
3) $\frac{1}{|a|} y(at) = x(at) * h(at)$ حتی اگر تغییرات همزمان باشند کانولوشن
قابل تفسیر خواهد بود.

پس داریم $a = -1$ $\quad y(-t) = x(-t) * h(-t)$

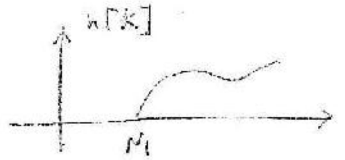
$x(2t) * h(2t) =$ شبیه به چیزی نیست
چون در تمام حوزه پیوسته است

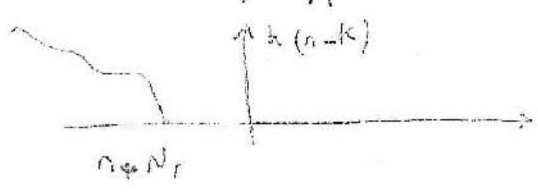
سؤال ۲ :

1)



ب)





$n - N_2 < N_1$ $\longrightarrow$ همپوشانی ندارند

$\Rightarrow n < N_1 + N_2$

همپوشانی ندارند.

نکته : پاسخ ضربه سیستم LTI که علی است برای $t<0$ صفر است

$$\left\{\begin{array}{l} h(t)=0 \\ t<0 \\ , \\ x(t)=0 \\ t<0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} y(t)=0 \\ t<0 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} h(t)=0 \\ t<t_1 \\ , \\ x(t)=0 \\ t<t_2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} y(t)=0 \\ t<t_1+t_2 \end{array}$$

همچنین :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=0 \\ t>t_1 \\ h(t)=0 \\ t>t_2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} y(t)=0 \\ t>t_1+t_2 \end{array}$$

← قسمت تمرین ۴ برقرار است.

تمرین ۳ - درست است.

تمرین ۲ ← غلط است $y(n-1) = x(n-1)*h(n-1)$ صحیح نیست

سؤال ۱:

نکته: اگر سیستم LTI پایدار باشد، حتماً پاسخ ضربه آن جمع‌پذیر است.

نکته مربوط: در سیستم‌های غیرخطی دیگر، آرامش در ورودی صفر است، خروجی لازم است

مثال: ۱) $y(t)=x(t)+1$

۲) $y(t)=x^2(t)+1+x(t-1)$

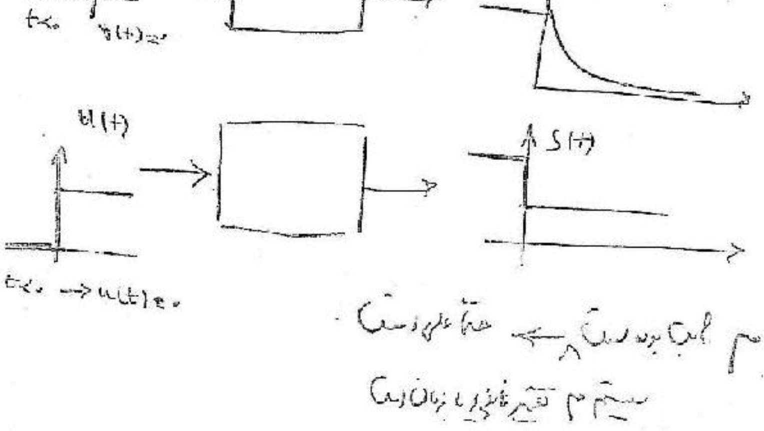
$\begin{cases} x(t)=0 \\ t<0 \end{cases}$ $\begin{matrix} y(t)=1 \\ t<0 \end{matrix}$

در این سیستم تغییرناپذیر با زمان هم باشد اگر حتماً شرط آرامش در ورودی صفر خروجی لازم باشد، در غیر این صورت ... باشد

۳) $y(t)=x^2(t)+e^t+x(t-1)$

$\begin{cases} x(t)=0 \\ t<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y(t)=e^t \\ t<0 \end{matrix}$

مثال: آیا سیستم غیرخطی تغییرناپذیر با زمان



برای ~~علّی~~ سیستم علّی هست

برای علّی بودن یک سیستم غیرخطی کافی است در ورودی متقارن هر جا که تا زمانی

باشد ... چون پاسخ ورودی صفر بوده ← خروجی هم لازم بوده است ← حتماً علّی است.

سیستم هم تغییرناپذیر با زمان است.

در سیستم‌های علّی بودن حتماً پاسخ پله هم ← اما ... δ(t) که ضربه ... .

حل تمرین سری ۲ سؤال ۱ :

می‌دانیم اگر مجموع تابع ضربه محدود شود ← پاسخ ضربه یک سیستم LTI پایدار است.

قسمت ۱ : $\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-(1-2j)t}| u(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t} dt = \boxed{1} < \infty$

قسمت ۲ : $\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-t} \cos 2t|\, dt < \int_{0}^{\infty} e^{-t} dt = 1 \rightarrow$ پایدار است

چون $u(t)$ دارد

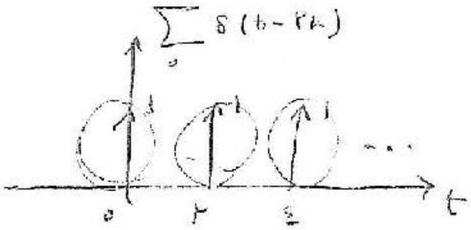
$\int_{-\infty}^{-2} |e^{2t}|\, dt < \infty$

$u(-t-2) \neq 0$

$t < -2$

قسمت ۴ : پایدار است.

قسمت ۳ : ناپایدار است.



نکته: هرگاه انتگرال پاسخ ضربه یک سیستم نامحدود باشد آن سیستم ناپایدار است.

$\int |h|\, dt = 1+1+1+1+\dots = \infty$

چون سطح زیر هر تابع ضربه ۱ است

سؤال ۲ : کدام خطی است؟

1) $y(t) = \begin{cases} 0 & ; x(t) > 0 \\ x(t-1) & ; x(t) < 0 \end{cases}$

نکته: اگر ورودی صفر به خروجی صفر نرسد سیستم غیرخطی است. باید با بررسی سیستم غیرخطی بودن را نشان داد.

$y(t) = x(t-1)\, u(-x(t)) \rightarrow$ غیرخطی است

ضرب دو تابع x غیرخطی است

2) $\frac{d}{dt} y(t) = \cos 2t \cdot \frac{d}{dt} x(t)$

سیستم تغییرپذیر با زمان است.
چون ... سیستم خطی

3) $y(t) = \sin(x(t))$ چون سینوس یک تابع غیرخطی است.

4) $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t) + 1$

$x_2(t) = \alpha x_1(t) \rightarrow y_2(t) = \alpha x_1(t) + 1 \neq \alpha y_1(t) \rightarrow$ غیرخطی است

۷/

سؤال ۱۲ :

وارون پذیری سیستم : همه خروجی‌ها را داریم ، حال آیا می‌توانیم همه ورودی‌ها را بسازیم .

1) $y(n) = x(2n)$ $\longrightarrow$ ورودی‌ها در نقاط فرد در خروجی از بین می‌روند $\longrightarrow$ وارون ناپذیر

$y(t) = x(2t) \rightarrow$ وارون پذیر

2) $y(n) = x(4n+1)$ $\longrightarrow$ وارون ناپذیر

فقط ورودی‌های با اندیس $4n+1$ را در خروجی می‌بینیم .

3) $y(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{2}) & \text{، زوج } n \\ 0 & \text{، فرد } n \end{cases} \longrightarrow$ خروجی $= \begin{cases} x(\frac{2k}{2}) = x(k) & n = 2k \\ 0 & n = 2k+1 \end{cases}$

در نقاط زوج ورودی‌ها را در خروجی می‌بینیم و در نقاط فرد خروجی صفر است . $\boxed{x(k)}$ ورودی‌ها را در کل نقاط داریم .

4) $y(n) = x(-|n|)$ $\longrightarrow$ همه ورودی‌ها را نداریم $\rightarrow$ وارون ناپذیر

فقط منفی‌ها را در خروجی می‌بینیم

سؤال ۱۱ : کدام وارون پذیر است

1) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ $\rightsquigarrow$ همه توابع مشتق وارون پذیر نمی‌باشند

$y_1 = \frac{dx_1}{dt}$ حال ورودی را $x_1 + k$ بگیریم

$y_2 = \frac{d(x_1+k)}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = y_1$ $\longrightarrow$ به ازای دو ورودی مختلف

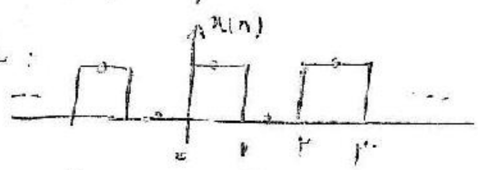
خروجی یکسان می‌گیریم بر اساس خروجی ورودی‌ها را نمی‌توان ساخت . $\longrightarrow$ وارون ناپذیر

اما با این شرط که $x(t)$ انتگرال پذیر باشد $\rightarrow$ آنگاه مشتق وارون پذیر است .

$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \, dt$

2) $y(n) = x(n)\,x(n-1)$

مثال نقض :



$\Rightarrow y(n) = x(n)\,x(n-1) = 0 \longrightarrow$ وارون ناپذیر

سیستم‌هایی که وارون ناپذیرند معمولاً به ازای دو ورودی متفاوت خروجی یکسان می‌دهند

۳) $y(n) = \begin{cases} x(n-1) & ; \; n \geq ? \\ 0 & ; \; n = 0 \\ x(n) & ; \; n \leq -1 \end{cases}$

در لحظه n به خروجی سیستم ورودی n را
در $n=0$ خروجی مشخص نمی‌شود سیستم را معکوس‌پذیر نیست
در $n \leq -1 \leftarrow y(n) = x(n)$

سیستم در $n \leq -1$ خروجی ... $n \leq -1$ را در خروجی ... چون در لحظه $n=0$ ورودی تشخیص نمی‌شود
وارون‌پذیر $\rightarrow$ سیستم ...

۴) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} (\frac{1}{2})^{n-k} x(k) \overset{\text{can}}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{2})^{n-k} \underbrace{u(n-k)}_{n \geq k} x(k)$

$= (\frac{1}{2})^n u(n) * x(n) \rightarrow$ ... سیستم LTI است $\leftarrow$ سیستم LTI وارون‌پذیر است

مثال نقض: $y(n) = n\,x(n) \longrightarrow$ وارون ندارد

$x(n) = \frac{y(n)}{n} \quad n \neq 0$

$y(0) = 0 \times x(0) = 0 \quad n \neq 0 \Rightarrow$ ورودی در $n=0$ معلوم نمی‌شود

برای وارون‌پذیری سیستم وارون، تبدیل Z می‌گیریم

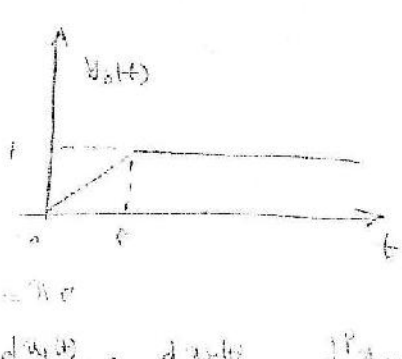
$h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$

$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \overset{\text{معکوس}}{\Rightarrow} H_0(z) = \frac{1}{H(z)} = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$

$x(n) \rightarrow \boxed{(\frac{1}{2})^n u(n)} \rightarrow y(n) \qquad \overset{\text{معکوس}}{\Rightarrow} h_0(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$

چک: $h_0(n) * h(n) = \delta(n)$

سؤال ۵: سیستم LTI است.



۶) $h(t) = h_0'(t) \quad , \quad x(t) = x_0'(t)$

$\Rightarrow y(t) = \frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} = 0$

اگر $x_1 * x_2 = x_3$

$\frac{dx_1(t)}{dt} * \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{d^2 x_3}{dt^2}$

$x_1 * x_2 = x_3$

$\frac{dx_1}{dt} * x_2 = \frac{dx_3}{dt} \quad ; \quad \frac{dx_2}{dt} * x_1 = \frac{dx_3}{dt}$

$\frac{dx_1}{dt} * \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2 x_3}{dt^2}$

۲/ $h(t)=h_0(-t)$, $x(t)=x_0(-t)$

$h_0(-t)*x_0(-t)=y_0(-t)$ → قابل تعیین است

۳) $h(t)=h_0(-t)$, $x(t)=x_0(t)$

$x_0(t)*h_0(-t)$ $\neq$ بدون داشتن تابع نمی‌توان
قابل تعیین نیست

۴) $h(t)=h_0(t+2)$, $x(t)=x_0(t-1)$

$y(t)=x_0(t-1)*h_0(t+2)=y_0(t+1)$ → قابل تعیین است

← جواب: گزینه ۳

مثال دیگر : $x(t)=x_0(-t-1)$
$h(t)=h_0(-t+2)$ $\Rightarrow y(t)=y_0(-t+1)$

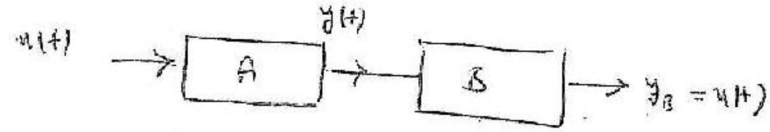
جمع‌بندی: همیشه اول شیفت می‌دهیم و بعد قرینه می‌کنیم

جلسه نهم ۲۸٫۹٫۸۳

سؤال ۸ :

۱) وارون یک سیستم علّی، همیشه علّی است. ← نادرست است. زیرا ممکن است یک سیستم علّی باشد ولی وارون آن علّی نباشد.

مثال نقض :



سیستم A : $y(t)=x(t-1)$
علّی است

سیستم B : $y(t)=x(t+1)$
غیرعلّی

پس این عبارت همیشه درست نیست.

۲) ترکیب سری یک سیستم علّی و یک سیستم غیرعلّی لزوماً غیرعلّی است ← نادرست است

زیرا می‌توان مثال در همین سیستم بالا زد که سیستم حاصل علّی است یعنی $y(t)=x(t)$ سیستم ترکیبی سیستم علّی است.

نکته: اگر یک سیستم علّی را با یک سیستم غیرعلّی ترکیب کنیم سیستم لزوماً غیرعلّی نخواهد بود.

۱۳ یک سیستم LTI گسسته در زمان علی است اگر و فقط اگر پاسخ پله آن $s(n)$ برای $n<0$ صفر باشد

توضیح درباره یک سیستم LTI علی باشد شرط لازم و کافی این است

$$h(n)=0 \quad n<0$$

شرط : فرض کنید که یک سیستم علی باشد ← $\underset{n<0}{h(n)=0}$ داریم

$$\begin{cases} s(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} h(k)=\sum_{k=0}^{\infty} h(n-k) \\ h(n)=s(n)-s(n-1) \end{cases}$$

$$\underset{n<0}{s(n)} \rightarrow \underset{-\infty<k\le n}{h(k)=0} \Rightarrow s(n)=0$$ (این رابطه برای سیستم علی صادق است)

$$\underset{n<0}{s(n)=0} \Longleftrightarrow \text{سیستم علی}$$ ← صحیح است.

۱۴ یک سیستم LTI پیوسته در زمان پایدار است اگر و فقط اگر پاسخ پله آن $s(t)$ انتگرال پذیر باشد

توضیح

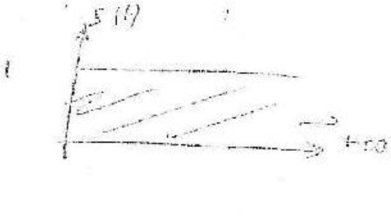
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt<\infty \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{t} |s(t)|\,dt<\infty$$

$$h(t)=\frac{ds}{dt}$$

نکته: اگر $s(t)$ انتگرال پذیر باشد، مطمئناً مشتق آن هم انتگرال پذیر خواهد بود.
ممکن است $h(t)$ انتگرال پذیر باشد ← ولی $s(t)$ که انتگرال آن است انتگرال پذیر نباشد

مثلا $h(t)=\delta(t)$ و $u(t)=s(t)$

$$\int |h(t)|\,dt<\infty$$



سری فوریه : (زمان پیوسته)

هر سیگنال متناوب با دوره تناوب T، داریم

$$x(t) = x(t+T) \longrightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

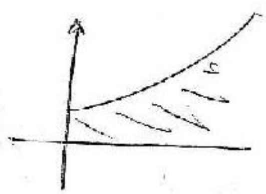
که $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow$ فرکانس

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

تبدیل فوریه :

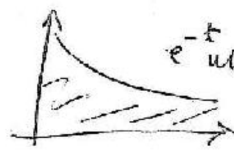
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad < \infty$$

تبدیل فوریه معمولاً برای سیگنال‌های غیرمتناوب به کار می‌رود ولی برای سیگنال‌های متناوب هم می‌توان آن را حساب کرد



$e^{t}u(t) \longrightarrow$ چون سطح زیر منحنی بی‌کران است تبدیل فوریه ندارد

شرط وجود تبدیل فوریه :
اگر سیگنال سطح زیر منحنی‌اش کراندار باشد

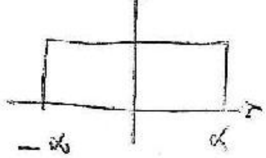


$e^{-t}u(t) \longrightarrow$ چون سطح زیر منحنی محدود است تبدیل فوریه دارد.

عکس تبدیل فوریه :

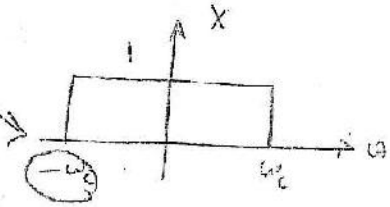
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$* \quad e^{-at}u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{a+j\omega}$$



$$** \quad \xrightarrow{F} \frac{2\sin\alpha\omega}{\omega} = 2\alpha\, \mathrm{Sinc}\, \frac{\alpha\omega}{\pi} \qquad \mathrm{Sinc}\, t = \frac{\sin\pi t}{\pi t}$$

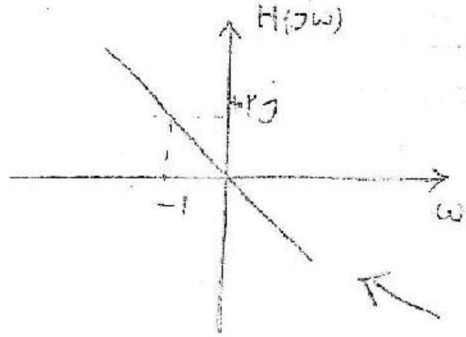
$$*** \quad \frac{\sin\omega_c t}{\pi t} \xrightarrow{F}$$



کاربرد تبدیل فوریه در سیستم‌های LTI :

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\cdot H(j\omega)$$



سؤال ۳ (سراسری)

اگر $X(j\omega) = \dfrac{1}{2+j\omega}$

$H(j\omega) = 2j\omega$

حل:

$$y(j\omega) = -2j\omega \times \frac{1}{2+j\omega} = -\frac{2j\omega+4-4}{2+j\omega} = -\frac{2j\omega+4}{2+j\omega} + \frac{4}{2+j\omega}$$

چون میخواهیم ... ترکیب ...

گزینه ۲

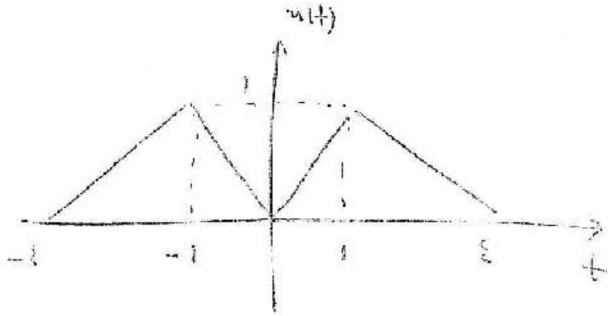
$$= -2 + \frac{4}{2+j\omega} \Rightarrow y(t) = -2\delta(t) + 4e^{-2t}u(t)$$

$$\begin{cases} y(0^+) = 4 \quad (\text{حتم}) \\ y(\infty) = 0 \end{cases}$$

نکته: در اینجا از قضیه مقدار اولیه می‌توان استفاده کرد

... گزینه ۲

سؤال ۴:



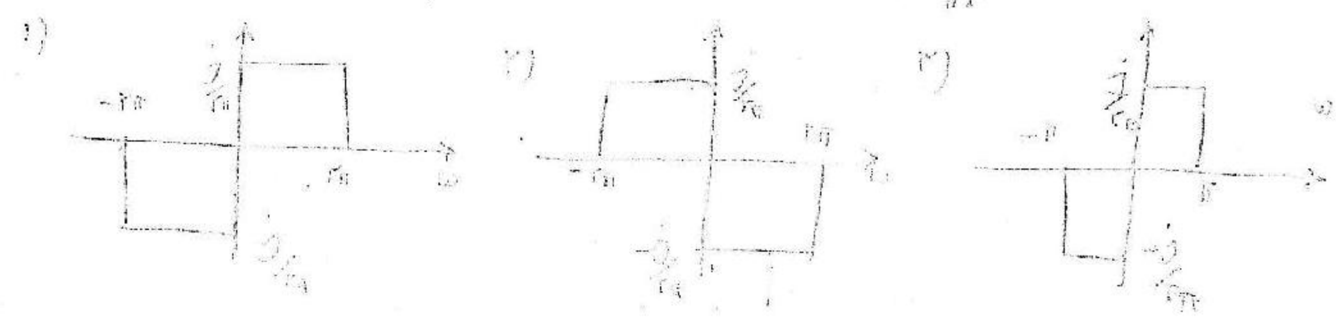
$X(j\omega)$ در $\omega = 0$ = ?

حل:

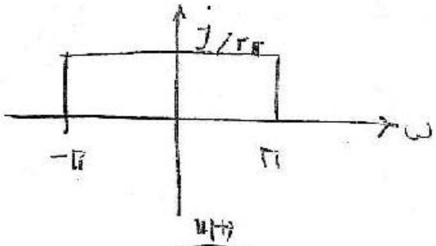
$$X(j0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt \Rightarrow$$ نکته: سطح زیر نمودار برابر مقدار تبدیل فوریه در صفر است

$$X(j0) = 3 \times \tfrac{1}{2} + 2 \times \tfrac{1}{2} + 3 \times \tfrac{1}{2} = 4 \longrightarrow$$ گزینه ۳

حل: اگر $x(t) = 4\left(\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}\right)^2$ ، $X(j\omega) = ?$



۴)



حل:

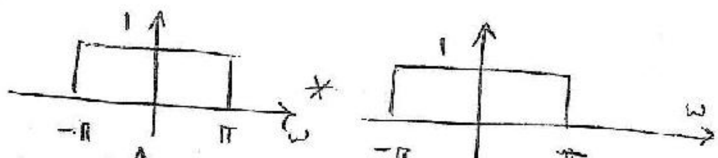
$$F\left(t\Big(\underbrace{\frac{\sin \pi t}{\pi t}}_{x(t)}\Big)^2\right) = ?$$

یادآوری 1. $F(x_1 x_2) = \frac{1}{2\pi}\left(X_1(j\omega) * X_2(j\omega)\right)$

2. $F(t\,x(t)) = j\,\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

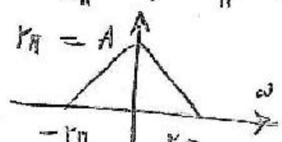
$$F(x(t)) = F\Big(\overbrace{\frac{\sin \pi t}{\pi t}}^{x_1} \cdot \overbrace{\frac{\sin \pi t}{\pi t}}^{x_2}\Big) = \frac{1}{2\pi}\left(F\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right) * F\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)\right)$$

$= \frac{1}{2\pi}\Big($



$\Big)$

$= \frac{1}{2\pi}\Big($



$\Big)$

مجموع محدوده ۲π

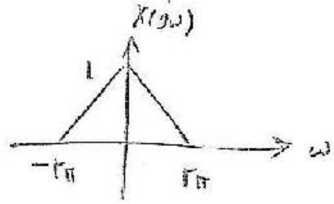
مجموع محدوده ۲π

$$S_{x_1} = 2\pi,\quad S_{x_2} = 2\pi \Rightarrow S_\Delta = S_{x_1} \cdot S_{x_2} = 2\pi \cdot 2\pi = 4\pi^2$$

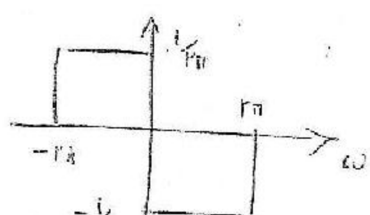
$$\Rightarrow 2A\pi = 4\pi^2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{4\pi^2}{2\pi} = 2\pi}$$

← اگر عرض پالسها یکسان نباشد

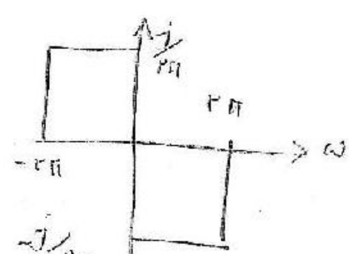
$X(j\omega) =$



$F(t\,x(t)) = j\,\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = j$

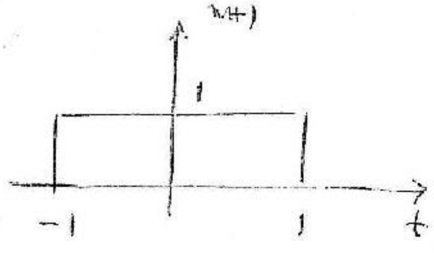


$=$



نکته: $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2 t \, dt = 1 = F(\operatorname{sinc}^2 t)\Big|_{\omega=0}$

مثال: $x(t)$ به شکل زیر $\int_{-\infty}^{+\infty} X^2(j\omega)\, d\omega$ برابر است



چقدر است؟

۱) 2π ۲) 4π ۳) 6π ۴) 8π

حل: نکته: اگر $y(t) \longrightarrow Y(j\omega)$

$$y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega)\, d\omega$$

$$\Rightarrow 2\pi\, y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega)\, d\omega$$

$$\Rightarrow 2\pi\, F^{-1}(X^2(j\omega))\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(j\omega)\, d\omega$$

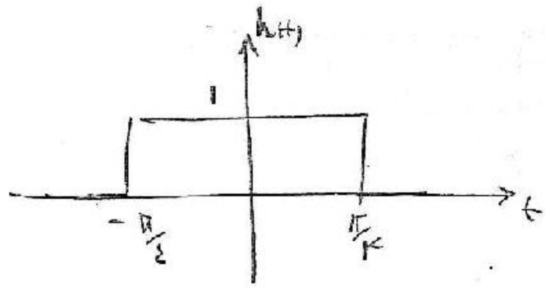
$$x_1 * x_2 * x_3 \xrightarrow{F} X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

$$2\pi\, F^{-1}(X^2(j\omega))\Big|_{t=0} = 2\pi\,(\underbrace{x(t) * x(t)} * x(t))\Big|_{t=0} = 2\pi \times 3 = 6\pi$$

$= 2 \times (1+1) \times \frac{1}{2} = 2$

1

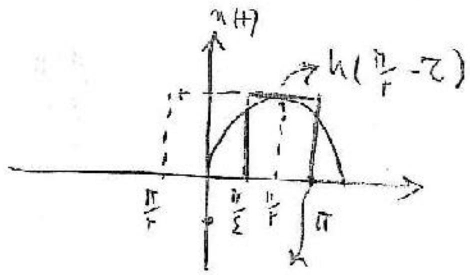
سؤال ۴ :



$x(t) = \sin t\,(u(t) - u(t-\pi))$

$y(t)\big|_{t=\frac{\pi}{2}} = ?$

حل :



$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$$y(t)\big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1 \times \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin t\, dt = -\cos t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= - \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

مهم

سؤال ۵ : $g(t) \xrightarrow{F} G(j\omega)$, $x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)$. $x(t) = \int_{t-3}^{t-1} g(\alpha)\, d\alpha$

کم محاسبات!

راه اول حل) از آنجا که حدود انتگرال بر حسب t هستند ← مشتق‌گیری مناسب است.

نکته : $\frac{d}{dt}\left(\int_{B(t)}^{A(t)} g(\alpha)\, d\alpha\right) = A'(t)\, g(A(t)) - B'(t)\, g(B(t))$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = 1 \times g(t-1) - 1 \times g(t-3) \xrightarrow{F} j\omega X = Ge^{-j\omega} - G e^{-j\omega(3)}$$

$$= G(e^{-j\omega} - e^{-j3\omega})$$

$$= Ge^{-j2\omega}(e^{j\omega} - e^{-j\omega})$$

$$= Ge^{-j2\omega}(2j \sin\omega)$$

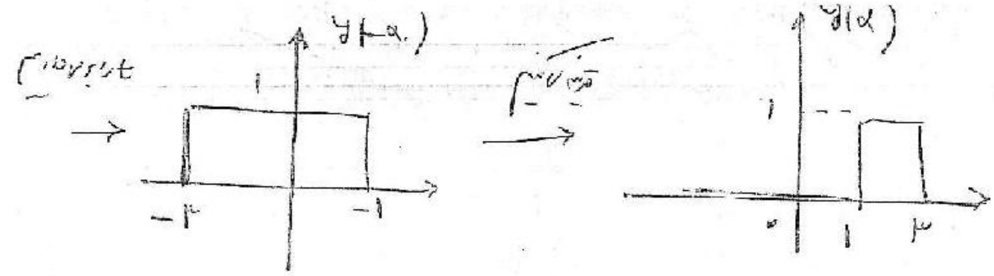
نکته $\begin{cases} F(g(t-t_0)) = e^{-j\omega t_0} G(j\omega) \\ F\left(\frac{d x^n}{dt^n}\right) = (j\omega)^n X(j\omega) \end{cases}$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{j\omega}\, G\, e^{-2j\omega}(2j \sin\omega)$$

$$= G(j\omega)\, \frac{2\sin\omega}{\omega}\, e^{-j2\omega}$$

راه دوم : استفاده از کانولوشن است:

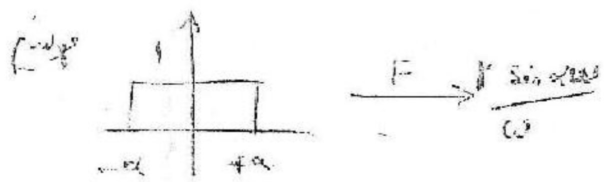
$x(t) = y(t) * g(t)$

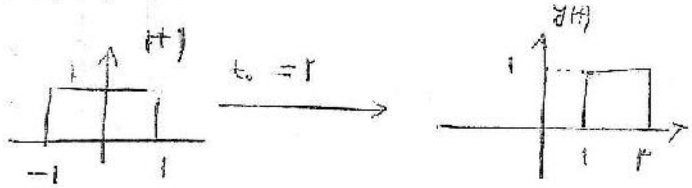


برای یافتن $y(\alpha)$:

$$\Rightarrow x(t) = g(t) * y(t)$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = G(j\omega)F(y) = G(j\omega)\cdot e^{-j2\omega}F(z) = G(j\omega)e^{-j2\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega}$$





$y(t) = z(t-2)$

فیلتر کردن :

$$x(t) \xrightarrow{X(j\omega)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{Y(j\omega)} y(t)$$

$H(j\omega)$

$$* \quad e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow e^{j\omega_0 t}\cdot H(j\omega_0)$$

[illegible]

$$** \quad A\cos(\omega_0 t+\varphi) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow A\,|H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t+\varphi+\measuredangle H(j\omega_0))$$

$|H(j\omega)| \; \measuredangle H(j\omega)$

$*** \quad x(t) = x(t+T)$

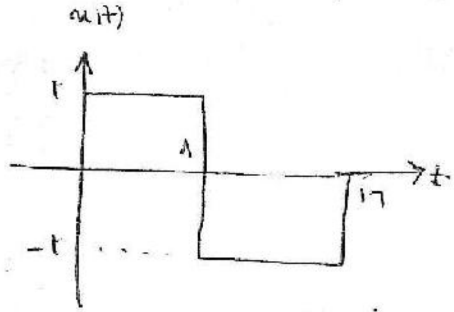
[illegible] $\quad x(t) = \sum a_k e^{jk\omega_0 t} \quad , a_k$

[illegible] $\quad y(t) = \sum b_k e^{jk\omega_0 t} \quad , b_k$

$$\Rightarrow \underline{b_k = a_k H(j(k\omega_0))}$$ سیستم LTI فقط دامنه را تغییر می‌کند

سؤال ۱: $H(j\omega) = \dfrac{\sin 8\omega}{\omega}$ ، ورودی یک سیگنال متناوب با دوره تناوب ۱۶ است.

$x(t) = \begin{cases} 2 & ; \ 0 \le t < 8 \\ -2 & \ \ 8 \le t < 16 \end{cases}$ ، ضرایب سری فوریه خروجی سیستم $y(t)$ را بیابید.



حل:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}}$$

$$H(jk\omega_0) = \frac{\sin 8\left(\frac{k\pi}{8}\right)}{\frac{k\pi}{8}} = \frac{\sin k\pi}{\frac{k\pi}{8}} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow H(jk\omega_0) = 8 \\ k \neq 0 \Rightarrow H(jk\omega_0) = 0 \end{cases}$$

← سینوس مولفه‌هایی که مضرب π هستند صفر است.

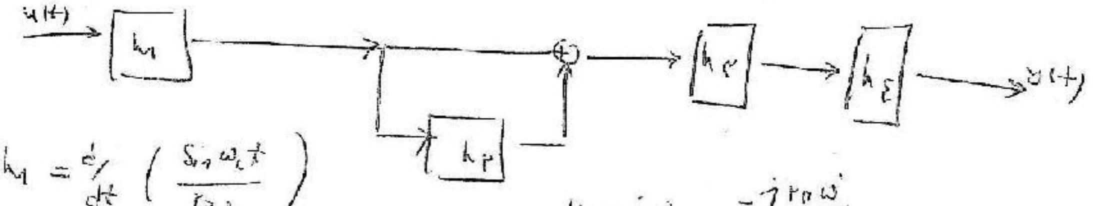
$$b_k = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 8a_0 & k = 0 \end{cases}$$

سطح زیر نمودار یک سیگنال متناوب تقسیم بر دوره (متوسط)

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{\overset{\text{سطح زیر نمودار}}{S}}{T} = 0$$

$$\Rightarrow b_k = 0 \ \ \forall k \longrightarrow \underline{\underline{\text{نتیجه}}}$$ سیستم هر سیگنالی را بگیرد ← مطمئناً خروجی صفر است

سؤال ۲:



$$h_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin \omega_c t}{2\pi t}\right)$$

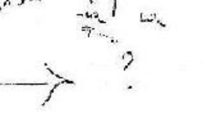
$$H_2(j\omega) = e^{-j\frac{2\pi\omega}{\omega_c}}$$

$$h_3 = \frac{\sin 2\omega_c t}{\pi t} \quad , \quad h_4 = u(t) \quad , \quad x(t) = \sin 2\omega_c t + \cos\frac{\omega_c t}{2} + \cos 2\omega_c t$$

$$y(t) = ?$$

حل:

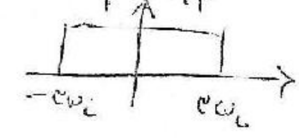
$$h_1(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin \omega_c t}{2\pi t}\right) \longrightarrow ?$$



$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin \omega_c t}{\pi t}\right) \longrightarrow$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H_1} \longrightarrow \boxed{1+H_2} \longrightarrow \boxed{H_3} \longrightarrow \boxed{H_4} \longrightarrow y(t)$$

$$h_3 = \frac{\sin 2\omega_c t}{\pi t} \xrightarrow{F}$$



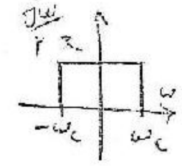
تبدیل فوریه تابع پله

$$h_4 = u(t) \overset{F}{\Rightarrow} \boxed{H_4 = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)} \Big|^{\omega \neq 0} = \frac{1}{j\omega} \quad \omega \neq 0$$

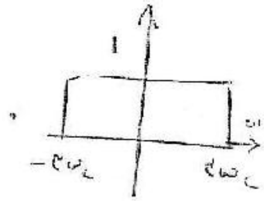
چون هم سودی‌ها زمانی به دست فرکانس میشود مشخص ← و کمیل از تابع پله برعکس آمده مشخص است

(آمده بود DC نیستیم ← $\delta(\omega)$ را نباید حذف کنیم)

$$H_t = H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 =$$



$$\cdot \left(e^{-j\frac{\pi\omega}{\omega_c}} + 1\right) \cdot$$

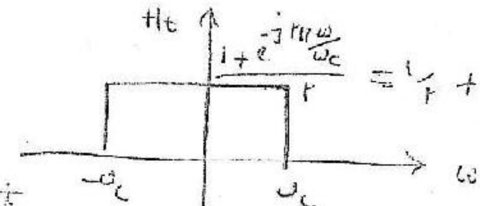


$$\cdot \frac{1}{j\omega}$$

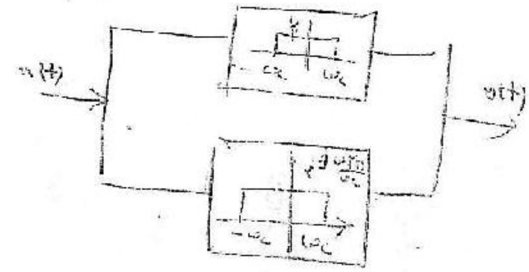
فیلتر نشد فیلتر نشد فیلتر شد

$$x(t) = \sin 4\omega_c t + \cos\frac{\omega_c t}{2} + \cos 3\omega_c t$$

$$=$$



$$= \frac{1}{2} + \frac{e^{-j\frac{\pi\omega}{\omega_c}}}{2} \longrightarrow$$ اثر دو سیستم که با هم موازی کردیم است



$$y(t) = \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\omega_c t}{2} + \frac{e^{-j\frac{\pi}{\omega_c}\left(\frac{\omega_c}{2}\right)}}{2}\cos\frac{\omega_c t}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{\omega_c t}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\pi}\cos\frac{\omega_c t}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{\omega_c t}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega_c t}{2} - \pi\right)$$

$$= 0 \quad \text{قرینه}$$

سؤال ۲: $x(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{t^2+1} \longrightarrow X(\omega)\Big|_{\omega=\frac{\pi}{4}} = ?$

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{a+j\omega}$$

$$e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t>0 \\ e^{at} & t<0 \end{cases} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

$f(t)$: $\frac{1}{a+j\omega}$ $\quad f(-t)$

۱۳

$$F(x(\alpha t)) = \frac{1}{|\alpha|} X\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

نتیجه: $\alpha = -1 \longrightarrow F(x(-t)) = 1 \times X\left(\frac{j\omega}{-1}\right) = X(-j\omega)$

$$e^{-a|t|} \xrightarrow{F} \frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$a = 1 \Rightarrow e^{-|t|} \xrightarrow{F} \frac{2}{1+\omega^2}$$

مثال ۲

$$x(t) = f(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) = G(\omega)$$

$$y(t) = G(t) \xrightarrow{F} 2\pi f(-\omega)$$

$$e^{-a|t|}\Big|_{a=1} = e^{-|t|} \xrightarrow{F} \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\frac{2}{1+t^2} \longrightarrow 2\pi e^{-|-\omega|} = 2\pi e^{-|\omega|}$$

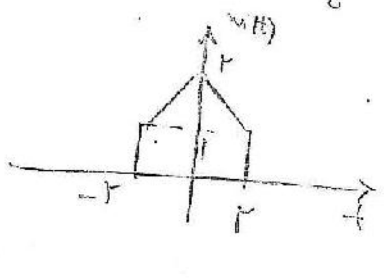
نتیجه مهم:

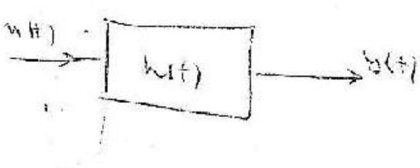
$$\begin{cases} F\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \pi e^{-|\omega|} \\ F\left(\frac{a}{a^2+t^2}\right) = \pi e^{-a|\omega|} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2} \xrightarrow{F} \frac{1}{\pi}\pi e^{-|\omega|} = e^{-|\omega|}$$

$$X(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{\pi}{4}} = e^{-\left|\frac{\pi}{4}\right|} = e^{-\frac{\pi}{4}} = ۰/۴۵۶$$

مثال: $h(t) = e^{-t}u(t)$





$y(j\omega) = ?$

حل:

$$H(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega} \Rightarrow H(j0) = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$\Rightarrow Y(j0) = X(j0) \cdot H(j0)$$

سطح زیر نمودار سیگنال x(t)

$$\Rightarrow X(j0) = 2 \times (2+1) \times \frac{1}{2} = 6$$

$$\Rightarrow Y(j0) = 6 \times \frac{1}{2} = 3 \longrightarrow \text{۱ نمره}$$

سوال ۱۳ : برای سیگنال $x(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{7 \sin \omega_0 (t-2)}{2\pi (t-2)} \right)$ مقدار تبدیل فوریه $x(t)$ در $\omega = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

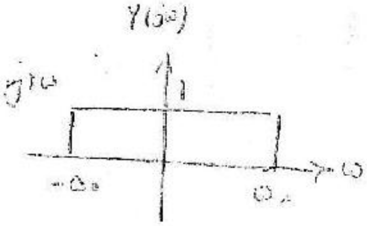
حل:

$$F\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{7 \sin \omega_0 (t-2)}{2\pi (t-2)} \right)\right) = \frac{7}{2}\, j\omega X(j\omega)$$

$$x(t) = g(t-2) \longrightarrow X(j\omega) = e^{-j2\omega} Y(j\omega)$$

$$g(t) = \frac{\sin \omega_0 (t)}{\pi t}$$

$$F\left(\frac{7}{2} \frac{d\,x(t)}{dt} \right) = \frac{7}{2} j\omega e^{-j2\omega} Y(j\omega) = \frac{7}{2} j\omega e^{-j2\omega}$$



$$\Rightarrow F\left(\frac{7}{2} \frac{dx(t)}{dt} \right)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{2} \times j \times \frac{\pi}{4} \times e^{-j\,2\times\frac{\pi}{4}} \times 1$$

$$-j$$

$$= \frac{7\pi}{8}\, j\, e^{-j\frac{\pi}{2}} \times 1 = +\frac{7\pi}{8} \longrightarrow \text{۲ نمره}$$

سوال ۱۴ : اگر ... $x(t)$ ... $I = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \frac{\sin \omega}{\pi \omega} e^{j\omega} d\omega$ کدام است؟

$$2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, d\omega$$

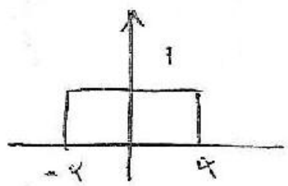
$$2\pi x(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j(t_0\omega)} d\omega = 2\pi F^{-1}(X(j\omega))\Big|_{t=t_0}$$

← هرگاه ۲ سیگنال را در اکسپوننشیال $e^{j2\omega}$ ضرب کنیم ـ معادل شیفت زمانی $x(t)$ است.

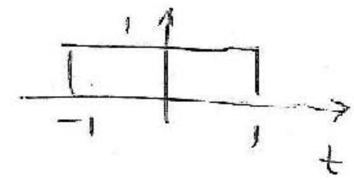
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(X(j\omega)\,\frac{\sin\omega}{\pi\omega}\right)e^{j2\omega}\right]d\omega = 2\pi F^{-1}\left(X(j\omega)\cdot\frac{\sin\omega}{\pi\omega}\right)\Bigg|_{t=2}$$

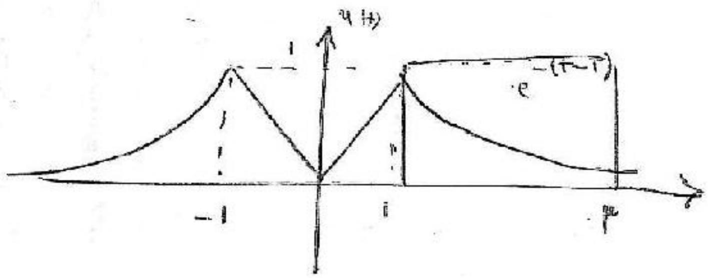
$$=\cancel{2\pi}\cdot x(t) * F^{-1}\left(\frac{\sin\omega}{\cancel{\pi}\omega}\right) = x(t) * F^{-1}\left(\frac{2\sin\omega}{\omega}\right)$$

می‌دانیم



$\xrightarrow{F}$ $\dfrac{2\sin a\omega}{\omega}$ $= x(t) *$





$$\Rightarrow I = \int_{1}^{3} 1\times e^{-(t-1)}\,dt = -e^{-(t-1)}\Big|_{1}^{3}$$

$$= -e^{-2} + e^{0}$$

$$= 1 - e^{-2} = 0.8647 \text{ تقریباً}$$

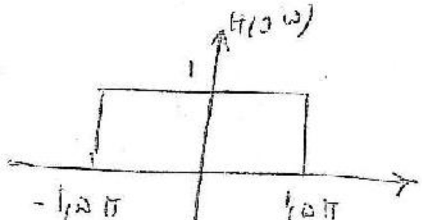
سؤال ۸: $h(t)=\dfrac{\sin 1.5\pi t}{\pi t}$ ، ورودی متناوب با دوره تناوب $T=2$ ،

$$x(t)=\begin{cases} 1-t+\sin\pi t & ; 0<t<1 \\ 1+\sin 4\pi t & ; 1<t<2 \end{cases}$$

مطلوب است خروجی = ؟

حل:

$H(j\omega) =$



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$K = 0, \pm 1$$

← تنها مؤلفه‌های فرکانسی 0 و ± 1 از فیلتر عبور می‌کنند

اگر $x(t)$ حقیقی باشد $\xleftarrow{\text{ورودی فیلتر}}$ $a_{-k} = a_k^*$

$a_1 = a_{-1}^*$

چون [illegible] برابر است ← $a_k = b_k$ میشود

$$b_0 = a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (1-t+\sin\pi t)\,dt + \int_1^2 1+\sin\pi t\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{\pi}\cos\pi t \Big]_0^1 + t - \frac{1}{\pi}\cos\pi t \Big]_1^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{\pi}} + \cancel{\frac{1}{\pi}} + 2 - \cancel{\frac{1}{\pi}} - 1 - \cancel{\frac{1}{\pi}}\right) = \frac{3}{4}$$

$$b_1 = a_1 = \frac{1}{2}\int_0^T x(t)\, e^{-j\omega_0 t} = \frac{1}{2}\int_0^2 (1+\underbrace{\sin\pi t}_{\frac{e^{j\pi t}-e^{-j\pi t}}{2j}})\underbrace{e^{-j\pi t}}_{\cos\pi t - j\sin\pi t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 (-t)e^{-j\pi t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \sin\pi t(\cos\pi t - j\sin\pi t)\,dt + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{j\pi}e^{-j\pi t} - \frac{1}{\pi^2}e^{-j\pi t}\right)\Big|_0^1$$

$$\sin\pi t\cdot\cos\pi t - j\underbrace{\sin^2\pi t}_{\frac{1-\cos 2\pi t}{2}}$$

$$-t \times e^{-j\pi t},\quad \frac{1}{-j\pi}e^{-j\pi t},\quad \frac{-1}{\pi^2}e^{-j\pi t}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(\sin\pi t)^2}{2} - j\frac{t}{2} + j\frac{\sin 2\pi t}{4}\right]_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi j}\underbrace{e^{-j\pi}}_{=-1} - \frac{1}{\pi^2}\underbrace{e^{-j\pi}}_{=-1} + \frac{1}{\pi^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-j) - \frac{1}{2}\left(-\frac{j}{\pi} + \frac{2}{\pi^2}\right) = -\frac{j}{2} + \frac{j}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{2j} + \frac{1}{2j\pi} + \frac{1}{\pi^2}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2j} + \frac{1}{2j\pi} + \frac{1}{\pi^2}$$

سوال ۳: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(t-k)$, ...

حل: قطار ضربه $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_s) = \frac{1}{T_s} + \frac{2}{T_s}\sum_{k=1}^{+\infty}\cos k\omega_s t$

$a_k = \frac{1}{T_s}$

۱۵

$$p(t) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{T_s} H(j0) + \frac{2}{T_s} \sum |H(jk\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \measuredangle H(jk\omega_0))$$

حل

تکرار شونده

$$p(t) * x(t) = \sum \delta(t - kT_s) * x(t) = \sum x(t - kT_s) = \text{تکرار شونده}$$

(ریاضی تکرار و شیفت $x(t)$ با پریود)   با پریود T_s

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(t - k\cdot 1) \overset{T_s = 1}{=} v(t) * p(t)$$

قطار ضربه

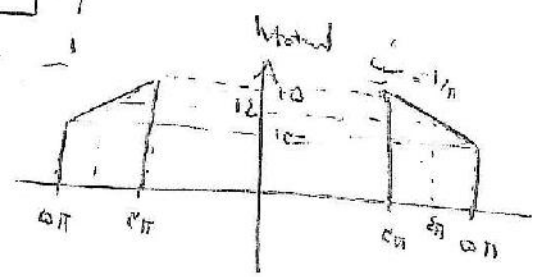
$$T = T_s = 1$$

$$x(t) = v(t) * p(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

سیستم:

$$p(t) \longrightarrow \boxed{v(t)} \xrightarrow{x(t) = v(t) * p(t)} \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$h_{total}(t) = v(t) * h(t) \xrightarrow{F} V(j\omega) \cdot H(j\omega) =$$



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$p(t) = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} \sum_{k=1}^{+\infty} \cos 2k\pi t$$

از فیلتر عبور نمی‌کند

$2\cos 4\pi t$ فقط

$(k=2)$ عبور می‌کند

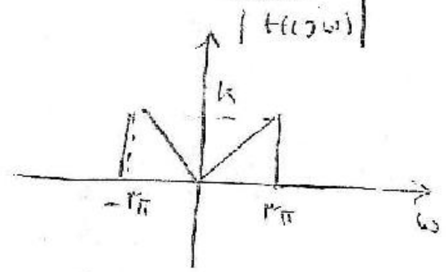
$$\Rightarrow y(t) = H(j\overset{4\pi}{\omega_0}) \cdot 2\cos 4\pi t$$

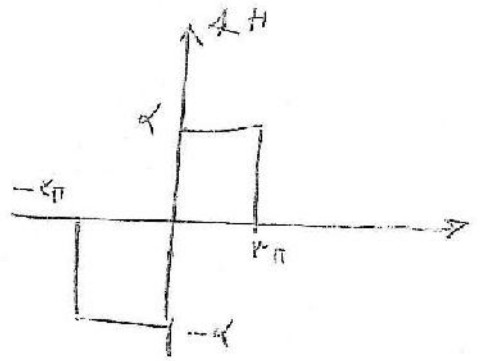
$$= 14 \times 2\cos 4\pi t = 28 \cos 4\pi t \;:\; \text{گزینه ۱}$$

سوال ۱۵: ... $s(t) = \mathrm{sinc}(2t)$ ...

$$\operatorname{sinc} t = \frac{\sin \pi t}{t}$$

$$\operatorname{sinc} \alpha = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \Rightarrow \operatorname{sinc} 2t = \frac{\sin 2\pi t}{2\pi t}$$





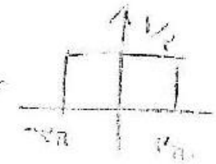
$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t)\,dt \quad , \quad h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

$$H(j\omega) = S(j\omega)\cdot j\omega \Rightarrow S(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{j\omega}$$

$$H(j\omega) = \begin{cases} \frac{K\omega}{2\pi} e^{j\alpha} & 0<\omega<2\pi \\ 0 & |\omega|>2\pi \\ -\frac{K\omega}{2\pi} e^{-j\alpha} & -2\pi<\omega<0 \end{cases} \quad = \frac{K\omega e^{j(\pi-\alpha)}}{2\pi} \quad -2\pi\leq\omega<0$$

$$S(j\omega) = \begin{cases} \frac{K}{2\pi j} e^{j(\pi-\alpha)} & ; -2\pi<\omega<0 \\ \frac{K e^{j\alpha}}{2\pi j} & ; 0<\omega<2\pi \\ 0 & |\omega|>2\pi \end{cases}$$

$$s(t) = \operatorname{sinc} 2t = \frac{\sin 2\pi t}{2\pi t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\right) \Rightarrow S(j\omega) =$$



$$\Rightarrow \frac{K}{2\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{K = \pi}$$

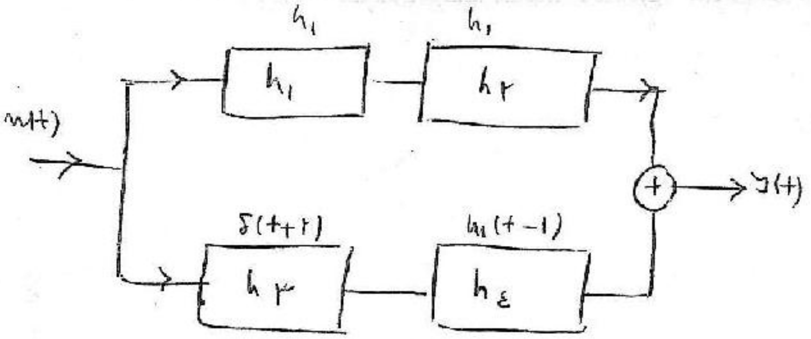
$$\measuredangle S = 0 \Rightarrow \alpha = ? \qquad \measuredangle S = \alpha - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$$

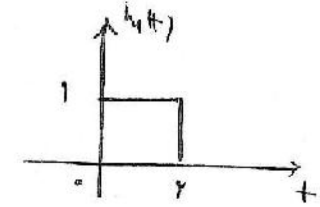
$0<\omega<2\pi$

ص ۱۶ جلسه ششم

ادامه سوالات جلسه قبل :

سوال ۱۲ :





$h_1 = h_2 \ , \quad h_3 = \delta(t+2) \ , \quad h_4(t) = h_1(t-1) \ , \quad x(t) = \delta(t+2) + \delta(t)$

$$y(t=0) = ?$$

حل: پاسخ ضربه سیستم کل :

$$h_T(t) = (h_1 * h_2) + h_3 * h_4$$

$$= h_1 * h_1 + \delta(t+2) * h_1(t-1)$$

$$= h_1 * h_1 + h_1(t+2-1)$$

$$= h_1 * h_1 + h_1(t+1)$$

$\delta(t+t_0)$

ضربه = تابع ضربه در تابع دیگر کانوال شود

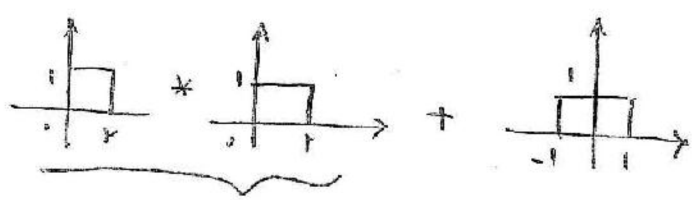
آن تابع را به شیفت می‌دهد

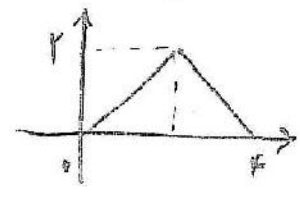
به اندازه t_0

$$y(t) = x(t) * h_T(t) = h_T(t+2) + h_T(t)$$

$$y(t)\Big|_{t=0} = h_T(2) + h_T(0)$$

$h_T(t) =$





کانوولوشن دو سیستم مربعی مانند سیستم مثلثی هم

خواهد بود.

$$h_T(2) = 2 + 0 = 2$$

$$h_T(0) = 0 + 1 = 1$$

$$y(t)\Big|_{t=0} = h_T(2) + h_T(0) = 2 + 1 = 3 \rightarrow$$ گزینه ۳

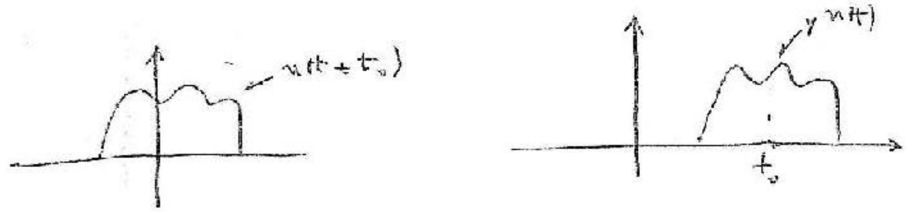
رابطه‌ی پارسوال :

از دیدگاه ، سیگنال انرژی داریم

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

نکته : شیفت زمانی مقدار انرژی سیگنال را تغییر نمی‌دهد ، چون اندازه‌ی سیگنال با شیفت دادن تغییر نمی‌کند



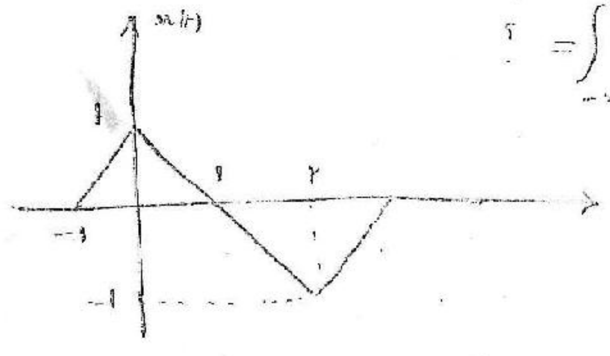
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t+t_0)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

← خوبیه که شیفت دادن سیگنال‌ها برای ما ساده‌تر کرده ، آن را شیفت داده و حول مبدا قرار دهیم.

مثال ۱ : مقدار عبارت مقابل چیست؟

$$? = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) 4π ۴) $\frac{8\pi}{3}$

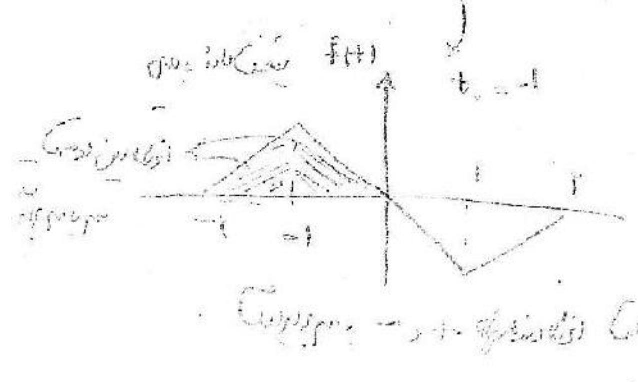


حل :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \underbrace{2\pi \times \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}_{2\pi \times \text{انرژی سیگنال}}$$

چون شیفت دادن انرژی را تغییر نمی‌دهد

$t_0 = -1$



$$I = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$$

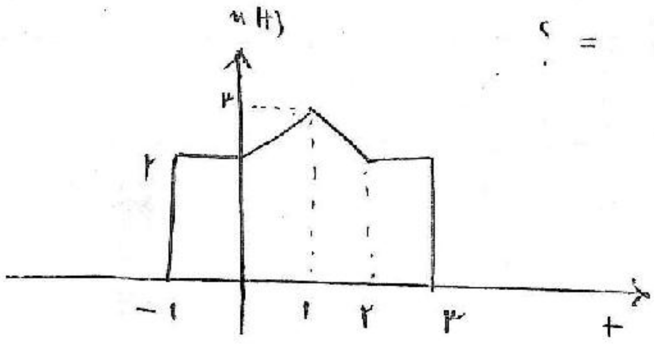
$$= 2\pi \times 2 \int_{-2}^{0} |f(t)|^2 dt$$

$$= 2\pi \times 2 \times 2 \int_{0}^{1} f^2(t) dt$$

ص ۱۷

$$= 8\pi \int_{-1}^{0} (-t)^2 dt = 8\pi \frac{t^3}{3} \Big]_{-1}^{0} = \boxed{\frac{8\pi}{3}} \rightarrow \text{گزینه } 4$$

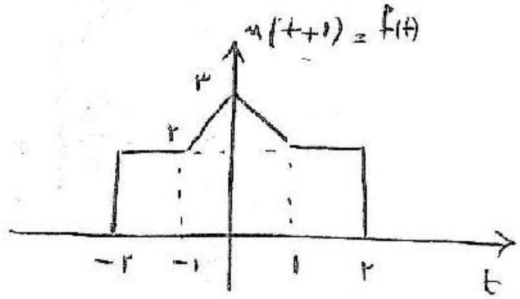
مثال ۲: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \; ?$



۱) $\frac{124\pi}{3}$ ۲) $\frac{172\pi}{3}$

۳) $\frac{136\pi}{3}$ ۴) $\frac{148\pi}{3}$

حل: بهتر منحنی را متقارن کنیم



$$I = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$$

$$= 2\pi \times 2 \int_{0}^{2} f^2(t)\, dt$$

$$= 4\pi \left\{ \int_{0}^{1} \underbrace{(3-t)^2}_{(t-3)^2} dt + \int_{1}^{2} 2^2 dt \right\}$$

$$= 4\pi \left\{ \frac{(t-3)^3}{3} \Big]_{0}^{1} + 4t \Big]_{1}^{2} \right\}$$

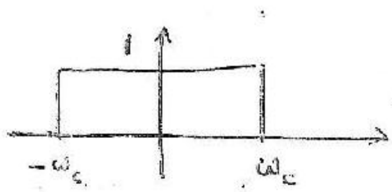
$$= 4\pi \left\{ \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3} + 8 - 4 \right\}$$

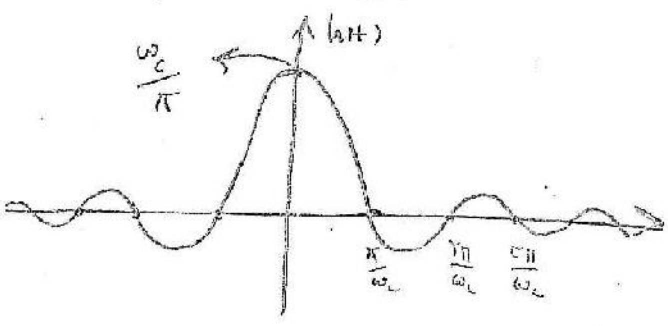
$$= 4\pi \left(\frac{19}{3} + 4 \right) = \frac{124\pi}{3}$$

نکته:

[illegible]

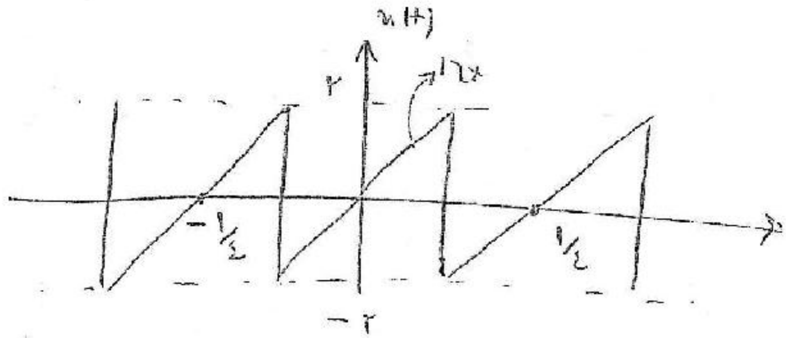
$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \xrightarrow{F}$$





مثال ۳ : فرض کنید $h(t) = \dfrac{2\sin 2\pi t}{\pi t} \cdot \cos 7\pi t$ و سیستم

$y(t) = ?$



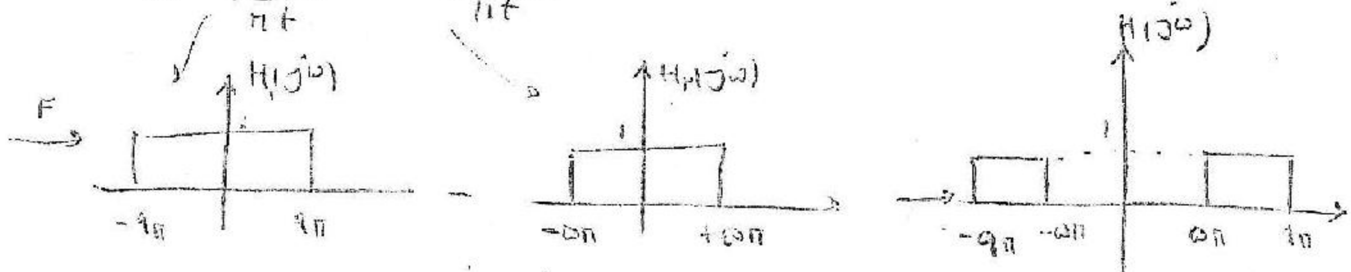
۱) $\frac{4}{\pi}\cos 8\pi t$ ۲) $-\frac{4}{\pi}\cos 8\pi t$ ۳) $\frac{4}{\pi}\sin 8\pi t$ ۴) $-\frac{4}{\pi}\sin 8\pi t$

حل: چون سیستم پایدار است ← پس به روش سری فوریه میرویم.

ابتدا h را تغییر شکل میدهیم

$$h(t) = \frac{2\sin 2\pi t}{\pi t} \cdot \cos 7\pi t = 2 \times \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 9\pi t - \sin 5\pi t}{\pi t}\right]$$

$$= \frac{\sin 9\pi t}{\pi t} - \frac{\sin 5\pi t}{\pi t}$$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{+jk\omega_0 t}$$

اگر x(t) زوج باشد $\quad x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega_0 t)$

اگر x(t) زوج باشد ← a_k ها حقیقی و زوج خواهند بود

اگر x(t) فرد باشد $\quad x(t) = 2j\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(k\omega_0 t)$

اگر x(t) فرد باشد ← a_k ها موهومی محض خواهند بود

$$T = \frac{1}{4} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 8\pi$$

یعنی فرکانس پایه ما 8π است. پس فقط هارمونیک اول از فیلتر عبور میکند

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\pi} t)^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u'^2} \frac{du'}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \sqrt{\pi} = 1$$

$$u' = \sqrt{\pi} t \Rightarrow du' = \sqrt{\pi}\, dt$$

$$\boxed{e^{-\pi t^2} \xrightarrow{F} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}}$$

$$\Rightarrow A = 1 \qquad X(j\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

مثال ۵: تبدیل فوریه $x_2(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ را بدست آورید.

$$x_2(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = x\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t\right) \xrightarrow{F} ?$$

$$x(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

$$x\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t\right) \longrightarrow \sqrt{2\pi}\, X(j\sqrt{2\pi}\,\omega)$$

$$= \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{(\sqrt{2\pi}\,\omega)^2}{4\pi}}$$

$$= \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

موج استاندارد گوسی $\quad x(t) = \dfrac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \xrightarrow{F} X(j\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$

نکته: می‌دانیم که برای بدست آوردن تبدیل فوریه یک سیگنال زوج باید قسمت حقیقی و موهومی آن را داشته باشیم (درست کنیم)

$$X(j\omega) = Re(X) + j\, Im(X)$$

$$x(t) = F^{-1}(X(j\omega))$$

سیگنال زوج: به سیگنالی گفته می‌شود که شکل سیگنال برای $t<0$ و $t>0$ قرینه باشد. اگر سیگنال حقیقی و زوج باشد
تبدیل فوریه آن قسمت $Re(X)$ و $Im(X)$ صورت می‌گیرد و $x(t)$ رسم.

قسمت زوج $\quad x_e(t) = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2} \xrightarrow{F} F(x_e(t)) = \dfrac{X(j\omega) + X(-j\omega)}{2}$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-j\omega t}\, dt$$

حل :

از دو اصلی که [illegible] (توضیح [illegible])

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{F} j\omega X(j\omega) \\ t\,x(t) \xrightarrow{F} +j\, \dfrac{dX(j\omega)}{d\omega} \end{cases}$$

[illegible] به دو طرف [illegible] دارد

[illegible]

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\frac{dX}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} -jt\, x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$j\frac{dX}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$x(t) = e^{-\pi t^2} \rightarrow \frac{dx}{dt} = -2\pi t e^{-\pi t^2} \longrightarrow j\omega X(j\omega)$$

$$t\,x(t) = t e^{-\pi t^2} \longrightarrow j\,\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

$$\Rightarrow \quad j\omega X(j\omega) = -2\pi \cancel{j} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} + \frac{\omega}{2\pi} X(j\omega) = 0 \qquad \cancel{S + \frac{\omega}{2\pi} = 0} \Rightarrow S = -\frac{\omega}{2\pi}$$

$$\cancel{X(j\omega) = A} \qquad \frac{dX(j\omega)}{d\omega} = -\frac{\omega}{2\pi} X(j\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dX(j\omega)}{X(j\omega)} = -\frac{\omega}{2\pi}\, d\omega$$

$$\Rightarrow \quad \ln X(j\omega) = -\frac{\omega^2}{4\pi} + K$$

$$\Rightarrow \quad X(j\omega) = A e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

$$A = ? \qquad X(j0) = A = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\pi}\, t)^2}\, dt$$

$$e^{-t}u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{1+j\omega} \times \frac{1-j\omega}{1-j\omega} = \frac{1}{1+\omega^2} - \frac{j\omega}{1+\omega^2}$$ → در مقابل کردن بردیم

$e^{-|t|}u(t)$ قسمت حقیقی تبدیل فوریه

مثال ۸ : اگر $h(t)$ یک سیگنال حقیقی و علّی باشد و $Re\left(H(j\omega)\right) = 1+\alpha\cos\omega$

مطلوبست $h(t) = ?$

حل :

$$h(t) = 2F^{-1}(1+\alpha\cos\omega)\,u(t)$$

$$= 2\left(\delta(t) + F^{-1}(\alpha\cos\omega)\right)u(t)$$

$$\Rightarrow h(t) = 2\delta(t)u(t) + 2F^{-1}(\alpha\cos\omega)u(t)$$

$$+ \cancel{2}F^{-1}\left(\alpha\,\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{\cancel{2}}\right)u(t)$$

$$= 2\delta(t)u(t) + \alpha\left(\delta(t+1)+\delta(t-1)\right)u(t)$$

$$= 2\delta(t)u(t) + \alpha\underbrace{\delta(t+1)u(t)}_{\text{برای } t=-1 \text{ ضرب در ۰ = صفر می‌شود}} + \alpha\delta(t-1)u(t)$$

$$= 2\delta(t)u(t) + \alpha\delta(t-1)\underbrace{u(1)}_{=1}$$

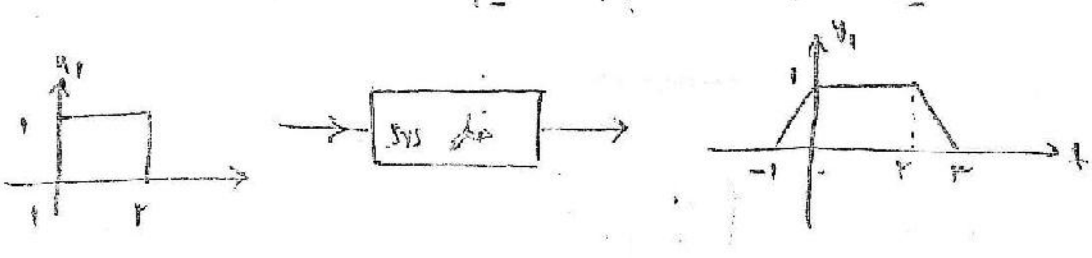
$\delta(t)u(t)$ → چون $\delta(t)$ در لحظه صفر اعمال شده است → نیاز به تعریف $u(t)$ در $t=0$ داریم [illegible] $u(t)$ در صفر

در تجزیه زوج و فرد $= \frac{1}{2}$ است. $u(0) = \frac{1}{2}$

$$= 2\times\frac{1}{2}\times\delta(t) + \alpha\delta(t-1)$$

$$= \delta(t) + \delta(t-1)$$

مثال ۹ : یک سیستم خطی داریم که ورودی و خروجی آن را داریم.



$X^*(j\omega) = X(-j\omega)$ $x(t) = x^*(t)$ وقتی سیگنال حقیقی باشد

* سیگنال حقیقی و زوج باشد :

جز زوج سیگنال حقیقی منفرد : $x_e(t) = F^{-1}(Re(X(j\omega)))$

* سیگنال حقیقی و علی باشد :

برای یک سیگنال حقیقی و علی : $x(t) = 2F^{-1}(Re(X(j\omega)))\,u(t)$

$$u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

مثال ۶ : $Re(X) = \pi\delta(\omega)$ ← $x(t)$ را بدست آورید.

که X یک سیگنال حقیقی و علی است.

حل : با توجه به اینکه سیگنال حقیقی و علی است

$$x(t) = 2F^{-1}(\pi\delta(\omega))\,u(t)$$

$$= 2\pi\, F^{-1}(\delta(\omega))\,u(t)$$

$$= \underbrace{F^{-1}(2\pi\delta(\omega))}_{=1}\,u(t)$$

$$= u(t)$$

$\delta(t) \longrightarrow 1$

$1 \longrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

مثال ۷ : یک سیستم LTI علی و حقیقی داریم که پاسخ ضربه آن حقیقی است $h(t) = 0$, $t < 0$

$$Re(H(j\omega)) = \frac{1}{1+\omega^2}$$

مطلوبست محاسبه : $h(t) = ?$

حل : با توجه به اینکه سیستم علی و حقیقی است پس طبق فرمول داریم ←

$$h(t) = 2F^{-1}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)u(t)$$

$$= F^{-1}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)u(t)$$

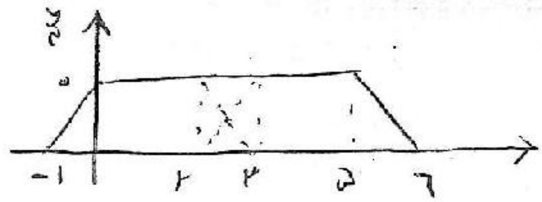
$$= e^{-|t|}\,u(t)$$

$$= e^{-t}\,u(t)$$

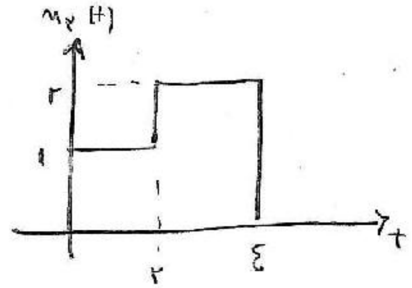
$$e^{-a|t|} \xrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$e^{-|t|} \xrightarrow{F} \frac{2}{1+\omega^2}$$

دقت کنید ! : چون سیستم TI نیست نمی‌توانیم از شیفت‌ها در ورودی استفاده کنیم



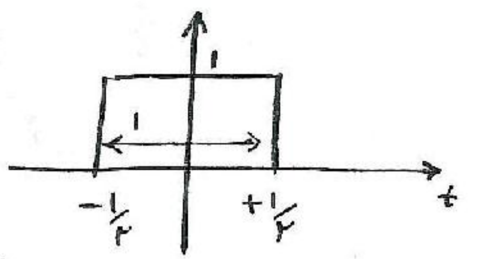
اگر x_3 به صورت روبرو باشد.



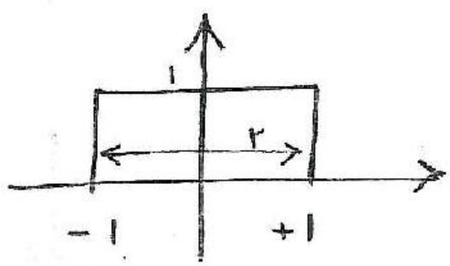
$x_3 = x_1 + 2x_2 \rightarrow$ چون TI نیست فقط از خاصیت خطی استفاده کردیم

$\Rightarrow y_3 = y_1 + 2y_2$

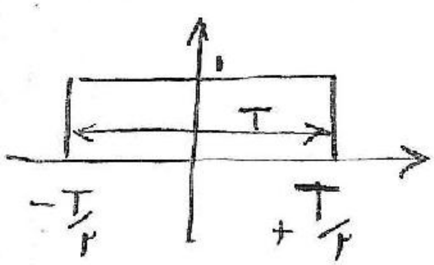
تابع Rect یا gate :



$\pi\left(\frac{t}{1}\right)$

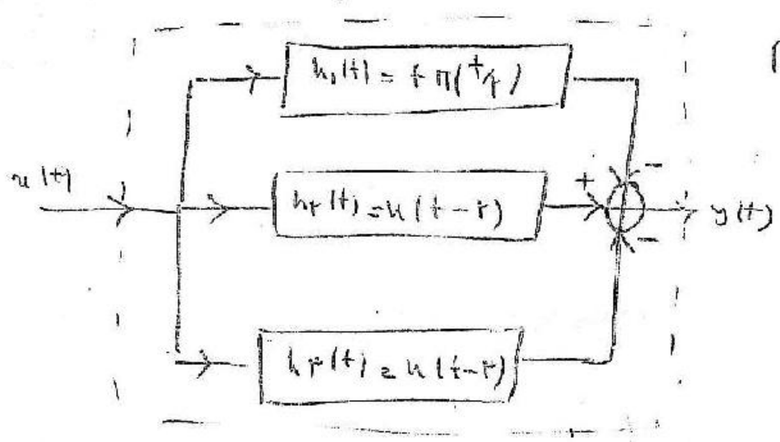


$\pi\left(\frac{t}{2}\right)$



$\pi\left(\frac{t}{T}\right)$

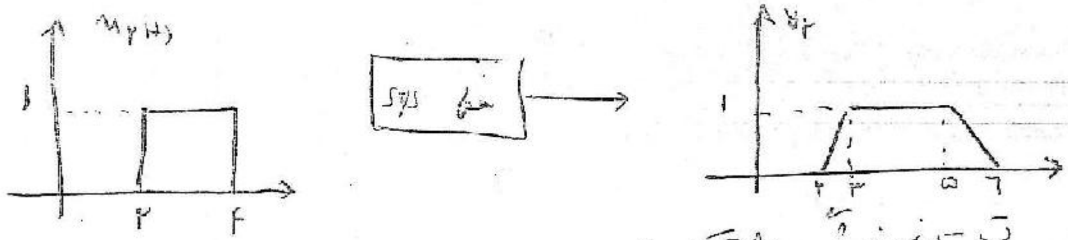
مثال ۱۰ : خواص زیر را در مورد سیستم بررسی کنید.



۱- علی

۲- پایدار

۳- حافظه



آیا با این اطلاعات می‌توان این خاصیت را ثابت کرد؟

۱- پایداری ۲- علی بودن ۳- مستقل بودن از زمان (تغییر ناپذیری با زمان)

سپس پاسخ سیستم را به $x_3(t)=u(t)-u(t-4)$ بدست آورید.

حل: از شکل

$$x_2(t)=x_1(t-2) \nrightarrow y_2=y_1(t-2)$$

$$y_2=y_1(t-3) \longrightarrow$$ حتماً سیستم تغییرپذیر

با زمان است

شرط لازم (ولی نه کافی) برای اینکه سیستم خطی علی باشد این است که به ازای ورودی صفر خروجی هم

صفر باشد.

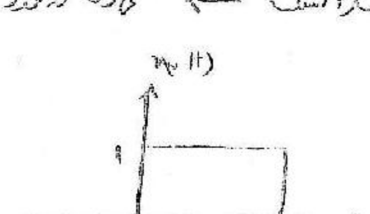
$$x_1(t)=0,\ t<0 \nrightarrow y_1(t)=0,\ t<0 \rightarrow$$ سیستم غیر علی است

برای پایداری چون شرط پایداری آن است که هر ورودی کراندار خروجی کراندار باشد ← در اینجا فقط یک ورودی کراندار

داریم که خروجی هم کراندار شده است ← نمی‌توان درمورد پایداری اظهار نظر کرد.

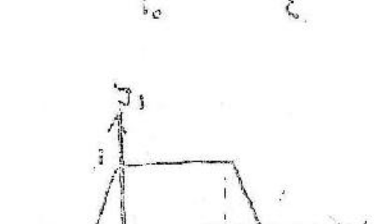
خطی بودن

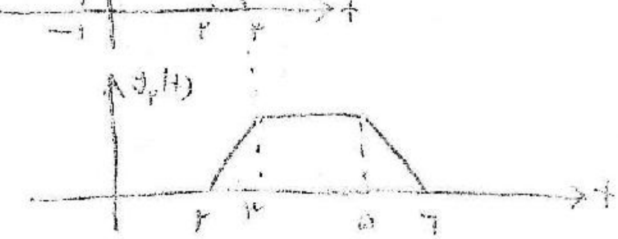
$$x_3(t)=u(t)-u(t-4)$$

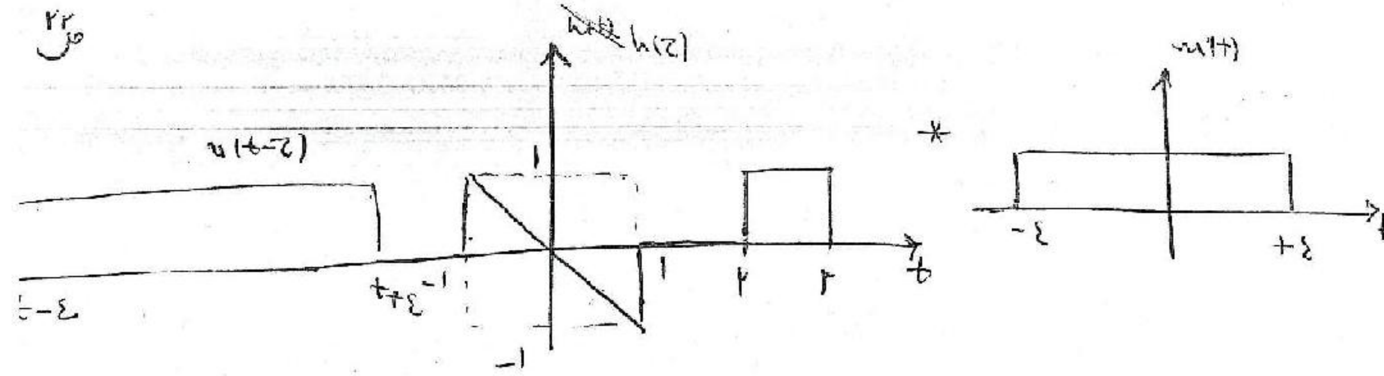


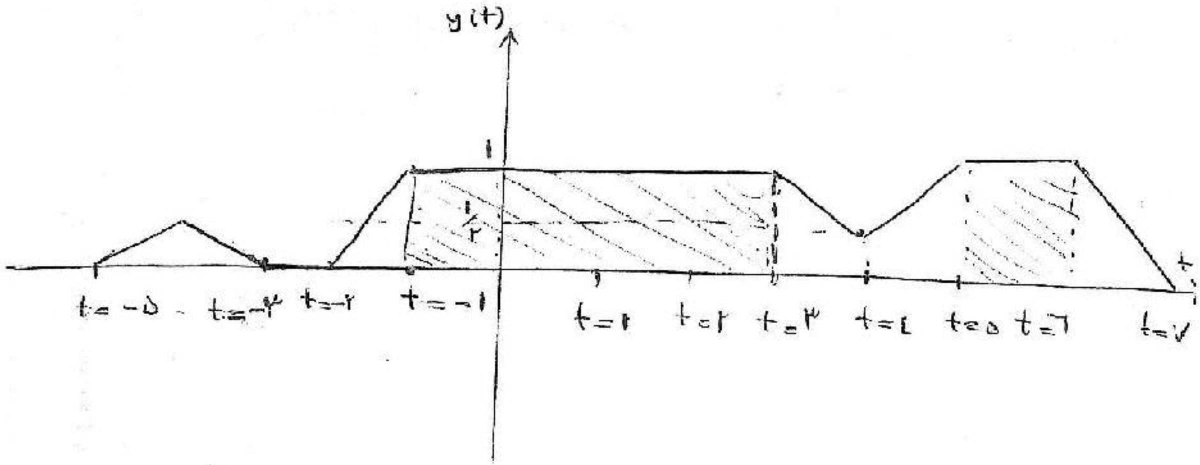
$$\Rightarrow x_3(t)=x_1+x_2$$

$$\Rightarrow y_3(t)=y_1+y_2=$$







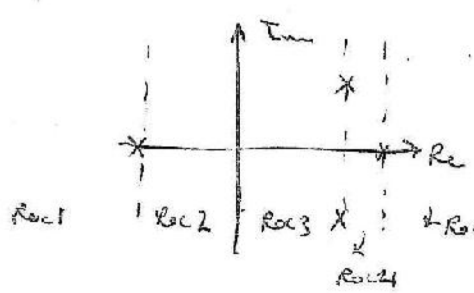


در $-1<t<3$ و $5<t<6$ حداکثر است . ← گزینه ۴

تبدیل لاپلاس :

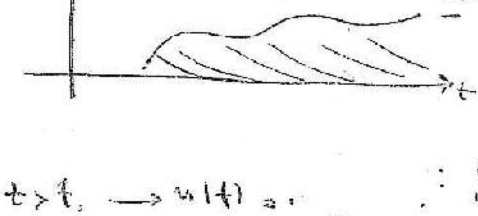
$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt < \infty$$

ROC : $Re(s)$ مقادیری که انتگرال همگرا باشد



ROC : هیچگاه از قطب‌ها نمی‌گذرد

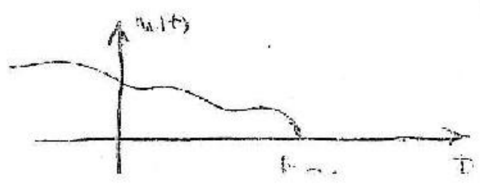
سیگنال سمت راستی : $t<t_0 \rightarrow x(t)=0$



ROC سمت راست قطب است

سیگنال سمت چپی : $t>t_0 \rightarrow x(t)=0$

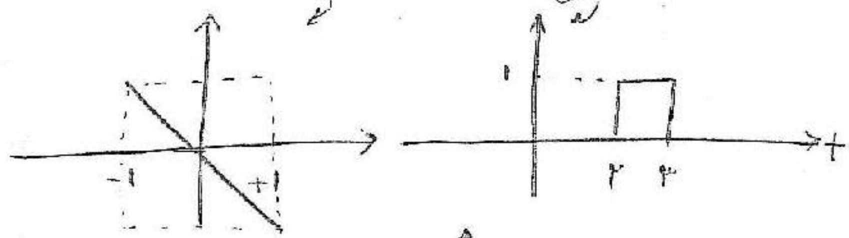
ROC سمت چپ قطب است

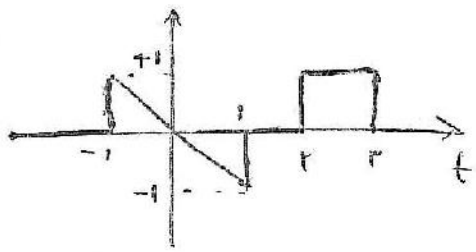


حل: چون سیستم LTI است پاسخ ضربه کل سیستم برابر می‌شود

$h_T(t) = -h_1 + h_2 - h_3$

$= -t\,\Pi(t/2) + \underbrace{u(t-2) - u(t-3)}$



$\Rightarrow h_T(t) =$ 

از روی پاسخ ضربه می‌توانیم بسیاری از خصوصیات سیستم را تعیین کنیم

$h_T(t) \neq 0 \;\; (t<0) \Rightarrow$ سیستم غیرعلی است

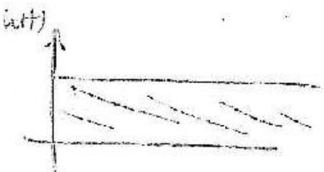
$h_T(t) \neq K\delta(t) \Rightarrow$ سیستم حافظه‌دار است.

آیا سیستم LTI

$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty}_{\text{کراندار است}} \Rightarrow$ سیستم پایدار است ← شرط لازم و کافی برای پایداری

← فقط سیستم پایدار است.

مثال: $h(t) = u(t)$ پله.



$\longrightarrow$ سیستم ناپایدار است

مثال ۱۱: حل در صفحه

$x(t) = \Pi(t/8)$ ، خروجی سیستم در فواصل زمانی کدام است.

به سیستم مذکور اعمال شود

۱) $-3<t<3$ و $4<t<5$ ۲) $1<t<2$ و $4<t<5$ ۳) $1<t<2$ و $-12<t<20$ ۴) $-3<t<3$ و $0<t<6$

از آنجایی که هیچکدام از قطب‌ها حذف نشده‌اند ← ROC حاصله اشتراک ROCهای را تمام خواهد بود

$-a < Re(s) < a$ → واضح است که a باید مثبت باشد

اگر ROC تهی شد ← تابع تبدیل لاپلاس ندارد

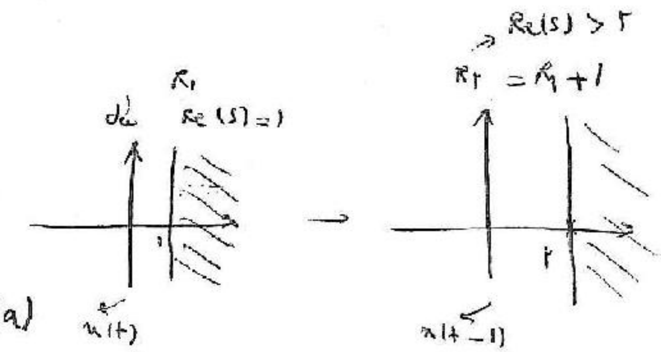
چند نکته مهم :

$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad R_1$

$x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} X(s)$

$R_2 \qquad R_2 = R_1$

$x(t)e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s-a)$



$R_2 = R_1 + a$

$R_2 = R_1 + Re(a)$

$x(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|} X(s/a)$

$R_2 = a \cdot R_1$

معکوس زمانی $x(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(-s)$ اگر سیگنال سمت راستی باشد، اگر معکوس شود

$R_2 = -R_1$ ← سمت چپی می‌شود.

$x(t) \longrightarrow x(-t)$

$Re(s) > -1$ سیگنال سمت راستی

$Re(s) < 1$ سیگنال سمت چپی

$y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \cdot H(s)$

$R_y \geq R_x \cap R_h$ اگر قطبی حذف نشود، اشتراک خواهیم داشت / آنرا داریم.

$R_y > R_x \cap R_h$ اگر قطبی از تقسیم حذف شود

در سیستم‌های LTI که علّی هستند :

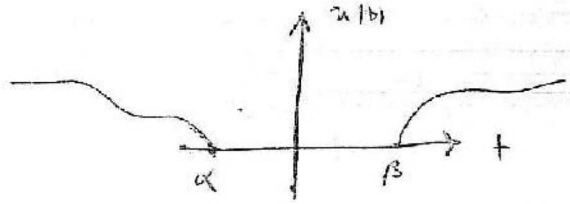
$H(s)$

R_h : سمت راست سمت راست‌ترین قطب

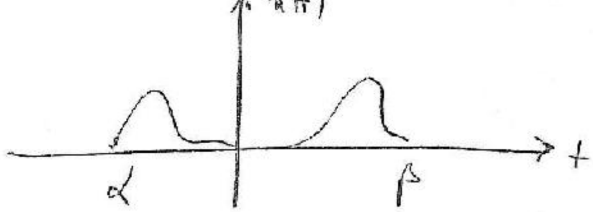
اگر ROC یک سیگنال شامل محور $j\omega$ باشد ← سیگنال تبدیل فوریه دارد ،

$X(j\omega) = X(s)|$. [illegible]

سیگنالهای دوطرفه : از دو طرف نامحدود است
ROC بصورت یک نوار محدود بین دو خط
است .

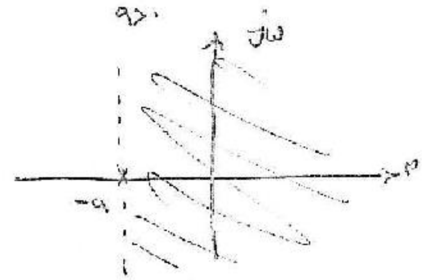


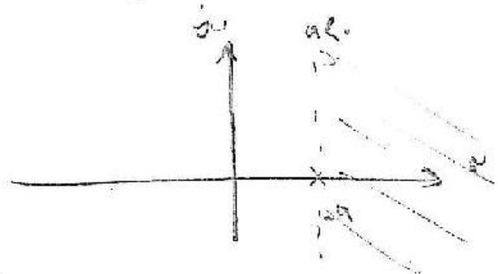
سیگنال دوره محدود : از دو طرف محدود است .
ROC کل صفحه میباشد .



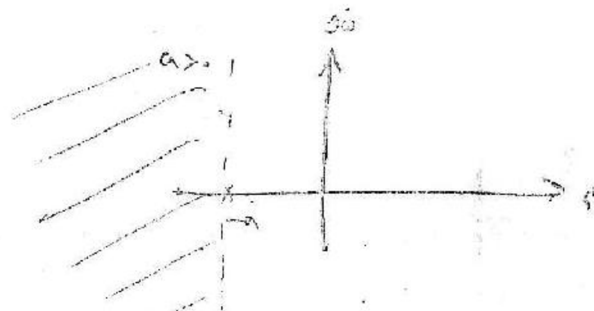
$\star \quad e^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}$

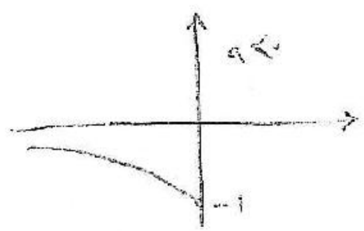
ROC: $Re(s) > -a$



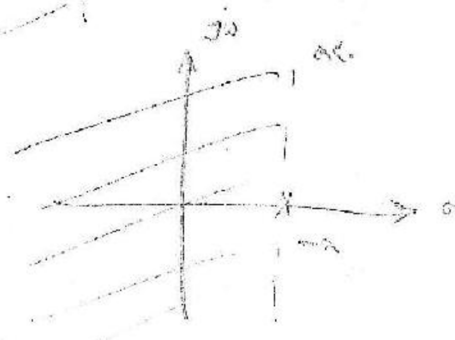


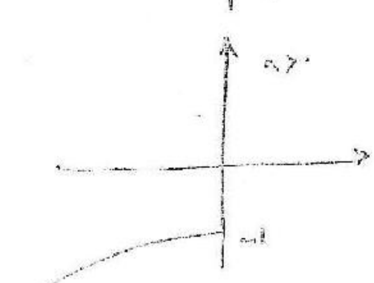
$\star\star \quad -e^{-at}u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}$





ROC: $Re(s) < -a$





مثال ۱۳ : تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید

$x(t) = e^{-a|t|}$

$x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2-a^2}$ $\quad a>0$

$Re(s) > -a \qquad Re(s) < a$

قضیه مقدار اولیه : $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$ (البته ؟ شرط اینکه x در نقطه صفر ضربه نداشته باشد)

قضیه مقدار نهایی : $x_{ss} = x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

* برای بدست آوردن شرایط اولیه در لحظه صفر منفی :

$$L\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) - x(0^-) \rightarrow \text{تبدیل لاپلاس یکطرفه}$$

یعنی ورودی از صفر اعمال شده است.

حل : ضربه در لحظه صفر+ داریم

$$y(0^+) = -\frac{1}{2} + 5 - \frac{9}{2} = 0$$

← بدست آوردن $y(0^-)$: برای اینکار میزان جهش را تشخیص دهیم. اگر جهش داشتیم ← پس در $t=0$ ضربه داشته‌ایم.

$$\text{پاسخ کامل} \quad y(t) = \underbrace{y(t)}_{\text{ورودی صفر}}^{\text{قطبهای } H} + \underbrace{y(t)}_{\text{حالت صفر}}^{\text{قطبهای } X \text{ و } H}$$

$Y(s)$ قطبهای : $P_y = 0, -1, -2$

$H(s)$ قطبهای : $P_h : -1, -2$

$x(t) = Au(t)$ ← ورودی تنها قطبی که اضافه کرده است در مبدا بوده است ←

$X(s) = A/s$

← خروجی در لحظه صفر جهش نداشته است ← $y(0^-) = y(0^+) = 0$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s-1}{s^2+3s+2} \Rightarrow y'' + 3y' + 2y = 2\underbrace{x'}_{2A\delta(t)} - \underbrace{x}_{Au(t)}$$

$$y''(t) = A\delta(t)$$

$$\Rightarrow y'(0^+) - y'(0^-) = 2A$$

$y(0^+) = 0$

یادآوری :

سیستم پایدار است هر:

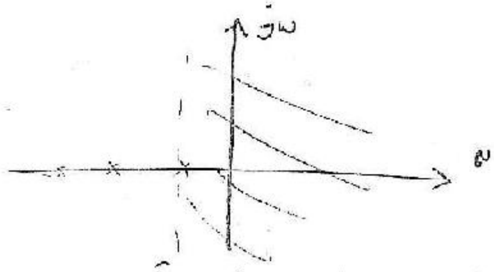
$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ ← تبدیل $H(j\omega)$ دارد

← x_c باید شامل محور موهومی باشد.

سیستم علی و پایدار است هر: ۱- همه شامل محور موهومی باشد

۲- ROC سمت راست قطب، سمت راستی‌ترین قطب است

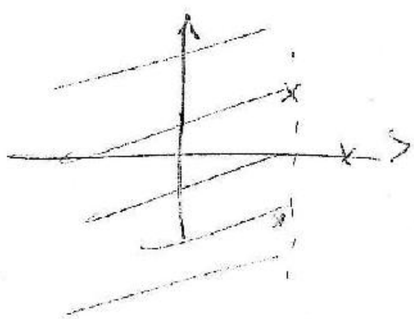
⇐ قطبها باید در LHP باشند



سیستم ضد علی و پایدار است هر: ۱- شامل محور $j\omega$ است.

۲- ROC سمت چپ، سمت چپ‌ترین قطب است.

⇐ قطبها باید در RHP باشند



ضد علی: پاسخ ضربه برای زمان

$t>0$ صفر است

$h(t) = 0$

$t>0$

مثال ۱۳: اگر سیستم LTI ، $H(s) = \frac{2s-1}{(s^2+3s+2)}$ $(s+1)(s+2)$ ، ورودی $x(t)$ ، $x(0^+)=1$

از $t \geq 0$ خروجی سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$y(t) = -\frac{1}{2} + 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t} \quad t \geq 0^+$

مقادیر $y(0^-)$ و $y'(0^-)$ کدام است؟

۱) $y(0^-) = y'(0^-) = 0$

۲) $y(0^-) = y'(0^-) = 2$

۳) $y(0^-) = 0 ,\ y'(0^-) = 4$

۴) $y(0^-) = 0 ,\ y'(0^-) = 2$

ص ۲۵

با توجه به اینکه ۱) h(t) در $t<-2$ صفر است.

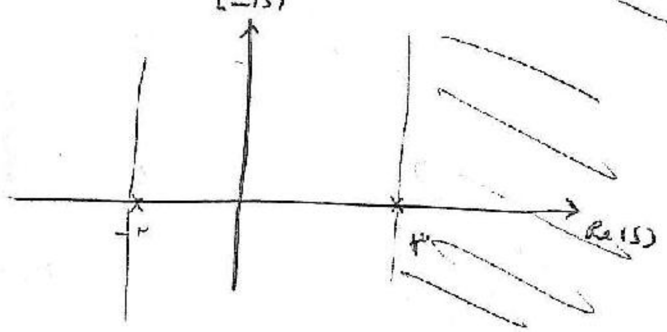
۲) $h(t)e^{t}$ تبدیل فوریه دارد

۳) $h(t)e^{-t}$ انتگرال پذیر است.

ROC ها هر کدام را مشخص کنید

۱: h(t) در $t<-2$ صفر است ← چون h(t) در $t<-2$ صفر است ← سیگنال سمت راستی است

← ROC آن سمت راست خطی است که از دورترین قطب می‌گذرد



ROC : $Re(s) > 3$

خواص: ۱- سیستم ناپایدار است
۲- سیستم علی است (چون سمت راستی است)

۲: $h(t)e^{t}$ تبدیل فوریه دارد ← $H(s-1)$ باید شامل محور $j\omega$ باشد.

$$x(t)e^{at} \longrightarrow X(s-a)$$

$$R_2 = R_1 + a$$

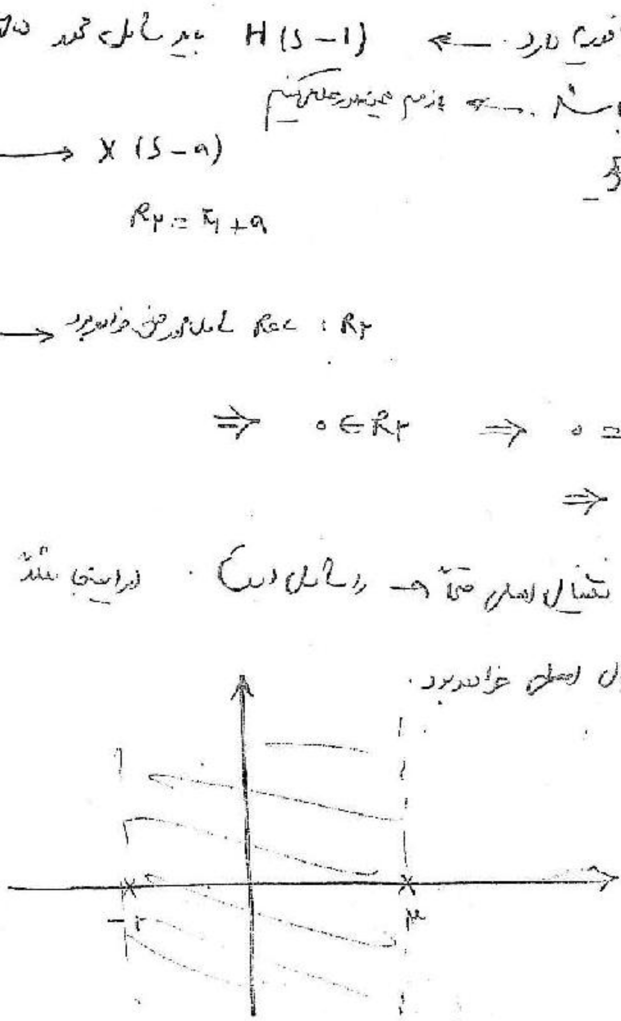
۱- سیستم پایدار
۲- غیر علی

تبدیل فوریه دارد ← ROC : R_2 شامل محور $j\omega$ خواهد بود

$$\Rightarrow 0 \in R_2 \Rightarrow 0 = R_1 + a$$

$$\Rightarrow \boxed{R_1 = -a}$$

یعنی سیگنال اصلی ما دو طرفه است. ROC جزء سیگنال اصلی خواهد بود.



ROC : $-2 < Re(s) < 3$

$$y(\infty) = -\frac{1}{2} = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sH(s)X(s) = \lim_{s\to 0} s \times \frac{2s-1}{s^2+3s+2} \times \frac{A}{s}$$

$$= -\frac{1}{2}(A) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

$$y'(0^+) - y'(0^-) = 2A$$

$$y'(0^+) = ? \quad y'(t) = -5e^{-t} + 9e^{-2t} \xrightarrow{t \geq 0} y'(0^+) = 4$$

$$\Rightarrow \quad y'(0^+) - y'(0^-) = 2A$$

$$4 - y'(0^-) = 2\times 1$$

$$\boxed{\Rightarrow y'(0^-) = 2}$$

مثال: حال پاسخ حالت صفر را بدست آوریم :

پاسخ حالت صفر

$$y_{\text{حالت صفر}}(t) = L^{-1}\big(H(s)\cdot \underbrace{X(s)}_{1/s}\big)$$

پاسخ ورودی صفر

$$\overbrace{y''}^{s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)} + 3y' + 2y = 0$$

$$(s^2+3s+2)Y(s) = y'(0^-) = 2$$

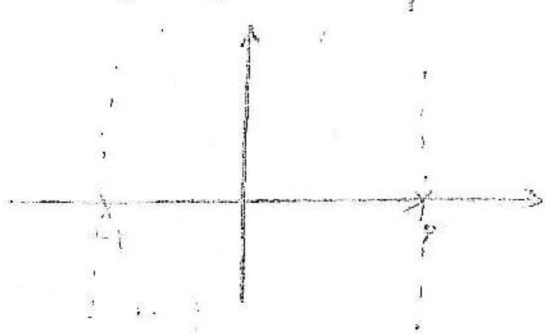
$$Y_{\text{ورودی صفر}}(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}$$

$$\Rightarrow y_f(t) = L^{-1}\left(\frac{2}{s^2+3s+2}\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

مثال ۲۱: فرض کنید تابع سیستم مربوط به یک سیستم LTI به صورت زیر باشد:

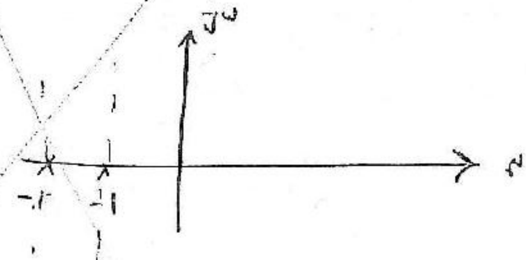
$$H(s) = \frac{k}{(s+2)(s-2)}$$



$R_y: Re(s) > 2$ چون معکوس نمی‌شود

$R_x: Re(s) < 2$

ROC_h:



اول: $R_h: Re(s) < -2$: $R_h \cap R_L \rightarrow -2 < Re(s) < 2$

دوم: $R_h: Re(s) < -1$: $R_h \cap R_L$

جلسه چهارم

حل مسئله جلسه قبل (مثال ۱۵)

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t) \rightarrow Y(s) = \frac{2}{3}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+1}$$

$$Re(s) < 2 \quad , \quad Re(s) > -1$$

$$= \frac{s}{(s-2)(s+1)}$$

$$\Rightarrow -1 < Re(s) < 2$$

چون هیچکدام از قطبها در حذف صفر نشدند بنابراین ناحیه اشتراک ناحیه گفته شده خواهد بود.

$$X(s) = \frac{s+1}{s-2} \quad R_x: Re(s) < 2 \quad \nearrow \quad x(t) = 0, \; t > 0$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{(s+1)^2} \quad R_h: Re(s) > -1 \text{ یا } Re(s) < -1$$

چون قطبها باید حذف نشوند ناحیه تعریف شده باید با هم اشتراک غیرتهی داشته باشند.

حالت اول $R_h: Re(s) > -1 \Rightarrow R_h \cap R_x: -1 < Re(s) < 2$ >> همان ناحیه R_y

حالت دوم $R_h: Re(s) < -1 \Rightarrow R_h \cap R_x: Re(s) < -1$ ناحیه قابل قبول نیست