فصل اول : مقدمات و مفاهیم اساسی

(فصل اول ۲ سر فصل)

سینماتیک ماشین :

مطالعه و تجزیه و تحلیل راجع به حرکت نسبی اجزاء ماشین شامل تجزیه و تحلیل مکان، سرعت و شتاب

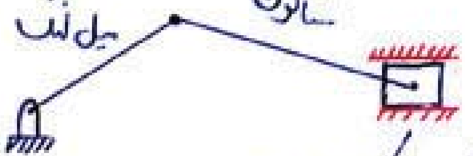
دینامیک ماشین :

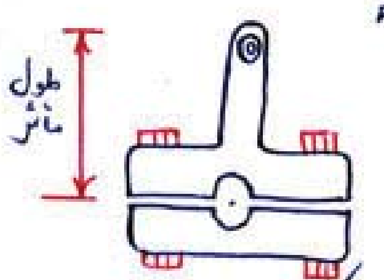
مطالعه و بررسی نیروهای وارد بر اجزاء یک ماشین و حرکات ناشی از این نیروها

نمودار سینماتیکی : (Kinematic diagram)

نموداری است که در آن تنها ابعادی از یک اهرم رسم می‌شود که در حرکت آن مکانیزم موثرند.

مثال : نمودار سینماتیکی یک موتور احتراق داخلی



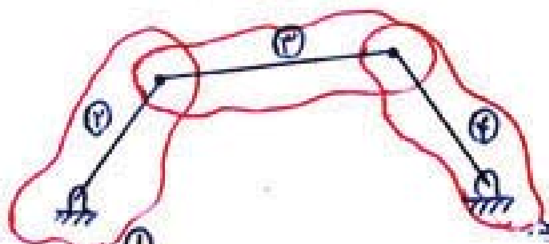


(شکل واقعی شاتون)

معمولاً در نمودار سینماتیکی اهرمی رسم می‌شود در واقع از شکل واقعی آن اطلاعاتی در دست نیست. لذا هر نقطه از یک صفحه می‌تواند ذره‌ای از آن اهرم باشد.

اهرم : (Link)

✓ اهرم ساده‌ترین عضو از یک مکانیزم است که با اتصال آن به اعضاء مجاور به نحوی که این اعضاء بتوانند نسبت به هم جابجا شوند، کار یا عملی خاص انجام می‌شود. شکل ظاهری اهرم‌ها حائز اهمیت نمی‌باشد و طول مؤثر، فاصله بین مفاصل است. مثال :



این مکانیزم دارای ۴ اهرم است.

تکیه‌گاه زمین خود یک اهرم محسوب می‌شود.

✓ عضوی که حرکت یا سکون آن تأثیری در حرکت نداشته باشد و یا تنها نمادی باشد، عضو حساب نمی‌شود.

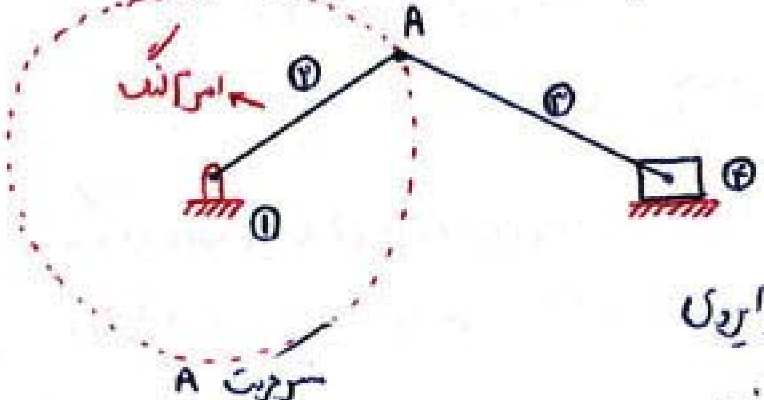
انواع اهرم:

- اهرم پایه: دستگاه مختصات مرجع به آن وصل بوده و حرکت سایر اهرم نسبت به آن تحلیل می‌شود. (زمین)
- اهرم ورودی: معمولاً متصل به اهرم پایه بوده و نیروهای سینماتیکی به آن وارد می‌شود.
- اهرم خروجی: معمولاً متصل به اهرم پایه بوده و نیروهای سینماتیکی از آن گرفته می‌شود.
- اهرم رابط: اهرم مابین اهرم ورودی و اهرم خروجی را اهرم رابط گویند.

انواع اهرم از لحاظ دامنه نوسان (حرکت):

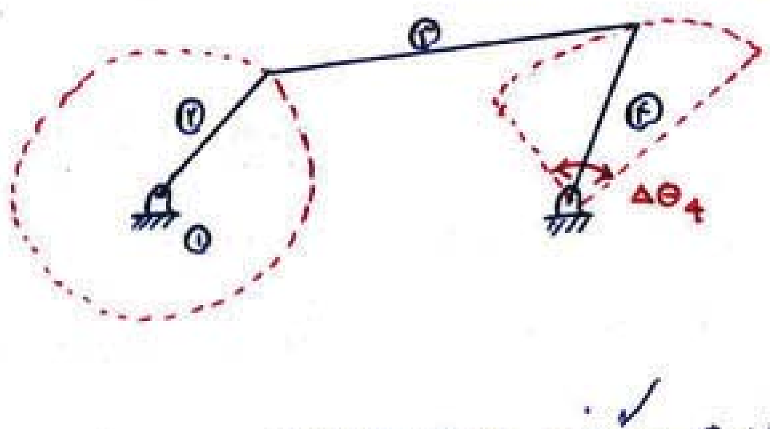
- اهرم لنگ (Crank):

اهرمی است که بتواند در خلال حرکت به میزان 360° بچرخد.



- اهرم اسبک یا آونگ Rocker (رقصنده):

اهرمی که در خلال حرکت بتواند بخشی از یک مسیر دایروی و یا به عبارت دیگر زاویه‌ای کمتر از 360° نوسان کند.



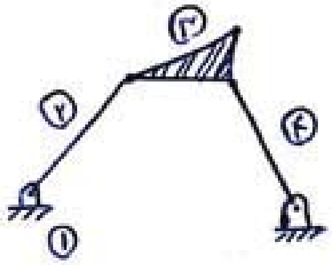
به ازای چرخش کامل اهرم ۲ (Crank) اهرم ۴ (Rocker) فقط در بازه $\Delta\Theta_4$ نوسان می‌کند.

اهرم ساده و اهرم مرکب:

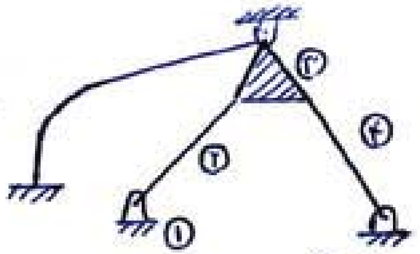
- اگر اهرمی حداکثر ۲ مفصل داشته باشد آن اهرم را اهرم ساده گویند (Simple link)
- اگر اهرمی بیش از ۲ مفصل داشته باشد آن اهرم را اهرم مرکب گویند (Complex link)

* مفصل: محل اتصال دو اهرم که بتوانند نسبت به هم جابه‌جا شوند.

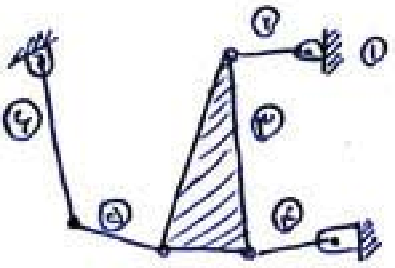
مثال: اهرم‌های ساده و مرکب را مشخص نمایید:



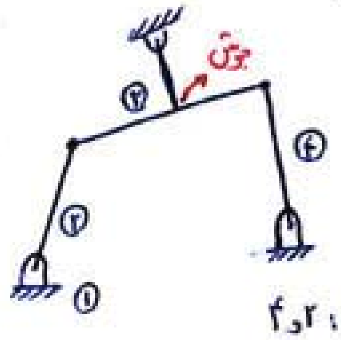
اهرم‌های ساده: ۱-۲-۳-۴
اهرم‌های مرکب: —



اهرم‌های ساده: ۲ و ۴
اهرم‌های مرکب: ۱-۳



اهرم‌های ساده: ۲ و ۴ و ۵ و ۶
اهرم‌های مرکب: ۱ و ۳



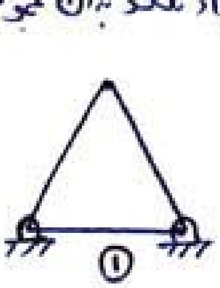
اهرم‌های ساده: ۲ و ۴
اهرم‌های مرکب: ۱ و ۳

(ولی بعدها خواهیم خواند که به دلیل اینکه درجه آزادی این مجموعه (۱-) است این مجموعه حرکت ندارد و کل آن زمین یا اهرم پایه محسوب می‌شود.)

زنجیرهٔ سینماتیکی (Kinematic chain):

- یک زنجیره سینماتیکی عبارت است از یک مجموعه میله‌های صلب که ضمن اتصال با یکدیگر می‌توانند دارای حرکت نسبی باشند. اگر یکی از میله‌ها ثابت باشد و حرکت یکی دیگر از میله‌ها باعث حرکت سایر میله‌ها گردد به نحوی که حرکت و وضعیت آن میله‌ها قابل پیش‌بینی باشد به آن زنجیره سینماتیکی مقید یا مکانیزم می‌گویند. همچنین اگر یکی از میله‌ها ثابت باشد و با حرکت یکی دیگر از میله‌ها حرکت و وضعیت سایر میله‌ها قابل پیش‌بینی نباشد به آن زنجیره سینماتیکی غیر مقید می‌گویند.

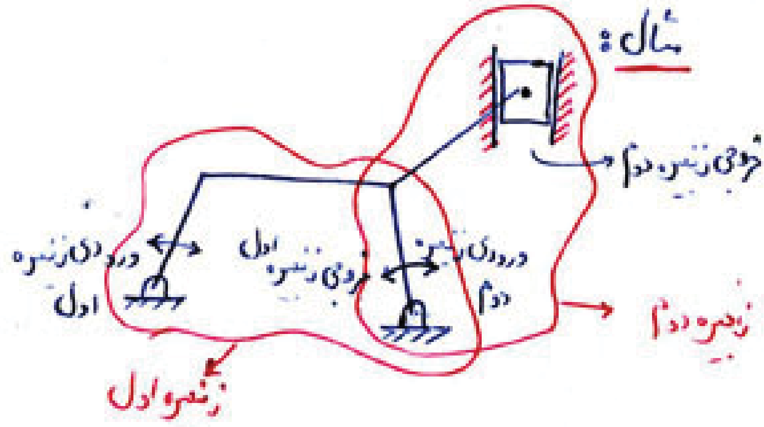
- در تعریفی دیگر اگر حرکت یکی از میله‌ها هیچگونه حرکتی در سایر میله‌ها ایجاد نکند به آن مجموعه دیگر زنجیره سینماتیکی گفته نمی‌شود و یک سازه است. (مثل شکل زیر)



یک مکانیزم (زنجیره سینماتیکی مقید) ممکن است از چندین زنجیره سینماتیکی حاصل شود. به نحوی که خروجی زنجیره اول، ورودی زنجیره دوم باشد و ...

مکانیزم ۴ میله‌ای: یک زنجیره سینماتیکی مقید

مثال:



مکانیزم ۴ میله‌ای

یک زنجیره سینماتیکی مقید با چهار اهرم (شامل اهرم پایه در زمین)، اهرم ورودی، اهرم خروجی و اهرم رابط با یک درجه آزادی

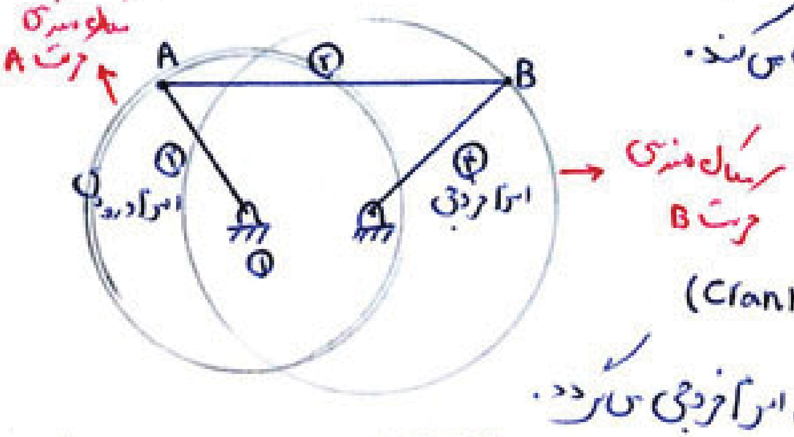
رابطه گراشف: $\overset{Large}{L}+\overset{Small}{S} < P+Q$

قضیه گراشف: اگر در زنجیره ۴ میله‌ای مجموع طول بزرگترین و کوچکترین اهرم از مجموع طول دو اهرم باقیمانده کوچکتر باشد آن مکانیزم، مکانیزم گراشف است.

انواع حرکت در مکانیزم‌های ۴ میله‌ای:

* زنجیره یا مکانیزم لنگ-لنگ (Double crank)

در این مکانیزم اگر کوتاه‌ترین عضو آن میله یا اهرم ثابت است (به شرط مکانیزم گراشف)، به ازای حرکت دورانی ۳۶۰ درجه اهرم ورودی، اهرم خروجی نیز به میزان ۳۶۰° نوسان می‌کند.

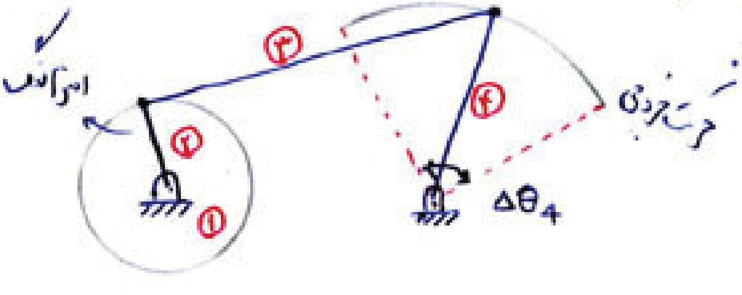


* زنجیره یا مکانیزم لنگ-اسلب (Crank-Rocker)

در این زنجیره حرکت ورودی لنگ باشد حرکت اسیلی اهرم خروجی می‌سازد.

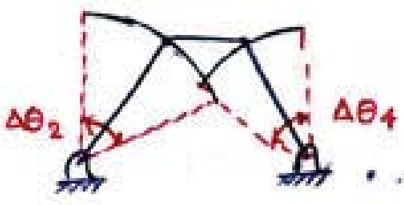
در این مکانیزم کوتاه‌ترین اهرم می‌تواند اهرم ورودی باشد.

یا «کوتاه‌ترین اهرم، اهرم لنگ است» (به شرط مکانیزم گراشف)



* زنجیره یا مکانیزم اسک-اسک (Double Rocker)

زنجیره ای است که اهرمهای ورودی و خروجی می توانند در زاویه ای کمتر از 360° نوسان نمایند.

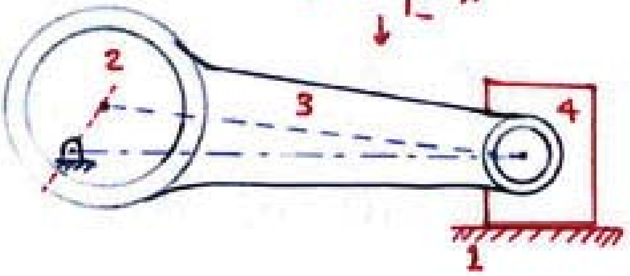


در این مکانیزم ها در اغلب موارد، کوتاه ترین اهرم، اهرم واسط است.
در صورت گراشفی بودن مکانیزم

* زنجیره یا مکانیزم لنگ-لغزنده (Slider - crank)

اگر در مکانیزم لنگ-لنگ، اهرم خروجی را با یک لغزنده تعویض نمائیم آنگاه مکانیزمی حاصل می شود که برای تبدیل حرکت دورانی به انتقالی و برعکس می توان از آن استفاده نمود. کاربرد آن در موتورهای دیزل و بنزینی و سیستم های کمپرسور هوا می باشد.

«سیستم معادل»



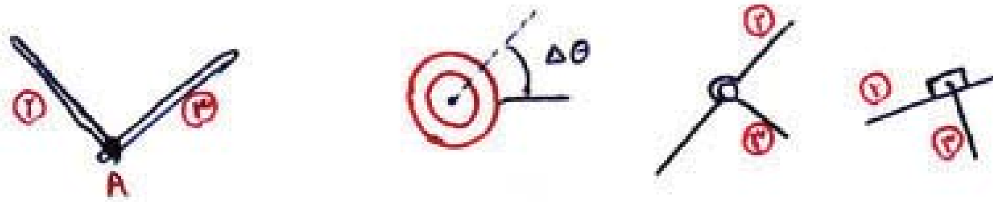
اتصالات سینماتیکی و انواع آن (Joint or Pairing Element)

ترکیب مفصل: مفصل محل اتصال دو عضو (دو اهرم) است که می توانند نسبت به هم جابجا شوند و دارای انواع مختلفی می باشند که از آن جمله موارد زیر را می توان نام برد:

۱- مفصل لولایی یا پین: (Revolute)

مفصلی است بین دو اهرم به نحوی که جابجایی و حرکت نسبی آن از طریق یکی از دو اهرم که اساس محاسبات قرار می گیرد برابر است و درجه آزادی آن یک می باشد و اجازه جابجایی زاویه ای دو اهرم $(\Delta\theta)$ را نسبت به یکدیگر می دهد.

مثال :



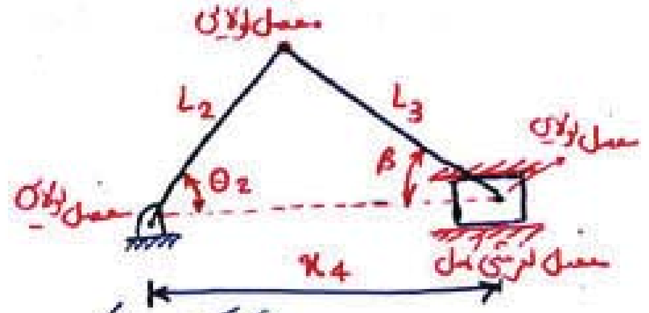
۲- مفصل لغزشی کامل : (Pure Sliding)

در یک مکانیزم لغزش کامل زمانی حادث می‌گردد که اعضاء در امتداد مماس مشترک نقطه تماس دارای حرکت نسبی باشند. به عبارت دیگر مفصل لغزشی کامل مفصلی است بین دو جسم به نحوی که موقعیت یکی از اعضا (اجسام) توسط یک کمیت نسبت به جسم یا اجزاء دوم مشخص می‌شود.

در یک مکانیزم با تماس مستقیم موقعی لغزش پدید می‌آید که نقطه تماس در امتداد خط المرکزین واقع نشده باشد.

در تعریفی دیگر بیان می‌گردد که اگر دو جسم نسبت به هم سرعت زاویه‌ای (ω) نداشته باشند حرکت لغزشی کامل می‌باشد.

مثال :



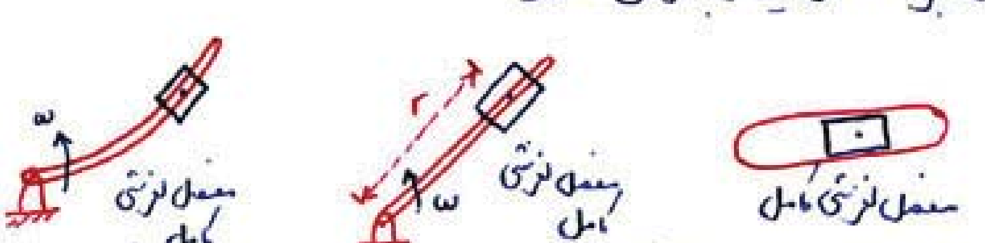
$$x_4 = x_{4/1} = L_2 \cos\theta_2 + L_3 \cos\beta$$

$$\text{where: } \frac{\sin\beta}{L_2} = \frac{\sin\theta_2}{L_3}$$

ملاحظه می‌شود که با معلوم بودن θ_2، جابجایی، سرعت و شتاب عضو 4 نسبت به عضو 1 با یک کمیت که همان θ_2 است مشخص می‌گردد.

✓ نکته : مفاصل لغزشی کامل جزء مفاصل یک درجه آزادی هستند.

مثال :



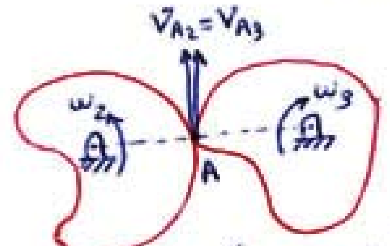
به دلیل عدم وجود ω (سرعت زاویه‌ای)، فقط با داشتن مقدار r می‌توان سرعت و شتاب را محاسبه کرد.

۳- مفصل غلتشی کامل : (Rolling Joint)

برای داشتن مفصل و تماس غلتشی سرعت‌های خطی اعضاء در نقطه تماس می‌بایست با یکدیگر یکسان بوده به طوری که

نقطه تماس می‌بایست بر روی خط المرکزین واقع بوده باشد.

البته قرار داشتن نقطه تماس بر روی خط المرکزین امری ضروری ولی کافی نمی‌باشد. زیرا فقط ممکن است در یک لحظه خاص مفصل غلتشی باشد و در سایر لحظات این شرایط برقرار باشد. به شکل زیر توجه شود.

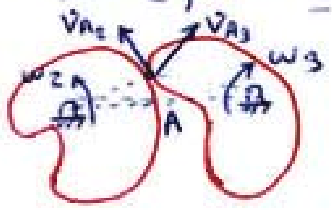


ملاحظه می‌گردد که تمامی شرایط یک مفصل غلتشی برقرار است:

۱- نقطه تماس در خط واصل بین مراکز (خط المرکزین) واقع است.

۲- مقدار و جهت سرعت دو نقطه در نقطه تماس از دو جسم برابر است.

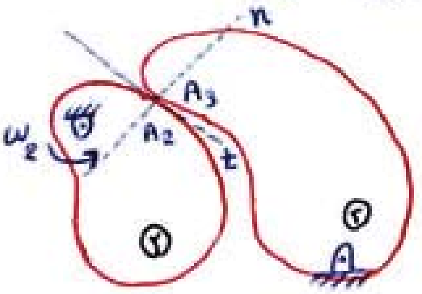
ولی مفصل فوق غلتشی خالص نیست زیرا فقط شرایط فوق در یک لحظه خاص می‌باشد.



(ملاحظه می‌گردد که در لحظه بعد شرایط اول حاکم نیست)

۴- مفصل لغزشی - غلتشی

اگر مفصل بین دو جسم که سرعت زاویه‌ای آنها نسبت به هم صفر نباشد از نوع غلتشی صرف نباشد، آن مفصل از نوع غلتشی، لغزشی است.



در چنین مواقعی برای تعیین سرعت یک عضو نسبت به عضو دیگر به دو کمیت نیاز است.

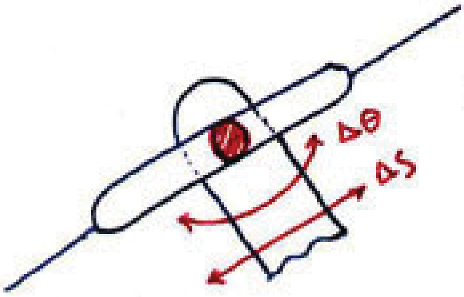
در این مفاصل در نقطه تماس سرعت نسبی ناشی از لغزش وجود دارد ($\vec{V}_{A_2/A_3}=\vec{V}_{A_2}-\vec{V}_{A_3}$)

برای تعیین سرعت زاویه‌ای عضو ۳ نیاز به تعیین $\vec{V}_{A_3}$ و V_{A_2/A_3} می‌باشد.

با توجه به این اصل که دو جسم در محل تماس در هم فرو نمی‌روند می‌توان جهت V_{A_2/A_3} را تعیین نمود. بدین منظور دستگاه n-t را در محل تماس رسم می‌نماییم. دو انتها به دلیل مولفه n سرعت همدیگر را خنثی می‌کنند، بنابراین فقط سرعت در راستای t وجود دارد که تفاضل سرعت‌های $\vec{V}_{A_2}$ و $\vec{V}_{A_3}$ باعث لغزش می‌گردد.

چرخ دنده‌ها و اتصال چنگالی (Fork Joint) دو نمونه مفصل لغزشی-غلتشی هستند.

اتصال چنگالی :

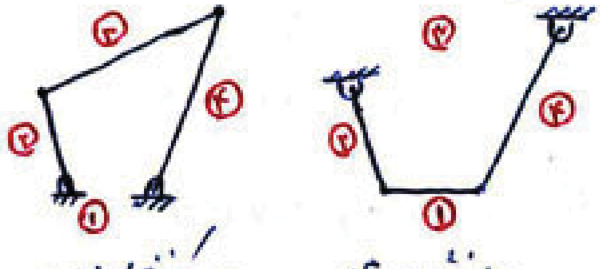


بین دو راه شیار هم اجازه لغزش (ΔS) و هم اجازه چرخش ($\Delta\theta$) دارد.

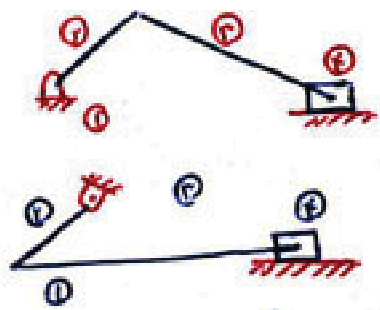
وارونش سینماتیکی یا برگردان :

با ثابت قرار دادن میله‌ای دیگر از یک زنجیره سینماتیکی معین می‌توان یک مکانیزم دیگر به دست آورد که به این عمل برگردان مکانیزم می‌گویند.

به عبارت دیگر هرگاه دستگاه مختصات مرجع روی اهرم nام نصب گردیده و حرکات دیگر اهرم‌ها نسبت به آن بررسی شود، مکانیزم جدید را وارونش یا برگردان nام مکانیزم اصلی می‌خوانند، مثلاً در شکل‌های زیر برگردان مکانیزم ۴ میله‌ای و مکانیزم لنگ لغزنده قابل مشاهده می‌باشد.



«مکانیزم اصلی» «وارونش سوم»



در برگردان یک مکانیزم این نکته مهم و قابل ذکر است که حرکت نسبی بین میله‌ها به هیچ وجه تغییر نمی‌کند.

به عنوان مثال در مکانیزم لنگ لغزنده اگر میله ۲ به اندازه زاویه θ در جهت گردش عقربه‌های ساعت گردش نماید؛ میله ۴ در امتداد خطی مستقیم بر روی میله ۱ به مقدار معینی به طرف راست حرکت خواهد کرد. این مطلب بدون توجه به اینکه کدام میله ثابت است صادق خواهد بود.

حرکت در صفحه:

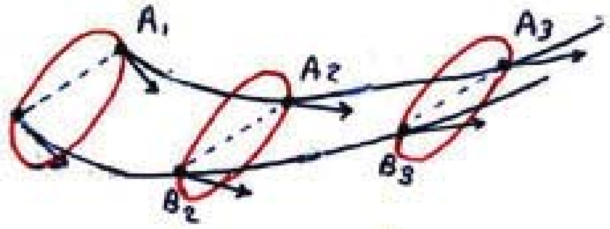
✓ حرکت: تغییر وضعیت یک جسم (ذره مادی یا جسم صلب) نسبت به جسم دیگری در طی زمان را حرکت گویند.

✓ حرکت صفحه ای:

موقعی یک جسم دارای حرکت در صفحه خواهد بود که تمام نقاط آن در صفحاتی موازی با یک صفحه مبنا حرکت نمایند. این صفحه مبنا را صفحه حرکت می نامند. حرکت در صفحه می تواند یکی از سه نوع انتقالی، دورانی و ترکیب انتقالی و دورانی باشد.

✓ حرکت انتقالی:

اگر جسمی طوری حرکت کند که تمام خطوط مستقیم واقع بر جسم همواره وضعیت های موازی همدیگر داشته باشند، جسم دارای انتقال خواهد بود.



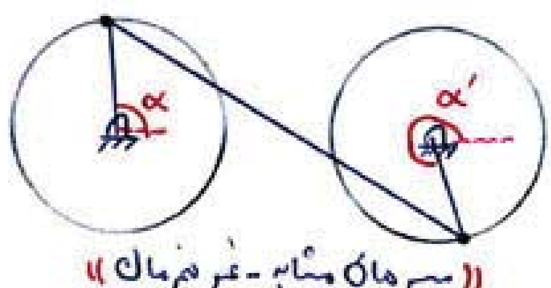
$$\overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2} \parallel \overline{A_3B_3}$$

$\vec{V}_A = \vec{V}_B = f(t)$ (به طور مشابه برای تمام نقاط)

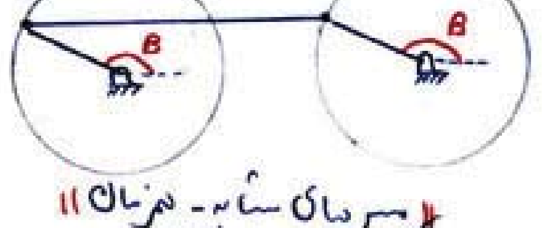
اگر مسیر حرکت تمام نقاط جسم صلب، مشابه و همزمان باشد به این معنی که مسیر همه نقاط یک منحنی بوده و در هر لحظه معین روی موقعیتهای متناظر از آن منحنی ها واقع باشند، حرکت را جزء دسته حرکت انتقالی می نامیم.

اگر مسیر مذکور، خط باشد آن را راست خط (مستقیم الخط) و در غیر این صورت خمیده خط (منحنی الخط) می نامند.

مثال: کدام یک از شکلهای زیر حرکت انتقالی را نمایش می دهند؟



«مسیرهای مشابه - غیر همزمان»
حرکت غیر انتقالی



«مسیرهای مشابه - همزمان»
حرکت انتقالی خمیده خط

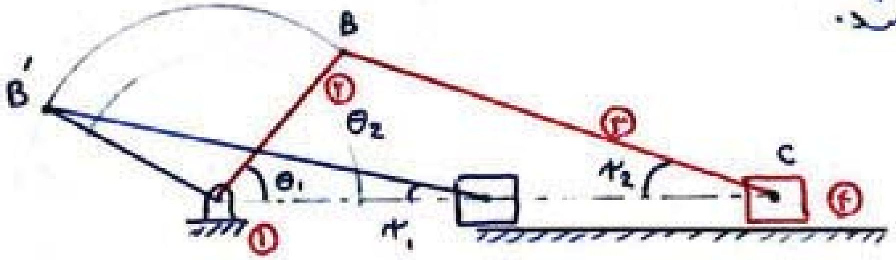
✓ حرکت دورانی یا چرخشی :

حرکتی است صفحه‌ای که در آن فاصله هر نقطه از جسم صلب در تمام طول چرخه حرکت از یک خط مستقیم (موسوم به محور دوران یا محور چرخش) همیشه ثابت است و نقاط واقع بر روی جسم مسیر دایره‌ای را طی می‌کنند. سرعت نقاطی از جسم صلب که بر روی محور چرخش قرار دارند صفر است.

به عنوان مثال در مکانیزم لنگ - لغزنده، حرکت لنگ یک حرکت دورانی است.

✓ انتقال و دوران :

ترکیبی از حرکت انتقالی و حرکت دورانی را حرکت کلی صفحه‌ای می‌گویند که اغلب قطعات ماشینها دارای حرکتی مرکب از انتقال و دوران می‌باشند. برای مثال حرکت میله رابط موتور در مکانیزم لنگ - لغزنده را ملاحظه نمایید. حرکت عضو ۲ دورانی و حرکت عضو ۴ خطی می‌باشد. اما حرکت عضو ۳ (میله رابط) می‌تواند ترکیبی از حرکت دورانی و حرکت خطی (انتقالی) باشد.



ملاحظه می‌گردد که حرکت از BC به B'C' شامل دو قسمت می‌باشد:

- حرکت انتقالی از BC به B''C' به اندازه $\overline{CC'}$
- حرکت دورانی از B''C' به B'C' به اندازه زاویه $\psi_1 - \psi_2$

✓ نکته : دو نوع حرکت دیگر به نامهای حرکت مارپیچ و حرکت کروی نیز وجود دارد که دو دسته حرکات صفحه‌ای نمی‌باشند.

(مراجعه به صفحه ۱۳ - دینامیک ماشین سارنگی) یادآوری

فصل دوم: درجه آزادی (Degree of Freadom)

تعریف کلی درجه آزادی:

طبق تعریف درجه آزادی برابر است با تعداد محورهای مختصات مستقل که برای تعریف حرکت نیاز است منهای تعداد روابط مانع (مقید کننده) که باعث مقید شدن آن حرکت می شوند.

به عبارت دیگر تعریف درجه آزادی عبارت است از تعداد متغیرهای (یا پارامترهای) مستقل یا کمترین پارامترهای مستقل که برای تعیین وضعیت جسم مورد نیاز است.

تذکر ۱: ذره در صفحه دارای (حداکثر) ۲ درجه آزادی و در فضا دارای (حداکثر) ۳ درجه آزادی می باشد. زیرا اندازه ذره ناچیز است و در نتیجه چرخش آن دور خودش مهم نیست.

(سه جابجایی خطی و سه جابجایی زاویه ای)

تذکر ۲: جسم صلب در صفحه (حداکثر) ۳ درجه آزادی و در فضا (حداکثر) ۶ درجه آزادی دارد.

مثال: درجه آزادی را تعیین نمایید.

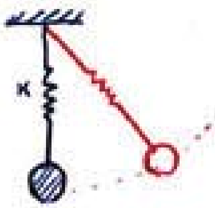
معادله نوسان: $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$

یک معادله قید هستیم که نشان می دهد یک متغیر حذف می شود. اگر دستگاه مختصات x و y داشته باشیم درجه آزادی برابر است با:

درجه آزادی $= ۲ - ۱ = ۱$

در دستگاه قطبی نیز تنها متغیر θ وضعیت جسم را بیان می کند.

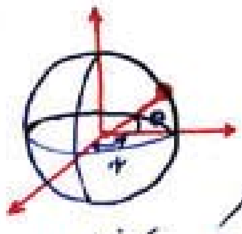
مثال: درجه آزادی را تعیین نمایید.



با وجود فنر k طول L ثابت نیست و معادله محدود کننده وجود ندارد.

درجه آزادی: $۲ - ۰ = ۲$

مثال: درجه آزادی را تعیین نمایید.

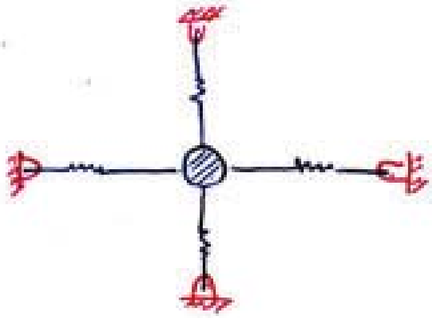


(کره توخالی)

- در دستگاه x و y و z یک معادله قید وجود دارد: $x^2+y^2+z^2=r^2$

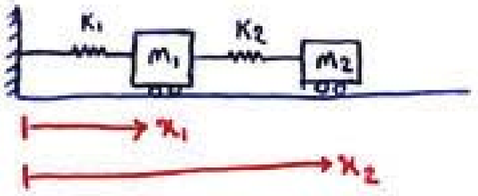
درجه آزادی: $۳ - ۱ = ۲$

- در دستگاه r و θ و ϕ، شعاع r محدود و θ و ϕ وضعیت جسم را تعیین می کنند.

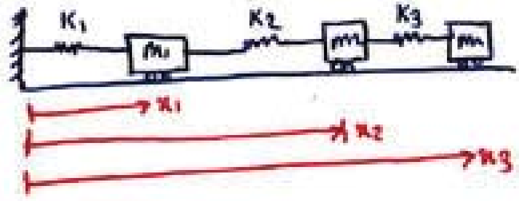


مثال: درجه آزادی شکل‌های زیر را تعیین کنید. (دو صفحه)

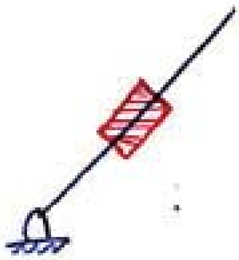
«رابطه‌ی تابع نداریم در درجه آزادی برابر ۳ می‌باشد»



مساله دارای ۲ درجه آزادی است. اگر یکی از دو جرم را بگیریم دیگری مستقل از آن حرکت می‌کند.

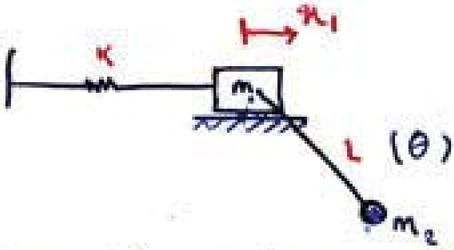


هر کدام از ۳ جرم با یک مختصه x حرکت می‌شند و در نتیجه ۳ درجه آزادی داریم.



دو درجه آزادی دارد.

(تغییر r و تغییر θ) یا (x و y)



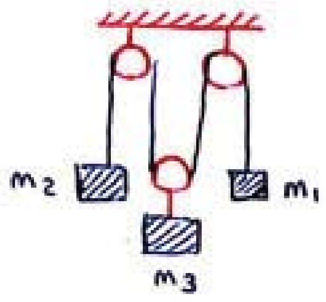
دو درجه آزادی دارد.

یکی حرکت جرم m_1 (x) و دیگری نوسان آونگ (θ)

اگر جسم الاستیک باشد هر ذره آن ۳ درجه آزادی دارد و به دلیل امکان حرکت ذرات نسبت به هم تعداد ∞ ذره با ۳ درجه آزادی وجود دارد که ∞ درجه آزادی بوجود می‌آید. لذا همه اجسام الاستیک را جهت بررسی و تحلیل صلب در نظر می‌گیریم با احتساب 6 درجه آزادی در فضا.

- در سیستم طناب و قرقره درجه آزادی عبارت است از (تعداد جرم‌ها - تعداد طناب‌ها)

مثال: درجه آزادی = ۲ <= ۱ طناب - 3 جرم



چون ۲ درجه آزادی دارد می‌تواند ۲ ورودی دلخواه نیز داشته باشد.

درجه آزادی در زنجیره سینماتیکی :

درجه آزادی یک زنجیره سینماتیکی عبارتست از تعداد حداقل پارامترهای مستقل که برای تعیین وضعیت اهرمهای یک زنجیره سینماتیکی نسبت به هم یا پایه مورد نیاز باشد. به عبارت دیگر تعداد ورودی‌های مورد نیاز جهت قرار دادن یک مکانیزم در وضعیت خاص را درجه آزادی گویند.

درجه آزادی یک سازوکار (مکانیزم) را می‌توان با استفاده از تعداد اهرمها و تعداد و نوع اتصالات به‌کار رفته تعیین نمود. به این منظور از رابطه گروبلر (Grubler) استفاده می‌گردد:

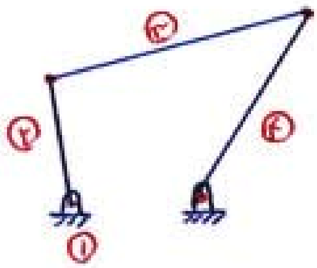
$$\boxed{DoF = 3(n-1) - 2F_1 - F_2}$$

n : تعداد اهرمهای مکانیزم

F_1 : تعداد مفاصل یک درجه آزادی شامل مفاصل لولائی، لغزشی یا غلتشی

F_2 : تعداد مفاصل دو درجه آزادی شامل مفاصل لغزشی-غلتشی

مثال: درجات آزادی مکانیزمهای زیر را تعیین کنید:



$n = 4$

$F_1 = 4$ (لولا)

$F_2 = 0$

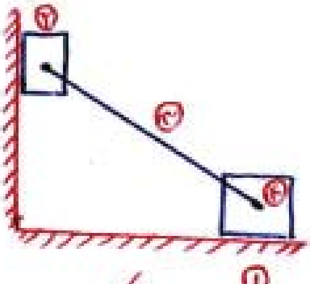
$DoF = 3(4-1) - 2\times 4 - 0 = 9 - 8 = 1$

$n = 4$

$F_1 = 3$ (لولا) $+ 1$ (لغزنده) $= 4$

$F_2 = 0$

$DoF = 3(4-1) - 2\times 4 - 0 = 9 - 8 = 1$



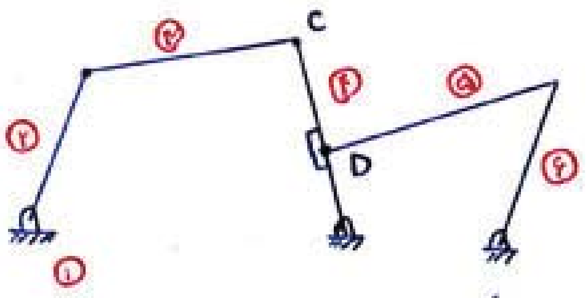
«مکانیزم بیضی نگار»

$n = 4$

$F_1 = 2$ (لولا) $+ 2$ (لغزنده) $= 4$

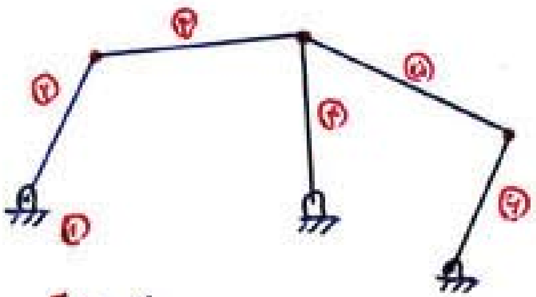
$F_2 = 0$

$DoF = 3(4-1) - 2\times 4 - 0 = 9 - 8 = 1$



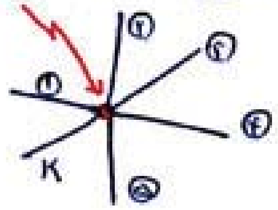
$$\begin{cases} n=6 \\ F_1=7 \\ F_2=0 \end{cases} \qquad DoF = 3(6-1)-2\times7-0 = 1$$

حال فرض کنید C و D بر هم منطبق شده اند

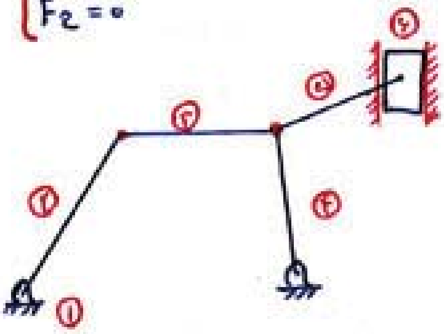


✓ نکته مهم: هرگاه K عضو در یک نقطه لولا شده باشند آن لولا یک لولای چندگانه خوانده می شود و معادل (K-1) لولای ساده می باشد

(K-1) لولا

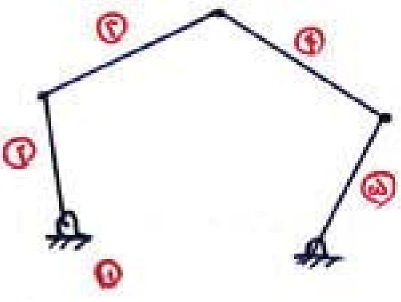


$$\begin{cases} n=6 \\ F_1=7 \\ F_2=0 \end{cases} \qquad DoF = 3(6-1)-2\times7-0 = 1$$



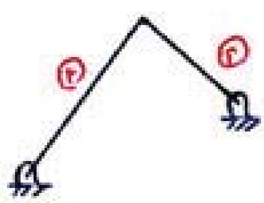
$$\begin{cases} n=6 \\ F_1=7 \\ F_2=0 \end{cases} \qquad DoF = 3(6-1)-2\times7-0 = 1$$

✓ لغزنده چه به صورت تماس با یک سطح دیگر باشد چه با دو سطح در مجموع یک مفصل لغزشی از نوع F_1 محسوب می شود



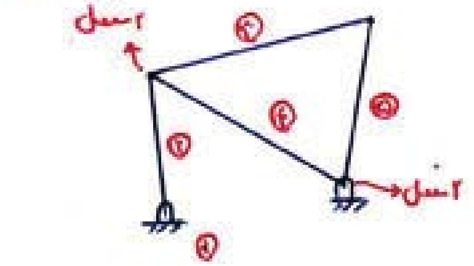
$$\begin{cases} n=5 \\ F_1=5\ (\text{لولا}) \\ F_2=0 \end{cases} \qquad DoF = 3(5-1)-2\times5-0 = 2$$

✓ مکانیزم 2 درجه آزادی است و جهت حرکت نیاز به ۲ ورودی دارد.



$$\begin{cases} n=3 \\ F_1=3 \\ F_2=0 \end{cases} \qquad DoF = 3(3-1)-2\times3-0 = 0$$

زمانی که یک مکانیزم دارای درجه آزادی صفر باشد یعنی مجموعه صلب و نامتحرک بوده یا اصطلاحاً سازه نامیده می شود



$$\begin{cases} n = 5 \\ F_1 = 6 \\ F_2 = 0 \end{cases}$$

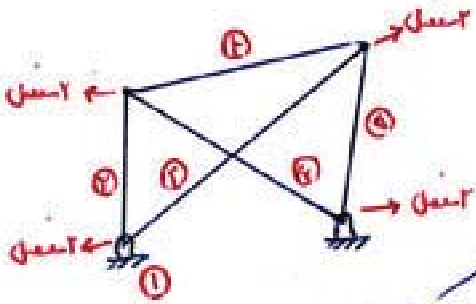
$$DoF = 3(5-1) - 2(6) - 0 = 0$$

سازه معین (صلب)

نکته: به ازای هر میله یا اهرمی که به مکانیزم معلوم اضافه گردد، سه درجه آزادی افزایش می‌یابد و به ازای هر لولایی که به مکانیزم افزوده شود، دو درجه آزادی کاسته می‌شود.

- در نهایت افزودن هر اهرم دو مفصلی به مکانیزم باعث کاهش یک درجه آزادی می‌گردد. «$(3(1) - 2\times2 = -1)$»

در مثال بالا افزایش یک اهرم به مکانیزم ۴ میله‌ای باعث کاهش درجه آزادی از ۱ به صفر گردید.



$$\begin{cases} n = 6 \\ F_1 = 8 \\ F_2 = 0 \end{cases}$$

$$DoF = 3(6-1) - 2\times8 = -1$$

سازه نامعین (دارای یک درجه فوق صلب)

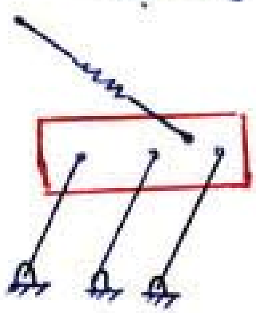
- یعنی سازه نامعین فوق نه تنها حرکت نمی‌کند بلکه اگر یک میله را هم برداریم باز هم حرکتی نداریم.

استثنا:

۱- رابطه گروبلر در مورد مکانیزم‌هایی که قسمتی از آن را می‌توان توسط اهرم‌های موازی جایگزین نمود، صادق نیست.

۲- اگر افزودن عضو یا اتصال جدید تأثیری در حرکت نداشته باشد، یعنی با حذف آن اهرم یا عضو یا مفصل همچنان حرکت قبلی انجام‌پذیر باشد در این صورت دستور گروبلر دیگر درست نخواهد بود.

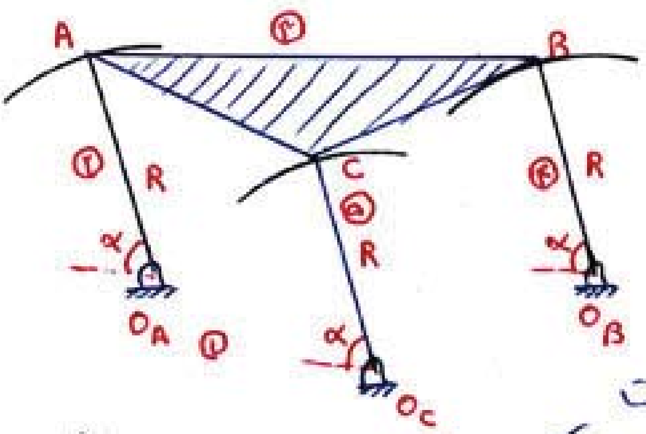
مثال:



در مکانیزم روبرو حذف هر یکی از میله‌ها تأثیری در حرکت ندارد و قابل حذف است.

$$DoF = 3(4-1) - 2\times4 - 0 = 1$$

مثال :



$n = 5$
$F_1 = 6$
$F_2 = 0$

$DoF = 3(5-1) - 2(6) = 0$

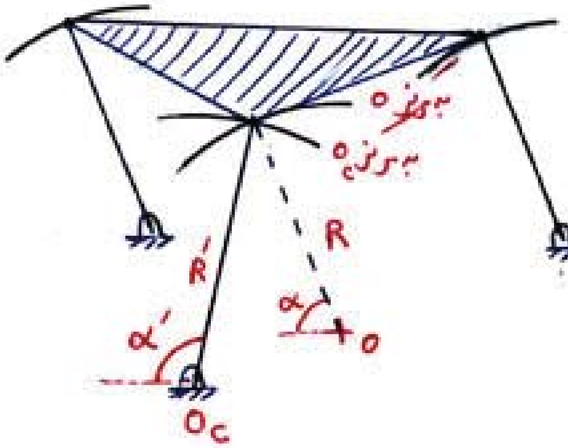
(غیر واقعی)

مکانیزم فوق، مکانیزم موازی الاضلاع می باشد و چون حرکت تمامی نقاط روی عضو میانی (عضو ۲) یک حرکت انتقالی است؛ بنابراین مسیر حرکت همه نقاط این عضو، دایره ای به شعاع R می باشد و اگر در آن هر نوع قیدی به مکانیزم که سبب گردد مسیر نقطه ای از این عضو، همین دایره باشد، یک قید اضافی در آن بوده، و قابل حذف می باشد. مثلاً عضو ۵ سبب می گردد تا نقطه C روی مسیر اولیه خود (در حالتی که عضو ۵ وجود نداشته) باقی بماند. بنابراین وجود این عضو (عضو ۵) زائد و قابل حذف است.

با حذف این عضو داریم:

$$\begin{cases} n = 4 \\ F_1 = 4 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(4-1) - 2\times4 - 0 = 1$$

اما در صورتی که عضو ۵ کمی بلندتر یا کوتاهتر باشد $(R \pm \varepsilon)$ یا زاویه α کمی کمتر یا بیشتر باشد $(\alpha \pm \varepsilon)$ آنگاه نقطه C وادار به حرکت روی مسیر دایره ای جدیدی می شود که با مسیر قبلی که توسط مکانیزم موازی الاضلاع ایجاد شده، متفاوت بوده و با توجه به اینکه یک نقطه واحد نمی تواند روی دو دایره مختلف حرکت کند، پس سازوکار قفل می شود.

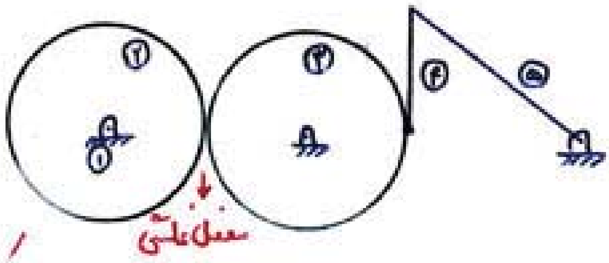


$n = 5$
$F_1 = 6$
$F_2 = 0$

$DoF = 3(5-1) - 2\times6 = 0$

(واقعی)
(سازه صلب)

مثال:

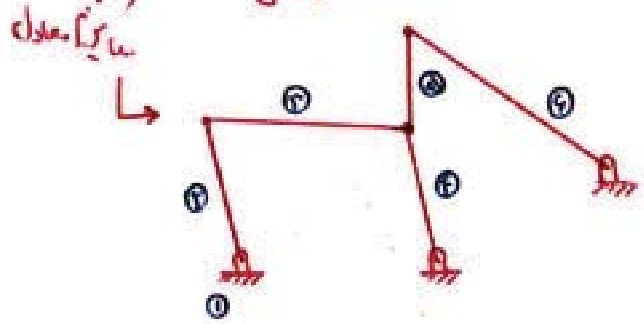


$n=5$

$F_1=6$ $\quad DoF=3(4)-2(6)=0$

$F_2=0$

(غیرواقعی)



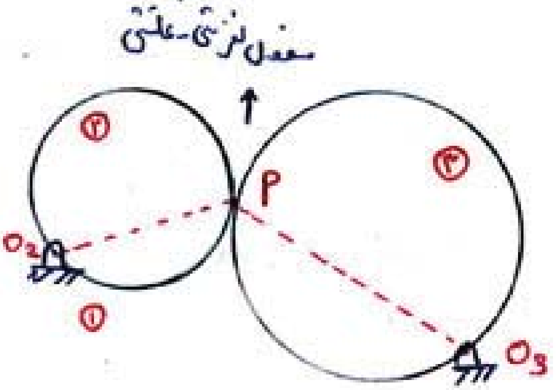
$n=6$

$F_1=7$ $\quad DoF=3(5)-2(7)=1$

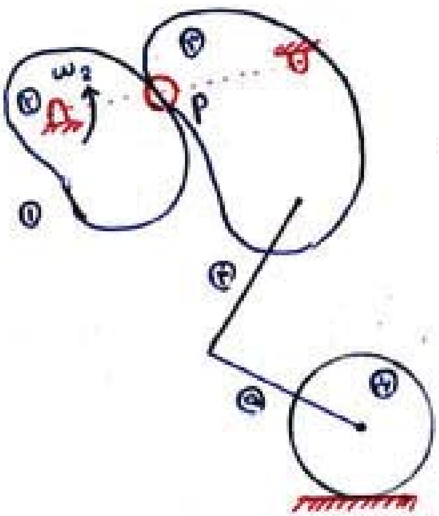
$F_2=0$

(واقعی)

مثال: درجه آزادی مکانیزم های زیر را تعیین کنید.



$$\begin{cases} n=3 \\ F_1=2 \\ F_2=1 \end{cases} \quad DoF=3(2)-2(2)-1=1$$



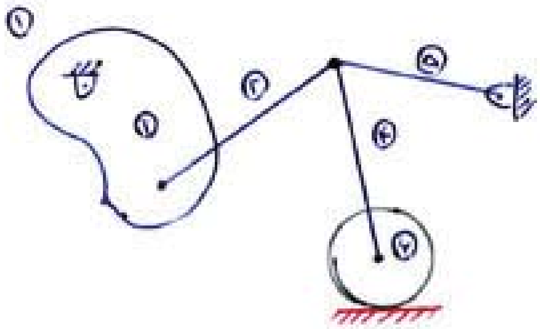
$$\begin{cases} n=6 \\ F_1=6 \\ F_2=1 \end{cases} \quad DoF=3(5)-2(6)-1=2$$

✓ نکته: با وجودی که $V_{P_3}=V_{P_2}$ ولی در تحلیلات تعداد این دو قید برابر نسبت دو مفصل لغزشی غلتشی است.

✓ نکته: هر جسمی که روی زمین قرار دارد (جسم غلتان و گرد) چنانچه پین نشده باشد و اطلاعاتی از حرکت آن در دست نباشد نسبت به زمین یک مفصل غلتشی به حساب می آید.

تکلیف :

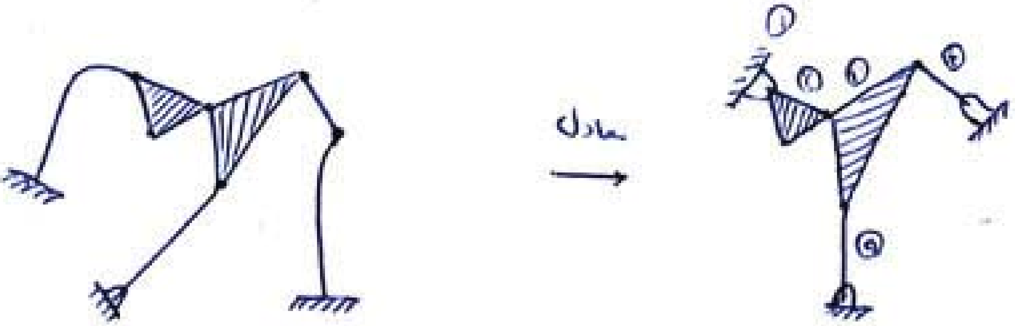
(۱)



$$\begin{cases} n=6 \\ F_1=7 \\ F_2=0 \end{cases}$$

$$DoF=3(5)-2(7)=1$$

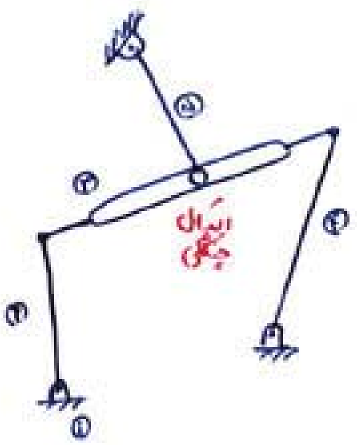
(۲)



$$\begin{cases} n=5 \\ F_1=6 \\ F_2=0 \end{cases}$$

$$DoF=3(4)-2(6)=0$$

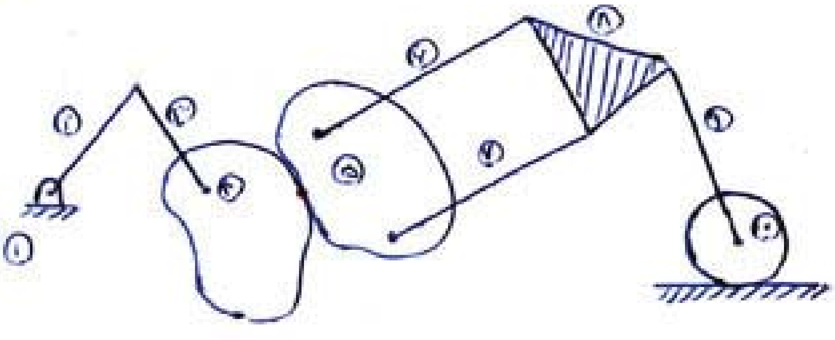
(۳)



$$\begin{cases} n=5 \\ F_1=5 \\ F_2=1 \end{cases}$$

$$DoF=3(4)-2(5)-1=1$$

(۴)

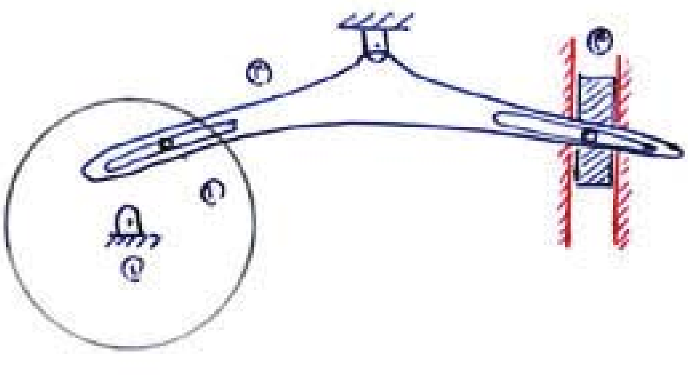


$$\begin{cases} n=10 \\ F_1=10+1 \\ F_2=0 \end{cases}$$

$$DoF=3(9)-2(11)=5$$

با توجه به اینکه بین اعضا ۵ و ۴ یک مفصل وجود دارد و قضاوتی در مورد لغزشی یا غلتشی بودن نمی‌توان انجام داد در اثر دوران دو عضو ۴ و ۵ مشخص نیست فرض می‌شود که مفصل غلتشی است.

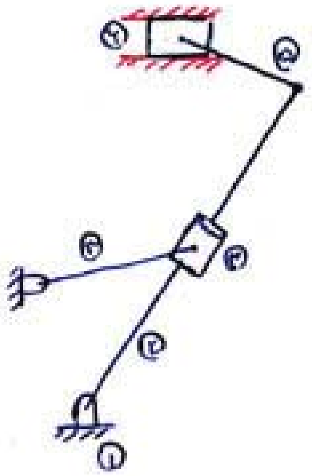
(۵)



$$\begin{cases} n=4 \\ F_1=3 \\ F_2=2 \end{cases}$$

$$DoF=3(3)-2(3)-2=1$$

6



$$\begin{cases} n = 6 \\ F_1 = 7 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(5) - 2(7) = 1$$

تسمه به عنوان اتصال پوششی (wrapping Pair)

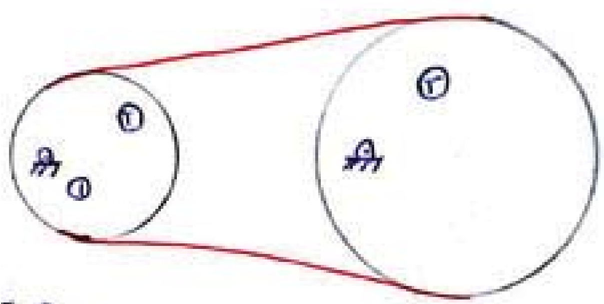
یک سیم، تسمه، زنجیر و یا هر عضو انعطاف پذیر و بدون قابلیت تغییر طول که دو اجزا بدون تماس مستقیم را به هم وصل می‌کند و یک اتصال دو درجه آزادی می‌باشد را اتصال پوششی گویند. یک درجه آزادی چرخش هم حول محل تماس اتصال و یک درجه دیگر انتقال منحنی الخط (روی مسیر دایره) حول محل دیگر تماس اتصال می‌باشد.

پس از نوع F_2 می‌باشد.

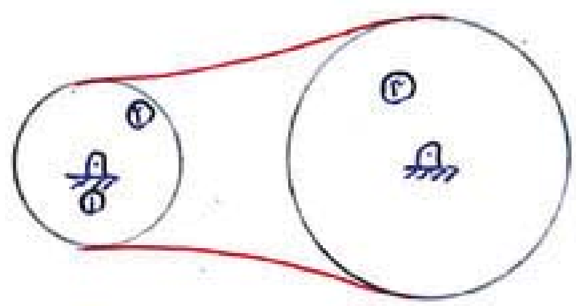
اگر در مکانیزم ثابت بودن طول تسمه تضمین شود یک اتصال F_2 درنظر گرفته می‌شود و در غیر این صورت دو اتصال F_2 درنظر گرفته می‌شود.

تسمه در شماتیک با قرمز لحاظ می‌گردد (قرارداد)

مثال: درجه آزادی دو مکانیزم زیر را تعیین کنید.



$$\begin{cases} n = 3 \\ F_1 = 2 \\ F_2 = 2 \end{cases} \qquad DoF = 3(2) - 2(2) - 2 = 0$$



$$\begin{cases} n = 3 \\ F_1 = 2 \\ F_2 = 1 \end{cases} \qquad DoF = 3(2) - 2(2) - 1 = 1$$

✓ نکته: مفصل بین دو چرخنده یا محل اتصال و تماس دو چرخنده یک مفصل لغزشی-غلتشی با درجه آزادی ۲ از نوع F_2 محسوب می‌شود.

فصل سوم : مراکز آنی (Centers)

(اصول اساسی)

اصطلاح مرکز آنی برای نشان دادن مرکز دوران یک جسم در هر لحظه مورد استفاده قرار می گیرد و به شکل زیر تعریف می شود:

تعریف ۱) مرکز آنی نقطه‌ای واقع بر یک جسم بوده که عضو دیگری به طور دائم یا لحظه‌ای حول آن دوران می نماید.

تعریف ۲) مرکز آنی نقطه‌ای مشترک واقع بر دو جسم می باشد که در سرعت‌های لحظه‌ای از نظر مقدار و هم از نظر امتداد و جهت با هم یکسان می باشد و در آن نقطه سرعت نسبی بین دو جسم مورد نظر صفر است.

- مراکز آنی چرخش بین دو جسم متصل مثل m و n را با I_{mn} یا I_{nm} نمایش می دهند.
- برای یک مکانیزم که شامل n عضو باشد، تعداد مراکز آنی از رابطه زیر حاصل می شود:

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

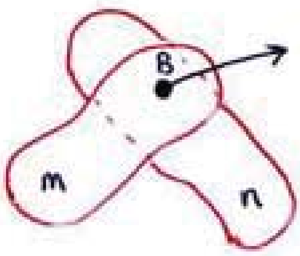
- مراکز چرخش می توانند آنی (Instantaneous) و یا دائم (Permanent) باشند. در موردی که محل مرکز چرخش، نسبت به دو جسم تغییر نکند آن را آنی در مرکز صورت دائم گویند.

مراکز آنی بر دو نوع هستند: ۱- مراکز آنی اولیه (Primery centers)
۲- مراکز آنی ثانویه (secondry centers)

- موقعیت مراکز چرخش اولیه با توجه به شکل مکانیزم معلوم بوده و نیازی به انجام فرآیند اضافی نیست، اما موقعیت مراکز چرخش ثانویه با توجه به موقعیت مراکز چرخش اولیه و انجام فرآیندهای اضافی معلوم می شود.
- هر دو نوع مرکز چرخش اولیه و ثانویه می توانند دائم یا آنی باشند.

۱) مرکز آنی در مفصلهای پینی (لولایی)

اگر دو جسم به هم لولا شده باشند، در آن نقطه سرعت دو جسم متصل با هم برابر است و آن نقطه مرکز آنی چرخش می باشد.

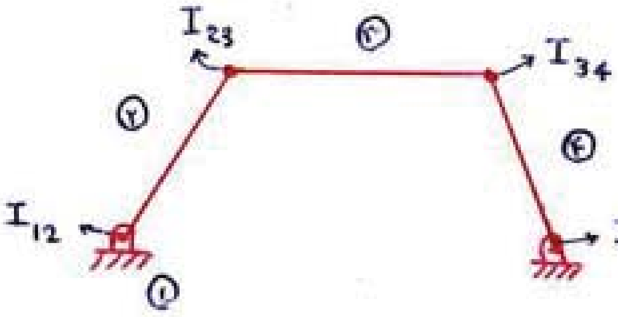


$$(\vec{V_B})_n = (\vec{V_B})_m$$

$$\hookrightarrow I_{mn} = B$$

یعنی نقطه مفصل اتصال، مرکز آنی اولیه چرخش می باشد.

مثال: مراکز آنی چرخش از نوع یک در شکل زیر را مشخص کنید.

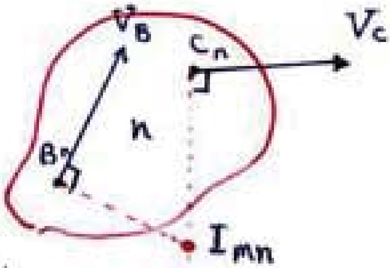


$$N = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4(3)}{2} = 6$$

از 6 مرکز آنی برای سازوکار تعداد ۴ عدد مرکز آنی اولیه از نوع لولایی پین می باشد.

۲) مرکز آنی جسم صلبی که امتداد سرعت خطی دو نقطه آن معلوم باشد:

اگر راستای سرعت دو نقطه از یک جسم صلب معلوم باشد و آن دو راستا موازی نباشند با رسم دو عمود بر راستاهای معلوم در محل برخورد آن دو عمود می توان مرکز آنی دوران آن جسم را مشخص کرد.

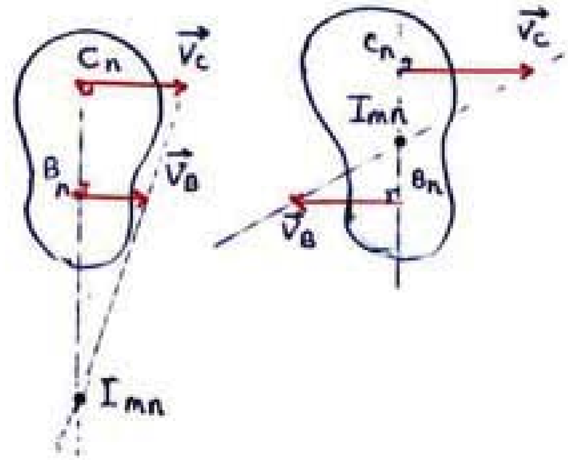


$$\vec{V_c} = \vec{\omega_n} \times \vec{IC} \qquad \vec{V_c} \perp \vec{IC}$$

$$\vec{V_B} = \vec{\omega_n} \times \vec{IB} \qquad \vec{V_B} \perp \vec{IB}$$

(زمین m)

اگر راستای سرعت دو نقطه از یک جسم صلب معلوم و آن دو راستا موازی باشند، در این صورت پس از خارج شدن یک عمود بر راستای سرعت دو نقطه، انتهای سرعت دو نقطه را به هم وصل کرده تا مرکز چرخش از تقاطع دو خط فوق حاصل گردد.



(زمین m)

$$\vec{V_c} = \vec{\omega_n} \times I_c$$

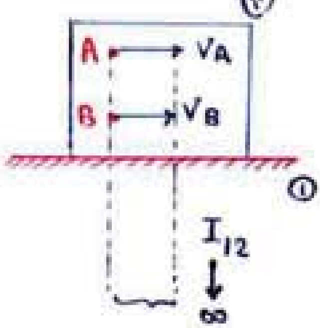
$$\vec{V_B} = \vec{\omega_n} \times IB$$

$$\omega_n = \frac{|\vec{V_c}|}{IC} = \frac{|\vec{V_B}|}{IB}$$

۳) مرکز آنی یک جسم لغزنده

اگر حرکت بین دو جسم از نوع لغزش کامل باشد در آن صورت ممکن است یکی از حالات زیر اتفاق افتد:

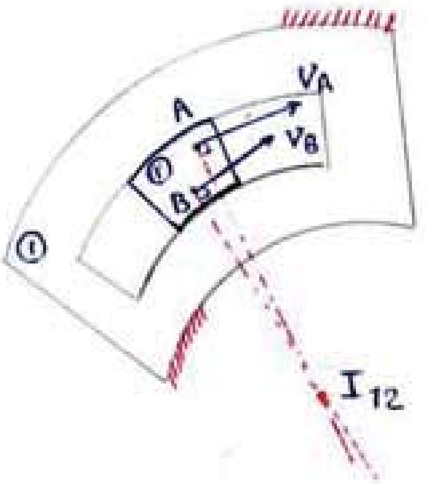
الف) لغزش در امتداد مسیری مستقیم:



با توجه به اینکه سرعت دو نقطه از جسم ($\vec{V}_B$ و $\vec{V}_A$) مشخص و موازی است.
لذا رسم دو عمود بر ابتدا و انتهای این دو بردار دو خط موازی است
که فرض می‌شود دو خط موازی همدیگر را در بی‌نهایت قطع می‌کنند.
لذا مرکز آنی در این حالت در بی‌نهایت و عمود بر سطح لغزش است.

$V = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{V}{r}$ ، $r \to \infty \Rightarrow \omega = 0$ (جسم لغزش کامل دارد)

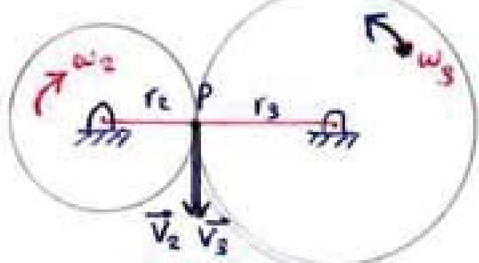
ب) لغزش در امتداد مسیر منحنی:



با توجه به مسیر منحنی شکل و وجود یک مرکز آنی در آن
در بی‌نهایت نیست بلکه در مرکز انحنای مسیر می‌باشد.

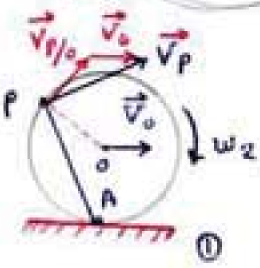
۴) مرکز آنی یک جسم غلتان

اگر یک جسم بدون لغزش روی جسم دیگری بغلتد، (جسم دیگری که غلتش ساکن یا متحرک باشد) اما به دلیل اینکه سرعت
در نقطه تماس از دو جسم برابر است و سرعت نسبی برای نقاط محل تماس صفر باشد، بنابراین نقطه تماس خود
مرکز آنی سرعت این دو جسم نسبت به هم است.



$\vec{V}_2 = \vec{V}_3 \Rightarrow r_2\omega_2 = r_3\omega_3$

$\vec{V}_{2/3} = 0 \Rightarrow I_{23} = P$



$\vec{V}_P = \vec{V}_{P/O} + \vec{V}_O$

$I_{12} = A$ (مرکز آنی دوران)

سرعت در نقطه P یا O یا ... را می‌توان نسبت
به نقطه A بدست آورد، لذا در نقطه تماس

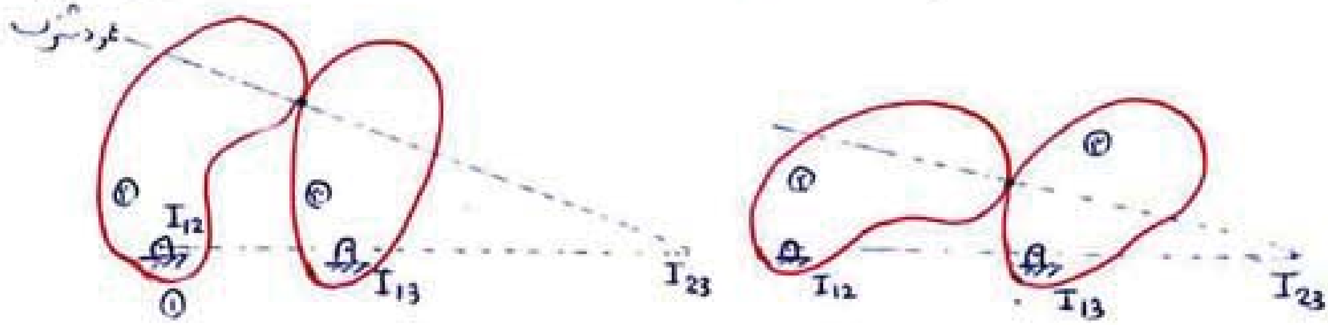
۵) مرکز آنی در تماس لغزشی - غلتشی

اگر تماس بین دو جسم از نوع غلتشی - لغزشی باشد در آن صورت برای تعیین مرکز آنی آن دو جسم نسبت به هم به شرح زیر عمل می‌کنیم:

الف) مرکز یا مراکز آنی دو جسم نسبت به یک پایه را پیدا می‌کنیم.

ب) عمود مشترک دو سطح در نقطه تماس آن دو جسم را رسم می‌کنیم.

پ) محل تلاقی عمود مشترک با پاره‌خط بین مراکز بین دو جسم نسبت به پایه، مرکز آنی دو جسم نسبت به یکدیگر است.



I_{23} می‌تواند جزئی از جسم ۲ یا ۳ نیز باشد.

قضیه کندی: (Arnhold Kennedy)

بنابر قضیه کندی سه قطعه که نسبت به یکدیگر دارای حرکت نسبی (صفحه‌ای) می‌باشند، دارای سه مرکز آنی بوده که هر سه در یک راستا می‌باشند. یعنی اگر سه جسم مطلب m و n و k را داشته باشیم، با معلوم بودن I_{nK} و I_{mK} می‌توان گفت مرکز چرخش I_{nm} روی خط واصل بین دو مرکز فوق قرار دارد. (مثال شکل بالا)

روش دیاگرام دایره برای جایابی مراکز آنی ثانویه

یکی از روشهای تعیین مراکز آنی ثانویه روش دایره می‌باشد که به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

۱- ابتدا دایره‌ای به شعاع دلخواه ترسیم می‌کنیم و به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. (n تعداد اعضای مکانیزم است)

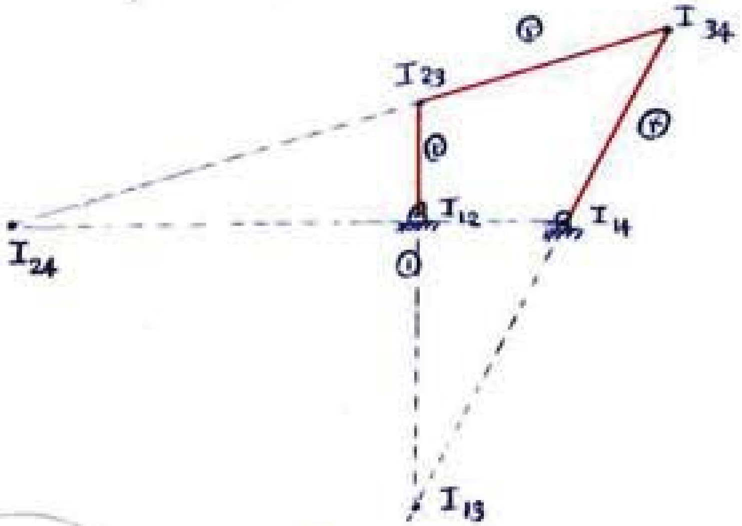
۲- به هر گره یک شماره داده می‌شود که معرف یک جسم مطلب با همان شماره خواهد بود.

۳- رابطه بین هر دو گره (دو شماره) معرف یک مرکز آنی (مرکز چرخش) است. اگر این مرکز آنی اولیه باشد آن را با خط پر و اگر مرکز مربوط معلوم باشد (ثانویه) آن را با خط نقطه‌چین مشخص می‌کنیم.

۴- برای تعیین مراکز آنی ثانویه، هر دو مثلثی را در نظر می‌گیریم که در یک ضلع نقطه‌چین مشترک و دو ضلع دیگر آنها پر باشد.

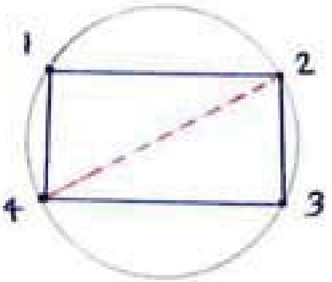
۵- بر اساس قضیه کندی، محل مرکز آنی ثانویه را بدست می‌آوریم و پس از تعیین آن خط‌چین مربوط را با خط پر بر روی دایره نمایش می‌دهیم.

مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را تعیین کنید.



$$N=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{4(3)}{2}=6$$

از مجموع ۶ مرکز آنی تعداد ۴ عدد مراکز آنی اولیه (مفاصل) می‌باشند. جهت تعیین ۲ مرکز آنی ثانویه از روش دایره استفاده می‌کنیم.



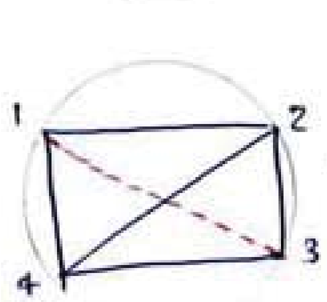
جهت بدست آوردن مرکز آنی ثانویه I_{24} از دو مثلث $\overset{\triangle}{234}$ و $\overset{\triangle}{214}$ استفاده می‌کنیم.

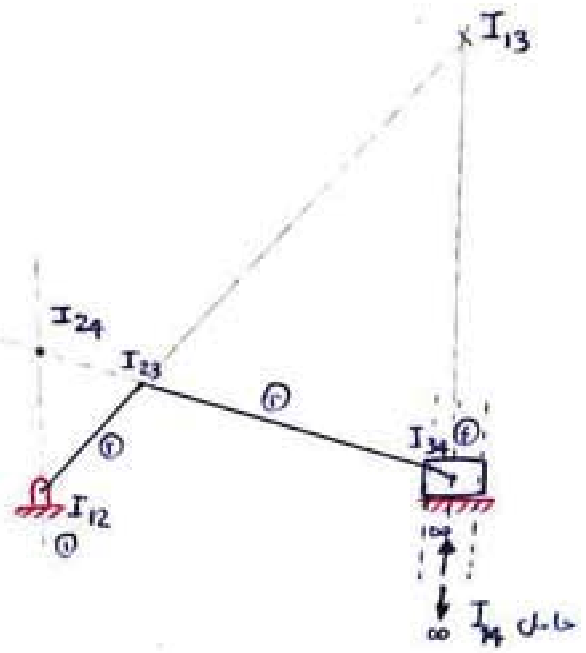
از مثلث $\overset{\triangle}{234}$ امتداد مراکز آنی اولیه I_{23} و I_{34} را با هم وصل می‌کنیم.

از مثلث $\overset{\triangle}{214}$ امتداد مراکز آنی اولیه I_{12} و I_{14} را با هم وصل می‌کنیم.

محل تقاطع دو خط I_{24} را به ما نشان می‌دهد و خط 24 را پر (کامل) می‌کنیم.

به همین ترتیب I_{13} را از دو مثلث $\overset{\triangle}{123}$ و $\overset{\triangle}{143}$ بدست می‌آوریم.





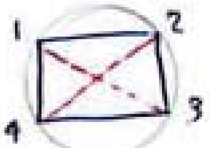
مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را نشان دهید.

$$N = \frac{n(n-1)}{2} = 6$$

۴ مرکز آنی اولیه هستند که I_{12} و I_{23} و I_{34}

در ضمن واضح است که I_{14} در راستای عمود بر لغزنده

در بی‌نهایت است.



$I_{31} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{214}$ و $\overset{\Delta}{432}$

برای $\overset{\Delta}{214}$ می‌بایست I_{12} و I_{14} را به هم وصل کنیم و برای این کار، از محل I_{12} یک خط عمود به سمت بی‌نهایت رسم می‌کنیم.

« توضیحی از کاربرد مراکز آنی در دوران در این مثال »:

فرض کنید ω_2 معلوم باشد. ω_3 و ω_4 را حساب کنید:

با ترسیم مراکز آنی و مشخص بودن محل آنها می‌دانیم که I_{23} نقطه‌ای است که سرعت دو جسم 2 و 3 نسبت به آن یکسان است.

از جسم ۲ $\quad V_{I_{23}} = (I_{12}-I_{23})\,\omega_2$

از جسم ۳ $\quad V_{I_{23}} = (I_{13}-I_{23})\,\omega_3$

$$\Rightarrow \omega_3 = \frac{I_{12}-I_{23}}{I_{13}-I_{23}}\,\omega_2$$

حال با توجه به اینکه I_{23} بین I_{13} و I_{12} است لذا ω_3 در خلاف جهت ω_2 است.

ضمناً چون طول $\overline{I_{12}-I_{23}}$ از طول $\overline{I_{13}-I_{23}}$ کمتر است $\longleftarrow$ $\omega_2 > \omega_3$

به طور کلی می‌توان تعریف کرد:

$$\omega_{\text{متحرک}} = \frac{\text{فاصله مرکز آنی محرک نسبت به نقطه ثابت تا مرکز آنی محرک نسبت به متحرک}}{\text{فاصله مرکز آنی متحرک نسبت به نقطه ثابت تا مرکز آنی محرک نسبت به متحرک}} \cdot \omega_{\text{محرک}}$$

با تعریف فوق برای ω_4 داریم:

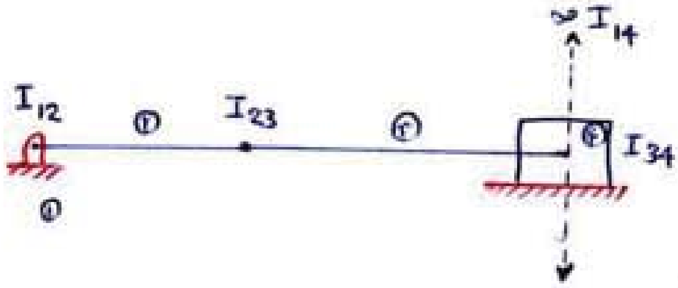
$$\omega_4 = \frac{I_{12}-I_{24}}{I_{14}-I_{24}}\,\omega_2 \Rightarrow \omega_4 = 0$$

$I_{14}-I_{24}$ به سمت ∞

جسم ۴ فقط لغزش دارد که کاملاً صحیح است.

* نکته: اگر مرکز آنی دو جسم نسبت به هم مابین مراکز آنی هر دو جسم نسبت به نقطه ثابت باشد، در آن صورت جهت ω محرک خلاف جهت ω متحرک است. و اگر مابین نباشد ω محرک و متحرک هم سو می‌باشند.

مثال: در مکانیزم مقابل در حالت ذیل مراکز آنی را مشخص کنید.



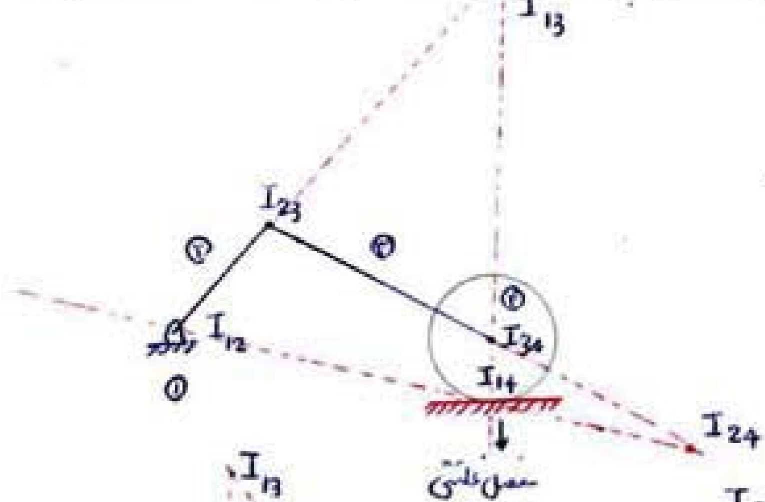
چند ضلعی شکل مقابل را رسم می‌کنیم و از قضیه مثلث‌ها استفاده می‌کنیم.

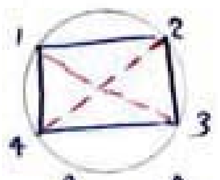
$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{214}$ و $\overset{\Delta}{432}$

ملاحظه می‌گردد که I_{13} منطبق بر I_{34} و I_{24} منطبق بر I_{12} خواهد افتاد. پس در حالت‌های خاص برخی از مراکز چرخش بر هم منطبق می‌شوند.

مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را تعیین کنید.





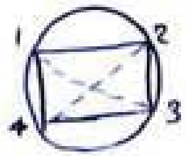
$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{214}$ و $\overset{\Delta}{234}$

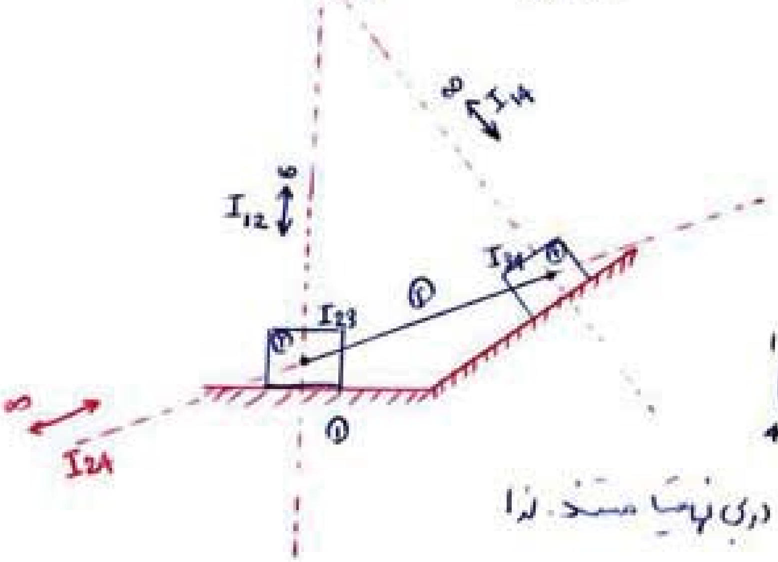
$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را تعیین کنید.

$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{412}$ و $\overset{\Delta}{432}$

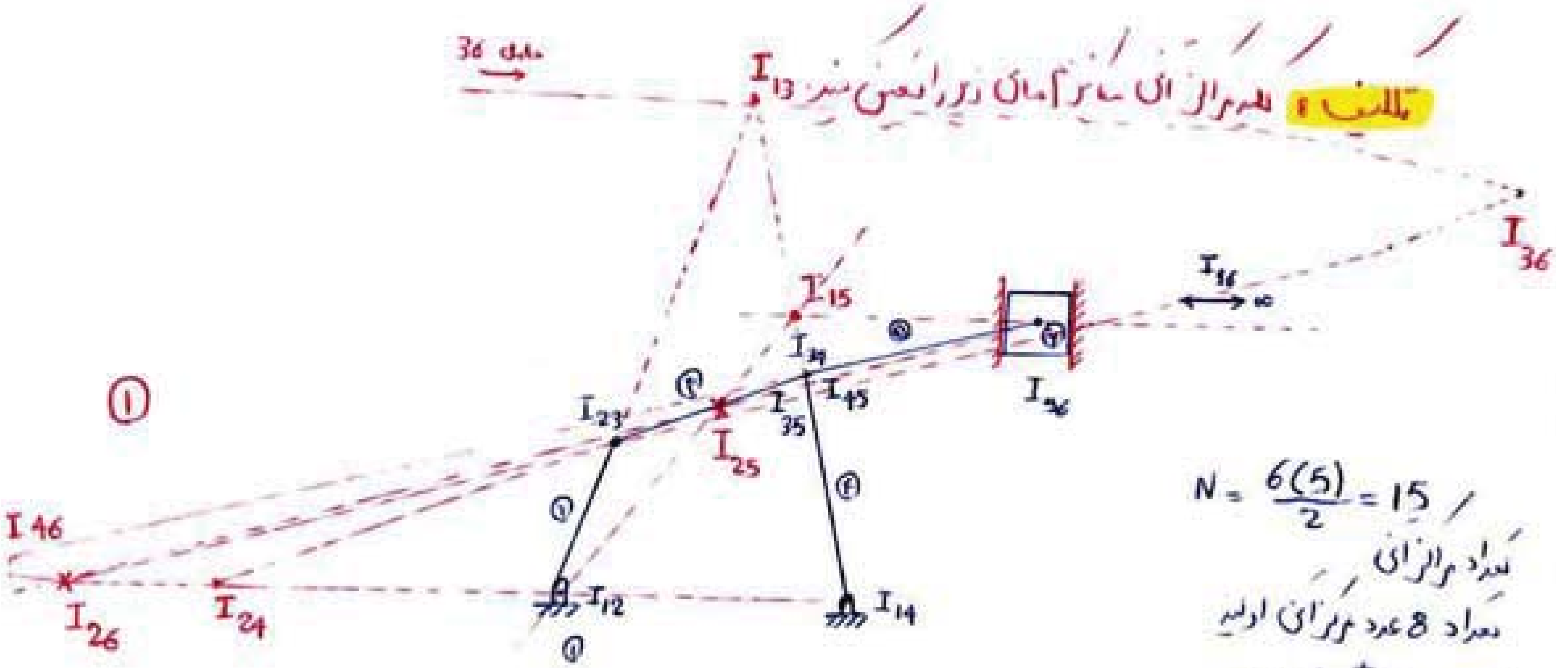




مکان I_{24} در امتداد میله ۳ است. از طرفی I_{14} و I_{12} در بی‌نهایت هستند. لذا I_{24} در امتداد میله ۳ در بی‌نهایت است.

الف: مراکز آنی سازوکار زیر را تعیین کنید:

①



$$N = \frac{6(5)}{2} = 15$$

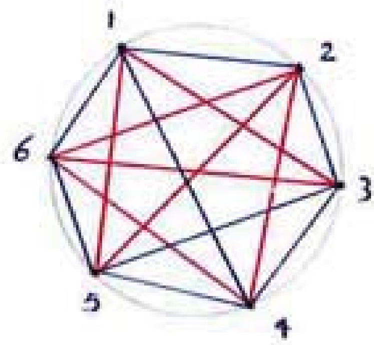
تعداد مراکز آنی

تعداد 8 عدد مراکز آنی اولیه

\+

تعداد 7 عدد مراکز آنی ثانویه

برای پیدا کردن ۷ مرکز آنی ثانویه ابتدا از آنهایی شروع می‌کنیم که ۲ مثلث کامل را بتوان برای آنها یافت.



$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

$I_{15} \rightarrow \overset{\Delta}{165}$ و $\overset{\Delta}{145}$

$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{234}$ و $\overset{\Delta}{214}$

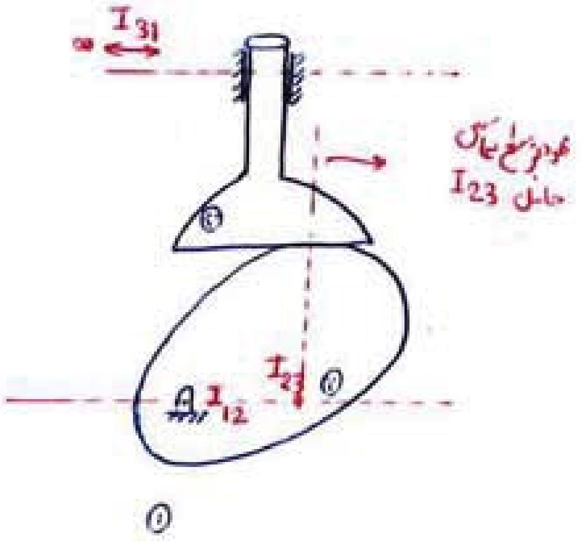
$I_{25} \rightarrow \overset{\Delta}{235}$ و $\overset{\Delta}{245}$ ⟶ روی صفحه ای نشد $\xrightarrow{\text{۲ مثلث دیگر}}$ $\overset{\Delta}{235}$ و $\overset{\Delta}{215}$

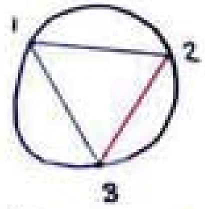
$I_{26} \rightarrow \overset{\Delta}{216}$ و $\overset{\Delta}{256}$

$I_{36} \rightarrow \overset{\Delta}{316}$ و $\overset{\Delta}{326}$

$I_{46} \rightarrow \overset{\Delta}{456}$ و $\overset{\Delta}{416}$

②





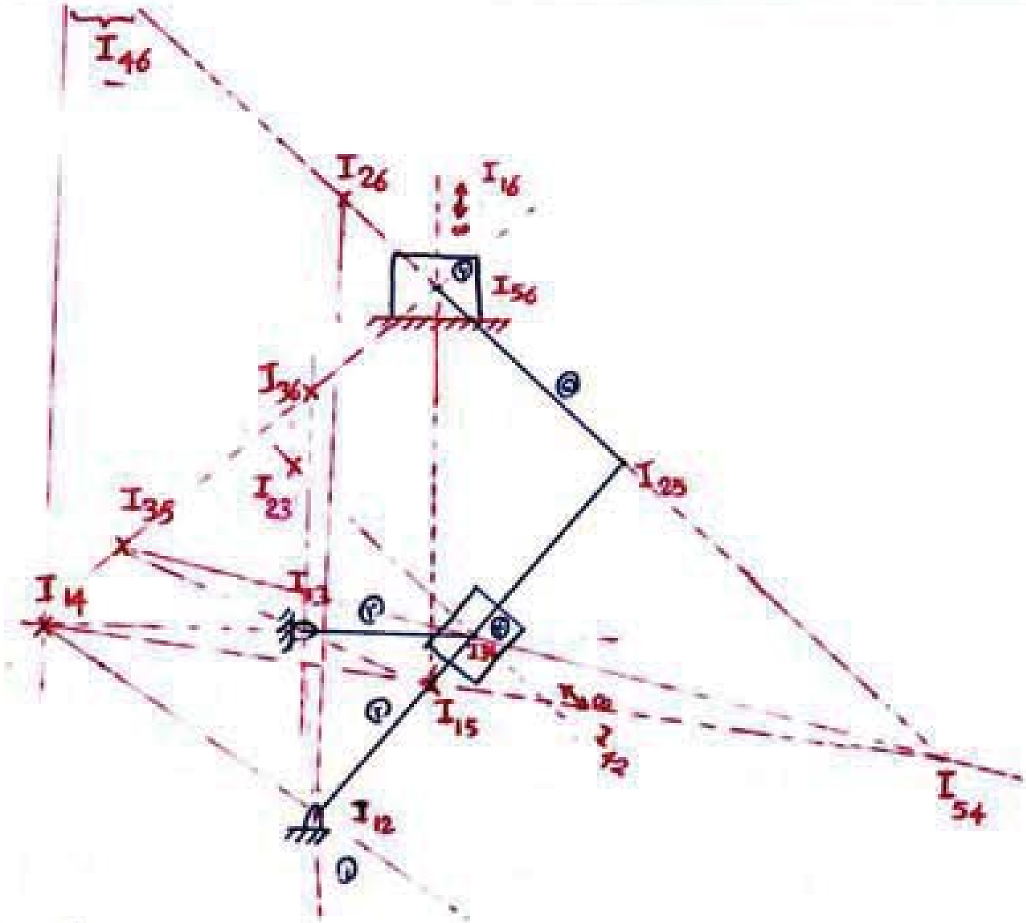
$I_{23} \rightarrow \overset{\Delta}{213}$ و

عمود بر سطح تماس

$$N = \frac{3(2)}{2} = 3$$

P_29

③



$I_{15} \longrightarrow \overset{\Delta}{125}$ و $\overset{\Delta}{165}$

$I_{26} \longrightarrow \overset{\Delta}{612}$ و $\overset{\Delta}{652}$

$I_{14} \longrightarrow \overset{\Delta}{124}$ و $\overset{\Delta}{134}$

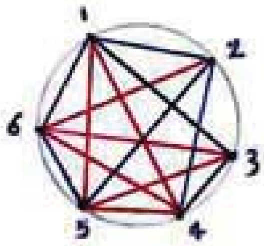
$I_{54} \longrightarrow \overset{\Delta}{415}$ و $\overset{\Delta}{425}$

$I_{46} \longrightarrow \overset{\Delta}{416}$ و $\overset{\Delta}{456}$

$I_{35} \longrightarrow \overset{\Delta}{345}$ و $\overset{\Delta}{315}$

$I_{36} \longrightarrow \overset{\Delta}{356}$ و $\overset{\Delta}{316}$

$I_{23} \longrightarrow \overset{\Delta}{213}$ و $\overset{\Delta}{243}$

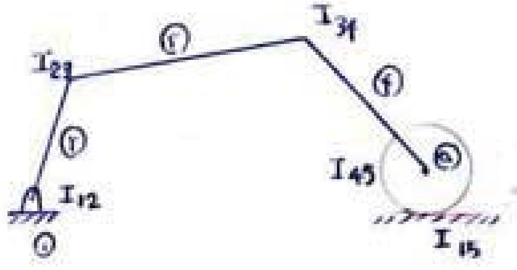


$N = \frac{6(5)}{2} = 15$

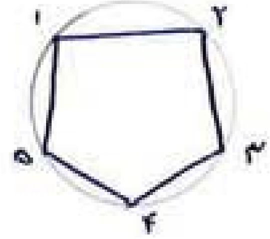
7 ← مرکزهای اولیه

8 ← مرکزهای ثانویه

مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را تعیین کنید.



$$N=\frac{5(4)}{2}=10$$



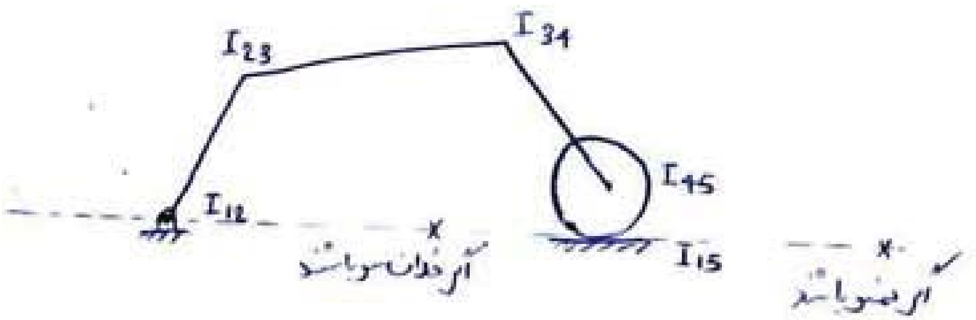
ملاحظه می‌گردد ۵ مرکز آنی اولیه مشخص و ۵ مرکز آنی دیگر ثانویه و غیر مشخص هستند.
دقت شود که اگر مسئله ۲ درجه آزادی باشد، الزاماً می‌بایست اطلاعاتی غیر از محل مراکز آنی اولیه در دست باشد، زیرا در غیر این صورت مسئله غیر قابل حل است.

اطلاعات اضافی: $\frac{\omega_2}{\omega_5}=0.5$ و ω_2 و ω_5 خلاف جهت هم حرکت می‌کنند.

پس ابتدا I_{25} را با استفاده از اطلاعات تکمیلی به دست می‌آوریم. پس از مشخص شدن تعداد کافی از نوع مراکز آنی، سایر مراکز آنی ثانویه را به دست می‌آوریم.

I_{25} روی خط واصل I_{12} و I_{15} است.

$$\frac{\omega_2}{\omega_5}=\frac{I_{15}-I_{25}}{I_{12}-I_{25}}=\frac{1}{2}$$

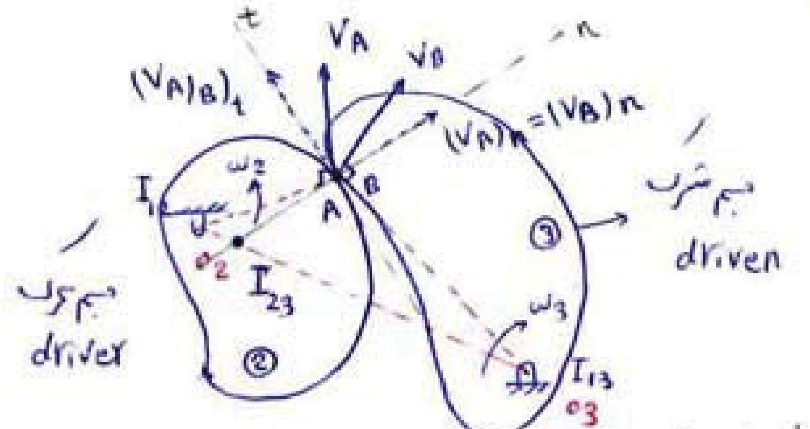


پس از تعیین این مراکز آنی، مابقی قابل تعیین هستند.

حرکت لغزشی-غلتشی :

بیشتر گفته شد که مفصلی هم لغزش و هم غلتش را توامان داشته باشد، مفصل لغزشی-غلتشی نامیده می‌شود مانند اتصال چنگالی. یا به عبارت دیگر مفصلی که در تمام لحظات شرایط غلتشی خالص بودن را نداشته باشد می‌تواند لغزشی-غلتشی باشد. منظور از مفصل مادامی که در تمام لحظات است و منظور از حرکت لغزشی وضعیت در لحظه‌ای خاص است. پس یک مفصل لغزشی-غلتشی در زمان‌های مختلف می‌تواند نوع حرکت متفاوتی را از خود نشان دهد :

حالت اول :



ملاحظه می‌گردد که حرکت از نوع لغزشی غلتشی است و با فرض معلوم بودن ω_2 و همچنین پیدا کردن مرکزهای I_{23} و چون نقطه I_{23} مابین I_{12} و I_{13} است جهت ω_2 و ω_3 خلاف هم می‌باشد.

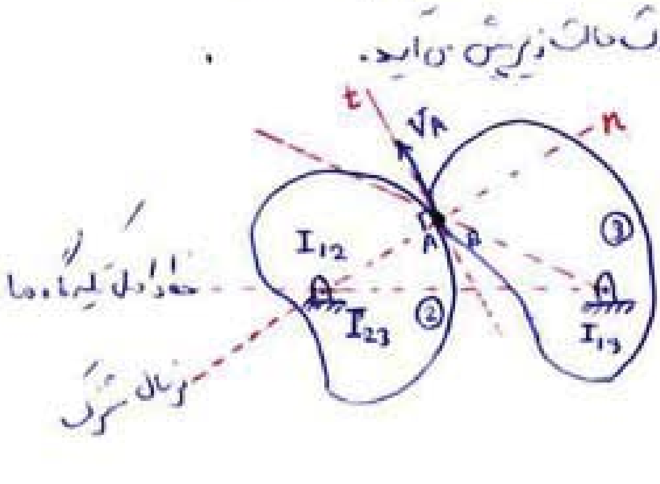
$$\omega_3 = \frac{(\overline{I_{12}-I_{23}})}{(I_{13}-I_{23})}\cdot \omega_2$$

* با توجه به نسبت فاصله مرکزهای می‌توان تشخیص داد که کدام عضو محرک است یا متحرک.

I_{23} نمی‌تواند روی I_{13} بیفتد زیرا به ازای ω_2 مقدار ω_3 برابر ∞ می‌شود.

I_{23} می‌تواند روی I_{12} بیفتد و در آن صورت حالت لغزشی پیش می‌آید.

حالت دوم :



$(V_A)_n = 0 \Rightarrow (V_B)_n = 0$

$\downarrow$

$V_B = 0$ و $(V_B)_t = 0$

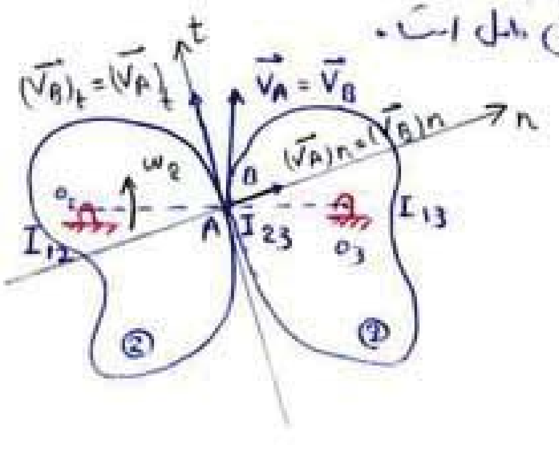
از آنجا که $(V_A)_n$ ، مؤلفه عمودی دو سرعت باهم برابرند، لذا $(V_A)_n=(V_B)_n=0$ به همین دلیل $V_B=0$ و یا $\omega_3=0$ پس در این لحظه جسم 3 ثابت می‌باشد. از آنجا که لغزش تابع رابطه $(\vec{V}_{A/B})_t=(\vec{V}_A)_t-(\vec{V}_B)_t$ است در این لحظه به دلیل صفر نبودن $(\vec{V}_A)_t$ (معادل مقدار $\vec{V}_A$) ، لغزش حداکثر مقدار شده، و لذا حرکت بین دو جسم به صورت لغزش کامل می‌شود.

دقیقاً مانند حالتی که جسم روی زمین می‌لغزد. (جسم ۳ زمین می‌شود جسم ۲ لغزنده)

پس در این حالت حرکت (لحظه) لغزشی کامل می‌باشد ولی معمولاً همراه لغزشی غلتشی است.

حالت سوم:

اگر حالتی در حین حرکت دو جسم بوجود آید که مرکز آنی دوران دو جسم نسبت به یکدیگر بر نقطه تماس دو جسم منطبق شود در آن صورت حرکت دو جسم از نوع غلتشی کامل است.



داریم: $(\vec{V}_B)=(\vec{V}_A)$

از آنجا که $(\vec{V}_B)_n=(\vec{V}_A)_n$

لذا $(\vec{V}_B)_t=(\vec{V}_A)_t$

$\Leftarrow (\vec{V}_{A/B})=(\vec{V}_A)_t-(\vec{V}_B)_t=0$

فصل چهارم: بررسی جابجایی در مکانیزمها

در بررسی جابجایی در مکانیزمها یا ذره‌ای از یک عضو، معمولاً موقعیتی از یک مکانیزم را در نظر گرفته می‌شود که اصطلاحاً فاز نام دارد.

یک مکانیزم در طول یک سیکل حرکت خود از فازهای مختلفی عبور می‌کند که ممکن است مورد نظر باشند، لذا در بررسی جابجایی یک عضو یا ذره‌ای از آن لازم است تا فازهای مختلف حرکت بررسی شوند. برای منظور روشهای مختلفی وجود دارد که از آن جمله می‌توان موارد زیر را نام برد:

۱- روش ترسیمی

۲- روش جبری

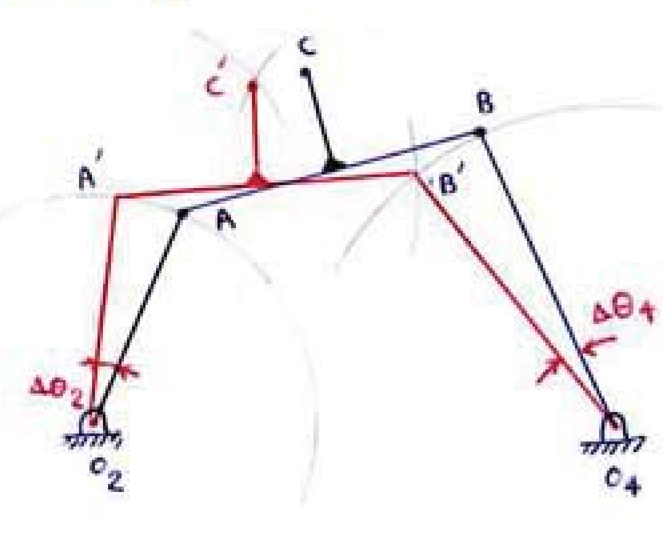
۳- روش برداری (دقیق)

۱- روش ترسیمی

روشی است که از طریق آن می‌توان موقعیت ذره یا عضوی را از فازی خاص از یک حرکت بدست آورد.

مثال: در مکانیزم زیر اگر عضو ② به میزان $\Delta\theta_2$ (CCW) بچرخد در آن صورت در اثر حرکت از اعضای دیگر و نیز موقعیت ذره C از عضو ③ را بیابید.

Counter clock wise

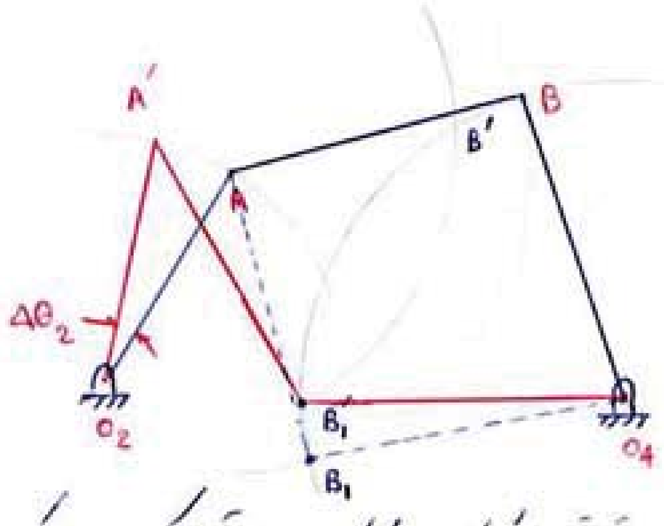


توجه شود که مسأله یک درجه آزادی است و با داشتن $\Delta\theta_2$ بقیه موارد قابل محاسبه اند.

مراحل کار:

- به اندازه O_2A پرگار را از نقطه O_2 می زنیم و با توجه به زاویه $\Delta\theta_2$ داده شده موقعیت A' حاصل می گردد.
- به اندازه O_4B پرگار را از O_4 می زنیم تا کمان مسیری نقطه B بدست آید.
- از A' به اندازه AB کمانی می زنیم تا کمان مسیری که مسیر حرکت B را قطع کند و این نقطه را B' می نامیم.
- با وصل کردن A' به B' موقعیت جدید مکانیزم مشخص می گردد.
- از C تا A و B یک فاصله وجود دارد، بنابراین در مکان جدید از A' و B' با طولهای AC و BC می زنیم و محل تقاطع نقطه C' است. از آن به $A'B'$ عمود می کنیم.

نکته: به ازای زاویه $\Delta\theta_2$ حالت دیگری نیز ممکن است اتفاق بیفتد. به شکل زیر توجه کنید.



به ازای $\Delta\theta_2$ داده شده دو موقعیت $A'B'$ و $A'B'_1$ بوجود آمد که هر دو امکان پذیر است.

از دو موقعیت آن یکی قابل قبول است که به حالت قبل نزدیک تر باشد. از این رو به این که مکانیزم ابتدا از نقطه B' می گذرد لذا همان مکانیزم قبلی از آن شده قابل قبول است.

اگر مکانیزم در حالت $O_2AB_1O_4$ به عنوان حالت ابتدایی باشد آنگاه مکانیزم $O_2A'B'_1O_4$ حالت نزدیکتر و قابل قبول می بود.

نکته :

۱- اگر لنگ رسم شده به مرکز جدید A (شکل A') برخلاف عقربه‌های ساعت حرکت B همان شود، در آن صورت منفی الحق حرکت اهرم ② به سمت چپ مشخص خواهد شد. تحت چنین شرایطی لنگ را ایستاده و شروع به حرکت در جهت عکس می‌نماید.

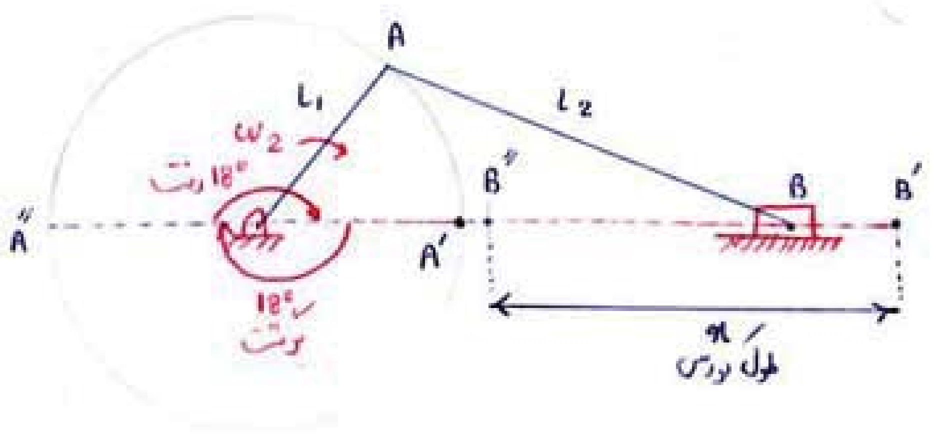
۲- اگر لنگ رسم شده به مرکز جدید A (شکل A') مسیر عقربه‌های حرکت B را قطع نکند، این بدان معنی است که آن موقعیت برای آن مکانیزم وجود ندارد.

- مکانیزم‌های بازگشت سریع (Quick Return mechanism)

از مکانیزم‌های با بازگشت سریع عموماً در ماشین‌های ابزار مثل صفحه تراش و اره‌های الکتریکی استفاده می‌گردد. این مکانیزم ضمن ثابت بودن سرعت زاویه‌ای لنگ، قادر است ابزار برش ماشین را که دارای حرکت رفت و آمدی است خیلی آرام به جلو برده ولی سریع به عقب برگرداند.

به طور کلی مکانیزم‌هایی هستند که نسبت زمان رفت به زمان بازگشت اهرم خروجی به موقعیت اولیه بزرگتر از یک باشد.

مثال : با فرض سرعت ثابت (ابتدای) اهرم ② (اهرم ورودی) آیا مکانیزم از نوع بازگشت سریع است یا خیر؟



$$x = L_1 \cos\theta_2 + L_2 \cos\beta$$

$$v = \dot{x} = -L_1 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - L_2 \dot{\beta} \sin\beta$$ معادله‌ی سرعت بلوک ۴ است.

از رابطه‌ی ۲ $\quad \Delta\theta_2 = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega t \quad$, $\alpha = 0$ اگر ω ثابت باشد آنگاه

داریم $\quad \Delta\theta_2 = \omega t$

$$(\Delta\theta_2)_{\text{رفت}} = \omega . t$$
$$(\Delta\theta_2)_{\text{برگشت}} = \omega . t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\theta_{2\,\text{رفت}}}{\Delta\theta_{2\,\text{برگشت}}} = \frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{برگشت}}}$$

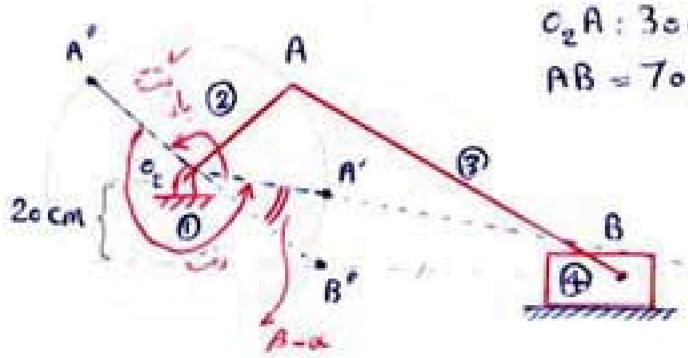
بنابراین با توجه به نسبت زاویه °۱۸۰ رفت به °۱۸۰ برگشت آنگاه $\frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{برگشت}}} = 1$ و مکانیزم از نوع بازگشت سریع نیست.

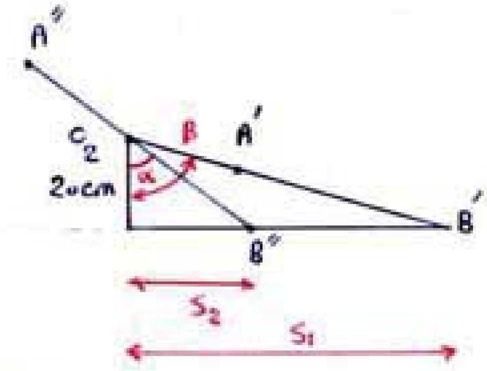
مثال: آیا مکانیزم زیر بازگشت سریع است یا خیر؟ نسبت زمان رفت به بازگشت را بیابید. همچنین طول کورس لغزنده را محاسبه نمایید.

ccw

$O_2A : 30\,cm$

$AB = 70\,cm$





$$S_1 = \sqrt{100^2 - 20^2} = 97.98$$
$$S_2 = \sqrt{40^2 - 20^2} = 34.64$$

$S_2 - S_1 = 63.33\ cm$
طول کورس لغزنده

$$\tan\alpha = \frac{34.64}{20} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$
$$\tan\beta = \frac{97.78}{20} \Rightarrow \beta = 78.46^\circ$$

$$\beta - \alpha = 18.46^\circ$$

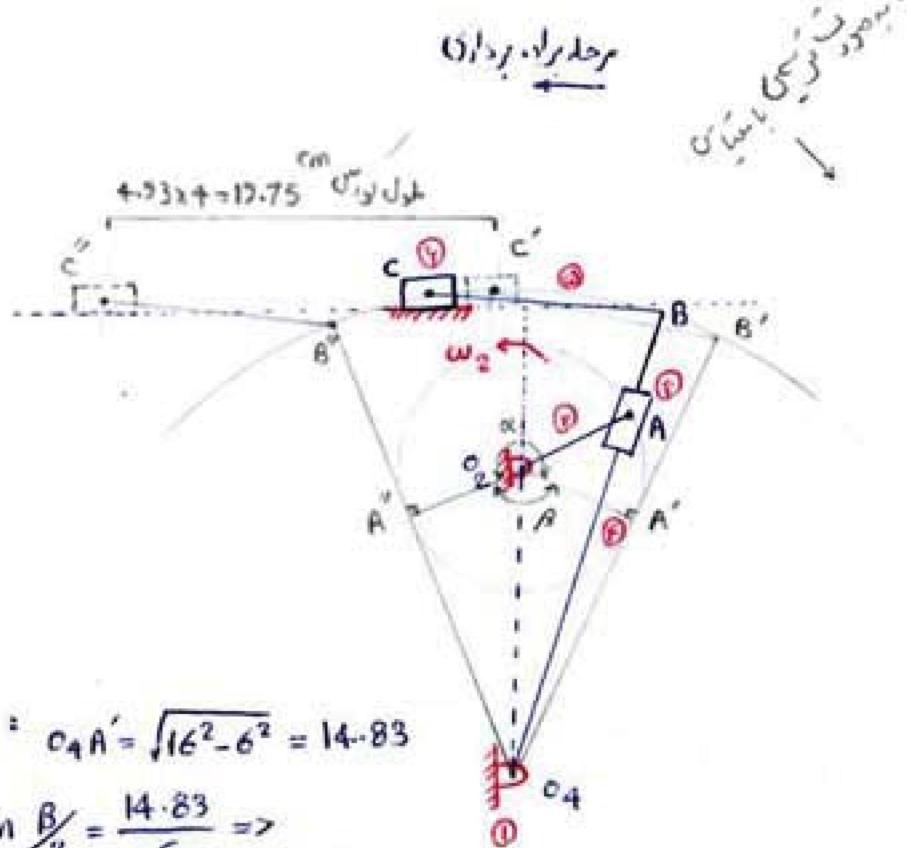
زاویه چرخش رفت $= 180^\circ + 18.46 = 198.46$

زاویه بازگشت $= 180^\circ - 18.46 = 161.54$

$$\frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{برگشت}}} = \frac{\Delta\theta_{\text{رفت}}}{\Delta\theta_{\text{برگشت}}} = \frac{198.46}{161.54} = 1.23$$

پس مکانیزم بازگشت سریع است.

تکلیف: برای مکانیزم زیر که در صنایع سنگ تراشی کاربرد دارد، مشخص کنید: الف) آیا مکانیزم بازگشت سریع است؟
ب) محاسبه طول کورس و ج) نسبت زمان رفت به زمان برگشت؟



$O_2O_4 = 16\,cm$
$O_2A = 6\,cm$
$O_4B = 26\,cm$
$BC = 12\,cm$
C تا $O_4 = 25\,cm$
مقیاس $1\,cm = 4\,cm$

$\overset{\Delta}{O_2A'O_4}$: $O_4A' = \sqrt{16^2-6^2} = 14.83$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{14.83}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{\beta}{2} = 67.77 \Rightarrow \beta = 135.95$$

$$\alpha = 360 - \beta = 224.05$$

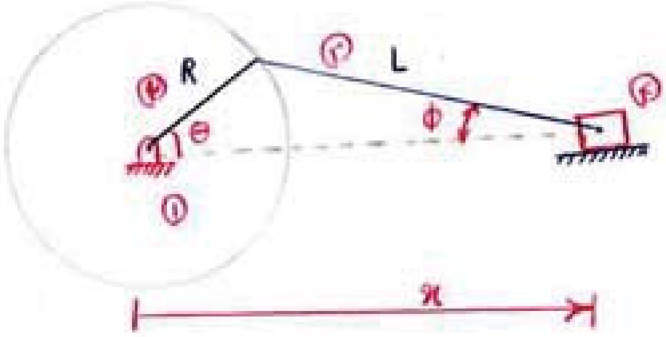
$$\frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{برگشت}}} = \frac{\Delta\theta_{\text{رفت}}}{\Delta\theta_{\text{برگشت}}} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{224.05}{135.95} = 1.64$$

مکانیزم بازگشت سریع است.

۲- روش جبری

روشی است که در آن از عبارات ریاضی برای تعیین موقعیت یک اجزا یا ذره‌ای از یک اجزا استفاده می‌شود. با بدست آوردن معادلات جبری این توابع جابجایی، سرعت و شتاب اجزای مکانیزم را تحلیل می‌نمود.

مثال: با در نظر گرفتن مکانیزم لنگ لغزنده در شکل زیر، معادلات مربوط به جابجایی، سرعت و شتاب لغزنده را به صورت تابعی از R و L و θ و ω بدست آورید. (فرض: ω ثابت است)



$$x = R\cos\theta + L\cos\phi \qquad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = -R\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} - L\sin\phi\,\frac{d\phi}{dt} \qquad (2)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (3)$$

$$\frac{\sin\theta}{L} = \frac{\sin\phi}{R} \Rightarrow \sin\phi = \frac{R}{L}\sin\theta \quad (4) \qquad \phi = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{R}{L}\sin\theta\right) \quad (5)$$

با مشتق گیری از (۴) $\Rightarrow \cos\phi\,\frac{d\phi}{dt} = \frac{R}{L}\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{R\omega\cos\theta}{L\cos\phi} \qquad (6)$

با جایگزینی ۳، ۴ و ۶ در (۲) $\Rightarrow V = \frac{dx}{dt} = -R\omega\left[\sin\theta + \cos\theta\tan\phi\right] \qquad (7)$

با مشتق گیری از (۷)

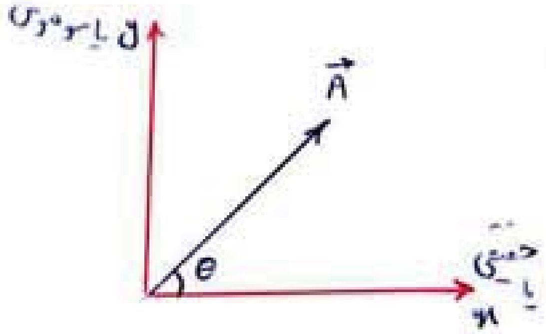
$$A = \frac{d^2x}{dt^2} = -R\omega\left[\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt} - \sin\theta\tan\phi\,\frac{d\theta}{dt} + \cos\theta \times \frac{1}{\cos^2\phi} \times \frac{d\phi}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow A = -R\omega^2\left[\cos\theta + \frac{R\cos^2\theta}{L\cos^3\phi} - \sin\theta\tan\phi\right]$$

۳- روش برداری (مختلط)

در این روش هر یک از اعضا به صورت برداری تعریف می‌شود، سپس با استفاده از عبارات جمع یا تفریق برداری مجهولات مسئله طوری که در مثال دیگر گفته خواهد شد تعیین می‌شوند.

قبل از ذکر مثال لازم به توضیح است که چنانچه بردار $\vec{A}$ به بزرگی A در جهتی مطابق شکل زیر باشد، آن بردار را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر نوشت:

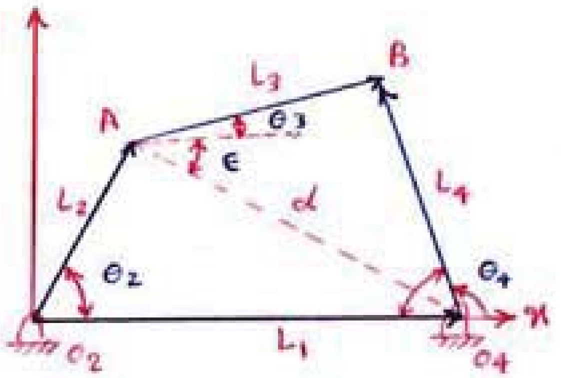


$$\vec{A} = Ae^{i\theta}$$

or

$$\vec{A} = A(\cos\theta + i\sin\theta)$$

مثال: در مکانیزم زیر موقعیت هر یک از اهرم‌های 3 و 4 را برحسب موقعیت اهرم 2 بیابید.



$$L_1 = L_1 e^{i(0)}$$

$$L_2 = L_2 e^{i(\theta_2)}$$

$$L_3 = L_3 e^{i(\theta_3)}$$

$$L_4 = L_4 e^{i(\theta_4)}$$

$$d = de^{i\epsilon}$$

از قبل می‌دانیم که اندازه d طول و وابسته به مقدار θ_2 می‌باشد و معلوم نیست:

$$d^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos\theta_2$$

با توجه به شکل داریم:

$$\vec{L_2} + \vec{d} = \vec{L_1}$$

$$L_2e^{i\theta_2} + de^{i\epsilon} = L_1 \quad \text{or} \quad L_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) + d(\cos\epsilon + i\sin\epsilon) = L_1$$

$$\Rightarrow (L_2\cos\theta_2 + d\cos\epsilon) + i(L_2\sin\theta_2 + d\sin\epsilon) = L_1$$

Real component : $L_2\cos\theta_2 + d\cos\epsilon = L_1 \Rightarrow d\cos\epsilon = L_1 - L_2\cos\theta_2$ ①

imaginary component : $L_2\sin\theta_2 + d\sin\epsilon = 0 \Rightarrow d\sin\epsilon = -L_2\sin\theta_2$ ②

تقسیم ۲ بر ۱ داریم $\Rightarrow \quad \tan\epsilon = \dfrac{-L_2\sin\theta_2}{L_1 - L_2\cos\theta_2} \Rightarrow \epsilon = \tan^{-1}\left(\dfrac{+L_2\sin\theta_2}{L_2\cos\theta_2 - L_1}\right)$

همچنین با توجه به شکل داریم: $\quad \vec{d} + \vec{L_4} = \vec{L_3}$

$$d e^{i\epsilon} + L_4 e^{i\theta_4} = L_3 e^{i\theta_3} \Rightarrow$$

$$(d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4) + i(d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4) = L_3\cos\theta_3 + iL_3\sin\theta_3$$

Real Component : $\quad d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4 = L_3\cos\theta_3 \quad$ ۳

imaginary component : $\quad d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4 = L_3\sin\theta_3 \quad$ ۴

از تقسیم ۴ بر ۳ داریم : $\quad \tan\theta_3 = \dfrac{d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4}{d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4} \Rightarrow \theta_3 = \tan^{-1}\left(\dfrac{d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4}{d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4}\right)$

همچنین داریم: $\quad \vec{L_2} + \vec{L_3} - \vec{L_1} = \vec{L_4} \quad$ یا $\quad \vec{L_2} + \vec{L_3} - \vec{L_4} = \vec{L_1}$

$$L_2 e^{i\theta_2} + L_3 e^{i\theta_3} - L_1 = L_4 e^{i\theta_4}$$

$$L_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) + L_3(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3) - L_1 = L_4(\cos\theta_4 + i\sin\theta_4)$$

Real Component : $\quad L_2\cos\theta_2 + L_3\cos\theta_3 - L_1 = L_4\cos\theta_4 \quad$ ۵

imaginary component : $\quad L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_3 = L_4\sin\theta_4 \quad$ ۶

از تقسیم ۶ بر ۵ داریم : $\quad \tan\theta_4 = \left(\dfrac{L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_3}{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos\theta_3 - L_1}\right) \Rightarrow \theta_4 = \tan^{-1}\left(\dfrac{L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_3}{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos\theta_3 - L_1}\right)$

با داشتن θ_2 و ϵ برحسب θ_2 مجهول θ_3 و θ_4 در هر لحظه ، با معلومات بدست می‌آیند.

فصل پنجم: بررسی سرعت در مکانیزم‌ها

(فصل ۵ و ۶ مارتین)

به منظور تعیین سرعت ذره‌ای از یک عضو یا سرعت زاویه‌ای عضوی خاص از یک مکانیزم روش‌های مختلفی وجود دارد که از آن جمله می‌توان موارد زیر را نام برد:

۱- روش مرکز آنی

۲- روش مؤلفه

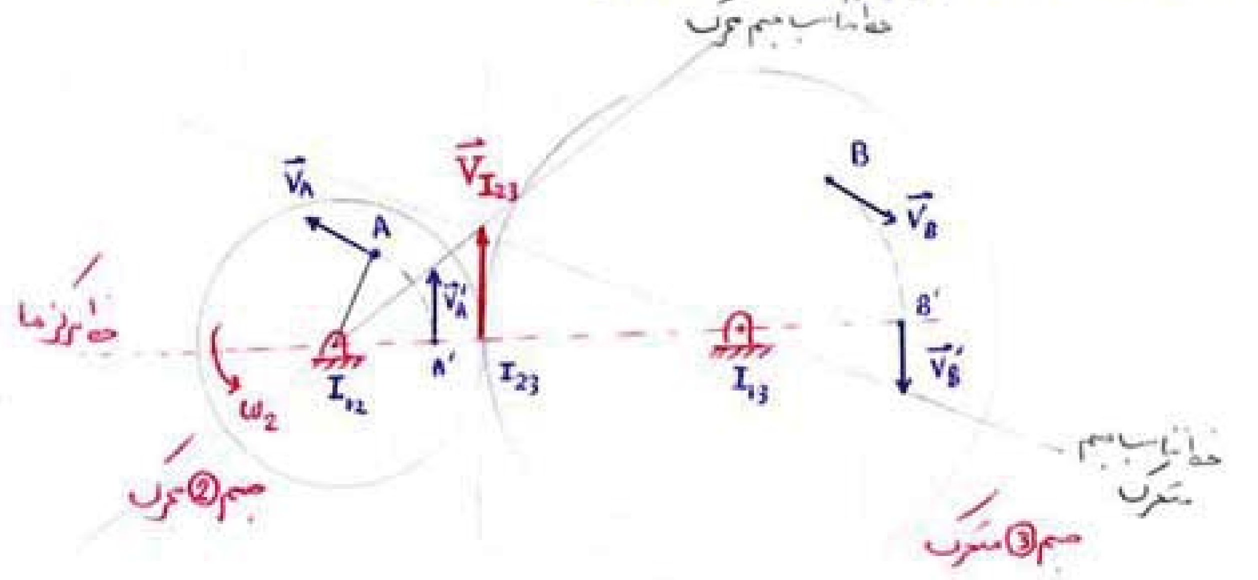
۳- روش خط موازی

۴- روش سرعت نسبی

۱- روش مرکز آنی

از این روش هم برای تعیین سرعت زاویه‌ای و هم تعیین سرعت خطی ذره‌ای از یک عضو استفاده می‌شود.

اگر در مکانیزم سرعت ذره‌ای مانند A از جسم متحرک معلوم باشد، می‌توان به شرح زیر سرعت ذره‌ای مانند B از جسم متحرک را مشخص نمود.



مراحل انجام کار :

۱- مراکز آنی جسم محرک نسبت به زمین (I_{12})، متحرک نسبت به زمین (I_{13}) و محرک نسبت به متحرک (I_{23}) را یافته به طوری مشخص می‌کنیم که این سه مرکز روی یک خط راست قرار دارند که همان خط مرکزها می‌باشد.

۲- از نقطه A که سرعت آن معلوم است به مرکز I_{12} کمانی رسم می‌کنیم به طوری که نقطه A و به تناسب آن سرعت V_A روی خط مرکزها منتقل شود. (A' و V_A')

۳- از I_{12} به نوک V_A' خطی رسم می‌کنیم تا خط تناسب سرعت جسم محرک حاصل شود

۴- از I_{23} عمود بر خط مرکزها رسم می‌کنیم تا خط تناسب جسم محرک را قطع کند، بدین ترتیب $V_{I_{23}}$ حاصل شود

۵- از I_{13} به نوک $V_{I_{23}}$ خطی رسم می‌کنیم تا خط تناسب جسم 3 (متحرک) حاصل شود.

۶- از مرکز I_{13} کمانی رسم می‌کنیم تا نقطه B را روی خط مرکزها منتقل کند (B')

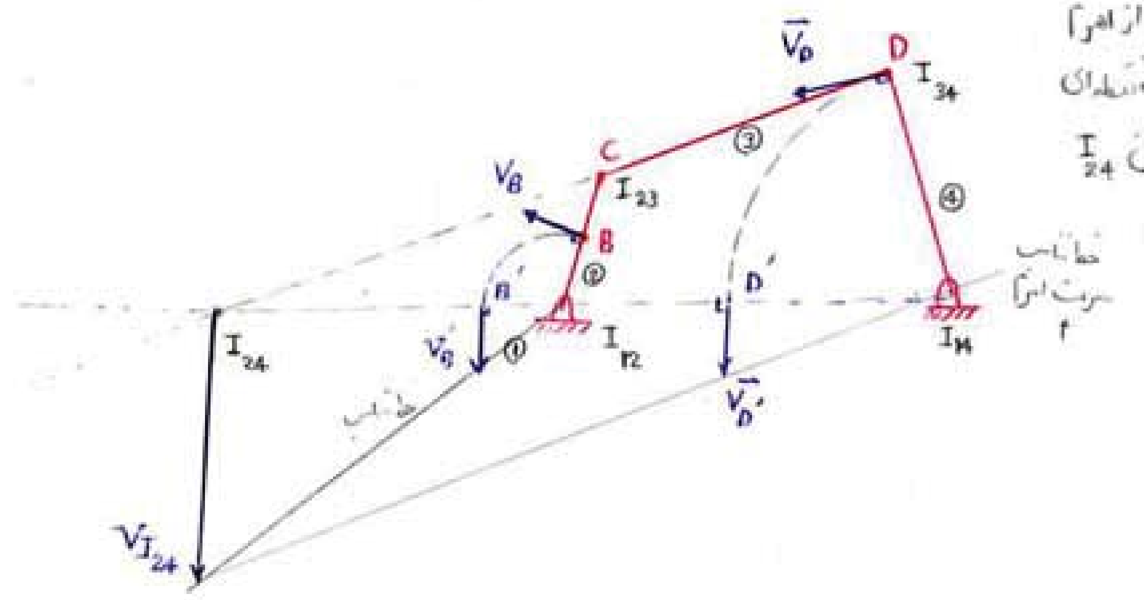
۷- از B' عمود بر خط مرکزها رسم کرده تا خط تناسب سرعت جسم متحرک را قطع کند، بدین ترتیب V_B' حاصل می‌شود.

۸- مجدداً به مرکز I_{13} کمانی رسم و $\vec{V_B'}$ از نقطه B' را به $\vec{V_B}$ در نقطه B منتقل می‌کنیم.

* نکته: در این تبدیل‌ها و برگرداندن‌ها رعایت دقیق زاویه و مقیاس الزامی است.

مثال : با توجه به شکل و داشتن سرعت نقطه B، سرعت نقطه D را بدست آورید.

چون می‌خواهیم سرعت نقطه‌ای از اهرم 4 را با توجه به معلوم بودن سرعت نقطه‌ای از اهرم 2 بدست آوریم، لذا یافتن I_{24} الزامی است.

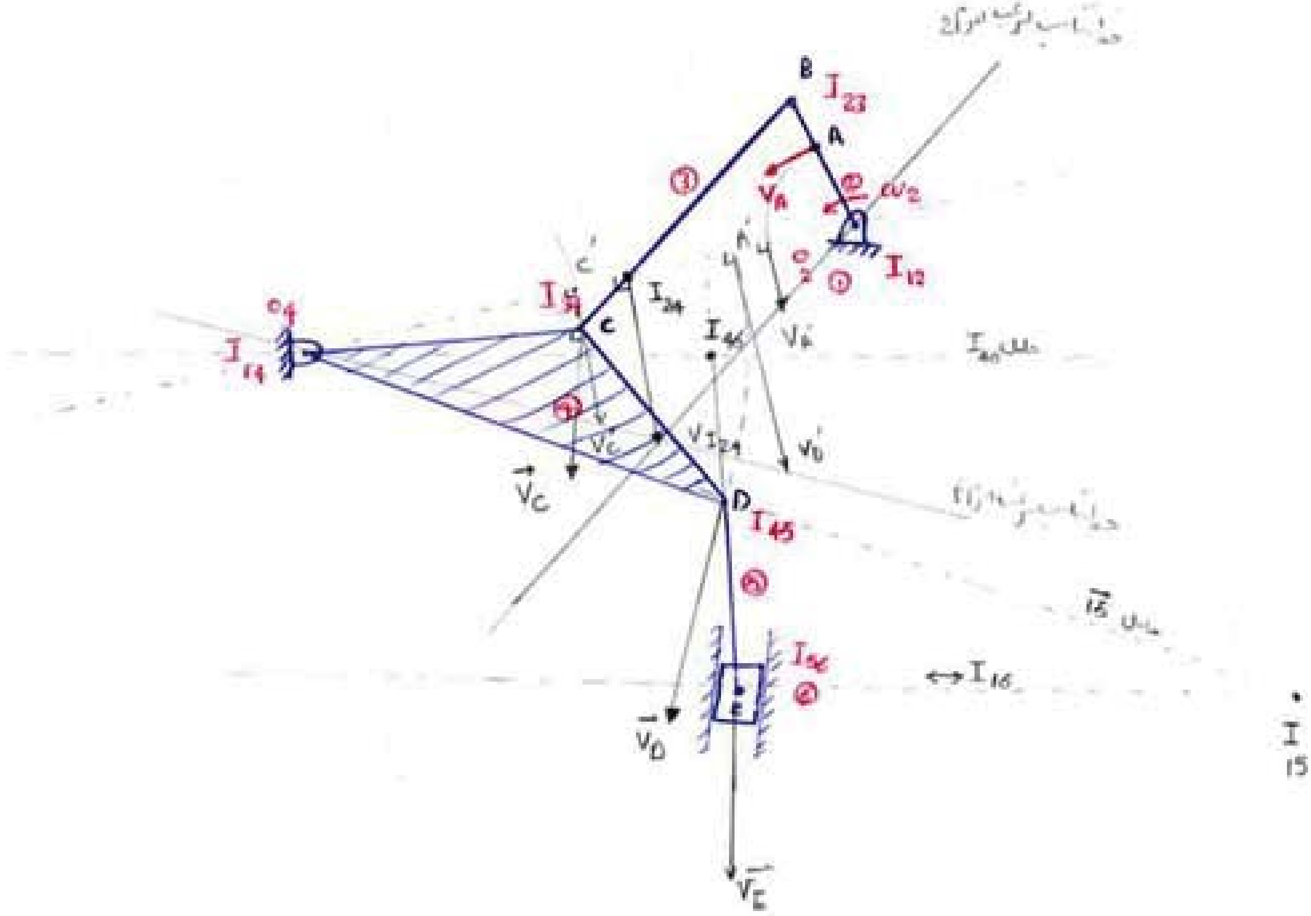


تکلیف ۸: در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه‌ای اهرم ② معلوم باشد، مطلوبست

الف) تعیین سرعت ذره A از این اهرم

ب) سرعت ذره C از اهرم 4 با استفاده از روش مرکز آنی

ج) تعیین سرعت خطی اهرم ۶ با معلوم بودن سرعت نقطه A



الف) $\vec{V}_A = (\overline{O_2A})\,\omega_2$

ب) جهت تعیین سرعت $\vec{V}_C$ از روش مرکز آنی استفاده می‌کنیم.

ج) جهت محاسبه $\vec{V}_E$ چند راه وجود دارد که یکی از آنها را بیان می‌کنیم.

ابتدا سرعت $\vec{V}_D$ محاسبه شده، سپس جهت محاسبه $\vec{V}_E$ مرکز آنی I_{15} با استفاده از $\overset{\triangle}{456}$ و $\overset{\triangle}{164}$

$$\vec{V}_E = \frac{\overline{I_{15}-E}}{\overline{I_{15}-I_{45}}}\,\vec{V}_D$$

تکلیف: با توجه به مکانیزم زیر ضمن تعیین کلیه مراکز آنی، اگر $V_A = 635\ \frac{mm}{s}$ و جهت چرخش ω_2 در جهت خلاف عقربه‌های ساعت باشد، V_D را به روش مراکز آنی تعیین کنید.

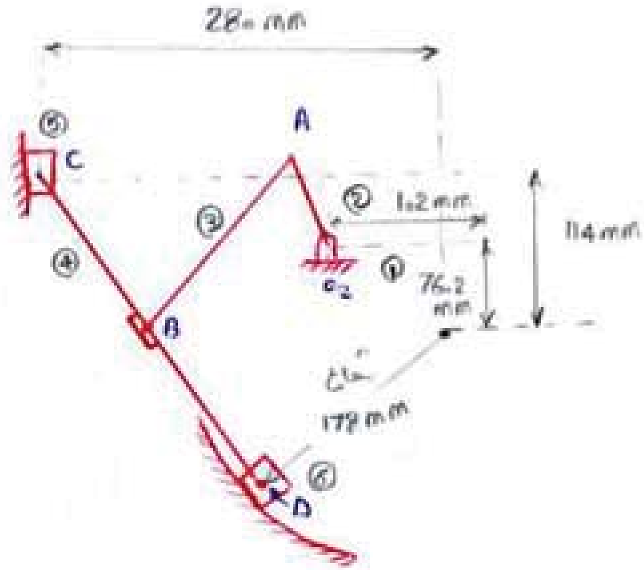
(حل صفحه ۲۹۲ مابیتول)

$O_2A = 76.2\ mm$

$AB = 178\ mm$

$CD = 305\ mm$

$CB = 152\ mm$



۲- روش مؤلفه (component method)

تجزیه و تحلیل سرعت مکانیزمها بوسیله مؤلفه‌ها عبارت است از تجزیه سرعت به مؤلفه‌های مناسب به نحوی که بتوان از روی آنها اتصالات و دوران میله‌های مختلف مکانیزم را بررسی نمود.

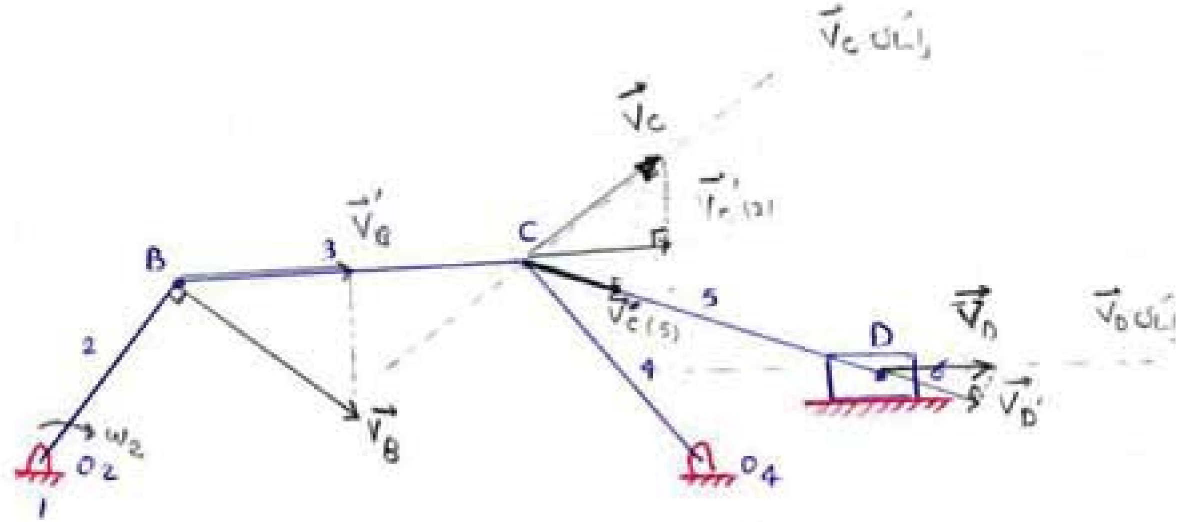
حالت الف) اگر سرعت ذره‌ای همانند A از جسم صلب معلوم باشد و راستای سرعت ذره‌ای دیگر همانند B از همان جسم نیز معلوم باشد می‌توان برای تعیین V_B به شرح زیر عمل کرد:

۱- ابتدا مؤلفه سرعت V_A را بر رابطه دو ذره تصویر می‌کنیم ($\vec{V}_A'$)

۲- $\vec{V}_B' = \vec{V}_A'$ در نقطه B را انتخاب می‌کنیم.

۳- عمود از نوک $\vec{V}_B'$ برابر بردار رسم کرده تا راستای سرعت B را قطع کند، بدین ترتیب $\vec{V}_B$ حاصل می‌شود.

مثال: با معلوم بودن w_2 سرعت نقاط C و D را بدست آورید.



حالت دوم: اگر سرعت ذره‌ای همانند A و B از جسم صلب معلوم باشد و بخواهیم سرعت ذره‌ای همانند C را که از آن چیزی نمی‌دانیم را تعیین کنیم به شرح زیر عمل می‌کنیم:

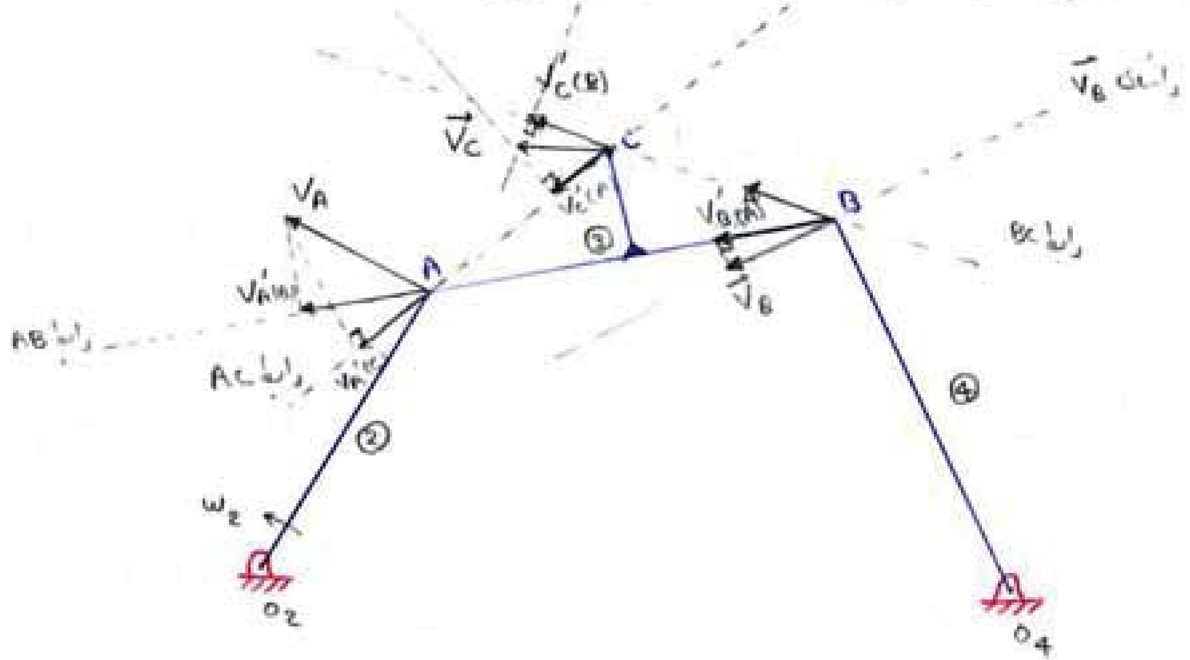
۱- مؤلفه سرعت V_A را بر رابطه AC تصویر می‌کنیم. (V_A')

۲- مؤلفه سرعت V_B را بر راستای BC تصویر می‌کنیم (V'_B)

۳- V'_B و V'_A را به نقطه C انتقال داده و عمود بر هر دو رسم کرده، امتداد $\vec{V}_C$ حاصل می‌شود.

نه بر آن‌ها بر نوک بردارها!!

مثال: با معلوم بودن ω_2 سرعت نقطه C از عضو 3 را بیابید.



حالت سوم: اگر سرعت ذره‌ای مانند A و B از جسم صلبی معلوم باشد و بخواهیم سرعت ذره‌ای مانند C روی راستای AB را بیابیم از روش زیر استفاده می‌کنیم.

۱- مؤلفه سرعت $\vec{V}_B$ را عمود بر راستای AB می‌یابیم.

۲- مؤلفه سرعت $\vec{V}_A$ را عمود بر راستای AB می‌یابیم.

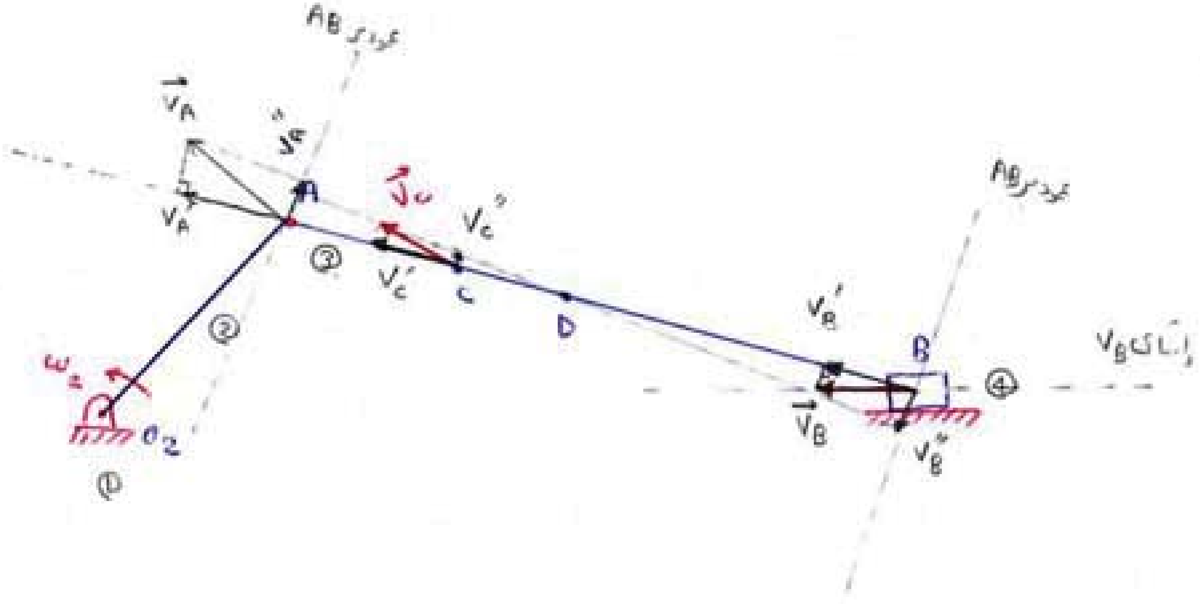
۳- خطی از نوک V''_A و V''_B رسم کرده تا در نقطه D با خط مورد نظر (AB) برخورد کند.

۴- از نقطه C عمود بر AB رسم کرده تا خط حاصل از بند ۳ را قطع کند ($\vec{V}''_C$ حاصل می‌شود)

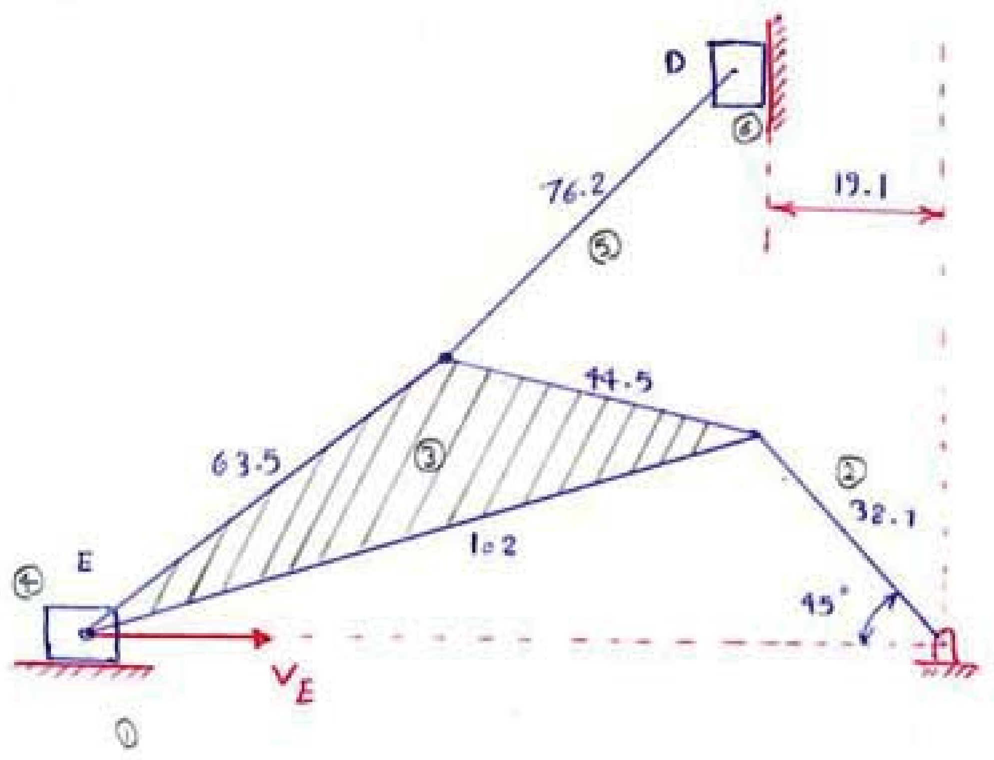
۵- $\vec{V}'_C$ را از $\vec{V}'_A$ می‌یابیم.

۶- جمع برداری $\vec{V}'_C$ و $\vec{V}''_C$ مقدار $\vec{V}_C$ را معین می‌کند.

مثال: با معلوم بودن ω_2 سرعت نقطه c را تعیین کنید.



تکلیف: سرعت نقطه E در شکل زیر را $4.57\ \frac{m}{s}$ می باشد. با استفاده از روش مؤلفه سرعت زاویه‌ای ω_2 و سرعت $\vec{V}_D$ را بیابید.



۲- روش خط موازی

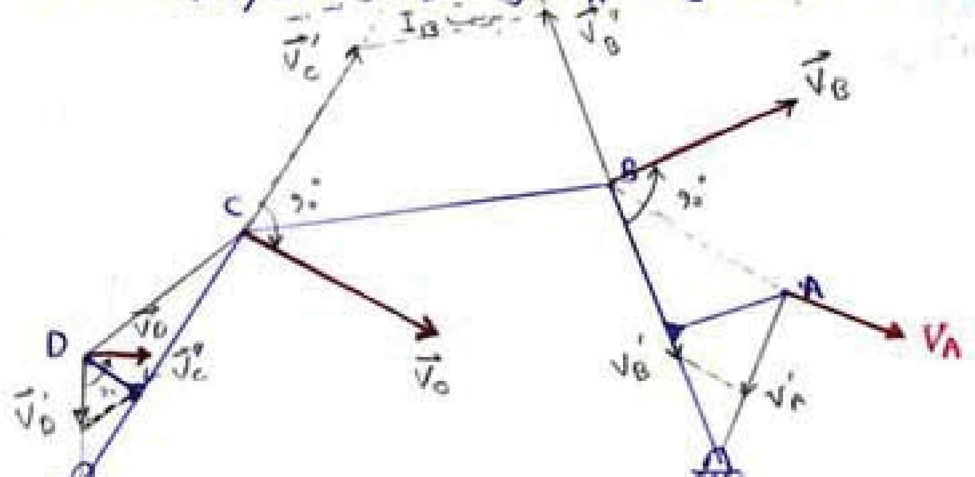
اگر دو ذره A و B بر جسم صلبی واقع باشند و سرعت جسم A معلوم و راستای رابط آن ذرات به مرکز آنی دوران آن جسم نسبت به زمین معلوم باشد (به علت دوری نقطه مرکز آنی پیدا نیست) می توان به روش زیر سرعت نقطه B را یافت.

۱- بردار $\vec{V}_A$ را به اندازه ۹۰ درجه می چرخانیم تا بر رابط آن ذره و مرکز آنی سرعت منطبق گردد، واقع گردد. (V'_A به سمت مرکز آنی)

۲- از نوک $\vec{V}'_A$ موازی خط AB رسم کرده تا رابط ذره B و مرکز آنی جسم نسبت به زمین را در B' قطع کند.

۳- $\vec{V}'_B$ را ۹۰ درجه برمی گردانیم (خلاف جهت چرخش قبلی) تا $\vec{V}_B$ حاصل شود.

مثال ۵: با معلوم بودن سرعت V_A سرعت V_D را بیابید. (روش خط موازی)



۴- روش سرعت نسبی

روش سرعت نسبی بدان دلیل حائز اهمیت است که بدین وسیله می‌توان به طور همزمان سرعت ذرات و سرعت زاویه‌ای اجسام را پیدا نمود. همانطور که می‌دانیم اگر دو ذره بر جسم صلبی قرار داشته باشند می‌توان نوشت:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \qquad (1)$$

و به جای $\vec{V}_{A/B}$ در رابطه می‌توان نوشت:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \qquad (2)$$

که راستای آن عمود بر خط رابط AB و مقدار آن برابر $\overline{AB}\omega$ می‌باشد.

رابطه (2) زمانی صادق است که A و B متعلق به یک جسم صلب باشند.

مراحل انجام کار:

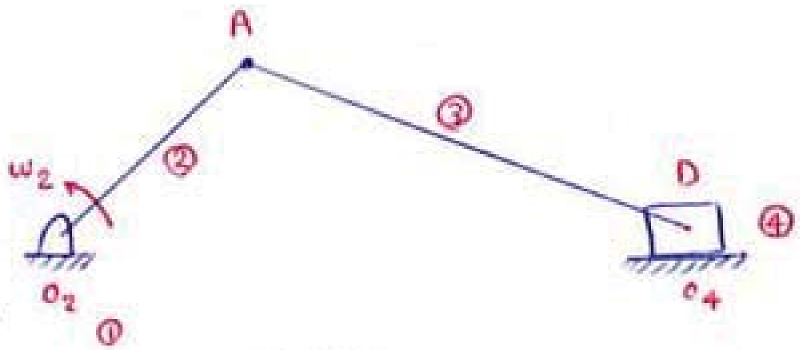
۱- ابتدا نقطه‌ای را به عنوان قطب سرعت در صفحه مشخص می‌کنیم.

۲- از قطب سرعت برداری هم‌سنگ $\vec{V}_B$ رسم می‌کنیم تا نقطه B به دست آید.

۳- می‌دانیم $\vec{V}_{A/B} = \overline{AB}\omega$ عمود بر $\overline{AB}$ است. در جهت عمود بر $\overline{AB}$ از نوک A و متناسب با جهت ω و به بزرگی $\overline{AB}\omega$ رسم می‌کنیم و نقطه به دست آمده را A می‌نامیم.

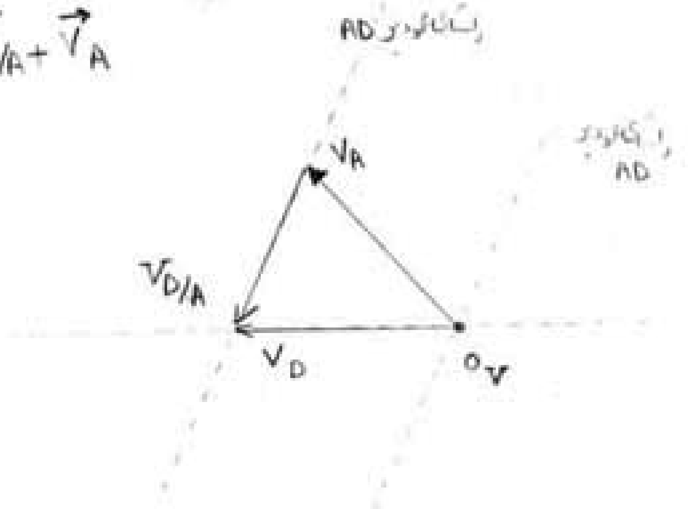
۴- رابطه O_v به A معرف $\vec{V}_A$ است.

مثال: در مکانیزم زیر با معلوم بودن ω_2 با استفاده از روش سرعت نسبی سرعت زاویه‌ای اهرم 3 و سرعت لولا شماره 4 را بیابید.



$$\overset{\surd -}{\overrightarrow{V_D}} = \overset{\surd -}{\overrightarrow{V_{D/A}}} + \overset{\surd\surd}{\overrightarrow{V_A}}$$

$V_A = \overline{O_2A}\,\omega_2$ معلوم است.



راستای حرکت عضو 4

سؤال:

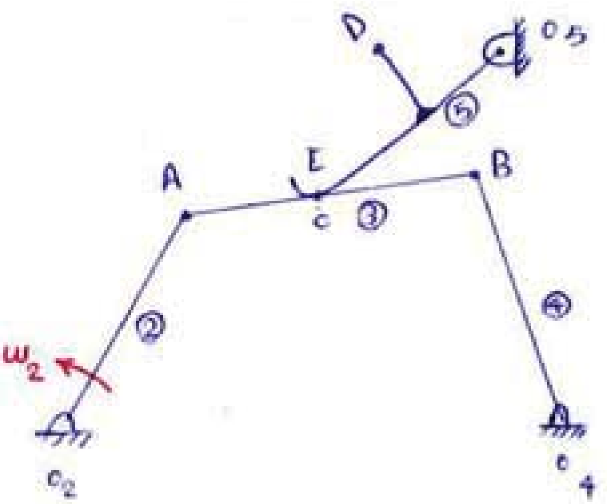
چرا $\overrightarrow{V_D}$ الزاماً از O_V باید عبور کند؟

دقت شود که هر برداری که از O_V رسم شود سرعت مطلق و هر برداری بین دو نقطه به غیر از قطب سرعت باشد، بیانگر سرعت نسبی بین آن دو نقطه است.

سرعت لینک 4 ⟵ $\overrightarrow{V_D}$

سرعت زاویه‌ای ω_3 ⟵ $\omega_3 = \dfrac{\overrightarrow{V_{D/A}}}{\overline{AD}}$

مثال: در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه‌ای عضو 2 معلوم باشد، سرعت نقطه D از عضو 5 را بیابید.



D در واقع روی عضو 5 می‌باشد.

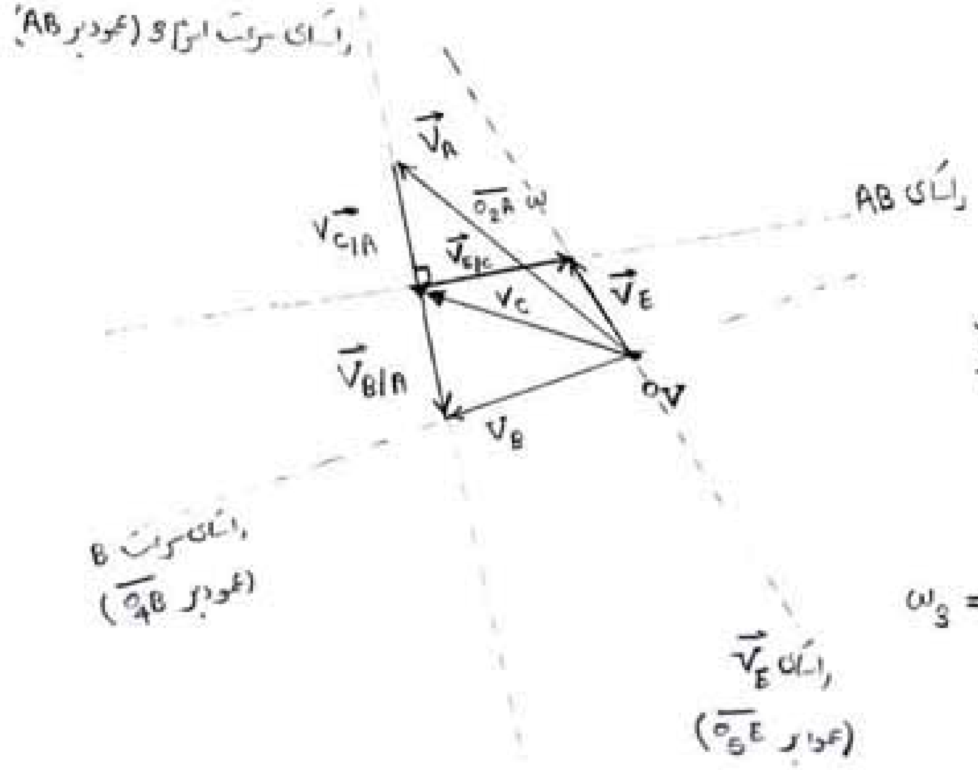
با داشتن ω_5 و با معلوم بودن فاصله $\overline{O_5D}$ سرعت $\overrightarrow{V_D}$ تعیین می‌گردد.

پس هدف تعیین ω_5 است که جهت بدست آوردن آن محاسبه سرعت V_E الزامیست.

مفصل بین اهرم 5 و اهرم 3 با اتصال نقاط E و C از چه نوعی است؟

چون راستای خط واصل بین آن‌ها تغییری نمی‌کند مفصل لغزشی - غلتشی است. پس

$$\vec{V}_E = \vec{V}_{E/C} + \vec{V}_C$$



برای A :

اندازه: $V_A = \overline{O_2A}\,\omega_2$

جهت: عمود بر $\overline{O_2A}$

برای AB :

$$\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_A} + \overset{-\checkmark}{\vec{V}_{B/A}} = \overset{-\checkmark}{\vec{V}_B}$$

با معلوم شدن $\vec{V}_{B/A}$ داریم $\omega_3 = \dfrac{\vec{V}_{B/A}}{\overline{AB}}$

به این ترتیب برای نقطه C داریم:

$$\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_A} + \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_{C/A}} = \overset{--}{\vec{V}_C}$$

با توجه به معلوم بودن $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_{C/A}$ اندازه $\vec{V}_C$ معلوم می‌شود.

می‌دانیم که با توجه به لغزشی - غلتشی بودن مفصل بین E و C اندازه سرعت نسبی در راستای خط مماس یعنی در راستای AB است.

$$\overset{\checkmark-}{\vec{V}_E} = \overset{\checkmark-}{\vec{V}_{E/C}} + \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_C}$$

با معلوم شدن $\vec{V}_E$ داریم $\omega_5 = \dfrac{\vec{V}_E}{\overline{O_5E}}$

اندازه: $\underline{V_D = \overline{O_5D}\,\omega_5}$ و ساعتگرد CW است.

فصل هشتم : بررسی شتاب در مکانیزم‌ها

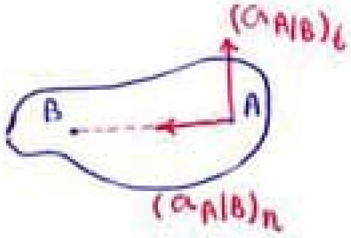
(فصل ۷ مابی)

اگر دو ذره مانند A و B در جسم صلبی قرار داشته باشند در آن صورت رابطه بین شتاب آن دو ذره بصورت زیر است :

$$\vec{a}_{A/B} + \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

$$(\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t + \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

برای شتاب ۲ مؤلفه عمودی و مماسی به شکل زیر تعریف می‌شوند :

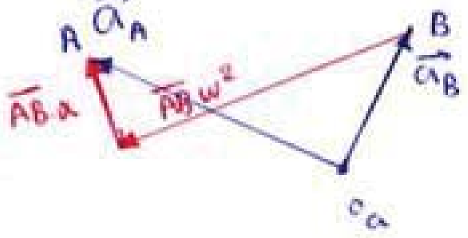


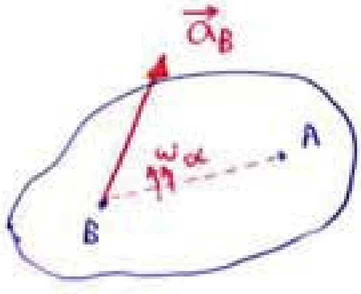
$(\vec{a}_{A/B})_n = \overline{AB}\,\omega^2$ از A به سمت B

$(\vec{a}_{A/B})_t = \overline{AB}\cdot\alpha$ عمود بر $\overline{AB}$

پس اگر در جسم صلبی شتاب نقطه‌ای مانند B معلوم باشد و سرعت و شتاب زاویه‌ای آن جسم صلب نیز مشخص باشد، برای تعیین شتاب ذره‌ای مانند A به شرح زیر عمل می‌کنیم.

۱- نقطه‌ای را به عنوان قطب شتاب (O_a) انتخاب می‌کنیم و تمام بردارهای مطلق شتاب از این نقطه رسم می‌شوند و خطوط بین سر این نقاط در دیاگرام شتاب نشان دهنده شتابهای نسبی بین دو نقطه مذکور است.





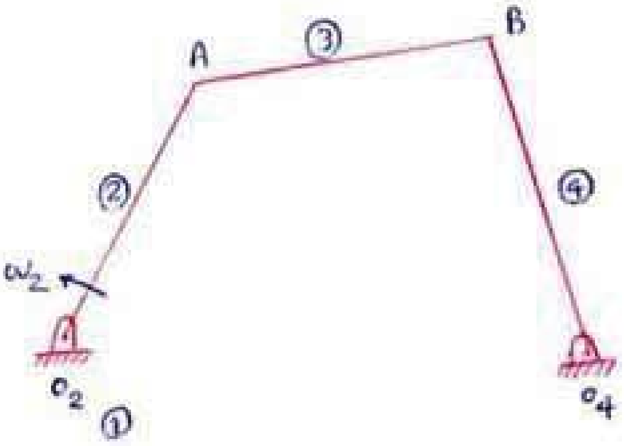
۲- از قطب شتاب برداری با مشخص $\vec{a}_B$ رسم نموده و انتهای آن را B می‌نامیم.

۳- از نقطه B بردار $(a_{A/B})_n$ را به بزرگی $\overline{AB}\,\omega^2$ و از A به سمت B رسم می‌کنیم.

۴- از نوک این بردار $(a_{A/B})_t$ را برداری به بزرگی $AB\alpha$ رسم می‌کنیم و انتهای آن را A می‌نامیم.

۵- رابط o_a به انتهای بردار مذکور (نقطه A) معرف شتاب A است. ($\vec{a}_A$)

مثال: در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه‌ای اهرم 2 ثابت و برابر ω_2 باشد، شتاب زاویه‌ای اهرم ۴ را بیابید.

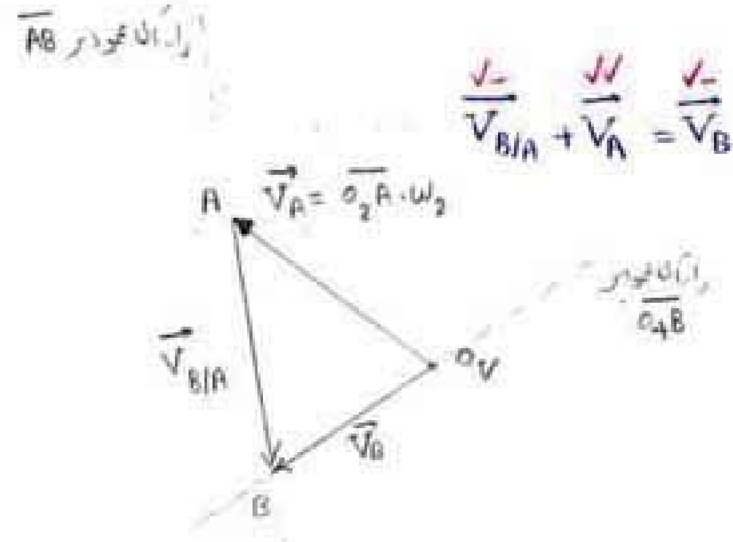


حل:

بررسی سرعت‌ها:

برای اهرم 3 داریم:

$$\vec{V}_{B/A}+\vec{V}_A=\vec{V}_B$$



$$\omega_3=\frac{V_{B/A}}{\overline{AB}}\quad cw\quad \text{معلوم}$$

$$\omega_4=\frac{V_B}{\overline{O_4B}}\quad ccw\quad \text{معلوم}$$

بررسی شتاب‌ها:

برای اهرم 3 داریم:

$$\vec{a}_{B/A}+\vec{a}_A=\vec{a}_B$$

$$(\vec{a}_{B/A})_t+(\vec{a}_{B/A})_n+(\vec{a}_A)_t+(\vec{a}_A)_n=(\vec{a}_B)_n+(\vec{a}_B)_t$$

P-55

$(\vec{a}_{B/A})_t = \overline{AB} \cdot \alpha_3$ عمود بر AB

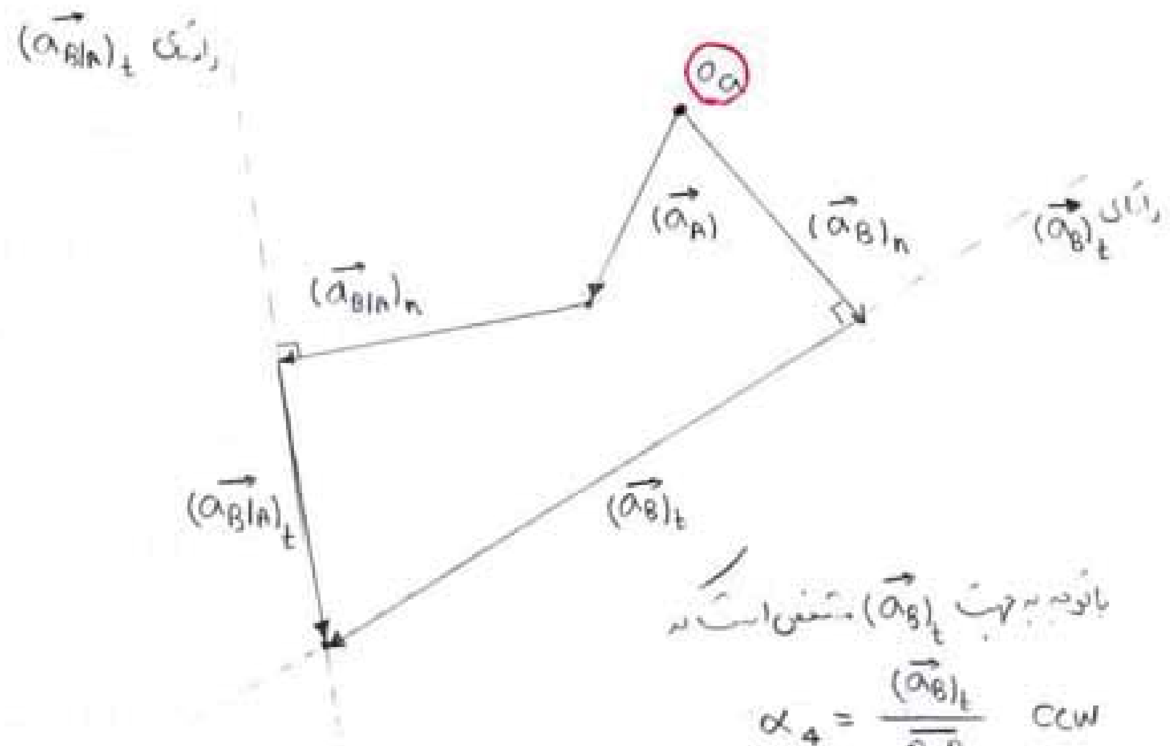
$(\vec{a}_{B/A})_n = \overline{AB} \cdot \omega_3^2$ حامل (از B به A)

$(\vec{a}_A)_t = \overline{O_2A} \cdot \alpha_2 = 0$ برابر

$(\vec{a}_A)_n = \overline{O_2A} \cdot \omega_2^2$ حامل (از A به O_2)

$(\vec{a}_B)_t = \overline{O_4B} \cdot \alpha_3$ عمود بر $\overline{O_4B}$

$(\vec{a}_B)_n = \overline{O_4B} \cdot \omega_4^2$ حامل (از B به O_4)

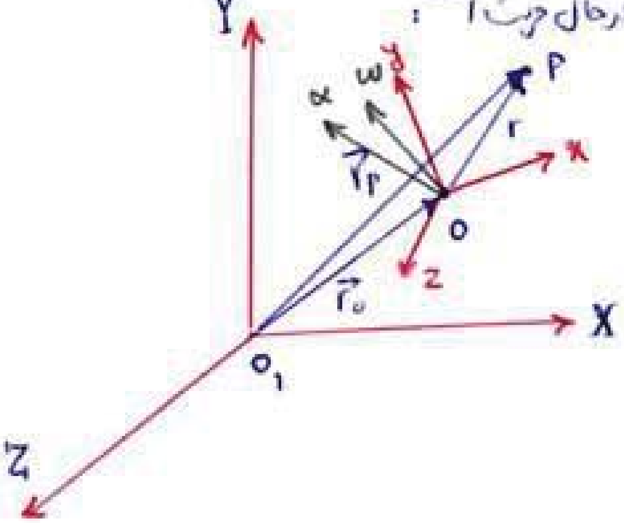


با توجه به جهت $(\vec{a}_B)_t$ مشخص است که

$$\alpha_4 = \frac{(\vec{a}_B)_t}{\overline{O_4B}} \quad \text{CCW}$$

شتاب کوریولیس :

فرض کنیم یک نقطه P در دستگاهی که به طور کلی در حال حرکت است :



✓ محور مختصات ثابت : X-Y-Z

✓ محور مختصات متحرک : x-y-z (دوران + انتقال)

✓ بردارهای یکه در راستای x و y و z : $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$

✓ مبدأ مختصات ثابت : O_1

✓ مبدأ مختصات متحرک : O

✓ موقعیت ذره P نسبت به محور متحرک : $\vec{r}$

✓ موقعیت ذره P نسبت به محور ثابت : $\vec{r}_P$

✓ موقعیت مبدأ مختصات متحرک نسبت به مبدأ مختصات ثابت : $\vec{r}_o$

✓ سرعت و شتاب زاویه‌ای محور مختصات متحرک : $\vec{\alpha}$ و $\vec{\omega}$

نکته : وقتی دستگاه مختصات دارای حرکت دورانی باشد آنگاه مشتق زمانی $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ غیر صفر شود .

$$\vec{r}_P = \vec{r}_o + \vec{r} \qquad (1)$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

در دوران مانند x و y و z و همچنین i و j و K نسبت به زمان متغیر است

$$\vec{V}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

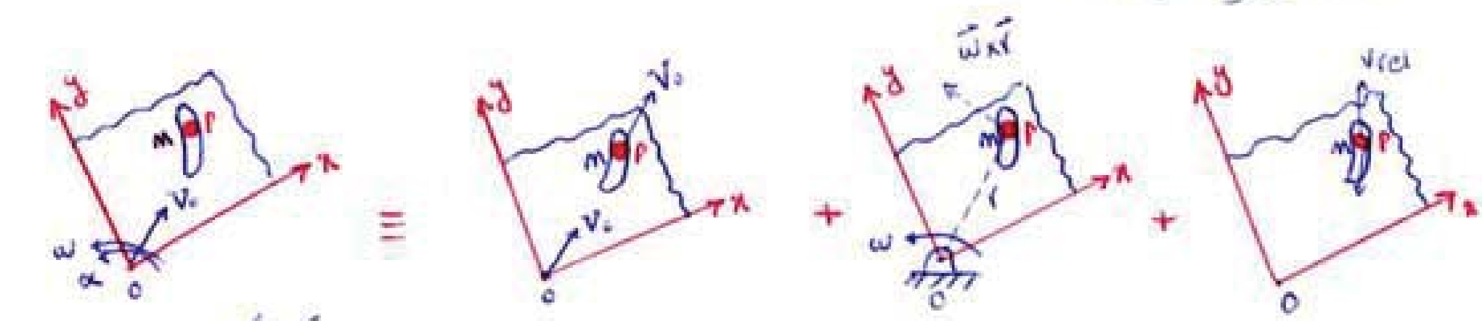
$$\vec{V}_P = \vec{V}_o + \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_o + \underbrace{(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k})}_{\vec{V}_{P/oxyz} = V_{Releativ} = \vec{V}_{rel}} + (x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} + z\dot{\hat{k}})$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\hat{i}} &= \vec{\omega} \times \hat{i} \\ \dot{\hat{j}} &= \vec{\omega} \times \hat{j} \\ \dot{\hat{k}} &= \vec{\omega} \times \hat{k} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \vec{V}_P = \vec{V}_o + \vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{V}_P = \vec{V}_o + \vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}} \qquad (2)$$

توجیه فیزیکی رابطه (2) :



$$\vec V_m = \vec V_0 + \vec\omega \times \vec r$$
$$\vec V_P = \vec V_0 + \vec\omega \times \vec r + \vec V_{rel}$$
$$\vec V_{P/m} = \vec V_P - \vec V_m = \vec V_{rel}$$

برای محاسبه شتاب ذره P از رابطه ② نسبت به زمان مشتق می‌گیریم :

$$\vec a_P = \frac{d\vec V_P}{dt} = \frac{d\vec V_0}{dt} + \frac{d}{dt}(\overbrace{\dot x\hat i + \dot y\hat j + \dot z\hat k}^{V_{rel}}) + \frac{d}{dt}(\vec\omega \times \vec r)$$

$$\vec a_P = \vec a_0 + (\underbrace{\ddot x\hat i + \ddot y\hat j + \ddot z\hat k}_{\vec a_{rel}}) + (\underbrace{\dot x\dot{\hat i} + \dot y\dot{\hat j} + \dot z\dot{\hat k}}_{\omega\times\vec V_{rel}}) + \vec\alpha \times \vec r + \vec\omega \times \underbrace{\frac{d\vec r}{dt}}_{\vec\omega\times\vec r + \vec V_{rel}}$$

$$\vec a_P = \vec a_0 + \vec a_{rel} + \vec\alpha \times \vec r + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r) + \underbrace{2\vec\omega \times \vec V_{rel}}_{\text{شتاب کوریولیس}} \qquad (3)$$

توجیه فیزیکی رابطه (3) :

جمله شتاب کوریولیس ظاهر شده، پس توجیه فیزیکی ندارد. اگر جسمی روی جسم دیگری که ω دارد حرکت نسبی داشته باشد، کوریولیس داریم.

$$\vec{a}_m = \vec{a}_o + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_o + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{a}_{rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel}$$

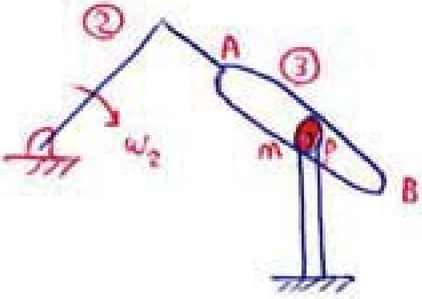
$$\vec{a}_{P/m} = \vec{a}_P - \vec{a}_m = \vec{a}_{rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel}$$

روش‌های دیگری نیز جهت بررسی شتاب وجود دارد که در اینجا مورد بررسی قرار نمی‌گیرند. از جمله روش ترسیمی هارتمن و رابطه اویلر-ساواری (Euler-Savary)

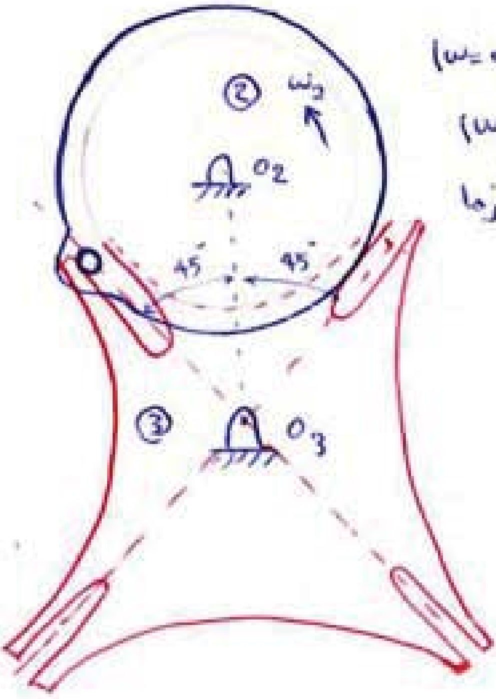
چند نکته مهم :

۱- شتاب کوریولیس داریم برابر است با

$2\omega_3 \times V_{rel}$



۲- هرجا ω یا V_{rel} صفر شود شتاب کوریولیس هم برابر صفر خواهد شد. مثل چرخ ژنوا در سه حالت زیر: (چرخ ژنوا)



۱- موقع ورود پین به شیار ($\omega=0$)

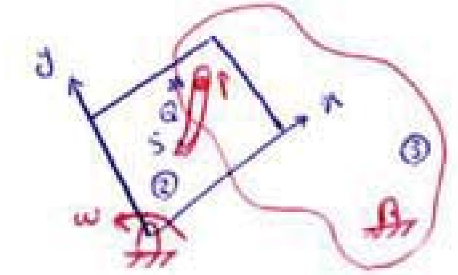
۲- موقع خروج پین از شیار ($\omega_3=0$)

۳- موقعی که پین در راستای خط مرکزها قرار می‌گیرد ($\vec{V}_{rel}=0$)

۳- اگر حرکت در صفحه در نظر گرفته شود جهت شتاب کوریولیس به صورت زیر تعیین می‌شود

«جهت سرعت نسبی را ۹۰ درجه در جهت چرخش ω می‌چرخانیم»

P-59

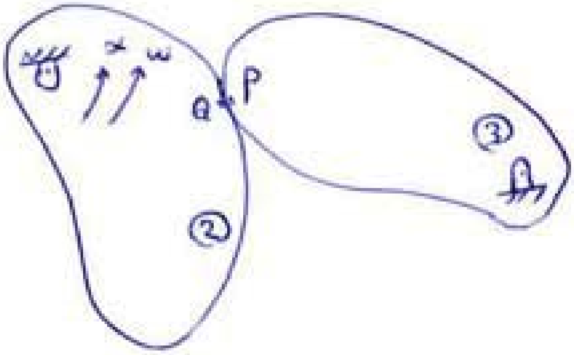


۴- نقطه P عضوی از عضو 3 است و در لحظه اول در تماس با m1 بعد با Q و بعدی می‌باشد.

شتاب کوریولیس $2\,\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{rel}$

((ω_2 غلط ، ω_3 صحیح))

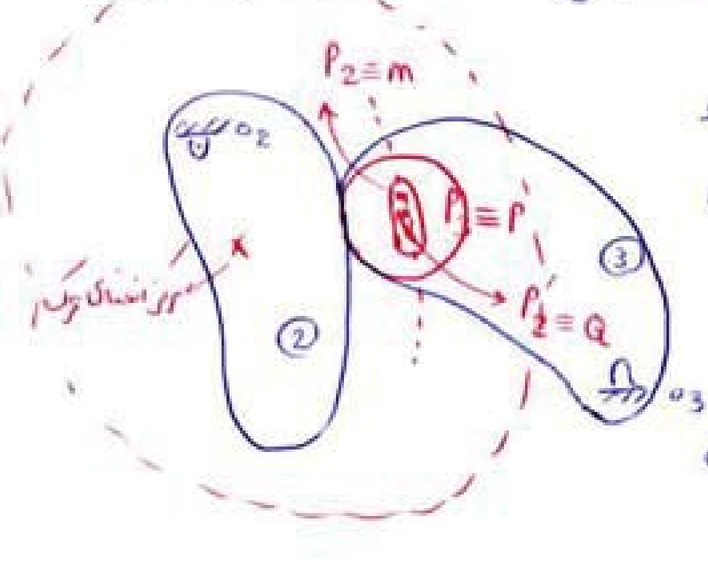
اما



نقطه P و Q سرعت نسبی $\vec{V}_{rel}$ دارند و جسم مرجع دارای ω_2 است اما شتاب کوریولیس از رابطه $2\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{P/Q}$ حاصل نمی‌شود، زیرا نقطه P از جسم 3 و نقطه Q از جسم 2 دائما عوض می‌شوند. در صورتیکه باید P یک نقطه ثابت از عضو 3 باشد.

راه حل:

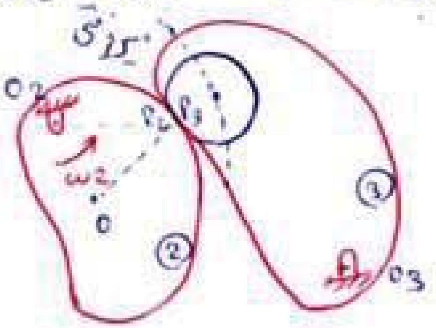
در محل تماس دو جسم ② و ③ یک مرکز انحنا به دست می‌آوریم (از جسم ② مرجع است و دایره روی ③ در نظر گرفته می‌شود). جسم ② را بزرگتر فرض می‌کنیم به طوری که شامل دایره روی آن است که مرکز انحنا روی آن حرکت می‌کند. مطابق با انحنای جسم مرجع از آن مرکز انحنا رسم می‌کنیم.



مرکز انحنا همان نقطه مطلوب ما یعنی P است و نقاط Q و m محل تماس نقطه P در دو لحظه متوالی با جسم 2 است.

شتاب کوریولیس : $2\,\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{P_3/P_2}$

مثال: در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه‌ای عضو ② ثابت و برابر ω_2 باشد، شتاب زاویه‌ای عضو ③ را بیابید.



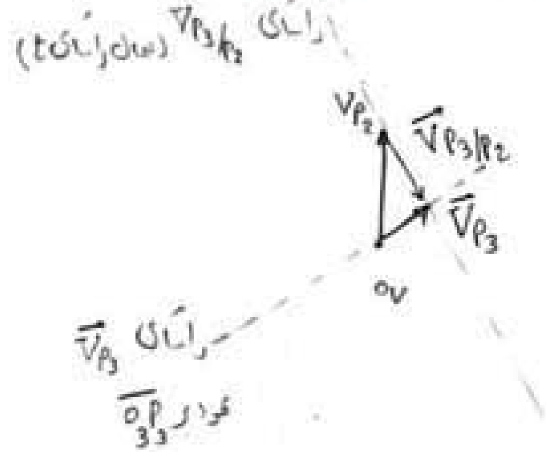
ابتدا باید سرعت V_{P_3/P_2} را حساب کنیم:

$$\overrightarrow{V}_{P_3/P_2} = \overrightarrow{V}_{P_3} - \overrightarrow{V}_{P_2}$$

$\overrightarrow{V}_{P_3/P_2}$: مماس بر سیرزنی یا در راستای t

$\overrightarrow{V}_{P_3}$: عمود بر $\overline{O_3P_3}$

$\overrightarrow{V}_{P_2}$: عمود بر $\overline{O_2P_2}$



$$\omega_3 = \frac{|\overrightarrow{V}_{P_3}|}{\overline{O_3P_3}} \quad CW$$

بررسی شتاب‌ها:

$$\overrightarrow{a}_{P_3/P_2} = \overrightarrow{a}_{P_3} - \overrightarrow{a}_{P_2} = \overrightarrow{a}_{rel} + 2\overrightarrow{\omega}_2 \times \overrightarrow{V}_{rel}$$

$$(\overrightarrow{a}_{P_3})_t + (\overrightarrow{a}_{P_3})_n = \cancel{(\overrightarrow{a}_{P_2})_t} + (\overrightarrow{a}_{P_2})_n + (\overrightarrow{a}_{rel})_t + (\overrightarrow{a}_{rel})_n + 2\overrightarrow{\omega}_2 \times \overrightarrow{V}_{rel}$$

$(\overrightarrow{a}_{P_3})_t$: $\overline{O_3P_3} \cdot \alpha_3$ عمود بر $\overline{O_3P_3}$

$(\overrightarrow{a}_{P_3})_n$: $\overline{O_3P_3}\,\omega_3^2$ از P_3 به O_3

$(\overrightarrow{a}_{P_2})_t$: $O_2P_2 \cdot \alpha_2 = 0$

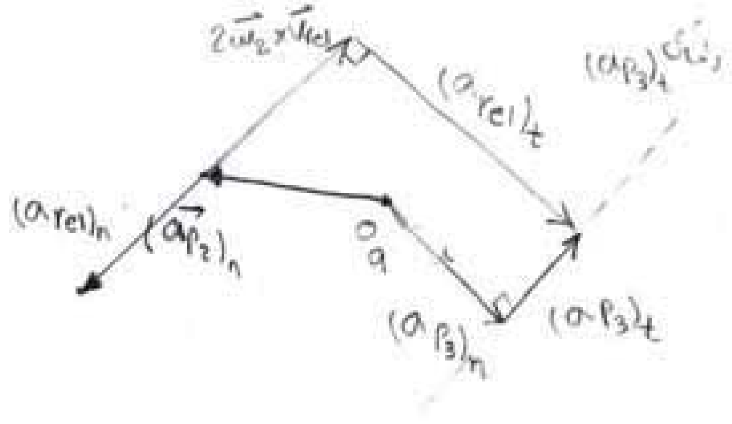
$(\overrightarrow{a}_{P_2})_n$: $O_2P_2 \cdot \omega_2^2$ از P_2 به O_2

$(\overrightarrow{a}_{rel})_t$: $\dot{V}_{rel}$ مماس بر V_{rel} (یا در جهت t)

$(\overrightarrow{a}_{rel})_n$: $\dfrac{|\overrightarrow{V}_{rel}|^2}{\overline{OP_2}}$ از P_2 به سمت O

$2\overrightarrow{\omega}_2 \times \overrightarrow{V}_{rel}$ مقدار معلوم و جهت
(با چرخش V_{rel} به میزان ۹۰ درجه در جهت ω_2
و از O به سمت P_2)

راستای $(a_{rel})_t$ مماس بر V_{rel}



$$\alpha_3 = \frac{|\overrightarrow{a}_{P_3}|_t}{\overline{O_3P_3}} \quad CW$$

فصل هفتم : مکانیزمهای معادل

هنگامی که تجزیه و تحلیل شتاب یک مکانیزم تماسی مستقیم مورد نظر باشد، مسأله را می توان با جایگزین نمودن یک مکانیزم چند میله ای معادل، ساده تر نمود.

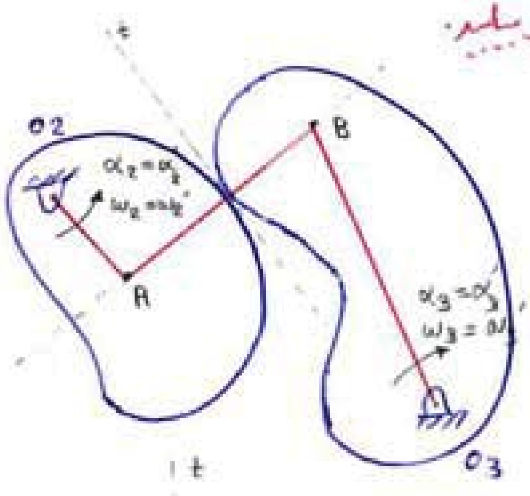
یک مکانیزم معادل، مکانیزمی است که سرعت و شتاب زاویه ای عضو محرک و متحرک به طور لحظه ای برابر اعضای محرک و متحرک مکانیزم اولیه باشد.

روش کار :

در مکانیزمهای تماس مستقیم ابتدا عمود مشترک دو سطح را در محل تماس رسم می کنیم. روی این عمود مشترک مراکز انحنای دو سطح را مشخص می کنیم. از مرکز دوران جسم محرک به مرکز انحنای آن و از مرکز دوران جسم متحرک به مرکز انحنای آن متصل می کنیم. مکانیزم حاصل را مکانیزم معادل می نامند.

مثال : مکانیزمهای معادل را در شکلهای زیر بیابید.

1)

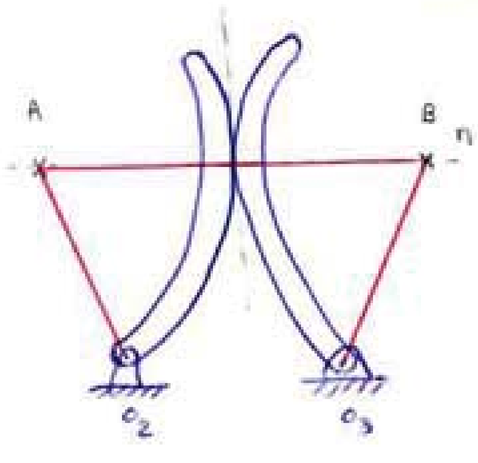


مکانیزم معادل : O_2ABO_3

دیگر شتاب بررسی نداریم و تحلیل مسأله ساده تر می شود.

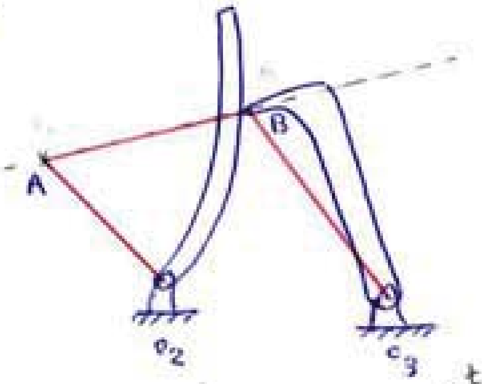
$$\alpha_2=\alpha_2' \quad \text{و} \quad \alpha_3=\alpha_3'$$
$$\omega_2=\omega_2' \qquad \omega_3=\omega_3'$$

2)



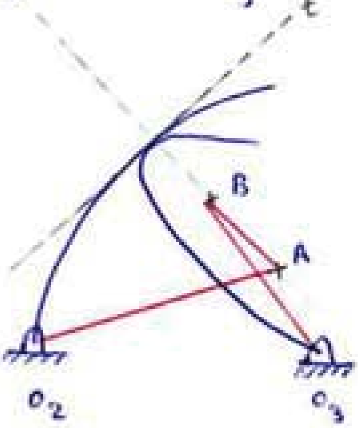
مکانیزم معادل : O_2ABO_3

3)



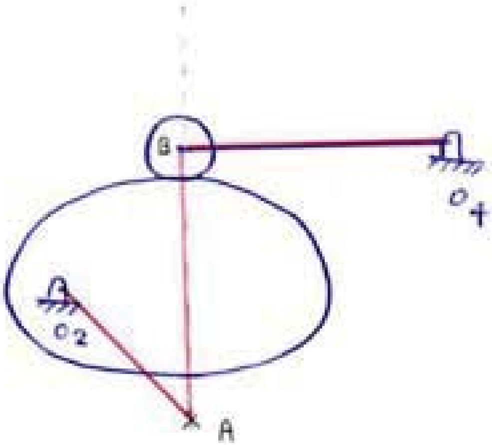
سازکار معادل : O_2ABO_3

4)

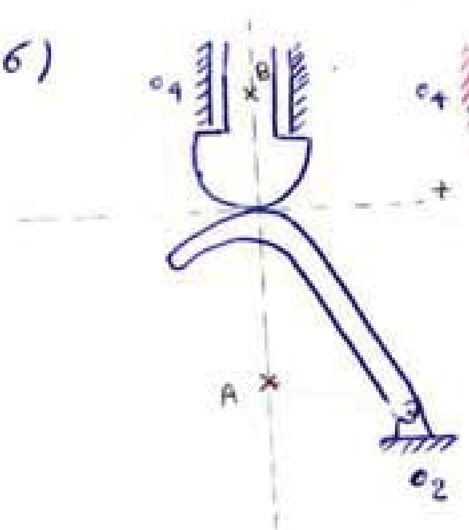


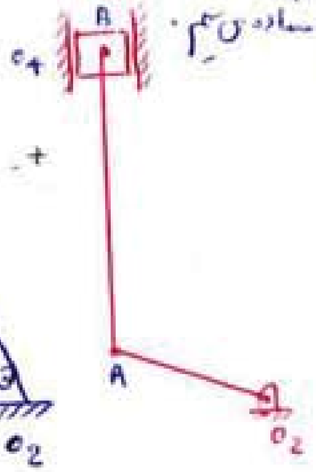
سازکار معادل : O_2ABO_3

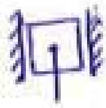
5)



6)

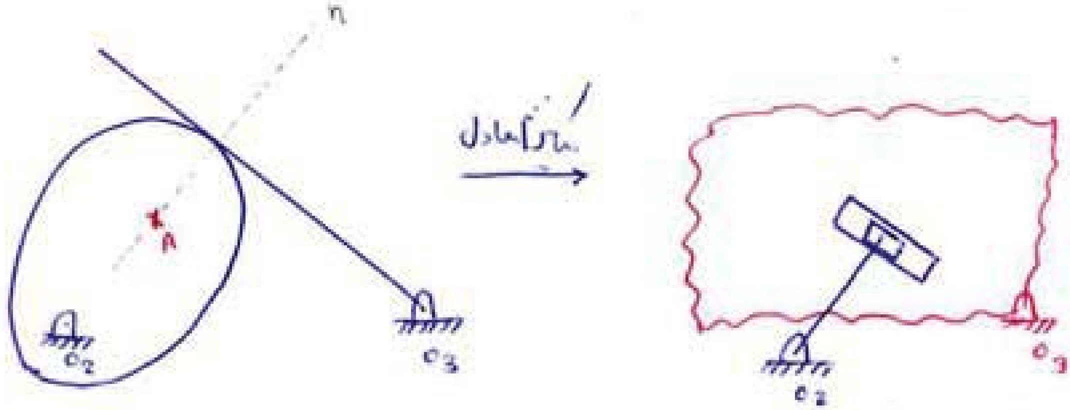




اگر حرکت را مستقیم داشتیم به جای آن از  استفاده می کنیم.

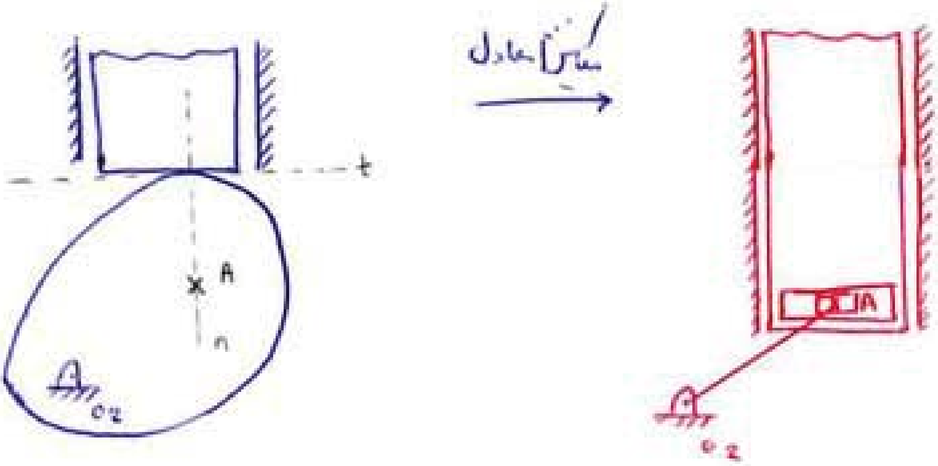
سازکار معادل : O_2ABO_4

7)

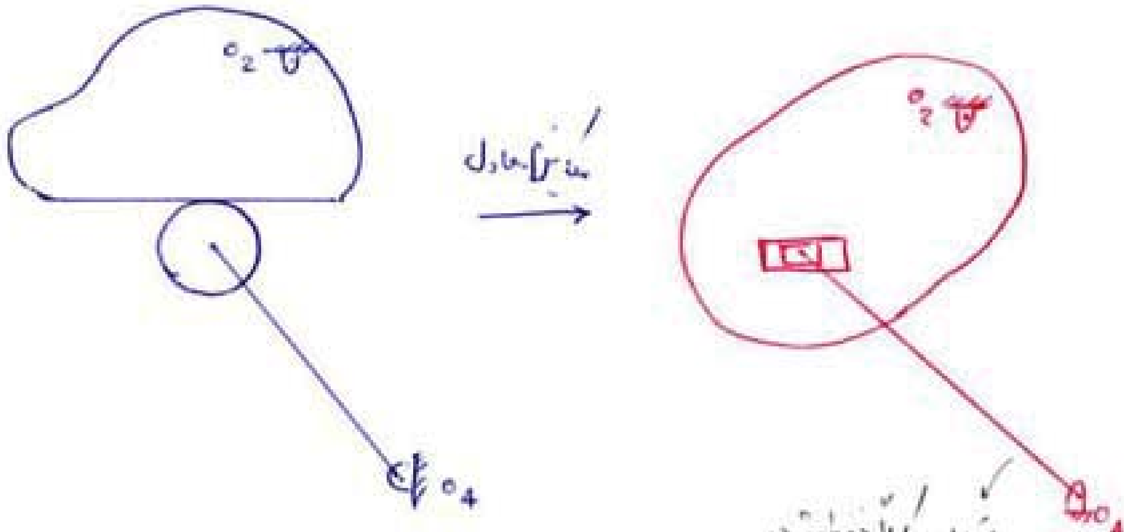


اگر مرکز انحنای یکی از اجسام درگیر در بی‌نهایت باشد به جای آن لغزنده می‌گذارند. مسیر لغزنده همیشه در جهت خط مماس در محل برخورد دو جسم است و محل آن در مرکز انحنای جسم دیگر است.

8)



9)



راستا باید حتماً حفظ شود.

فصل هشتم : چرخ دنده ها

(مطالعه فصل ۱۲ و ۱۳ مارتین)

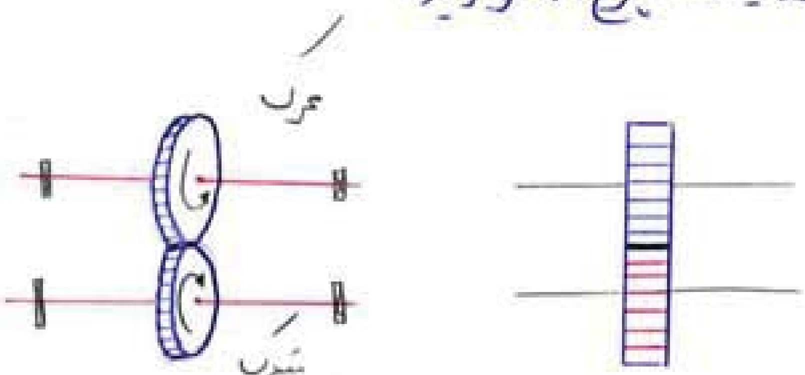
قدرت قابل انتقال توسط اعضای غلتشی محدود به اصطکاک بین سطوح در تماس است و اگر بار از حد تجاوز کند، لغزش اتفاق می افتد و برای فراهم کردن رانش مثبت در روی سطوح تماس دندانه تعبیه می شود.

اعضای حاصل موسوم به چرخدنده می باشد.

چرخدنده عضوی است که از آن برای انتقال توان همراه با تغییرات دور استفاده می شود که دارای انواع مختلفی می باشد که از جمله می توان موارد زیر را نام برد:

۱- چرخ دنده ساده یا صاف (Spur Gear)

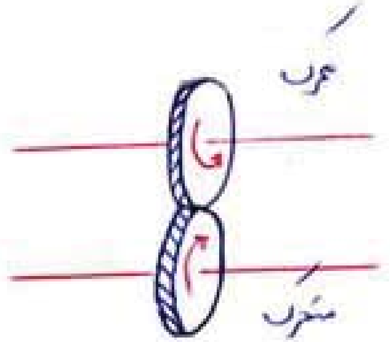
چرخ دنده ای است که برای انتقال توان بین دو شافت موازی از آن استفاده می شود. دندانه های این چرخ دنده با محور یا شافت چرخ دنده موازیند.

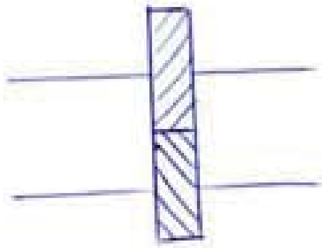


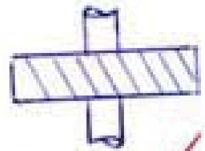
۲- چرخ دنده مارپیچ ساده (Simple Helical gear)

چرخ دنده ای است که برای انتقال توان بین دو شافت موازی از آن استفاده می شود. دندانه های این چرخ دنده ها به طور مورب نسبت به محور چرخ دنده قرار دارند. نحوه درگیری دندانه ها تدریجی بوده، و لذا از این چرخ دنده ها در مواقعی که دور بالاست استفاده می شود و به همین دلیل صدای ایجاد شده توسط

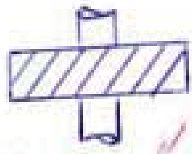
این چرخ دنده‌ها بهتر از چرخ دنده‌های ساده است. این چرخ دنده‌ها یا راستگرد هستند یا چپگرد.
(همانند پیچ‌ها) که دو چرخ دنده‌های مارپیچ ساده همواره یک راستگرد با یک چپگرد درگیر می‌شود.



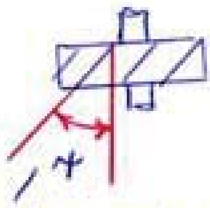




چپگرد (شیب منفی)



راستگرد (شیب مثبت)



زاویه مارپیچ (مثلثی)

زاویه مارپیچ ψ دو چرخ دنده مارپیچ ساده درگیر با هم الزاماً برابر است.

۳) چرخ دنده مارپیچ ضربدری (متقاطع)

چرخ دنده‌هایی هستند که می‌توان را بین دو شافت متنافر انتقال می‌دهند، زاویه بین این دو شافت تابع رابطه زیر است:

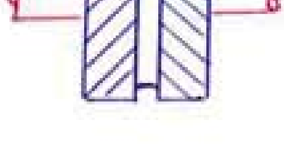
زاویه بین دو شافت ← $$\Sigma = \psi_1 \pm \psi_2$$ → زاویه مارپیچ چرخ دنده 2

زاویه مارپیچ چرخ دنده 1

اگر هر دو چپگرد یا راستگرد باشند علامت جمع و اگر یکی چپگرد و دیگری راستگرد باشد علامت منفی داریم.

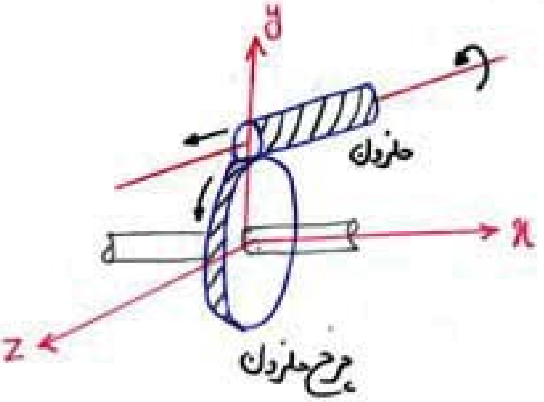
۴) چرخ دنده جناغی

یک چرخ دنده جناغی معادل ۲ چرخ دنده مارپیچ با شیب معکوس است که پهلو به پهلو در کنار هم قرار داشته باشند و قابلیت حذف فشارهای جانبی را دارد.



۵) چرخ دنده حلزونی (worm gears)

در این چرخ دنده ها توان بین دو شافت متنافر که عموماً زاویه بین آنها ۹۰° است منتقل می شود. بزرگ در این دستگاه حلزونی است. لذا از این چرخ دنده ها برای کاهش دور به میزان قابل توجهی استفاده می شود.



اگر حلزونی راستگرد باشد، چرخ حلزونی نیز راستگرد است و بالعکس.

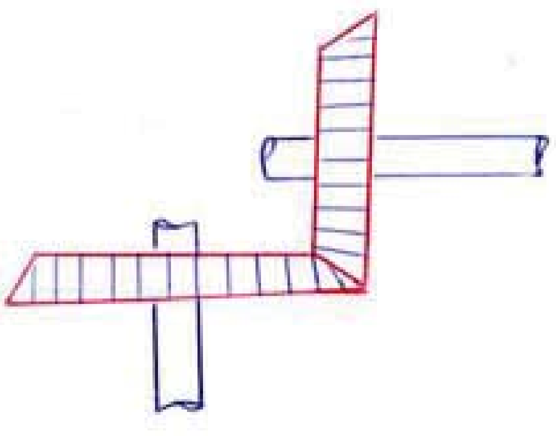
((در شکل هر دو چپ گردند.))

به منظور تعیین جهت دوران چرخ دنده به ازاء دوران حلزونی از قانون پیچ و مهره استفاده می شود. در این جا حلزونی مانند پیچ و چرخ حلزونی مانند مهره عمل می کند. برای مثال اگر حلزونی با توجه به دید از سمت -z cw بچرخد، چرخ حلزونی با توجه به دید از +x ، ccw خواهد چرخید.

۶) چرخ دنده مخروطی (Bevel gears)

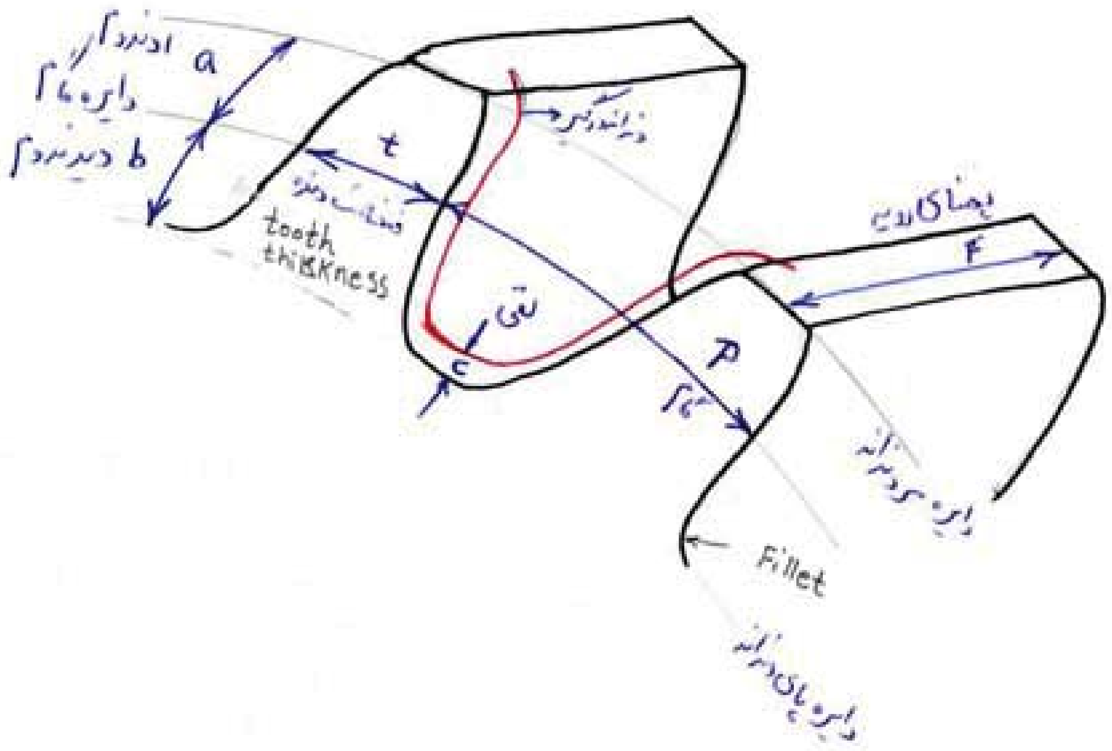
این چرخ دنده ها انواع مختلفی دارند که مهمترین آنها می توان به مخروطی ساده و مخروطی مارپیچ اشاره کرد.

در چرخ دنده های مخروطی ساده و مخروطی مارپیچ می توان بین دو شافت متقاطع که زاویه بین آنها ۹۰° است، انتقال می یابد.



تعاریف اولیه :

اگر یک جفت دندانه از یک چرخدنده ساده را در نظر بگیریم، در آن صورت می‌توان پارامترهای زیر را به شرحی که گفته خواهد شد، تعریف کرد.



۱- دایره گام (Pitch Circles) :

دایره‌ای فرضی است که از آن در امر محاسبات استفاده می‌شود، قطر این دایره را با d نمایش می‌دهند.

دوایر گام دو چرخدنده درگیر با هم مماس بوده و بر روی هم می‌غلتند.

۲- گام دندانه P (Circular pitch) :

فاصله یک نقطه واقع بر یک دندانه تا نقطه‌ی مشابه واقع بر دندانه‌ی دیگر روی دایره گام را گام دندانه می‌نامند.

گام دندانه‌ی دو چرخ دنده‌ی درگیر باید با هم برابر باشند.

۳- مدول m (module) :

در سیستم متریک طبق تعریف مدول برابر است با:

قطر برحسب mm

$$m = \frac{d}{N}$$

تعداد دندانه

در سیستم انگلیسی گام قطری تعریف می‌شود که با P_d نمایش داده می‌شود:

Diameter Pitch

$$DP \text{ یا } P_d = \frac{N}{d}$$

N ← تعداد دندانه

d ← قطر بر حسب in

رابطه گام با مدول: $NP = \pi d \rightarrow P = \pi \frac{d}{N} \Rightarrow \underline{P = \pi m}$

رابطه گام با DP: $NP = \pi d \rightarrow P \frac{N}{d} = \pi \Rightarrow \underline{P \cdot D_p = \pi}$

مدول یا DP در جفت چرخ‌دنده درگیر با هم برابر است.

۴- لقی جانبی یا بازی (Backlash):

فاصله آزاد بین دو دندانه که بر روی دایره‌ی گام اندازه گرفته می‌شود را لقی جانبی گویند.

۵- لقی c (Clearance):

فاصله آزاد بین سطح بالای یک دندانه و سطح پایینی دندانه‌ی دیگر را لقی c گویند.

۶- ادندوم a (addendum):

فاصله دایره‌ی گام تا سطح بالای دندانه را ادندوم گویند.

۷- ددندوم b (Didendom):

فاصله دایره‌ی گام تا سطح پایینی دندانه را ددندوم گویند.

۸- عمق دندانه (whole depth):

عمق دندانه برابر است: $h_t = a + b$

Pinion: چرخ‌دنده کوچک

Gear: چرخ‌دنده بزرگ

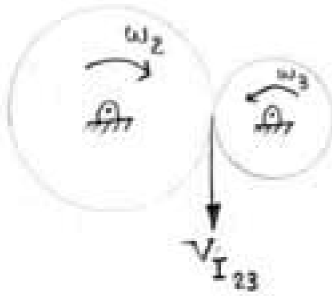
(مراجعه به صفحه ۴۰۸ جدول ۱۲-۲ ← ۴ فرم دندانه استاندارد و مدل)

ادامه چرخ‌دنده‌های معمولی:

یک جفت چرخ‌دنده درگیر را در نظر بگیرید که ۲ محرک و ۳ متحرک است.

$$V_{I_{23}} = r_2\omega_2 = r_3\omega_3 \Rightarrow$$

$$\omega_3 = \frac{r_2}{r_3}\omega_2 = \frac{d_2}{d_3}\omega_2 = \frac{N_2}{N_3}\omega_2$$



$$\Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{N_2}{N_3}\omega_2$$

برای چرخ دنده ساده و مارپیچ ساده و مخروطی صادق است

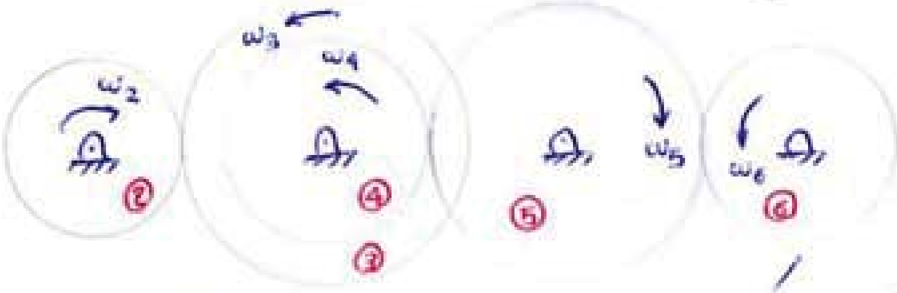
برای چرخ دنده حلزونی

$$\omega_{\text{چرخ حلزون}} = \frac{N_w}{N_G}\,\omega_{\text{حلزون}}$$

N_w ← تعداد دنده‌های حلزون

N_G ← تعداد دندانه‌های چرخ حلزون

حال اگر چند جفت چرخ دنده درگیر داشته باشیم:



$$\omega_3 = \frac{N_2}{N_3}\omega_2 \quad \text{و} \quad \omega_3 = \omega_4$$

$$\omega_5 = \frac{N_4}{N_5}\omega_4 = \frac{N_4}{N_5}\cdot\frac{N_2}{N_3}\omega_2$$

$$\omega_6 = \frac{N_5}{N_6}\omega_5 = \frac{N_4}{N_6}\cdot\frac{N_2}{N_3}\cdot\frac{N_5}{N_6}\omega_2$$

بنابراین با تشکیل جدول محرک‌ها و متحرک‌ها داریم:

محرک	2	4	5
متحرک	3	5	6

$$e = \frac{N_2\cdot N_4\cdot N_5}{N_3\cdot N_5\cdot N_6}$$ که نسبت دوری

نسبت دوری

$$\boxed{e \text{ یا } VR = \frac{\text{حاصل ضرب تعداد دندانه‌های چرخ دنده‌های محرک}}{\text{حاصل ضرب تعداد دندانه‌های چرخ دنده‌های متحرک}}}$$

angular Velocity ratio

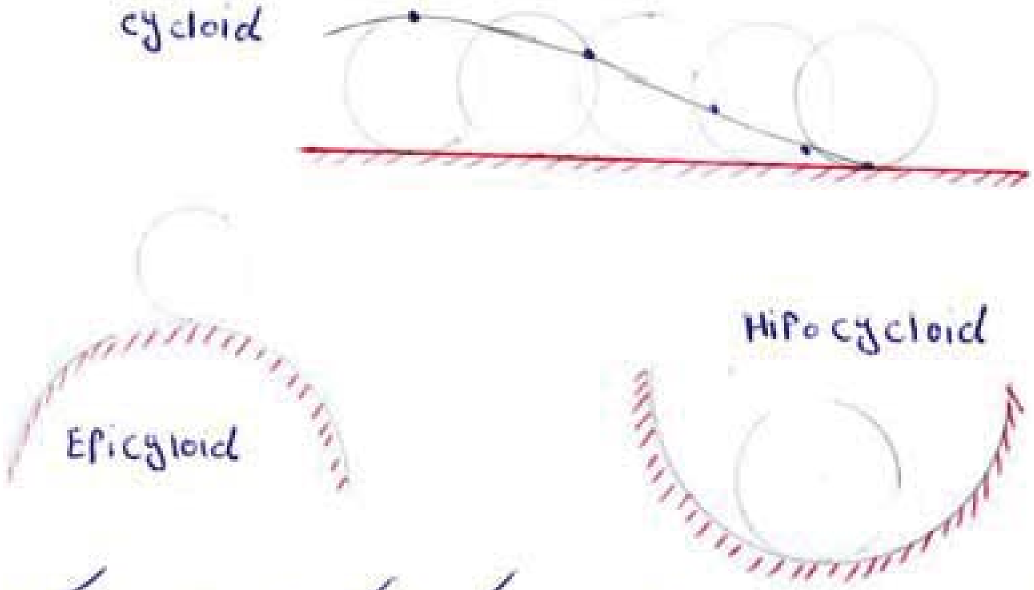
$$\omega_L = e\,\omega_F \longleftarrow \begin{cases} \omega_L = \omega_6 & \text{سرعت زاویه‌ای خروجی} \\ \omega_F = \omega_2 & \text{سرعت زاویه‌ای ورودی} \end{cases}$$

اگر e مثبت باشد جهت ω_L و ω_F یکی است و بالعکس.

✓ چرخ دنده‌هایی مانند ω_5 را که در رابطه قابل حذف هستند و در خروجی تاثیری ندارند و فقط جهت ω را عوض می‌کنند

دسته چرخ دنده های خورشیدی و یا اپی سیکلوئیدی :

سیکلوئید منحنی حرکت ذره از محیط یک دایره است که بر سطح افق می غلتد.



اگر سطح افق محدب شود منحنی بدست آمده اپی سیکلوئید و اگر مقعر شود هیپوسیکلوئید نام دارد.

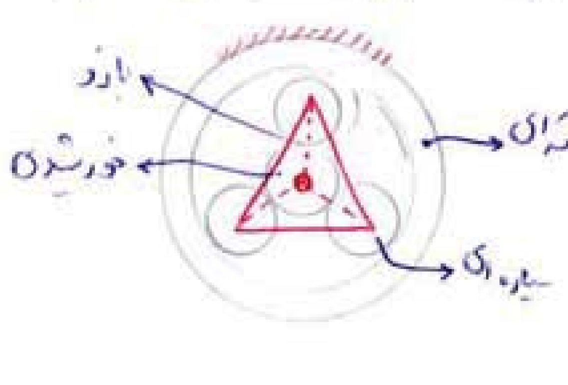
چرخ دنده های خورشیدی یا Sun Gear چرخ دنده هایی هستند که درجه آزادی آنها 2 است. این مجموعه چرخ دنده ها معمولاً دارای اجزاء زیر باشند :

1- چرخ دنده ای که در وسط است و بقیه چرخ دنده ها به دور آن می چرخند که اصطلاحاً خورشیدی نام دارد

2- بازویی که مرکز تعدادی از چرخ دنده ها را که به دور خورشیدی می چرخند به هم متصل می کند.

3- چرخ دنده هایی که با حرکت بازو به دور خورشیدی می چرخند که آنها سیاره ای می گویند.

4- چرخ دنده حلقه ای یا رینگی که دور چرخ دنده های سیاره ای قرار داشته باشد.



روش تحلیل سرعت زاویه‌ای و شمارش دوری :

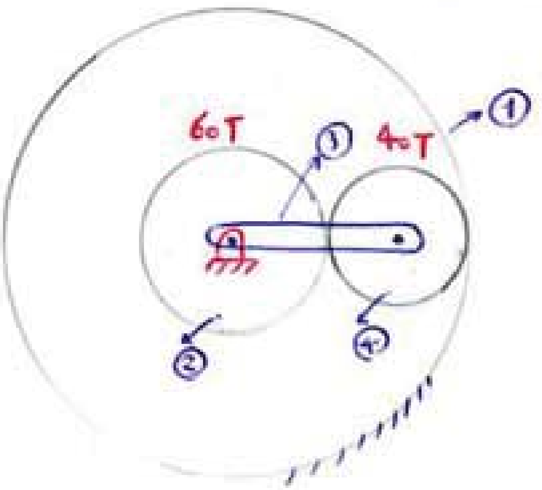
۱- ابتدا کل مجموعه را یک بار در جهت «cw» می‌چرخانیم.

۲- بازو را ثابت نگه می‌داریم و چرخ دنده‌ای که ثابت بوده را یک دور در جهت «ccw» می‌چرخانیم.

۳- جمع مراحل ۱ و ۲ تعداد دورهای زده شده هر عضو را نشان خواهد داد.

توجه: جهت چرخش ساعتگرد مثبت است. توجه شود که دو چرخدنده درگیر خارجی جهت را عوض کرده و دو چرخدنده درگیر داخلی (مثل سیاره در شکل) جهت را عوض نمی‌کند

مثال: اگر سرعت زاویه‌ای چرخدنده ② در دستگاه نشان داده شده زیر 80 rpm و در جهت «ccw» باشد و چرخدنده حلقه‌ای ① ساکن باشد، سرعت زاویه‌ای چرخدنده ④ را بیابید.



درجه آزادی:

$n = 4$

$f_1 = 3$ $\qquad DoF = 9 - 2(3) - 2 = 1$

$f_2 = 2$

ابتدا تعداد دندانه‌های چرخدنده حلقه‌ای را می‌یابیم:

$$\frac{1}{2}d_2 + d_4 = \frac{1}{2}d_1 \qquad M = \frac{d}{N} \text{ or } d = MN$$

$$\downarrow$$

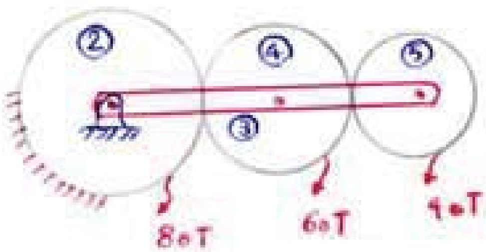
$$MN_2 + 2MN_4 = MN_1 \Rightarrow N_2 + 2N_4 = N_1 \Rightarrow N_1 = 140\,T$$

چرخدنده ①	چرخدنده ④	چرخدنده ②	بازو ③	اعمال شرایط دنده مجموعه
+1	+1	+1	+1	مجموعه یک بار در جهت «cw» بزند
-1	$-\frac{140}{40}$	$+\frac{140}{40} \times \frac{40}{60}$	0	با بازوی ثابت و چرخدنده ① یک دور ccw بزند
0	$-2\frac{1}{2}$	$+3\frac{1}{3}$	+1	تعداد دورهای بدست آمده

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{-2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3}} = \frac{-5/2}{10/3} = \frac{-15}{20} = -3/4$$ و $\omega_2 = 80$ rpm ccw یا (منفی)

$$\Rightarrow \omega_4 = 80 \times \frac{3}{4} = 60 \text{ rpm}$$

مثال: در دستگاه خورشیدی زیر نسبت سرعت زاویه‌ای چرخ‌دنده ⑤ به چرخ‌دنده ④ را بیابید.



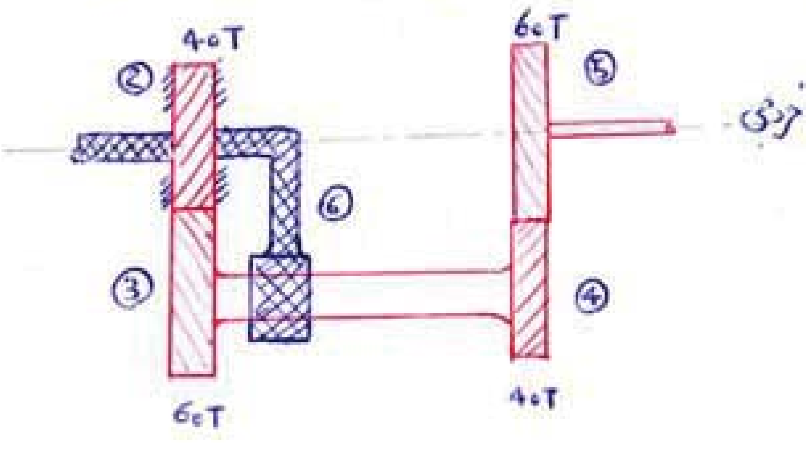
اعضای تشکیل‌دهنده مجموعه	بازو ③	چرخ‌دنده ②	چرخ‌دنده ④	چرخ‌دنده ⑤
مجموعه یک دور مثبت بزند (cw)	+1	+1	+1	+1
اثر ثابت چرخ‌دنده ② یک دور منفی بزند	0	-1	$+\frac{80}{60}$	$-\frac{80}{60} \times \frac{60}{40}$
تعداد دورهای بدست آمده	+1	0	$+7/3$	-1

$$\frac{\omega_5}{\omega_4} = \frac{-1}{+7/3} = -3/7$$ یعنی به نسبت 3/7 دور خلاف جهت هم می‌چرخند.

اگر $\omega_3 = 60$ rpm و cw باشد: آنگاه $\omega_5 = -60$ rpm (ccw)

↳ $\omega_4 = 7/3 \times 60 = 140$ rpm cw

مثال: در چرخ‌دنده خورشیدی هم‌محور زیر سرعت زاویه‌ای شافت خروجی به شافت ورودی را بیابید.



نسبت خروجی به ورودی:

VR یا TV یا e

Velocity ratio ← VR

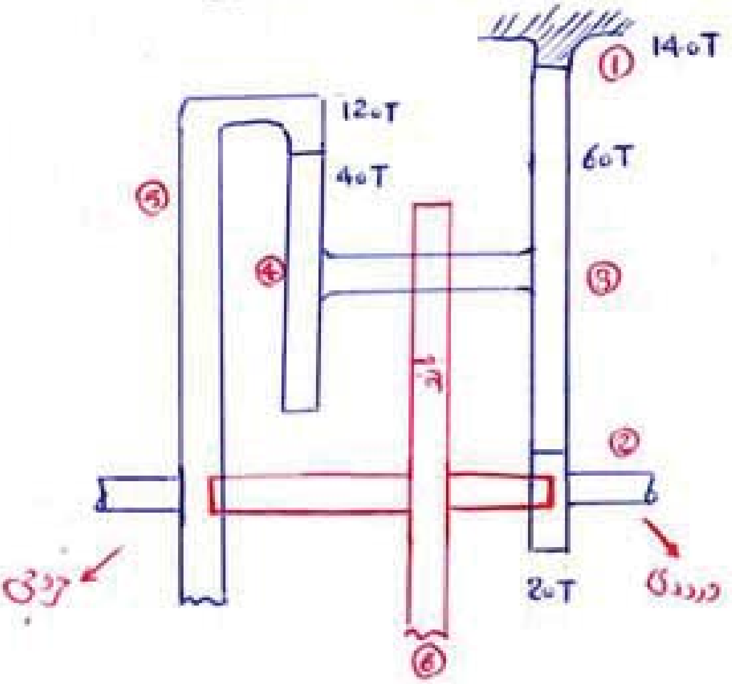
Train Value ← TV

اعضای تشکیل دهنده مجموعه	چرخدنده ②	چرخدنده ③	چرخدنده ④	چرخدنده ⑤	بازو ⑥
مجموعه یک دور در جهت ساعتگرد بزند (cw)	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
بازو ثابت و چرخدنده ② یک دور منفی بزند	-1	$+\frac{40}{60}$	$+\frac{40}{60}$	$-\frac{40}{60}\times\frac{40}{60}$	0
تعداد دورهای بدست آمده	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{9}$	$+1$

$$TV = \frac{\omega_5}{\omega_6} = \frac{5/9}{1} = 5/9$$

یعنی دستگاه تعداد دور را 4/9 کاهش می‌دهد.

مثال ۵ در گیربکس خورشیدی زیر نسبت سرعت خروجی به ورودی یا (TV) را بیابید.



$$\frac{\omega_5}{\omega_2} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{1}} = \frac{1}{36}$$

$$\omega_5 = \frac{1}{36}\,\omega_2$$

اعضای تشکیل دهنده مجموعه	چرخدنده ①	چرخدنده ②	چرخدنده ③	چرخدنده ④	چرخدنده ⑤	بازو ⑥
مجموعه یک دور در جهت ساعتگرد بزند (cw)	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
بازو ثابت و چرخدنده ① یک دور منفی بزند	-1	$\frac{140}{60}\times\frac{60}{20}$	$-\frac{140}{60}$	$-\frac{140}{60}$	$-\frac{140}{60}\times\frac{40}{120}$	0
تعداد دورهای بدست آمده	0	$+8$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$+\frac{2}{9}$	$+1$

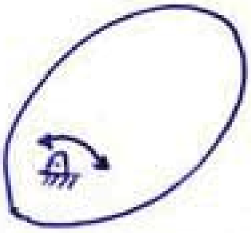
فصل نهم: بادامک‌ها : (cams)

بادامک عضوی از ماشین بوده که با شکل نامنظم خود به عنوان یک محرک، حرکت را به عضو دیگری به نام پیرو (follower) انتقال می‌دهد و در ماشین‌های اتوماتیک مثل ماشین چاپ، ماشین‌های ابزار، احتراق داخلی و ... کاربرد دارد.

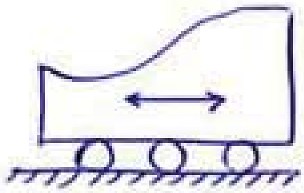
انواع بادامک‌ها :

۱- بادامک‌های دیسکی (Disk cams) یا بادامک‌های دورانی (Rotating cams)

۲- بادامک‌های انتقالی (Tranlation cams) یا بادامک‌های رفت و برگشتی (Reciprocating cams)



(Rotating cams)

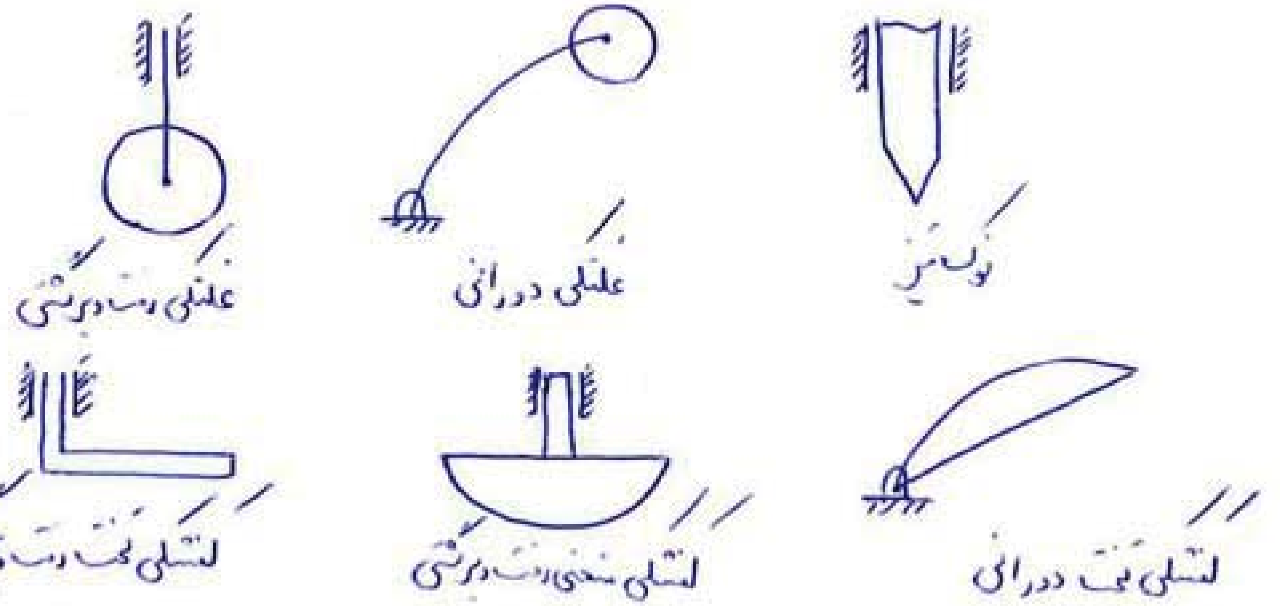


(Reciprocating cams)

انواع پیروها :

از نظر حرکتی:
- پیروهای نوسانی یا دورانی (Osilating or Rotating)
- پیروهای رفت و برگشتی (Reciprocating)

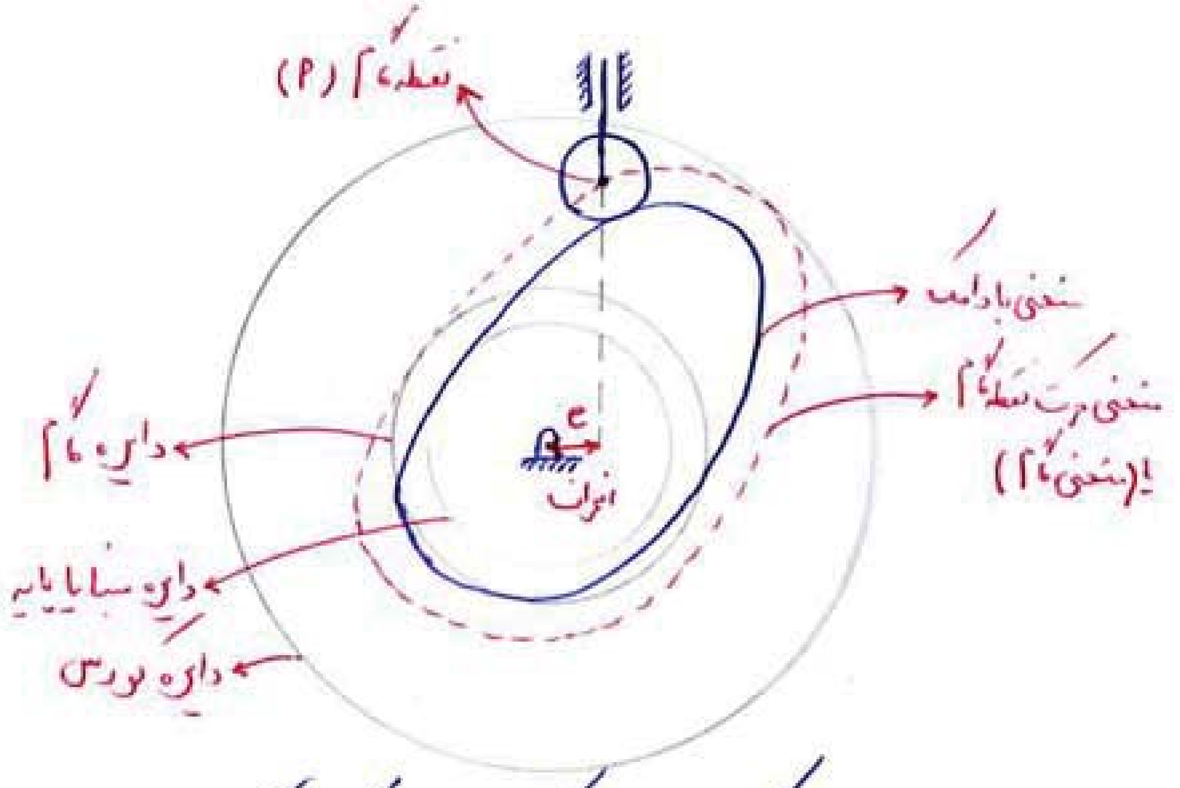
از نظر شکل:
- نوک تیز (Knife edge)
- غلتکی (Roler)
- کفشکی تخت (Flat Shoe)
- کفشکی منحنی (Curve Shoe)



- برای طراحی بادامکها ابتدا رفتار پیرو را مشخص می‌کنیم و سپس براساس آن رویه (سطح) بادامک تعیین می‌گردد.

نقطه گام :

یک نقطه فرضی از پیرو است که در ساز و کار معادل، پیرو نوک تیز، نوک پیرو در آن نقطه واقع می‌شود. بسته به نوع ساز و کار معادل، ممکن است آنی یا دائم باشد، مثلاً در پیرو غلتکی و لغزشی دایروی، مرکز دایره، محل تماس فرضی (از نوع) دائم است و در لغزشی غیر دایروی، مرکز انحنای سطح در تماس پیرو بوده و آنی است. در پیرو لغزشی تخت، همان محل تماس پیرو با بادامک بوده و آنی است. نقطه گام را با P نمایش می‌دهند و مسیر حرکت نقطه گام بر روی بادامک را منحنی گام می‌نامند. مثلاً برای پیرو لغزشی تخت منحنی گام، همان منحنی بادامک است.



بادامک چرخان خارج از مرکز - پیرو غلتکی رفت و برگشتی

دایره پایه:

کوچکترین دایره به مرکز چرخش بادامک دوران که بر منحنی بادامک مماس است را دایره پایه گویند.

دایره گام:

کوچکترین دایره به مرکز چرخش بادامک دوران که بر منحنی گام مماس است را دایره گام می‌نامند. واضح است در پیروهای غلتکی تخت یا نوک تیز این دایره بر دایره پایه منطبق است.

دایره پوش:

بزرگترین دایره به مرکز چرخش بادامک دوران که بر منحنی گام مماس است را دایره پوش نامند.

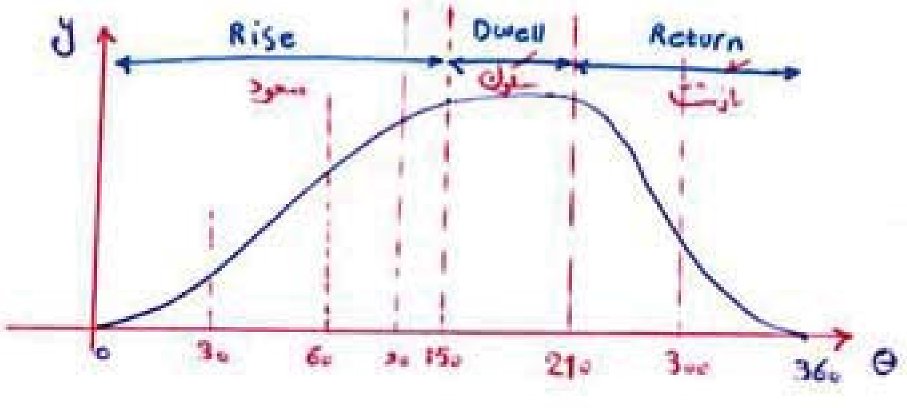
$L = R_{max} - R_{min}$ 　　 L: کورس پیرو، R_{min}: شعاع دایره گام، R_{max}: شعاع دایره پوش

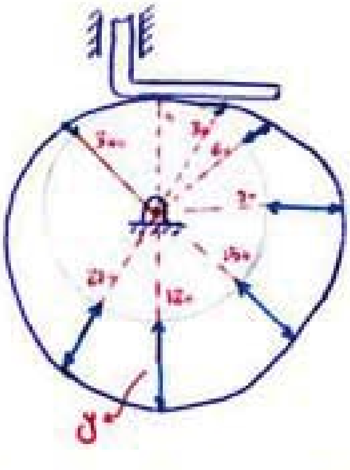
انحراف:

فاصله مرکز چرخش بادامک تا امتداد حرکت نقطه گام را انحراف (e) می‌نامند و این بادامکها را خارج از مرکز نامند.

موقعیت پیرو:

فرض کنید که موقعیت و نمودار حرکت پیرو به ازای یک حرکت دورانی کامل بادامک به شکل زیر داده شده است. و بادامک از نوع دورانی خارج از مرکز و پیرو لغزشی تخت رفت و برگشتی باشد.





موقعیت پیرو y که نمایش داده می‌شود در پیرو رفت و برگشتی برحسب متر یا سانتی‌متر بیان می‌شود [L] و در پیرو نوسانی (دورانی) بدون بعد بوده و با واحد رادیان بیان می‌گردد. نزدیک‌ترین حد نقطه‌ای به مرکز چرخش بادامک به عنوان مبداء اندازه‌گیری موقعیت پیرو در نظر گرفته می‌شود و در بادامک دورانی مبداء y=0 مماس بر دایره پایه است.

بادامک‌های رفت و برگشتی برحسب [L] و بادامک‌های دورانی برحسب θ و بدون بعد و برحسب رادیان است.

می‌توان نوشت: $y = f(\theta)$ (برای بادامک‌های دورانی)

مشتق شتاب jerk (ضربه یا پرش)

با مشتق گیری پیاپی از جابجایی بر حسب زمان می توان سرعت، شتاب و تکان پیرو را بدست آورد. ولی اگر این مشتق گیری مستقل از نحوه چرخش زمان توسط بادامک باشد، مشتق گیری پیاپی از جابجایی نسبت به موقعیت بادامک (θ) صورت گرفته و با استفاده از قاعده زنجیره ای می توان مشتق ها را نسبت به زمان را محاسبه نمود:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad , \quad y' = \frac{dy}{d\theta}$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad , \quad y'' = \frac{d^2y}{d\theta^2}$$

$$\dddot{y} = \frac{d^3y}{dt^3} \quad , \quad y''' = \frac{d^3y}{d\theta^3}$$

$\dot{y}$: سرعت واقعی m/s

$\ddot{y}$: شتاب واقعی m/s^2

$\dddot{y}$: تکان واقعی m/s^3 (jerk)

y' : سرعت هندسی m/rad

y'' : شتاب هندسی m/rad^2

y''' : تکان هندسی m/rad^3

$$y = f(\theta) \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{y} = y'\dot{\theta} \quad \text{یا} \quad \dot{y} = y'\omega$$

$$\ddot{y} = y''\dot{\theta}^2 + y'\ddot{\theta} \quad \text{یا} \quad \ddot{y} = y''\omega^2 + y'\alpha$$

$$\dddot{y} = y'''\dot{\theta}^3 + 3y''\dot{\theta}\ddot{\theta} + y'\dddot{\theta} \quad \text{یا} \quad \dddot{y} = y'''\omega^3 + 3y''\omega\alpha + y'\dot{\alpha}$$

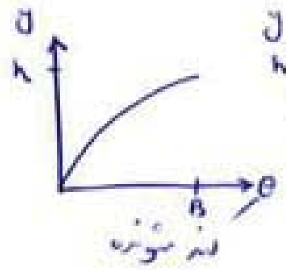
(α: شتاب زاویه ای بادامک)

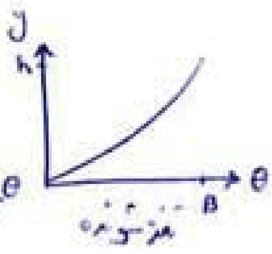
انواع حرکات متداول پیرو:

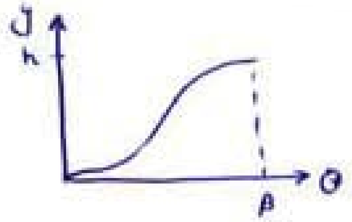
نوع حرکت	تغییر مکان (y)	سرعت ($\dot{y}$)	شتاب ($\ddot{y}$)
شتاب ثابت	$\frac{\theta}{\beta} \le 0.5 \quad s = 2h\frac{\theta^2}{\beta^2}$ $\frac{\theta}{\beta} \ge 0.5 \quad s = h[1-2(1-\frac{\theta}{\beta})^2]$	$\frac{ds}{dt} = \frac{4h\omega\theta}{\beta^2}$ $\frac{ds}{dt} = \frac{4h\omega}{\beta}(1-\frac{\theta}{\beta})$	$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{4h\omega^2}{\beta^2}$ $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{4h\omega^2}{\beta^2}$
هارمونیک ساده	$s = \frac{h}{2}(1-\cos\frac{\pi\theta}{\beta})$	$\frac{ds}{dt} = \frac{\pi h\omega}{2\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$	$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\pi^2 h\omega^2}{2\beta^2}\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$
سیکلوئیدی	$s = h(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta})$	$\frac{ds}{dt} = \frac{h\omega}{\beta}(1-\cos\frac{2\pi\theta}{\beta})$	$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{2\pi h\omega^2}{\beta^2}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}$

انواع معادلات :

۱- شتاب ثابت : $y = A\theta^2 + B\theta + C$







۲- هارمونیک ساده : $y = A\cos(a\theta) + B$ یا $y = A\sin(a\theta) + B$

۳- سیکلوئیدی : $y = A\cos(a\theta) + B\theta + C$ یا $y = A\sin(a\theta) + B\theta + C$

زاویه تماس شده : θ

بیشترین تغییر مکان : h

زاویه بیشترین تغییر مکان : β

بادامک خارج از مرکز :

در این نوع بادامکها که به دلیل حذف برخی قطعات جانبی در ماشینها و کاهش فشار جانبی روی پیرو طراحی شده‌اند، مرکز دوران بادامک به اندازه e از مرکز دایره فاصله دارد. معادله حرکت پیرو عبارت است از

$$y = e(1-\cos\theta)$$