ریاضی ۱ و ۲

تابع

تعریف تابع: متغیر y را تابعی از متغیر x در حوزه تعریف D گویند اگر به ازای هر x از این حوزه یا دامنه مقدار معینی برای متغیر y متناظر باشد. یا برای هر (y_1 و x_1) و (y_2 و x_1) داشته باشیم ($y_1 = y_2$)

روش‌های نمایش توابع:

۱- ضابطه تحلیلی، $y=f(x)$

مثال: $y=x^2+2\log x$

۲- ضابطه ضمنی $f(x,y)=0$

مثال: $y\cos x+x^2\ln y=2$

نکته: در هر صورت نمایش تابع، باید تعریف آن صادق باشد.

دامنه تابع: مجموعه تمام xهایی که در معادله تابع صدق کنند را دامنه تابع گفته و با D_f نمایش می‌دهند.

برد تابع: مجموعه تمام yهایی که در معادله تابع صدق کند را برد تابع گفته و با R_f نمایش می‌دهند.

انواع تابع

۱- تابع یک به یک: $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

۲- تابع پوشا: fپوشا است اگر $f:X\to Y \Rightarrow Y=R_f$

۳- تابع متناوب: T: دوره تناوب و $\forall x\in D_f \Rightarrow f(x+T)=f(x)$

نکته: دوره تناوب تابع f(ax) در صورت متناوب بودن f با دوره T، برابر $\frac{T}{|a|}$ می‌باشد.

٤- تابع زوج: تابع متقارن نسبت به محور yها یا $f(-x)=f(x)$

۵- تابع فرد: تابع متقارن نسبت به مرکز یا $f(-x)=-f(x)$

٦- تابع صعودی و اکیدا صعودی:

تابع اکیدا صعودی: $x_2>x_1 \Rightarrow y_2>y_1$ و تابع صعودی: $x_2>x_1 \Rightarrow y_2\ge y_1$

۷- تابع نزولی و اکیدا نزولی:

تابع اکیدا نزولی: $x_2>x_1 \Rightarrow y_2<y_1$ و تابع نزولی: $x_2>x_1 \Rightarrow y_2\le y_1$

معرفی برخی توابع خاص:

- تابع جزء تصحیح: $y=[x]=n \quad ; \quad n\le x\le n+1$
- تابع نمایی: $y=a^x \quad , \quad a>0, a\ne 1$
- تابع لگاریتمی: $y=\log_a^x \quad , \quad a>0 \quad , \quad a\ne 1$

- تابع سینوس: $y=\sin x$

خواص: $\sin(-x)=-\sin x$ تابع فرد و $\sin(x+(2k+1)\pi)=-\sin x$ و $\sin(\pi-x)=\sin x$

- تابع کسینوس: $y=\cos x$

خواص: $\cos(-x)=\cos x$ تابع زوج و $\cos(x+(2k+1)\pi)=\cos x$ و $\cos(\pi-x)=-\cos x$

- تابع تانژانت: $y=tgx \;,\; x\neq(2n-1)\frac{\pi}{2} \;;\; n\in z$

خواص: $tg(-x)=-tgx$ و $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $tg(x+k\pi)=tgx$

- تابع کتانژانت: $y=\cot gx$ و $x\neq n\pi \;;\; n\in z$

توجه: همانطور که دیده شد دوره تناوب تابع سینوس و کسینوس، 2π و دوره متناوب تانژانت و کتانژانت π می‌باشد.

روابط مثلثاتی مهم:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x \quad,\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x \quad,\quad tg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot gx$$

$$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b \quad,\quad \cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$$

$$tg(a\pm b)=\frac{tga\pm tgb}{1\mp tga.\,tgb} \quad,\quad \cot g(a\pm b)=\frac{\cot ga\,.\,\cot gb\pm 1}{\cot ga\mp\cot gb}$$

$$\sin 2a=2\sin a\cos a \quad,\quad \cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$

$$tg2a=\frac{2tga}{1-tg^2a} \quad,\quad \sin 2a=\frac{2tga}{1+tg^2a} \quad,\quad \cos 2a=\frac{1-tg^2a}{1+tg^2a}$$

$$\sec^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}=1+tg^2a \quad,\quad \cos c^2a=\frac{1}{\sin^2 a}=1+\cot g^2a$$

$$\sin a\pm\sin b=2\sin\frac{a\pm b}{2}\cos\frac{a\mp b}{2}$$

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \quad,\quad \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$$

$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)-\cos(a-b)\right)$$

توابع معکوس و معکوس توابع

در تابع $f:D_f\rightarrow R_f$ با ضابطه $y=f(x)$ معکوس تابع، رابطه روبرو است: $f^{-1}:R_f\rightarrow D_f$

اگر تابعی بخواهد معکوس‌پذیر باشد باید حتما یک به یک باشد.

توابع مثلثاتی معکوس:

$$f(x)=\sin x \quad\Rightarrow\quad f^{-1}(x)=Arc\sin x$$

نکات: Arcsinx تابعی صعودی و فرد و $-\frac{\pi}{2}\leq Arc\sin x\leq\frac{\pi}{2}$

$$f(x)=\cos x \quad\Rightarrow\quad f^{-1}(x)=Arc\cos x$$

Arccosx نزولی و تابعی نه زوج و نه فرد است. $0\leq Arc\cos x\leq\pi$

$f(x)=\text{tg}x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=\text{Arctg}x$

Arctgx صعودی و فرد است و $-\frac{\pi}{2}\le \text{Arctg}x \le \frac{\pi}{2}$

برخی روابط:

$$\sin(\text{Arcsin}\,x)=x \quad , \quad \sin(\text{Arccos}\,x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\text{Arccos}\,x)=x \quad , \quad \cos(\text{Arcsin}\,x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$\text{Arcsin}\,x+\text{Arccos}\,x=\frac{\pi}{2}$$

توابع هیپربولک و معکوس هیپربولیک

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad , \quad \text{tgh}x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

$$\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x \quad , \quad \sinh 2x=2\sinh x\cosh x$$

$$\cosh^2 x=\frac{1}{1-\text{tgh}^2 x} \quad , \quad \sinh^2 x=\frac{\text{tgh}^2 x}{1-\text{tgh}^2 x}$$

نکته: اگر در هر یک از اتحادهای مثلثاتی sinx و cosx و tgx را با i sinh x و cosh x و i tgh x (که $i^2=-1$) عوض کنیم، اتحادهای هیپربولیک حاصل می‌شوند.

تابع معکوس sinh x: $\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

تابع coshx دربازه $(-\infty,0]$ نزولی و دربازه $[0,\infty)$ صعودی است. برد آن $[1,\infty)$ می‌باشد. در نتیجه تابع $y=\cosh^{-1}x$ به دو شاخه یک مقداری که به ازای $x\ge 1$ معین هستند تقسیم می‌شوند. لذا:

$$\left(\cosh^{-1}x\right)_1=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) \quad , \quad \left(\cosh^{-1}x\right)_2=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

از آنجا که $\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ پس تابع coshx تابعی زوج است. Sinh x و tgh x نیز توابعی فرد هستند.

تابع معکوس tgh x: $\text{tgh}^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

حد و پیوستگی

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ باشد f را در x=a پیوسته گوئیم.

اگر $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ باشد f را در x=a پیوسته چپ گوئیم.

اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ باشد f را در x=a پیوسته راست گوئیم.

مثال: به ازای کدام مقدار a و b تابع f با ضابطهٔزیر در x=1 پیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-a} & x>1\\ [-x]+b & x\le 1\end{cases}$$

حل: $f\left(1^+\right)=\frac{0}{1-a}=0 \quad , \quad f\left(1^-\right)=-1+b \quad , \quad f(1)=-1+b \quad \Rightarrow \quad b=1, a\ne 1$

نکته: اگر تابع f در x=a حد داشته باشد ولی تعریف نشده باشد، می‌توان با تعریف f(a) برابر حد تابع در x=a تابع را پیوسته کرد. به این نقطه «رفع شدنی» گویند.

مثال: f(2) چند باشد تا تابع $f(x)=\left(\frac{x}{۲}\right)^{\frac{۱}{x-۲}}$ در x=2 پیوسته باشد.

حل: $f(۲)=\lim\limits_{x\to۲}\left(\frac{x}{۲}\right)^{\frac{۱}{x-۲}}=\lim\limits_{x\to\circ}\left(\frac{x+۲}{۲}\right)^{\frac{۱}{x}}=\lim\limits_{x\to\circ}\left(۱+\frac{x}{۲}\right)^{\frac{۱}{x}}=e^{\frac{۱}{۲}}$

مشتق و کاربرد آن

مشتق‌پذیری: تابع f را در x=a مشتق‌پذیر گوئیم هرگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود باشد که آن را مشتق تابع f $\left(f'(a)\right)$ در x=a گوئیم.

(فرمول دوم مشتق $\lim\limits_{x\to\circ}\frac{f(x+a)-f(a)}{x}$)

مشتق راست: $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و مشتق چپ: $f'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

نکته ۱: $f'(a)$ و حد آن $\left(\lim\limits_{x\to a}f'(x)\right)$ لزوماً برابر نیستند.

نکته ۲: برای محاسبهٔ برخی مشتق‌ها استفاده از تعریف مناسب‌تر است.

مثال: اگر تابع f در شرط روبرو صدق کند، $f'(a)$ کدام است؟

$$\forall x,y\in R: f(x+y)=f(x)+f(y)+xy \quad , \quad \lim\frac{f(x)}{x}=b$$

حل: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to\circ}\frac{f(x+a)-f(a)}{x}=\lim\frac{f(x)+f(a)+xa-f(a)}{x}=\lim\limits_{x\to\circ}\left(\frac{f(x)}{x}+a\right)=b+a$

همانطور که در مثال دیده شد گاهی در حل مسایل لازم است از فرمول دوم مشتق استفاده کنیم.

نکته: از آنجا که مشتق شیب خط مماس در نقطهٔ مفروض است لذا جهت محاسبه معادلهٔ خط‌های مماس یا عمود بر منحنی‌ها از آن استفاده می‌شود.

قضایای مشتق:

۱- مشتق مجموع تعداد متناهی از توابع برابر مجموع مشتقات آنهاست: $(u+v+...+w)'=u'+v'+...+w'$

۲- مشتق حاصل‌ضرب دو تابع: $(uv)'=u'v+uv'$ به همین صورت: $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$

۳- مشتق خارج قسمت دو تابع: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^۲}$ به همین صورت: $\left(\frac{۱}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^۲}$

٤- مشتق تابع مرکب: $\left(f(g(x))\right)'=g'(x)f'(g(x))$

نکته: مشتق توابعی که به صورت حاصلضرب می‌باشند و نیز توابع توانی را می‌توان با گرفتن Ln و استفاده از فرمول بالا، محاسبه کرد.

مثال: مشتق تابع $y=\sin x^{\cos x}$ را محاسبه کنید.

حل: $Lny=\cos x\left(Ln\sin x\right)$ حال از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$\frac{y'}{y}=-\sin x\left(Ln\sin x\right)+\cos x\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) \quad \Rightarrow \quad y'=\sin x^{\cos x}\left(\frac{\cos^{2} x}{\sin x}-\sin x\left(Ln\sin x\right)\right)$$

۵- مشتق تابع معکوس: $\left(f^{-1}(x)\right)'=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

مشتقات معروف:

$$\left(x^{x}\right)'=x^{x}\left(1+Lnx\right) \quad , \quad \left(a^{x}\right)'=a^{x}Lna$$

$$\left(Arc\cos x\right)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^{2}}} \quad , \left(Arc\sin x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$\left(tgx\right)'=1+tg^{2}x \quad , \quad \left(Arctgx\right)'=\frac{1}{1+x^{2}} \quad ; \quad \left(\cot gx\right)'=-\left(1+\cot g^{2}x\right) \quad , \quad \left(Arc\cot gx\right)'=\frac{-1}{1+x^{2}}$$

مشتق n ام: $\left(\sin x\right)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \quad , \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n}\,n!}{x^{n+1}}$

$$\left(\sinh x\right)'=\cosh x \quad , \quad \left(\cosh x\right)'=\sinh x$$

نکته: زاویهٔ بین دو خط $y=mx+h$ و $y=m'x+h'$ برابر است با: $tg\theta=\left|\dfrac{m-m'}{1+mm'}\right|$

- اگر $mm'=-1$ باشد دو خط بر هم عمودند.

نکته: فاصله نقطه $\left(x_{0},y_{0}\right)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با: $AH=\dfrac{\left|ax_{0}+by_{0}+c\right|}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}$

برای یافتن معادلهٔ خط مماس بر منحنی از نقطه‌ای خارج از منحنی، رابطهٔ $\dfrac{f(x)-y_{1}}{x-x_{1}}=f'(x)$ را استفاده می‌نمائیم. و نقطهٔ مماس $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ و شیب را می‌یابیم سپس از رابطهٔ $y-b=f'(x)(x-a)$ معادله را می‌نویسیم.

برای یافتن معادلهٔ خط عمود بر منحنی از نقطهٔ خارج آن از رابطهٔ $\dfrac{F(X)-y_{1}}{x-x_{1}}=\dfrac{-1}{f(x)}$ استفاده می‌کنیم.

قاعدهٔ هوپیتال:

در محاسبه حدهای مبهم ($\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ یا 1^{∞} یا ...) می‌توان از آن استفاده کرد: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

شرط استفاده از این قاعده، مشتق‌پذیری f و g در a است.

نکته: در محاسبهٔ حدهای 1^{∞} یا مشابه باید از دو طرف ln بگیریم و با ایجاد کسر فوق، از قاعدهٔ هوپیتال استفاده نمائیم.

سری تیلور: $f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\dots+c_n(x-a)^n+\dots \quad ; \quad c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

بسط مک لورن: $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$

بسط‌های مهم: $Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots \qquad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\frac{x^n}{n!}+\dots$

$$\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1!)}+\dots \qquad \cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots$$

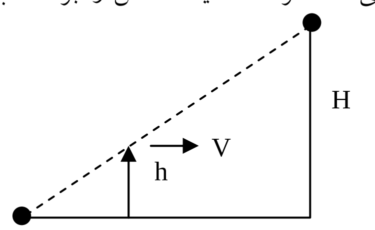
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots \quad , \quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$$

مشتق تابع قدر مطلق:

$$g(x)=|f(x)| \Rightarrow g'(x)=f'(x)\frac{f(x)}{|f(x)|}$$

آهنگ تغییر کمیت‌های وابسته: برای حل مسایل مربوط به این قسمت ابتدا باید تابع ضمنی را بیابید سپس نسبت به متغیر خواسته شده مشتق بگیرید.

مثال: در شکل، شخصی با قد H و با سرعت V به سمت تیر چراغی به ارتفاع H حرکت می‌کند. سرعت سایهٔ شخص را بر حسب h و H و V به دست آورید. (به مقادیر ثابت و متغیر باید دقت کنید)



حل: فاصله سایه سر تا چراغ= y و فاصلهٔ شخص تا چراغ= x

$$\Rightarrow \quad \frac{y-x}{y}=\frac{h}{H} \quad \Rightarrow \quad (H-h)y-Hx=0 \quad , \quad \frac{dx}{dt}=V \quad \Rightarrow \quad -H\frac{dx}{dt}+(H-h)\frac{dy}{dt}=0 \quad \frac{dy}{dt}=\frac{H}{H-h}V$$

نکته: اگر بین x و y رابطهٔ $f(x,y)=0$ برقرار باشد در این صورت مشتق y برابر است با: $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$

نقاط بحرانی:

نقطه‌ای که در آن یکی از دو شرط روبرو برقرار باشد: ۱) $f'(a)=0$ ۲) $f'(a)$ موجود نباشد.

انواع نقاط بحرانی:

- نقاط ناپیوستگی تابع
- نقاط زاویه‌دار (نکته: زاویهٔ بین دو مماس برابر است با : $tg\alpha=\left|\frac{f_1'(a)-f_2'(a)}{1+f_1'(a)f_2'(a)}\right|$)
- نقاط بازگشت: مشتق‌های چپ و راست مختلف العلامه
- نقاط عطف قائم: مشتق‌های چپ و راست هم علامت- تقعر منحنی تغییر می‌کند. ("y تغییر علامت می‌دهد)
- نقاط عطف افقی: مشتق‌های چپ و راست مختلف‌العلامه- تقعر منحنی تغییر می‌کند ("y تغییر علامت می‌دهد)
- نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی: مشتق صفر و تغییر علامت مشتق

قضیه رل: اگر تابع f در بازه [a, b] پیوسته و در بازهٔ (a, b) مشتق‌پذیر باشد و نیز f(a)= f(b) آنگاه وجود دارد یک نقطهٔ c در بازه (a, b) بـه قسمی که $f'(c)=0$.

قضیه مقدار میانگین: اگر تابع f در بازه [a, b] پیوسته و در (a, b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه وجـود دارد نقطـهٔ c در بـازهٔ (a, b) بـه طـوری کـه $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

قضیهٔ کوشی: تعمیم قضیهٔ مقدار میانگین، اگر f و g پیوسته ودر (a, b) مشتق‌پذیر باشند $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

مثال: مقدار c در قضیهٔ مقدار میانگین تابع $f(x)=\operatorname{Arcsin}x$ وقتی $۰\le x\le ۱$ باشد را تعیین کنید.

حل:

$$f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}\quad ;\quad f(۰)=۰\quad ,\quad f(۱)=\frac{\pi}{۲}\quad\Rightarrow\quad \frac{۱}{\sqrt{۱-c^۲}}=\frac{\frac{\pi}{۲}-۰}{۱-۰}\quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{۱-\frac{۴}{\pi^۲}}$$

قضیه نامساوی: اگر g و f در بازهٔ (a,∞) مشتق‌پذیر بوده و به ازای هـر x>a داشـته باشـیم $f'(x)\ge g'(x)$ همچنـین f و g در x=a دارای مقادیر مساوی باشند آنگاه خواهیم داشت $f(x)\ge g(x)$.

قضیه مقدار میانی: اگر تابع f در بازه [a, b] پیوسته باشد آنگاه f(x) هر مقداری را بین f(a) و f(b) در بازه [a, b] اختیار می‌کند.

مثال: تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x\sin x=۱$ را در بازه $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ تعیین کنید.

$$f(x)=x\sin x\quad ;\quad f(۰)=۰\quad ,\quad f\left(\frac{\pi}{۲}\right)=\frac{\pi}{۲}$$

در نتیجه چون $۱\in\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ است و همچنین f(x) صعودی است در نتیجه در این بازه معادله دقیقاً یک ریشه دارد.

قضیه تله موش:

اگر f و g در x=a دارای حدی برابر باشند (L) و در یک همسایگی a داشته باشیم: $h(x)\le f(x)\le g(x)$ در این صورت تابع f نیز در x=a دارای حدی برابر L است.

نمونه سوالات

۱- حد مقابل کدام است؟ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\operatorname{Arctg}x-\operatorname{Arcsin}x}{x^۳}$

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ٤) $-\frac{۱}{۳}$

۲- تابع f در رابطه $f(x)=\begin{cases}x^۲-۲\operatorname{Ln}x & x\ne ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ صدق می‌کند. کدام صحیح است؟

۱) f تنها دارای دو مینیمم نسبی است
۲) f دارای نقطه عطف است
۳) معادلهٔ $f(x)=\frac{\pi}{۳}$ دو ریشهٔ حقیقی دارد
٤) معادله $f(x)=x$ دو ریشهٔ حقیقی داد

۳- اگر $\forall x,y\in\mathbb{R}: f(x,y)=f(x)f(y)$ و $f(۰)\ne ۰$ آنگاه دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{f(x)}}$ کدام است؟

۱) R ۲) $[۰,\infty)$ ۳) $[-۱,۱]$ ٤) $\{۰\}$

٤- مشتق دهم تابع $f(x)=x^۲e^{(x-۱)}$ در $x=۱$ کدام است؟

۱) ۹۱ ۲) ۱۰۱ ۳) ۱۱۱ ٤) ۱۲۱

۵- ضریب زاویهٔ خط قائم بر منحنی تابع معکوس تابع $y=f(x)$ در هر نقطه (x, y) روی آن برابر $2y+1$ می‌باشد. اگر $f(0)=1$ باشد. $f(2)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵- ۳) ۶- ۴) ۷

حل نمونه سؤالات:

۱-۲: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\text{Arctg}x-\text{Arc}\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)-\left(x+\frac{1}{6}x^3\right)}{x^3}=-\frac{1}{2}$$

۲-٤: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=0\Rightarrow x=\pm 1 \quad ; \quad y=1 \qquad \lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0}f(x)=+\infty$$

نقطه‌های $(0,0)$ و $(-1,1)$ و $(1,1)$ همه مینیمم نسبی هستند و $f''(x)=2+\frac{2}{x^2}>0$ منحنی نقطهٔ عطف ندارد.

معادلهٔ $f(x)=\frac{\pi}{3}>1$ دارای چهار ریشهٔ حقیقی است. معادلهٔ $f(x)=x$ دو ریشهٔ حقیقی مثبت یکی $x_1=1$ و دیگری $x_2>1$ دارد.

۳-۱: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$f(x)=a^x \qquad g(x)=a^{-\frac{x}{2}} \qquad \Rightarrow \quad D_g=\mathbb{R}$$

٤-۳: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$f(x+1)=(x+1)^2e^x \quad\Rightarrow\quad f(x+1)=(x^2+2x+1)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots) \quad C_{10}=\frac{1}{8!}+\frac{2}{9!}+\frac{1}{10!}$$

$$\Rightarrow\quad f^{(10)}(1)=10!C_{10}=111$$

۵-۲: صحیح است. با استفاده از مک لورن توابع

$$m=-\frac{1}{(f^{-1})'}=-f'(y)=2y+1 \quad\Rightarrow\quad f(y)=-y^2-y+c \qquad f(0)=c=1 \quad\Rightarrow\quad f(y)=-y^2-y+1 \quad\Rightarrow\quad f(2)=-5$$